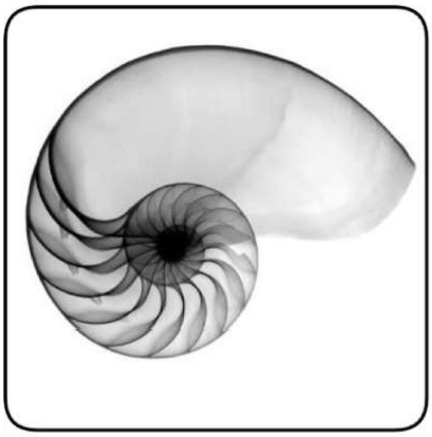
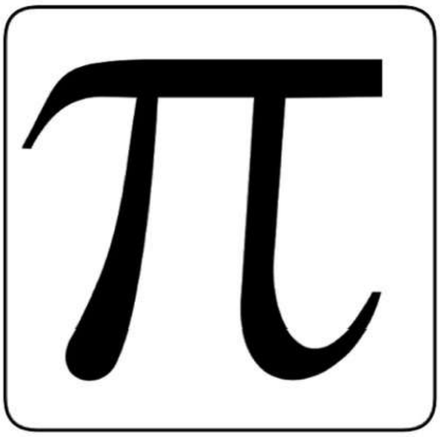
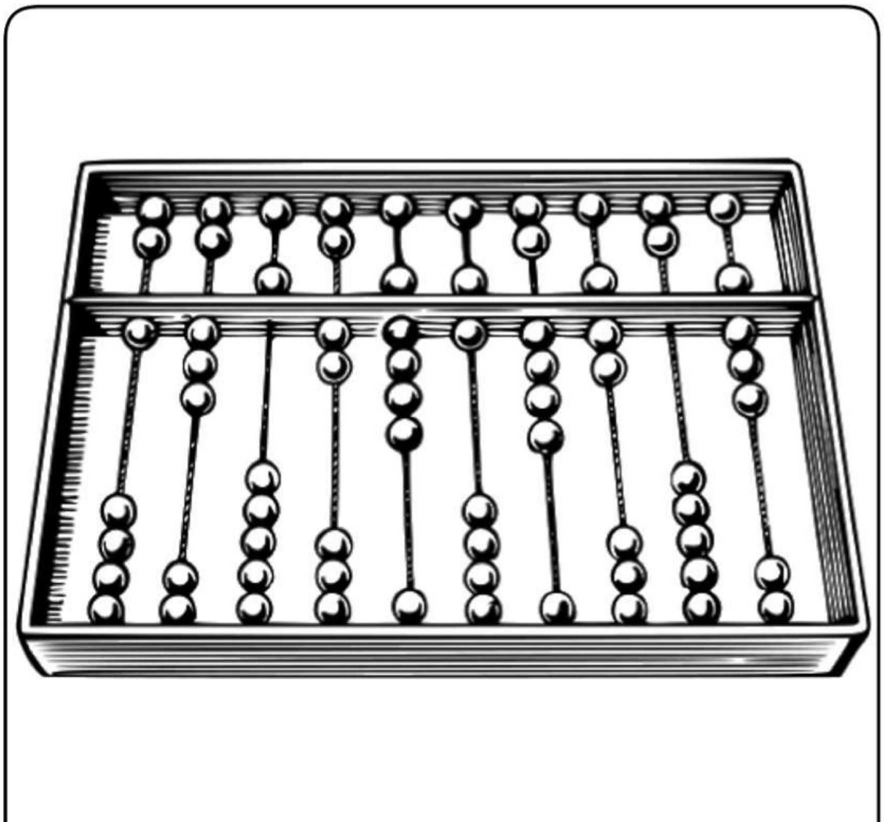
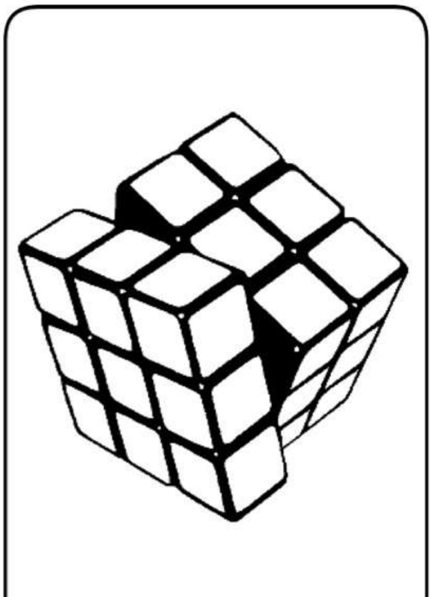
PEDRO FRANCO DE SÁ
ADRIELLE CRISTINE MENDELLO LOPES
(ORGANIZADORES)

Aspectos históricos da Matemática Elementar

Belém - Pará

Pedro Franco de Sá
Adrielle Cristine Mendello Lopes
(Organizadores)

Aspectos Históricos da Matemática Elementar

CCSE – UEPA
Belém – Pará

Arte da Capa:

Adrielle Cristine Mendello Lopes

Ficha catalográfica

Aspectos históricos da matemática elementar / Organizadores: Pedro Franco de Sá, Adrielle Cristine Mendello Lopes. Belém: CCSE-UEPA, 2018.

p. 119

Inclui bibliografias

ISBN: 978-85-98249-33-9

1. Matemática Elementar. 2. História da Matemática. I. Pedro Franco de Sá (Org). II. Adrielle Cristine Mendello Lopes (Org).

Aspectos Históricos da Matemática Elementar

Adrielle Cristine Mendello Lopes; Ana Mara Coelho da Silva; Benedita das Graças Sardinha da Silva; Fábio José da Costa Alves; Hugo Carlos Machado da Silva; Lília Cristina dos Santos Alves Diniz; Neusa de Oliveira Santos; Pedro Franco de Sá; Tássia Cristina da Silva Pinheiro.

Belém – Pará

2018

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Apresento o livro "Aspectos históricos da Matemática Elementar" organizado por Adrielle Cristine Mendello Lopes e Pedro Franco de Sá, que creio ajudará a produzir muita satisfação, pessoal e profissional, em muitos professores de matemática, visto que, os organizadores referidos, anteriormente, são bastante competentes e dedicados na busca de transformar, para melhor, o trabalho docente de professores que atuam na educação básica, em escolas públicas e privadas. Esclareço que faço este prefácio na qualidade de aprendiz, ter o privilégio de ler, em primeira mão, as modificações que ocorreram na matemática elementar no decorrer dos tempos e ter bem claro, nos cinco textos, que os professores precisam assenhorear-se da história da matemática, para utilizá-la em conjunto com a pesquisa, com o fim de produzir um ensino mais dinâmico, atrativo e de excelente qualidade.

A obra se constitui de cinco textos, escritos a várias mãos, que percorrem desde o período da antiguidade até chegar aos dias atuais, para abordar o movimento histórico das equações algébricas e seus métodos de resolução.

O primeiro texto, elaborado por meio da pesquisa bibliográfica, trata do desenvolvimento das equações algébricas, mediante vários métodos, com objetivo de resolver tais equações em contextos diferentes, como: Egito, Mesopotâmia (Babilônicos), China, Índia, Grécia antiga até chegar à Europa, mais precisamente à Itália, nos séculos XVI a XIX, para mostrar as influências do desenvolvimento da álgebra em vários seguimentos. O ponto positivo que os autores tentam trazer nesse estudo é o uso de linguagem e simbolismos da realidade atual da matemática.

O segundo texto utiliza a pesquisa bibliográfica com o propósito de abordar o percurso histórico dos números reais. Para tanto, os autores partem de estudos efetivados na Grécia, e em séculos posteriores, sobre os números irracionais, com o objetivo de adentrar nos números reais. Avançam por questões como as origens da expressão número real, bem como evidenciam a aritmetização da análise que se impõe na primeira metade do século XIX para tentar definir número real, o que só foi conseguido na segunda metade desse século, definição esta que se firma no século XX. Além disso, trazem as possibilidades didáticas, de por meio da história da matemática ensinar os números reais.

No terceiro texto, o estudo bibliográfico tem o objetivo de resgatar a trajetória histórica da teoria das matrizes, em que os autores encontram o seu início, em termos de registro, na

China até chegar à Europa Moderna, em que demonstram diversas contribuições de matemáticos para o desenvolvimento das Matrizes.

No quarto texto, resultado também de pesquisa bibliográfica, os autores buscam mostrar as operações aritméticas fundamentais, evidenciam o instrumento de cálculo aritmético mais usado pelos povos e civilizações, como o ábaco e tábuas de multiplicação para realizar tais operações, mesmo com todas as suas limitações. No percurso histórico da matemática passam por vários períodos, desde a pré-história, para acompanhar o desenvolvimento, desde a sua não representação escrita até a formulação de procedimentos, métodos e técnicas algorítmicas que aproveitamos, atualmente, dessas operações em termos de nomenclatura e símbolos numéricos.

O quinto texto, que versa sobre "História dos Sistemas de numeração", resulta de pesquisa bibliográfica. Nele, existe a preocupação de ressaltar, por meio da história da matemática, o conceito, como foi transformando-se o número, as estratégias, alternativas e mecanismos criados, em diferentes épocas e civilizações, até criar o sistema de numeração que adotamos no contexto atual.

Pelo que se observa nesta obra coletiva, faz-se presente um esforço latente dos autores em chamar a atenção dos professores de matemática no sentido de utilizar a história desta quando se trabalha com a matemática elementar.

Ao leitor, convido-o a empenhar-se na reflexão partilhada pelos autores nesta obra, que, por certo, produzirá outros sentidos e significados que a leitura do livro virtual provocará ao apropriar-se de conhecimentos matemáticos que poderão instaurar outros exercícios profissionais aos que têm na docência o seu campo de trabalho.

Albêne Lis Monteiro
Belém, abril de 2018

RAÍZES HISTÓRICAS DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Lília Cristina dos Santos Diniz Alves
Hugo Carlos Machado da Silva
Pedro Franco de Sá

Resumo:
Este trabalho apresenta resultados de pesquisa bibliográfica que teve como objetivo realizar um levantamento sobre o desenvolvimento histórico das equações algébricas. Para tanto, buscamos embasamento teórico principalmente nos escritos de Boyer (1996), Eves (2004) e Smith (1958). A leitura e análise destas obras nos permitiu perceber que desde a antiguidade, com os povos egípcios, babilônios, chineses, dentre outros, o pensamento algébrico sobre resoluções de equações já era bem desenvolvido mesmo que não nos termos práticos atuais. Passando por alguns pensamentos de matemáticos que tiveram grande contribuição no desenvolvimento do assunto, como Bhāskara, Girolamo Cardano, e Nicollo Fontana, este trabalho descreve alguns dos variados métodos que já foram e são até hoje utilizados para a resolução de equações algébricas.

Palavras-chave: História da matemática, Equações algébricas, métodos de resolução de equações.

INTRODUÇÃO

Resolver uma equação sempre foi um desafio desde os primórdios dos conhecimentos matemáticos, na atualidade possuímos métodos práticos para resoluções de muitas delas, porém nem sempre foi assim (SMITH, 1958, p.437), várias formas de resolver equações foram desenvolvidas ao longo dos anos por diferentes povos e contextos.

Ao regressar alguns séculos na história, percebemos que o desenvolvimento das sociedades antigas, vistas como berços da civilização, desencadearam descobertas que levaram ao desenvolvimento da ciência. Houve um momento em que conhecimentos sobre agricultura, e construções de barragens, cultivo da terra, sistemas de irrigação principalmente no oriente médio suscitaram um amadurecimento de algumas ideias matemáticas contidas em calendários e tabelas ou tábuas que guardavam dados utilizados na previsão de períodos das enchentes, pois devido à escassez de chuvas, o momento para a captação de água proveniente delas devia ser preciso.

É a partir dessas necessidades que os métodos de resolução de problemas utilizando ideias matemáticas se desenvolveram, e é a partir desse contexto que temos o intuito de conhecer como se deu o desenvolvimento das equações algébricas.

Neste texto, apresentamos os resultados de uma pesquisa bibliográfica que teve como objetivo realizar um levantamento sobre o desenvolvimento histórico das equações algébricas, assim nossos suportes teóricos estão nas obras de historiadores da matemática, a exemplo de Boyer (1996), Smith (1958) e Eves (2004).

Daremos ênfase aos métodos de resolução para equações algébricas dos povos antigos e atuais, percebendo os problemas que levaram até as noções de tais equações. Dessa forma, emergem os contextos e situações que originam o uso de métodos para resolver equações.

Optamos por usar linguagem e simbolismos atuais da matemática para descrever os procedimentos que eram desenvolvidos para a resolução de equações, pois encontramos variadas formas de escrita, de simbologia e de sistemas de numeração. Assim, tivemos que reescrever ou adaptar a maioria destas para a linguagem que conhecemos hoje, de forma a facilitar o maior entendimento do leitor, visto que nosso intuito é o de expor como eram os procedimentos para resolver equações. Portanto, a linguagem exposta em nosso texto não é necessariamente a literal utilizada na época em que nos referiremos.

O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO NO EGITO

No Egito, a forma mais comum de registro era feita por escritos principalmente em papiros, Boyer (1996, p. 30) destaca que esses se configuram como a principal via de acesso aos registros produzidos por esta sociedade antiga.

Através destes registros, ficou claro que os egípcios possuíam familiaridade em matemática com grandes quantidades, conheciam e manipulavam bastante as frações, e com essas tinham facilidade em trabalhar, principalmente com metades e terços. Na realidade, as frações unitárias e seus complementos, os de forma $\frac{n}{n+1}$, em especial a fração $\frac{2}{3}$ eram as que os egípcios possuíam maior habilidade em lidar (BOYER; MERZBACH, 2012, p.31).

Além dessa habilidade admirável com as operações aritméticas, os egípcios também operavam com problemas que não necessariamente se referiam a objetos concretos como no caso da divisão de pães comumente praticada no cotidiano dessa sociedade. Estes novos problemas também não exigiam operações entre números já conhecidos, segundo Boyer (1996) estes problemas merecem ser designados por algébricos, e requerem resoluções equivalentes a soluções de equações.

O método de resolução destes problemas normalmente usado pelos egípcios era o método da falsa posição, que se caracterizava por assumir um valor provavelmente falso para a incógnita, naquele contexto, chamada de *aha* e a partir de aproximações com resultado faziam-se as operações necessárias, ou seja, a partir de um valor para *aha* determinar as operações a se fazer até que se satisfizesse a igualdade posta.

Abaixo apresentamos um problema simples que elaboramos, em notação atual, somente para o melhor entendimento do leitor sobre como eram as resoluções utilizando o método da falsa posição.

Quadro 1 - descrição sintetizada do método da falsa posição

	Representação textual	**Representação algébrica**
Problema	Um número e o seu quadruplo somados resultam em 20. Qual é esse número?	$x + 4x = 20$
Procedimentos	Atribuição de um valor para a incógnita, provavelmente falso, nesse caso escolhemos o número 2	$x + 4x = 20$ $2 + 4.2 = 20$ $10 \neq 20$
	Correção do valor atribuído a partir de proporções e comparações.	$\frac{10}{2} = \frac{20}{x}$ $x = 4$

Fonte: os próprios autores.

Um documento considerado um dos mais antigos, trata deste método é o chamado Papiro de Rhind ou de Ahmes datado no ano de 1650 a.C. Esse documento contém 85 problemas copiados em escrita hierática por um escriba chamado Ahmes.

Segundo Boyer (1996, p.9) o papiro foi comprado em 1854 a. C em uma cidade à beira do rio Nilo pelo escocês Henry Rhind, por isso é também chamado de papiro de Rhind em homenagem ao escocês. Dentre os 85 problemas contidos nesse papiro se encontram alguns envolvendo equações advindas de situações práticas do cotidiano dos egípcios.

Boyer (1996, p.12) expõe que ´O prob.24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19´ e a resolução para este problema era efetuada da seguinte maneira.

Numa escrita próxima a de que temos atualmente, teríamos para o problema a equação

$$aha + \frac{1}{7} aha = 19$$

Quadro 2 - Resolução do problema 24 do papiro de Rhind

	Representação textual	**Representação algébrica**
Problema	O valor de *aha* sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19	$x + \frac{1}{7}x = 19$
Procedimentos	Assumindo o valor 7 para a incógnita, um valor aleatório como dissemos, provavelmente falso, teríamos	$7 + \frac{1}{7}7 = 19$ $8 \neq 19$
	Correção do valor atribuído a partir de proporções e comparações, pois o resultado deu 8 e não 19 como queríamos, é nesse momento que são feitas as manipulações para se chegar ao valor que queremos, 19. Como $8\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19$ deve-se, então multiplicar 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ para obter a resposta correta.	$\frac{8}{7} = \frac{19}{x}$ $x = 16{,}625$

Fonte: Os próprios autores.

Noutro exemplo, o problema 25 do papiro pede uma determinada quantidade sabendo que esta quantidade e sua metade somam 16. Em notações atuais teríamos

Quadro 3 - Resolução do problema 25 do papiro de Rhind

	Representação textual	**Representação algébrica**
Problema	Uma determinada quantidade sabendo que esta quantidade e sua metade somam 16	$x + \frac{1}{2}x = 16$
Procedimentos	Assumindo um valor, falso para a incógnita, digamos 2, temos	$2 + \frac{1}{2}2 = 16$ $3 \neq 16$
	Correção do valor atribuído a partir de proporções e comparações, como 3 deve ser multiplicado por $\frac{16}{3}$ para obtermos 16, o valor correto da incógnita deve ser o valor falso que assumimos inicialmente, 2, multiplicado por $\frac{16}{3}$, isto é, $\frac{32}{3}$.	$\frac{3}{2} = \frac{16}{x}$ $x = \frac{16}{3}.2$ $x = \frac{32}{3}$

Fonte: Os próprios autores.

O método da falsa posição é utilizado na maioria dos problemas deste tipo, porém Eves (2004) afirma que no papiro de Rhind também há o uso da fatoração como forma de se chegar a solução como é o caso da equação

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$$

que é resolvida, segundo Eves (2004), fatorando o primeiro membro, assim teríamos

$$x(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}) = 37$$

E depois dividindo 37 por $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, o resultado de x seria $16 + \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Podemos perceber, por meio das resoluções contidas no papiro de Rhind, que os egípcios dominavam bem a solução de problemas que continham equações lineares ou equações do 1º grau, mesmo que naquela época não houvesse esta nomenclatura e nem os métodos de resolução que utilizamos hoje. Portanto podemos dizer que as equações já se faziam presentes no conhecimento dos povos antigos.

AS TÁBUAS DA MESOPOTÂMIA

Os principais registros na Mesopotâmia foram deixados por meio de escrita cuneiforme em tábuas de argila, estas eram mais resistentes do que os papiros egípcios, por isso foi possível encontrar muito mais documentação da matemática da Mesopotâmia do que a encontrada no Egito (BOYER; MERZBACH, 2012, p.40).

Convencionou-se chamar as civilizações da Mesopotâmia de *babilônias*, apesar de a cidade da Babilônia não ser o centro da cultura dos povos daquela região. Portanto ao falarmos sobre a matemática desenvolvida na Mesopotâmia a denominaremos de matemática dos babilônios. Esta, por sua vez, possui traços característicos e fundamentais no desenvolvimento da escrita e do pensamento matemático, a numeração com valor posicional, por exemplo, se configura como um dos maiores feitos que contribuíram para o progresso das sociedades, e é usado até hoje, porém a base de nosso sistema de numeração é a decimal e a dos babilônios era a sexagesimal, base 60.

As formas de resolução de problemas que envolviam equações nesse período já estavam bem desenvolvidas, conforme afirma Eves (2004):

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo

> método equivalente ao de substituição numa formula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro) (EVES, 2004, p.62)

Para o tratamento dos problemas que envolviam equações lineares, geralmente advindas dos problemas cotidianos, podemos visualizar isso em um dos problemas expostos por Boyer e Merzbach (2012, p. 44) que trata sobre o peso de uma pedra, enuncia´´ o peso x de uma pedra se $(x + \frac{x}{7}) + \frac{1}{11}(x + \frac{x}{3})$ é uma mina. Há também achados de problemas que envolvem equações lineares simultâneas como ´´$\frac{1}{4}$ da largura + comprimento = 7 mãos e comprimento + largura = 10 mãos´´. Se adaptássemos para a linguagem utilizada atualmente, assumindo o valor x para largura e y para o comprimento, teríamos as equações:

$$\frac{1}{4}x + y = 7$$

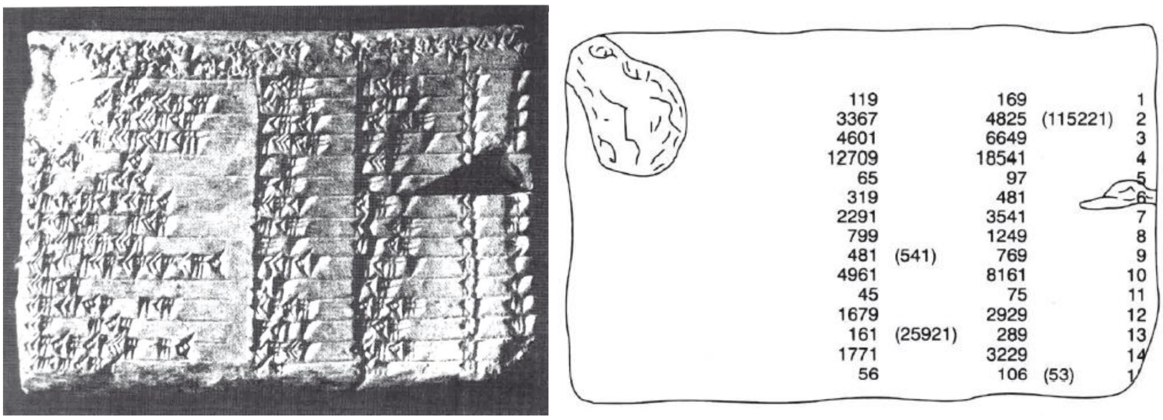
$$x + y = 10$$

O método de resolução descrito por Boyer e Merzbach (2012, p. 44) é primeiramente substituindo cada ´mão´ por 5 ´dedos´ e então observando que uma largura de 20 dedos e um comprimento de 30 dedos satisfazes simultaneamente as duas equações.

Esse exemplo mostra que a ideia de sistemas de equações lineares já permeava o pensamento matemático produzido pelos babilônios, que ainda possuíam um método alternativo para resolução desse mesmo problema, esse consistia em exprimir todas as dimensões em termos de ´´mãos´´, assim a equação que representa o pensamento é $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Ao subtrair a segunda da primeira obteremos o resultado $3x = 18$, logo $x = 6$, e $y = 4$, como esses valores representam a quantidade de mãos, então teríamos 30 (6x5) dedos de comprimento e 20 (4x5) dedos de largura. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 44)

Mais característico desse período era o uso de tábuas que continham dados que usualmente se faziam necessários na resolução de alguns problemas. Boyer (1996, p.21) relata que os escribas recorriam frequentemente as tabelas de multiplicação de recíprocos, de quadrados e cubos e as de raízes quadrada e cúbicas que estavam disponíveis em toda parte, Eves (2004, p.62) já expõe que além da tábua de quadrados e cubos dos inteiros de 1 a 30, também existia a da sequência de valores de $n^2 + n^3$ correspondente a esse intervalo. Muitos problemas que levavam a cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$ podiam ser resolvidos usando a tábua de $n^3 + n^2$. Abaixo, mostramos na figura 1 um exemplo de como eram essas tábuas.

Figura 1 - tábua de números e sua representação nos dias atuais



Fonte: adaptado de Eves (2004, p. 64 e 65)

Para Boyer e Merzbach (2012, p. 43) as tabelas possuíam muita utilidade para os babilônios na resolução dos problemas. Esta civilização tinha habilidade com a álgebra, pois desenvolviam operações flexíveis tais como: transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores.

As equações quadráticas eram geradas a partir de alguns problemas tais como determinar um lado de um quadrado se a área menos o lado dá 870, o equivalente a resolver $x^2 - x = 870$. A resolução deste problema, mostrado por Boyer(1996, p.23) é assim:

Figura 2 - Instruções da resolução babilônia da equação do 2º grau

Tome a metade de 1, que é $\frac{1}{2}$

Multiplique $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{1}{2}$ *o que dá* $\frac{1}{4}$

Some isto a 870, o que dá 870 $\frac{1}{4}$

Isso é o quadrado de 29 $\frac{1}{2}$

Agora some $\frac{1}{2}$ *a 29* $\frac{1}{2}$ *e o resultado é 30*

30 é o lado do quadrado.

Fonte: adaptado de Boyer (1996)

A solução é equivalente exatamente a fórmula $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$. Outro exemplo é a resolução da equação $11x^2 + 7x = 375$, que se multiplicada por 11 fica

$$(11x)^2 + 7(11x) = 4125$$

Esse procedimento é feito para que a equação fique reduzida ao tipo padrão

$$x^2 + px = q$$

Essa é uma quadrática em forma normal para a incógnita $y = 11x$ e a solução para y é achada pela fórmula $\sqrt{(p/2)^2 + q}$ - $p/2$ e dela se calcula o valor de x desejado. Essa solução é um grande exemplo de uso de transformações algébricas, o que revela a habilidade matemática dos babilônios.

Outro tipo de problemas que envolviam equações do 2º grau e que frequentemente apareciam nos textos babilônios eram os que se pedia para achar dois números dados seu produto e, sua soma ou diferença, isso é equivalente a um sistema simultâneo $x + y = p$ e $xy = q$, na qual a resolução envolve quadráticas (BOYER, 1996, p. 24).

Para a resolução de alguns tipos de equações cúbicas, novamente os babilônios recorriam as informações contidas nas tabelas, para as cúbicas puras como $x^3 = 0; 7{,}30$ eram resolvidas por consulta direta nas tabelas de cubos e raízes cúbicas onde a solução $x = 0; 30$ era encontrada. As cúbicas da forma $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, utilizando a tabela $n^3 + n^2$ conforme já mencionamos anteriormente. Para casos ainda mais gerais como $144x^3 + 12x^2 = 21$, os babilônios usavam uma substituição multiplicando ambos os membros por 12 e usando y =12x, a equação fica $y^3 + y^2 = 252$, da qual com uma simples consulta a tabela, achavam $y = 6$ e consequentemente $x = \frac{1}{2}$. Assim, por meio dessas habilidades de manipulação algébricas, os babilônios resolviam cúbicas de várias formas.

As da forma $ax^3 + bx^2 = c$ são redutíveis, ao multiplicar toda a equação por $\frac{a^2}{b^2}$ se chega a forma $(\frac{ax}{b})^3 + (\frac{ax}{b})^2 = c\,\frac{a^2}{b^2}$ cúbica do tipo padrão na incógnita $\frac{ax}{b}$, com consulta a tabela descobre-se o valor dessa incógnita e assim descobre-se o valor de x.

Para Boyer (1996, p.25), a álgebra babilônia havia alcançado um nível de abstração e de manipulações muito alto, as equações de forma $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^2 + bx^4 = c$ eram reconhecidas como sendo apenas equações quadráticas disfarçadas.

Os babilônios eram sem dúvida incansáveis construtores de tábuas, com elas eles se consolidaram como calculistas extremamente hábeis principalmente em álgebra, e por meio dessas habilidades conseguiam manipular várias equações da forma em que queriam.

Outras sociedades que demonstraram um vasto conhecimento matemático, cabe mencionar aqui a China e Índia.

O MÉTODO DE RESOLUÇÃO CHINÊS

Na China também foram desenvolvidas formas de resolução de equações, Boyer (1996) afirma que é difícil datar o período dos documentos que trazem os registros dessa civilização, porém é provável que estejam entre o ano de 2000 e 1000 a. C.

Um importante escrito matemático chinês foi o *Chi-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte da matemática*. Neste documento há 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharias, impostos, Cálculos e solução de equações.

Os chineses, assim como os egípcios, possuíam o costume de reunir coleções de problemas específicos de determinado assunto, outra semelhança é enquanto ao uso do método da falsa posição para resolução de problemas. Contudo, Boyer (1996) afirma que apesar das semelhanças a origem do pensamento matemático dos chineses não possui influência ocidental.

Segundo Boyer (1996), os chineses gostavam especialmente de diagramas ou tabelas de números organizados em linhas e colunas para assim fazer os cálculos. Em os *Nove capítulos sobre a arte da matemática* um sistema de equações simultâneas é resolvido através de operações dentro de um diagrama montado a partir do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

Para representar os números usados; em termos de matriz ou tabela, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

O método de resolução de um livro-texto atual pode ser transformar em uma matriz triangular, por meio de múltiplas subtrações de linhas ou colunas de cada uma. Isso é aproximadamente o que o método fazia. Segue a explicação.

Primeiro notamos o que temos, assim multiplicamos a coluna do meio por 3, o primeiro número da última coluna, depois disso subtraímos a coluna da direita (a menor) da do meio, repetidamente. Os passos são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow \text{multiplicação} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1^{\text{a}}\text{ subtração}\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow 2^{\text{a}}\text{ subtração}\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

E assim sucessivamente até chegarmos ao resultado final. Ao efetuar as operações os chineses tinham intuito em reduzir $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$ pois essa última, conforme os procedimentos, representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais podem ser calculados os valores de z, y e x, através das devidas substituições um a um.

Boyer (1996, p. 149) ainda descreve um método de resolução que envolve transformações chamado de *Fan-fa*, para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, por exemplo, primeiro se obtem $x = 19$ como aproximação(uma raiz cai entre $x = 19$ e $x = 20$), depois se usa o Fan-fa, nesse caso a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y - 143 = 0$ (com raiz entre $y = 0$ e $y = 1$). A raiz dessa é dada por $y = \frac{143}{(1+290)}$ daí o valor correspondente de x é 19 $\frac{143}{(1+290)}$.

Para a equação cúbica $x^3 - 574 = 0$ usa $y = x - 8$ para obter $y^3 + 24y^2 + 192 - 62 = 0$, para encontrar a raiz como sendo $x = \frac{8+62}{1+24+194}$ ou $x = 8\frac{2}{7}$.

Ainda Boyer (1996, p. 149), descreve mais um método, semelhante ao método de Horner, usado para achar raiz quadrada, por exemplo de 71824, primeiramente se tem 200 como primeira aproximação de uma raiz de $x^2 - 71824$=0 e diminuindo as raízes dessa equação de 200, se tem $y^2 + 400y - 31824 = 0$. Para essa equação, 60 é a aproximação e então subtrai 60 das raízes chegando a terceira equação $z^2 + 520z - 4224 = 0$, de qu 8 é raiz, logo o valor de x é 268. O mesmo era feito para resolver cúbicas e quárticas.

A ÍNDIA E O MÉTODO INVERSO

Na Índia, as resoluções eram feitas além do método da falsa posição também por um método denominado de *Inversão*, este era o mais utilizado pelos indianos, conforme afirma Eves (2004, p.255) que exemplifica o uso do método através do problema proposto num livro de Bháskara, que dizia o seguinte:

> Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de 3/4 do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 d6 quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2? (EVES, 2004, p.255).

Pelo método da inversão, começamos a resolução pelo 2 e operamos para trás, usando as operações inversas das descritas no problema até chegarmos a incógnita, assim temos.

$$2.10 = 20 \rightarrow 20 - 8 = 12 \rightarrow 12^2 = 144 \rightarrow 144 + 52 = 196 \rightarrow \sqrt{196} = 14 \rightarrow 14.\frac{3}{2} =$$

$$= 21 \rightarrow 21.7 = 147 \rightarrow 147.\frac{4}{7} = 81 \rightarrow 81:3 = 28$$

Este método se assemelha ao que utilizamos hoje, por exemplo se tivéssemos que resolver este problema, em notação atual teríamos:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{(2/3)(7/4)(3x)}{7}\right]^2 - 52} + 8}{10} = 2$$

e para a resolução, multiplicaríamos ambos os lados por 10, depois subtrairíamos 8 de cada membro, depois elevaríamos cada membro ao quadrado e assim sucessivamente.

A HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES NA GRÉCIA

Para Boyer (1996, p.130), a matemática não era toda de alto nível, pois ao período glorioso do terceiro século a.C, seguiu-se um declínio, talvez cessado por algum tempo, até certo ponto nos dias de Ptolomeu, mas realmente eliminado até o século da “idade da prata”, de 250 a 350 d.C aproximadamente. No começo desse período, também chamado de segunda idade Alexandrina, encontramos o mais ilustre algebrista grego, Diofante de Alexandria e pelo fim desse período apareceu o último geômetra grego notável, Papus de Alexandria.

Segundo Boyer (1996, p. 130), Diofante é constantemente chamado o pai da álgebra, mas veremos que tal denominação não deve ser tomada na sua totalidade. Sua obra não é de modo algum o material que forma o fundamento principal da álgebra elementar moderna, nem se torna semelhante à álgebra geométrica de Euclides. A mais notável obra de Diofante que conhecemos é a *Arithmetica,* tratado que era originalmente em treze livros. Deve-se recordar no entanto que a álgebra significava teoria dos números e não computação.

De acordo com Boyer (1996, P.133), a *Arithmetica* não é uma explanação sistemática sobre operações algébricas, funções algébricas ou a resolução de equações algébricas. Em vez disso é um conjunto de 150 problemas, todos expostos em forma de exemplos numéricos específicos, não há construção postulacional, nem se faz um estímulo para achar todas as soluções possíveis. No caso de equações quadráticas, com duas raízes positivas, somente a maior era dada e então as raízes negativas não são consideradas.

Problema exposto na *Arithmetica*

" Ao achar dois números tais que sua soma seja 20 e a soma dos quadrados 208", ao invés de se escrever as incógnitas x e y, Diofante as escrevia como 10+x e 10-x.

Logo teríamos:

$$(10+x)+(10-x)=20 \text{ e } (10+x)^2+(10-x)^2=208$$

Os números eram encontrados através resolução da equação do 2º grau gerada a partir da soma dos quadrados, porém Boyer (1996, p. não deixa explícito como seria o desenvolvimento naquela época, para melhor entendimento desenvolvemos, em notação atual, a equação a seguir:

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208$$

$$(100+10x+10x+x^2)+ (100-10x-10x+x^2)=208$$

$$2x^2+200=208$$

$$2x^2=8$$

$$X^2=8/2$$

$$X^2=4$$

$$X=2$$

Então quando substitui-se o valor de x na seguinte expressão:

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208.$$

Portanto os números procurados são: (10-2) e (10+2), ou seja, 8 e 12 respectivamente.

O DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES NA EUROPA

A *Ars Magna* de Cardano

Para Eves (2004, p. 302) provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica, ainda segundo este autor, por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática da universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes, este não publicou o resultado mas revelou o segredo a seu discípulo Antônio Fior. Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartáglia (o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança que afetaram sua fala anunciou ter descoberto uma solução para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$.

Figura 3 - Nicolo Tartaglia

Fonte: Eves (2004, p. 307)

De acordo com Boyer e Merzbach (2012, p.200), em 1545, não somente a resolução da equação cúbica, mas também da quártica um pouco depois e tornaram-se conhecidas por meio da publicação da *Ars magna* de Gerônimo Cardano que segundo Eves (2004,p.303) continha a resolução seguinte para a cúbica:

$$X^3+mx=n$$

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$

Se escolhermos *a* e *b*, então temos:

$$3ab=m \text{ e } a^3-b^3=n$$

Logo x é dado por *a-b*. Resolvendo para *a e c o* sistema formado pelas duas últimas equações obtemos:

$$a=\sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right)}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+\sqrt{(\frac{m}{3})^3}}$$

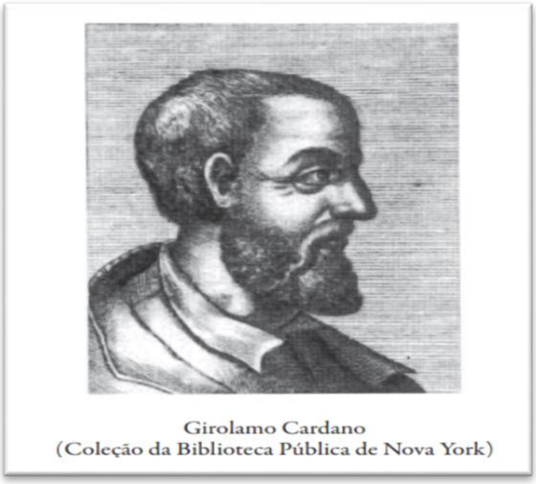
$$b=\sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right)}+\sqrt{(\frac{n}{2})^2+\sqrt{(\frac{m}{3})^3}}$$

E assim fica determinado x.

$$X=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{m}{3})^3+}\,(\frac{n}{2})^2-\frac{n}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{m}{3}\right)^3+}\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n}{2}}$$

Para Boyer (1996, p.209), Cardano fazia uso de pouca sincopação. Por exemplo, quando escrevia, “Seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20’’ ((x^3+px=q), a mesma evidencia a forma como Cardano escrevia as outras, ou seja, a maioria eram bem similares uma a outra. A solução desta equação é bem extensa cobre um par de páginas de retórica que hoje representaríamos em símbolos.

Figura 4 - Girolamo Cardano



Fonte: Eves (2004, p. 306)

Eves (2004, p. 307), considera que Cardano era um dos homens mais talentosos e versáteis de seu tempo e que deixou uma obra vasta que dentre estes livros se destaca a *Ars Magna, o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra.*

Segundo Boyer e Merzbach (2012, p.200) esta descoberta seria um feito tão revolucionário que muitas pessoas consideravam como o marco do início do período da matemática moderna, em 1.545 este feito tornou ultrapassada a álgebra utilizada até então e conhecida como a *arithmetica integra de Stifel que constituía* um tratamento completo da álgebra até 1.544.

A solução de Ferrari para a equação quártica

Boyer e Merzbach (2012, p. 202), descrevem alguns passos descritos por Cardano para a resolução das equações quárticas do tipo: $X^4+6X^2+36=60X$.

Quadro 4 - Resolução da equação quártica pela forma descrita na Ars Magna.

PROCEDIMENTOS	FORMA ALGÉBRICA
Observe a equação quártica	$X^4+6X^2+36=60X$.
Primeiro, some a ambos os membros da equação quadrados e números suficientes de modo que o primeiro número se torne um quadrado perfeito. Dessa forma, neste caso, somamos $6x^2$ em ambos os lados	$X^4+6x^2+36=6x^2+60x$ Ou $(x^2+6)^2$
Agora some a ambos os membros da equação termos envolvendo uma nova incógnita y, de modo que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito, como $(x^2+6+y)^2$	$(x^2+6+y)^2$ $X^4+12x^2+2x^2y+12y+y^2+36$ $(x^2+6+y)^2= 6x^2+60x+y^2+12y+2yx^2$ $(x^2+6+y)^2= (2y+6)x^2+60x+(y^2+12y)$
O passo seguinte, e mais importante, consiste em escolher y de modo que o trinômio do primeiro membro fique um quadrado perfeito. Podemos fazer isto da seguinte maneira: igualando a zero o discriminante, uma regra antiga e bem conhecida.	$(2y+6)x^2+60x+(y^2+12y)$ $a=(2y+6)$ $b=60$ $c=(y^2+12y)$ Usando: $b^2-4ac=0$ temos $60^2 -4(2y+6) (y^2+12y) =0$ $-4(2y+6)(y^2+12y)=0$ $3.600-4(2y^3+24y^2 +6y^2+72y)=0$ $3.600-8y^3+9y^2 +24y+288=0$ $-8y^3-120y^2 -288y=-3.600. (-1)$ $8y^3+120y^2 +288y=3.600 \div(8)$ $y^3+15y^2 +36y=450$
O resultado do passo 03 é uma cúbica em: y: $y^3+15y^2+36y=450$, conhecida atualmente como “cúbica resolvente” da equação quártica dada. A equação para y é então resolvida para as regras citadas anteriormente para a resolução de equações cúbicas.	$y^3+15y^2+36y=450$ cúbica resolvente da equação quártica. Y= $\sqrt[3]{287\frac{1}{2}+\sqrt{80.449\frac{1}{4}}+}\sqrt[3]{287\frac{1}{2}-\sqrt{80.449\frac{1}{4}-5}}$
Substitua um valor de y, do passo 04, na equação para x, do passo 02, e tome a raiz quadrada de ambos os membros.	Y: $y^3+15y^2+36y=450$ e $(x^2+6+y)^2$
O resultado do passo 05 é uma equação quadrática, que agora deve ser resolvida com o intuito de encontrar o valor de x.	$aX^2+bX+c=0$

Fonte: Adaptada de Boyer e Merzbach (2012, p.202)

Para Eves (2004, p. 305), o método de Ferrari de resolução de quárticas, demonstrado em notação moderna, pode ser representado da seguinte maneira:

$$X^4+pX^2+qX+r=0$$

Onde obtemos,

$$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2 \text{ ou } (x^2+p)^2=px^2-qx+p^2-r$$

E então, para um y arbitrário temos,

$$(x^2+p+y)^2=px^2-qx+p^2-r+2y(x^2+p)+y^2$$

$$(p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^{2)}$$

Desse modo escolhamos um y para que o segundo membro da equação acima seja um quadrado.

$$4(p+2y)^2(p^2-r+2py-r+y^2)-q^2=0$$

Porém, essa é uma equação que cúbica pode ser resolvida pelo método precedente.

Segundo Eves (2004, p. 305), uma vez que a resolução de uma equação quártica se reduz a uma equação cúbica associada a ela, Euler por volta de 1.750, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação quíntica geral à de uma associada mas, Euler falhou, assim como falharia Lagrange uns 30 anos depois. O médico italiano Paolo Rufini, porém tomou outro caminho em tentativas por volta dos anos de 1.803, 1.805 e 1.813 intentou provar embora que de maneira não muito suficiente a seguinte ideia: as raízes das equações gerais de grau cinco, ou superior a cinco, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos como se defende até os dias atuais.

As influências da *Ars magma*

Para Boyer e Merzbach (2012, p.203), a mais importante consequência das descobertas publicadas de *Ars magna* foi o enorme impulso que consequentemente proporcionou o estudo de álgebra em vários seguimentos, pois até então, era comum que o estudo fosse generalizado e que, em particular, o objetivo era encontrar a resolução da equação quíntica, onde os matemáticos encontraram um problema algébrico insolúvel que podia ser comparado aos problemas geométricos clássicos da antiguidade. O resultado de todo esse avanço resultou em muita matemática proveitosa, mas apenas uma conclusão negativa.

Segundo este autor, um outro resultado significativo da resolução da cúbica foi a primeira observação considerável de uma nova espécie de número, os números irracionais, que já tinham sido aceitos na época de Cardano, mesmo não tendo base firme, pois eram facilmente aproximáveis por números racionais. Os números negativos também causaram um pouco de dificuldade, pois são facilmente aproximáveis aos números positivos. Cardano os utilizou, mas denominando-os de *" numeri ficti",* de modo que se um algebrista precisasse negar a existência de um número irracional ou negativo dizia simplesmente como os gregos antigos, que as equações $x^2=2$ e $x+2=0$, não eram resolúveis. Da mesma forma, os algebristas podiam evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2+1=0$, não é resolúvel.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O levantamento sobre o desenvolvimento histórico das equações algébricas discutido neste artigo, apresentou alguns métodos de resolução das equações utilizados por alguns povos, nos quais podemos observar que os mesmos tiveram uma evolução considerável no que se refere à praticidade dos métodos utilizados atualmente e este evento só se tornara possível através da contribuição dos grandes matemáticos ao longo dos anos, que de acordo a época em que viveram tiveram feitos notáveis em favor do desenvolvimento da matemática.

As leituras utilizadas nos proporcionaram o conhecimento de como eram registrados esses métodos de resolução das equações e revelam o contexto o qual estavam inseridos os problemas matemáticos que os originaram, ora do cotidiano ou puramente algébricos.

Pudemos perceber que algumas semelhanças entre os métodos utilizados pelos povos e os que utilizamos atualmente. O método da falsa posição, consistia em encontrar as soluções através de aproximações, o que comumente ainda é perceptível em situações de sala de aula, onde o aluno ao tentar, por exemplo, encontrar a raiz quadrada de um dado número usa aproximações com o resultado até chegar a resposta correta. No método inverso utilizado pelos indianos, percebemos novamente semelhanças, as operações ordenadamente realizadas neste método são análogas as produzidas quando resolvemos uma equação pelo método atual.

Dessa forma, tiveram destaque na contribuição para a evolução do conceito e dos métodos de solução de equações, alguns povos, dentre eles estão os egípcios, babilônios, chineses, europeus e gregos, bem como alguns personagens que tiveram feitos notáveis história das equações.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher,1996.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta. **História da matemática**. Helena Castro [trad.]. São Paulo: Blucher, 2012.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. Vol II.New York: Dover Publications, 1958.

OS NÚMEROS REAIS: UMA TRAJÉTORIA HISTÓRICA

Adrielle Cristine Mendello Lopes

Ana Mara Coelho da Silva

Pedro Franco de Sá

Resumo: Este artigo traz os resultados de uma pesquisa bibliográfica que teve por objetivo apresentar uma trajetória histórica dos números reais. Foram consultados livros de matemática e história da matemática bem como artigos científicos. O trabalho foi dividido nas seguintes seções: a descoberta dos números irracionais na Grécia, a origem da expressão “número real”, os infinitesimais, a aritmetização da análise, as teorias dos números reais e possiblidades didáticas para o ensino de números reais com enfoque na história da matemática. Os resultados indicaram que a história dos números reais iniciou na Grécia a partir da descoberta de segmentos incomensuráveis pela escola de Pitágoras, que trouxe à tona os números irracionais. Por um longo tempo, o trabalho com os números irracionais foi evitado e somente 2500 anos depois foi possível estabelecer a construção axiomática dos números reais. O surgimento da expressão “número real” assim como “número imaginário” se deu com René Descartes em 1637, quando este rejeitou as raízes de equações expressas por números imaginários. Com o desenvolvimento dos infinitesimais no fim do século XVII, inconsistências nos fundamentos da matemática foram constatadas, mas estas foram contornadas pela grande aplicabilidade dos métodos infinitesimais, fato muito explorado nos estudos matemáticos no século XVIII. Somente no século XIX, os estudiosos perceberam a necessidade de rigorizar a Análise, o que originou o movimento histórico conhecido como aritmetização da análise. Neste cenário, os matemáticos estavam cientes que de o progresso dependia de uma extensão do conceito de número. A própria ideia de função teve que ser esclarecida e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas. Ao final do século XIX, surgiram construções axiomáticas para os números que até então não estavam claramente fundamentados. As teorias dos números reais foram construídas pelo francês Charles Méray e pelos alemães Karl Weierstrass, Richard Dedekind e George Cantor. Como possibilidades didáticas, foram encontrados estudos que utilizaram a história da matemática para o ensino dos números reais, porém ainda há carências em relação ao tema.

Palavras-chave: História da Matemática. Números irracionais. Números reais.

INTRODUÇÃO

A oposição de René Descartes (1596-1650) à utilização dos números complexos a partir dos trabalhos com raízes de equações realizados por Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572) foi o impulso para que ele cunhasse a expressão “número real”. De acordo com Kline (1972), René Descartes rejeitou as raízes complexas e usou o termo “imaginário” para designá-las. Em 1637, Descartes escreveu em *La Géométrie*: “tanto as verdadeiras raízes quanto as falsas não são sempre reais, mas às vezes apenas imaginárias.” Descartes fez uma distinção clara, mais do que seus antecessores, entre as raízes reais e imaginárias de uma equação. Apesar de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ter percebido a inadequação do termo "imaginário", esta tomou raízes profundas, porém, para a palavra "real" não foi "nem sequer proposta uma mudança para um têrmo mais adequado." (DANTZIG, 1970, p. 202).

A evolução histórica dos números reais se deu desde a "descoberta" dos segmentos incomensuráveis no século V a. C. pelos gregos até a sua construção axiomática no século XIX. Percebemos que foram necessários quase 2500 para que os números reais pudessem ser construídos. Cabe ressaltar que neste intervalo temporal, outros fatores foram extremamente importantes para o desenvolvimento histórico dos números reais.

A concepção do universo pregada pela escola de Pitágoras (580-500 a.C.) era aritmética: "Tudo é número". A descoberta da incomensurabilidade pelos gregos trouxe à tona dos números irracionais e marcou o declínio do pitagorismo como sistema de filosofia natural e a concordância perfeita entre as coisas aritméticas e as coisas geométricas mostrou ser um embuste: como o número podia dominar o universo, quando não podia dar conta nem do aspecto mais imediato do universo, a Geometria? (DANTZIG, 1970, p. 98)

O desenvolvimento do Cálculo no final do século XVII por Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) foi um passo notável para a matemática, porém surgiram críticas em relação aos seus fundamentos ao ter em vista imprecisões nas explicações de Leibniz e Newton. No entanto, as críticas aos métodos infinitesimais foram praticamente suprimidas em decorrência da grande aplicabilidade do Cálculo, principalmente à Mecânica, o que foi muito explorado nos estudos do século XVIII.

Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) assumiu que uma função contínua pode sempre ser expressa como uma série de Taylor. No início do século XIX, estudiosos começaram a questionar a validade do princípio de Lagrange ao ter em vista absurdos em contradições no uso das séries infinitas. Estes questionamentos impulsionaram a aritmetização da análise, um movimento que buscou fundamentar o conceito de número. Na segunda metade do século XIX, emergiram as teorias de números reais, cujas as contribuições cruciais foram dadas por Charles Méray (1835-1911), Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916).

Desta forma, este trabalho traz os resultados de uma pesquisa bibliográfica que teve por objetivo **apresentar uma trajetória histórica dos números reais**. O estudo foi organizado nas seguintes seções: a descoberta dos números irracionais na Grécia, a origem da expressão "número real", os infinitesimais, a aritmetização da análise e as teorias dos números reais e possibilidades didáticas para o ensino de números reais com enfoque na história da matemática.

UMA DESCOBERTA NA GRÉCIA: OS NÚMEROS IRRACIONAIS

A histórica da matemática geralmente traça os caminhos de volta à Grécia, considerada o berço da ciência. De fato, os gregos têm um papel muito relevante quando falamos de números reais, pois a história destes números começa na escola de Pitágoras (580-500 a.C.), cuja base filosófica era numérica. Mas os "números" considerados pelos gregos não eram os mesmos "números" que conhecemos hoje, e sim "o número natural, inteiro, aquêle reinado supremo" (DANTZIG, 1970, p. 96)

De acordo com Boyer (1974), Pitágoras e seus discípulos defendiam que a essência de tudo, seja na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podia ser explicada em termos de ***arithmos***, isto é, nas propriedades de números inteiros e suas razões. Isto levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico, conhecido como *quadrivium*.

Foram muitos os feitos pitágoricos, porém Eves (2011) explica que como os ensinamentos da escola eram inteiramente orais e as descobertas eram sempre atribuídas ao reverenciado fundador, é difícil saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem aos seus seguidores. Muito do que se atribui a Pitágoras é baseado em relatos produzidos depois de seu tempo.

Uma das grandes descobertas da escola foi o teorema básico da geometria clássica: em qualquer triângulo reto, a soma dos quadrados construídos nos catetos é igual ao quadrado construído na hipotenusa. Dantzig (1970) esclarece que o teorema de Pitágoras provavelmente foi um método empírico, mas não podemos duvidar que os pitagóricos o consideraram de grande importância pois percebiam a união inerente entre geometria e aritmética, e isto fortaleceu a filosofia grega de que "O número regula o universo" (DANTZIG, 1970, p. 97)

Mas a descoberta grega que abalou a fé pitagórica de que "Tudo é número", e iniciou a primeira "crise" da matemática, foi a **incomensurabilidade**. Os pitagóricos se depararam com os números irracionais e perceberam que os números que eles conheciam não eram suficientes para explicar a natureza. Boyer (1974) ressalta que a primeira percepção de grandezas incomensuráveis é tão incerta quando a época de sua descoberta, mas sugere algum momento antes de 410 a. C. A descoberta da incomensurabilidade foi para os gregos um “escândalo lógico”, o qual tentaram manter em sigilo:

> *Alogon*, o *inexprimível*, era como se chamavam tais irracionais, e os membros da ordem juravam não divulgar sua existência a estranhos. Tendo descoberto uma imperfeição inexplicável na obra do Arquiteto, era necessário mantê-la em segredo, senão Sua raiva, por ter sido exposto, cairia sôbre o homem. (DANTZIG, 1970, p. 97)

Segundo Kline (1972a), além de *Alogon* (ou *Alogos*), também era utilizado o termo *Arratos*, que significa “sem razão”, daí o termo atual números irracionais. De acordo com uma lenda em Eves (2011), foi Hipaso de Metapontum (séc. V a. C.) quem revelou o segredo das grandezas incomensuráveis a estranhos, e por isso foi expulso da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto.

Encontramos dois relatos distintos sobre o caminho que levou os gregos às grandezas incomensuráveis, mais especificamente, ao primeiro irracional conhecido: o número $\sqrt{2}$. O primeiro caminho é o geométrico, em Dantzig (1970) mostra que, ao aplicaram o teorema de Pitágoras, os pitagóricos perceberam que “a diagonal do quadrado não tem medida comum ao seu lado” (DANTZIG, 1970, p. 97). O segundo é o caminho aritmético, segundo o qual Struik (1986) sugere o uso da média geométrica $a/b=b/c$.

O fato de $\sqrt{2}$ não poder pode ser escrito como um número ou a razão entre dois números perturbou a harmonia entre a aritmética e a geometria na Grécia Antiga. Os números irracionais assinalaram um dos grandes marcos da história da matemática, mas para os gregos antigos foi tão difícil aceitar as quantidades incomensuráveis quanto descobri-las.” (GUNDLACH, 1992, p. 54). A primeira prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi sugerida por Aristóteles (384-322 a.C.) como um exemplo de *reductio ad absurdum*:

> Suponhamos que aquela razão é $p:q$, na qual podemos sempre tomar p e q como números primos entre si. Então $p^2=2q^2$, pelo que p^2, e portanto p, é par, digamos $p=2r$. Então q tem de ser ímpar; mas, visto que $q^2=2r^2$, q também tem de ser par. (STRUIK, 1986, p. 80)

Esta relação permite concluirmos que q não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, pois seria um “absurdo”. Portanto, o número $\sqrt{2}$ não pode ser expresso com uma razão entre números inteiros, ou seja, é irracional. Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único irracional conhecido, somente mais tarde Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou a irracionalidade de outros números.

Pela primeira vez na história, a matemática viveu uma “crise” em seus fundamentos, a partir da descoberta dos incomensuráveis. Kline (1972a) aponta que, mesmo antes da “crise” ocorrida na Grécia, os números irracionais já eram conhecidos na Mesopotâmia. Nas tábuas de potências e raízes dos babilônios, quando a raiz era um inteiro se tinha um valor exato, caso contrário, o valor sexagesimal correspondente era aproximado. Entretanto, não há nenhuma evidência de que eles eram conscientes do fato dos irracionais não poderem ser expressos com um número finito de algarismos, "é mais plausível crer que eles acreditavam que os irracionais também podiam ser expressos de maneira exata na forma sexagesimal, prolongando a expressão até onde fosse necessário" (KLINE, 1972a, p. 8). Importa destacar que os babilônios tinham uma excelente aproximação de $\sqrt{2}$ que era 1,414213 …, uma vez que para essa quantidade de casas decimais o correto é 1,414214... .

Devido os números irracionais não possuírem espaço na matemática grega clássica, os matemáticos realizavam aproximações de raízes quadradas com certa frequência. Kline (1972a) mostra que os pitagóricos aproximavam $\sqrt{2}$ por meio da substituição de 2 por 49/25 que resultava em 7/5 como aproximação, e que Teodoro de Cirene substituiu 3 por 49/16 em $\sqrt{3}$, obtendo 7/4 como aproximação da raiz.

Para Eves (2011) a irracionalidade de $\sqrt{2}$ perturbou não só a crença de que "Tudo é número" como também a definição pitagórica de proporção, cujas proposições se limitavam às grandezas comensuráveis. A partir deste momento, as demonstrações que faziam uso da teoria das proporções tiveram que ser abandonadas. Neste contexto, era necessário estabelecer uma nova teoria das proporções que foi independente da comensurabilidade. Apenas por volta de 370 a.C., Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.) conseguiu este feito. A teoria das proporções eudoxiana constitui a base do livro V dos *Elementos* de Euclides (séc. III a. C). Boyer (1974, p. 66) aponta que:

> A palavra razão denotava essencialmente um conceito não definido na matemática grega, pois a "definição" de Euclides de razão, como uma espécie de relação de tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo é inteiramente inapropriada. Tem mais sentido o enunciado de Euclides segundo o qual se diz que duas grandezas estão numa razão se é possível achar um múltiplo de cada uma que seja maior que a outra. [...] O conceito de razão de Eudoxo exclui pois o zero e esclarece o que entende por grandezas de mesma espécie. (BOYER, 1974, p. 66)

Eudoxo evitou atribuir valores numéricos a grandezas e razões entre grandezas. Struik (1986) revela que a teoria de Eudoxo era puramente geométrica, e que na sua forma axiomática, tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis. De acordo com Eves (2011), tal teoria forneceu a fundamentação para Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weierstrass (1815-1897) sistematizarem os números reais séculos depois.

Para Kline (1972a), a teoria de Eudoxo permitiu aos matemáticos gregos fazerem grandes progressos em geometria, dando-lhe fundamentos lógicos necessários para as razões incomensuráveis. Contudo, a mesma teoria trouxe consequências menos afortunadas, entre as quais podemos citar a separação forçada entre número e geometria, devido só esta última poder manejar com as grandezas incomensuráveis, o que fez a geometria "se tornar a base rigorosa de toda a matemática por dois mil anos seguintes." (KLINE, 1972a, p. 49)

Mesmo que alguns estudiosos como Arquimedes (287 a.C.), Heron de Alexandria (10–70) e Ptolomeu (90-168) tenham começado a trabalhar com os irracionais como números, eles não mudaram o pensamento da matemática grega. A descoberta das razões incomensuráveis pelos pitagóricos introduziu uma dificuldade que preocupou os gregos da época: a relação entre o discreto o continuo. Hoje, dizemos que as grandezas contínuas podem ter uma medida racional ou irracional em termos de alguma unidade, "mas os gregos não tinham alcançado este ponto de vista". (KLINE, 1972a, p. 34)

O livro X dos *Elementos* de Euclides, o mais volumoso com 4 definições e 115 proposições, tem como foco os números irracionais ao tratar da classificação sistemática de segmentos incomensuráveis das formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, onde a e b, quando são da mesma dimensão, são comensuráveis. (BOYER, 1974, p. 85). Entretanto, apesar do rigor, "Euclides não tinha um conceito de número sobre o qual pudesse construir uma teoria de irracionais" (KLINE, 1972a, p. 73).

Nos séculos seguintes, o uso da Teoria das Proporções de Eudoxo evitou a discussão sobre a natureza dos números irracionais. Desta forma, o curso da história da matemática até o século XIX foi tratar quantidades contínuas unicamente em uma base geométrica, pois os números irracionais não tinham um estatuto definido. Foi apenas no final do século XVII, com o surgimento dos métodos infinitesimais, que o assunto gerou inquietação dos estudiosos novamente.

A ORIGEM DA EXPRESSÃO "NÚMERO REAL"

Os números irracionais que intervinham nos métodos de resolução de equações intrigaram os algebristas na Europa nos séculos XVI e XVII, pois frequentemente apareceriam como raízes de equações e eram, muitas vezes aproximados por somas infinitas. Mesmo sem superar as dificuldades com os irracionais e com os números negativos, surgiram os **números**

complexos a partir dos trabalhos com raízes de equações realizados por Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572).

De acordo com Kline (1972a), René Descartes (1596-1650) rejeitou as raízes complexas e cunhou o termo "imaginário" para designá-las. Assim como Albert Girard (1595-1632), Descartes admitia que uma equação possuía tantas raízes quantas fossem as dimensões da quantidade desconhecida, porém algumas eram "mais que nada", expressão de Girard para as raízes positivas, que incluíam os números irracionais; e outras eram "menos que nada" ou "falsas", isto é, eram as raízes negativas. Em 1637, Descartes escreveu em *La Géométrie*: "tanto as verdadeiras raízes quanto as falsas não são sempre reais, mas às vezes apenas imaginárias." Descartes fez uma distinção clara, mais do que seus antecessores, entre as raízes reais e imaginárias de uma equação.

Para Dantzig (1970) estas palavras, assim como "racional" e "irracional", mantiveram múltiplos significados. Para os conhecedores de matemática, elas podem até não ser ambíguas e ter um significado específico, mas para outros, estas palavras podem ter significado vago e sem sentido, ocasionando uma confusão na mente do leigo. Apesar de Gauss (1777-1855) ter percebido a inadequação do termo "imaginário", esta tomou raízes profundas, porém, para a palavra "real" não foi "nem sequer proposta uma mudança para um têrmo mais adequado." (DANTZIG, 1970, p. 202).

OS INFINITESIMAIS

Os métodos analíticos de Descartes e Pierre de Fermat (1601-1665) motivaram o estudo de séries infinitas na Inglaterra, principalmente por John Wallis (1616-1703), James Gregory (1638 – 1675) e Isaac Barrow (1630-1677). Estes por sua vez, tiveram forte influência sobre Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727), cuja maior novidade residiram no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos, visto que na primeira metade do século XVII, muitos resultados de natureza infinitesimal já eram conhecidos, mas os matemáticos até então não se haviam se dedicado a mostrar a generalidade das técnicas empregadas.

O trabalho de sistematização do cálculo foi realizado de forma independente por Leibniz e Newton no fim do século XVII, a realização matemática mais notável do período. Porém, surgiram discussões a respeito da legitimidade dos métodos infinitesimais, uma vez que os argumentos de Leibniz não eram definitivos e ele propunha diversas justificativas, uma delas era a aceitação dos infinitésimos como meras ficções. Newton, ao contrário, trabalhava bem seus argumentos antes de publicá-los e considerava o padrão da geometria grega mais adequado para expor suas ideias, contudo havia certa imprecisão no seu método de expressão. Struik (1986) aponta que as explicações sobre os fundamentos do Cálculo eram imprecisas: "algumas vezes, os seus dx, dy eram quantidades finitas, outras vezes quantidades menores que qualquer quantidade significativa, porém não nulas" (STRUIK, 1986, p. 186).

As imprecisões de Leibniz e Newton provocaram as críticas de Bernard Nieuwentijt (1654-1718) e de George Berkeley (1685–1753), respectivamente. A obra *The Analyst* (1734) de Berkeley é considerada a mais importante oposição, na qual ele revelou um grande número de argumentos frouxos, afirmações vagas e contradições claras na doutrina dos infinitesimais.

Por algum tempo, os fundamentos do Cálculo permaneceram despercebidos ao ter em vista a sua aplicabilidade (principalmente à mecânica), fator muito explorado na produção matemática no século XVIII, sendo os processos empregados de forma intuitiva:

> Eles tratavam os infinitésimos como sendo fixos ou variáveis, segundo as exigências do problema; manipulavam aleatoriamente as seqüências infinitas; faziam malabarismos com os limites; tratavam séries divergentes como se estas obedecessem a tôdas as regras de convergência. [...] romperam tôdas as leis de rigor e de decôro matemático [...] e não havia nenhum Euclides para deter seu vôo romântico. (DANTZIG, 1970, p. 120-121)

Este cenário começou a mudar quando Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) publicou dois livros sobre funções como uma tentativa de dar uma fundamentação sólida ao cálculo, pela sua redução à álgebra. Em 1797, Lagrange assumiu, a partir de um processo puramente algébrico, que uma função contínua pode sempre ser expressa por meios do teorema de Taylor como uma série infinita. Struik (1986) esclarece que o "método algébrico" de Lagrange foi insatisfatório e, apesar de não ser dada a suficiente atenção à convergência das séries, este tratamento foi um considerável passo em frente.

Boyer (1949) mostra que no início do século XIX, estudiosos começaram a questionar a validade do princípio de Lagrange e logo começaram a perguntar o que se entendia por uma função em geral e por uma função contínua em particular, ao ter em vista o desenfreado uso das séries infinitas, que insinuavam absurdos em contradições. Estes questionamentos impulsionaram a busca por uma matemática mais rigorosa, fundamentada no conceito de número, o que resultou em um movimento histórico conhecido como aritmetização da análise, o qual discutimos a seguir.

A ARITMETIZAÇÃO DA ANÁLISE: EM BUSCA DA DEFINIÇÃO DE NÚMERO REAL

Os matemáticos que se depararam com os problemas relativos aos fundamentos da análise estavam cientes que de o progresso dependia de uma extensão do conceito de número. A própria ideia de função teve que ser esclarecida e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas. Se, em grande parte, o século XVIII foi gasto na exploração dos métodos do cálculo, "o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente." (EVES, 2011, p. 463).

Apesar de Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783) ter observado que era necessária uma teoria de limites em 1754, não houve um desenvolvimento sólido dessa teoria durante muito tempo. Somente em 1821 com *Cours d'analyse*, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) "pôs em prática com êxito a sugestão de d'Alembert de desenvolver uma teoria de limites aceitável e definir então continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos de conceito de limite" (EVES, 2011, p. 610).

Desta forma, a matemática do século XIX passava por um processo de formalização, conhecido como **aritmetização da análise**, termo cunhado por Felix Klein (1849-1925) em 1895. De acordo com Dantzig (1970), tal movimento teve como objetivo "a separação de conceitos puramente matemáticos tais como *número*, *correspondência* e *conjunto*, de ideias intuitivas, que a matemática adquiriu através de uma longa associação com a geometria e a mecânica." (DANTZIG, 1970, p. 93)

Com um dos precursores do movimento, destacamos Bernhard Bolzano (1781-1848) pois "perto de 1817 ele já estava plenamente cônscio da necessidade de rigor em análise" (EVES, 2011, p. 530). As principais ideias de Cauchy já tinham sido antecipadas por ele, mas foi impedido de publicá-las e muitos de seus resultados tiveram que ser redescobertos. Por tal fato, Klein o denominou de "o pai da aritmetização".

Neste cenário, no que diz respeito aos números reais, Em *Cours d'analyse*, apesar de não ter formulado uma definição de número real, Cauchy utilizou resultados envolvendo números irracionais, quando afirmou que uma sequência de números racionais poder admitir como limite um número irracional (BOYER, 1949, p. 282). Ao analisar a obra de Cauchy, Martins (2004) concluiu que tal resultado se reduz a um ciclo vicioso, pois:

> [...] recorrendo à definição de *limite*, a existência do número irracional depende do conhecimento prévio da quantidade da qual se aproximam os termos de uma determinada sucessão de números racionais. E apesar de não definir o conceito de número real, tal resultado é ainda utilizado para definir as operações algébricas e exponenciais para números reais, como uma extensão, através do conceito de limite, das mesmas operações definidas no conjunto dos números racionais. (MARTINS, 2004, p. 11-12)

A partir das ideias de Bolzano e Cauchy, o estudo de limites mostrou a necessidade de adquirir uma compreensão lógica dos números. Boyer (1974) ressalta que a investigação sobre a natureza de função e do número iniciou em 1822 com a teoria de calor de Joseph Fourier (1768-1830) e com uma tentativa de Martin Ohm (1792-1872) de reduzir toda a análise a aritmética.

Os trabalhos de Fourier sobre a propagação do calor estão associados à redefinição do conceito de função. Destacamos a ideia de Fourier de que qualquer função definida pode ser representada por desenvolvimentos em série contendo senos e cossenos (séries de Fourier) e para provar tal verdade, Fourier apontou a integração em um intervalo. Lejeune Dirichlet (1805-1859) tentou dar consistência aos trabalhos de Fourier, demonstrando que suas séries convergem. No entanto, em 1829, Dirichlet percebeu que nem toda função podia ser integrada, quando descobriu uma função que não pode ser representada por uma série de Fourier, não-derivável e descontínua em todos os pontos.

A compreensão da função de Dirichlet dependia da forma como os racionais e irracionais estavam distribuídos sobre o eixo das abcissas, isto é, sobre a reta numérica. Na segunda metade do século XIX, emergiu a preocupação em relação à definição de número real e à distribuição dos racionais e irracionais na reta e, logo, muitos trabalhos foram publicados, dedicados a colocar os números reais em uma base aritmética sólida. A partir deste momento, surgem as teorias de números irracionais.

Em se tratando deste aspecto, as contribuições cruciais foram dadas por Charles Méray (1835-1911), Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916), cujas teorias são, em essência, muito parecidas e, apesar das publicações quase simultâneas, foram elaboradas em épocas diferentes. A seguir, apresentamos os aspectos mais gerais de tais teorias.

AS DEFINIÇÕES DE NÚMERO REAL: AS TEORIAS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Antes mesmo da concretização das teorias científicas dos irracionais, Kline (1972b) afirma que foi William Hamilton (1805-1865) quem ofereceu o primeiro tratamento dos números irracionais em dois artigos de 1833 e 1835, publicados em conjunto como *Algebra as the Science of Pure Time*, nos quais ele baseou sua noção de todos os números (racionais e irracionais) no tempo, mas de forma insatisfatória para a matemática pois considerou uma básica intuição na Filosofia de Immanuel Kant. Hamilton começou a desenvolver uma teoria de números racionais, ele introduziu a ideia de dividir o racional em duas classes e definir o irracional como uma "partição", não muito diferente dos cortes de Dedekind, do qual falaremos mais tarde, porém ele nunca completou este trabalho.

Boyer (1974) mostra que no início da década de 1830, Bolzano havia feito uma tentativa para desenvolver uma teoria dos números irracionais como limites de sequências de números racionais, deixando seu manuscrito *Teoria das Quantidades* inacabado, não sendo reconhecido nem publicado até 1962. Martins (2004, p. 11) afirma que Bolzano, na esperança de que sua obra fosse terminada, a ofereceu ao seu aluno favorito, Robert Zimmermann (1824-1898), mas este acabou por deixar de se dedicar a Matemática e entregou a obra do professor à Biblioteca Nacional de Viena.

Kline (1972b) aponta outras introduções pre-weierstrassanas dos números irracionais que utiliza a noção de que o irracional é o limite de uma sequência infinita de irracionais, porém o limite não pode existir se os irracionais não estão logicamente definidos. Mais tarde, Cantor destacou que esse erro lógico passava despercebido, pois não levava a dificuldades posteriores.

A trajetória cronológica dos acontecimentos permite dizer que **Charles Méray** foi o primeiro matemático a apresentar uma definição satisfatória dos números irracionais, pois em 1869 ele publicou *Remarques sur la nature dês quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données*, artigo no qual exaltou uma série de falhas de raciocínio que os matemáticos haviam cometido desde os tempos de Cauchy (BOYER, 1974). Méray desejava construir a análise em uma base sólida, pois a considerava a "rainha" da matemática, a ciência que deveria fornecer princípios para todos as outras, "desejo que domina uma exigência soberana de rigor, excluindo, especialmente em análise, manifestações de qualquer empréstimo à geometria" (DUGAC, 1970, p. 333).

Três anos depois de *Remarques*, Méray apresenta *Nouveau précis d'analise infinitésimale* (1872), cujo objetivo, segundo ele próprio escreveu no prefácio da obra, era "acabar com a onda de teorias que nenhum princípio único parece dominar" (MÈRAY, 1872, p. xi). Apesar de sua importância, esta obra não obteve o devido conhecimento naquela época, pois Méray não era considerado um estudioso de prestígio, talvez por ter sido o único francês a apreciar a ideia de construir uma teoria de números irracionais, ao contrário dos alemães.

Dugac (1970) aponta que Méray considerava dois princípios como base essencial para todas as partes da matemática que levavam o conceito de limite de uma sequência e, em particular, aqueles relacionados com números irracionais, séries e integração. O primeiro deles era que uma sequência crescente e majorada (ou decrescente e minorada) tende para um limite; e o segundo, era que toda sequência de Cauchy tende para um limite. Méray definiu um número irracional ao ter em vista a natureza dos limites de sucessões de números racionais que não admitiam nenhum número racional como limite.

Bolzano e Cauchy haviam tentado provar que uma sequência que "converge para si" também converge no sentido de relações externas a um número real S, o limite da sequência (BOYER, 1974). Mas Méray deixou de apelar para a condição externa de convergência ou para o número real S, visto que usando apenas o critério de Cauchy-Bolzano, a convergência pode ser escrita sem referência a números irracionais. Méray considerava que uma sequência convergente determina ou número racional como limite ou um "número fictício" como um "limite fictício"; e estes "números fictícios" podem ser ordenados e em essência, são os números irracionais. Ainda assim, "Méray era um tanto vago quanto a se ou não sua sequência convergente é o número. Se é, como parece indicado, então sua teoria é equivalente a desenvolvida ao mesmo tempo por Weierstrass." (BOYER, 1974, p. 409)

Méray considerou que seus dois trabalhos publicados até então não haviam sido suficientemente claros quanto à exposição de sua teoria. Em 1887, ele sentiu a necessidade de voltar à definição de números irracionais, e publicou nos nos *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, o artigo *Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée*, pois não parecia ter atingido "um grau satisfatório de clareza para todas as mentes na definição dos números incomensuráveis" (DUGAC, 1970, p. 342).

Ainda, o estudioso francês escreveu quatro volumes do tratado *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, publicados em 1894, 1895, 1897 e 1898, respectivamente. No prefácio deste tratado, Méray afirma sua prioridade na publicação de uma teoria dos números irracionais, no entanto assistiu à sua invenção ser atribuída a Heine, mesmo na França, e às aplicações, a Cantor e outros matemáticos.

Consideramos importante a passagem em *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens Mathématique* (1906), na qual Méray explica, quase ao final de sua vida, o motivo pelo qual decidiu dar rumo aos seus trabalhos no campo da análise:

> Eu fui atraído pela geometria [...] Mas logo percebi que a geometria é um mito como ciência *pura*, é apenas a *aplicação da análise ao estudo dos fatos geométricos*, e eu estou mais ocupado com a análise. Parecia miserável por sua desarticulação, seus processos, sua absoluta falta de rigor, e os meus principais esforços tendem a torná-la natural, clara e rigorosa, tanto quanto qualquer questão de álgebra elementar. (MÉRAY, 1906, p. 46-47 *apud* DUGAC, 1970, p. 334)

Kline (1972b) considera Méray o matemático francês equivalente à **Karl Weierstrass** na Alemanha. Ao lecionar cursos de matemática, iniciados em 1856, na Universidade de Berlim, Weierstrass percebeu a necessidade de elaborar uma teoria de números irracionais ao tentar construir os fundamentos da análise. Por volta de 1863-1864, apresentou sua construção como parte de um curso sobre a teoria geral das funções analíticas.

Apesar de nunca ter publicado sua apresentação, alguns alunos de Weierstrass foram responsáveis por divulgar sua teoria. Tweddle (2010) aponta que Ernst Kossac publicou *Die Elemente der Arithmetik* (1872), assim como Adolf Hurwitz (1859-1919), que publicou notas das aulas de Weierstrass em 1878. Já Boyer (1974, p. 410) afirma que as ideias de Weierstrass foram difundidas por Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, após estes terem assistido às suas aulas.

De acordo com Boyer (1974), Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo apenas no conceito de número e, assim como Méray, percebeu que era necessário definir um número irracional independentemente do conceito de limite, assim "decidiu a questão da existência de um limite de uma seqüência convergente tomando a própria sequência como número ou limite" (BOYER, 1974, p. 410). Podemos considerar a série

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^a}+\cdots$$

cujo limite é $\frac{1}{3}$. Weierstrass considerou que este número não é o limite da série, e sim a sequência associada a esta série. Assim, Weierstrass não só contribuiu para uma definição satisfatória de número real, como também para uma definição melhorada de limite.

Pelo fato de Weierstrass não ter publicado suas ideias, percebemos a dificuldade em sistematizar sua teoria a partir dos trabalhos de seus alunos. Uma das redações que ganharam destaque foi a Hurwitz, apresentada sucintamente por Martins (2004) no trecho a seguir:

> Inicialmente é introduzido o conceito de *número usual* ou *número inteiro*, definido como sendo um conjunto de unidades, e que corresponde a um número positivo. Um número que seja constituído por unidades de diferentes tipos é designado por *número complexo*. E é à custa destes dois tipos de números e das *partes exactas da unidade*, que corresponde aos números fraccionários positivos da foram 1/n, que se constrói as *grandezas numéricas*. Os *números usuais mistos* (correspondentes aos racionais positivos) serão então um tipo destas grandezas, a saber, aquelas compostas por um número finito de elementos. De igual modo, os números irracionais positivos serão definidos como um tipo de grandezas numéricas, a saber, aquelas constituídas por uma infinidade de elementos. Será por esta razão que o modelo dos números irracionais da construção de Weierstrass é a série infinita. Através do conceito de *elemento oposto* de um qualquer número (inteiro ou racional), Weierstrass cria o conjunto dos números negativos, pelo que estendendo sucessivamente aos novos números todas as operações aritméticas, acaba por completar o conjunto dos números reais. (MARTINS, 2004, p. 62)

Dada a própria natureza desta construção dos números reais por sucessivas extensões de conceitos, é compreensível que ao final da apresentação sejam justificadas todas as ideias desenvolvidas ao longo de sua exposição. Para mais esclarecimentos sobre a teoria de Weierstrass, sugerimos consultar o estudo de Martins (2004).

Para Eves (2011) Weierstrass exerceu muita influência como professor, e suas aulas meticulosamente preparadas estabeleceram um ideal para muitos futuros matemáticos; "rigor weierstrassiano" tornou-se sinônimo de "raciocínio extremamente cuidadoso". Weierstrass foi "a consciência matemática por excelência" e tornou-se conhecido como "o pai da análise moderna".

A atenção de **Richard Dedekind** se voltou para os números irracionais desde 1858, quando lecionava Cálculo na Escola Politécnica de Zurique, ao ter que provar a existência do limite de uma função crescente e limitada. Boyer (1974) diz que Dedekind concluiu que, se havia o desejo de que o conceito de limite fosse rigoroso, então era necessário desenvolvê-lo através da aritmética sem usar a geometria como guia. O tratamento dado por Dedekind aos números irracionais é o mais conhecido atualmente. Em dois livros pequenos, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) *e Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), ele realizou na matemática moderna aquilo que Eudoxo tinha feito na matemática grega, e ele próprio se referiu a teoria das proporções eudoxiana no livro V de Euclides:

> [...] e se interpretamos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e muitas outras tentativas de construir os números reais. (DEDEKIND, 1887 *apud* ÁVILA, 2006, p. 57)

O princípio de Dedekind consistia em tomar como ponto de partida o domínio dos números racionais. Em vez de identificar o número real como uma sequência convergente de números racionais e procurar uma saída para o círculo vicioso de Cauchy, Dedekind se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Galileu e Leibniz tinham julgado que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era consequência de sua densidade – isto é- do fato que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Porém, os números racionais têm essa propriedade, no entanto não formam um *continuum. (*BOYER, 1974)

Ao refletir sobre a questão, Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta – a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto sobre o segmento. Em qualquer divisão dos pontos do segmento em duas classes tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e só um ponto que realiza a divisão. Como Dedekind escreveu: "Por essa observação trivial o segredo da continuidade será revelado". A observação podia ser trivial, mas seu autor parece ter tido algumas dúvidas quanto a ela, pois hesitou durante alguns anos antes de se comprometer em algo impresso.

> Se todos os pontos de uma reta são divididos em duas classes, de modo que qualquer ponto da primeira classe fique à esquerda de qualquer ponto da segunda classe, então existe um e somente um, ponto que causa tal divisão de todos os pontos em duas classes, essa partição da reta em duas porções. (DEDEKIND, 1872 *apud* DANTZIG, 1970, p.152)

Dedekind viu que o domínio dos números racionais pode ser estendido de modo a formar um *continuum* de números reais, se supusermos que os pontos sobre uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais (axioma de Cantor-Dedekind). Aritmeticamente, significa que para toda divisão de números racionais em duas classes A e B tais que todo número da primeira classe, A é menor que todo número da segunda classe, B, existe um e só um número real que produz um *Schnitt* ou **corte de Dedekind**. Se A tem um maior número, ou se B contém um menor número, um corte define um número racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor, então o corte define um número irracional. (BOYER, 1974)

Tanto os números racionais e irracionais podem ser representados por cortes, no entanto existe uma diferença fundamental entre cortes racionais e irracionais. O racional é, ele próprio, parte da classe inferior, mas o corte irracional é completamente *ex parte*. Ou seja, o irracional que causou o corte não pertence nem a classe inferior e nem à superior. Isto quer dizer que, no caso racional, a classe inferior tem um maior elemento e a superior não tem nenhum menor elemento; no caso irracional, a classe inferior não tem maior elemento nem a classe superior tem menor elemento. Para Dantzig (1970) esse é o único aspecto que distingue os dois tipos de números, de acordo com a teoria de Dedekind: "é característica de um numero racional *pertencer a uma* das classes e é também característica dos irracionais *não pertencer a nenhuma*." (DANTZIG, 1970, p. 154). Em Ávila (2006), podemos encontrar uma exposição da construção dos números reais através da teoria dos cortes de Dedekind.

No cenário das teorias dos números reais, destacamos o matemático **Georg Cantor**, grande amigo de Dedekind, com o qual trocou diversas cartas. Em 1871, Cantor iniciou um programa de aritmetização semelhante ao de Méray e Weierstrass, contudo Cantor parece ter formado suas ideias independentemente do trabalho de Méray. Boyer (1974) destaca que, apesar de Cantor estudar os números reais, suas contribuições mais importantes exploravam a natureza do infinito.

Segundo Ávila (2006), em 1872, Cantor se ocupava do estudo da representação de funções por séries trigonométricas, e logo foi levado a investigar os pontos de descontinuidade destas funções, em que os mais simples eram conjuntos com número finito de pontos. No entanto, surgiram conjuntos mais complicados, que obrigou Cantor a investigar conjuntos infinitos, surgindo daí o conceito de **equivalência de conjuntos**. Dois conjuntos são equivalentes quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto a elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro sendo objeto desta correspondência, denominada biunívoca. Dizemos também que conjuntos equivalentes possuem a mesma **cardinalidade** ou **potência**.

Para discutirmos os resultados de Cantor sobre os irracionais, precisamos definir um **conjunto enumerável**. Para Ávila (2006) um conjunto enumerável é todo conjunto equivalente aos naturais, ou seja, se os elementos de um conjunto podem ser colocados em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto dos números naturais, este conjunto é enumerável. O conjunto dos números inteiros pares e o conjunto dos números racionais são exemplos de conjuntos enumeráveis.

As duas formas de subdivisão dos números reais. A primeira, a mais usual, consiste na divisão dos reais em números racionais e irracionais; e a segunda, consiste na divisão dos reais em números algébricos e transcendentes. Assim como os racionais, os números algébricos são enumeráveis. Assim, Cantor levantou uma questão em uma carta a Dedekind no final do ano de 1873, sobre os números transcendentes, mais genericamente, sobre os reais que os contêm.

Cantor assumiu que existia algum modo de enumerar todos os números da reta real. Restringiu sua análise aos números entre 0 e 1 e assumiu que os números deste intervalo poderiam se listados em uma ordem como decimais infinitos. No entanto, Cantor percebeu que nem todos os números reais entre 0 e 1 estavam incluídos na lista que havia elaborado onde presumia haver todos os números reais no referido intervalo. Assim, o estudioso surpreendeu o mundo matemático ao provar a **não-enumerabilidade** dos números reais, cuja prova é dada por Ávila (2006).

Cantor mostrou que existiam infinitos diferentes, um que caracterizava os números racionais e outro que caracterizava todos os números reais. Deste resultado, é possível concluir que "são os números transcendentes que dão ao sistema de números reais a "densidade" que resulta em maior potência" (BOYER, 1974, p. 415). Cantor decidiu publicar este importante resultado no *Journal de Crelle*, mas sabia que a oposição era forte ao seu trabalho sobre os números irracionais e o tamanho dos conjuntos.

De acordo com Aczel (2003), Cantor publicou seu artigo contendo a prova da não-enumerabilidade dos reais sob o título Sobre uma propriedade da coleção dos números algébricos reais (1874), título que não sugeria o conteúdo polêmico, pois alguns matemáticos poderiam examinar o título do trabalho e se julgassem haver algo objetável, convenceriam o editor a não publicá-lo. Uma exposição da obra de Cantor foi feita por Jourdain (1915), quando traduziu para o inglês dois artigos de Cantor de 1895 e 1897.

Para Boyer (1974), os incríveis resultados de Cantor o levaram a estabelecer a teoria dos conjuntos, porém este despendeu muitos esforços para convencer seus contemporâneos da validade de seus resultados, uma vez que havia considerável *horror infiniti*. O principal opositor de Cantor era Leopold Kronecker(1823-1891), que representava uma tendência totalmente oposta no mesmo processo de aritmetização. Segundo Struik (1986, p. 258), a tentativa de Kronecker era modelar toda matemática segundo a teoria dos números inteiros, tanto que chegou a proferir em um encontro em Berlim no ano de 1886 a conhecida frase "Deus fez os inteiros e os homens fizeram o resto." Mas Cantor ganhou finalmente aceitação quando a enorme importância de sua teoria se tornou mais óbvia para a fundamentação das funções reais e da topologia no século XX.

POSSIBILIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DOS NÚMEROS REAIS COM ENFOQUE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O interesse pela História da Matemática como ferramenta de ensino vem ganhando espaço na sala de aula através da busca contextualizada do assunto trabalhado, com vistas a proporcionar interesse por parte dos alunos e dando maior significação à matemática escolar. Na verdade, sabemos que há muitos problemas que envolvem o ensino deste tema, mas talvez o principal seja a abordagem que é feita de maneira rápida e superficial, escondendo as principais ideias sobre os números reais.

Segundo Mendes (2008) o conteúdo histórico é um elemento motivador e gerador da matemática escolar por esclarecer os seus por quês. É nas informações históricas que estão plantadas as raízes cotidiana, escolar e científica da matemática a ser (re)construída pelos estudantes e por isso devem ser bem explorados pelos professores. Desse modo, ao trazer fatos curiosos do passado histórico, estabeleceremos também as indagações que os matemáticos tiveram ao se deparar com os diversos conceitos e problemas matemáticos.

Araújo (2011) apresentou uma proposta didática para a introdução do conceito do número real, apresentando as circunstâncias históricas daquela época e os aspectos obscurecidos pelo tratamento comum dado ao tema. Para tanto, utilizou a ideia de medição no tratamento dos números reais, em que foi associado números e grandezas a partir da escolha de uma unidade. A fim de comparar duas grandezas diferentes de mesma natureza o autor fez uso da antifairese que consiste na verificação de quantas vezes uma grandeza cabe em outra. Assim, conceitos de incomensurabilidade apareceram constantemente em seu trabalho como na demonstração da diagonal do quadrado e do retângulo áureo.

Em Medeiros (2010), a construção dos números reais possui uma abordagem didática por meio da reta numérica enriquecida por situações problemas e história da matemática, associando o número à geometria e à álgebra. Do mesmo modo, Boff (2006) apresenta uma proposta de construção de números reais via medição exata de segmentos de reta para alunos do 9º ano utilizando como instrumento de ensino a régua escolar.

Embora sejam abundantes os trabalhos que enfatizam a temática história da matemática no ensino, consideramos que há certa carência nas metodologias a serem utilizadas com os números reais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve por objetivo **apresentar uma trajetória histórica dos números reais**, cuja realização permitiu o resgate do desenvolvimento histórico desde a descoberta dos números irracionais na Grécia no século V a.C. até às construções axiomáticas dos números reais que surgiram no final do século XIX. Consideramos que o conhecimento da história dos números reais é importante não só para o entendimento da própria construção histórica da matemática, mas também para servir de fonte a fim de eliminar possíveis dúvidas que possam emergir de discussões sobre o assunto em ambientes escolares e acadêmicos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Marcos Paulo Ferreira de. **Introdução ao conceito de números reais**: uma proposta didática baseada na história da matemática. 2011. 47 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (RJ), 2011.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para licenciatura**. São Paulo: Edgar Blücher, 2006.

BOFF, Daiane Scopel. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 254f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (RS), 2006.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

______. **The history of the Calculus and its conceptual development**. New York: Dover Publications, 1949.

DANTZIG, Tobias. **Número**: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

DUGAC, Pierre M. Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. **Revue d'histoire des sciences et de leurs applications**, Paris, v. 23, n. 4, p. 333-350, 1970.

EVES, Howard. **Introdução à História da matemática**. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2011.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992.

JOURDAIN, Philip E. B. **Contribuitions to the founding of the theory of transfinite numbers**. Chicago, Londres: The Open Court, 1915.
KLINE, Morris. **Mathematical trought from ancient to modern times**. Vol 1. New York: Oxford University Press, 1972a.

______. **Mathematical trought from ancient to modern times**. Vol 3. New York: Oxford University Press, 1972b.

MARTINS, Ana Patricia Morais da Fonseca. **A construção do sistema dos números reais por Dedekind, Weierstrass e Méray**. 2004. 207f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2004.

MEDEIROS, Jozan. **Uma abordagem de ensino dos números reais.** 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba (PB), 2010.

MENDES, Iran Abreu Mendes. **Tendências metodológicas no ensino da Matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.

MÈRAY, Charles. **Nouveau précis d’analyse infinitésimale**. Paris: Savy, 1872.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1986.

TWEDDLE, J. Christopher. Weierstrass's Construction of the Irrational Numbers. **Mathematische Semesterberichte**, v.58, p. 47-58, S.l.: Springer, 2010.

THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>. Acesso em 29/11/2014, 17:30:47.

RAÍZES HISTÓRICAS DA TEORIA DAS MATRIZES

Tássia Cristina da Silva Pinheiro
Hugo Carlos Machado da Silva
Fábio José da Costa Alves

Resumo
Este trabalho apresenta resultados de pesquisa bibliográfica que teve como objetivo realizar um levantamento sobre o histórico do desenvolvimento da teoria das matrizes. Para tanto, buscamos embasamento teórico principalmente nos escritos de Boyer (1996), Eves (2004), Katz (1999) e Hodgkin (2005). A leitura e análise destas obras nos permitiu perceber fatos históricos que deram origem a teoria das matrizes, dando ênfase a alguns pensamentos de matemáticos que tiveram grande contribuição para a construção da teoria que conhecemos hoje. Por ter conseguido sistematizar o assunto, o matemático inglês Arthur Cayley é tido como o criador das matrizes. Por fim podemos perceber que a teoria das matrizes surge a partir da necessidade de formalizar ideias advindas do desenvolvimento de sistemas lineares e determinantes e dessa mesma forma é inserido no currículo escolar da educação básica.

Palavras-chave: História da Matemática. Teoria das matrizes.

INTRODUÇÃO

A teoria das matrizes ganha relevante importância com a evolução dos equipamentos digitais, estando esse assunto presente desde simples aplicações como o preenchimento de um formulário, perpassando pelo armazenamento das informações, até a forma mais sofisticada no tratamento e apresentação de imagens em tela, seguindo esta linha facilmente é possível dizem que sua aplicação se estende em boa parte das áreas do saber, seja de forma implícita ou explicita. Permeando o cotidiano com uma álgebra invisível e pouco associado a matemática escolar, onde esta é vista de forma básica no ensino médio.

A variedade de áreas onde o conteúdo está presente engloba campos como a programação computacional, engenharias, organização de informações em empresas, construção de imagens, boletos, planilhas, filmes, etc.

As matrizes foram inseridas no currículo da educação básica após discussões sobre ensino de matemática na década de 50 principalmente por ideais do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que se fundamentavam na introdução de conteúdos apoiados nos conceitos de estruturas matemáticas (anel, corpo, grupo etc) e se justificavam por contribuir com os avanços científicos e tecnológicos conforme afirma Lopes (2012).

O assunto é visto no ensino médio, geralmente no 2° ano. Apesar das variadas aplicações, em sala de aula, as matrizes são ensinadas comumente pelo método tradicional, que entendemos aqui por aquele que possui uma estrutura de ensino que utiliza geralmente exposição oral e a sequência: definição, exemplos e exercícios conforme Messias, Sá e Fonseca

(2007). Essa metodologia pode implicar em dificuldades no aprendizado, visto que distancia, ao nosso ver, o aluno das aplicabilidades práticas das matrizes.

Atualmente a criação de uma teoria formal das matrizes é creditada ao matemático Arthur Cayley, porém é comum encontrarmos no estudo da teoria das matrizes, nomes de outros matemáticos, como por exemplo ao estudarmos o método de eliminação de *Gauss-Jordan*. Isso nos leva ao pensamento de que vários matemáticos possuíram importantes papeis de contribuição para o desenvolvimento da teoria das matrizes.

Dessa forma, emergem algumas indagações, a exemplo de: 'quais foram os matemáticos que contribuíram para a consolidação da teoria das matrizes? '; 'Em qual contexto essa teoria se desenvolve?'; 'O que motiva seu surgimento?'.

Neste texto teceremos comentários sobre a história da matemática, no intuito de mostrar os caminhos percorridos pela Teoria das Matrizes desde seu surgimento até os seus usos nos dias atuais, buscando responder, mesmo que de forma superficial, as questões citadas anteriormente.

O DESENVOLVIMENTO DAS MATRIZES

O primeiro registro que se tem das noções sobre matrizes vem dos chineses na dinastia Han (202 a.C – 207 d.C). A história da matemática chinesa inicia com os escritos de *Nove Capítulos* que pode ser comparado com *Os Elementos* de Euclides para a civilização ocidental. Estes escritos não foram os primeiros a serem conhecidos, mas de acordo com Cullen (1996 apud Hodgkin, 2005) pode ter sido uma compilação do início da dinastia Han.

De acordo com Boyer (1996) o livro é composto por 246 problemas com suas soluções e maneiras de como chegar a essas soluções, abordando temas de mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharias, impostos, Cálculos e soluções de equações. Em 263 d. C o matemático Liu Hiu escreve comentários dos procedimentos presentes neste escrito chinês que acabaram sendo anexado ao mesmo, fato este que o diferencia de outros textos históricos. O assunto matrizes é tratado no oitavo capítulo deste livro com o título *Fangcheng* ou Tabelas Retangulares. Nos comentários de Liu Hui há a tentativa de simplificar o entendimento dos problemas envolvendo situações com as diferentes categorias de arroz, como veremos no problema que trata da noção de matrizes.

A utilização de diferentes categorias de arroz nos conduz a ideia moderna de abstração com a utilização de x, y e z no lugar de "arroz de baixa qualidade, de média qualidade e alta qualidade". Apresentamos abaixo o texto do oitavo capítulo, problema 1, e a regra que resolve o problema.

Problema

"São dados 3 fardos de arroz de alta qualidade, 2 fardos do arroz de média qualidade e 1 fardo de arroz de baixa qualidade. Rendimento: 39 dou de grãos. 2 fardos de arroz de alta qualidade, 3 fardos de arroz de média qualidade e 1 fardo de arroz de baixa qualidade, rendimento: 34 dou. 1 fardo de arroz de alta qualidade, 2 fardos de média qualidade e 3 fardos de baixa qualidade, rendimento: 26 dou. Pergunta-se: quanto de arroz rende cada fardo de cada nível de rendimento?"

Resposta: "Arroz de alta qualidade: $9\frac{1}{4}$ dou/por fardo; arroz de média qualidade: $4\frac{1}{4}$ dou/por fardo; arroz de baixa qualidade: $2\frac{3}{4}$ dou/por fardo".

Regra da Tabela – Fangcheng

Escrevemos uma tabela em que a coluna da direita é formada por 3 fardos de arroz de alta qualidade, 2 fardos do arroz de média qualidade, 1 fardo de arroz de baixa qualidade e rendimento 39 dou de grãos, proceder da mesma maneira para a coluna do meio e da esquerda.

Use o número de fardos de arroz de alta qualidade na coluna da direita para multiplicar a coluna do meio, em seguida, estas se fundem. Novamente multiplicar o próximo e continuar. Em seguida, use o restante do arroz de média qualidade na coluna do meio para multiplicar a coluna da esquerda e o fator principal. O restante do arroz de baixa qualidade na coluna da esquerda é o divisor, a entrada abaixo é o dividendo. O quociente é o rendimento do arroz de baixa qualidade.

Fonte: Adaptado de Hodgkin (2005)

Para Hodgkin (2005) a explicação acima é suficiente para, calcular uma solução básica, já que achado o rendimento de arroz de baixa qualidade os outros podem ser calculados por substituição e também serve para mostrar como o método é descrito no *Nove Capítulos*. Entretanto, esta descrição não é clara se pensarmos nos termos modernos de resolução de matrizes, pois não conhecemos o significado de 'fundir' e 'fator principal' presentes na descrição.

Seguindo as instruções dadas acima, o processo começa da seguinte maneira:

- Escrevemos uma tabela em que a coluna da direita é formada por 3 fardos de arroz de alta qualidade, 2 fardos do arroz de média qualidade, 1 fardo de arroz de baixa qualidade e rendimento 39 dou de grãos, proceder da mesma maneira para a coluna do meio e da esquerda;

Temos então:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{matrix}$$

Observamos que os chineses utilizam a representação de sua tabela com os resultados do sistema de equações como o último termo em cada coluna, característica de sua escrita vertical. Para representar os números usados, em termos de matriz na notação moderna, utilizamos os resultados como último termo em cada linha, então temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \vdots & 26 \\ 2 & 3 & 1 \vdots & 34 \\ 3 & 2 & 1 \vdots & 39 \end{bmatrix}$$

Em seus comentários, Liu Hiu explica o significado de ‘fundir’:

> O significado desta regra é: subtrai a coluna com o menor (entrada do topo) repetidamente a partir das colunas com os maiores (entrada do topo), então a entrada do topo deve desaparecer. Com esta entrada desaparecida, esta coluna tem um item ausente. (HODGKIN, 2005, p.)

Relacionando esta explicação com o que Fangcheng orienta, fazemos:

- Multiplicamos a coluna do meio por 3 (número de fardos de alta qualidade)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow \text{multiplicação} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix}$$

- Em seguida, subtraímos a coluna da direita (a menor) da do meio, repetidamente. Os passos são

$$1^{\underline{a}}\ \text{subtração}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 7 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 26 & 63 & 39\end{bmatrix}\rightarrow 2^{\underline{a}}\ \text{subtração}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 26 & 24 & 39\end{bmatrix}$$

A coluna do meio tem então um item ausente. Faremos o mesmo processo utilizando as colunas da direita e da esquerda.

- Multiplicamos a coluna da esquerda por 3:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 26 & 24 & 39\end{bmatrix}\rightarrow\text{multiplicação}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 6 & 5 & 2\\ 9 & 1 & 1\\ 78 & 24 & 39\end{bmatrix}$$

- Subtraímos a coluna da esquerda pela da direita:

$$1^{\underline{a}}\ \text{subtração}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 8 & 2 & 1\\ 39 & 24 & 39\end{bmatrix}$$

Temos agora dois itens ausentes na primeira linha. Utilizaremos agora as colunas da esquerda e do meio.

- Multiplicamos a coluna da esquerda por 5 e a coluna do meio por 4:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 20 & 20 & 2\\ 40 & 8 & 1\\ 195 & 96 & 39\end{bmatrix}$$

- Subtraímos a coluna da esquerda pela coluna do meio:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 20 & 2\\ 36 & 8 & 1\\ 99 & 96 & 39\end{bmatrix}$$

Encontramos assim o resultado para o arroz de baixa qualidade e por substituição é possível encontrar para os demais. Notamos que o método descrito é similar ao que conhecemos atualmente como método de escalonamento.

IDEIAS BÁSICAS DE MATRIZES

Saindo da Dinastia Han, na China, encontramos registros a respeito do estudo das matrizes apenas na Europa Moderna, as ideias básicas deste conteúdo foram sistematizadas a partir da contribuição de diversos matemáticos, a seguir discutiremos que contribuições foram dadas por cada matemático participante desta jornada.

De acordo com Kline (1990), Carl Friedrich Gauss discutiu a teoria das formas quadráticas, isto é, funções de duas variáveis x, y da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$, com a, b, c inteiros, no capitulo 5 de *Disquisitiones*, em 1798. Nesta discussão, ele considera a ideia de uma substituição linear que transforma uma forma em outra. Isto é, se $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$, então a substituição

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

converte F em uma nova forma F', cujos coeficientes dependem dos coeficientes de F e esses da substituição. Gauss notou que se F' se transforma em F'' pela segunda substituição linear

$$x' = \epsilon x'' + \zeta y''$$
$$y' = \eta x'' + \theta y''$$

Então a composição de duas substituições nos da uma nova substituição transformando F emF'':

$$x = (\alpha\epsilon + \beta\eta)x'' + (\alpha\zeta + \beta\theta)y''$$
$$y = (\gamma\epsilon + \delta\eta)x'' + (\gamma\eta + \delta\theta)y''$$

O coeficiente "matriz" da nova substituição é o produto dos coeficientes das duas matrizes originais. Gauss realizou um calculo análogo em seu estudo do ternário de formas quadráticas $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxy + 2Eyz + Fz^2$, o que de fato gerou as regras para multiplicação de matrizes 3×3. Mas, embora ele tenha escrito os coeficientes da substituição em uma matriz retangular e utilizado uma única letra S para representar uma substituição particular, Gauss não se referiu explicitamente a ideia de composição como "multiplicação".

Outra contribuição para o desenvolvimento das matrizes veio com Augustin-Louis Cauchy, que em 1815, publicou uma *Memória Fundamental Da Teoria Dos Determinantes*, na qual ele não somente apresenta o termo "determinante" para substituir outros termos antigos, mas também usou a simbologia $a_{1,n}$ para defender o que ele chamou de "sistemas simétricos"

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

ao qual o determinante é associado. Embora muitos resultados básicos do cálculo de determinantes fossem conhecidos anteriormente, Cauchy deu o primeiro tratamento completo destes em seu memorial, incluindo as ideias de como as matrizes de menores associada a uma dada matriz (adjunta) e o procedimento para calcular um determinante pela expansão de uma linha ou coluna. Além disso, ele seguiu Gauss, no reconhecimento explicito da ideia de composição de dois sistemas $\alpha_{1,n}$ e $a_{n,1}$ para obter um novo sistema $m_{1,n}$ definido pela conhecida lei da multiplicação

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$$

Ele também mostrou que o determinante de um novo sistema é o produto dos dois sistemas originais.

Segundo Katz (2008), Ferdinand Gotthold Eisestein, um aluno de Gauss que visitou Hamilton na Irlanda em 1843, apresentou a notação explicita $S \times T$ para representar a substituição composta de S e T da discussão da forma do ternário quadrático em um artigo de 1844, talvez por causa do teorema de determinantes de Cauchy.

O autor nos diz ainda que sobre esta notação, Eisestein escreveu:

> “Acidentalmente um algoritmo para o cálculo pode ser baseado nisso, o que consiste na aplicação de regras usuais para operações de multiplicação, divisão e potenciação para equações simbólicas entre sistemas lineares, equações simbólicas corretas são sempre obtidas, sendo a única consideração a ordem dos fatores, isto é, a ordem da composição dos sistemas não pode ser alterada”. (Katz, 2008, p. 741)

Isto é interessante, mas sem importância se considerar que as discussões de Eisestein e Hamilton, em 1843, estimulou os dois a conceber a possibilidade de um sistema algébrico com uma multiplicação não comutativa.

OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Kline (1990) afirma que durante o século XVII havia uma imensa quantidade de trabalhos sobre determinantes tanto no oriente quanto no ocidente, com isso foi-se tornando evidente que a própria tabela podia ser estudada e manipulada com muitas finalidades independente do valor do determinante. A tabela seria enfim chamada de Matriz.

Notamos que a noção do que conhecemos como matriz já vinha se desenvolvendo desde a antiguidade, no entanto não se designava esta noção por algum termo especifico. De acordo com Kline (1990) James Joseph Sylvester (1814 – 1897) foi o primeiro a utilizar um termo para representar tal noção, em 1850 que Sylvester cunhou o termo matriz para representar "uma agrupamento retangular de termos composto, por exemplo, de m linhas e n colunas", devido este agrupamento podemos formar diversos sistemas de determinantes. Katz (2008) nos diz ainda que palavra inglesa *matrix* significava: o lugar a partir do qual alguma coisa se originava, Sylvester não usava o termo em todos seus estudos, foi Cayley quem propagou esta terminologia em seus artigos de 1855 e 1858.

Arthur Cayley insistiu, em seu artigo de 1855, que logicamente a ideia de uma matriz antecede a de determinante, mas historicamente a ordem é inversa e isto porque as propriedades básicas de matrizes foram esclarecidas quando as matrizes foram introduzidas. Assim, a impressão geral entre os matemáticos era de que as matrizes eram uma invenção altamente original e independente, criadas por matemáticos puros quando eles conjecturaram que a utilidade potencial da ideia era errônea. Pelo fato de Cayley ter sido o primeiro a isolar uma matriz e o primeiro a publicar uma série de artigos sobre o tema, a ele é geralmente creditado como sendo o criador da teoria das matrizes.

Anteriormente, Cayley percebeu que a utilização de matrizes era muito conveniente para a teoria das equações lineares. Assim, ele escreveu para o quadro de equações lineares

$$\begin{gathered}
\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots \\
\eta = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \cdots \\
\zeta = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \cdots \\
\vdots = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots .
\end{gathered}$$

A forma

$$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \cdots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} (x, y, z, \dots)$$

E, então, determinou a solução deste sistema usando o que ele chamou de inversa da matriz:

$$(x, y, z, \dots) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \cdots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} (\xi, \eta, \zeta, \dots),$$

Essa representação veio da analogia básica da matriz de equações para uma simples equação linear de uma variável. Cayley, contudo, conhecendo a regra de Cramer, descreveu as entradas da matriz inversa em termos de frações (envolvendo os determinantes apropriados). (Katz, 2008)

Devido o uso das matrizes estar bem estabelecidos ocorreu a Cayley introduzi-las como entidades distintas. Ele disse: *"Eu, certamente, não obtive a noção de uma matriz de qualquer maneira através do quartenions; era diretamente qualquer uma a partir de um determinante ou como uma maneira conveniente de expressar as equações"*(Kline, 1990):

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

E então ele apresentou a matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Que representa a informação essencial sobre a transformação.

Em seus estudos de invariantes durante uma transformação linear, Cayley apresentou as matrizes envolvendo uma notação simples, em que ele deu algumas noções básicas. Isso foi seguido pelo principal artigo do tema, "A Memoir on the Theory of Matrices" (1858). A seguir temos uma breve definição dada por Cayley para matrizes 2×2 ou3×3, ainda que a definição se aplique para matrizes $n \times n$ e em alguns casos de matrizes retangulares, segundo Kline (1990).

- Igualdade: Duas matrizes são iguais se seus elementos correspondentes são iguais;
- Matriz nula e matriz identidade como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- Adição: é definida pela matriz cujos elementos são a soma de seus correspondentes nas matrizes iniciais;
- Subtração: é definida pela matriz cujos elementos são a diferença de seus correspondentes nas matrizes iniciais;

Cayley afirma em seu tratado que a adição (e subtração) de matrizes é precisamente similar a adição de quantidades algébricas comuns, mas notou que quanto a multiplicação existe a peculiaridade de que matrizes não são comutativas.

- Multiplicação por escalar: Se m é um escalar e A uma matriz então mA é a matriz em que cada elemento corresponde a m vezes um elemento de

A.

Segundo Kline (1990), a definição de multiplicação de duas matrizes, foi obtida por Cayley diretamente da representação do resultado de duas transformações sucessivas. Então se essa transformação

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

É seguida da transformação

$$x'' = b_{11}x' + b_{12}y'$$
$$y'' = b_{21}x' + b_{22}y'$$

Então a relação entre x'',y'' e x, y é dada por:

$$x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y$$
$$y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y$$

Por esta razão, Cayley (1858) definiu o produto de matrizes como:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Isto é, o elemento c_{11} na matriz produto é a soma do produto dos elementos na $i$ésima linha do fator esquerdo e o elemento correspondente da $j$ésima coluna do fato da direita. A multiplicação é associativa, mas nem sempre é comutativa. Cayley (1858) indicou que uma matriz $m \times n$ só pode ser multiplicada por uma matriz $n \times p$.

- Matriz inversa: dada a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

A inversa é dada por

$$\frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial_a\nabla & \partial_{a'}\nabla & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla & \partial_{b'}\nabla & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla & \partial_{c'}\nabla & \partial_{c''}\nabla \end{pmatrix}$$

na qual ∇ é o determinante da matriz e $\partial_x\nabla$ é o co-fator de x neste determinante, isto é, o menor principal de x com o símbolo apropriado. Não encontramos registros da definição dada por Cayley sobre co-fator, entendemos então que o procedimento registrado acima é o cálculo da matriz inversa por meio da Matriz Adjunta, a qual é a transposta da matriz dos co-fatores.

Katz (2008) afirma que Cayley, em seu estudo de 1858, fez uso constante da analogia entre manipulações algébricas ordinárias e aquelas com matrizes, mas observava onde estas analogias falhavam. Dessa maneira, usando a fórmula para a inversa de uma matriz 3×3, Cayley escreveu que

> "a noção de matriz inversa falha completamente quando o determinante desaparece; a matriz é neste caso dita como indeterminada...também pode se acrescentar de que a matriz nula é indeterminada, e que o produto de duas matrizes pode ser zero, mesmo que um dos fatores não seja zero, isso se uma ou ambas as matrizes forem indeterminadas" (Cayley, 1858, apud Katz, 2008).

Cayley também definiu a matriz transposta:

- Matriz Transposta: é aquela em que as linhas e colunas são permutadas.

Esta afirmação foi feita sem prova $(LMN)' = N'M'L'$, em que a primeira denota a transposta.

- Matriz simétrica: Se $M' = M$, então M é chamada de simétrica, ou seja, a matriz é igual a sua transposta. Se $M' = -M$, então M é assimétrica ou alternada.

Cayley também afirmou que qualquer matriz pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica com uma assimétrica, entendemos esta afirmação dado o que se tem hoje por: $M = S + T$, em que $S = \frac{1}{2}(M + M')$ e $T = \frac{1}{2}(M - M')$.

De acordo com Klein (1972), talvez por isso Cayley tenha usado, em 1858, a notação convencional de uma única letra para matrizes sugerida a ele como resultado do teorema conhecido como Cayley-Hamilton para o caso de uma matriz 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cayley explicitou este resultado como

$$det\begin{pmatrix} a - M & b \\ c & d - M \end{pmatrix} = 0$$

Cayley primeiramente comunicou este "tão extraordinário" teorema através de uma carta a Sylvester em novembro de 1857. Em 1858, ele provou isto simplesmente mostrando que o determinante $M^2 - (a + d)M^1 + (ad - bc)M^0$ é igual a zero (na qual M^0 é a matriz identidade). Determinando a versão geral essencialmente na forma moderna que M satisfaz a equação em λ, $\det(M - \lambda I) = 0$, a equação característica, Cayley notou que ele tinha verificado o teorema para matrizes 3×3, no entanto escreveu ainda mais: "Eu não tinha pensado nisso necessariamente para ocupar-me do trabalho de uma prova formal no caso geral de uma matriz de qualquer grau". Foi Georg Frobenius que tomou vantagem da inovadora notação de Cayley para dar a prova completa 20 anos mais tarde.

A motivação de Cayley na determinação do teorema Cayley-Hamilton foi mostrar que “qualquer matriz satisfaz uma equação algébrica de sua ordem” e, ainda , que qualquer função racional ou integral de uma matriz pode ser expressa por uma função racional ou integral de uma ordem no máximo igual a da matriz, exceto unitária. Cayley prosseguiu para mostrar que um pode adaptar este resultado até para funções irracionais. Em particular, ele mostrou como calcular $L = \sqrt{M}$, quando M é uma matriz 2×2 como a que foi dada acima. O resultado é dado da seguinte forma

$$L = \begin{pmatrix} \frac{a+Y}{X} & \frac{b}{X} \\ \frac{c}{X} & \frac{d+Y}{X} \end{pmatrix}$$

Onde $X = \sqrt{a + d + 2\sqrt{ad - bc}}$ e$Y = \sqrt{ad - bc}$. Cayley falhou, contudo, para dar condições para quais os resultados fossem válidos. Um argumento similar, novamente depende da manipulação de símbolos sem qualquer consideração de casos especiais em que a manipulação falhe, o que permitiu que Cayley trouxesse uma caracterização falsa de toda matriz L comutativa com M. Na verdade isso foi muito questionado por Camille Jordan, o que o levou a desenvolver 10 anos depois uma classificação fundamental de matrizes, o que conhecemos hoje como forma canônica de Jordan.

Em um artigo de 1858, Cayley anuncia o que agora é chamado de teorema de Cayley-Hamilton para uma matriz quadrada de qualquer ordem. No teorema temos que se M é substituída por x na equação característica o resultado da matriz é uma matriz nula. Cayley afirma que verificou o teorema para uma matrix $3x3$ e que a prova não é necessária.

A associação de Hamilton neste teorema se dá pelo fato de que na introdução de *Lectures in Quartenions* a noção de função vetorial linear r' de outro vetor r, implica uma transformação linear de x, y, z para x', y', z'. Ele provou que a matriz dessa transformação satisfaz a equação característica da matriz, mesmo que ele não tenha pensado em termos formais de matriz.

Outros matemáticos encontraram propriedades especiais das raízes características de uma classe de matrizes, Hermite, por exemplo, mostrou que se uma matriz $M = M^*$, em que M^* é a transposta de uma matriz formada pela substituição de cada elemento de M pelo conjugado complexo (M é chamada de hermitiana), então a raiz característica é real. Em 1861, Clebsch deduziu a partir do teorema de Hermite que uma raiz característica não nula de uma matriz real assimétrica são imaginários puros. Assim, Arthur Buchheim demonstrou que se M é simétrica e seus elementos são reais, as raízes características são reais, este resultado já tinha sido estabelecido para determinantes por Cauchy. Henry Taber em outro artigo afirmou que se for evidente

$$x^n - m_1x^{n-1} + m_2x^{n-2} \pm m_n = 0$$

é a equação característica de qualquer matriz quadrada M, então o determinante de M é m_n e se por um menor principal de uma matriz entendemos o determinante de um menor cuja diagonal é parte da diagonal principal de M, então m_i é a soma da $i$ésima linha principal menor. Em particular, então, m_1, também é a soma das raízes características, é a soma dos elementos ao longo da diagonal principal. A soma é chamada traço da matriz. As provas das afirmações de Taber foi dada por Willian Henry Metzler.

Frobenius levantou uma questão em relação a equação característica. Ele procurou o polinômio mínimo, o polinômio de menor grau, que satisfaz a matriz. Ele afirmou que o polinômio é formado a partir dos fatores do polinômio característico e é único. Kurt Hensel provou a afirmação de unicidade de Frobenius após 1904. No mesmo artigo, Hensel também provou que se $f(x)$ é o polinômio mínimo de uma matriz M e $g(x)$ é qualquer outro polinômio que satisfez M, então $f(x)$ divide $g(x)$.

A noção de linha de uma matriz foi introduzida por Frobenius em 1879 ainda em conexão com determinantes. Uma matriz com m linhas e n colunas (de ordem $m \times n$) tem $k$linhas menores de todas as ordens a partir de A (dos próprios elementos de A) para o menor de dois integrantes m e n inclusive. Uma matriz tem linha r se, e somente se, tem pelo menos r linhas menores cujo determinante não é zero enquanto o determinante de todos os menores de r são zero.

Duas matrizes A eB podem ser relacionados de varias maneiras. Elas são equivalentes se existe duas matrizes não singulares U eV, tal que $A = UBV$. Sylvester mostrou em seu trabalho sobre determinantes que o maior divisor comum d_i da$i$esima linha do menor determinante de B é igual ao maior divisor comum d_i da $i$esima linha do menor determinante de A. Assim, H. J. S. Smith, trabalhou com matrizes de elementos integrais, mostrou que cada matriz A de linha ρ é equivalente a uma matriz diagonal com elementos $h_1, h_2, \dots, h_n$ abaixo da diagonal principal tais que h_1 divide $h_1 + 1$. O quociente $h_1 = d_1$,$h_2 = {}^{d_2}/_{d_1}$, são chamados de fatores invariantes de A. Além disso, se

$$h_1 = p_1^1 p_2^1 \dots p_k^1$$

(em que os p_i são primos) esses vários p_i são os divisores elementares de A. Os fatores invariantes determinam os divisores elementares e reciprocamente.

As ideias de fatores invariantes e divisores elementares têm origem a partir do trabalho sobre determinante de Sylvester e Weiertrass, foram transferidas para matrizes no artigo de Frobenius de 1878. O significado dos fatores invariantes e dos divisores elementares para matrizes é: a matriz A é equivalente a matriz B se, e somente se, tem os mesmos divisores elementares ou fatores invariantes. Frobenius promoveu um trabalho com fatores invariantes em seu artigo de 1878 e então organizou a teoria dos fatores invariantes e divisores elementares de forma lógica.

O trabalho de 1878 habilitou Frobenius a dar a primeira prova geral do teorema de Cayley-Hamilton e para modificar o teorema quando algumas das raízes características da matriz são iguais. Nesse mesmo artigo ele também mostrou que quando $AB^{-1} = B^{-1}A$, neste caso existe um quociente A/B sem ambiguidade, portanto $(A/B)^{-1} = B/A$ e $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, em que A^T é a transposta de A.

O assunto da matriz ortogonal tem recebido considerável atenção. Apesar de que o termo usado por Hermite em 1854. Uma matriz M é ortogonal se esta é igual a inversa da transposta, isto é, se $M = (M^T)^{-1}$. Além da definição, Frobenius provou que se S é uma matriz simétrica e T uma não simétrica, uma matriz ortogonal pode ser sempre escrita na forma $(S - T)/(S + T)$ ou mais simples $(I - T)/(I + T)$.

Autovalores e Autovetores

De acordo com Katz (2008) a classificação de Jordan não depende da manipulação formal de matrizes, mas da teoria espectral, os resultados circundam o conceito de autovalores. Na terminologia moderna, um autovalor de uma matriz é a solução λ tanto da equação matricial $AX = \lambda X$, onde A é uma matriz $n \times n$ e X é uma matriz $n \times 1$, quanto $XA = \lambda X$, onde A é uma matriz $n \times n$ e X é uma matriz $1 \times n$. Um autovetor correspondente ao autovalor λ é um vetor X que satisfaz a mesma equação. Esses conceitos, em sua origem e depois do desenvolvimento, eram independentes da teoria das matrizes; eles nasceram de um estudo de várias ideias que recentemente foram incluídas na teoria. Portanto, o contexto do período dos primeiros problemas de autovalores surgiram durante o século XVIII foram os da solução dos sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

D'Alambert, em problemas datados de 1743 a 1758, e motivado pela consideração de movimento de uma corda, com um número de massa finito (aqui reduzido para simplesmente 3), considerou o sistema

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik} y_k = 0 \; i = 1,2,3$$

Para resolver este sistema, ele multiplicou a $i$ésima equação por uma constante v_i para cada i e somou as equações para obter

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \sum_{i,k=1}^{3} v_i \, a_{ik} y_k = 0$$

Se os v_i são então escolhidos então $\sum_{i=1}^{3} v_i \, a_{ik} + \lambda v_k = 0$ para $k = 1,2,3$, isto é, se (v_1, v_2, v_3) são autovetores correspondentes ao autovalor $-\lambda$ para uma matriz $A = (a_{ik})$, a substituição $u = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$ reduz o sistema original para uma equação diferencial

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u = 0$$

Uma equação que, após o trabalho de Euler sobre equações diferenciais, é facilmente resolvida e leva a solução para três y_i. Um estudo de três equações em que isso aparece, mostra que λ é determinado por uma equação cúbica com três raízes. D'Alembert percebeu que para as soluções terem um sentido físico elas devem levar o limite $t \to \infty$. Isso somente seria verdade contato que os três valores de λ fossem distintos, reais e positivos.

Katz (2008) também afirma que foi Cauchy quem primeiramente resolveu o problema de determinar num caso especial a natureza dos autovalores a partir da natureza da própria matriz (a_{ik}). Em toda probabilidade, ele não foi influenciado pelo trabalho de D'Alembert sobre equações diferenciais, mas pelos trabalhos de superfícies quadradas, um estudo necessário como parte da geometria analítica que Cauchy estava ensinando desde 1815 na Ècole Politechnique. Uma superfície quadrada (com origem no centro) é dada pela equação $f(x, y, z) = K$, em que f é uma forma de ternário quadrático. Para classificar tais superfícies, Cauchy precisava encontrar uma transformação de coordenadas com as quais f é convertida para uma soma ou diferença de quadrados. Em termos geométricos, esse problema consiste encontrar um novo conjunto de eixos ortogonais num espaço tridimensional que expresse a superfície. No entanto, Cauchy generalizou o problema para formas quadradas com n variáveis, os coeficientes com os quais pode se escrever uma matriz simétrica. Por exemplo, o binário quadrático $ax^2 + 2bxy + cy^2$ determina a matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

O objetivo de Cauchy era encontrar uma substituição linear em que as variáveis resulta numa matriz diagonal, um objetivo que ele alcançou em seu artigo de 1829. Devido os detalhes no caso geral são relativamente envolvidos e devido a essência da prova de Cauchy é aparentemente para o caso de duas variáveis, este é o caso que estamos considerando aqui.

Para encontrar a substituição linear que converta a forma quadrática $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ numa soma de matrizes, é necessário encontrar o máximo e o mínimo de $f(x, y)$ sujeito a condição $x^2 + y^2 = 1$. O ponto em que ocorre um valor máximo de f é então um ponto no círculo unitário que também se encontra na extremidade de um eixo de um membro da família de elipses (ou hipérboles) descritas pela equação $f(x, y) = k$. Se traçarmos uma reta da origem a este ponto, tanto o eixo como a perpendicular a esta reta apresentará uma equação que contem somente os quadrados das variáveis. Pelo principio dos multiplicadores de Lagrange, os valores extremos ocorrem quando as razões $f_x/2x$ e$f_y/2y$ são iguais. Definindo cada uma dessas igualadas a λ nos dá as duas equações

$$\frac{ax + by}{x} = \lambda \quad \text{and} \quad \frac{bx + cy}{y} = \lambda,$$

As quais podem ser reescritas como um sistema

$$\begin{aligned} (a - \lambda)x + by &= 0 \\ bx + (c - \lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Cauchy sabia que para que a solução deste sistema não fosse trivial o determinante deveria ser zero, isto é, $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0$. Na terminologia de matriz esta equação é a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, a equação que Cayley tratou 30 anos depois.

Para ver como as raízes da equação característica diagonalizamuma matriz, sejamλ_1 eλ_2 essas raízes e (x_1, y_1), (x_2, y_2) sejam as solução correspondentes para x e y. Assim,

$$(a - \lambda_1)x_1 + by_1 = 0 \text{ e } (a - \lambda_2)x_2 + by_2 = 0$$

Se multiplicarmos a primeira por x_2, a segunda por x_1, e subtraí-las, resultará na seguinte equação

$$(\lambda_2 - \lambda_1)x_1x_2 + b(y_1x_2 - x_1y_2) = 0$$

Analogamente, iniciando com as duas equações envolvendo $c - \lambda$, uma resulta na equação

$$b(y_2x_1 - y_1x_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)y_1y_2 = 0$$

Somando essas duas equações temos

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1x_2 + y_1y_2) = 0$$

Portanto, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (e isso com certeza é verdadeiro no caso considerado, a menos que na forma original ela já seja diagonal) então $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Pois, (x_1, y_1),(x_2, y_2) são apenas determinados para um valor múltiplo constante o qual pode ser arranjado para ter $x^2 + y^2 = 1$ e ${x^2}_2 + {y^2}_2 = 1$. Na terminologia moderna, a substituição linear

$$x = x_1u + x_2v$$

$$y = y_1u + y_2v$$

é ortogonal. Calcula-se facilmente que a nova forma quadrática originada a partir desta substituição é $\lambda_1u^2 + \lambda_2v^2$ como se desejava. λ_1eλ_2 são reais como assumido, caso contrário, seriam complexos conjugados uns dos outros. Neste caso, x_1 poderia ser o conjugado de x_2 e y_1 de y_2, e $x_1x_2 + y_1y_2$ não poderia ser zero. Cauchy mostrou, portanto, que todos autovalores de uma matriz simétrica são reais e pelo menos neste caso em que eles são diferentes, a matriz pode ser diagonalizável utilizando a substituição ortogonal.

FORMAS CANÔNICAS

De acordo com Katz (2008), os argumentos básicos do trabalho de Cauchy forneceu o início de uma extensa teoria que trata de autovalores de vários tipos de matrizes e com forma canônica. Em geral, no entanto, ao longo do século XIX esses resultados foram todos escritos na forma de termos e não de matrizes. Formas quadradas levam a matrizes simétricas. O caso mais geral de forma bilineares, funções de $2n$ variáveis da forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

levam a matriz quadrada genérica.

A parte mais influente da teoria das formas foi praticado por Camille Jordan em seu *Traité des substituition*. Jordan trouxe o problema das classificações, não pelo estudo das formas bilineares, mas pelo estudo das próprias substituições lineares. ele fez um estudo detalhado do trabalho de Galois sobre a solução de equações algébricas e especialmente seu trabalho sobre soluções de equações do primeiro grau. A solução envolve o estudo de substituição linear nestas raízes, substituições em que os coeficientes podem ser considerados elementos de um campo finito de ordem p. A substituição de $x_1, x_2, \dots, x_n$ pode ser expressa em termos de uma matriz A. Em outras palavras, se X representa uma matriz $n \times 1$ das raízes x_i, então a substituição pode ser escrita como$X \equiv AX\ (mod\, p)$. O objetivo de Jordan era encontrar o que ele chamava de “transformação de índices”, assim a substituição poderia ser expressa em termos que eram tão simples quanto possíveis. Na notação de matriz, significa que ele procurava uma matriz $Pn \times n$ invertível em que $PA \equiv DP$, em que D fosse a matriz mais simples. Portanto, se $Y \equiv PX$, então $PAP^{-1} \equiv PAX \equiv DPX \equiv DY$ e a substituição em Y é simples. Usando o polinômio característico para A, Jordan notou que se todas as raízes de $\det(A - \lambda I) \equiv 0$ são distintas, então D pode se transformada em diagonal, com os elementos diagonais sendo autovalores. Por outro lado, se elas são raízes múltiplas, Jordan mostrou que a substituição pode ser encontrada como resultando em D, que são séries

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n \end{pmatrix}$$

em que cada série D_i é uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_i & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \lambda_i \end{pmatrix}$$

E $\lambda_i \not\equiv 0\ (mod\, p)$ é uma raiz do polinômio característico. A forma canônica conhecida como forma de Jordan, em que os valores λ_i fora da diagonal principal de uma matriz são todos substituídos por 1, foram introduzidos por Jordan em 1871, quando ele percebeu que esse método podia ser aplicado para solução de sistemas de equações lineares diferenciais cujos coeficientes, ao invés de serem tomados de um campo p elementos, são números reais ou complexos. Portanto, Jordan retomou cem anos depois o trabalho de D’Alembert, para a origem da complexa entrada de ideias associadas a autovalores de uma matriz.

Jordan nunca utilizou a notação de uma única letra de Cayley para representar uma substituição linear. Foi Frobenius que em 1878 combinou as ideias de vários de seus predecessores na primeira monografia completa de teoria das matrizes. Em particular, Frobenius tratou com vários tipos de relação entre matrizes. Por exemplo, ele definiu que duas matrizes A eB são similares se elas são invertíveis em P, tal que $B = P^{-1}AP$ e congruentes se existe P com $B = P^t AP$, em que P^t é a transposta de P. Ele mostrou que quando duas matrizes simétricas são similares, a matriz transformação P pode ser ortogonal, isto é, aquela em que a inversa é igual a transposta. Frobenius fez então um estudo detalhado sobre matrizes ortogonais e mostrou, entre outras coisas, que seus autovalores eram complexos de valor absoluto 1. Frobenius concluiu seu artigo mostrando a relação entre sua teoria de matriz simbólica e a teoria dos quartenions. Isto é, ele determinou quatro matrizes 2×2 na qual a álgebra é a precisamente de quantidades $1, i, j$ e k da álgebra quartênios.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher,1996.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: AutoresAssociados, 2006.

HODGKIN, Luke. A historyofmathematics: frommesopotamiatomodernity. Oxford Press, New York, 2005.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. vol 4: sequencias, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

JAHN, Marta Lena. **A geometria de matrizes e determinantes.** 2013. 65f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

KATZ, Victor J. A **history of mathematics – a introduction**. 3rd edition. University of District of Columbia.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times** – Vol. 2. Ed. Oxford University, New York, 1990.

KRAIESKI, Protásio. **Abordagem de matrizes no ensino médio**: uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações. 1999 77f. Trabalho de conclusão de Curso (Curso de Matemática - Habilitação licenciatura) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

LOPES, Marcelo dos Reis. **Matrizes:** história de um conteúdo escolar**.** 2012. 101f.Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

OLIVEIRA, Reinaldo Donizete de. **Utilização de mensagens criptografadas no ensino de matrizes**. 2013. 82f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**: conceitos, linguagem e aplicações. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2002.

SANTOS, Antônio Carlos Matias dos. **Ensino de operações com matrizes por atividades.** 2008. 62f. Trabalho de Conclusão de Curso (Lic. em Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

Surgimento da Teoria das matrizes. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html> Acessado em: 11/06/2014.

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS AO LONGO DA HISTÓRIA

Benedita das Graças Sardinha da Silva
Neusa de Oliveira Santos
Pedro Franco de Sá

RESUMO

O objetivo deste texto é apresentar uma revisão histórica do surgimento das operações aritméticas fundamentais adição, subtração, multiplicação e divisão. É uma pesquisa bibliográfica, em que textos de referência da História da Matemática apontaram que as civilizações egípcia, babilônica, grega, romana e indiana, no decorrer da história da construção de seus sistemas de numeração, encontraram sérias dificuldades em operar algoritmicamente com seus símbolos o que os levou a recorrer por muito tempo ao ábaco como instrumento de cálculo. Posteriormente, tais civilizações, desenvolveram métodos ou técnicas para realizar operações aritméticas, com algumas dificuldades, mas, em determinados casos, com muita proximidade a forma utilizada atualmente.

Palavras-chave: História da Matemática. Operações aritméticas fundamentais. Ábaco. Ensino de Matemática.

INTRODUÇÃO

Hoje em dia as operações aritméticas são comumente trabalhadas nas escolas desde o início da escolarização básica. Durante este processo são apresentadas regras, processos, regras operatórias, símbolos e ideias variadas envolvendo quantidades e combinações das mesmas. É comum que muitas das regras operatórias apresentadas sejam apresentadas sem uma conexão com seu surgimento ou mesmo origem histórica. Tal fato provoca, em algumas situações, questionamentos do tipo quem inventou isto? Como esta regra foi construída?

Nesta produção, partimos do princípio que as respostas para estas perguntas poderiam ser sanadas se, comumente, fosse utilizada, em sala de aula, a história da Matemática, compreendendo-a como uma metodologia de ensino capaz de tornar Matemática mais atrativa e desafiante. Para Lara (2013, p. 56) ao propor a utilização da História da Matemática em sala de aula, o professor poderá optar por alguns caminhos, entre eles:

> [...] propor ao estudante que pesquise sobre a constituição histórica de determinado conceito ou modelo; abordar determinado conceito ou modelo a partir da perspectiva de uma determinada civilização; ter em vista que o estudante investigue sobre os conhecimentos matemáticos gerados por uma determinada civilização.

Quando tratamos de operações aritméticas, é necessário ponderar que desde a pré-história o ser humano, mesmo antes de desenvolver os símbolos numéricos, já utilizava as noções de operações aritméticas em suas atividades cotidianas, por meio da relação biunívoca, fazendo entalhes em ossos e pedaços de madeira, relacionando cada animal de seu rebanho a um entalhe. (IFRAH, 1947, p. 24). A cada animal novo que nascia, acrescentava-se um entalhe no osso ou madeira, representando mais um animal no rebanho. Por outro lado, quando em sua comparação entalhe-animal observavam a ausência de algum animal do rebanho, retirava um registro. Tacitamente o homem pré-histórico estava lidando com situações de adição ou subtração.

Em termos de registros documentais, Ifrah (1947, p.21) indica que:

> A análise de múltiplos documentos etnográficos provenientes de diversas regiões da África, Oceania e América revela que várias populações 'primitivas' contemporâneas possuem técnicas numéricas particulares que lhes permitem, numa certa medida, efetuar algumas 'operações'.

Contudo, apesar de noções como essas desses povos, o referido autor chama a atenção para a importância dos hindus tanto para o desenvolvimento dos números, quanto para a invenção dos cálculos, pois segundo ele, "devemos à civilização indiana a invenção de nossa numeração decimal de posição e nosso zero matemático, além da elaboração das bases do cálculo escrito que praticamos em nossos dias" (p. 329).

Neste sentido, o presente texto trata de como surgiu e se desenvolveu as operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), destacando a importância do ábaco como instrumento de cálculo em épocas que não havia registro escrito. Citaremos também povos que foram importantes nessa descoberta, demarcando evoluções na utilização das operações aritméticas no decorrer da história.

ÁBACO - O PRIMEIRO INSTRUMENTO DE CALCULAR

O ábaco como utensílio operatório foi usado por muitas civilizações e representou um grande avanço no desenvolvimento e domínio dos cálculos aritméticos, pois, como na época de sua utilização, os sistemas de numeração ainda não estavam consolidados e, consequentemente, ainda eram inoperantes, ele possibilitou a realização dos cálculos sem, necessariamente, representá-los de modo escrito. Para Almeida (1994, p. 120) o "ábaco foi muito utilizado na Europa, nas escolas das catedrais, durante toda a Idade Média, até à implantação do cálculo escrito, tornado possível pela numeração de posição".

O autor chama atenção para a importância do ábaco e para a extensão alcançada em sua utilização em diversos povos e civilizações, pois segundo ele:

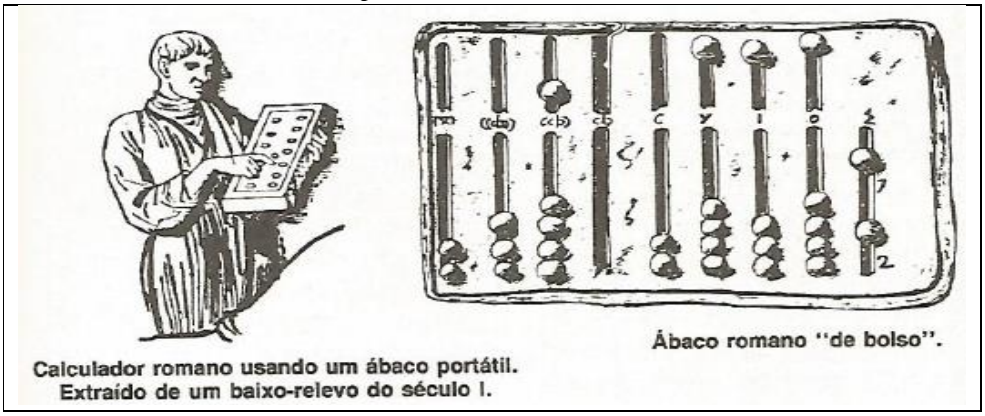
> Até a revolução dos computadores, que ocorre em nossos dias, o ábaco conservava uma larga faixa de utilização na Índia, China, Rússia, Japão e outros países do Médio-Oriente. No entanto, não se pode falar apenas de um certo ábaco. Por exemplo, o chinês é diferente do japonês (ALMEIDA, 1994, p. 120).

Os Sumérios por volta do ano 2.700 a 2.300 a.C. abandonaram suas antigas maneiras arcaica de calcular e criaram seu ábaco para realizar operações aritméticas. Nesta civilização o ábaco era um quadro, que apresentava sucessivas colunas para delimitar, no seu sistema sexagesimal, as ordens de unidades consecutivas. E os cálculos eram realizados por meio de um jogo sutil com auxílio de bilhas ou palitinhos (IFRAH, 1947, p. 507).

Os romanos utilizavam ábacos em tábuas ou pranchas, onde eram representadas as potências de 10 partindo da direita para a esquerda, colocando nas diversas colunas em questão tantas fichas quantas unidades havia em cada ordem considerada. Para realizar a adição, inicialmente os números eram figurados no ábaco com pedra ou ficha e, na realização da operação, se uma dada soma atingisse ou ultrapassasse a dezena, substituía-se, dez dessas peças, por outra na coluna à esquerda (ordem das dezenas). E nesta ordem se alcançasse ou excedesse dez seria substituída por outra que representasse a centena e assim sucessivamente. No século I a. C. esta civilização também usava o ábaco de cera, instrumento de cálculo portátil que poderia ser levado nas costas. Era uma prancheta de osso ou madeira, coberto por uma camada fina de cera negra delimitada por colunas sucessivas, em que os algarismos eram traçados com estilete de ferro" (IFRAH, 1997, p. 514 e 518).

Ainda no século I a.C., certos calculadores romanos da antiguidade usavam uma verdadeira calculadora portátil, conhecida como ábaco de bolso. Consistia em uma pequena plaqueta metálica, com algumas ranhuras paralelas, associadas cada uma as ordens decimais, ao longo dos quais resvalavam botões móveis do mesmo tamanho (IFRAH, 1994, p. 121). A seguir um modelo desse instrumento de cálculo romano.

Figura 1 - ábaco de bolso



Fonte: Ifrah (1994, p. 121)

Os sábios indianos também utilizaram este instrumento para efetuar operações.

> De fato, mesmo antes de inventar o antecessor de nosso cálculo atual, os sábios hindus conseguiram arranjar-se durante muito tempo com os meios de que dispunham. E como para todos os calculadores do mundo antigo, as insuficiências de sua numeração escrita inicial os levaram, num primeiro momento, a recorrer a instrumentos aritméticos como o ábaco ou 'tábuas de contar' (IFRAH, 1994, p. 278).

O ábaco de coluna indiano era desenhado sobre areia fina, sendo a primeira coluna da direita associada às unidades simples, a seguinte às dezenas, a terceira às centenas e assim por diante. Para representar os números não utilizavam pedrinha ou outro objeto, mas os nove primeiros símbolos de sua notação numérica. E durante a execução da operação, apagava-se o número toda vez que o algarismo era transportado (IFRAH, 1994, p. 279).

Este modelo apresentava limitações por não possibilitar a verificação de erros, cometidos durante a execução dos cálculos e exigir a memorização dos valores que eram apagados. Mediante tal obstáculo, indianos e árabes desenvolveram outra prática sem apagamento, que permitia escrever por baixo os cálculos intermediários, sem precisar apagá-los e isso permitia averiguar qualquer erro cometido durante o desenvolvimento do cálculo. Ainda assim, ao final da operação as inscrições ficavam sobrecarregadas e acarretavam dificuldades na compreensão dos procedimentos pelos cidadãos comuns, tornando essas habilidades alcançáveis apenas aos calculadores abacistas (IFRAH, 1947, p. 515-516).

A solução para esta última dificuldade foi pensada a partir da utilização do quadro negro e giz, pois além de ser um meio menos oneroso que a pluma e o papel, possibilitava aos calculadores indianos e a seus sucessores árabes e europeus, agir livremente e usar sua criatividade para simplificar as regras operatórias e, consequentemente, obter técnicas que contribuíssem para o nascimento do cálculo escrito atual (IFRAH, 1947, p. 516).

Nota-se que este instrumento facilitou os cálculos aritméticos de várias civilizações e deram os primeiros passos para desenvolvimento das operações aritméticos atuais. Nota-se que este instrumento facilitou os cálculos aritméticos de várias civilizações e deram os primeiros passos para desenvolvimento das operações aritméticos atuais. As contribuições do ábaco foram tão relevantes, que até hoje, apesar do desenvolvimento da escrita e formas modernas de operar, ele ainda é adotado por muitas escolas como recurso pedagógico, capaz de facilitar o ensino-aprendizagem do valor posicional e das operações aritméticas fundamentais. A seguir abordaremos o surgimento dessas operações em algumas civilizações.

A ADIÇÃO

Desde o período da pré-história da aritmética várias civilizações já usavam o princípio aditivo tanto na construção dos símbolos numéricos, quanto nos cálculos. No começo de sua história as civilizações egípcia, suméria, babilônica, grega, maia, entre outras, adquiriram o hábito de anotar os nove primeiros números inteiros pela repetição de símbolos como: traços verticais, círculos e pontos para representar a unidade. Entretanto abandonaram este princípio ao observarem que números superiores a quatro dificultavam, ao olho de um "leitor apressado", a adição imediata das unidades correspondentes. Com o intuito de amenizar tal problema, os egípcios e os cretenses agruparam seus algarismos-unidades pelo processo da decomposição (IFRAH, 1994, p. 23). Vejamos o processo de agrupamento no exemplo a seguir:

Quadro 1 - primeiras adições.

I	II	III	IIII	III	III	IIII	IIII	IIIII
				II	III	III	IIII	IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
				(3+2)	(3+3)	(4+3)	(4+4)	(5+4)

Fonte: Ifrah,(1994, p. 23)

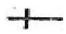
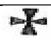
E ainda segundo Struik (1992, p. 31), a medida que o conceito de número foi se alargando, a composição de números maiores foi se formando primeiro por adição, em que o 3 era representado pela adição de 2 mais 1, o 4 por 2 mais 2 e o 5 por 3 mais 2. Em se tratando da regra de somar inteiros, Almeida (1994, p. 123) pontua que foi a primeira arte da aritmética. E para Contador (2006, p. 122), a adição é a operação aritmética mais simples, dela derivam todas as outras, pois adicionar ou somar faz parte da noção de números naturais, já que na passagem de um número para outro sucessivo, soma-se a unidade.

A História revela que tanto o nome das operações quanto os símbolos usados para representar a operação adição, sofreram transformações. Smith (1925, p. 88-89) indica algumas dessas mudanças, segundo ele:

> O nome da operação que chamamos adição teve suas vicissitudes. Um escritor do i3th século, por exemplo, usou "agregação" em vez. Escrevendo sobre o ano de 1200, Fibonacci usou "composição "e "coleção", bem como "adição". Quase um século depois Fibonacci o mais antigo algarismo francês (c. 1275) usando "montar" para "adicionar", e dois séculos mais tarde, a primeira aritmética impressa usava 'juntar'.

Em relação aos símbolos utilizados para representar a adição, Contador (2006, p. 121) apresenta algumas variantes simbólicas encontradas em alguns escritos e autores de referência.

Quadro 2 - Símbolos da adição

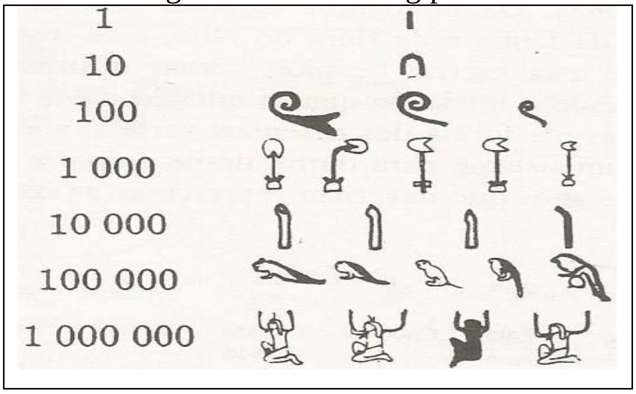
Obra	Autor	Período	Símbolo
Papiro de Rhind	-	Século XVIII	
-	Diofanto de Alexandria	250 d. C.	/
-	Egípcios	Século XI d.C.	
-	Hindus	Século XI d.C.	*Ya*
Fibonacci	Itália	1202	Plus
Fibonacci	-	Século XVI	$\bar{p}$ ou $\tilde{p}$
-	Europa	-	*et* (mais)
-	Alemanha	1456	+ derivado de ***t***
-	-	1489	 e 
Viète	-	1591	
Viète	-	1563	 e 
-	-	1809	
Roben Fludd	-	-	 (para plus)

Fonte: Contador (2006, p. 121)

Adição Egípcia

Os egípcios realizavam seus cálculos por meio de seu sistema de numeração de base dez, em que símbolos individuais eram usados para representar as potências sucessivas de 10 até 1.000.000, como mostrado a seguir.

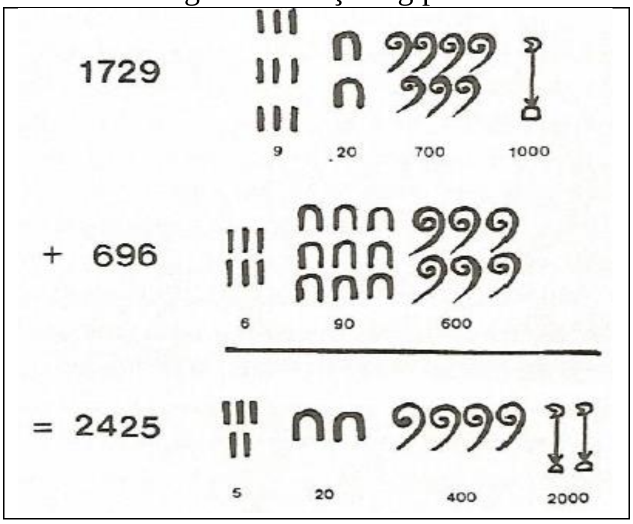
Figura 2 - números egípcios



Fonte: Ifrah (1994, p. 158)

Na realização do cálculo, inicialmente eram justapostas as representações dos números a somar, da esquerda para a direita em ordem crescente. Em seguida eram reunidos (mentalmente) os números idênticos, substituindo dez símbolos de uma categoria pelo algarismo da classe decimal imediatamente superior. Para adicionar 1.729 a 696, por exemplo, após superpor as representações dos números correspondentes agrupavam-se as barras verticais (unidades), as asas (dezenas), as aspirais (centenas) e as flores (milhares) de lótus. Em seguida, substituíam-se dez traços por uma asa, dez asas por uma espiral e dez espirais por uma flor de lótus (IFRAH, 1994, p. 166 e 167). E sucessivamente após estas reduções, obtinha-se a solução da operação, como mostra a figura a seguir.

Figura 3 - adição egípcia



Fonte: Ifrah (1994, p. 167)

Como vemos, está forma de organizar e operar com a adição é muito semelhante à usada hoje, diferindo apenas nos símbolos usados e na forma de dispô-los, da esquerda para a direita.

Adição Romana

Os Romanos, segundo Fossa (2010, p. 264), faziam cálculos na operação adição da seguinte maneira:

DCCCLXIV	→	864
CCCLXXIX	→	+ 379
DDCCXXXXIII		1243
MCCXLIII		

Inicialmente eram agrupados cinco C formando um D e dois L para obter um C. Em seguida era necessário decodificar o princípio subtrativo para o IV e IX passando uma unidade do IV para o IX, obtendo uma dezena X e III unidades. E por fim, juntava-se os DD, para obter um M e os XXXX formavam uma nova combinação que era XL, usando novamente o princípio subtrativo. Conforme observado neste exemplo, os numerais romanos apresentavam complicações na execução de seus cálculos. O que demonstra que “um povo que atingiu em poucos séculos um elevado nível técnico conservou, curiosamente, durante toda a sua existência um sistema inutilmente complicado, não operatório e comportando um arcaísmo de pensamento característico” (IFRAH, 1994, p. 186).

Assim, a operação de adição, embora seja compreendida na atualidade como a mais simples das operações elementares, por possuir a ideia de adicionar quantidades para formar um todo, ela passou por uma série de mudanças em sua nomenclatura e seus sinais representativos para chegar à forma sistematizada que temos hoje. Enfatiza-se também que o ser humano, a partir de suas necessidades registravam seus bens, animais, entre outros produtos. E quanto aos animais, a medida que nasciam novos, ele o acrescentava em seus registros como forma de controle. No entanto quando faltava ou morria um de seus animais, ele retirava dos registros de controle. Dai surge à ideia de subtração, que é a operação que trataremos a seguir.

SUBTRAÇÃO

Assim como a adição, a subtração também sofreu transformações tanto em sua nomenclatura, quanto nos símbolos usados para representá-la. Smith (1925, p. 94) a esse respeito salienta que

> Tal como acontece com adição, assim com subtração, o nome do processo e os nomes dos números utilizados têm variado muito e não são liquidados até agora. Fora a escola, os termos técnicos da aritmética são raramente ouvido. Quando ouvimos uma declaração como "Deduzir o que eu devo e me pagar o resto", ouvimos dois termos de longa idade utilizados em vez das palavras menos satisfatórios ‘subtrair’ e ‘diferença’.

O trecho acima, afirma que outrora, as nomenclaturas utilizadas na subtração, eram pouco conhecidas em espaços não escolares, principalmente por considerar que por muito tempo só as pessoas de um melhor poder econômico tinham acesso ao conhecimento, especialmente as relacionadas a matemática. Na atualidade algumas dessas expressões já são mais conhecidas na sociedade em geral. Conforme mencionada anteriormente, as nomenclaturas e os símbolos utilizados na operação subtração sofreram alterações no decorrer da história da matemática. Contador (2006, p. 122) ratifica tais afirmações apontando algumas mudanças ocorridas nessas simbologias.

Quadro 3 - símbolos da adição

Documento	Autor/civilização	Período	Símbolo
-	-	535	
Papiro de Rhind	-	-	
-	Egípcios	-	
-	Diofanto de Alexandria	-	
-	Índia	XI	Ponto acima do número
-	Itália	Século XVI	*minus* (menos)
-	Itália	Posterior ao século XVI	$\tilde{m}$ ou $\overline{m}$
-	-	1602	÷ e ∺
-	-	1809	
Robert Fludd	-	-	 (para *minus)*

Fonte: Contador (2006, p. 122)

O símbolo da operação subtração teve sua primeira publicação em 1489, pelo professor Alemão Johann Widman, no livro Rechnung Auf Allen Kauffmanschafft. Este registro impresso, trata- se de uma aritmética comercial, cujos sinais + e – indicavam excesso ou deficiência nas medidas. E em 1494, Luca Pacioli, escreve a primeira edição do Summa de arithimetica, geométrica, proportioni et proportionalita, em que são utilizadas abreviações como: *p* de *piu* (mais), para representar a operação adição e *m* de *meno* (menos) para indicar a operação subtração (CONTADOR, 2006, p. 122-123)

Fernandes (1555, Apud Almeida 1994, p.125), apresenta a operação subtração também chamada pelo autor de restar ou diminuir e que, é a segunda regra de aritmética. Define que subtrair é tirar um numero de outro de modo que o primeiro fica diminuído do que dantes era. O enunciado desta operação poderia ser: Quem de 40 tira 20, quantos restam? Ressalta-se que nessa época não se conhecia os números negativos. Entretanto o autor apresenta o seguinte exemplo:

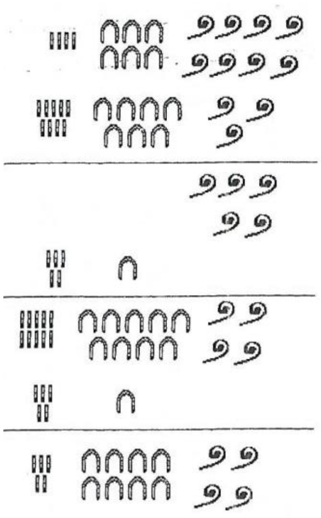
> Um homem me deve 24.850 reaes e pagou-me 28429 reaes. Pergunto: quanto me resta a dever? E porque como vos já atrás disse muitas vezes se acontece que, para embaraçar uma pessoa se dão semelhantes contas como esta, em que é maior o número de baixo do que o de cima, por vos avisar [...] respondais logo que a razão não se pode fazer. Antes por razão o devedor pagou mais a seu credor do que lhe devia, e se pode fazer. Antes por razão o devedor pagou mais a seu credor do que lhe devia, e se quereis saber quanto o credor resta a dever ao devedor, mudareis os números: o maior em cima, e o menor em baixo [...] depois de mudados seguireis a regra direita de diminuir como nas contas passadas vos mostrei. (p. 126)

Subtração Egípcia

Assim como a adição, a subtração era realizada contando os símbolos e fazendo reagrupamentos, como veremos o exemplo a seguir para efetuar 864 – 379. No primeiro passo, escreviam-se os dois numerais para compara-los. No segundo passo, eliminava-se a mesma quantidade de símbolos semelhantes de cada expressão. Sobrando cinco unidades e uma dezena no subtraendo, uma vez que não havia uma quantidade suficiente desses tipos de símbolos no minuendo. Já no terceiro passo, decompunham, uma centena em dez dezenas, em que umas dessas dezenas é decomposta em dez unidades. Assim eliminavam a dezena e as cinco unidades das duas expressões, obtendo a resposta final do cálculo subtrativo. Entretanto, o referido autor pontua que o escriba proficiente não faria todos esses passos detalhados, mas encurtaria o trabalho usando alguns cálculos mentais.

4 + 60 + 800
9 + 70 + 300
____
500

5 , 10
10 + 90 + 400
5 , 10



5 + 80 + 400

Subtração Romana

Com o objetivo de permitir aos leitores informações e condições de comparar os cálculos da civilização egípcia com a da civilização Romana apresentaremos os mesmos cálculos com os símbolos Romanos. Assim para, 864 – 379, temos:

DCCCLXIV	500 + 300 + 50 + 10 + 4
CCCLXXIX	300 + 50 + 20 + 9
DIV	500 + 4
XIX	10 + 9
CCCCLXXXXXIV	4000 + 50 + 50 + 4
XVIV	10 + 5 + 4
CCCCLXXXV	4000 + 50 + 30 + 5

Primeiramente, eliminavam o que era comum às duas expressões, depois decompunham o D em LXXXXX, que é a forma conveniente, pois havia um X no minuendo; o valor XXXXX – X resultava mentalmente em XXXX, e, ao mesmo tempo, decompunham o IX em VIV, considerando que havia um IV, também no minuendo. Por último faziam X - IV que resultava em V. Os proficientes nos cálculos faziam bom uso desse tipo de aritmética mental.

Observa-se que os cálculos com os símbolos romanos eram mais trabalhosos, exigiam bastante da memória dos calculadores para decodificar resultados de alguns passos que foram feitos mentalmente.

E em relação à operação multiplicação assim que encontraram os primeiros símbolos para representar as pequenas quantidades, perceberam que existia repetição de símbolos para representar as quantidades iguais, então passaram a agrupá-las. E é dessa ideia que surge a terceira operação aritmética, a multiplicação, que trataremos a seguir.

MULTIPLICAÇÃO

De acordo com Almeida (1994, p. 130) "a multiplicação é a mais bem estudada e documentada das quatro operações aritméticas". Muitos são os registros escritos que se tem acerca dos distintos métodos utilizados por determinadas civilizações na realização de seus cálculos, pois, desde a utilização do ábaco, até os registros escritos dos cálculos, algumas técnicas foram desenvolvidas pelos árabes, hindus, egípcios, babilônicos e outros povos com intenso conhecimento matemático.

Uma dessas técnicas iniciais no desenvolvimento desta operação era realizar a multiplicação pela repetição sucessiva da adição. Smith (1925, p. 101) descreve que a ideia geral da multiplicação surgiu nessa perspectiva, pois segundo ele "assim como a adição é um dispositivo para a obtenção de resultados que poderiam ser alcançados pelo mais trabalhoso método de contagem, de tal modo que a multiplicação foi desenvolvida como um resumo de adição".

Em relação à notação adotada para simbolizara operação multiplicação, Contador (2006, 123-124) exibe várias representações:

Quadro 4 - Símbolos de divisão

Documento	Autor/civilização	Ano	Símbolo
-	Francois Viète	1540	*in*
Deutsche Arithmetica	Stifel	1545	M
Obra Mirifici logarithmorum (sobre logaritmo)	John Napier	1600	**x**
Tradução da obra Mirifici logarithmorum	Edward Wright (tradução da obra de John Napier)	1618	**x**
-	René Descartes	1637	M
-	Leibniz	-	∩
-	Christian Wolf (1679-1754)	-	**.**
-	Alemanha	1809	

-	-	Itália	+
-	-	Londres	—+
-	1633 (usado por Leibniz em 1666)	-	$\frown$ (derivado da letra C)

Fonte: Contador (2006, p. 123 e 124)

A utilização do símbolo **x** na obra traduzida de Napier era diferente da forma como usamos atualmente. O exemplo a seguir mostra a multiplicação de 63 por 18, em que, apesar do x está entre os dois fatores, não muda a forma de multiplicar usada hoje, somente à localização do símbolo é situada em local diferente. Neste caso a multiplicação não era feita entre os algarismos das extremidades e sim o produto do algarismo da unidade do multiplicador por todos do multiplicando (8 x 61); depois o algarismo da dezena por todos do multiplicando (1 x 63) e por fim somando esses valores.

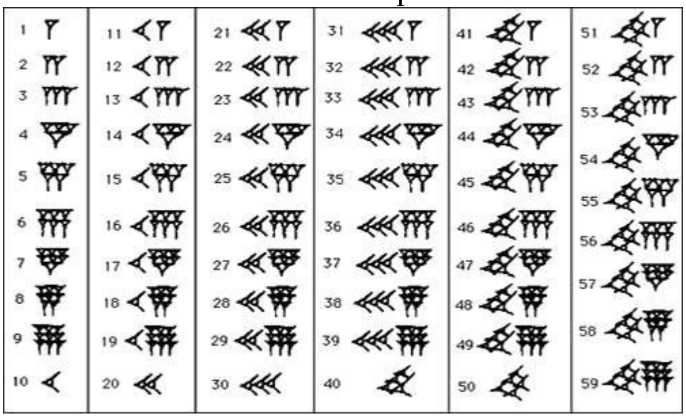
```
   6  3
    X
   1  8
-----------
  1134
```

Multiplicação Babilônica

Os babilônicos dispunham de um sistema numérico constituído “[...] com dois símbolos básicos, uma cunha vertical, que apresenta 1, e uma cunha angular, que significa 10” (AABOE, 2013, p.5). Com apenas esses dois símbolos eram possíveis representar qualquer quantidade, pois o valor de cada símbolo variava de acordo com a posição, isto é, com a ordem que ocupava na composição do número (ALMEIDA, 2011, p. 48). Assim, os números de 1 a 59 eram representados pelo princípio aditivo, repetindo os dois símbolos tantas vezes quantas fossem necessárias e formavam as unidades simples ou unidades da 1ª ordem.

A partir de 60 usava-se o sistema posicional de base sessenta mudando o valor do símbolo de acordo com a ordem ocupada. Assim sendo, os múltiplos de 60 constituíam as unidades da 2ª ordem; os múltiplos de 60^2 correspondiam às unidades da 3ª ordem; os de 60^3 formavam as unidades da 4ª ordem e assim por diante. O quadro 5 apresenta os símbolos correspondentes aos números da primeira ordem do sistema numérico babilônico. E o quadro 6 mostra exemplos de números pertencentes a outras ordens considerando o valor posicional.

Quadro 5 - Símbolos babilônicos para números de 1 até 59

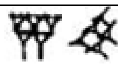
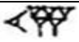
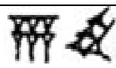
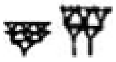
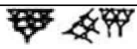
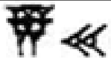
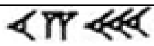
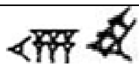


Fonte: Almeida (2011, p. 43)

Muitos dos métodos de cálculo babilônicos, desde a utilização do ábaco até as tábuas de multiplicação, são herdados dos sumérios. A tábua de multiplicação possibilitou a simplificação dos cálculos ao longo da história, pois a construção das tabuletas para produtos de números compreendidos entre 1 e 60 representou o primeiro passo para realização da operação de multiplicação com este instrumento (IFRAH, 1997, p. 313). A seguir um exemplo de uma tábua de multiplicação com produtos de 1 a 20 por 25, seguido dos produtos de 20, 30, 40 e 50 por 25.

Quadro 6 - Exemplo de tábua de multiplicação babilônica

Multiplicando	**Produto**	**Produto (Símbolos babilônicos)**	**Representação no sistema decimal**
(1)	25		25
(2)	2 x 25 = 50		50
(3)	3 x 25 =75		60 x 1 + 15 [1 ; 15]
(4)	4 x 25 =100		60 x 1 + 40 [1 ; 40]
(5)	5 x 25 = 125		60 x 2 + 5 [2 ; 5]
(6)	6 x 25 = 150		60 x 2 + 30 [2 ; 30]
(7)	7 x 25 = 175		60 x 2 + 55 [2 ; 55]
(8)	8 x 25 = 200		60 x 3 + 20 [3 ; 20]
(9)	9 x 25 = 225		60 x 3 + 45 [3 ; 45]
(10)	10 x 25 = 250		60 x 4 + 45 [4 ; 10]

 (11)	11 x 25 = 275		60 x 4 + 35 [4 ; 35]
 (12)	12 x 25 = 300		60 x 5 + 0 [5 ; 0]
 (13)	13 x 25 = 325		60 x 5 + 25 [5 ; 25]
 (14)	14 x 25 = 350		60 x 5 + 50 [5 ; 50]
 (15)	15 x 25 = 375		60 x 6 + 15 [6 ; 15]
(16)	16 x 25 = 400		60 x 6 + 40 [6 ; 40]
(17)	17 x 25 = 425		60 x 7 + 5 [7 ; 5]
(18)	18 x 25 = 450		60 x 7 + 30 [7 ; 30]
(19)	19 x 25 = 475		60 x 7 + 55 [7 ; 55]
 (20)	20 x 25 = 500		60 x 8 + 20 [8 ; 20]
 (30)	30 x 25 = 750		60 x 12 + 30 [12 ; 30]
 (40)	40x25 = 1000		60 x 16 + 40 [16 ; 40]
 (50)	50x25= 1250		60 x 20 + 50 [20 ; 50]

Fonte: adaptado de Ifrah (1997, p. 314)

A tabela de multiplicação facilitou também a execução da operação multiplicação, porque, tendo a tabela, não havia a necessidade de um ábaco de madeira, bastava traçar linhas paralelas delimitando as colunas, correspondentes a cada uma das ordens multiplicadas no sistema sexagesimal em material maleável, a exemplo da argila, e efetuar os cálculos, apagando os resultados parciais. Ifrah (1997, p. 315-317) apresenta a multiplicação babilônica de 692 por 25 com uso da tábua e do ábaco em argila.

O procedimento inicial era traçar na argila três colunas, indicando a ordem de grandeza do resultado, sendo a 1ª coluna da direita correspondente a ordem das unidades sexagesimal (1 a 59); a 2ª coluna correspondente a segunda ordem (60 x 59) e a última coluna da esquerda, a 3ª ordem (60^2 x 59). Deixava-se um espaço a direita dessas colunas para representar a realização algorítmica.

3ª Ordem (60^2x59)	**2ª Ordem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	

O produto 692 x 25 é representado em notação babilônica por

[11 ; 32] x 25, pois 692 = $\underbrace{11 \text{ x } 60}_{(2^{a} \text{ ordem})} + \underbrace{32.}_{(1^{a} \text{ ordem})}$

Em seguida representam-se os algarismos do multiplicando com símbolos cuneiformes no espaço destinado aos cálculos.

3ª Ordem (60^2x59)	**2ª Ordem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	11 ; 32

Multiplica-se o algarismo da unidade de 1ª ordem (numeral 2) por 25, recorrendo a tábua de multiplicação e o resultado (50), é colocado na coluna das unidades.

3ª Ordem (60^2x59)	**2ªOrdem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	11 ; 32
		(50)	

Apaga-se o numeral 2 que já foi efetuado e procura-se na tábua de multiplicação o produto 30 x 25. Como o resultado é 750, era representado em símbolos cuneiformes na tabela por [12 ; 30], já que 750 = $12 \text{ x } 60 \; \underbrace{+ \; 30.}_{(2^{a} \text{ ordem})} \; \underbrace{\quad\quad}_{(1^{a} \text{ ordem})}$

O valor 30 era colocado na coluna correspondente a ordem das unidades (por ser menor que 60) e 12 na ordem das dezenas (por pertencer a 2ª ordem).

3ªOrdem 60^2x59)	**2ªOrdem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	11 ; 30
	(12)	(50) (30)	

Agora se apaga o 30 do espaço destinado aos cálculos e escreve-se o 11 que será multiplicado por 25. Procurando essa multiplicação na tabela, encontra-se [4 ; 35] que representa 275, pois 275 = $\underbrace{4 \text{ x } 60}_{(2^{a} \text{ ordem})} + \underbrace{35}_{(1^{a} \text{ ordem})}$

O resultado era decomposto de modo que o 35 era colocado na 2ª ordem (pois mudou-se de ordem para operar com o 11) e o 4 na 3ª ordem (60^2).

3ª Ordem (60^2x59)	**2ª Ordem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	
(4)	(12) (35)	(50) (30)	11

Tendo operado com todos os algarismos do multiplicando, apaga-se o 11 do quadro reservado aos cálculos e juntam-se os símbolos semelhantes. Na coluna das unidades tinha-se 8 vigas que somados resultaria em 80, já que cada uma representa 10 unidades. Como esse valor ultrapassaria 59, que corresponde ao máximo permitido na primeira ordem, agrupam-se 6 vigas e substituía-se por um prego (uma dezena no sistema numérico babilônico) passando-o para a ordem seguinte à esquerda (dezena babilônica) e os demais deixava-se na 1ª ordem.

3ª Ordem (60^2x59)	**2ª Ordem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	
(4)	(12) (35) (10)		

Do mesmo modo, na coluna da 2ª ordem havia 4 vigas e 7 pregos e mais 1 prego que foi transportado da coluna da direita totalizou 4 vigas e 8 pregos. Como esses símbolos totalizam 48 unidades de 2ª ordem, não ultrapassando 60, apagam-se essas representações e escreve-se o 48.

3ª Ordem (60^2x59)	**2ª Ordem (60x59)**	**1ª Ordem (1-59)**	
(4)	(48)	(2)	

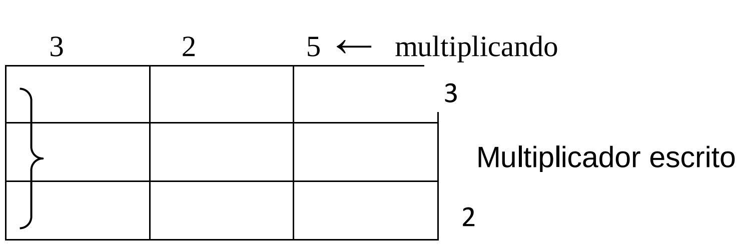
Como na 3ª coluna havia apenas 4 unidades de 3ª ordem, não havia necessidade de alterado este valor. Então, o passo final era fazer a leitura do resultado, obtendo assim,
[11 ; 32] x 25 = [4 ; 48 ; 20], que em representação decimal

$(=4x60^2 + 48x60 + 20 = 17.300)$

Multiplicação Indiana

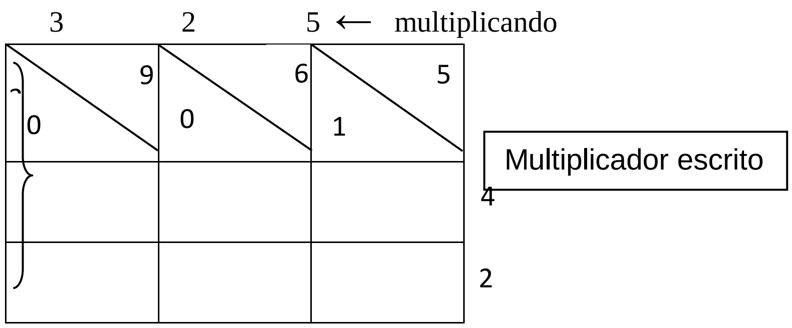
Os hindus eram fascinados pelo trabalho com números envolvendo operações aritméticas fundamentais e na multiplicação escreviam os números com unidades menores à esquerda, operando-os da esquerda para a direita (BOYER, 2010, p. 147). De acordo com Ifrah (1994, p. 286) por volta do século VI, os hindus desenvolveram um processo de multiplicação “[...] denominado ‘por quadriculagem’ (ou também ‘por quadro’). Depois ele será transmitido aos árabes e, por seu intermédio, aos europeus, que lhe atribuirão o curioso nome de *per gelosia* (por janela)”. Já Ifrah (1997, p. 436-438) indica que tal procedimento foi desenvolvido pelos árabes aproximadamente no século XIII, sendo designado pelo nome de “[...] multiplicação pelo quadriculado (ou pelo quadro) e [...] transmitido, a partir do final da Idade Média à Europa ocidental, onde foi conhecido pelo nome de *per gelosia* (multiplicação ‘pelo ciúme’)”.

Ifrah (1997, p. 439 - 440) apresenta um exemplo dos passos utilizados nessa forma de multiplicação. Seguiremos estes procedimentos para multiplicar 325 por 243. O procedimento era realizado adicionando dois a dois os produtos dos diversos algarismos do multiplicando e do multiplicador. Inicialmente desenhava-se um quadro retangular com três linhas e três colunas que correspondiam ao número de algarismos do multiplicando e do multiplicador. Na parte de cima, partindo da esquerda para a direita, colocavam-se os algarismos do multiplicando e a direita do quadro, os algarismos do multiplicador, partindo de baixo para cima. Vejamos essa disposição em seguida:



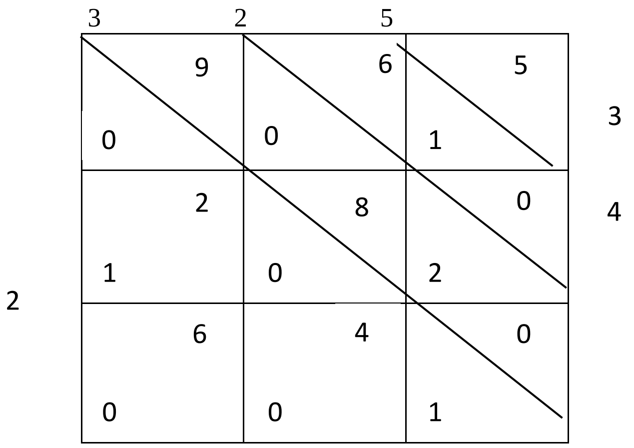
Posteriormente, traçava-se uma diagonal do canto superior esquerdo ao canto inferior direito de cada casa e escrevia-se os produtos obtidos na multiplicação dos respectivos algarismos, da direita da linha e do alto da coluna correspondente, sendo os algarismos das dezenas colocados na semi-casa inferior a esquerda e o das unidades na semi-casa superior a direita. E se uma dessas duas ordens faltasse, colocava-se um zero na semi-casa correspondente.

Então o produto 3 x 5 = 15 era colocado no quadrado do alto a direita, sendo a unidade 5 na semi-casa superior a direita e a dezena 1 na semi-casa inferior a esquerda. Do mesmo modo o produto 2 x 3 = 6 ficava no quadrado intermediário da primeira linha, em que a unidade 6 era colocada na semi-casa superior a direita e na semi-casa inferior a esquerda, um 0, para indicar que não havia dezena neste produto. O produto 3 x 3 = 9, era colocado na semi-casa superior à direita da última coluna à esquerda da primeira linha, completando assim a multiplicação do primeiro algarismo do multiplicador pelos algarismos do multiplicando, conforme indicado abaixo.

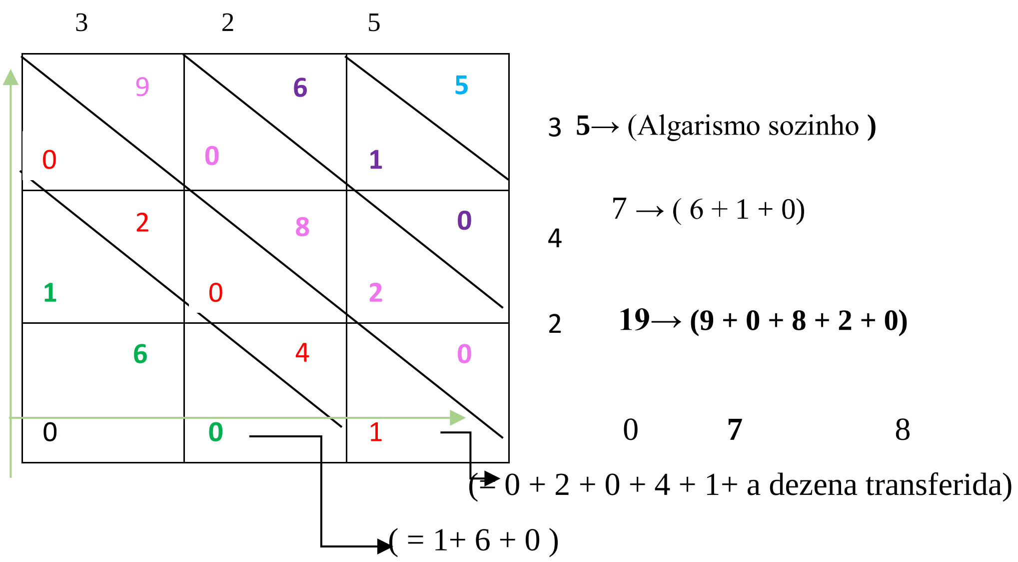


Na segunda linha eram colocados os produtos da multiplicação do 2º algarismo do multiplicador (4) por todos os algarismos do multiplicando. A multiplicação 4x5=20 era organizada na 1ª coluna à direita, de modo que o 0 da unidade ficava disposto na semi-casa superior a direita e o 2 da dezena na semi-casa inferior a esquerda. Do mesmo modo o produto 4x2=8 ficava na coluna intermediária sendo o 8 na semi-casa superior a direita e na semi-casa inferior a esquerda, colocava-se um 0 para indicar que não havia dezena. Para completar a segunda linha, fazia-se 4x3=12, colocando 0 2 na semi-casa superior a direita e o 1 na semi-casa inferior a esquerda.

Iniciava-se a multiplicação do último algarismo do multiplicador (2) por todos os algarismos do multiplicando para, assim preencher a última linha da tabela. O produto 2x5=10 era organizado na 1ª coluna da direita, com o 0 unidade na semi-casa superior a direita e na semi-casa inferior a esquerda o 1 da dezena. Do mesmo modo o produto 2 x 2 = 4 tinha o 4 disposto na semi-casa superior a direita e como não havia dezena, colocava-se um 0 na semi-casa inferior a esquerda. E por fim, no produto 2 x 3 = 6, o 6 ficava na semi-casa superior a direita e na casa inferior a esquerda um 0. A seguir o quadro com todas as multiplicações concluídas.



Após efetuar todas as multiplicações, procedia-se a adição dos valores no exterior do retângulo, adicionando-se os algarismos de cada faixa obliqua, iniciando pela faixa formada pelo algarismo 5, no alto, a direita do quadro e de cor azul. Em seguida somava-se os valores da outra faixa de cor violeta, partindo da direita para a esquerda. Na sequência adicionavam-se os valores da terceira faixa de cor rosa. Neste caso como a somatória era igual a 19, a dezena deste valor é transferida para a adição dos valores da quarta faixa de cor vermelho. Procedendo-se da mesma maneira na quinta faixa de cor verde e por fim do mesmo modo na sexta faixa de cor preto.



Assim, a leitura do resultado é feita da esquerda para a direita como indica a seta em laranja, obtendo o seguinte resultado: 78.975.

Outro procedimento de multiplicação usado pelos hindus era realização de cálculos em pranchetas como ábaco de colunas, na qual não havia necessidade de um símbolo para o zero. Os calculadores indianos e posteriormente os árabes representavam os números respeitando o valor posicional de cada algarismo (IFRAH, 1997, p. 418). A exemplo temos o número 38.051, em que o algarismo 1 é posicionado na coluna das unidades, o 5 no das dezenas, o 0 nas centenas, o 8 nas unidades de milhares e o 3 nas dezenas de milhares. Como o número 38.051 possui zero, basta deixar a coluna das centenas vazia, como mostra o exemplo a seguir.

Quadro 7 - valor posicional na prancheta

Dezenas de Milhares	Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
3	8		5	1

Fonte: adaptado de Ifrah (1997, p.418)

Na prancheta as técnicas operatórias eram realizadas apagando-se sucessivamente os resultados dos cálculos intermediários. Em Ifrah (1997, p. 419-122) encontramos um exemplo dessa operação com produtos que contém 0. Com base nele mostraremos a multiplicação de 362 por 25, iniciando pela organização dos numerais na prancheta de forma que o maior algarismo do multiplicando esteja na mesma coluna do menor algarismo do multiplicador.

	3	6	2
2	5		

No início da execução do cálculo, multiplicava-se o 3 de cima pelo 2 de baixo e o resultado 6, em destaque, é colocado na coluna à esquerda do 3.

6	3	6	2
2	5		

Em seguida multiplicava-se o 3 pelo 5 de baixo. O resultado 15, era decomposto em 5 unidades e 1 dezena; apagava-se o 3 de cima e substituía-o pelas 5 unidades. E a dezena restante acrescentava-se ao número 6 em destaque na prancheta.

+ 1

6	5	6	2
2	5		

Após esse acréscimo tinha-se o valor 7, em destaque na prancheta a seguir, finalizando assim, a primeira etapa do cálculo, uma vez que, o multiplicador 25 já teve todos os algarismos operados.

7	5	6	2
2	5		

Na segunda etapa os algarismos do multiplicador avançavam uma coluna à direita. Então, operava-se com o algarismo das dezenas do multiplicando, iniciando pela multiplicação do 6 de cima que não está em destaque, pelo 2 de baixo, obtendo o resultado 12. Este será decomposto em 2 unidade e 1 dezena, sendo as 2 unidades adicionadas ao 5 de cima em destaque e a dezena somada ao 7 em destaque da coluna ao lado.

+ 1	+ 2		
7	5	6	2
	2	5	

Após essa junção, obtinha-se a seguinte disposição:

8	7	6	2
	2	5	

Do mesmo modo, multiplicava-se o 6da ordem das dezenas do multiplicando, que está em cima pelo 5 do multiplicador que está embaixo, obtendo-se resultado igual a 30, que será decomposto em 0 unidade e 3 dezenas. O 0substituirá o 6 de cima, conforme indicado anteriormente, neste procedimento ficará vazio. E as 3 dezenas serão adicionadas ao 7 que está em azul, totalizando 10.

	+ 3		
8	7		2
	2	5	

O 10 será decomposto em 0 unidade e 1 dezena, em que o 0 ocupará o lugar do 7 que ficará vazio e a dezena adicionará ao 8.

+ 1

8			2
	2	5	

Ficando assim:

9			2
	2	5	

Terminada a segunda etapa, muda-se em uma coluna a ordem do multiplicador para iniciar a última etapa, que se dará pela multiplicação do algarismo das unidades do multiplicando pelos elementos do multiplicador. Primeiramente multiplica-se o 2 de cima pelo 2 de baixo e o resultado 4ocupa o 0, onde o espaço está vazio acima do 2.

+4

9			2
		2	5

Após essa junção, obteve-se a seguinte disposição:

9		4	2
		2	5

Nesta última coluna, multiplica-se o 2 pelo 5, obtendo-se 10, que será decomposto em 0 unidades e 1 dezena. O 0 ocupará a posição do 2 de cima da última coluna e a dezena será adicionada à 4 da coluna ao lado.

+ 1

9		4	
		2	5

E nesse momento, passa à seguinte disposição:

9		5	

Assim, a multiplicação de 362 por 25 totaliza em 9.050. Para Ifrah (1997, p. 422)

> O princípio desse modo operatório consiste em passar por tantas etapas quantas ordens decimais houver no multiplicando, cada uma subdividindo-se por sua vez, em tantos produtos de um algarismo desse último, pelos algarismos sucessivos do multiplicador.

Multiplicação Egípcia

Os egípcios desenvolveram um método para multiplicar por 10 e outro para multiplicar os valores diferentes de dez. No primeiro caso, bastava "substituir, na escrita do número considerado, cada símbolo pelo número de seu décuplo" (IFRAH, 1994, p. 167). Para multiplicar 1.464 por 10, era preciso considerar que os símbolos eram dispostos da direita para a esquerda em ordem decrescente.

Figura 4 - Multiplicação egípcia por 10

Fonte: Ifrah (1994, p. 167)

Então, procedia-se substituindo a flor de lótus que vale mil, por um dedo erguido ligeiramente inclinado que vale dez vezes o seu valor; na sequencia, substituía as quatro espirais que valiam cem cada uma, por quatro flor de lótus, que correspondia a 4000 unidades e assim sucessivamente para os demais valores.

Figura 5 - Multiplicação egípcia por 10

Fonte: Ifrah (1994, p. 167)

Boyer (2010, p. 10) pondera que "a operação aritmética fundamental no Egito era adição". Em suas multiplicações por valores diferentes de 10, faziam duplicações sucessivas, isto é, séries de multiplicações por 2. Assim, com os algarismos hieroglíficos eles escreviam o multiplicador na coluna da direita e o número 1 em frente, na coluna à esquerda, depois duplicavam sucessivamente os dois números até que o multiplicando aparecesse na coluna da esquerda (IFRAH, 1994, p. 168).

Para multiplicar 16 por 69, por exemplo, inicialmente era disposto o 69 na coluna à direita e o 1 em sua frente; depois 69 era somado por ele mesmo, obtendo 138 (atual 2 x 69); em seguida este último valor era adicionado a si mesmo, chegando a 276 (similar a 4 x 69 de hoje); depois duplicado chegando a 552 (8 x 69) e por fim duplicando 552, era obtido 1104, que corresponde naturalmente a 16 x 69 (BOYER, 2010, p. 10). Vejamos mais detalhado a seguir:

Quadro 8 - multiplicação egípcia por duplicação

1	69 (1 x 69)
2	138 (2 x 69)
4	276 (4 x 69)
8	552 (8 x 69)
16	1104 (16x 69)

Fonte: Adaptado de Ifrah (1994, p. 168)

Assim, de acordo com Ifrah (1994, p. 170) “a multiplicação egípcia é, assim, relativamente simples e pode ser feita sem recurso às tábuas de multiplicação. A divisão também é feita com as duplicações consecutivas, mas o processo se dá no sentido inverso”. A compreensão de tais procedimentos evidencia que, nessa época, multiplicação e divisão eram compreendidas como operações inversas. A respeito desta última versaremos a seguir.

DIVISÃO

Alguns símbolos e datas utilizadas historicamente para representar a operação divisão, são indicados em Contador (2006, p. 127), vejamos:

Quadro 9 - símbolos de divisão

Documento	**Autor/civilização**	**Período**	**Símbolo**
-	França	1751	
-	Portugal	-	
-	Johann Heinrich/suíço	1659	÷
-	Viète / França	Século XVII	__
-	Leibniz / Alemanha	684	:
-	Oughtred (1574-16607)	1631	: e ÷
-	. Algusto De Morena(1806–18710)	1845	/

Fonte: adaptado de Contador (2006, p. 127)

Divisão Egípcia

Em relação a seu emprego algorítmico, Boyer (2010, p. 10) assinala que os egípcios a realizavam pelo procedimento inverso da multiplicação, ou seja, invertendo-se "o processo de duplicação, e o divisor é dobrado sucessivamente, em vez do multiplicando". Para dividir 1.476 por 12 era necessário planejar uma multiplicação com multiplicador 12 e variando o multiplicando até obter um resultado aproximado a 1.476 (IFRAH, 1994, p. 170). Acompanhe a seguir o procedimento mais detalhado.

1	12 (1 x 12)
2	24 (2 x 12)
4	48 (4 x 12)
8	96 (8 x 12)
16	192 (16x 12)
32	384 (32 x 12)
64	768 (64 x 12)

Como a próxima multiplicação (768 x 12) resultaria em 1.536 que é um valor maior que 1.476, interrompiam o procedimento e procuravam, na coluna da direita, os números que adicionados davam o valor do dividendo (1.476). Retinham, então, os números 768, 384, 192, 96, 24, 12 e riscavam cada um com um traço horizontal (IFRAH, 1994, p. 170). Observemos:

~~1~~	~~12 (1 x 12)~~
~~2~~	~~24 (2 x 12)~~
4	48 (4 x 12)
~~8~~	~~96 (8 x 12)~~
~~16~~	~~192 (16x 12)~~
~~32~~	~~384 (32 x 12)~~
~~64~~	~~768 (64 x 12)~~

Em seguida adicionavam os números da coluna da esquerda, correspondentes aos números retidos e obtinham o resultado da divisão, ou seja, 64 + 32 + +16 + 8 + 2 +1 resultará em 123, que corresponde ao quociente de 1.476**:**12. Ifrah (1994, p. 171) ressalta que "os métodos de cálculo com algarismo egípcio dos faraós tiveram, assim, o mérito de evitar que os calculadores recorressem à memória: para multiplicar ou dividir, bastava saber somar e multiplicar por 2".

Divisão Babilônica

Os babilônios tratavam as operações aritméticas fundamentais de modo não muito diferente do usado hoje, e com facilidade comparável. Segundo Boyer (2010, p. 20), nesta civilização:

> A divisão não era efetuada pelo incômodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando os itens apropriados nas tabelas. Assim como hoje o quociente de 34 por 5 é achado facilmente multiplicando 34 por 2 e colocando vírgula, na antiguidade o mesmo processo era realizado achando o produto de 34 por 12 e colocando uma casa sexagesimal, dando 6 48/60.

Divisão Indiana

De acordo com Eves (1995, p. 323 e 324), os hindus também desenvolveram uma técnica algorítmica de divisão antes do século XVI, chamada método da galera ou método das riscas e apresenta um exemplo dos passos seguidos neste método, dividindo 9413 por 37. Inicialmente o dividendo era escrita acima do divisor, da mesma forma como fazemos atualmente e a divisão se daria da esquerda para a direita. Observando que não era possível dividir o algarismo 9 por 37, juntava-se o próximo algarismo do dividendo (4), obtendo assim 94. Este valor divido por 37 resultando em 2, que era anotado a direita do dividendo com o divisor.

$$\begin{array}{l|l} 9413 & 2 \\ 37 & \end{array}$$

Em seguida, consideravam apenas o número 94 no multiplicando e o multiplicador 37, multiplicavam mentalmente o quociente (2) pela dezena do divisor (3) e o resultado 6 era subtraído da dezena do dividendo (9), tendo como diferença 3, que era colocado acima do 9. Para indicar que o 9 do dividendo e o 3 do divisor já haviam sido efetuados, eles eram riscados.

$$\begin{array}{l|l} 3 & \\ \cancel{9}413 & 2 \\ \cancel{3}7 & \end{array}$$

Depois multiplicavam mentalmente o quociente 2 pelo algarismo da unidade do multiplicador, ou seja, 2 x 7 = 14. Esse valor era subtraído de 34, que foi formado a partir dá junção do 3, acima do 9, com o 4 da unidade do multiplicando. O resultado de 34 – 14 =20, era desagrupado, de modo que o 2 ficava acima do 3 e o 0 acima do 4. Para indicar que o 4 do dividendo, o 7 do divisor e o 3 acima do 9 já haviam sido efetuados, eles eram riscados.

$$\begin{array}{l|l}
2 & \\
\cancel{3}\ 0 & \\
\cancel{9}\ \cancel{4}\ 1\ 3 & 2 \\
\cancel{3}\ 7 &
\end{array}$$

Em seguida o divisor 37 era colocado diagonalmente uma casa a direita do 37 já existente. O divisor considerado agora era 201 que se formou a partir do passo anterior. Efetuada a divisão 201 por 37, obtinha-se o quociente 5, que era anotado a direita do dividendo com o divisor.

$$\begin{array}{l|l}
2 & \\
\cancel{3}\ 0 & \\
\cancel{9}\ \cancel{4}\ 1\ 3 & 2\ 5 \\
\cancel{3}\ \cancel{7}\ 7 & \\
\ \ 3 &
\end{array}$$

O valor do quociente era mentalmente multiplicado pela dezena do divisor, ou seja, 5 x 3 = 15 e subtraído de 20 no dividendo, obtendo 5 anotado acima do 0. Riscava-se o 3 (dezena do divisor), o 2 e 0 (do dividendo) para indicar que já haviam sido operados.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2}\ 5 & \\
\cancel{3}\ \cancel{0} & \\
\cancel{9}\ \cancel{4}\ 1\ 3 & 2\ 5 \\
\cancel{3}\ \cancel{7}\ 7 & \\
\ \ \cancel{3} &
\end{array}$$

Também era multiplicado o quociente 5 pela unidade 7 do divisor, obtendo 35. Esse valor era subtraído de 51, formado a partir da junção do 5, acima do 0, com a unidade 1 abaixo do zero. O resultado de 51 – 35 = 16 era desagrupado, de modo que a dezena 1 ficava acima do 5 e a unidade 6 acima do 1. Para indicar que o 7 (unidade do divisor), o 5 (acima do 0) e o 1 (unidade do divisor) já haviam sido efetuados, eles eram riscados.

$$\begin{array}{l|l}
\ \ 1 & \\
\cancel{2}\ \cancel{5} & \\
\cancel{3}\ \cancel{0}\ 6 & \\
 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l l}
\cancel{9}\,\cancel{4}\,\cancel{1}\,3 & \quad 2\ 5 \\
\ \cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{7} & \\
\quad \cancel{3} &
\end{array}$$

Procedia-se ao último passo da operação que iniciava escrevendo o divisor 37, mais uma vez, uma casa diagonalmente a direita. O dividendo a considerar agora era 163 (valores que não estão riscados). Operando 163:37 obtinha-se 4, que era anotado a direita do dividendo e do divisor.

$$\begin{array}{r|l}
1 & \\
\cancel{2}\,\cancel{5} & \\
\cancel{3}\,\cancel{0}\,6 & \\
\cancel{9}\,\cancel{4}\,\cancel{1}\,3 & \ 2\ 5\ 4 \\
\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,7 & \\
\cancel{3}\,3 &
\end{array}$$

O quociente 4 era multiplicado mentalmente pela dezena 3 do divisor, obtendo 12, que era subtraído de 16 (centena e dezena do dividendo) o resultado 4 era anotado acima do 6. Riscava-se o 1 e o 6 para indicar q já haviam sido operados

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{1}\,1 & \\
\cancel{2}\,\cancel{5}\,4 & \\
\cancel{3}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,5 & \\
\cancel{9}\,\cancel{4}\,\cancel{1}\,3 & \ 2\ 5\ 4 \\
\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,7 & \\
\cancel{3}\,3 &
\end{array}$$

Do mesmo modo multiplicava-se mentalmente o quociente 4 pela unidade 7 do divisor, obtendo 28, que era subtraído de 43 (4 acima do 6 e a última unidade do dividendo). Riscava-se o 4 e o 3 para indicar que já haviam sido operados. O resultado 15 da última subtração era desagrupado sendo a dezena 1 anotada acima do 4 e a unidade 5 acima do 3.

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{1}\,1 & \\
\cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{4} & \\
\cancel{3}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,5 & \\
\cancel{9}\,\cancel{4}\,\cancel{1}\,\cancel{3} & \ 2\ 5\ 4 \\
\cancel{3}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,7 & \\
\cancel{3}\,3 &
\end{array}$$

Por fim riscava-se o 3 e o 7 do divisor restando apenas o 1 acima do 4 e o 5 acima do 3, sem serem descartados. Isso indicava que 9413 dividido por 37 tinha como quociente 254 e resto 15.

$$
\begin{array}{cccc|l}
 & \cancel{1} & 1 & & \\
\cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{4} & & \\
\cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{6} & 5 & \\
\cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{3} & \ 2\ 5\ 4 \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{7} & \\
 & \cancel{3} & \cancel{3} & &
\end{array}
$$

Isso indicava que 9413 dividido por 37 tinha como quociente 254 e resto 15.

Como vemos os métodos utilizados por egípcios, babilônios e indianos eram bem diversos dos utilizados atualmente. Essa característica é uma boa opção para ser apresentada aos alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental para observarem em que sentido houve avanços ou retrocessos na facilidade das técnicas antigas e atuais.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

As descrições anteriores mostram como algumas civilizações deram passos importantes na construção dos algoritmos das quatro operações que representaram os primeiros passos no processo de aperfeiçoamento de nosso modelo atual. Isso evidencia a importância do uso da história da Matemática para o ensino da Matemática, pois por meio dela podemos levar os alunos a compreenderem que a Matemática escolar é fruto das práticas historicamente desenvolvidas pela humanidade acarretando técnicas, estratégias e instrumentos para lidar com situações reais de uma determinada época, para garantir sua sobrevivência ou para contribuírem com outras áreas do conhecimento.

A esse respeito Sá e Jucá (2010, p. 13) salientam que "[...] o uso da história da Matemática pode auxiliar o aluno no conhecimento matemático, ajudando-o a compreender métodos, teoremas e fórmulas que são utilizadas nas aulas de matemática". E isso implica ir muito além de conceber a história da Matemática apenas como um recurso informativo, mas dar condições para o aluno entender como os conhecimentos matemáticos foram gerados e organizados intelectual e socialmente; a gênese de cada conteúdo; o minucioso processo de aperfeiçoamento; considerando as diferenças culturais; os materiais manipuláveis utilizados em cada época como o ábaco, as tábuas de multiplicação, entre outros.

Miguel e Miorim (2008, p. 53) indicam ser possível atingir muitos objetivos pedagógicos por meio da história da Matemática, buscando nela elementos que conduzam o aluno a perceber

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Assim, ao ensinar as operações fundamentais a seus alunos, o professor pode usar a história de seu surgimento para motivá-los a pesquisar se as formas utilizadas antigamente eram mais simples de serem compreendidas, as influências que tiveram na construção atual; que civilizações e, em que tempo histórico, desenvolveram seus próprios mecanismos de resolução; quem foram os precursores desse desenvolvimento, etc. Esperamos que o recorte apresentado neste texto sirva de subsídio para consulta de professores, alunos e demais estudantes que tenham apresso pela história da matemática, especialmente referente às operações fundamentais.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História antiga da matemática.** Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALMEIDA, A. A. Marques de. **Aritmética como descrição do real 1519-1679**: Contributos para a formação da mentalidade moderna em Portugal. V. 1. Lisboa: Comissão Nacional para as Comemorações do Descobrimentos Portugueses, 1994.

Bagni, G.T. (1989). **L'Aritmetica di Treviso**, D'Amore, B. & Speranza F. (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma, 27-34.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

___________________. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática:** uma breve história. Vol. 1. São Paulo: livraria da física, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Unicamp, 2011.

IFRAH, Georges. **Os números:** a história de uma grande invenção. Tradução: Stella Maria de Freitas Senra. 6ª ed. São Paulo: globo, 1994.

_____________. **História Universal dos Algarismos:** a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. V. 1. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: nova fronteira, 1947.

_____________. **História Universal dos Algarismos:** a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. V. 2. Tradução: Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: nova fronteira, 1997.

LARA, Isabel Cristina Machado de. O ensino da matemática por meio da história da matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. **VIDYA**, v. 33, nº 2, p. 51-62, Santa Maria, 2013.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

SÁ, Pedro Franco de; JUCÁ, Rosineide de Sousa. **Atividades de ensino de Matemática utilizando a história da Matemática**. Belém: SBEM-PA, 2010.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics**. Volume II. New York: Dover, 1925.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas.** 2ª edição. Tradução: João Cosme Santos Guerreira. Lisboa: gradiva, 1992.

HISTÓRIA DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Benedita das Graças Sardinha da Silva
Neusa de Oliveira Santos
Pedro Franco de Sá

RESUMO
Este artigo tem o objetivo de apresentar a história do surgimento dos números em diversas civilizações como os egípcios, os babilônios, os gregos, os maias e os indianos. Para tanto recorreu-se a subsídios de referência na área da História da Matemática, buscando identificar a forma como essas civilizações desenvolveram seus sistemas numéricos, destacando seus avanços, limitações e suas proximidades ou não com o sistema numérico utilizado atualmente. Após a análise aos materiais consultados, observou-se que algumas civilizações possuíam sistemas numéricos com características muito próximas ao sistema utilizado hoje.

Palavras-chave: História da Matemática. Sistemas de Numeração.

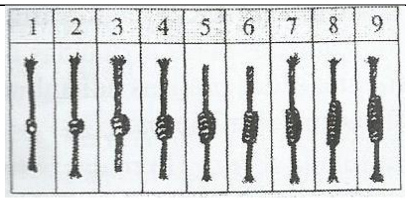
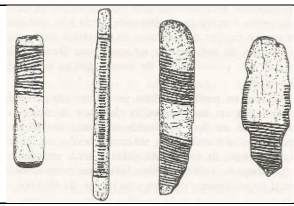
INTRODUÇÃO

O conceito de número e o desenvolvimento do hábito de contar ocorreram bem antes dos primeiros registros escritos da nossa história. “É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena [...]” (EVES, 1997, p.25). Tais evidencias são caracterizadas pelo fato de suas atividades práticas lhes exigirem algum mecanismo ou estratégia que lhes possibilitassem o mínimo de controle sobre seus produtos ou rebanhos. Ifrah (1994, p. 25) indica que

> Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos viveres, armas ou instrumentos era idêntica à que eles haviam deixado anteriormente.

Uma das formas de obter esse controle foi adotando um sistema que Eves (2004, p. 26) denominou “correspondência biunívoca” para contagem dos animais ou outros objetos, em que cada um desses bens poderia ser representado por nós em corda, riscos em pedras ou pedaços de madeiras ou pequenas pedras em saquinhos. O quadro a seguir apresenta algumas representações com nós em cordas para as unidades e riscos (talhes) em pequenas rochas ou pedaços de madeiras.

Quadro 1 - Representação das unidades com nós em corda e representação da contagem em osso ou pedaço de madeira

	
Fonte: Mendes (2006, p. 69)	Fonte: Ifrah (2004, p. 104)

Estas primeiras iniciativas embora facilitassem enormemente as atividades do homem pré-histórico, não representavam um conhecimento organizado de contagem como a concebemos hoje. Tratava-se de um processo de enumeração que segundo Gundlach (1992, p. 2) significava “manter-se a par dos objetos de uma coleção ou conjunto por um cotejo um-a-um dos objetos com outros objetos usados como marcadores”. Outra técnica de contagem também utilizando a correspondência biunívoca era o uso das partes do corpo humano representando um conjunto de objetos como utensílios, soldados destinados à guerra. Essa técnica corporal obedecia uma sequência, que segundo Ifrah (2004, p. 31)

> Toca-se sucessivamente um por um os dedos da mão direita a partir da menor, em seguida o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho do lado direito. Depois se toca o nariz, a boca, o olho, a orelha, o ombro, o cotovelo e o pulso do lado esquerdo, acabando no dedo mindinho da mão esquerda. Chega-se assim ao número 22. Se isto não basta, acrescenta-se primeiramente o seios, os quadris e o sexo, depois os joelhos, os tornozelos e os dedos dos pés direito e esquerdo. O que permite atingir dezenove unidades suplementares, ou seja, 41 no total.

Com isso, o homem obteria valores mais altos chegando a quatro dezenas e uma unidade utilizando partes do seu próprio corpo. Observa-se aí que, mesmo em períodos remotos, as necessidades práticas fizeram emergir alternativas como medidas para solucionar problemas relacionados a excesso de produtos e aumento do rebanho. Contudo, o sistema de contagem utilizando as partes do corpo apresentava limitações, considerando a produção em escala cada vez maior, acarretando a necessidade de um sistema de numeração sistematizado para representar conjuntos maiores sem a dependência de determinados marcadores como pedras, rabiscos, nós, entre outras formas de registros.

A esse respeito Gundlach (1992, p. 5) ratifica que: “A necessidade de um sistema de numeração surge da seguinte questão [...] o que deve ser feito quando a sequência ordenada finita de marcadores (dedos e outras partes do corpo) se esgotou, mas ainda restam objetos a ser contados?”.

Com isso algumas civilizações deram passos importantíssimos na tentativa de criar um sistema de numeração que permitisse contar com números altos e realizar cálculos, a exemplo dos romanos, egípcios, babilônicos, gregos, maias, indianos e árabes. Todos eles usavam símbolos numéricos e não, necessariamente, escrita numérica como concebemos hoje, pois de acordo com Boyer (2004, p. 25) "o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos".

Trataremos dessas civilizações nos tópicos seguintes, destacando o tempo, características, os símbolos, a composição dos números, nomes importantes, a forma como tratavam o zero, os avanços e limitações e as influências na construção do sistema indu-arábico.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANO

Os algarismos romanos nasceram a centenas ou talvez milhares de anos antes da civilização romana e são frutos da sobrevivência da prática ancestral de entalhes. Quando surgiram não estavam relacionadas as letras do alfabeto latino e apresentavam formas bem diferentes às conhecidas hoje (IFRAH, 1994, p. 188-189). De acordo com Almeida (2011, p. 155) os numerais romanos "[...] foram de fato precedidos por outros sinais gráficos. Não se encontraram registros anteriores ao século I a.C. nos quais ocorra o uso das letras L, D e M, enquanto sinais de numeração".

Uma das principais características do sistema de numeração romano era seu caráter aditivo e subtrativo. Inscrições etruscas do século VI a.C. mostram a aplicação do princípio aditivo e subtrativo ao mesmo tempo, cuja escrita era feita da direita para a esquerda. Neste sentido, como os símbolos eram independentes uns dos outros, ou seja, cada letra representava uma quantidade (I=1, V=5, X=10, L=40, C=1000, D=500 e M=1000), o princípio aditivo era utilizado para justapor e somar os valores correspondentes. E no princípio subtrativo todo signo numérico colocado à esquerda de um algarismo de valor superior era dele abatido, possibilitando que números como 4, 9, 19, 40, 90, 400, 900 e outros pudessem ser representados (IFRAH, 1994, p. 184 - 185 - 189).

Essa característica subtrativa complicou a utilização e o desenvolvimento do sistema numérico romano. Segundo Ifrah (1994, p. 185) os algarismos romanos "não se destinavam a efetuar operações aritméticas, mas a fazer abreviações para anotar e reter os números. É por isso que os contadores romanos [...] sempre recorreram a ábacos de fichas para a prática do cálculo". Um exemplo dessa dificuldade é apresentado por Fossa (2010, p. 264-265) com os passos utilizados para efetuar a adição de 864 + 379.

DCCCLXIV	→		864
CCCLXXIX	→	+	379
DDCCXXXXIII			1243
MCCXLIII			

Inicialmente eram agrupados cinco C formando um D e dois L para obter um C. Em seguida era necessário decodificar o princípio subtrativo para o IV e IX passando uma unidade do IV para o IX, obtendo uma dezena X e III unidades. E por fim, juntava-se os DD, para obter um M e os XXXX formavam uma nova combinação que era XL, usando novamente o princípio subtrativo. Conforme observado neste exemplo, os numerais romanos apresentavam complicações na execução de seus cálculos. O que demonstra que "um povo que atingiu em poucos séculos um elevado nível técnico conservou, curiosamente, durante toda a sua existência um sistema inutilmente complicado, não operatório e comportando um arcaísmo de pensamento característico" (IFRAH, 1994, p. 186).

No entanto, mesmo depois da difusão do moderno sistema indo-arábico, em alguns países europeus era comum o uso de numerais romanos em contabilidade. Em 1300 o uso dos números indo-arábicos em bancos de certas cidades europeias era proibido, consideravam que esses numerais eram mais fáceis de falsificar ou alterar. Os numerais romanos continuaram em algumas escolas até por volta de 1600, e em contabilidade por um século (HECK, 1992, p. 25).

OS EGÍPCIOS E SUAS ESCRITAS SAGRADAS

O sistema de numeração egípcio era uma escrita sagrada, em forma hieroglífica. De acordo com Ifrah (1994, p. 157) os egípcios inventaram uma escrita e um sistema de numeração escrita por volta de 3000 a.C. Enquanto para Mar (1992, p. 22) os numerais em forma hieroglífica são datados de cerca de 3400 a. C. Vejamos na figura a seguir:

Figura 1 - Símbolos da escrita hieroglífica

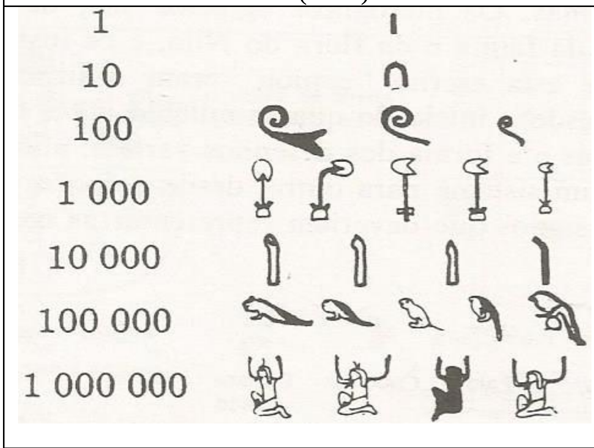
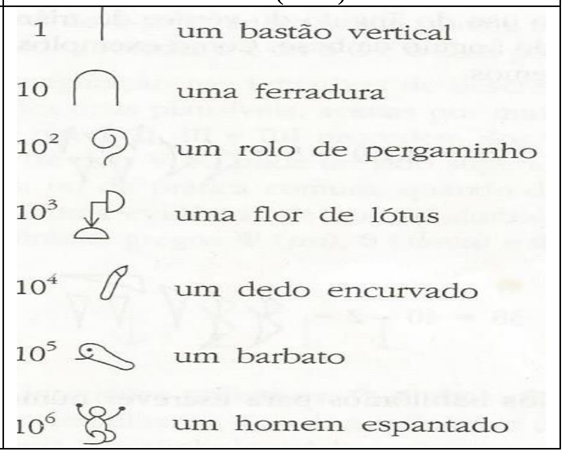
Fonte: Ifrah (1994, p. 157)

Conforme observado na figura anterior, “a escrita hieroglífica era pictórica, isto é, cada símbolo era a imagem de um objeto ou de um ser” (ALMEIDA, 2011, p. 143). Tais símbolos e sinais eram pouco relacionados a formas escritas, isso porque,

> Os hieróglifos egípcios são, de fato, quase todos tirados da fauna e da flora do Nilo, e os instrumentos ou utensílios que esta escrita ‘copiou’ eram utilizados no Egito pelo menos desde o início do quarto milênio de nossa era (IFRAH 1994, p. 157)

O sistema de numeração egípcio usava a base dez, em que símbolos individuais eram utilizados para representar as potências sucessivas de 10 até 1.000.000. As representações usadas para essas potências, são mostradas por alguns autores com símbolos diferentes, conforme indica a figura a seguir.

Figura 2 - Representação das potências sucessivas de 10

Ifrah (1994)	Eves (1997)
	

Fonte: Ifrah (1994, p. 158); Eves (1997, p. 31)

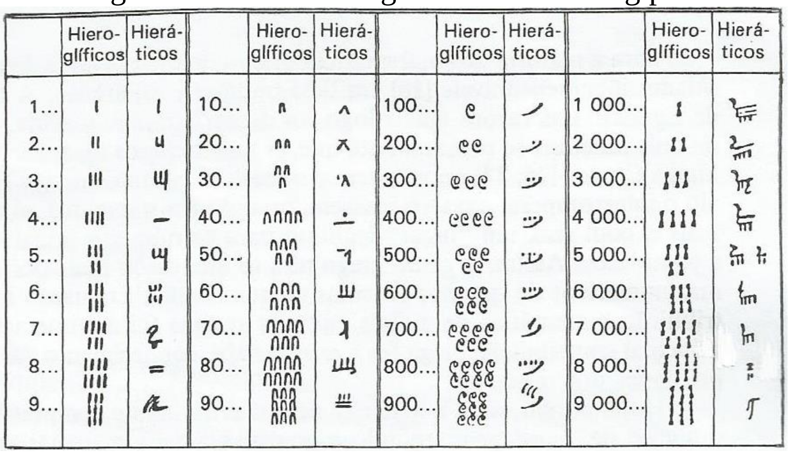
Observamos que em Ifrah (1994, p. 159) a unidade é representada por um traço vertical; a dezena por uma espécie de ferradura como um U investido; a centena por uma espiral enrolada como se faz com a corda; o milhar por uma flor de lótus com seu caule; a dezena de milhar por um dedo ligeiramente inclinado; a centena de milhar, por um girino de rabo caído e o milhão, por um homem ajoelhado erguendo os braços para o céu.

Em virtude de suas características, a notação hieroglífica não permitia uma escrita rápida. Com isso, por volta do século VIII a.C. os escribas gregos desenvolveram a escrita hierática, conhecida como demótico (popular) com estilo mais abreviado, com princípios e aparências diferentes graças ao emprego do papiro e do uso mais rápido da pena de escrever.

> Uma coleção de símbolos semelhantes (sete traços verticais, por exemplo) era agora representada por um único símbolo. Assim, um sinal característico era usado para cada um dos números de 1 a 9, para cada um dos primeiros múltiplos de 10 e de 100, etc. Esse sistema, às vezes denominado cifrado ou em código, não requeria assim mais que três símbolos para expressar qualquer número menor que 1000 – um para unidades, um para dezenas e um para as centenas. (MAR, 1992, p. 23)

Algumas diferenças foram observadas entre esses dois sistemas de escrita, pois o sistema hieroglífico era decimal e constituído pelos princípios aditivo e repetitivo. Por outro lado, "apesar de o princípio repetitivo ainda continuar muito em evidência nas formas hieráticas de representação dos números" (ALMEIDA, 2011, p. 151), este apresentava maior simplicidade na forma dos símbolos, conforme ratificado na figura a seguir.

Figura 3 - Escrita hieroglífica e hierática egípcia



Fonte: Mar (1994, pág. 23)

Essas formas escritas do sistema numérico egípcio não destinavam nem um símbolo para representar o zero. Na escrita hieroglífica, o número 204, por exemplo, apesar de conter o 0, era representado por dois símbolos de 100 e 4 de um. Enquanto a escrita hierática, usava um símbolo representante de 200 e outro de 4. Como mostra o exemplo abaixo:

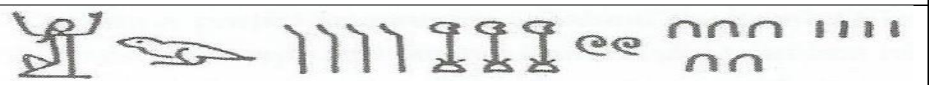
Quadro 2 - Números contendo zero nos dois sistemas

Número 204 na escrita hieroglífica	Número 204 na escrita hierática
	

Fonte: Adaptado de Mar (1994, pág. 23)

Com isso, o diferencial do sistema numérico egípcio era o fato de possuir um símbolo hieróglifo e hierático para cada uma das potências de 10, possibilitando representar números maiores que um milhão, conforme indica a figura a seguir para representar o número 1.143.252 na escrita hieroglífica.

Figura 4 - Escrita hieroglífica para o número 1.143.254

Número 1.143.252

1x100000 + 1x100000 + 4x40000 + 3x1000 + 2x200 + 5x50 + 2x1

Fonte: Almeida (2011, p. 146)

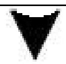
Contudo, a ausência do valor posicional e da utilização do zero, são indícios das limitações desse sistema de numeração, uma vez que o princípio aditivo utilizava um número muito grande de símbolos para a escrita de números altos e a ausência do zero dificultava a composição de alguns números.

A CUNHA BABILÔNICA

O sistema de numeração babilônio segundo Ifrah (1994, p.236) e Vogeli (1992, p. 20) surge anteriormente ao segundo milênio antes de Cristo na mesopotâmia. Esta civilização desenvolveu um sistema numérico sexagesimal ou de base sessenta e utilizavam o princípio posicional na escrita dos números.

Este sistema de numeração era constituído por uma escrita ‘cuneiforme’, ou seja, em forma de ‘cunha’ e de ‘cravos’, representado por apenas dois símbolos, descritos por diversos autores com denominações diferentes, entretanto representando as mesmas quantidades, que são a unidade e a dezena. Para Ifrah (1994, p. 237) um ‘cravo’ vertical é usado para representar a unidade e uma ‘asna’ para a dezena. Em Almeida (2011, p. 41) o símbolo da unidade e denominada ‘prego’ vertical e da dezena ‘viga’. Já Vogeli (1992, p. 20) denominou meia-lua para o símbolo da unidade e forma circular para dezena. Tais representações se encontram no quadro a seguir:

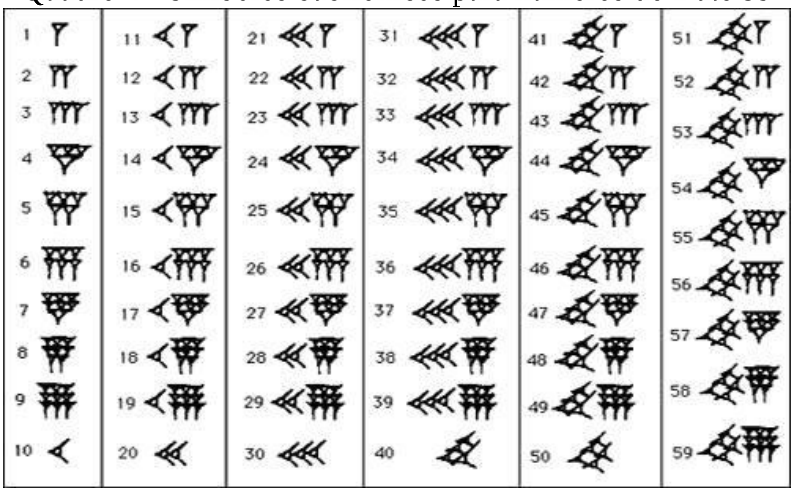
Quadro 3 - Símbolos babilônicos para unidade e dezena

AUTOR	SÍMBOLO/QUANTIDADE	NOME
Ifrah	 Unidade	Cravo
	 Dezena	Asna
Almeida	 Unidade	Prego
	 Dezena	Viga
Vogeli	 Unidade	meia-lua
	 Dezena	forma circular

Fonte: Ifrah (1994, 237); Almeida (2011, p. 41-42); Vogeli (1992, p. 20-21)

Outra característica desse sistema era que os números de 1 a 59 eram representados pelo princípio aditivo, repetindo os dois símbolos tantas vezes quantas fosse necessário. E a partir do número 60 usava-se o sistema posicional, de base sessenta mudando o valor do símbolo de acordo com a ordem ocupada, sendo estas ordens separadas por ponto e vírgula entre os números que representavam os símbolos babilônios (IFRAH, 1994, p. 237-239). Desse modo, os números de 1 a 59 formavam as unidades simples ou unidades da 1ª ordem, conforme quadro abaixo.

Quadro 4 - Símbolos babilônicos para números de 1 até 59



Fonte: Almeida (2011, p. 43)

Os múltiplos de 60 constituíam as unidades da 2ª ordem; os múltiplos de 60^2 correspondiam às unidades da 3ª ordem; os de 60^3 formavam as unidades da 4ª ordem e assim por diante (IFRAH, 1997, apud ALMEIDA, 2011, p. 49). Vejamos algumas representações numéricas com os numerais babilônicos.

Quadro 5 - Exemplos de numerais babilônicos

59 (1ª ordem)	3599 (2ª ordem)
 59 x ***1*** = 59	 59 ; 59 59 x ***60*** + 59 x ***1***
3662 (3ª ordem)	220100 (4ª ordem)
 1 ; 1 ; 2 1 x $\boldsymbol{60^2}$ + 1 x ***60*** + 2 x ***1***	 1 ; 1 ; 8 ; 20 1 x $\boldsymbol{60^3}$ + 1 x $\boldsymbol{60^2}$ + 8 x ***60*** + 20 x ***1***

Fonte: Adaptado de Almeida (2011, p. 43)

Os babilônios foram os primeiros a empregar o conceito de valor relativo e os símbolos que representavam os algarismos variavam de acordo com sua posição, isto é, com a ordem que ocupava na composição do número e isso possibilitava representar qualquer valor com apenas dois símbolos. Almeida (2011, p. 48) destaca que:

> Segundo este princípio os símbolos usados tem um valor variável, o qual depende da posição que ocupam na escrita dos números: um símbolo dado será associado às unidades simples, às dezenas, às centenas ou aos milhares, conforme ocupe o primeiro, o segundo, o terceiro ou o quarto lugar na expressão de um número, começando para tal da direita para a esquerda. A importância do sistema posicional reside no fato de permitir exprimir valores tão grandes quanto o que se exija, ou tão pequenos quanto o que se pretenda, recorrendo a um conjunto diminuto de símbolos.

Por outro lado, "nos textos dos antigos babilônios (1800 a 1600 a.C.) nenhum símbolo era usado para o zero, mas um espaço em branco era deixado, para qualquer potência de 60 ausente" (VOGELI, 1992, p. 21). O número 3.602, por exemplo, poderia ser assim representado:

Quadro 6 - Número 3.602 na escrita babilônica

3602
 1 ; 0 ; 2 1 x $\boldsymbol{60^2}$ + 0 x ***60***+ 2x ***1***

Fonte: adaptado de Almeida (2011, p. 43)

Essas duas características deste sistema de numeração (representação por apenas dois símbolos e ausência do zero) trouxeram algumas limitações para a escrita de seus números, pois, o primeiro ocasionava certa confusão de notação, a exemplo do número 2 que poderia ser confundida com 61 e 25 com 615, por serem representados pelos mesmos símbolos, conforme quadro a seguir.

Quadro 7 - Representação de alguns números que se confundiam

2 e 61	25 e 615
 2 1 ; 1 1 x 60 + 1 = 61	 25 10 ; 15 10 x 60 + 15 = 615

Fonte: Ifrah (1994, p.240)

E o segundo caso, conduzia também a alguns equívocos, porque nem sempre era lembrado de deixar um espaço em branco para indicar o zero e "era difícil simbolizar desse modo a ausência de duas ou várias ordens de unidades consecutivas" (IFRAH, 1994, p. 242). Vejamos

Quadro 8 - Representações posicionais de numerais com zero

3.636	3.600
 1 ; 0 ; 36 $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 36$	 1 ; 0 ; 0 $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 0 \times 1$

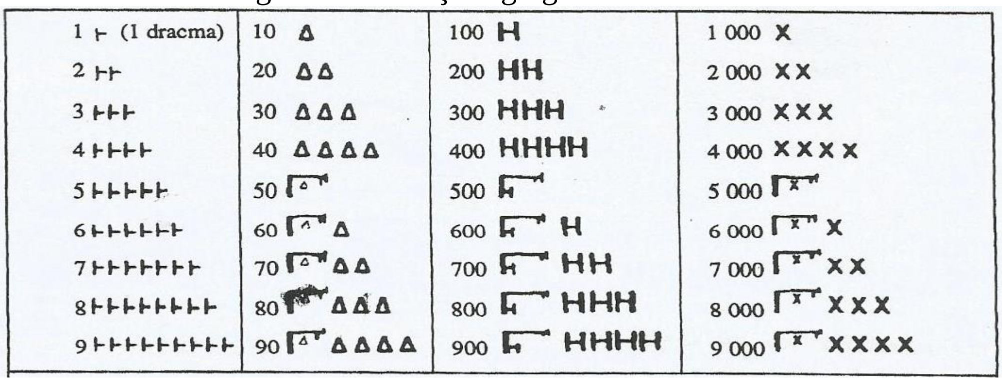
Fonte: Adaptado de Almeida (2011, p. 43)

Com isso, nota-se bastante limitações na escrita do sistema de numeração babilônico, haja visto que os símbolos eram pouco variados impossibilitando a criação de novos para representar os números (Almeida, 2011, p. 50). A ausência do zero também trouxe dificuldade na escrita e na compreensão dos números.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO GREGO

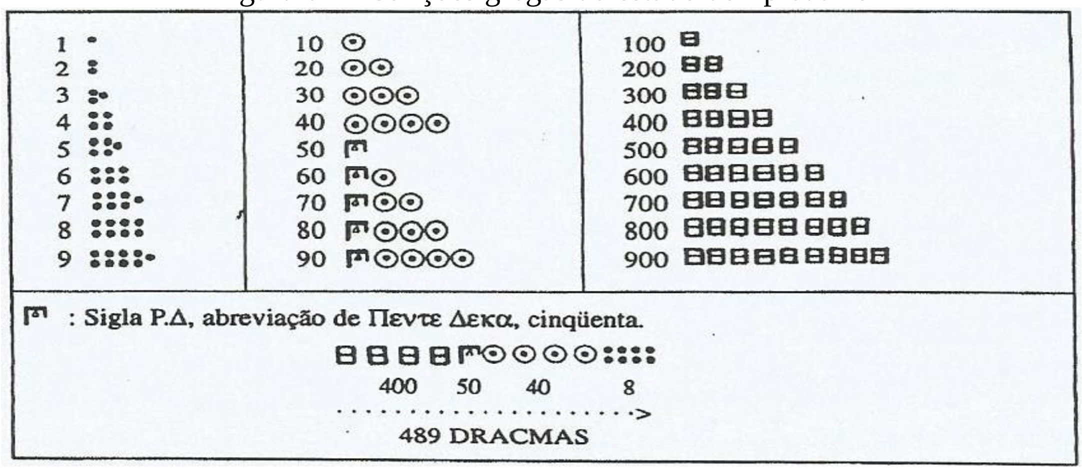
Os gregos apresentaram momentos e escritas distintas em seu sistema de numeração, mas dois deles se destacaram: o ático, 600 anos a. C., e o jônico ou alfabético, 200 a.C. (VOGELI, 1992, p. 25). Já para Almeida (2011, p. 86) o sistema jônico apareceu pela primeira vez no séc. V a.C. E para Flegg (1974a, apud Almeida, 2011, p. 87) pode ter surgido anteriormente ao século V. É importante destacar que cada cidade grega, no período de 500 anos a.C. apresentava nítidas particularidades em relação a seus sistemas. A exemplo temos a ilhas de cós que apresentava notações numéricas usando o drácma, que era a moeda corrente e o estado de Epidaurio, que embora, usasse o drácma com alguns símbolos em comuns, outros eram representados de outra maneira.

Figura 5 - Inscrições gregas da ilha de Cós



Fonte: Ifrah (1997, p. 387)

Figura 6 - Inscrições gregas do estado de Epidaurio



Fonte: Ifrah (1997, p. 391)

A principal diferença entre os sistemas ático e jônico era que o primeiro usava letras e símbolos, sendo estes as iniciais das letras-números gregas correspondentes as iniciais de números, exceto para o 1, representado por I. Enquanto o segundo usava vinte e sete letras, sendo vinte e quatro do alfabeto grego e três do fenício (VOGELI, 1992, p. 26). Vejamos os símbolos e letras usados pelos sistemas ático e jônico:

Quadro 9 - Sistema ático

Letra	**Inicial de ...**	**Significa**
Γ (pi)	Ηπεντε (pénte)	Cinco
Δ (delta)	Δεκα (déka)	Dez
Η (eta)	εκατον (hékaton)	Cem
Χ (xi)	χιλιοι (chilioi)	Mil
Μ (mu)	Μυριοι (myrioi)	Dez mil

Fonte: Almeida (2011, p. 96)

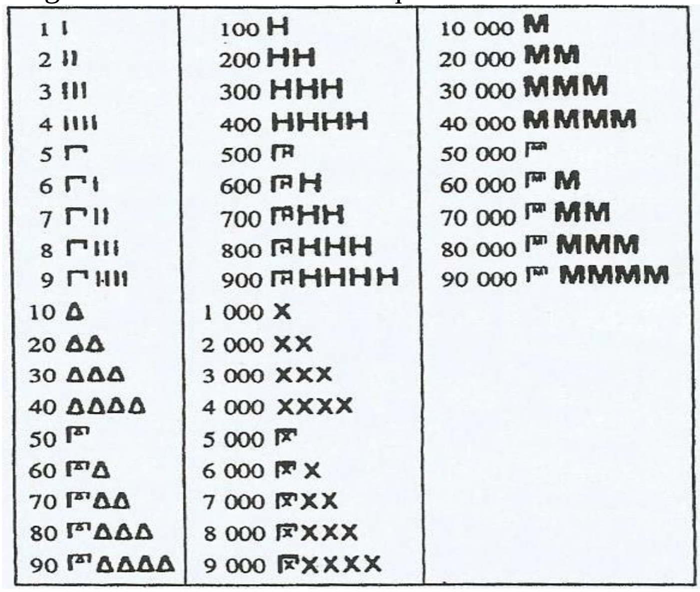
Figura 7 - Sistema jônico

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϛ	ϛ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	kopa	90	Ͳ	ͳ	san	900

Fonte: Adaptado de Mendes (2006, p. 63)

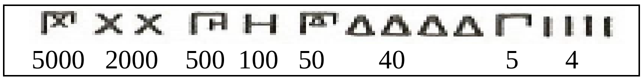
Outra característica deste sistema de numeração era seu caráter aditivo e decimal, em que eram utilizados símbolos para as unidades e as potências de sua base. Tal característica para composição dos números no sistema ático, era atendida para números menores que 50. Para os números 50, 500, 5.000 e 50.000 além do aditivo era usado o princípio multiplicativo, pois para representar 50, por exemplo, era multiplicado o símbolo representante do 5 com o símbolo do 10. Vejamos:

Figura 8 - Números maiores que 50 no sistema ático



Fonte: Ifrah (1997, p. 383)

Neste sentido o sistema multiplicativo permitiu maior simplificação da escrita dos números gregos como apresenta Ifrah (1994 p. 184) no exemplo do número 7699, que no sistema aditivo usaria 31 símbolos para escreve-lo, enquanto neste sistema usava-se apenas 15 símbolos.

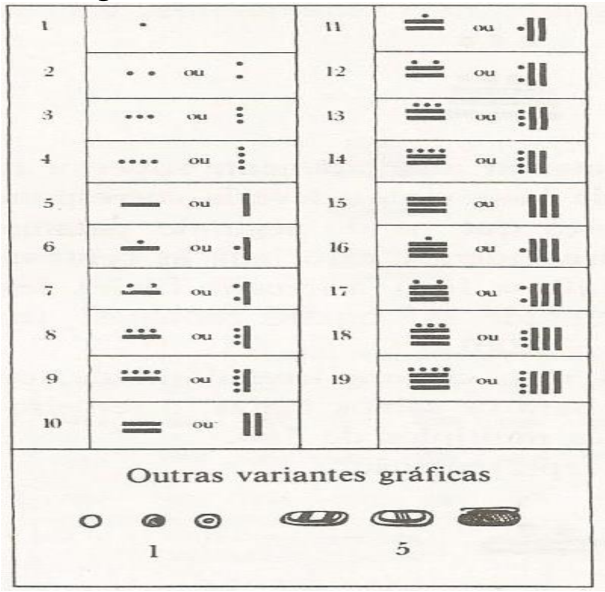


Apesar da redução na quantidade de símbolos, que foi considerada uma evolução na escrita numérica, esta também representou uma regressão na história do cálculo. Visto que o sistema multiplicativo gerava novos símbolos como os de cinquenta, quinhentos, cinco mil e cinquenta mil. E estes símbolos dificultava o desenvolvimento dos cálculos gregos, conduzindo-os as “tábuas de contar”. (IFRAH, 1994, p. 184)

SISTEMA DE NUMERAÇÃO MAIA

O sistema numérico utilizado pela civilização maia foi descoberto pelas expedições espanholas conhecidas como Yucatan, no início do século XVI e o avanço em sua cultura iniciou-se no século IV d.C. sendo a Matemática uma de suas pedras angulares (MENDES, 2006 p. 69). Seu sistema de numeração era de base vinte e fundada no princípio aditivo. Para representar números até dezenove, eram utilizados aditivamente apenas dois símbolos: o ponto representando a unidade e o traço representando cinco unidades (IFRAH, 1994, p. 250). Vejamos:

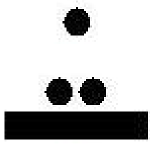
Figura 9 - Números Maias de 1 a 19



Fonte: Ifrah (1994, p. 251)

Para números compostos de duas ordens, além do princípio aditivo usava-se o multiplicativo e o valor posicional vigesimal, em que o ponto passaria a representar vinte unidades e os números maiores que vinte eram representados em colunas verticais, com uma fileira para cada ordem (IFRAH, 1997, p. 640). A leitura destes símbolos era feita de cima para baixo. O número 27, por exemplo, apresentava a primeira ordem por um traço (5 unidades) e dois pontinhos (2 unidades), somando 7. E na segunda ordem um pontinho representando 20 unidades, sendo a leitura feita de acordo com a indicação da seta.

Quadro 10 - Representação da escrita numérica maia da 2ª ordem



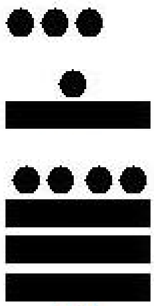
1 ↓ (1 x ***20*** = 20) 2ª ordem

7 ↓ (7 x ***1*** = 7) 1ª ordem

Fonte: adaptada de Ifrah, (1997, p. 640)

Já para números compostos de três ordens, apresentavam uma lógica diferente, pois o racional seria 20 x 20 = 20^2 = 400. No entanto, sua base de contagem vigesimal, apresentava a seguinte composição: 18 x 20 = 360, nesta ordem. Segundo Mendes (2006, p. 69) “a explicação para essa discrepância provavelmente reside no fato de o ano maia consistir em 360 dias”. E para Gundlach (1992, p. 30) "o sistema vigésimal puro era usado para propósitos civis e comerciais, mas era modificado para simplificar cálculos calendares, sendo o terceiro valor posicional considerado 360 em vez de 400". Vejamos um exemplo do número 1219, considerando esta ordem:

Quadro 11 - Escrita numérica maia na 3ª ordem



3 x (***18 x 20***) = 3 x ***360*** (3ª ordem)

6 x ***20*** (2ª ordem)

19 x ***1*** (1ª ordem)

Fonte: Adaptada de Ifrah, (1997, p. 640)

A ilustração acima corresponde:

$3 \text{ x } (\boldsymbol{18x20}) + 6 \text{ x } \boldsymbol{20} + 19\text{x}\boldsymbol{1}$

$\underbrace{3 \text{ x } \boldsymbol{360}}_{3^a \text{ ordem}} + \underbrace{6 \text{ x } \boldsymbol{20}}_{2^a \text{ ordem}} + \underbrace{19 \text{ x } \boldsymbol{1}}_{1^a \text{ ordem}}$ e não $3 \text{ x } 20^2 + 6 \text{ x } 20 + 19 =$

$3 \text{ x } 400 + 6 \text{ x } 20 + 1$

A partir da quarta ordem repetia-se a terceira e multiplicava-se por vinte sucessivamente. Conforme indica Ifrah (1994, p. 252):

> Para as posições seguintes, voltava-se ao uso estrito da base vinte, valendo cada patamar, a partir do quarto, vinte vezes a mais do que o patamar imediatamente inferior. Assim, em virtude da irregularidade da terceira ordem, a quarta posição correspondia, por sua vez, aos múltiplos de 7200 = 20 x 360 (e não aos de 8000 = 20 x 20 x 20), a quinta aos múltiplos de 144.000 = 20 x 7200 (e não aos de 20 x 20 x 20 x 20), e assim por diante.

Outra característica do sistema de numeração maia era a presença do zero representada por uma forma bastante semelhante a um caramujo, uma concha de escargot ou uma casinha de caracol (IFRAH, 1997, p. 641).

Figura 10 - Símbolos do zero maia

Fonte: Ifrah (1997, p. 641)

Assim, tanto o número vinte, quanto outros valores, terminados em zero, eram possíveis de serem representados com estes três símbolos, pelo princípio aditivo e posicional, embora na composição dos números, nem todo número terminado em zero aparecia o símbolo do zero. Vejamos alguns exemplos e suas devidas representações:

Quadro 12 - Números maias incluindo o zero

<table>
<tr><td>Número 20</td><td colspan="2">Número 50</td><td>Número 400</td></tr>
<tr><td>20 (2ª ordem)
0 (1ª ordem)
1 x 20 + 0</td><td colspan="2">2 x 20 (2ª ordem)
10 (1ª ordem)
2 x 20 + 10</td><td>1 x 360 (3ª ordem)
2 x 20 (2ª ordem)
0 (1 ª ordem)
1 x 360 + 2 x 20 + 0</td></tr>
<tr><td>Número 8005</td><td></td><td colspan="2">Número 14400</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 x (18x20²) = 1 x 7200 (4ª ordem)
2 x (18x 20) = 2 x 360 (3ª ordem)
4 x 20 (2ª ordem)
5 (1ª ordem)
1 x 7200 + 2x360 + 2x20 + 5</td><td colspan="2">2x(18x20²) =2x7200(4ª ordem)
0 x(18x20)=0x360(3ª ordem)
0 x 20 (2ª ordem)
0 (1ª ordem)
2 x 7200 + 0 x 360 + 0 x 20 + 0</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptada de Ifrah, (1997, p. 640)

Assim, embora os maias tenham dado grandes passos na elaboração e utilização de seu sistema numérico, principalmente por considerarem a posição do algarismo e inventado um símbolo para o zero, havia certa limitação nesse sistema em decorrência da irregularidade ocorrida com a terceira ordem, pois “impediu que os sábios maias desfrutassem dessas descobertas essenciais nos domínios do cálculo e da aritmética abstrata" (IFRAH, 1994, p. 254).

SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDIANO

A história nos revela que em tempos remotos, datados do século III a. C. os numerais indianos eram muito rudimentares (IFRAH, 1994, p. 265). E, antes do surgimento do sistema decimal posicional, várias escritas alfabéticas e, consequentente, numéricas foram usadas nas regiões da Índia (Van der Waerden, 1976a, apud Almeida, 2011, p. 122). Duas delas se destacaram: a kaharosthi e o brahmi, que foram estabelecidas pelo imperador Asoka no século III a.C.

> Essencialmente três formas de escrever números pelos indianos, kaharosthi, brahmi e, em terceiro lugar, a familiar notação posicional com o sinal do zero, a qual usamos hoje e que fez uso dos numerais brahmi desenvolvendo-se diretamente a partir deles (Menninger, 1969 apud Almeida, 2011, 123)

A escrita kaharosthi, embora tenha sido usada na escrita de negócios, entre o século V e III a. C, só foi oficializada no século III a. C. por decreto do imperador Asoka e foi desenvolvida a partir do alfabeto sírio-aramaico, constituído de símbolos específicos para os números 1, 4, 10, 20 e 100 e não se tem documentos preservados indicando o símbolo usado para representar o 9. (ALMEIDA, 2011, p. 124), conforme quadro abaixo:

Quadro 13 - Símbolos de alguns numerais kaharosthi

1	4	10	20	100
I	X			

Fonte: Van der Waerden (1976 a, apud Almeida, 2011, p. 124)

Além disso, a escrita utilizava o princípio aditivo e era registrada da direita para a esquerda, vejamos

Quadro 14 - Escrita dos numerais kaharosthi

1	2	3	4	5	6	8	10
I	II	III	X	IX	IIX	XX	

Fonte: Adaptado de Almeida (2011, p. 125)

Para múltiplos de 10, um processo semelhante era utilizado, conforme quadro abaixo:

Quadro 15 - Símbolos para os múltiplos de 10 nos numerais kaharosthi

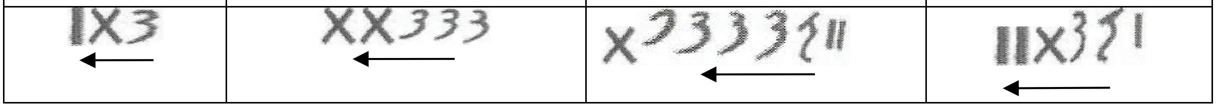
20	50	60	70	100	200

Fonte: Adaptado de Almeida (2011, p. 125)

Observe que nos exemplos abaixo, a leitura destes numerais e feita da direita para a esquerda conforme indica a seta.

Quadro 16 - Exemplos de numerais kaharosthi

25	68	274	126



Fonte: grifo do autor com base em Almeida (2011)

E a escrita brahmi, segundo Estrada (2000, p. 394) são os mais antigos numerais indianos conhecidos, cujas inscrições remontam ao século III a. C. E influenciaram o nosso sistema de numeração. Para Almeida (2011, p. 125) "os mais antigos exemplos dos nossos atuais símbolos numéricos foram encontrados em colunas de pedras erigidas na Índia por volta do ano 250 a. C" e no século III exibiam símbolos diferentes para 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Além disso, cada múltiplo de 10 até 100 possuía um símbolo próprio, denominado por alguns autores como "um sistema cifrado, com símbolos separados para 10, 20, 30, etc." (RONEY, p. 2012, 21) e, ainda "um símbolo a cada uma das unidades, das dezenas, das centenas, dos milhares, das dezenas de milhar" (ALMEIDA, 2011, p. 126), como indicado a seguir

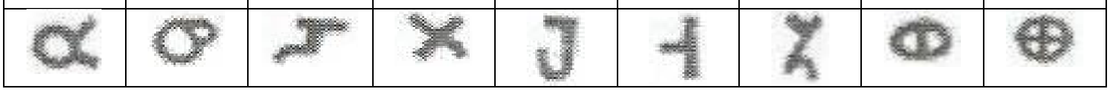
Quadro 17 - Representação das unidades na escrita brahmi

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Almeida (2011, p. 128)

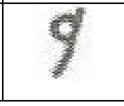
Quadro 18 - Representação das dezenas na escrita brahmi

10	20	30	40	50	60	70	80	90



Fonte: Almeida (2011, p. 128)

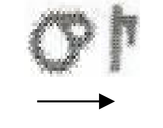
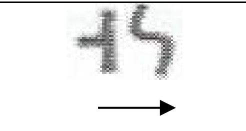
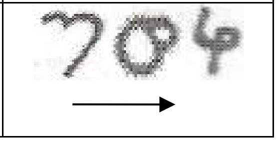
Quadro 19 - Algumas centenas e milhares na escrita brahmi

100		200	500	1000	4000	70000
						

Fonte: Almeida (2011, p. 129)

Essa escrita numérica era considerada inversa a kaharosthi, por escrever os numerais da esquerda para a direita, conforme indica a seta. Logo a leitura desses numerais era feita da esquerda para a direita.

Quadro 20 - exemplos de números brahmi.

25	68	274	126
			

Fonte: Almeida (2011, p. 130)

Essa escrita numérica apresentava a vantagem de favorecer um sistema de posição, embora ainda não houvesse nenhuma característica relacionada ao valor posicional, pelo “[...] facto de cada unidade não ser constituída por mera agregação de símbolos, mas sim designada por um único símbolo, e também a existência de um símbolo especial para os números de um a nove” (SILVA, 2000, p. 394). Essa característica da numeração brahmi mereceu destaque pela independência existente entre seus símbolos representantes das unidades, descartando a necessidade de agrupamento ou acumulação entre eles.

Almeida (2011, p. 127) corrobora com tais constatações afirmando que “efetivamente, esta particularidade que o sistema de numeração brahmi adquiriu irá facilitar mais tarde a transição para um sistema de numeração posicional”, apesar da distância temporal entre o sistema brahmi e o sistema posicional, conforme destaca Silva (2011, p. 394), quando afirma que houve “[...] um grande lapso de tempo entre o chamado sistema brahmi e o sistema decimal de posição”.

Por outro lado, o fato de existirem símbolos específicos para as dezenas até 90 e, também para os múltiplos de 100, representou certo obstáculo na compreensão do valor posicional, que poderia ser obtido pela utilização de apenas os nove primeiros símbolos brahmi, com acréscimo do zero. Esta é uma discussão que será apresentada no item a seguir.

SISTEMA POSICIONAL INDIANO

Para Eves (1997, p. 145) a passagem dos numerais cifrados brahmi, para o sistema decimal de posição, deveu-se, sobretudo, a “[...] percepção de que, pelo uso do princípio posicional, os símbolos para as primeiras nove unidades podiam servir também para os múltiplos correspondentes de dez, ou igualmente bem para os múltiplos correspondentes de qualquer potência de dez”. A percepção dessas evidências possibilitou compreender que seria possível escrever qualquer valor pela redução de todos os símbolos brahmi a apenas os nove primeiros símbolos e mais tarde pela introdução do zero.

Por outro lado, o autor chama atenção para a falta de precisão que a literatura histórica dispõe acerca do aprimoramento e redução desse sistema aos nove símbolos. Há três conjecturas a respeito dessa descoberta

> [...] Não se sabe quando ocorreu essa redução a nove símbolos, e é provável que a transição para a notação mais econômica se tenha processado gradualmente. Parece, pela evidência existente, que a mudança se deu na Índia, mas a fonte de inspiração para isso não é conhecida. Provavelmente os chamados numerais hindus foram resultado de desenvolvimento interno apenas; talvez se desenvolvesse primeiro ao longo dos limites ocidentais entre Índia e Pérsia, onde a lembrança da notação posicional babilônica pode ter levado a modificação de um sistema brahmi. É possível que o novo sistema tenha surgido ao longo dos limites orientais na Índia e China, onde os numerais em barra pseudoposicionais podiam sugerir a redução a nove símbolos. Há ainda uma teoria que diz que essa redução pode ter sido feita primeiro em Alexandria, dentro do sistema alfabético grego, e daí se propagado para a Índia [...] (EVES, 1997, p. 145).

Sabe-se que o antigo sistema de numeração indiano apresentava limite na escrita de seus números, considerando que, o que os impossibilitavam de ultrapassar a escrita de 99.999. Para contornar tal dificuldade, os hindianos começaram a exprimir números grandes por palavras ou como diríamos hoje, “por extenso”, por meio dos nomes de número do sânscrito que posteriormente os levariam a descobrir o valor posicional e o zero (IFRAH, 1994, 266-267). Inicialmente atribuíram um nome a cada um dos nove primeiros símbolos, vejamos

Quadro 21 - nomes atribuídos aos numerais de 1 a 9

Nomes dos números indianos	eka	dvi	tri	Catur	pañca	sat	sapta	Asta	nava
Nomes dos números atuais	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	Oito	nove

Fonte: Adaptado de Ifrah (1994, p. 267)

Alem dos nomes para estes nove símbolos, foram utilizados também outros para as dezenas, centenas e demais potencias de dez e todos os outros números. Vejamos alguns exemplos:

Quadro 22 - Nomes dos números das dezenas e demais potências de dez

Nomes dos números indianos	Nomes dos números atuais
10	dasa
100	sata
1.000	Sahasra
10.000	Ayuta
100.000	Laksa
1.000.000	prayuta
10.000.000	Koti
100.000.000	Vyarbuda
1.000.000.000	Padma

Fonte: adaptada de Ifrah (1994, p. 268)

Os sábios indianos escreviam e liam seus numerais em ordem ascendentes, ou seja, começando pelas unidades da esquerda para direita, diferentemente da forma como escrevemos e lemos hoje (IFRAH, 1994, p. 267). Vejamos o exemplo a seguir para o número 2709.

Quadro 23 - numeral indiano por extenso

Escrita indiana por extenso	**Em nossa língua**	**Escrita atual por extenso**
Nava sapta sata ca dvisahasra	nove, sete centos e dois mil	Dois mil setecentos e nove

Fonte: adaptada de Ifrah (1994, p. 267)

A partir dessas características, dois grandes avanços foram observados no sistema de numeração indiano, por volta do século V de nossa era (IFRAH, 1994, p. 269). O primeiro deles é que, com apenas os nove nomes dos números das unidades, seguida da palavra correspondente à potência sucessiva de 10 (indicando a ordem do número) era possível compor qualquer número. O segundo refere-se ao fato das palavras representantes dessas potências, serem indícios de um sistema de posição, uma vez que, elas determinavam a posição dos nomes dos algarismos dentro do número, conforme indicação a seguir, em que o algarismo 3 ocupa ordens distintas de acordo com sua posição dentro do número:

Quadro 24 - numerais indiano por extenso

Número	Escrita indiana	Ordem do numeral 3
173	tri sapta dasa eka sata (três, sete dezenas, uma centena)	Unidade
1.636	sat tri dasa sat sata eka sahasra (seis, três dezenas, seis centenas, uma unidade de milhar)	Dezena
1.366	sat sat dasa tri sata eka sahasra (seis, seis dezenas, três centenas, uma unidade de milhar)	Centena

Fonte: adaptada de Ifrah (1994, p. 268)

Depois desse importante passo, emergiu outra dificuldade referente ao aparecimento do zero dentro do número, pois escrever por extenso o número 301 era diferente, de 31 caso não houvesse uma palavra que pudesse designar o zero representando a ordem da dezena na escrita. De acordo com Boyer (1974, p. 155)

> Deve-se notar que a referência a nove símbolos, em vez de dez, significa que os hindus ainda não tinham dado o segundo passo na transição para o moderno sistema de numeração – a introdução de uma notação para uma posição vazia, isto é, um símbolo zero.

Então, segundo Ifrah (1994, p. 270) os sábios hindus contornaram este obstáculo recorrendo à palavra sunya, que na língua indiana significava o vazio, sendo que, tanto a descoberta da regra de posição, quanto à do zero, ocorreram no século V d. C. Assim, o número 301 poderia ser representado por eka sunya tri (Um. Vazio. Três). Merick Junior (1992, p. 31) pontua que o zero passou por muitas nomenclaturas e significados diversos até chegar ao nosso atual sistema de numeração.

> Como a mais antiga forma do símbolo hindu era comumente usada em inscrições e manuscritos para assinalar um espaço em branco, era chamada *sunya,* significando 'lacuna' ou 'vazio'. Essa palavra entrou para o árabe como *sifr,* que significa 'vago'. Ela foi transliterada para o latim como *zephirum* ou *zephyrum* por volta do ano 1200, mantendo-se seu som mas não seu sentido. Mudanças sucessivas dessas formas, passando inclusive por *zeuero, zepiro* e *cifre,* levaram às nossas palavras 'cifra' e 'zero'.

É importante observar que inicialmente o zero hindu, assim como o babilônico e o maia, tinha apenas a função de preencher um espaço vazio. Segundo Ifrah (1994, p. 293) "em menos de meio século, este conceito já significava indistintamente 'vazio' ou 'nada', tendo sido enriquecido pela aquisição do sentido que atribuímos hoje à 'quantidade nula' ou 'número zero'". Assim, essas descobertas foram cruciais para o desenvolvimento de nosso sistema de numeração moderno, por conter os três princípios fundamentais que permitiam escrever qualquer número e operá-los, com apenas dez símbolos. A esse respeito Boyer (1974, P. 157) pontua que

> Com a introdução, na notação indu, do décimo numeral, um ovo redondo de ganso para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo. Embora as formas indus medievais dos dez numerais sejam bastante diferentes das em uso hoje, os princípios do sistema estavam firmados. A nova numeração, que chamamos em geral o sistema indu, é apenas uma nova combinação dos três princípios básicos, todos de origem antiga: (1) base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Nenhum desses se deveu originalmente aos indus, mas presumivelmente foi devido a eles que os três foram ligados pela primeira vez para formar o moderno sistema de numeração.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando Manuel Mendes de Brito. **Sistemas de numeração:** precursores do sistema Indu-Árabe. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DAVIS, Thayer Harold. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** computação. V. 2. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: atual, 1992.

BYRKIT, Donald R.; SANCHEZ, George I. Sistema de Numeração Maias. In: **História da Matemática**. p. 29-30 São Paulo: atual, 1992.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais.** Tradução de Hygino H. Domingues. p.01- 20 São Paulo: atual, 1992.

HECK,William. Numerais Romanos. In: **História dos números e dos numerais.** Trad. de Hygino H. Domingues. São Paulo: atual, 1992.

MAR, Diana La. Sistema de numeração egípcio. In: **História dos números e numerais**. p. 22-24. São Paulo: atual, 1992.

MENDES, Iran Abreu. **Números:** o Símbolo e o Racional na História. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MERICK JUNIOR, Lloyd C. Origem do zero. In: **História dos números e numerais.** p. 33-35. São Paulo: atual, 1992.

ROONEY, Anne. **A história da Matemática:** desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora LTDA, 2012,

SILVA, Maria do Céu. A Matemática na Índia Medieval. In: **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta do Brasil, 2000.

VOGELI, Barry Dean. Sistema de numeração babilônico. In: **História dos números e dos numerais.** p. 20-22, e 25-27. Trad. de Hygino H. Domingues. São Paulo: atual, 1992.

SOBRE OS AUTORES

Adrielle Cristine Mendello Lopes

Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática (2012) e Mestrado em Educação (2015), ambos pela Universidade do Estado do Pará. Atualmente é docente da Educação Básica em Belém, vinculada à Secretaria de Educação do Estado do Pará. E-mail: drika.mendello@gmail.com.

Ana Mara Coelho da Silva

Possui Graduação em Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2011); Especialização em Educação Inclusiva e o Ensino da Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2013); Especialização em Educação Social para a Juventude-Projovem Urbano pela Universidade do Estado do Pará (2011). Atualmente é professora da rede municipal de Belém-Pará. E-mail: maracoelho17@yahoo.com.br

Benedita das Graças Sardinha da Silva

Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2008); Graduação em Pedagogia pela Universidade Federal do Pará (2010); Especialização em Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal do Pará (2011); Especialização em Educação Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2013) e Mestrado em Educação pela Universidade do Estado do Pará (2015). Atualmente é docente da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental da Prefeitura Municipal de Abaetetuba. E-mail: gracasardinha@hotmail.com

Fábio José da Costa Alves

Possui Graduação em Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará (1989), Graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999) e Doutorado em Geofísica pela

Universidade Federal do Pará (2003). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará (UEPA), Docente do Mestrado em Educação (UEPA) Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (UEPA) e Professor Titular da Universidade da Amazônia. E-mail: fjcalves@gmail.com

Hugo Carlos Machado da Silva

Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática (2012) e Mestrado em Educação (2015), ambos pela Universidade do Estado do Pará. Atualmente é professor da Faculdade Estácio em Castanhal-Pará. E-mail: huggo_silva@outlook.com

Lília Cristina dos Santos Alves Diniz

Possui Graduação em Licenciatura plena em matemática pela Universidade do Estado do Pará (2013) e Pós-Graduação em Docência do ensino Superior pela Faculdade Evangélica do Meio Norte (2015). Atualmente cursa Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade do Estado do Pará e Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará. E-mail: liliadiniz1802@gmail.com

Neusa de Oliveira Santos

Possui Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2006); Graduação em Geografia pela Universidade Federal do Pará (2007) e Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará (2009). Atualmente é professora da Secretaria Executiva de Educação e da Prefeitura Municipal de Nova Ipixuna. E-mail:

Pedro Franco de Sá

Possui Graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1996) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2003). Professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática da Universidade do Estado do Pará desde 2013. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, ensino de matemática por atividades, matemática no ensino fundamental e uso de novas tecnologias em sala de aula, em particular uso didático da calculadora. E-mail: pedro.franco.sa@gmail.com

Tássia Cristina da Silva Pinheiro

Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matematica pela Universidade do Estado do Pará (2010), Especialização em Didática da Matemática pela Universidade Federal do Pará (2013) e Mestrado em Educação pela Universidade do Estado do Pará (2015). Atualmente é docente da Educação Básica vinculada à Secretaria de Educação do Estado do Pará. E-mail: tassia.pinheiro@hotmail.com