Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

IALES OLIVEIRA NASCIMENTO

ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Belém – PA
2024

Iales Oliveira Nascimento

ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação.
Linha de Pesquisa: Formação de Professores e Práticas Pedagógicas.
Orientadora: Profª. Dra. Rosineide de Sousa Jucá.

Belém – PA
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

N244e Nascimento, Iales Oliveira

Ensino de razão e proporção por meio da resolução de problemas para alunos do 7º ano do ensino fundamental / Iales Oliveira Nascimento. — Belém, 2024.

218f.

Orientadora: Profª. Dra. Rosineide de Sousa Jucá

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2024.

1. Ensino de matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Aprendizagem. 4. Razão e proporção. 5. Pensamento proporcional. I. Título

CDD 22.ed.510.76

Elaborada por Priscila Melo CRB-2/1345

Iales Oliveira Nascimento

ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALUNOS DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação.
Linha de Pesquisa: Formação de Professores e Práticas Pedagógicas.
Orientadora: Profª. Dra. Rosineide de Sousa Jucá.

Data da Avaliação: 24/09/2024

Banca Examinadora

______________________________________. Orientadora
Prof.ª Dra. Rosineide de Sousa Jucá
Doutora em Educação, Ciências e Matemática
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Membro interno
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Membro externo
Profª. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
Doutora em Educação Matemática
Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP

“Dá-me a conhecer, Senhor, o meu fim e qual a soma dos meus dias, para que eu reconheça a minha fragilidade. Deste aos meus dias o comprimento de alguns palmos; à tua presença, o prazo da minha vida é nada. Na verdade, todo homem, por mais firme que esteja, é pura vaidade. Com efeito, passa o homem como uma sombra; em vão se inquieta; amontoa tesouros e não sabe quem os levará. E eu, Senhor, que espero? Tu és a minha esperança.”

A vaidade da vida – (Salmos 39.4-7)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e, especialmente, pela saúde, que junto à força de vontade e determinação, me permitiram realizar tanto os sonhos almejados quanto aqueles que eu jamais imaginei concretizar ao longo da minha trajetória.

À minha esposa, Maria Cecília, minha companheira, cúmplice e amiga ao longo desses anos de estudo. Seu constante incentivo e compreensão, tanto nos momentos de alegria quanto nos de dificuldade, foram essenciais. Sempre ao meu lado, seu apoio foi fundamental para a realização dessa conquista.

À minha família, com um carinho especial para minha mãe, Osmarina Oliveira, e meu pai, Ismendio Sousa, por sempre estarem ao meu lado, me orientando, aconselhando, orando e motivando, seja nos momentos felizes ou nas adversidades. Também sou grato aos meus irmãos, Ismalio Oliveira e Ismael Oliveira por estarem na torcida em cada etapa da minha jornada. Sem o apoio da minha família, tenho certeza que não estaria aqui.

À minha sogra, Maria das Graças, por seu carinho e palavras de encorajamento, que foram importantes para me motivar em meio às minhas lutas incessantes. Com suas orações e apoio constante, ela sempre pediu a Deus que eu alcançasse os meus objetivos, e sou profundamente grato por sua presença e cuidado ao longo dessa jornada.

Agradeço à minha cunhada Eliane do Socorro pelo apoio e incentivo que foram importantes no meu ingresso e na orientação durante os meus primeiros passos na Pós-graduação strictu-sensu. Com generosidade e simplicidade, compartilhou conhecimentos acadêmicos valiosos que contribuíram significativamente para o meu desenvolvimento no mestrado.

Ao Pastor Joaquim Santos pelo valioso apoio espiritual e pelos sábios aconselhamentos que me ajudaram a enfrentar as adversidades. Sua orientação, fundamentada na luz da Bíblia, tem me fortalecido e me ajudado a prosseguir em fé nesta jornada rumo à eternidade.

Agradeço à minha orientadora, Rosineide Sousa, pela confiança, compreensão e paciência ao longo do meu percurso. Sou grato por suas valiosas orientações, ensinamentos acadêmicos e todo o conhecimento que generosamente compartilhou comigo.

A banca examinadora, composta pela professora Norma Suely e o Professor Fábio José, pelas valiosas contribuições que fizeram para a melhoria e qualificação deste trabalho.

Agradeço à turma 18 do mestrado pelos conhecimentos compartilhados, especialmente aos meus amigos Carla Santos, Karina Portal e Washington Luís, assim como aos demais amigos que conheci ao longo dessa trajetória, como Kymberli Luana e Joel da Costa. Sou grato pelos laços de amizade que construímos, pelos momentos de perseverança e pelas valiosas trocas de experiências. O companheirismo de todos foi fundamental nessa jornada.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGED-UEPA) pela oportunidade de viver essa experiência. Os professores e as disciplinas do programa compartilharam um vasto conhecimento que contribuiu significativamente para a minha formação.

Agradeço à Universidade do Estado do Pará (UEPA), onde realizei minha graduação e, agora, concluí meu mestrado.

Nascimento, Iales Oliveira. Ensino de razão e proporção por meio da resolução de problemas para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental

RESUMO

Este estudo teve como objetivo verificar se uma proposta de ensino utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribuiu para a aprendizagem do conteúdo de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A questão norteadora da pesquisa foi: a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas pode contribuir para a aprendizagem das ideias de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental? Para atingir o objetivo dessa pesquisa, optamos pelo caminho metodológico da Design Research, que é uma modalidade de experimentação didática para sala de aula que visa testar uma teoria de ensino e aprendizagem. O caminho metodológico da Design Research se compõe de três etapas: a preparação da experiência, a experimentação em sala de aula e a condução da análise retrospectiva. Nesse caminho, aplicamos uma proposta de ensino usando a resolução de problemas a uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belém-PA. Durante o experimento de ensino com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os alunos mostraram-se interessados e engajados nas atividades, adaptando-se bem às diferentes dinâmicas propostas em sala de aula. Eles participaram ativamente desde a leitura dos problemas até a elaboração de estratégias, desenvolvendo autonomia e habilidades de trabalho em equipe. Embora tenham enfrentado dificuldades na interpretação de problemas, em parte devido à falta de conhecimentos prévios agravada pela pandemia da Covid-19, os alunos conseguiram assimilar os conceitos de razão e proporção, mostrando sinais de desenvolvimento do raciocínio proporcional. A metodologia de ensino utilizada também permitiu diagnósticos precisos e socialização dos erros, tornando o ensino mais dinâmico e promovendo o diálogo sobre estratégias variadas de resolução de problemas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Resolução de Problemas; Aprendizagem; Razão e Proporção; Pensamento Proporcional.

Nascimento, Iales Oliveira. Teaching Ratio and Proportion Through Problem Solving for 7th Grade Elementary School Students.

ABSTRACT

This study aimed to verify whether a teaching proposal using the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving contributed to the learning of ratio and proportion content and the development of proportional reasoning among 7th-grade Elementary School students. The guiding research question was: Can the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving contribute to the learning of ratio and proportion concepts and the development of proportional reasoning among 7th-grade Elementary School students? To achieve the objective of this research, we opted for the Design Research methodological approach, a type of didactic experimentation for the classroom that aims to test a teaching and learning theory. The Design Research methodological approach consists of three stages: preparation of the experience, classroom experimentation, and retrospective analysis. In this approach, we applied a teaching proposal using problem-solving to a 7th-grade class at a public school in the city of Belém, PA. During the teaching experiment with the Teaching-Learning-Assessment Methodology for Mathematics through Problem Solving, students were interested and engaged in the activities, adapting well to the different classroom dynamics. They actively participated from reading the problems to developing strategies, fostering autonomy and teamwork skills. Although they faced difficulties in interpreting problems, partly due to the lack of prior knowledge exacerbated by the Covid-19 pandemic, students managed to assimilate the concepts of ratio and proportion, showing signs of proportional reasoning development. The teaching methodology used also enabled accurate diagnostics and error socialization, making the teaching process more dynamic and promoting dialogue around varied problem-solving strategies.

Keywords: Mathematics Teaching; Problem Solving; Learning; Ratio and Proportion; Proportional Thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
BTD	Banco de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EJA	Educação de Jovens e Adultos
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
DSR	Design Science Research
IBD	Investigação Baseada no Design

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A proporcionalidade é um conteúdo tão presente e útil em nossa vida que naturalmente estamos lidando com situações em nosso cotidiano que envolvem diretamente e indiretamente os conceitos de razão e proporção. Maranhão e Machado (2011) afirmam que, no âmbito escolar, a proporcionalidade é um tema importante na matemática e para outras ciências, além de estar relacionado em diversas atividades humanas.

O estudo de proporcionalidade está presente na unidade temática de Álgebra da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) e permeia as habilidades de matemática dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, bem como as do Ensino Médio, sendo compartilhado o seu conceito por diferentes conteúdos de matemática, dentre eles temos o estudo de áreas, funções, probabilidade entre outros. Esse compartilhamento ocorre por meio de operações com números naturais e representações fracionárias de números racionais.

Na BNCC, encontramos que a proporcionalidade se estende para além do ambiente escolar, aplicando-se a diversas situações cotidianas e a outras áreas do conhecimento, como vendas, trocas de mercadorias, balanços de substâncias, representações gráficas em diversas situações, ou seja, sempre lidando com relações proporcionais entre grandezas para alcançarem seus objetivos (Brasil, 2018). Além de sua aplicação no contexto social e em outras áreas de conhecimento, o conteúdo de proporcionalidade deve ter como objetivo principal desenvolver o pensamento proporcional, visto que é por meio dele que as pessoas podem resolver problemas que exigem esse pensamento matemático em diferentes contextos.

No estudo de Cramer, Post e Currier (1993), destaca-se que no processo de desenvolvimento do pensamento proporcional, a ênfase não deve ser apenas no desenvolvimento de habilidades processuais relacionadas às razões e às proporções, mas na compreensão conceitual dessas noções. Reys-Gasperini e Cantoral (2016) reforçam essa perspectiva ao apontar como essencial para o desenvolvimento do pensamento proporcional a criação de conexões entre as ideias de proporcionalidade e as de comparar, aproximar, equalizar e medir.

Lesh, Post e Behr (1988) e Lamon (2012) consideram que o pensamento proporcional não pode ser aceito como sinônimo de proporcionalidade, mas como pré-requisito fundamental para a compreensão de contextos matemáticos e aplicações da proporcionalidade. Com base nisso, compreende-se que a prática do ensino de proporcionalidade não se deve limitar ao uso mecânico de meios algébricos dependendo literalmente da memorização de regras e fórmulas.

Lamon (2012) define o pensamento proporcional como a capacidade de, em situações em que essas ações são requeridas, aumentar e/ou diminuir escalas e apresentar justificativas para afirmações referentes às relações presentes em situações que envolvem proporcionalidade direta e inversa. A autora ressalta que pensar proporcionalmente envolve detectar, expressar, analisar, explicar e fornecer evidências que apoiem afirmações sobre essas relações proporcionais.

Para Lamon (2012), o pensamento proporcional não está relacionado a métodos mecanizados ou baseados em regras. Em vez disso, está associado a processos de fluxo cognitivo livre e espontâneo, nos quais o indivíduo avalia conscientemente as relações entre quantidades. Ela também destaca que esse tipo de pensamento não é estritamente vinculado ao processo de desenvolvimento, mas que a instrução desempenha um importante papel na aquisição do pensamento proporcional.

Corroborando essa opinião, Langrall e Swarfford (2000) afirmam que os alunos que não desenvolvem o pensamento proporcional na escola possivelmente enfrentarão dificuldades ou obstáculos na compreensão da matemática em níveis mais avançados, especialmente na álgebra. Além disso, Lamon (2012) destaca que, em cursos de álgebra, geometria e trigonometria, muitas pessoas que não desenvolveram o pensamento matemático específico conseguiram compensar essa lacuna por meio do uso de regras. No entanto, essas regras, por si só, não desempenham um papel eficaz na substituição do pensamento proporcional durante o processo de aprendizagem. Pelo contrário, elas limitam a capacidade de pensar com criatividade na resolução de problemas.

Lamon (2012) adverte que as perdas são inúmeras quando há falta de compreensão dos conceitos de frações, razões e outros assuntos relacionados à proporcionalidade. Essa falta de compreensão tem consequências significativas na aprendizagem matemática dos alunos. Muitas vezes, os estudantes se preocupam apenas em realizar cálculos sem dedicar o devido cuidado à compreensão dos conceitos envolvidos no problema. Portanto, é fundamental que educadores e alunos se concentrem não apenas nos cálculos, mas também na compreensão profunda dos conceitos matemáticos. Somente assim poderemos garantir uma base sólida para a aplicação desses conhecimentos em diversas áreas da vida cotidiana e do conhecimento científico.

Para Langrall e Swarfford (2000), o pensamento proporcional é uma das habilidades mais importantes a serem desenvolvidas durante as séries intermediárias, pois fortalece e consolida a base do conhecimento matemático do aluno durante toda a sua formação na Educação Básica. No entanto, Falvo e Jucá (2022) consideram que, para desenvolver essa habilidade em sala de aula, é necessário que o professor seja formado para atuar com esse objetivo. Tanto na formação inicial quanto na continuada, o professor precisa compreender que, como ponderam Falvo e Jucá (2022, p. 140), “somente resolver problemas de proporção por métodos ou técnicas mecanizadas não garante que o aluno desenvolva o pensamento proporcional”.

Nesse contexto, Falvo e Jucá (2022) avançam nessa discussão e observam que, especialmente professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por terem possivelmente cursado graduações em Pedagogia com abordagem mais geral, talvez não tenham tido oportunidades para aprender sobre proporção e pensamento proporcional em seus cursos de formação inicial e nem como trabalhar isso com seus alunos. Dessa forma, as autoras consideram que é essencial discutir com os futuros professores e com os docentes em exercício a pertinência de, na atuação na sala de aula, na resolução de problemas, contemplar diferentes estratégias, propiciando aos estudantes condições para desenvolverem o pensamento proporcional.

Essa realidade também reflete minha trajetória escolar na Educação Básica, que ocorreu em escolas públicas, onde o ensino muitas vezes era tradicional, centrado na memorização e na aplicação de fórmulas e procedimentos, com pouca ênfase na compreensão conceitual. Nesse cenário, tive poucas oportunidades de aprofundar meu entendimento sobre conceitos como proporcionalidade ou de vivenciar práticas pedagógicas que favorecessem o desenvolvimento do pensamento matemático necessário para resolver os problemas propostos.

Tendo em vista o que foi discutido, meu interesse pelo tema se justifica a partir da minha motivação pessoal e profissional como licenciado em matemática. Como futuro professor, pretendo aprimorar minha compreensão e prática de ensino antes de atuar em sala de aula. Acredito que, ao me aprofundar no ensino do conteúdo de proporcionalidade voltado para o desenvolvimento do pensamento proporcional, poderei contribuir de forma positiva e criativa no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Vários estudos, como os de Macedo (2012), Ferreira (2013), Porto (2015), Leite (2016), Ferreira (2017), Matulle (2019), Vargas (2020), Ribeiro (2021) e Silva (2022), abordam as dificuldades enfrentadas por estudantes da Educação Básica ao lidar com os conceitos de razão e proporção na resolução de problemas matemáticos, especialmente ao relacionar grandezas. Portanto, explorar a fundo esse tema é essencial para oferecer suporte adequado em seu processo de aprendizagem, identificando os desafios enfrentados e buscando melhores soluções para auxiliá-los ao longo de sua jornada educacional.

O ensino de razão e proporção é geralmente desenvolvido de forma mecanizada e se resume apenas a aprendizagem ao método da regra de três, que os alunos aplicam sem, de fato, compreenderem o que estão fazendo. Além do que, o fato de os alunos aplicarem a regra de três na resolução de problemas que envolvem proporção não significa que estão desenvolvendo o pensamento proporcional, pois, como apontava Lesh, Post e Behr (1988), as pessoas que resolvem problemas de proporção não usam necessariamente o pensamento proporcional, visto que na resolução dos problemas se observa o uso de relações numéricas simples ou o uso de um algoritmo, como o produto cruzado.

Diante do exposto, com esta pesquisa temos interesse em responder a seguinte questão: A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem das ideias de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental? Assim, o objetivo desta pesquisa é verificar se uma proposta de ensino utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas contribui para a aprendizagem das ideias de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

A escolha pela resolução de problemas se justifica não somente pelas recomendações da BNCC, que aponta que a resolução de problemas é o foco do ensino da matemática, mas também pelos estudos de Onuchic e Allevato (2011), Onuchic (2012) e Allevato e Onuchic (2019) os quais evidenciam os benefícios de se trabalhar a resolução de problemas em sala de aula para favorecer a aprendizagem da matemática, uma vez que se propõem gerar problemas que permitam criar relações entre ideias novas e as existentes, para fazer com que os alunos investiguem de forma ativa essas relações e aprendam os conceitos matemáticos. E para dar apoio teórico nas discussões que vão emergir da aprendizagem dos alunos ao resolver problemas, usaremos os estudos de Vergnaud (1986; 1990; 2009), que discorrem sobre a Teoria dos Campos Conceituais e a formação de conceitos.

Para atingir o objetivo geral desta pesquisa, optamos pelo caminho metodológico da Design Research, que, segundo Cobb *et al*. (2003) e Molina, Castro e Castro (2007), é usada na área de Educação para experimentação didática em sala de aula. Como temos interesse em desenvolver uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, essa metodologia contempla nosso interesse.

Este trabalho é composto de sete capítulos, sendo este o primeiro. No capítulo dois, trazemos uma revisão de estudos sobre proporcionalidade e pensamento proporcional, ensino e aprendizagem de razão e proporção e sobre o ensino por meio da resolução de problemas. No capítulo 3, apresentamos uma revisão da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Em seguida, no capítulo 4, discorremos sobre a metodologia de pesquisa e a descrição do caminho metodológico adotado.

No capítulo 5, descrevemos a aplicação da proposta de ensino em uma turma do 7º ano. Por sua vez, no capítulo 6, apresentamos a análise e a discussão dos resultados da pesquisa, e, por fim, no capítulo 7, temos as considerações finais.

2. REVISÃO DE ESTUDOS

O objetivo deste capítulo é apresentar a revisão de estudos referente à proporcionalidade e ao pensamento proporcional, bem como o ensino e aprendizagem de proporção e sobre a resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

2.1 PROPORCIONALIDADE E O PENSAMENTO PROPORCIONAL

2.1.1. Conceito de proporcionalidade

A proporcionalidade é um pilar essencial na matemática, com relevância em diversas áreas e situações cotidianas. De acordo com Mora e Aymemí (1990), a proporcionalidade é um conceito que surge da observação do espaço real e de conceitos do dia a dia, como a troca de moedas, a alteração de escalas, a quantificação de misturas, a determinação de índices, entre outros. Inicialmente, esse conceito se manifesta de forma qualitativa, evoluindo posteriormente para uma expressão quantitativa. A linguagem cotidiana é o primeiro meio de expressão desse conceito, que posteriormente se traduz em linguagem gráfica ou outros meios de representação, como tabelas e expressões algébricas.

Para Ponte *et al*., (2010), o conceito de proporcionalidade direta pode ser apresentado aos alunos de duas formas: como uma igualdade entre duas razões, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou como uma função linear expressa por $y = mx$, com $m \neq 0$. O elemento mais inovador dessa abordagem, sustentada por resultados de pesquisas nacionais e internacionais, é a introdução intuitiva da proporcionalidade como uma função linear desde os primeiros anos de escolaridade. Dessa maneira, essa perspectiva ganha prioridade sobre a ideia de igualdade entre razões.

Assim sendo, a proporcionalidade não se limita apenas a um conteúdo matemático; ela desempenha o papel de “formador” de estruturas cognitivas que facilitam a compreensão de outros conceitos matemáticos relevantes, tanto em questões numéricas quanto naquelas relacionadas a Medidas e Geometria (Costa; Allevato, 2015).

Silvestre e Ponte (2009) destacam que o termo "proporcionalidade" é empregado de maneira ambígua para referir-se a proporções, razões, proporcionalidade direta e pensamento proporcional.

Segundo os PCN (Brasil, 1998), a proporcionalidade é considerada uma ideia matemática essencial e um princípio geral do conhecimento matemático. Esse conceito deve ser desenvolvido de maneira integrada a diversos conteúdos, como problemas multiplicativos relacionados à comparação de razões, números racionais e suas representações fracionárias, porcentagens, medidas, incluindo variações de grandezas como áreas e perímetros, semelhança de figuras, construções com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, além da construção e análise de tabelas e gráficos, funções e matemática financeira. O objetivo é proporcionar ao aluno uma compreensão abrangente desse conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir ao longo das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, assim como destaca a importância da proporcionalidade como um dos temas fundamentais na educação matemática, pois reconhece-o como conteúdo essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em diferentes níveis de ensino da Educação Básica. De acordo com esse documento oficial da educação brasileira:

> [...] a proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2018, p. 268).

Dentre as diferentes situações do cotidiano em que a proporcionalidade é evidenciada, a Base Nacional Comum Curricular traz para o contexto de ensino de matemática em sala de aula uma proposta de estudo e aplicação de proporcionalidade nas diferentes unidades temáticas. O objetivo é desenvolver habilidades matemáticas para os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais, favorecendo a compreensão e o aprendizado desse conteúdo essencial para suas vidas.

É importante mencionar que, segundo esse documento, no 6º ano dos anos finais, já é previsto trabalhar com problemas que envolvem porcentagem com base na ideia de proporcionalidade. No entanto, o estudo das relações proporcionais se dá a partir do 7º ano, conforme está descrito nas habilidades da BNCC, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1 - Habilidades da BNCC que envolvem proporcionalidade.

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de **proporcionalidade**, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. [...]Objeto do conhecimento: Propriedades da igualdade. (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é **proporcional** à medida do lado, o que não ocorre com a área.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de **proporcionalidade direta** e de **proporcionalidade inversa** entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre ela.	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas **grandezas, diretamente, inversamente proporcionais** ou **não proporcionais**, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas **diretamente ou inversamente proporcionais**, por meio de estratégias variadas.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de **proporcionalidade direta e inversa** entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de **proporcionalidade** envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: BNCC (2018, grifos nossos)

No campo da Álgebra, espera-se que o aluno desenvolva uma compreensão sólida dos conceitos de proporcionalidade por meio da resolução de problemas. Ao apropriar-se desses conceitos e adquirir as habilidades previstas na BNCC, espera-se que o aluno esteja apto a desenvolver seu pensamento proporcional. Isso permitirá que ele possa relacionar as operações matemáticas de maneira mais eficaz, resultando em um melhor desempenho na resolução de problemas e facilitando a compreensão em outras áreas do conhecimento.

A BNCC (Brasil, 2018) propõe que o ensino da proporcionalidade vá além do uso de fórmulas, regras e algoritmos, mas que favoreça e desperte a criatividade do aluno e estimule seu pensamento proporcional. Dessa forma, o processo de ensino-aprendizagem se torna mais relevante. Essa recomendação está alinhada com os estudos de Lesh, Post e Behr (1988), Langrall e Swarfford (2000) e Lamon (2012), que discutiram o desenvolvimento do pensamento proporcional e enfatizaram que o ensino não deve se limitar apenas ao uso do produto cruzado, também conhecido como a regra de três.

Lamon (2012) destaca que a maioria das pessoas internaliza as regras de resolução de problemas de proporção como se fossem mantras, memorizando os procedimentos como alternativa ao verdadeiro entendimento das quantidades e de suas relações. No entanto, essa dependência das regras memorizadas se torna evidente quando as pessoas são impedidas de utilizá-las, revelando dificuldades em pensar proporcionalmente. Essa situação é um reflexo da abordagem superficial dada ao ensino dos números racionais na Educação Básica, o que não proporciona o ambiente favorável para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Além disso, outros conceitos importantes relacionados à proporcionalidade merecem destaque, como os conceitos de razão, proporção e pensamento proporcional.

2.1.2. Conceito de razão

O conceito de razão é definido como o quociente entre dois números, sendo útil para fazer comparações. Por exemplo, se o salário de José é três vezes maior do que o de Batista, isso resulta em uma razão de 3 (Laureano; Leite, 1987). Van de Walle (2009, p. 383), descreve a razão como “[...] um número que relaciona duas quantidades ou medidas em uma dada situação por meio de uma relação multiplicativa, [isto é, em termos relativos], em contraste com uma relação de diferença ou aditiva [ou seja, em termos absolutos]”.

A palavra "razão" vem do latim "ratio", e significa a divisão ou o quociente entre dois números a e b, denotado por a ou $\frac{a}{b}$, e lê-se "a para b". Chama-se razão de um número racional por outro (diferente de zero) o quociente exato do primeiro pelo segundo. Por exemplo, a razão entre 10 e 5 é igual a 2, porque $\frac{10}{5} = 2$. Existem razões inversas e razões iguais. Duas razões são inversas quando o produto entre elas é igual a 1. Por exemplo, $\frac{5}{4}$ e $\frac{4}{5}$ são razões inversas, pois $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 1$. Duas razões são iguais quando as frações que as representam são equivalentes. Por exemplo, $\frac{6}{3}$ é equivalente a $\frac{4}{2}$ (Macêdo; Siqueira; Mathias, 2007).

Nesse sentido, para Suggate, Davis e Goulding (2006 *apud* Livy; Vale, 2011), razão é a comparação entre duas quantidades. Existem três tipos comuns de comparações de razão: razão, parte-parte (por exemplo, uma parte de xarope e quatro partes de água ou 1:4); proporção, parte-todo (por exemplo, uma das cinco partes é xarope ou $\frac{1}{5}$); e escala, todo-todo (comparando inteiros com inteiros, onde 1 cm no mapa equivale a 1.250.000 cm no terreno).

2.1.3. Conceito de proporção

O conceito de proporção é definido como a igualdade entre duas razões, fundamentado pelo Teorema Fundamental das Proporções, que afirma que, em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Portanto, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, então, $a \cdot d = b \cdot c$. Sendo a, b, c e d, respectivamente, o primeiro, segundo, terceiro e quarto termos da proporção, o primeiro e quarto termos são chamados de extremos e o segundo e terceiro são os meios. Essa definição é baseada no quinto livro dos Elementos de Euclides, um trabalho escrito aproximadamente em 300 a.C. (Silva; Palanch, 2021, p. 7).

Segundo Van de Walle (2009), o conceito de proporção é simplesmente uma declaração de igualdade entre duas relações, ou seja, entre duas variáveis (grandezas) proporcionais.

A noção de proporção é fundamental para entender uma variedade de conceitos matemáticos, incluindo frações, percentuais, densidade e velocidade. Originada do termo latino “proportione”, proporção refere-se à comparação entre partes de uma quantidade maior. Isso envolve estabelecer uma conexão entre duas frações que são equivalentes, formando assim uma relação entre elas. Por exemplo, a proporção de $\frac{a}{b}$, para $\frac{c}{d}$, é expressa pela equação $\frac{a}{c} = \frac{c}{d}$(Macêdo; Siqueira; Mathias, 2007).

2.2.1. O pensamento proporcional

De acordo com Lesh, Post e Behr (1988), o pensamento proporcional é um tipo específico de pensamento matemático que envolve a habilidade de fazer covariâncias e múltiplas comparações, além de reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informações. Esse tipo de pensamento está relacionado tanto com a inferência e predição quanto com os pensamentos qualitativo e quantitativo. Em consonância com essa definição, Lamon (2012) define o pensamento proporcional como a capacidade de aplicar raciocínio tanto progressivo quanto regressivo em situações em que existe uma relação constante (invariante) entre duas quantidades que variam juntas. Esse tipo de pensamento exige habilidades para produzir argumentos e explicações que vão além do uso da simbologia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Scheller e Bonotto (2020, p. 201), apoiadas no estudo de Lesh, Post e Behr (1988) sobre o pensamento proporcional, enfatizam que pensar proporcionalmente implica na correta compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância) e na noção de que essas grandezas variam em conjunto (covariação).

Na concepção de Farias (2019), o pensamento proporcional é a habilidade de raciocinar, estabelecendo uma relação relativa entre duas ou mais grandezas. Esse tipo de pensamento envolve a capacidade de analisar situações qualitativamente, estabelecer conexões, julgar com equidade e diferenciar circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

Segundo Modestou e Gagatsis (2010), esse modo de pensar vai além da simples compreensão das relações multiplicativas entre quantidades, abrangendo também o raciocínio por analogias verbais e numéricas, a proporcionalidade rotineira e a consciência meta-analógica. Esses autores explicam que o raciocínio por analogia envolve a capacidade de utilizar analogias verbais e numéricas, enquanto a proporcionalidade rotineira se refere à habilidade de resolver tarefas cotidianas que envolvem proporções. Por fim, a consciência meta-analógica diz respeito ao conhecimento e à regulação dos processos cognitivos incluídos no pensamento proporcional.

O termo pensamento proporcional pode ser entendido como as intuições e os raciocínios que guiam as ações de relacionar e comparar razões mediante uma proporção, de forma implícita ou explícita, podendo ser tanto qualitativo quanto quantitativo (Vergara; Estella; Vidal-Szabó, 2020).

É importante esclarecer que a definição do pensamento proporcional não é consensual na literatura acadêmica. Conforme apontam Bianchini e Lima (2023), há uma variação terminológica, pois alguns preferem utilizar o termo raciocínio proporcional ao invés de pensamento proporcional. Esse uso alternativo, segundo

Miranda (2009), apoiada nas considerações de Silvestre e Ponte (2008), decorre da necessidade de um conjunto amplo de conhecimentos para atender às suas necessidades específicas.

Miranda (2009) destaca a ausência de um consenso na psicologia sobre o uso dos termos pensamento e raciocínio. Para embasar essa afirmação, ela recorre à obra de Manktelow (1999), que apresenta uma visão tradicional que divide o pensamento em dedutivo e indutivo, com o indutivo sendo frequentemente relacionado ao raciocínio. No entanto, Manktelow (1999) ressalta que essa divisão não deve ser considerada rígida.

Na revisão de literatura realizada por Poggio (2012, p. 59), com destaque nos estudos de Miranda (2009) e Silva (2007), conclui-se que "[...] o pensamento proporcional envolve uma ideia geral, ampla, segundo a qual o indivíduo tem à sua disposição informações para tomada de decisão". Por outro lado, "o raciocínio proporcional envolve a avaliação que o indivíduo aplica diante de um problema, o que chamamos de raciocínio típico de proporcionalidade, com o qual ele avalia o que vai usar para resolver tal problema" (*Ibidem*).

Além disso, Segundo Poggio (2012), tanto a proporcionalidade direta quanto a proporcionalidade inversa são componentes do pensamento proporcional. Cada uma delas possui um raciocínio proporcional característico, que se refere à forma como seus conceitos e propriedades são utilizados. Na proporcionalidade direta, é essencial que o indivíduo compreenda que a razão entre as grandezas permanece constante. Já na proporcionalidade inversa, o raciocínio exige que o indivíduo entenda que o produto entre as grandezas é constante.

De acordo com Poggio (2012), a falta de pensamento proporcional impede o indivíduo de resolver situações que envolvem proporção. Sem esse pensamento, não é possível ter raciocínio proporcional. Portanto, é necessário desenvolver o pensamento proporcional e as ideias a ele associadas, como conceitos e propriedades típicos, para que o raciocínio proporcional se manifeste.

Analisando os problemas da avaliação diagnóstica (pré e pós-teste) e os problemas geradores de nossa proposta de pesquisa, observamos que, além de esperarmos que os alunos distinguissem o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo, bem como construíssem a ideia de razão e proporção, os participantes tiveram que lidar com os conceitos relacionados a essas ideias por meio da resolução de problemas cotidianos. Nessas situações, os alunos precisaram decidir que tipo de estratégia utilizar e reconhecer o tipo de relação proporcional presente em cada problema. Dessa forma, nossas atividades de pesquisa estão voltadas para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Neste capítulo, utilizaremos o termo pensamento proporcional e exploraremos seu conceito a partir das perspectivas de vários autores, tal como fizeram Maranhão e Machado (2011), embasados nas ideias de Norton (2005, p. 17), que afirma que o pensamento proporcional é empregado "[...] para descrever os conceitos e os pensamentos necessários para compreender taxa, proporção e proporcionalidade, incluindo escala". Além disso, autores como Ilany, Keret e Ben-Chaim (2004) e Lo e Watanabe (1997) observaram que a essência do pensamento proporcional é fundamentalmente multiplicativa.

Os aspectos caracterizadores do pensamento proporcional são sustentados por diversos autores. Lesh, Post e Behr (1988) consideram o pensamento proporcional uma das pedras angulares da matemática. Carvalho e Maranhão (2012), Ibarra, Guevara e Robles (2022), bem como Falvo e Jucá (2022), discutem a importância desse pensamento matemático, afirmando que ele não se restringe a um único contexto. O desenvolvimento adequado do pensamento proporcional favorece o aprendizado de diversos conteúdos matemáticos e, especificamente na Educação Básica, é fundamental para a compreensão de muitos dos conceitos trabalhados.

De acordo com Lamon (2012), a mobilização desse pensamento matemático é um dos melhores indicadores da compreensão bem-sucedida dos números racionais e dos conceitos multiplicativos a eles relacionados. Ela enfatiza que esse modo de pensar pode ser desenvolvido desde os primeiros anos da Educação Básica e continua a ser ampliado em profundidade e sofisticação ao longo da trajetória escolar, facilitando a compreensão de conceitos matemáticos mais avançados e a consolidação do pensamento científico.

No entanto, conforme destacam Falvo e Jucá (2022), uma das lacunas que dificulta o desenvolvimento desse pensamento matemático dos alunos é a deficiência na aprendizagem dos números racionais. Elas apontam que essa deficiência afeta negativamente o desenvolvimento do pensamento proporcional. Segundo Howe, Nunes e Bryant (2010), os baixos desempenhos dos alunos em números racionais têm implicações diretas no desenvolvimento do pensamento proporcional, uma vez que este se baseia no conceito de razão, um tipo de número racional.

Nesse sentido, Norton (2005) destaca que muitos livros didáticos de matemática apresentam a ligação entre frações e razão. Os alunos, geralmente, aprendem a resolver problemas de proporção representando as informações por meio de equações com frações equivalentes e utilizando a multiplicação cruzada seguida de divisão (Karplus et al., 1983, p. 79).

No entanto, Norton (2005) aponta um problema com essa abordagem, uma vez que, no contexto de frações, o numerador representa uma parte e o denominador, o todo, enquanto no caso das razões, tanto o numerador quanto o denominador representam partes. Embora que o uso da notação de fração na resolução de alguns problemas de proporção possa parecer conveniente ao estabelecer um algoritmo de multiplicação e depois divisão, Norton (2005) observa que isso pode gerar confusão nos alunos, pois, nas frações, o todo é o denominador, enquanto nas razões, é a soma das partes. A falta de uma abordagem integrada do ensino de frações e do pensamento proporcional nos livros didáticos acaba, assim, contribuindo para essa confusão entre os estudantes.

Faria (2019) considera que, para consolidar o pensamento proporcional, é essencial que o indivíduo entenda a razão como um índice comparativo que fornece informações sobre uma determinada situação. Portanto, é fundamental diferenciar as situações em que esse procedimento é aplicável daquelas em que não são.

Assim, Cordel e Mason (2000) destacam que o desenvolvimento do pensamento proporcional é um processo complexo que exige a vivência ao longo de um período prolongado de experiências de diferentes naturezas envolvendo relações proporcionais. A consolidação desse tipo de pensamento matemático requer, portanto, uma exposição contínua e variada a situações que permitam aos aprendizes explorarem e compreenderem as características das proporções.

O pensamento proporcional é fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos e científicos mais avançados. No estudo de Langrall e Swafford (2000), é explorado como esse tipo de pensamento se desenvolve ao longo do tempo em alunos do Ensino Fundamental, enfatizando a transição gradual do raciocínio aditivo para o multiplicativo. Para descrever essa progressão, as autoras identificam quatro níveis distintos, cada um caracterizado por habilidades e estratégias específicas, que refletem o avanço dos alunos no entendimento de relações proporcionais:

Nível 0 - Pensamento não proporcional ou Pré-proporcional: Nesse estágio inicial, os alunos ainda não reconhecem as relações proporcionais e utilizam estratégias inadequadas, como a adição ou contagem direta. Essa fase é caracterizada pela ausência de compreensão das inter-relações entre as quantidades envolvidas em um problema, sendo comum que eles apliquem operações aditivas em contextos onde deveriam reconhecer multiplicação ou divisão.

Nível 1 - Pensamento Transitório ou pensamento informal sobre situações proporcionais: caracteriza-se pelo início da percepção dos alunos de que há uma relação entre as quantidades envolvidas. Contudo, sua abordagem ainda é imprecisa e informal, frequentemente utilizando estratégias como desenhos e representações visuais. Nesse estágio, os alunos podem misturar raciocínio aditivo com multiplicativo, o que indica uma compreensão parcial das situações proporcionais. Embora comecem a explorar o conceito de razão, sua aplicação do termo não é totalmente precisa. Por exemplo, ao enfrentar um problema que envolve a razão entre duas quantidades, os alunos podem somar ou subtrair os valores, sem entender que a solução correta exige a aplicação de uma relação proporcional.

Nível 2 - Pensamento Quantitativo: Nesse estágio, à medida que o entendimento dos alunos se aprofunda, eles começam a aplicar operações matemáticas de forma mais apropriada. Agora, eles reconhecem quando é necessário utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas proporcionais. Embora possam cometer erros ocasionais, o pensamento torna-se mais coerente, e os alunos começam a demonstrar uma compreensão clara das relações proporcionais e das operações adequadas para lidar com elas.

Nível 3 - Pensamento Proporcional Formal: Nesse estágio mais avançado, os alunos dominam o pensamento proporcional. Eles conseguem identificar e aplicar de maneira flexível as relações entre quantidades em uma ampla variedade de problemas. A compreensão é agora abstrata e formal, permitindo que os alunos solucionem problemas proporcionais com precisão e eficiência. Eles demonstram domínio sobre o conceito de razão e proporção e aplicam essas ideias em situações complexas.

A transição entre esses níveis não ocorre de forma automática. É necessário que o ensino promova uma progressão gradual, com atividades que incentivem o uso de contextos reais, a exploração de múltiplas estratégias e a discussão entre os alunos. Langrall e Swafford (2000) também destacam que é fundamental oferecer oportunidades para que os alunos desenvolvam, testem e refinem suas estratégias, permitindo um aprendizado profundo e duradouro do pensamento proporcional.

Para viabilizar esse processo de ensino e aprendizagem, é fundamental estimular o aluno através de um ensino comprometido, conduzindo-o a um nível de autonomia no qual ele demonstre a capacidade de pensar, julgar e questionar. Esse estímulo deve ser orientado pelo próprio pensamento matemático do aluno, impulsionado pela resolução de problemas.

Segundo Lamon (2012), o pensamento proporcional está diretamente ligado à habilidade de investigar regularidades em situações-problema, um processo essencial para a modelagem matemática. Nesse contexto, o pensamento proporcional atua como um “facilitador para as capacidades de resolução de problemas” (Lesh; Post; Behr, 1988, p. 20).

Isso se deve ao fato de que a resolução de problemas permite que os alunos sejam protagonistas de sua própria prática de ensino-aprendizagem, utilizando suas habilidades para mobilizar conhecimentos matemáticos. Dessa maneira, os alunos desenvolvem uma compreensão do problema tanto de forma individual quanto coletiva, o que os leva a um estágio de maior autonomia. Assim, eles adquirem a capacidade de relacionar conceitos, refletir e criar estratégias para resolver problemas.

Essa abordagem está em consonância com a terceira concepção[1] dessa perspectiva matemática de ensino, conforme descrito nas etapas propostas por Allevato e Onuchic (2021), que defendem o ensino da matemática através da resolução de problemas. Segundo Matulle (2019), uma das potencialidades da resolução de problemas é a ruptura com o modelo tradicional de ensino, permitindo que o estudante passe de uma postura passiva para uma postura ativa e engajada, como também destacam Allevato e Onuchic (2021).

[1] Há três concepções principais de ensino em relação à resolução de problemas. A primeira se refere a ensinar **sobre** a resolução de problemas, a segunda foca em ensinar **para** resolver problemas matemáticos, e a terceira aborda ensinar **via** resolução de problemas. Essas três concepções serão esclarecidas na seção 2.4.

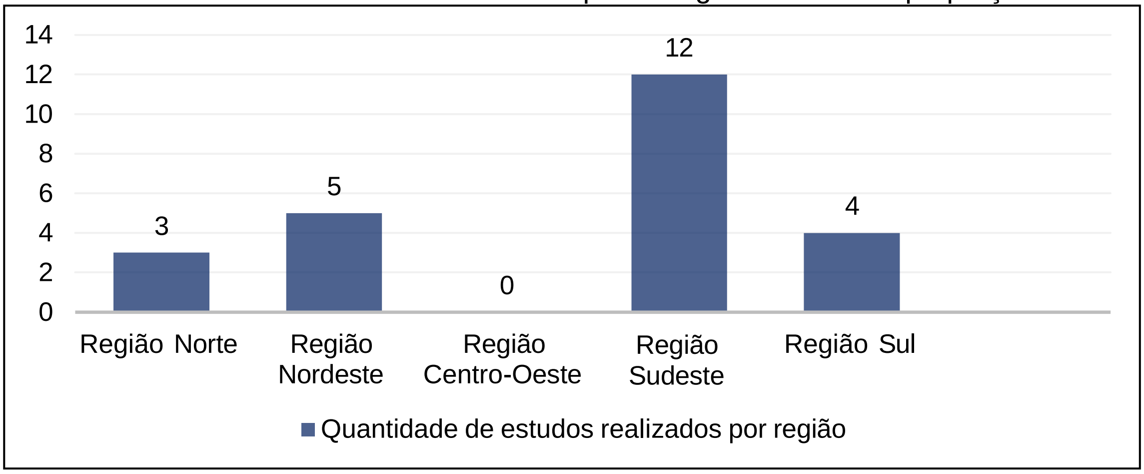
Matulle (2019) destaca que a resolução de problemas oferece várias potencialidades, incluindo o trabalho colaborativo, a diversificação e construção de novas estratégias, a identificação de lacunas de aprendizagem, a verbalização durante as aulas de matemática e a compreensão das produções e processos cognitivos dos estudantes. Ele salienta que, durante a aplicação de sua pesquisa envolvendo a resolução de problemas em sala de aula, foram identificadas várias lacunas de aprendizagem que dificultaram a resolução de certos problemas, especialmente aqueles relacionados a operações com decimais e transformação de medidas. Essas lacunas, uma vez detectadas, puderam ser trabalhadas tanto individual quanto coletivamente, visando à superação das dificuldades e à compreensão dos conteúdos.

2.3 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Em uma busca por dissertações e teses sobre a temática em questão, tomamos por parâmetro exploratório as pesquisas do Banco de Teses e Dissertações (BTD) da CAPES[2] no período de 2012 a 2022. Na busca, usamos descritores como “Ensino de Razão e Proporção”, “Proporcionalidade”, “Pensamento Proporcional” e “Raciocínio Proporcional”. Obtemos 24 estudos, sendo 23 dissertações e uma tese. Assim, a quantidades de estudos abrangeram diferentes níveis de ensino, que são: 17 estudos no Ensino Fundamental, dois estudos na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e cinco estudos no Ensino Médio. Com o levantamento realizado, é possível verificar que o tema proporção e proporcionalidade tem sido interesse das pesquisas no Brasil. O Gráfico 1 mostra o levantamento realizado por regiões do Brasil no período de 2012 a 2022.

[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Gráfico 1 - Estudos sobre ensino e aprendizagem de razão e proporção.

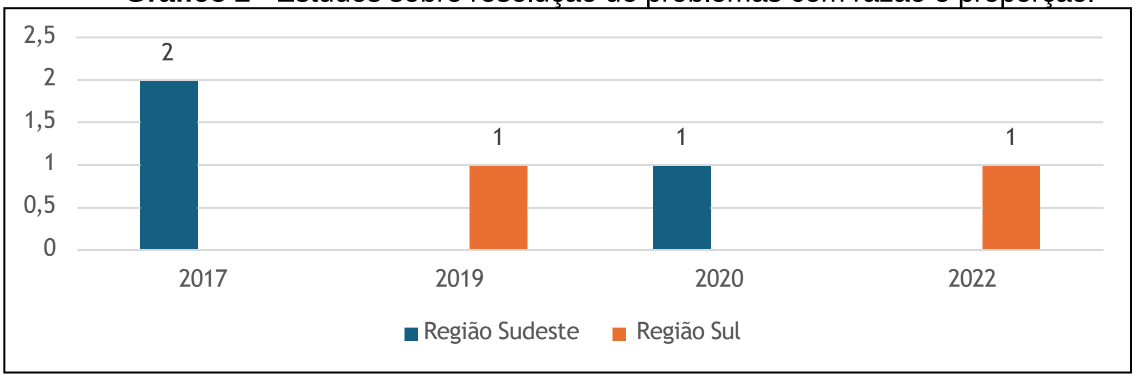


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com base na nossa amostra, o Gráfico 1 revela que a região Sudeste apresentou a maior concentração de estudos, seguida pela região Nordeste. A região Sul ocupou a terceira posição, enquanto a região Norte ficou em último lugar. É importante ressaltar que não encontramos nenhum estudo na região Centro-Oeste durante o período analisado.

No que diz respeito aos estudos sobre ensino e aprendizagem de razão e proporção que envolveram a resolução de problemas no período de 2012 a 2022, verificamos sua maior ocorrência nas regiões Sudeste e Sul, conforme apontado no Gráfico 2.

Gráfico 2 - Estudos sobre resolução de problemas com razão e proporção.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com base nos dados de nossa amostra, observamos que a região Sudeste teve uma maior parte de trabalhos envolvendo resolução de problemas, sendo dois estudos em 2017 e um estudo em 2020. Em seguida, vem a região Sul, com um estudo em 2019 e um estudo em 2022. No geral, perante o panorama dos estudos revisados, percebemos que a resolução de problemas voltado ao ensino dos conceitos de razão e proporção foi pouco explorada, apontando, assim, uma carência de estudos de nível de mestrado e doutorado nessa área da educação matemática.

Para uma melhor compreensão dos estudos encontrados, o Quadro 2 apresenta uma breve descrição desses estudos.

Quadro 2 - Mapeamento de Teses e Dissertações no período de 2012 a 2022.

Tipo de estudo/ Ano	*Autor*	*Título*	*Objetivo da pesquisa*	*Questão de pesquisa ou hipótese*
Dissertação 2012	Marilia Rios de Paula	*Razão como Taxa: uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática*	*Identificar nas falas dos alunos o conhecimento sobre o tema razão como taxa, sua maneira de operar e a lógica de suas operações com a finalidade dos alunos produzirem resultados com significação de desenvolvimento do raciocínio proporcional*	*Investigar sobre o ensino de razão como taxa, como parte da formação matemática dos estudantes do Ensino Fundamental*
Dissertação 2012	Eduardo Lopes de Macedo	*Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA*	*Investigar as potencialidades de uma sequência de ensino, elaborada com base nos conhecimentos prévios dos estudantes da EJA à luz dos Campos Conceituais, para aprendizagem do conceito de proporção simples*	*Quais as contribuições de uma sequência de ensino, elaborada com base nos conhecimentos prévios dos estudantes da EJA e à luz da teoria dos campos conceituais, para a aprendizagem do conceito de proporção simples?*
Dissertação 2012	*Ana Maria Pereira Pinto Poggio*	*Um diagnóstico sobre o conceito de Proporcionalidade de alunos do ensino médio na perspectiva dos três mundos da matemática*	*Investigar quais são as definições que alunos do 3º ano do Ensino Médio dão sobre proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, bem como analisar com que características trabalham questões que*	*verificar se e como as ideias de proporcionalidade direta e inversa, estão presentes nos participantes, por meio, respectivamente, das definições de conceito, das imagens de conceito e das características dos Três Mundos da Matemática*

Tipo de estudo/ Ano	*Autor*	*Título*	*Objetivo da pesquisa*	*Questão de pesquisa ou hipótese*
			envolvem tais conceitos	
Dissertação 2013	*Alexandre Ramon Souza*	*Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental*	*Verificar se o estudo da razão áurea e de suas aplicações poderia contribuir para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.*	*Quais seriam as contribuições do estudo da razão áurea e de suas aplicações para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano de uma escola pública e para a percepção da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento?*
Dissertação 2013	*Regina Lucia da Silva*	*Conhecimentos prévios revelados por estudantes de sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental relativos à proporcionalidade*	*Investigar os conhecimentos prévios de alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental sobre o tema proporcionalidade, considerado um elemento vital para o desenvolvimento curricular.*	*Quais são as possibilidades e as dificuldades encontradas na introdução de situações de aprendizagem, elaboradas com base em propostas apresentadas nos anos iniciais e propostas que os professores de 7° ano (antiga 6a série) costumam oferecer a seus alunos, numa perspectiva ausubeliana, em relação às noções de proporcionalidade?*
Dissertação 2013	*Cleonilson dos Reis Ferreira*	*Conceito de Proporcionalidade: uma proposta para o processo ensino-aprendizagem do 7º ano do Ensino Fundamental*	*Desenvolver uma sequência didática para o ensino do conceito de proporcionalidade com alunos do 3° ano do Ensino Médio, abordado no conteúdo do 7º ano do Ensino Fundamental*	*Nossa sequencia didática possibilitará a participação dos alunos na elaboração do conceito de proporcionalidade?*
Dissertação 2015	*Edna Rodrigues Santos Porto*	*Raciocínio proporcional: a resolução de problemas por estudantes da EJA*	*Investigar o raciocínio proporcional de estudantes da 4ª Fase da EJA (correspondente ao 8º e 9º ano)*	*Os conteúdos familiares auxiliariam o estudante a raciocinar proporcionalmente (hipótese)*

Tipo de estudo/ Ano	*Autor*	*Título*	*Objetivo da pesquisa*	*Questão de pesquisa ou hipótese*
Dissertação 2016	*Hugo Silva Leão*	*O uso do Geogebra na aprendizagem de proporcionalidade*	*Investigar as contribuições do uso do software Geogebra para a aprendizagem de proporcionalidade dos estudantes do Ensino Médio*	*De que forma o software Geogebra pode contribuir para aprendizagem dos problemas de proporcionalidade?*
Dissertação 2016	*Ana Carla Amâncio Machado Dias*	*Avaliação de um objeto de aprendizagem para a compreensão do conceito de proporcionalidade por estudantes do 6º. Ano do Ensino Fundamental*	*Avaliar o recurso digital Equilibrando Proporções, na compreensão do pensamento proporcional, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (2009)*	*Quais contribuições o recurso digital Equilibrando Proporções pode agregar na compreensão do campo conceitual da proporcionalidade?*
Dissertação 2016	*Márcio Jacinto Vasconcellos Dutra*	*O ensino de razão e proporção no Ensino Fundamental usando experimentos de movimento retilíneo uniforme*	*Implementar uma proposta para o ensino de razões e proporções, inserindo experimentos de movimento retilíneo uniforme para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental*	*No sétimo ano do Ensino Fundamental é possível o aluno compreender o significado de razão e proporção vinculada a sua aplicação em física, especificamente no conceito de velocidade, conteúdo apenas visto no nono ano desta mesma etapa da educação básica. (hipótese)*
Dissertação 2016	*Juliene Azevedo Miranda*	*Desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma sequência didática para o sexto ano do Ensino Fundamental*	*Apresentar uma sequência didática para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional tendo como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud*	*Uma sequência didática com base em situações-problema que favoreçam o estabelecimento das relações de covariação e invariância de grandezas pode contribuir para a formação do raciocínio proporcional de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental?*
Dissertação 2016	*Anna Barbara Barros Leite*	*Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações*	*Descrever e classificar resoluções e estratégias utilizadas por*	*Como se configura a compreensão dos estudantes acerca das relações proporcionais, tanto*

Tipo de estudo/ Ano	Autor	Título	Objetivo da pesquisa	Questão de pesquisa ou hipótese
		que envolvem grandezas diretamente proporcionais	*estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental II ao resolverem atividades relacionadas a situações-problema de proporção dupla e proporção múltipla em relações diretamente proporcionais.*	*na proporção dupla como na múltipla, ao realizarem atividades com e sem apoio do registro escrito (computacional e não-computacional)?*
Dissertação 2017	*Mariana Braun Aguiar*	*Introduzindo a noção de proporcionalidade via resolução de problemas: uma análise acerca de esquemas mobilizados por estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental*	*Explorar os diferentes esquemas cognitivos utilizados por estudantes quando confrontados com problemas envolvendo razões e proporções*	*Quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas?*
Dissertação 2017	*Márcio José Ferreira*	*O potencial dos grupos interativos para o ensino de proporcionalidade: um estudo de caso com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental*	*Compreender o potencial de Grupos Interativos para o processo de ensino e aprendizagem de proporcionalidade*	*Como se dá o processo de ensino/aprendizagem do conceito de proporcionalidade envolvendo Grupos Interativos?*
Dissertação 2017	*Emanuel Arcanjo Jaconiano*	*Resolução de problemas de proporcionalidade através da redução à unidade*	*Apresentar o tema grandezas proporcionais, usando o método de redução à unidade*	*o uso da redução à unidade proporcionando um novo olhar sobre a busca na solução de problemas(hipótese)*
Dissertação 2017	*Rosely Rodrigues Rego Bitencourt*	*Aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática*	*Aplicar o conceito de proporcionalidade para alunos do 2º ano do Ensino Médio, através de uma sequência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática*	*O uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem, em situações de sala de aula, pode contribuir para desenvolver e melhorar a qualidade da aprendizagem dos conteúdos relacionados com o conceito de proporcionalidade. (hipótese)*

Tipo de estudo/ Ano	*Autor*	*Título*	*Objetivo da pesquisa*	*Questão de pesquisa ou hipótese*
Dissertação 2018	*José Maria dos Santos Lobato Júnior*	*O ensino de razão e proporção por meio de atividades*	*Analisar as potencialidades de uma sequência didática de razão e proporção, diferente das práticas usuais*	*Quais as contribuições que uma sequência didática, estruturada nos moldes do Ensino por Atividades, podem trazer para minimizar as dificuldades no processo de Ensino/ Aprendizagem de razão e proporção?*
Dissertação 2018	*Petrina Rubria Nogueira Avelar Tobias*	*Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade*	*Identificar, problematizar e analisar as possibilidades e potencialidades da abordagem pedagógica na Sala de Aula Invertida nas aulas de Proporcionalidade para alunos do Ensino Fundamental*	*As percepções dos estudantes em relação à SAI bem como as possíveis influências da utilização de videoaulas no processo de interação estudante-aula-professor nessa perspectiva, e se essa interação traz elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade. (hipótese)*
Dissertação 2018	*Jakelline de Aquino Batista*	*O ensino de razão e proporção por meio de atividades*	*Avaliar a potencialidade da aplicação de uma sequência didática baseado no ensino por atividades de razão e proporção em relação à participação e desempenho dos estudantes quanto à aprendizagem deste conteúdo*	*Quais os efeitos de uma prática pedagógica baseada no ensino por atividades, de princípios diferentes do ensino tradicional, no que tange o desenvolvimento da apreensão de conceitos de proporcionalidade e em relação à participação dos estudantes e seu desempenho quanto à aprendizagem desse conteúdo?*
Dissertação 2019	*Luciano Matulle*	*O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da resolução de problemas com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental*	*Apontar as potencialidades da resolução de problemas com base na Teoria dos Campos Conceituais para o desenvolvimento do raciocínio de*	*Com base na Teoria dos Campos Conceituais, que potencialidades são percebidas duma metodologia de ensino baseada na Resolução de Problemas para o desenvolvimento do*

Tipo de estudo/ Ano	*Autor*	*Título*	*Objetivo da pesquisa*	*Questão de pesquisa ou hipótese*
			proporcionalidade de estudantes	*raciocínio de proporcionalidade?*
Dissertação 2020	*Cássio Lima Vargas*	*A resolução de problemas como metodologia de ensino de razão e proporção*	*Investigar o impacto da metodologia de ensino de resolução de problemas no processo de aprendizagem do conteúdo de razão e proporção para estudantes*	*A metodologia de Resolução de Problemas pode ajudar nesse processo?*
Tese 2021	*Mariana da Silva Nogueira Ribeiro*	*Percurso de estudo e pesquisa: uma proposta para aprender proporcionalidade no Ensino Fundamental*	*Investigar a aprendizagem de estudantes em relação à proporcionalidade, por meio de atividades elaboradas e propostas em um Percurso de Estudo e Pesquisa*	*Como encaminhar os processos metodológicos de ensino da Matemática, de maneira que os saberes de proporcionalidade possam ser estudados a partir do desenvolvimento de um PEP?*
Dissertação 2022	*Camila dos Reis*	*Matemática e Educação Ambiental no Ensino Fundamental: a construção de cisternas e as relações de proporcionalidade*	*Avaliar as contribuições no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de proporcionalidade, a partir de uma proposta didática que envolveu educação ambiental e matemática aos estudantes*	*A construção de cisternas como uma problemática possibilita a compreensão e concretização dos conceitos de proporcionalidade no Ensino Fundamental?*
Dissertação 2022	*Matheus Feliciano da Silva*	*Razão, proporção e resolução de problemas: uma proposta para o Ensino Fundamental*	*Apresentar uma proposta para o ensino de proporcionalidade por meio de Metodologias Ativas nas aulas de matemática, levando em considerando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática como uma Metodologia Ativa*	*como ensinar de uma maneira diferente e mais dinâmica um determinado conteúdo matemático, em específico, a proporcionalidade, utilizando uma estratégia que instigue os alunos a aprender e construir seus conhecimentos a respeito da proporção?*

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

O Quadro 2 proporciona um panorama dos estudos acadêmicos em nível de Mestrado e Doutorado relacionados ao ensino de razão e proporção no período de 2012 a 2022. A seguir, apresentamos uma breve descrição de cada um desses estudos com o intuito de conhecer o que foi produzido ao longo desses 10 anos.

O estudo de Paula (2012) tinha por objetivo identificar nas falas dos alunos o conhecimento sobre o tema razão como taxa, sua maneira de operar e a lógica de suas operações, com a finalidade de os alunos produzirem resultados com significação de desenvolvimento do raciocínio proporcional. A metodologia de pesquisa utilizada foi a experimental do tipo de campo, a partir da qual foi elaborado um conjunto de protótipos de tarefas para inserção da noção de razão como taxa para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola na Cidade de Rezende/RJ.

A autora desenvolveu três tarefas denominadas de protótipos de razão como taxa. Essas tarefas foram aplicadas a dois alunos do 9º ano com o propósito de que eles as resolvessem. Durante o compartilhamento de conhecimento, as falas dos alunos foram analisadas com base no modelo de campos semânticos (MCS). O intuito era observar a produção de significados quando os alunos estabeleciam diálogos entre si e com o professor. O foco principal era identificar elementos matemáticos que servissem como ponte para compreender o tema de razão como taxa e proporção.

Os resultados do estudo apontaram que os alunos tiveram dificuldades na compreensão do termo "razão" e enfrentaram desafios ao lidar com problemas envolvendo frações, razões e proporções. Isto mostrou falta de significados nas produções realizadas por eles, bem como a ausência do pensamento proporcional em suas falas. No entanto, a partir da perspectiva do modelo dos campos semânticos (MCS) adotada pelo professor em sala, os alunos passaram a se sentir legitimados ao dialogar com o professor sobre suas produções de significado, dessa forma, gerou compartilhamento e aprendizagem das ideias do conteúdo de proporção entre alunos.

O estudo de Macedo (2012) tinha por objetivo investigar as potencialidades de uma sequência de ensino, elaborada com base nos conhecimentos prévios dos estudantes da EJA à luz dos Campos Conceituais, para aprendizagem do conceito de proporção simples. A metodologia de pesquisa utilizada é do tipo de desenho do experimento, que guiou os passos da aplicação da pesquisa para alunos do 3º ano do ensino médio da EJA de uma escola pública da rede estadual na cidade de São Paulo/SP.

O autor distribuiu os sujeitos da pesquisa em dois grupos denominados de grupo experimental e grupo controle. Feito isso, o autor aplicou um pré-teste e um questionário, sendo o pré-teste para verificar que tipos de conhecimento prévios os alunos possuíam sobre o tema, e o questionário, por sua vez, com intenção de conhecer o perfil de cada um deles. Em seguida, aplicou uma sequência de ensino, do seguinte modo: aos alunos do grupo experimental, aplicou uma intervenção de ensino de 9 encontros, enquanto para os alunos do grupo controle, aplicou aulas convencionais de 9 aulas. E por último, aplicou a ambos os grupos um pós-teste contendo 12 questões para avaliar aprendizagem dos alunos sobre proporção simples após a sequência de ensino.

Os resultados do estudo apontaram que ambas as turmas no pré-teste tiveram dificuldades na resolução dos problemas de proporção simples, mas a turma do grupo controle teve um melhor desempenho em relação ao grupo experimental. Outro ponto observado foi sobre os esquemas de resolução dos estudantes, foram encontrados: relação aditiva, relação funcional, regra de três, relação escalar e estratégia desconhecida.

O autor registra que a relação aditiva esteve mais presente no pré-teste, já a relação funcional e escalar só foram utilizadas no pós-testes, após o ensino por conceito de proporção simples. Quanto à regra de três, foi a estratégia mais utilizada pelas turmas, atingindo uma maior quantidade de acertos do que de erros. O autor ressalta que os erros mais cometidos pelos estudantes foram com algoritmo de multiplicação ou da divisão, erros na mistura entre estruturas aditivas e multiplicativas, erro na organização, ou na separação das quantidades, erro na noção escalar, erro na noção funcional e erro incompreensível. Por fim, concluiu-se que a sequência de ensino de proporção demostrou potencialidade com base nos conhecimentos prévios dos estudantes do Ensino Médio da EJA (3º Ano).

O estudo de Poggio (2012) tinha por objetivo investigar quais são as definições que alunos do 3º ano do Ensino Médio dão sobre proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, bem como analisar com que características trabalham questões que envolvem tais conceitos. A metodologia utilizada foi a de abordagem exploratória para desenvolver um estudo diagnóstico em uma escola pública da rede estadual na cidade de São Paulo/SP.

A autora desenvolveu um questionário contendo 17 questões abertas e semiabertas envolvendo as definições de proporcionalidade direta e inversa e problemas que permitam verificar com que características dos Três Mundos os alunos trabalham questionamentos que envolvem o raciocínio com proporções. Estas questões foram desenvolvidas segundo as ideias de definição de conceito (Tall; Vinner, 1981), de imagem de conceito (Tall; Vinner, 1981) e dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2004), que sugere que o professor traga para sala de aula situações que provoquem a presença simultânea de características do mundo corporificado, do mundo simbólico e do mundo formal, pelas quais possam garantir uma imagem conceitual rica o suficiente para confirmar que houve desenvolvimento cognitivo e, bem como, aprendizagem.

Os resultados do estudo apontaram que nas respostas dadas pelos alunos pesquisados sobre a proporcionalidade direta, eles possuem uma imagem de conceito que o autor classificou como “pobre”, apresentando exclusivamente características corporificadas, baseadas em um gráfico de “reta com coeficiente angular positivo”, e quando mostram características do mundo simbólico, estas não correspondem ao conceito.

Em relação às respostas apresentadas sobre a proporcionalidade inversa, estas sugerem que os alunos não fazem uma jornada pelos Três Mundos da Matemática e apresentam essencialmente características corporificadas ao longo do trabalho. Por fim, a autora concluiu que os participantes deste grupo não desenvolveram o pensamento proporcional, pois não mostraram em suas respostas uma imagem de conceito de proporcionalidade direta e inversa, rica e diversificada, que aponte características da teoria dos Três Mundos da Matemática, que requer do indivíduo uma ampla gama de experiências, imagens mentais, procedimentos e processos da natureza das proporções.

O estudo de Souza (2013) tinha por objetivo verificar se o estudo da razão áurea e de suas aplicações poderia contribuir para a aprendizagem da proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foi do tipo qualitativa e utilizou os métodos da pesquisa exploratória em uma escola pública de Ensino Fundamental e Médio do município de Mário Campos, região metropolitana de Belo Horizonte/MG.

O autor desenvolveu em sala de aula um conjunto de quatorze atividades relacionadas com a razão áurea, tendo em vista a aprendizagem da proporcionalidade, com intuito de motivar e melhorar a compreensão dos alunos sobre os conceitos de razão e proporção. Para isso, os alunos foram divididos em grupos de 4 a 5 pessoas, sendo que essas atividades foram desenvolvidas em 24 horas/aulas na aplicação da sequência didática. O autor ressalta, entre as quatorze questões disponíveis, que foram selecionadas seis para análise devido às manifestações e expectativas que elas provocaram, bem como ao alto interesse demonstrado pelos alunos em resolvê-las.

Os resultados do estudo apontaram que durante aplicação do conjunto de atividades didáticas, apresentaram fortes evidências de que os alunos compreenderam o conceito de razão áurea, pois foram capazes de aplicá-lo na identificação e construção de retângulos e triângulos áureos, da espiral áurea, do pentagrama, do decágono, da sequência de Fibonacci, do segmento áureo, entre outros. Nesse sentindo, o teste aplicado ao final das atividades apontou que os grupos conseguiram resolver problemas envolvendo proporções direta e inversa, corroborando com os resultados das análises dos dados coletados em sala de aula. Dessa forma, o autor concluiu que o estudo da razão áurea e de suas aplicações contribuiu para a aprendizagem da proporcionalidade dos alunos.

O estudo de Silva (2013), teve como objetivo investigar os conhecimentos prévios de alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental sobre o tema proporcionalidade, considerado um elemento vital para o desenvolvimento curricular. A metodologia empregada foi de natureza qualitativa, caracterizando-se como estudo de caso, e baseou-se na resolução de situações-problema. A pesquisa foi conduzida em uma escola da rede pública estadual no município de Santo André, São Paulo.

A autora conduziu uma pesquisa com apenas dois alunos. Um deles estava no 6º ano e ainda não havia estudado formalmente as ideias de razão e proporção. O outro aluno, do 7º ano, já tinha abordado esse tópico de maneira intencional. Ambos foram convidados a resolver uma sequência de atividades de proporção que havia sido previamente apresentada durante dez sessões de trabalho. Essa sequência consistia em 10 situações-problema, cada uma com o objetivo de identificar um tipo específico de conhecimento relacionado à ideia de proporcionalidade.

Os resultados do estudo indicaram que os alunos envolvidos na pesquisa demonstraram competência em estabelecer, analisar e sintetizar informações, bem como em organizar dados para solucionar problemas. Eles exibiram habilidades satisfatórias de linguagem natural e numeramento, além de capacidade para reconhecer ações apropriadas, utilizando cálculos mentais ou escritos, precisos ou aproximados. Os desafios enfrentados estavam associados a números e conceitos racionais, incluindo grandeza e medida.

A autora observou e registrou as atitudes dos alunos em relação à Matemática. Em algumas questões, os alunos tiveram dificuldades e não conseguiram aplicar conhecimentos matemáticos às situações-problema apresentadas. Por outro lado, em outras questões, os alunos mostraram domínio. De maneira geral, a autora relata que identificou vários conceitos, incluindo as quatro operações matemáticas no conjunto dos números naturais e racionais, com ênfase nas operações no campo multiplicativo de ambos os conjuntos.

Contudo, foi possível resolver a maioria das situações-problema envolvendo proporcionalidade, por meio das quatro operações ensinadas nas séries iniciais. As dificuldades encontradas estavam relacionadas à operação de divisão no conjunto dos números racionais e ao campo de grandezas e medidas, como área e velocidade.

O estudo de Ferreira (2013) trouxe como objetivo desenvolver uma sequência didática para o ensino do conceito de proporcionalidade com alunos do 3° ano do Ensino Médio, abordado no conteúdo do 7º ano do Ensino Fundamental. A sequência didática foi projetada para facilitar a compreensão dos alunos sobre a constante de proporcionalidade e a relação entre grandezas proporcionais, enfatizando a transição do concreto para o abstrato. A metodologia utilizada foi a de métodos de pesquisa exploratória para aprofundar o conhecimento no tema, o estudo foi realizado em uma escola pública estadual na cidade de Imperatriz/MA.

O autor conduziu um estudo com uma turma do 3º ano do Ensino Médio. Destaca-se que, devido à limitação de tempo, não foi possível realizar o estudo com as turmas do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, como inicialmente planejado. No entanto, o autor salienta que, considerando o conteúdo de proporcionalidade ser tão presente nos currículos escolares da Educação Básica, pode ser ministrado a partir do 7º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Para avaliar os conhecimentos prévios e as dificuldades dos alunos sobre o tema, bem como os conhecimentos adquiridos após a intervenção de ensino por meio de sequência didática, o autor aplicou uma avaliação pré e pós.

Essa avaliação consistiu em dez questões contextualizadas, explorando grandezas proporcionais e não proporcionais. A sequência didática, composta por seis atividades, foi ministrada em seis encontros em sala de aula com o objetivo de desenvolver o conceito de proporcionalidade. Todas as atividades foram projetadas para serem resolvidas utilizando o software Geogebra, que serviu como recurso de apoio no processo de aquisição de conhecimentos dos alunos.

Os resultados do estudo inicial revelaram um baixo nível de conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo, conceitos e habilidades necessários para resolver as questões da avaliação prévia. No entanto, após a intervenção de ensino, que incluiu uma sequência didática e o uso do software Geogebra, o autor constatou um aumento altamente significativo no nível de conhecimento dos alunos em relação à proporcionalidade. Essa melhoria foi evidenciada nas avaliações realizadas após a sequência de ensino.

O estudo de Porto (2015), por sua vez, tinha por objetivo investigar o raciocínio proporcional de estudantes da 4ª Fase da EJA (correspondente ao 8º e 9º ano). A metodologia utilizada foi a de métodos de pesquisa exploratória, que serviu para organizar o planejamento experimental em uma escola pública da cidade de Petrolina/PE.

A autora desenvolveu a pesquisa em duas fases distintas. Na primeira fase, ela visitou a escola com o objetivo de esclarecer os propósitos da pesquisa e obter o consentimento informado dos participantes. Nessa etapa, os sujeitos da pesquisa receberam os termos de consentimento livre e esclarecido. Na segunda fase, a pesquisa foi realizada em duas sessões individuais, dentro da própria instituição. Durante essas sessões, todos os participantes foram convidados a resolver problemas matemáticos relacionados à proporção simples. Além disso, eles também responderam a uma entrevista semiestruturada sobre o instrumento utilizado na pesquisa. Para desenvolver a pesquisa, a autora selecionou 18 problemas matemáticos associados a contextos específicos, como a Copa do Mundo, Eleições Presidenciais e Protótipos. Esses problemas foram elaborados com base nos seis tipos de problemas de proporcionalidade mencionados nos trabalhos de Lesh, Post e Behr (1988).

Os resultados do estudo apontaram que os estudantes da 4ª Fase da EJA, apesar de não terem estudado formalmente o conceito de proporcionalidade, foram capazes de resolver alguns problemas que envolvem relações proporcionais. A influência do desempenho dos alunos foi notada apenas na comparação entre os problemas relacionados à Copa do Mundo e os problemas Prototípicos, enquanto o desempenho nos contextos da Copa do Mundo e das Eleições foi similar, assim como entre as Eleições e os problemas Prototípicos.

Em relação às diferentes situações de proporcionalidade abordadas, observou-se que aquelas que requerem julgamento qualitativo são resolvidas com mais facilidade do que as que dependem de outros sistemas de representação. As estratégias utilizadas pelos estudantes foram variadas e classificadas em seis tipos: Tipo 1 (imprecisa ou ausente), Tipo 2 (conhecimento de mundo), Tipo 3 (sentido numérico), Tipo 4 (operações aditivas), Tipo 5 (campo multiplicativo associado a operações aditivas) e Tipo 6 (campo multiplicativo). O estudo concluiu que o sucesso na resolução de problemas proporcionais não implica necessariamente em raciocínio proporcional e que este se desenvolve mais facilmente em algumas situações do que em outras, sugerindo que o domínio da proporcionalidade é gradual e depende do desenvolvimento de outros conceitos, representações e procedimentos.

O estudo de Leão (2016) teve por objetivo investigar as contribuições do uso do software Geogebra para a aprendizagem de proporcionalidade dos estudantes do Ensino Médio. A metodologia de pesquisa adotada é qualitativa do tipo estudo de caso, pela qual elaborou aulas expositivas e uma oficina com Geogebra, com o intuito de ensinar proporcionalidade aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio/Técnico de uma escola da rede federal de ensino técnico, profissional e tecnológico da cidade de Maceió/AL.

O autor desenvolveu aulas expositivas sobre proporcionalidade direta e inversa e organizou uma oficina utilizando o software Geogebra, proporcionando aos alunos a oportunidade de manipular ativamente o programa. Antes do início da oficina, o autor aplicou aos alunos um questionário abordando seus conhecimentos em informática, além de um pré-teste contendo questões tanto abertas quanto fechadas para averiguar os conhecimentos prévios dos alunos sobre proporcionalidade. Por fim, após a intervenção de ensino, foi lançado um questionário pós-teste para avaliar o nível de aprendizagem dos alunos em relação ao tema abordado.

Os resultados do estudo apontaram que as respostas dos alunos nos questionários de pré-teste apresentaram várias dificuldades em relação aos conceitos de proporcionalidade, incluindo dificuldades conceituais, gráficas, tabulares e analíticas. Foi observado que os alunos cometeram erros no tratamento e na conversão ao tentar resolver um problema de proporcionalidade. No entanto, algumas dessas dificuldades foram superadas após as aulas expositivas e a oficina com o software Geogebra, resultando em uma melhoria no aprendizado dos conceitos de proporcionalidade.

Nos questionários de pós-teste, o autor observou que os alunos melhoraram na questão conceitual, mas as mesmas dificuldades apresentadas anteriormente persistiram. Ou seja, os alunos insistiam em responder as questões usando apenas a “regra de três” como ferramenta, o que, de alguma forma, é positivo, mas parecia ser a única ferramenta disponível para eles. O software Geogebra despertou a curiosidade dos alunos e contribuiu para as várias representações semióticas existentes nos diversos problemas de proporcionalidade direta e inversa.

O estudo de Dias (2016) tinha por objetivo avaliar o recurso digital “Equilibrando Proporções”, na compreensão do pensamento proporcional, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (2009). A metodologia utilizada foi do tipo exploratória, na qual elaborou três fases: avaliação diagnóstica, intervenção e avaliação de conhecimentos adquiridos para ensinar alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Fortaleza/CE.

A autora distribuiu os alunos em dois grupos na primeira fase: o grupo controle e o grupo experimental. Ela aplicou um pré-teste contendo cinco situações-problema para averiguar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o pensamento proporcional nas estruturas multiplicativas. Em seguida, aplicou a segunda fase somente aos alunos do grupo experimental, de forma coletiva e individual. Essa fase era formada por atividades de manuseio e exploração do objeto de aprendizagem chamado Equilibrando Proporção. A partir desse manuseio do software, os alunos elaboraram registros das estratégias de compreensão de cada situação-problema. A terceira fase consistiu em constatar os conhecimentos adquiridos ou não após a intervenção. Tanto os alunos do grupo controle quanto os do grupo experimental foram submetidos a uma nova avaliação de conhecimentos, representada pelo pós-teste. Essa avaliação era composta por cinco questões com as mesmas características do pré-teste, mas com contextos e valores diferenciados.

Os resultados do estudo indicaram que o objeto de aprendizagem "Equilibrando Proporções" contribuiu significativamente para a compreensão dos conceitos ligados à proporcionalidade pelos alunos. O ambiente de aprendizado intuitivo e interativo proporcionado pelo recurso motivou os alunos e incentivou uma participação ativa. Os estudantes foram capazes de identificar e resolver problemas de proporcionalidade pertencentes ao campo conceitual multiplicativo. Além disso, as representações visuais e as funções interativas facilitaram a assimilação do pensamento proporcional, enquanto a calculadora ajudou a superar as dificuldades com números decimais. A avaliação positiva do objeto de aprendizagem e as reformulações realizadas, que ajustaram e potencializaram suas funções, evidenciam que as limitações encontradas foram superadas, resultando em um recurso pedagógico valioso que aprimora o ensino desse conteúdo matemático.

O estudo de Dutra (2016) tinha por objetivo desenvolver um ensino de razões e proporções utilizando experimentos de Física para estes conteúdos e com isto introduzir o conceito do movimento uniforme para alunos da educação básica. A metodologia utilizada foi a pesquisa-ação, por meio da qual foi elaborada quatro fases, a saber: (1) planejar uma melhora da prática, (2) agir para implantar a melhora planejada, (3) monitorar e descrever os efeitos da ação e (4) avaliar os resultados da ação. Esta pesquisa foi direcionada aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de um colégio da Fundação Educacional de Volta Redonda/RJ.

O autor desenvolveu 14 aulas para os alunos, agrupadas em 7 aulas duplas, que foram denominadas de 7 encontros. A organização desses encontros foi a seguinte: Introdução aos conjuntos numéricos, compreensão do valor de π, exploração das conversões no Sistema Métrico Decimal, estudo do perímetro e área de figuras planas (quadrado, retângulo e triângulo). Esses conteúdos foram chamados de pré-requisitos, pois preparam o terreno para o conceito de razão e proporção. Além disso, o autor utilizou um filme e uma atividade prática para ensinar o conceito de proporcionalidade de forma lúdica e interativa. Em seguida, introduziu o cálculo da velocidade como um experimento, abordando situações do dia a dia dos alunos relacionadas a esse conceito. Por último, os alunos realizaram uma avaliação com questões retiradas do ENEM, consolidando os conhecimentos adquiridos durante atividade ensino em sala de aula.

Os resultados do estudo apontaram que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental são capazes de aprender e compreender conceitos de razão e proporção, bem como aplicá-los em análises básicas de movimento retilíneo uniforme. O estudo demonstrou que, através de uma abordagem lúdica e prática, é possível ensinar esses conceitos de forma significativa, permitindo que os alunos os utilizem em situações futuras, inclusive em conteúdos de ciências do 9º ano do Ensino Fundamental.

O estudo de Miranda (2016) tinha por objetivo apresentar uma sequência didática para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional tendo como suporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). A metodologia utilizada foi a

Engenharia Didática, sendo elaborada uma sequência didática para ensinar o conteúdo de proporcionalidade para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da cidade de Ituiutaba/MG.

A autora desenvolveu uma sequência composta por seis etapas. Na primeira, foi realizada uma avaliação tipo lápis e papel, enquanto as etapas seguintes incluíram situações-problema aplicadas com a mediação da professora e também por avaliações, sendo que estes instrumentos foram elaborados com base na literatura existente sobre o tema raciocínio proporcional.

Os resultados do estudo indicaram que, na primeira etapa da sequência didática, os alunos enfrentaram mais desafios com os problemas de comparação do que com os de valor omisso. Durante essa fase inicial, foi observado que os alunos recorreram predominantemente à estratégia aditiva, empregando representações para solucionar os problemas. No entanto, ao abordarem os problemas de valor omisso, os estudantes começaram a adotar estratégias multiplicativas. A autora observou que, com a progressão da sequência didática, os alunos melhoraram na identificação das grandezas proporcionais presentes nas situações-problema e, em sua maioria, foram capazes de justificar suas respostas através da relação de covariação, utilizando a simbologia apropriada.

O estudo de Leite (2016) descreveu e classificou resoluções e estratégias utilizadas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental II ao resolverem atividades relacionadas a situações-problema de proporção dupla e proporção múltipla em relações diretamente proporcionais. A metodologia utilizada foi do tipo desenho experimental, na qual fora elaborada duas atividades distintas: uma computacional e outra não-computacional para alunos do 7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Recife/PE.

A autora desenvolveu quatro situações-problema computacionais. Dessas, duas envolviam proporções duplas e as outras duas, proporções múltiplas. Durante a aula de matemática, ela aplicou essas situações de forma coletiva, propondo aos estudantes que respondessem por meio de registros escritos. Além disso, como uma atividade não computacional, a autora apresentou outras duas situações-problema que foi aplicado de forma individual. Uma delas também era de proporção dupla, enquanto a outra envolvia proporção múltipla. No entanto, para resolver essas questões, os estudantes precisavam fornecer uma resposta verbal, sem a necessidade de registro escrito. Essa resposta verbal deveria ser baseada em estimativas relacionadas ao produto final do problema, seguida de uma justificativa para a escolha feita.

Os resultados do estudo apontaram que os alunos tiveram um desempenho melhor na atividade computacional, tanto para proporções duplas quanto para múltiplas, entre as turmas do Ensino Fundamental investigadas. Já na atividade não computacional, as médias foram mais baixas, sem grandes variações entre as turmas analisadas. Ao comparar as médias gerais das duas atividades, destacou-se uma diferença significativa na situação envolvendo proporções múltiplas, o que segunda a autora, sugere uma maior dificuldade nesse tipo de problema, possivelmente devido à manipulação inadequada dos conjuntos de grandezas ou à incompreensão das relações proporcionais. Em resumo, os alunos demonstraram um melhor desempenho nas atividades computacionais, evidenciando desafios na aplicação prática e na compreensão conceitual das proporções. Esses resultados refletem os procedimentos educacionais adotados pela instituição escolar, os quais priorizam o ensino com base em algoritmos e soluções pré-determinadas para diferentes tipos de problemas.

O estudo de Aguiar (2017) explorou os diferentes esquemas cognitivos utilizados por estudantes quando confrontados com problemas envolvendo razões e proporções. A metodologia utilizada foi a qualitativa do tipo estudo de caso, na qual foi elaborada um conjunto de problemas matemáticos para ensinar conteúdo de proporcionalidade para três turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Canoas/RS.

A autora elaborou um conjunto de problemas matemáticos relacionados ao conteúdo de proporcionalidade. Os alunos, organizados em grupos, tinham a tarefa de resolver situações-problema utilizando raciocínio proporcional entre grandezas. Após resolverem e registrarem seus raciocínios em folhas entregues a cada grupo, foram convidados vir à frente para apresentar para toda a turma a forma como resolveram os problemas de matemática. Com base nos relatos dos grupos, a autora revisitou as ideias observadas durante a atividade, buscando um consenso em grupo para cada problema proposto.

Os resultados do estudo apontaram que os estudantes mobilizaram uma variedade de esquemas ao resolverem problemas de proporcionalidade, mesmo sem terem sido formalmente ensinados sobre o assunto. Três níveis de resolução foram identificados: no primeiro nível, os estudantes empregaram esquemas aditivos, mas não compreenderam totalmente a proporcionalidade, o que resultou frequentemente em soluções infrutíferas; no segundo nível, utilizaram esquemas multiplicativos operacionalizados de forma aditiva, reconhecendo a proporcionalidade, mas expressando-a por meio de adições ou subtrações; e no terceiro nível, demonstraram um alto grau de compreensão e aplicação da proporcionalidade, utilizando diretamente operadores multiplicativos. A autora concluiu que era possível ensinar razões e proporções eficazmente sem recorrer ao conceito de números fracionários, aproveitando as estratégias intuitivas dos alunos para resolver problemas de proporcionalidade com sucesso.

O estudo de Ferreira (2017) objetivou compreender o potencial de Grupos Interativos para o processo de ensino e aprendizagem de proporcionalidade. A metodologia de pesquisa utilizada foi a qualitativa do tipo estudo de caso, em que fora elaborada uma tarefa que se constitui de 8 atividades para ensinar proporção por meio de grupos iterativos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Cajamar/SP.

O autor desenvolveu 8 atividades (Atividade de Sala) que foram aplicadas de forma individual, referentes ao conceito de proporcionalidade, em formato de teste diagnóstico, a fim de conhecer quais conhecimentos, estratégias e dificuldades os alunos possuíam. Além disso, desenvolveu uma lista com 8 atividades (Grupos Interativos) que foi aplicada em 6 grupos heterogêneos com um voluntário em cada grupo e realizadas semelhante à da Atividade de Sala. Paralelamente, a autora realizou entrevistas semiestruturadas com alunos e voluntários que participaram dos Grupos Interativos.

Os resultados do estudo apontaram que os grupos interativos tiveram um impacto positivo na aprendizagem do conceito de proporcionalidade pelos alunos, especialmente no contexto da resolução de problemas. Nos esquemas de resolução dos alunos foi possível observar a presença da relação entre grandezas, tanto diretamente quanto inversamente proporcionais. No entanto, o autor também notou que vários alunos enfrentaram dificuldades ao aplicar o raciocínio matemático apropriado. Muitos deles priorizaram o raciocínio aditivo em vez do raciocínio multiplicativo. De maneira geral, os alunos demonstraram uma compreensão intuitiva da noção de proporcionalidade, mas essa compreensão não atingiu um nível de sistematização ou conceituação completa. Isso aponta para a necessidade de gradualmente aprimorar a competência dos alunos em relação à sistematização desse conceito.

O estudo de Jaconiano (2017) apresentou o tema grandezas proporcionais, usando o método de redução à unidade. A metodologia utilizada foi a quantitativa, no qual foi elaborada uma lista de exercícios para avaliar a compreensão dos alunos frente à resolução e problemas como metodologia de ensino sobre o tema proporcionalidade com foco no método de redução à unidade baseado nas teorias de Polya. Essa pesquisa foi direcionada aos alunos do 1º ano do ensino médio de uma rede particular de ensino na cidade do Rio de Janeiro/RJ.

O autor, para desenvolver a estratégia didática, analisou vários livros didáticos, a fim de conhecer como está sendo abordado o conceito de proporcionalidade. Em seguida, elaborou uma lista de exercícios composta por 15 questões com 1 discursiva e 14 objetivas, sendo estas últimas retiradas das provas do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio).

Os resultados do estudo apontaram um baixo rendimento por parte dos educandos sobre a resolução de problemas de proporcionalidade com variados níveis de dificuldade. Além disso, o autor constatou que alguns livros didáticos abordam o tema de proporcionalidade de forma não apropriada, induzindo o aluno a decorar. E assim, o autor sugere trabalhos futuros com objetivo de diminuir as falhas existentes no ensino sobre o tema de proporcionalidade, aplicando o método da redução à unidade. Sendo assim, a estratégia didática propôs aos futuros trabalhos uma reflexão acerca do processo de ensino aprendizagem sobre o tema proporcionalidade, aplicando, dessa forma, o método de redução à unidade, para que possam fazer uma comparação na tentativa de diminuir as falhas existentes no ensino.

O estudo de Bitencourt (2017) elencou como objetivo aplicar o conceito de proporcionalidade para estudantes do ensino médio. A metodologia utilizada foi a Engenharia Didática, em que foi elaborada uma sequência didática para ensinar a temática para alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino da cidade de Macapá/AP.

A autora desenvolveu um teste inicial com o propósito de verificar quais as dificuldades e o nível de conhecimento que os alunos possuíam em relação ao conceito de proporcionalidade. Após aplicação do teste inicial, a autora organizou os alunos em grupos e apresentou uma sequência didática composta por cinco atividades práticas utilizando o raciocínio proporcional, envolvendo desde o planejamento e a realização das aulas expositivas, passando pela simulação prática das atividades com os alunos, até a resolução propriamente das atividades propostas.

Por fim, avaliou a aprendizagem dos alunos por meio de um teste final após a aplicação da sequência didática.

Os resultados do estudo apontaram que os alunos enfrentaram dificuldades com os conceitos de proporcionalidade, operações com cálculos com decimais e frações, interpretação de textos, equações de primeiro grau e trigonometria. A Engenharia Didática, através da sequência didática, permitiu explorar os desafios do ensino e aprendizagem de proporcionalidade e a construção do conhecimento. A metodologia resultou em avanços no aprendizado, evidenciados pelo aumento de acertos de 24% para 42% nos testes finais, apesar de diferentes níveis de dificuldade.

Após intervenção de ensino, houve melhorias nos testes que envolviam os conceitos de proporcionalidade em semelhança de triângulos, na função e na trigonometria em um triângulo qualquer, mas ainda é necessário reforçar conceitos básicos de funções de primeiro grau e razões trigonométricas. Materiais concretos manipuláveis, como jogos e tabelas, facilitaram a construção do raciocínio proporcional, incentivando os alunos a desenvolverem estratégias próprias e melhorarem na aprendizagem do conceito de proporcionalidade.

O estudo de Júnior (2018) teve por objetivo analisar as potencialidades de uma sequência didática de razão e proporção, diferente das práticas usuais. A metodologia utilizada foi a engenharia didática, tendo sido elaborada uma sequência didática para ensinar os conceitos de razão e proporção para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Barcarena/PA.

O autor conduziu um estudo que envolveu três etapas: análise *a priori*, experimentação de ensino e análise *a posteriori*. Na análise *a priori*, o autor aplicou um questionário socioeconômico aos alunos, além de um teste e uma oficina de nivelamento. Essas ferramentas foram utilizadas para compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado da temática abordada. Na fase de experimentação de ensino, o autor desenvolveu e aplicou uma sequência didática composta por 22 questões. Dessas, 11 questões exploravam a ideia de razão, enquanto as outras 11 tratavam da ideia de proporção. Por fim, na análise *a posteriori*, o autor realizou um teste final para verificar o aprendizado dos alunos após a implementação do experimento de ensino.

Os resultados apontaram que a sequência didática se mostrou uma metodologia de ensino potencial para promover a aprendizagem dos alunos, tendo em vista que este experimento partiu da situação de defasagem encontrada nos conhecimentos dos alunos. Com a sequência didática, percebeu-se uma compreensão do conceito de proporcionalidade por partes destes alunos, bem como souberam relacionar grandezas proporcionais.

O estudo de Tobias (2018) objetivou identificar, problematizar e analisar as possibilidades e potencialidades da abordagem pedagógica na Sala de Aula Invertida nas aulas de Proporcionalidade para alunos do Ensino Fundamental. A metodologia utilizada foi a Sala de Aula Invertida na abordagem qualitativa, que buscou compreender os acontecimentos oriundos da prática para uma turma de estudantes do 9º ano em uma escola da rede municipal de Belo Horizonte/MG.

A autora apresentou como proposta o momento *a priori* e o momento *a posteriori* das atividades, sendo que o momento *a priori* foi composto por videoaulas produzido pela própria autora e por outros canais que já dispõem de vídeos educativos relacionado ao tema; essas videoaulas vão desde as orientações sobre a sala de aula invertida até o conteúdo de proporcionalidade, tais como razão, proporção direta, inversa e regra de três. Já o momento *a posteriori*, foi composto por exercícios de fixação, tais como: lista de exercício para reconhecer regularidade ou não, lista de exercício de grandezas direta e inversamente proporcionais envolvendo regras de três.

Sobre os resultados do estudo, a autora apontou que a metodologia da Sala de Aula Invertida-SAI foi uma experiência ímpar, pois durante o tempo de exibição do vídeo de proporcionalidade, os alunos ficaram concentrados e envolvidos com o conteúdo e começaram a demonstrar compreensão do conceito de proporcionalidade na utilização das várias estratégias diferentes da abordagem tradicional, com ênfase em algoritmos ou em uma única estratégia. E que os alunos reconheceram as estruturas multiplicativas, bem como utilizaram em seus esquemas de resolução a redução à unidade, covariância (estratégia escalar), e alguns alunos conseguiram reconhecer a invariância (estratégia funcional). No entanto, alguns esquemas de resolução destes alunos ainda se fazia presente o princípio aditivo.

O estudo de Batista (2018) visou avaliar a potencialidade da aplicação de uma sequência didática baseado no ensino por atividades de razão e proporção em relação à participação e desempenho dos estudantes quanto à aprendizagem deste conteúdo. A metodologia utilizada foi a engenharia didática, na qual foi elaborada uma sequência didática para ensinar razão e proporção para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino de Belém/PA.

A autora desenvolveu um conjunto de atividades de razão e proporção que formaram a sequência didática, além de ter elaborado os testes (Pré-teste e Pós-teste) junto com as análises prévias de cada questão e para cada atividade da sequência, em que são expostas as expectativas em relação a cada uma das atividades.

Os resultados do estudo apontaram que a sequência didática teve um efeito positivo no desempenho dos alunos. A análise *a priori* do pré-teste revelou que os alunos não compreendiam a ideia de razão e proporção, enfrentando dificuldades na resolução dos problemas propostos. No entanto, após a aplicação da sequência didática, a avaliação *a posteriori* do pós-teste mostrou um avanço dos alunos em relação ao conhecimento de razão e proporção. Além disso, eles se tornaram mais envolvidos com o processo de aprendizagem e melhoraram a linguagem e representação das notações relacionadas ao conteúdo abordado.

O estudo de Matulle (2019) tinha por objetivo apontar as potencialidades da resolução de problemas com base na Teoria dos Campos Conceituais para o desenvolvimento do raciocínio de proporcionalidade de estudantes. A metodologia utilizada foi a qualitativa do tipo pesquisa-ação, em que fora elaborada uma intervenção pedagógica com atividades envolvendo a proporcionalidade, mediadas pela resolução de problemas para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública em Pinhão/PR.

O autor desenvolveu a intervenção pedagógica em três etapas: antes (envolvendo a elaboração dos problemas, professor-pesquisador e estudantes), durante (com a resolução dos problemas) e depois (mediante uma plenária e a formalização do conteúdo). Durante a realização das atividades em sete encontros, a classe foi dividida em seis grupos de quatro integrantes, determinados por afinidade, os quais resolveram problemas de proporcionalidade com diferentes estratégias, baseadas na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação proposta por Onuchic e Allevato (2014).

Os resultados do estudo apontaram que durante abordagem envolvendo a resolução de problemas, foi possível identificar diversas lacunas de aprendizagem que prejudicaram a resolução de alguns problemas que utilizavam os conteúdos de operações com decimais e transformação de medidas. As quais foram identificadas e, assim, foi possível trabalhá-las de forma individual e coletiva, com vistas à superação e conseguinte à compreensão. No entanto, a resolução de problemas contribuiu para o raciocínio proporcional dos alunos, superando dificuldades, estimulando a colaboração, diversificando as estratégias e compreendendo os processos cognitivos.

O estudo de Vargas (2020) buscou investigar o impacto da metodologia de ensino de resolução de problemas no processo de aprendizagem do conteúdo de razão e proporção para estudantes. A metodologia utilizada foi a qualitativa, tendo sido elaborado um experimento de ensino para ensinar o conteúdo de razão e proporção para alunos do 7º ano do ensino fundamental em uma escola pública municipal em Alegre/ES.

O autor conduziu um experimento de ensino sobre razão e proporção ao longo de seis aulas. Nesse experimento, ele utilizou um problema gerador, adotando as dez etapas propostas por Onuchic e Allevato (2014). Além disso, o autor incorporou as quatro fases delineadas por Polya (2006). Após a implementação da metodologia de ensino, que envolveu a resolução do problema gerador, o autor apresentou novos problemas aos alunos para consolidarem o aprendizado adquirido durante o experimento. Por fim, o autor coletou feedback dos alunos por meio de um questionário, a fim de compreender suas percepções em relação ao experimento realizado.

Os resultados do estudo apontaram o êxito do experimento, que envolveu e motivou os alunos no aprendizado de razão e proporção. Apesar de alguns estudantes terem enfrentado dificuldades com operações matemáticas, a interação entre eles por meio da metodologia de resolução de problemas em sala de aula permitiu que identificassem seus próprios erros e acertos, bem como os cometidos pelos colegas. Com isso, conseguiram absorver o ensino e compreender os conceitos envolvidos nos problemas.

O estudo de Ribeiro (2021) objetivou investigar a aprendizagem de estudantes em relação à proporcionalidade, por meio de atividades elaboradas e propostas em um Percurso de Estudo e Pesquisa. A metodologia utilizada foi a qualitativa do tipo exploratório, em que foram elaboradas atividades para promover estratégias de resolução de problemas de proporção ligada ao cotidiano para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Londrina/PR.

A autora desenvolveu uma proposta de intervenção de ensino que consistiu em 11 encontros para implementar atividades em sala de aula. Essa proposta baseou-se em um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEB), que partiu de uma questão geradora relacionada à ideia de razão e proporção, aplicada ao cotidiano dos alunos. A partir dessa questão, os estudantes foram desafiados a desenvolver caminhos, formulando questões e respostas de forma a buscar uma resposta para a questão geradora, que foi apresentada e discutida com a turma.

Os resultados do estudo indicaram que, por meio das atividades elaboradas e propostas no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEB), os alunos obtiveram sucesso na compreensão de conceitos fundamentais relacionados a proporções e igualdade entre duas razões, expressa na forma de igualdade entre dois produtos. Durante a intervenção de ensino, os alunos tiveram contato com termos específicos da Matemática, como unidades de medida de quilocaloria (Kcal), grama (g), miligrama (mg), quilograma (Kg), litro (l) e mililitro (ml). Eles também aprenderam a reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade utilizada, escolhendo a unidade mais apropriada para diferentes medições.

Além disso, estimaram, mediram e compararam grandezas, utilizando unidades como litros, mililitros, gramas e quilogramas. Vale ressaltar que muitos alunos não tinham noções prévias sobre quantidades e relações entre unidades de medida. Alguns deles aplicaram intuitivamente estratégias de multiplicação para determinar a quantidade de bolinhas de queijo por pessoa, demonstrando compreensão das proporções e unidades de medida. Assim, confirmou-se que o percurso de estudo e pesquisa contribuiu positivamente para a aprendizagem dos alunos sobre o tema da proporcionalidade.

O estudo de Reis (2022) tinha por objetivo avaliar as contribuições no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de proporcionalidade, a partir de uma proposta didática que envolveu educação ambiental e matemática aos estudantes. A metodologia utilizada foi do tipo experimental, que envolveu tanto estudos qualitativos como estudos quantitativos, na qual foi elaborada atividades em uma sequência metodológica relacionada às questões de educação ambiental e o processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade para alunos do 9º ano do ensino fundamental em uma escola municipal em Porto Alegre/RS.

A autora desenvolveu atividades por meio de uma sequência metodológica aos alunos de duas turmas do 9º ano. Ela dividiu as duas turmas em dois grupos distintos: um grupo controle e um grupo experimental. O grupo controle foi submetido a um método de ensino mais tradicional, com exposição de conteúdo no quadro e utilização de livro didático. Por outro lado, o grupo experimental foi envolvido em uma série de atividades que incluíam uma pesquisa com a comunidade escolar sobre o consumo de água, o uso de materiais concretos, como maquetes de cisternas, que os alunos tinham que construir e manusear. A ideia era ensinar sobre o funcionamento das cisternas e as grandezas proporcionais envolvidas, bem como tiveram que ensinar estudantes mais jovens e realizar uma palestra de conscientização ambiental.

Os resultados do estudo apontaram que os estudantes de ambos os grupos inicialmente resolveram quase que exclusivamente as questões de proporcionalidade pela regra de três. Algumas dificuldades foram observadas durante o experimento, pois a relação de proporcionalidade das grandezas não foi totalmente compreendida pelos estudantes, resultando em uma aplicação da regra que não fazia sentido para eles. Após a aplicação da sequência metodológica, foi identificado que os estudantes do grupo experimental buscaram, com maior frequência, discutir as grandezas e a forma como se relacionavam, sem se preocupar com um método específico.

Eles demonstraram evoluir e aprofundar os desenvolvimentos das questões neste sentido. Em comparação com a primeira avaliação, os resultados mostraram um aumento de aproximadamente seis vezes no uso das propriedades de grandezas proporcionais. No entanto, o grupo controle continuou utilizando, com frequência, a regra de três, mas também demonstrou que melhorou na aplicação do método, apesar de aparentemente não descreverem a relação entre as grandezas corretamente. Isso pode sugerir que eles aprimoraram o uso de uma técnica por sistematização e não por compreensão de um conceito ou propriedade. Ambos os grupos obtiveram melhores resultados na identificação e resolução das questões envolvendo proporcionalidade inversa.

Entretanto, a média de ambos os grupos diminuiu em relação à primeira avaliação que foi online. Acredita-se que este resultado pode ser explicado pela pontuação ser diferente em cada avaliação, pela maior exigência das questões ou pelo fato de a segunda avaliação ter sido presencial. A autora apontou que a sequência metodológica proporcionou a aprendizagem dos alunos em relação à proporcionalidade, embora ainda haja espaço para melhorias na compreensão e aplicação dos conceitos.

O estudo de Silva (2022) buscou apresentar uma proposta para o ensino de proporcionalidade por meio de Metodologias Ativas nas aulas de matemática, levando em considerando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática como uma Metodologia Ativa. A metodologia utilizada foi a bibliográfica, em que foi elaborada uma coleção de problemas do cotidiano para ensinar o conteúdo de proporcionalidade para os alunos do 7 ano do ensino fundamental de uma escola da cidade de Londrina/PR.

O autor desenvolveu três situações-problemas, a partir das quais os alunos, organizados em pequenos grupos, deveriam refletir, analisar e buscar soluções. Essa proposta de ensino segue o roteiro delineado por Onuchic e Allevato (2014), que assume características das metodologias ativas. A ideia é que os estudantes internalizem o conteúdo de proporcionalidade de maneira mais ativa e reflexiva, construindo seus conhecimentos matemáticos por meio de situações contextualizadas no cotidiano.

Os resultados do estudo apontaram que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da resolução de problemas como uma abordagem ativa, teve um impacto significativo na construção e aplicação de conhecimentos de proporcionalidade pelos alunos. Mesmo sem terem tido contato prévio com o conteúdo proposto, os alunos demonstraram progresso. Além disso, a metodologia contribuiu para o desenvolvimento do interesse, colaboração e habilidades dos estudantes. No entanto, também foram identificadas dificuldades no entendimento das relações proporcionais. Alguns alunos recorreram à regra de três sem uma justificativa clara, o que resultou em erros de cálculo. O autor enfatizou que essa experiência foi significativa tanto para o professor quanto para o aluno. Para o professor, significou sair da zona de conforto, pois ele precisou pensar e elaborar situações envolvendo os alunos.

Durante as aulas, ele também teve que mediar as ações e resoluções dos problemas. Já para os alunos, a experiência exigiu uma postura ativa, na qual eles tiveram que pensar, analisar, refletir e resolver as situações propostas. A partir dessas atividades, eles puderam aprender e construir conhecimentos relacionados à proporcionalidade.

Assim, os estudos supracitados nos apresentaram um panorama diversificado de estratégias que foram utilizadas no ensino de proporção, abrangendo desde sequências didáticas estruturadas com uma variedade de atividades até o emprego de softwares como Geogebra e do software Equilibrando Proporções. Metodologias ativas, tais como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEB) e a integração de Educação Ambiental e Matemática, destacam-se por fomentar o engajamento e a autonomia dos alunos. Outras formas diferentes de ensino foram também utilizadas, como a exploração da razão áurea, vídeos-aulas na Sala de Aula Invertida (SAI) e experimentos de física.

Esses estudos apontaram experiencias positivas sobre o ensino de proporção para os alunos da Educação Básica. Ao avaliarem o conhecimento prévio e posterior à aplicação dos experimentos de ensino, constataram uma melhoria na aprendizagem dos estudantes. Após a realização desses experimentos, a maioria dos alunos passou a dominar os conceitos de razão e proporção, o que lhes permitiu identificar e resolver problemas envolvendo proporção direta e inversa, utilizando operações multiplicativas.

Entre as estratégias de ensino adotadas pelos estudos, a resolução de problemas foi uma das que mais se destacou em contribuir no ensino aprendizagem dos alunos. Seis estudos optaram por desenvolver suas estratégias de ensino de razão e proporção baseadas nessa abordagem. Esses estudos são: Aguiar (2017), Ferreira (2017), Jaconaino (2017), Matulle (2019), Vargas (2020) e Silva (2022). Cada um deles explorou diferentes aspectos relacionados à resolução de problemas, com enfoques na mobilização de esquemas de resolução, no potencial dos grupos interativos, no método de redução à unidade, na potencialidade da resolução de problemas, e como metodologia de ensino e metodologia ativa.

Dentre os estudos que optaram por essa abordagem de resolução de problemas, quatro a utilizaram como metodologia de ensino. Destacamos os estudos de Aguiar (2017), Matulle (2019), Vargas (2020) e Silva (2022), que adotaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Allevato e Onuchic (2014). Esses estudos enfatizaram a importância de resolver problemas como forma de desenvolver o pensamento proporcional. Vale salientar que os objetivos e questões de pesquisa desses estudos foram os seguintes:

Aguiar (2017) teve como objetivo explorar os diferentes esquemas cognitivos utilizados por estudantes quando confrontados com problemas envolvendo razões e proporções. Para atingir esse objetivo, formulou a seguinte questão de pesquisa: Quais são e como são mobilizados os conceitos relacionados a razões e proporções mediante a metodologia de Resolução de problemas?

Matulle (2019) buscou apontar as potencialidades da resolução de problemas, com base na Teoria dos Campos Conceituais, para o desenvolvimento do raciocínio de proporcionalidade dos estudantes. Para atingir esse objetivo, formulou a seguinte questão de pesquisa: Com base na Teoria dos Campos Conceituais, quais potencialidades são percebidas em uma metodologia de ensino baseada na Resolução de Problemas para o desenvolvimento do raciocínio de proporcionalidade?

Vargas (2020) objetivou investigar o impacto da metodologia de ensino de resolução de problemas no processo de aprendizagem do conteúdo de razão e proporção para estudantes. Para atingir esse objetivo, formulou a seguinte questão de pesquisa: A metodologia de Resolução de Problemas pode ajudar nesse processo?

Silva (2022), por sua vez, teve como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de proporcionalidade por meio de Metodologias Ativas nas aulas de matemática, levando em considerando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática como uma Metodologia Ativa. Para tanto, elaborou a seguinte pergunta de pesquisa: como ensinar de uma maneira diferente e mais dinâmica um determinado conteúdo matemático, em específico, a proporcionalidade, utilizando uma estratégia que instigue os alunos a aprender e construir seus conhecimentos a respeito da proporção?

É importante salientar que o estudo de Aguiar (2017) não seguiu todas as etapas sugeridas no roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011). Segundo a autora, isso ocorreu porque sua prática desenvolvida se baseou apenas até a etapa da busca de consenso por parte dos estudantes envolvidos, não avançando para a etapa da formalização do conteúdo. Assim, a autora justificou que o foco da análise não foi a metodologia adotada e suas reverberações, mas sim os esquemas mobilizados durante a resolução de cada problema.

Com isso, estes estudos apontaram que a metodologia de ensino baseada na resolução de problemas é bastante adequada para o ensino de razão e proporção e contribui para o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos. Adicionalmente, a abordagem ativa e colaborativa da metodologia proporciona maior interesse e engajamento dos estudantes e permite que eles desenvolvam habilidades essenciais, como a capacidade de analisar, refletir, elaborar hipóteses e buscar soluções, fazendo-os superarem os próprios desafios de aprendizagem.

Apesar dos avanços proporcionados por metodologias fundamentadas na resolução de problemas, os estudos também destacaram alguns desafios enfrentados pelos alunos na compreensão do conteúdo de razão e proporção. Ferreira (2017) identificou dificuldades na habilidade de estabelecer relações entre grandezas proporcionais, além de uma preferência pelo raciocínio aditivo em detrimento do multiplicativo, o que se mostrou um obstáculo significativo.

O estudo de Matulle (2019) apontou que, durante abordagens envolvendo a resolução de problemas, foram identificadas diversas lacunas de aprendizagem que prejudicaram a resolução de problemas que envolviam operações com decimais e transformação de medidas. Isso sugere que há áreas específicas dentro do conteúdo de razão e proporção que demandam maior atenção e suporte educacional para serem compreendidas completamente pelos alunos.

Além disso, o estudo de Silva (2022) evidenciou que durante a resolução de problemas, alguns alunos recorreram à regra de três sem uma justificação clara, o que resultou em erros de cálculo. Isso indica a necessidade de um trabalho mais aprofundado na compreensão dos conceitos subjacentes à razão e proporção, além de uma maior ênfase na compreensão dos processos matemáticos envolvidos.

Entretanto, os estudos de Aguiar (2017), Matulle (2019), Vargas (2020) e Silva (2022) convergem para a mesma perspectiva de utilizar a metodologia de ensino através da resolução de problemas para instigar os alunos a construir seus conhecimentos sobre razão e proporção, resultando no desenvolvimento do pensamento proporcional.

Apesar da convergência na utilização da metodologia de ensino através da resolução de problemas, os estudos apresentam objetivos específicos diferentes, ou seja, eles divergem entre si:

- Aguiar (2017): Explorou os diferentes esquemas cognitivos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de razão e proporção. Observa-se que o estudo não seguiu todas as etapas da metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2011).
- Matulle (2019): Investigou as potencialidades da resolução de problemas, baseada na Teoria dos Campos Conceituais, para o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos.
- Vargas (2020): Analisou o impacto da metodologia de ensino de resolução de problemas no aprendizado de razão e proporção pelos alunos.
- Silva (2022): Apresentou uma proposta para o ensino de proporcionalidade por meio de Metodologias Ativas, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como base.

Essa convergência e divergências entre os estudos mencionados acima enriquecem o cenário sobre o ensino de razão e proporção, demonstrando a multiplicidade de abordagens e seus respectivos resultados.

Assim, levamos em consideração os estudos de Matulle (2019), Vargas (2020) e Silva (2022), os quais adotaram a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para abordar o conteúdo de razão e proporção. Outrossim, destacamos o estudo de Matulle (2019), pela sua proximidade com a nossa pesquisa. Matulle (2019) investigou as potencialidades dessa metodologia de ensino, proposta por Onuchic e Allevato (2014), visando contribuir para o desenvolvimento do pensamento proporcional com base na Teoria dos Campos Conceituais.

Diante disso, ampliamos nossa linha de estudo para analisar a implementação dessa forma de ensino em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental após o período de restrições impostas pela pandemia da Covid-19. Considerando o impacto adverso no processo de aprendizagem decorrente das medidas de isolamento, nosso estudo se dedica a investigar de que maneira o ensino estruturado conforme a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas pode favorecer a compreensão dos conceitos de razão e proporção entre os estudantes após a pandemia da Covid-19, e, consequentemente, estimular o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Para isso, recorremos a problemas típicos do campo conceitual multiplicativo como alicerce para a construção desses conceitos. Dessa forma, nosso estudo acrescenta uma nova perspectiva sobre o tema, abordando o ensino da proporcionalidade no contexto pós-pandêmico, um cenário ainda inexplorado nos estudos realizados entre 2012 e 2022. Acreditamos que essa investigação permitirá identificar as potencialidades e os desafios da implementação da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em matemática por intermédio da resolução de problemas de proporcionalidade nesse novo contexto.

No próximo tópico, abordaremos a resolução de problemas como uma metodologia promissora de ensino e aprendizagem.

2.4 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A atenção dada à resolução de problemas é uma evolução recente. Foi somente nas últimas décadas do século passado que os educadores de matemática começaram a perceber que o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas precisava de mais foco.

Ao refletir brevemente sobre a história da resolução de problemas, Stanic e Kilpatrick (1989) observam que, desde a Antiguidade, os problemas têm sido parte integrante do currículo escolar de Matemática. No entanto, é apenas recentemente que os educadores têm reconhecido a importância de dedicar atenção especial ao desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas. Esse foco renovado tem gerado considerável debate e controvérsia, transformando o termo "resolução de problemas" em um slogan que abarca diversas visões sobre educação, escolaridade, matemática e os motivos pelos quais ensinamos matemática em geral, e a resolução de problemas em particular.

Problemas matemáticos sempre fizeram parte do currículo escolar desde as antigas civilizações, como a babilônica, egípcia, chinesa e grega. Chase, citado por Stanic e Kilpatrick (1989), menciona que o Papiro de Ahmes, um manuscrito egípcio de 1650 a.C., contém uma coleção de problemas matemáticos, incluindo um que envolve a soma de uma progressão geométrica de cinco termos, em que o primeiro termo e o multiplicador são ambos iguais a sete. Stanic e Kilpatrick (1989) também afirmam que, desde Platão, acredita-se que o estudo da matemática melhora a capacidade de pensar, raciocinar e resolver problemas do mundo real. Para eles, os problemas no currículo de matemática contribuíram significativamente para o desenvolvimento do raciocínio.

Mas afinal, o que é um problema?

Em resposta a esta pergunta, existe várias concepções acerca do termo "problema", entre as quais se destacam: “Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível” (Polya, 1962, p. 117); “É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (Dante, 1995, p. 10); “É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer” (Onuchic, 1999, p. 215). Assim como:

> É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecido e a pessoa deve querer fazer a transformação (Pérez; Cabrera, 2000, p. 118).

Já para Marincek e Cavalcanti (2000, p. 151), "Problema é toda situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém, também, algo novo, para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções", enquanto para Van e Walle (2001, p. 42) corresponde a "Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta".

Outrossim, "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la", como preconizam os PCN (Brasil, 2001, p. 44). Ou, ainda,

> Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (Villa; Callejo, 2006, p. 29).

Todas essas concepções compartilham características comuns sobre o que constitui um problema matemático, devendo proporcionar ao resolvedor um desafio alcançável, demandando um conhecimento prévio dos conceitos necessários. Além disso, é essencial que o resolvedor se sinta motivado a enfrentá-lo, o que pode contribuir para o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, promovendo assim o pensamento matemático. Sob essas condições ideais, espera-se que a aprendizagem seja facilitada. Entre as diversas concepções apresentadas sobre o tema problema, optamos por adotar a de Onuchic (1999), por considerarmos que ela generaliza e abrange todas as outras.

Onuchic (1999) afirmou que ao longo do século XX, o ensino de matemática passou por várias reformas na tentativa de encontrar métodos mais eficazes. Inicialmente, predominava um modelo tradicional baseado na repetição e na memorização, que não favorecia uma compreensão profunda dos conceitos. Posteriormente, houve uma mudança para a ideia de que os alunos deveriam aprender com compreensão, porém a metodologia ainda se centrava na exposição passiva do professor, sem estimular a participação ativa dos alunos. Ambas as abordagens falharam em alcançar resultados significativos para a maioria dos estudantes. Nesse contexto, a resolução de problemas já era considerada como um caminho promissor para o aprendizado da matemática, embora ainda não estivesse completamente implementada.

Segundo Nunes (2010), a publicação de "How to Solve It?", por George Polya em 1945, marcou profundamente o ensino da resolução de problemas. Pela primeira vez, esta obra apresentou um método didático para ensinar a resolver problemas, proporcionando um guia prático e estruturado que revolucionou a abordagem pedagógica da matemática. No livro, Polya discute a resolução de problemas e desenvolve quatro etapas essenciais conhecidas como heurística para a resolução de problemas, que são:

1. Compreender o Problema: Nessa etapa, o foco está em entender claramente do que se trata o problema, permitindo a construção de esquemas para organizar a situação proposta.
2. Estabelecer um Plano: Após a leitura, os alunos identificam o que é solicitado no problema e mobilizam seus conhecimentos científicos para obter respostas.
3. Execução do Plano: Essa fase é fundamental. Aqui, o plano é colocado em prática, seguindo as estratégias previamente pensadas. O próprio aluno confirma sua aprendizagem durante essa etapa.
4. Retrospecto ou Verificação: Após obter uma resposta, é feita à correção. Se a resposta estiver correta, analisa-se se o passo a passo matemático esperado foi seguido. Caso haja algum erro, a resolução pode ser baseada no próprio erro, permitindo que os alunos identifiquem onde estavam errando ao longo do tempo.

Sobre a ideia de resolver problemas, Polya (1978) afirma que,

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas (Polya, 1978, p. 65).

O método proposto por Polya (1978) contribui positivamente para o desenvolvimento da estrutura cognitiva matemática dos alunos. Ele destaca a importância da prática ativa e da imersão na resolução de problemas como um meio fundamental de aprendizado. Assim, esse método relatado seria de rápida aceitação por parte dos professores e educadores matemáticos no Brasil e no mundo. É importante destacar que Polya acreditava que "ensinar a pensar" deveria ser o objetivo principal do ensino, pois, para ele:

> Ensinar a pensar significa que o professor de matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (Polya, 1964, p. 100).

Polya (1964), defendia um ensino ativo de matemática, acreditando que o aprendizado eficiente ocorreria quando o estudante se envolvesse no processo de descoberta.

De acordo com Onuchic (1999), as pesquisas sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares começaram na década de 1970, no século XX. Essas pesquisas ganharam destaque mundial no final dessa mesma década, dando início a um movimento que defendia um ensino baseado na resolução de problemas.

Discussões no campo da Educação matemática, tanto no Brasil quanto no mundo, destacaram a necessidade de ajustar o trabalho escolar às novas tendências. Essas mudanças buscam aprimorar as metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação do progresso dos alunos, além de melhorar o desempenho dos professores.

Nesse contexto, Morais e Onuchic (2021) ressaltam que, em 1980, nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[3] expressou preocupação com essa questão. Como resultado, publicou o documento intitulado "An Agenda for Action – Recommendations for School Mathematics of the 1980s[4]", convocando todos a se concentrarem na proposta de resolução de problemas no ensino de matemática escolar.

Morais e Onuchic (2021) destacam que, nos anos seguintes à publicação desse documento, houve um período de intensa atividade focada no desenvolvimento de propostas de ensino de matemática alinhadas às suas recomendações. No entanto, conforme apontado por Lester (1994), ficou evidente que esse movimento carecia de diretrizes específicas para a implementação efetiva da resolução de problemas no contexto do ensino de matemática escolar.

---

[3] Conselho Nacional de Professores de Matemática
[4] Uma Agenda para Ação – recomendações para a Matemática Escolar nos anos 80.

Schoenfield (2007) apresenta um estudo sobre as principais recomendações feitas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) para as décadas de 1980. Essas recomendações sugeriram uma estrutura curricular centrada na resolução de problemas, estabelecendo-a como o foco principal do ensino de matemática nas escolas.

Contudo, as ações relacionadas à implementação dessa abordagem no ensino de matemática escolar não foram realizadas conforme o esperado. Schoenfield (2007) ressalta que, ao longo da década de 1980, as cinco primeiras recomendações da agenda foram amplamente negligenciadas. Embora o termo "Resolução de Problemas" tenha ganhado popularidade no contexto do ensino de matemática, na prática, ele frequentemente se reduzia a um simples slogan, mas a sua implantação, na maioria das salas de aulas americanas, foi uma farsa.

Naquela época, segundo Schoenfield (2007), as editoras de livros didáticos fizeram algumas mudanças, lançando edições intituladas "resolução de problemas" em seus textos. No entanto, apesar de mencionarem a teoria de Polya, a maioria dessas edições manteve os mesmos conteúdos e abordagens de antes. Além disso, nas salas de aula americanas da década de 1980, a Resolução de Problemas acabou se resumindo à mera resolução de problemas apresentados em forma de enunciados.

Como resultado, as dificuldades comuns enfrentadas por muitos educadores matemáticos nos contextos de mudança daquela época levaram a várias pesquisas sobre a resolução de problemas. Schroeder e Lester (1989) afirmaram que, durante a década de 1980, tentou-se implementar a resolução de problemas em sala de aula por meio de conjuntos de problemas, listas de estratégias de ensino, atividades sugeridas e diretrizes para avaliar o desempenho na resolução de problemas.

Conforme Schroeder e Lester (1989), o material ajudou os professores a colocarem a resolução de problemas no centro de suas práticas de ensino. No entanto, todo o material produzido não resultou em coerência e direcionamento adequados, uma vez que não havia consenso sobre a abordagem proposta. Isso levou à falta de credibilidade devido às diferentes concepções que as pessoas e grupos tinham sobre o significado da resolução de problemas como elemento central no ensino de matemática.

Segundo Schroeder e Lester (1989), diante dessas divergências, três abordagens para o ensino da resolução de problemas se destacaram: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas matemáticos e ensinar via resolução de problemas.

Ensinar sobre resolução de problemas implicava abordar o tema como uma teoria ou como um novo conteúdo a ser ensinado. Essa proposta ganhou destaque especialmente durante o movimento da Matemática Moderna. No entanto, enfrentou desinteresse por parte dos professores devido ao fracasso percebido na aprendizagem dos alunos. Isso resultou em uma mudança de foco para heurísticas, como as propostas por Polya (1978), que se mostraram mais eficazes como estratégias de ensino (Schroeder; Lester, 1989).

A segunda abordagem era ensinar matemática para resolver problemas, em que os professores se concentravam nas maneiras pelas quais a matemática era ensinada e aplicada na resolução tanto de problemas rotineiros quanto não rotineiros. Assim, os alunos aprendiam matemática com o propósito de utilizá-la em situações reais (Schroeder; Lester, 1989).

A terceira abordagem era o ensino de matemática via resolução de problemas, que transcendia a mera utilização de problemas como ferramentas para o aprendizado da matemática. Essa abordagem reconhecia os problemas como elementos centrais do processo, desempenhando um papel fundamental na construção do conhecimento matemático pelos alunos. Ao propor problemas, os professores não buscavam apenas testar o conhecimento prévio dos alunos, mas incentivá-los a mobilizar seus conhecimentos e habilidades para transformar situações complexas em problemas solucionáveis. Por meio dessa experiência, os alunos desenvolvem a capacidade de analisar criticamente as situações, formular hipóteses, buscar soluções e avaliar resultados, construindo uma compreensão mais profunda da matemática e de sua aplicabilidade no mundo real (Schroeder; Lester, 1989).

Por essa razão, o ensino de matemática via resolução de problemas se destacava entre as abordagens, oferecendo aos alunos a oportunidade de reconhecer e estudar suas dificuldades, como avaliar sua capacidade e limitações no conhecimento matemático que possuíam.

Schroeder e Lester (1989) afirmam que essa perspectiva apresentada sobre o ensino de matemática via resolução de problemas, sem dúvida, se tornou uma referência para novos estudos que ocorreram na década de 1990, principalmente através das publicações de orientação para o ensino expedidas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), nos Estados Unidos, agora com a denominação de ensino através da resolução de problemas.

Conforme Nunes (2010), a partir de 1990, houve uma transição da abordagem "ensinar via resolução de problemas" para "ensinar através de resolução de problemas". Esta última, como uma metodologia relativamente nova na pesquisa histórica sobre resolução de problemas no currículo de matemática, ainda está em seu estado da arte. Essa abordagem visa ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a orientação e direção do professor por meio da resolução de problemas.

Nunes (2010) destaca que a diferença entre essa abordagem e a anterior é que a expressão "através de" implica um ensino que ocorre do começo ao fim, integralmente, durante todo o processo de resolução do problema. Isso contrasta com a abordagem anterior, em que a expressão "via" indicava apenas um recurso para resolver o problema dado. Assim, ensinar "através de" significa não apenas resolver problemas, mas também aprender e, ao longo desse processo, construir ativamente o conhecimento matemático. O aluno, ao enfrentar o problema, assume o papel de co-construtor de seu próprio conhecimento. Nessa abordagem, o objetivo principal é apresentar aos alunos problemas que possam gerar novos conceitos ou conteúdos matemáticos.

No Ano 2000, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou a obra "*Principles and Standards for School Mathematics*"[5], conhecida como "Standards 2000". Segundo Morais e Onuchic (2021), essa obra e outras tiveram o objetivo de refletir o trabalho realizado pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) nas décadas de 1980 e 1990. Além de fornecer uma sólida fundamentação teórica construída desde a década de 1970 por meio de pesquisas rigorosas, esses documentos também apresentam uma série de orientações para os professores de matemática em sala de aula. Essa abordagem era algo que não havia sido possível no documento anterior, intitulado *Uma Agenda para Ação*.

De acordo com Morais e Onuchic (2021), esses documentos desempenharam um papel essencial na implementação, sistematização e divulgação da resolução de problemas no currículo escolar americano, e seus reflexos se estenderam a currículos em todo o mundo.

[5] Princípios e Padrões para a matemática Escolar (2000).

> Foi, de fato, a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos passaram a pensar numa **metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79-80, grifo nosso).

O movimento de ensino da resolução de problemas tem reflexos significativos no cenário educacional. Morais e Onuchic (2021) destacam que, no Brasil, as bases de orientações curriculares passaram por atualizações. Os conhecidos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997; 1998; 1999) agora recomendam que a resolução de problemas seja o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula. Essa mudança fundamental alinha-se perfeitamente com os princípios que sustentam o ensino de matemática através da resolução de problemas, consolidando uma nova perspectiva para a educação matemática no país.

E como documento mais atual brasileiro, a BNCC - Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) - enfatiza a importância da resolução de problemas como um processo matemático fundamental. Ela reconhece que a resolução de problemas assume formas privilegiadas na atividade matemática e deve ser uma estratégia central para promover a aprendizagem ao longo do Ensino Fundamental. É considerada como um recurso e estratégia para desenvolver competências fundamentais para que o aluno adquira no decorrer do processo de aprendizagem, o domínio do letramento matemático, conforme demonstrado na BNCC:

> [...] processos matemáticos de **resolução de problemas**, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (Brasil, 2018, p. 266, grifo nosso).

Com o objetivo de alcançar o letramento matemático e desenvolver habilidades, a BNCC concebe:

> [...] esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

No que diz respeito especificamente aos processos matemáticos de resolução de problemas, a BNCC (Brasil, 2018) destaca que eles devem contribuir para o desenvolvimento das habilidades esperadas no Ensino Fundamental. Ainda assim, esse documento oficial da educação brasileira ressalta habilidades que envolvem a resolução de problemas com foco tanto na aprendizagem de resolver quanto na formulação de problemas. O Quadro 2 exemplifica essas habilidades, conforme definidas na BNCC (Brasil, 2018), revelando esse enfoque destacado por nós em negrito, de acordo com as Unidades Temáticas e seus respectivos objetos de conhecimento.

Quadro 3 - Habilidades requeridas que envolvem resolução de problemas.

Unidade Temática	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidade envolvendo Resolução de Problemas**
Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA09) **Resolver e elaborar problemas** que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
Álgebra	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) **Resolver problemas** que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas).	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para **resolver problemas** e desenvolver a percepção espacial.
Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) **Resolver e elaborar problemas** que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Probabilidade e Estatística	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras.	(EF03MA26) **Resolver problemas** cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas.

Fonte: Organizado pelo autor com base em Brasil (2018, grifo nosso)

O Quadro 3 apresenta as unidades temáticas da BNCC, os objetos de conhecimento e as habilidades requeridas que envolvem a resolução de problemas destinados ao Ensino Fundamental. Os termos em destaque "resolver e elaborar problemas", "resolver problemas" e "para resolver problemas" nas cinco habilidades descritas foram ressaltados com o intuito de ajudar a entender o foco.

Van de Walle (2009) propõe o ensino de matemática através da resolução de problemas como a principal estratégia de ensino, considerando essa abordagem como o foco do currículo de matemática. Inclusive, destaca o autor, que a prática do ensino seja a partir de onde estão os alunos, o inverso do ensino tradicional começando onde está o professor, ou seja, levando em consideração o que o aluno traz consigo para o ambiente de sala de aula.

> A maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser propostos de modo a envolver os alunos em pensar e desenvolver a matemática importante que eles precisam aprender (Van de Walle, 2009, p. 57).

Para este autor, o ensino da matemática através da resolução de problemas deve seguir algumas características importantes para um bom desempenho. Essas características são: o problema deve começar onde estão os alunos; o aspecto problemático deve estar no contexto da matemática que os alunos vão passar a aprender; aprendizagem matemática deve solicitar justificativas e explicações para as respostas e os métodos adotados.

É importante compreender que o ensino da matemática através da resolução de problemas é um método valioso. Conforme apontado por Van de Walle (2009), um currículo eficaz deve incorporar atividades baseadas nesse método, considerando-as como um veículo para atingir o objetivo educacional. O processo de resolução de problemas não apenas resulta em aprendizagem, mas também promove o desenvolvimento de habilidades essenciais.

No entanto, o ensino por meio dessa abordagem pode apresentar desafios. Van de Walle (2009), em sua análise, discute as dificuldades associadas ao ensino baseado na resolução de problemas. É fundamental que educadores compreendam essas nuances e busquem estratégias eficazes para superá-las, garantindo uma experiência de um bom aprendizado para os alunos.

> Não há dúvida de que ensinar por resolução de problemas é difícil. As tarefas devem ser planejadas ou selecionadas a cada dia e a compreensão atual dos alunos e as necessidades curriculares devem ser levadas em consideração. Em geral, é difícil planejar com muita antecedência (Van de Walle, 2009, p. 59).

Entretanto, obter êxito na execução do ensino da matemática por meio da resolução de problemas, não é uma tarefa simples, pois requer do professor muita dedicação e empenho para elevar o estágio de compreensão dos alunos, para que sejam capazes de pensar e desenvolver procedimentos matemáticos que terão que consolidar no processo de aprendizagem dos conteúdos.

Corroborando com o pensamento de se obter êxito no ensino da matemática por intermédio da resolução de problemas, Onuchic (2012), Onuchic (2013), Allevato e Onuchic (2021) e Morais e Onuchic (2021) fortalecem a ideia de que resolução de problemas se constitui em uma alternativa metodológica que se adapta bem ao complexo cenário em que as escolas se inserem atualmente, no qual se interpõe o relevante trabalho dos professores de matemática.

Dessa maneira, entende-se que o aprendizado matemático por meio da metodologia de resolução de problemas pode conduzir o aluno da Educação Básica a interagir com diversos temas da matemática, como Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estática e Probabilidade. Uma vez ocorrendo essa interação, torna oportuno ao aluno desenvolver a sua capacidade de agir matematicamente em uma variedade de situações dentro e fora da escola.

De acordo com Onuchic (1999), foi criado no Brasil o GTERP - Grupo de Trabalho de Resolução de Problemas e Pesquisa, coordenado pela própria autora desde 1992, vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP – campus Rio Claro/SP. Assim, o foco central desse grupo é desenvolver pesquisas com vistas a alcançar a sala de aula, impulsionando as atividades de aperfeiçoamento, pesquisa e produção científica na linha de Resolução de Problemas em Educação Matemática. Com isso, desenvolvem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

É importante esclarecer que as três palavras que compõem a metodologia (ensino, aprendizagem e avaliação) são distintas uma das outras. No entanto, “[...] o que se considera ideal é que ensino e aprendizagem se realizem, sim, integrados nas situações de sala de aula” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 46), por isso a utilização dos hifens no nome da metodologia. Além disso, o conceito de avaliação é recente a ser empregado na metodologia, pois a atribuição dela é norteada pelos princípios de avaliação contínua e formativa. Com isso, a avaliação passou a ser empregada no desenvolvimento dos processos e pouco utilizada para fim de julgamento de resultados obtidos com esses processos.

Acerca da avaliação na metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação, é aprofundado no estudo de Pironel (2019) que apresenta a potencialidade da resolução de problemas como recurso que favoreça um cenário em que avaliação se relacione com as atividades desenvolvidas no ensino da matemática.

Segundo Pironel (2019), na década de 90 ocorreram mudanças significativas nos documentos legais relacionados à educação no Brasil, destacando a importância da avaliação como parte essencial do processo de ensino-aprendizagem. O autor analisa documentos desse período, como a Lei de Diretrizes e Bases de 1996 (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998 (PCN). Os PCN consideram a avaliação uma estratégia de aprendizagem, desde que tenha como objetivo desenvolver habilidades críticas e reflexivas.

Os documentos educacionais também trouxeram mudanças para o ensino de matemática, adotando uma abordagem contextualizada para atender às novas exigências da sociedade. O objetivo é formar alunos capazes de aplicar conhecimentos matemáticos em um mundo moderno e dinâmico. Nesse cenário, a resolução de situações-problema é destacada como uma abordagem relevante. Pironel (2019) enfatiza que, apesar da evolução da concepção de avaliação como parte integrada do ensino-aprendizagem, essa prática ainda não se concretizou em sala de aula. Ele destaca que essa mudança exige que toda a equipe escolar compreenda e implemente práticas avaliativas focadas na promoção da aprendizagem, superando o viés classificatório que ainda prevalece.

Pironel (2019) destaca que a avaliação através da resolução de problemas pode fomentar a formação crítica e reflexiva dos alunos, servindo como uma estratégia de aprendizagem. Sua pesquisa demonstrou que as etapas definidas pela metodologia analisada têm potencial como ferramentas de avaliação participativa e formativa. O autor enfatiza os seguintes aspectos da avaliação:

> Ser identificada como parte de um planejamento efetivo;
> Focaliza como os alunos aprendem;
> É uma prática central na sala de aula;
> Precisa ser uma atividade profissional-chave;
> É uma atividade sensível e construtiva;
> Pode incentivar motivações;
> Promove a compreensão de metas e critérios;
> Ajuda os estudantes a saber como melhorar;

> Desenvolve a capacidade de autoavaliação;
> Reconhece todas as realizações educacionais (Pironel, 2019, p. 278-284).

A avaliação através de situações-problema oferece ao professor a oportunidade de intervir durante o processo de resolução, incentivando o estudante a elaborar argumentos que apliquem os conceitos aprendidos e as estratégias selecionadas para a solução em questão.

Pironel (2019) destaca como desafio a dificuldade de alinhar o cronograma do programa de ensino com a metodologia proposta, devido ao tempo requerido pela avaliação através da resolução de problemas. Ele sugere que essa questão pode ser enfrentada por meio de ajustes na metodologia e na gestão pedagógica. Assim, a avaliação continua a ser indispensável não apenas para aferir o planejamento curricular, mas também para adaptá-lo às necessidades educacionais.

Além disso, Pironel (2019) ressalta um aspecto importante da avaliação para a aprendizagem: ela deve incentivar ativamente os alunos na construção do conhecimento. Esta abordagem enfatiza o processo mais do que os resultados do desempenho, sem descartar a importância da integração com outras formas de avaliação que também são fundamentais para o processo educativo.

Assim, a avaliação deve ser realizada durante toda a resolução de problemas guiada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, pois desse modo, faz com que a avaliação "[...] integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentem a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessários" (Allevato; Onuchic, 2009, p. 139).

Nesse sentido, "[...] o processo de avaliação se constitui como uma atividade importante para a construção ou reconstrução do conhecimento, valorizando os múltiplos saberes e fornecendo subsídios relevantes e fundamentais para o ensino e a aprendizagem, em um contexto de diálogo permanente entre estudantes e professores" (GONÇALVES, 2023, p. 92).

De acordo com Gonçalves (2023), a avaliação deve estar alinhada ao processo de ensino e aprendizagem, funcionando como um mecanismo para revelar o desenvolvimento das competências e habilidades dos alunos. Além disso, ela deve fornecer subsídios para reflexão e tomada de decisões, permitindo ao professor decidir se uma atividade de ensino foi concluída adequadamente ou se novas intervenções são necessárias para alcançar os objetivos propostos.

Desse modo, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de Problemas “[...] reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental” (ONUCHIC, 1999, p. 203). Todo esse domínio de procedimentos algoritmos é devido a essa metodologia que ensina novos conceitos e outros conteúdos matemáticos a partir dos problemas.

Allevato e Onuchic (2008) ressaltam que, na Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, os problemas são propostos antes que o aluno tenha conhecimento do conteúdo matemático referente a série que se encontra vinculado. Sendo assim, a implementação dessa metodologia de ensino inicia com um problema que expressa situações básicas do conteúdo relacionado ao problema e aponte procedimentos matemáticos que devem ser aplicados e aprendidos para obter respostas que satisfaçam as condições do problema.

Nesse contexto, Allevato e Onuchic (2021) sugerem um roteiro para auxiliar os professores na preparação do planejamento de suas aulas, que tem dez etapas, sendo elas: 1) Proposição do problema gerador; (2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto do texto do problema; (4) Resolução do problema; (5) Observar e incentivar; (6) Registro das resoluções na lousa; (7) Plenária, (8) Busca de consenso; (9) Formalização do conteúdo e (10) Proposição e resolução de novos problemas.

A fim de compreender melhor o roteiro supracitado, destacamos:

- Proposição do problema gerador: Entrega-se o problema gerador aos alunos, que tem como objetivo desenvolver o conteúdo matemático que se pretende trabalhar;
- Leitura individual: Após receber o problema impresso, cada aluno fará leitura individual do problema, refletir sobre os dados contidos no problema, mobilizando conhecimentos matemáticos sobre conceitos contidos no problema e reunindo informações necessárias à exploração do problema;
- Leitura em conjunto do texto do problema: Concluída a leitura individual do problema, os alunos se reunirão em pequenos grupos, fazendo nova leitura e discursão do problema. Nesse momento, o professor ajuda os grupos na compreensão do problema, resolução intermediaria como notação das grandezas, a conceitos relacionados e a técnicas de

operatórias. Vale ressaltar que as ações de resolução são exclusivas dos alunos. Isso permite que eles reflitam sobre a formação dos conceitos ao aplicarem as expressões presentes no problema, resultando em um melhor domínio e coerência na compreensão da situação proposta;

- Resolução do problema: nesse momento, inicia a resolução do problema, os alunos em seus grupos, tentam resolver o problema gerador, que os levará a construção da ideia do conceito proposto no conteúdo matemático do problema, uma vez tendo mobilizado o conhecimento fundamental para desenvolver respostas razoáveis ao problema, levando em consideração ao que foi planejado pelo professor para essa aula;
- Etapa de observar e incentivar: nesse momento, o papel do professor é acompanhar e observar o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizarem seus conhecimentos prévios para obter a resposta, tais como técnicas operatórias e incentivando a troca de ideias. Dessa forma, auxilia os alunos com as dificuldades com que se deparam, mas sem fornecer respostas prontas, passando sempre confiança para os alunos;
- Registro das resoluções na lousa: nesse momento, os representantes dos grupos são convidados a apresentarem os registros de suas resoluções na lousa (certas ou erradas ou desenvolvidas por diferentes esquemas);
- Plenária: nesse momento, inicia a sessão plenária onde o professor e alunos dialogam sobre as ideias e discutem concepções conceituais do problema. Uma vez exposto o painel das resoluções pelos alunos, o professor começa a estimular os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias ou pensamentos, desse modo, levando-os a defenderem pontos de vistas, compararem e discutirem soluções para que possam avaliar suas próprias resoluções de modo a perfeiçoarem a escrita da resolução;
- Busca de consenso: Nesse momento, o professor e os alunos procuram chegar a um consenso sobre o resultado correto para o problema. Assim, acontece um grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita

matemática e uma importante construção acerca do conteúdo matemático trabalhado;

- Formalização do conteúdo: Esse é o momento da formalização dos conceitos e do conteúdo matemático que está sendo ensinado através da resolução do problema em sala de aula. O professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo matemático. Partindo do conhecimento emanado, é exposta a forma organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando o conteúdo abordado, bem como os princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema gerador, destacando diferentes técnicas operatórias;
- Proposição e resolução de novos problemas: o momento em que é analisado o domínio do campo conceitual assimilado e aprendido pelos alunos através da resolução do problema gerador, e uma vez compreendido e dominado o conteúdo matemático empregado no problema, nesta etapa final, os alunos podem ter a chance de elaborar seus próprios problemas, usando o conhecimento adquirido nas etapas anteriores. Além do mais, esses novos problemas podem ser elaborados pelos alunos (elaboradores) para que seus colegas de sala tentem resolver.

Sugere Onuchic (1999) que, como recursos auxiliares nesse roteiro de atividades, podem ser utilizados materiais didáticos, tais como calculadoras, jogos, papel, entre outros.

Para uma melhor compreensão do roteiro metodológico desenvolvido por Allevato e Onuchic (2021), apresentamos na Figura 1 as 10 etapas do desenvolvimento da Metodologia do GTERP.

Figura 1 - Roteiro da metodologia do GTERP.

Fonte: Allevato e Onuchic (2021).

De acordo com Allevato e Vieira (2016), o aprendizado de conteúdo matemático seguindo essas etapas da resolução de problemas, faz sentido para o aluno, pois ele se torna protagonista na criação de seu próprio conhecimento, ao contrário do que se observa nas aulas que ainda são regidas pelos modelos tradicionais de ensino. Além do mais, segundo os autores, em muitos livros didáticos, os problemas não são mais deixados para o final do processo, mas são logo de início apresentados, de modo que a aprendizagem seja realizada a partir e através da resolução de problemas.

Para finalizar, a revisão de estudos deste capítulo nos oportunizou compreender as discussões que envolvem os conceitos de proporção, proporcionalidade e pensamento proporcional e da sua importância no processo de ensino e aprendizagem, além do que os estudos sobre e ensino e aprendizagem de proporção nos mostraram sobre o que já tem sido desenvolvido em termos de metodologias de ensino e das aprendizagens e dificuldades dos alunos no tema. Com isso, permitiu-nos direcionar nossa pesquisa para uma metodologia de ensino por meio da resolução de problemas como uma forma de proporcionar ao aluno o desenvolvimento do pensamento proporcional. Assim, adotamos a metodologia de ensino-aprendizagem e avaliação através da resolução de problemas para a realização desta pesquisa. E como base teórica trazemos a teoria dos campos conceituais apresentada no capítulo seguinte, que nos dará subsídios para discutir sobre os avanços dos alunos no tema em questão.

3. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Este capítulo apresenta a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e as estruturas do campo aditivo e multiplicativo.

A Teoria dos Campos Conceituais, de acordo com Vergnaud (1993), é uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real. Ela permite analisar as relações entre os conhecimentos, considerando seu conteúdo conceitual. A teoria dos campos conceituais permite investigar as afinidades e rupturas entre os conceitos, examinando tanto os conhecimentos explícitos quanto as invariantes operatórias implícitas nos comportamentos dos indivíduos em uma determinada situação. Além disso, a teoria também aprofunda a análise das relações entre o significado e o significante, explorando a interação entre os elementos conceituais e sua expressão verbal ou simbólica.

Essa teoria não é específica da matemática. No entanto, foi originalmente desenvolvida com vistas a dar conta do processo de conceituação progressiva de estruturas aditivas, estruturas multiplicativas, relações número-espaço e álgebra. Nesse sentido, um Campo Conceitual é definido como um conjunto de situações cujo domínio necessita de uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão (Vergnaud, 1986).

Segundo Moreira (2002), existem três argumentos fundamentais que levaram Vergnaud (1983) ao conceito de campo conceitual:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud, 1983a, p. 393 *apud* Moreira, 2002, p. 9).

Com base nesse entendimento, o campo conceitual é visto como uma unidade de estudo para entender as dificuldades observadas na conceituação do real. Assim, essa teoria assume que a conceituação é a essência do desenvolvimento cognitivo. Segundo Moreira (2002):

> o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização, [...] é preciso dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações nas quais os aprendizes desenvolvem seus esquemas na escola ou na vida real (Vergnaud,1994, p. 58 *apud* Moreira, 2002, p. 10).

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida por Gérard Vergnaud, recebeu influência significativa dos estudos de Jean Piaget e Lev Vygotsky. De acordo com Moreira (2002), a contribuição central de Piaget para a teoria de Vergnaud é o conceito de esquemas, que são utilizados como unidades de conhecimento na formação de conceitos matemáticos pelos estudantes. Os esquemas, que são estruturas mentais que representam ações e operações em relação ao mundo, desempenham um papel fundamental na compreensão e resolução de problemas matemáticos.

Além disso, Moreira (2002) também destaca a influência do legado de Vygotsky na teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Nessa perspectiva, destaca-se a importância da interação social, da linguagem e da simbolização no processo de apropriação progressiva de um campo conceitual pelos alunos. A interação social permite que os alunos ampliem suas capacidades cognitivas por meio da troca de ideias e discussões com os outros. A linguagem desempenha um papel essencial na expressão e negociação de significados, além de possibilitar a construção coletiva do conhecimento.

Assim, de acordo com Moreira (2002), a ênfase da teoria de Vergnaud está em proporcionar oportunidades para que os alunos desenvolvam seus esquemas na zona de desenvolvimento proximal, com o apoio adequado de um mediador. Nesse contexto, a interação social e o uso da linguagem desempenham um papel fundamental na construção de novos conhecimentos e no desenvolvimento das habilidades cognitivas dos alunos.

Vergnaud (1993) ressalta a importância de não reduzir um conceito à sua definição formal, mas sim considerar sua aplicação e significado prático na resolução de problemas. Ele enfatiza que a exposição pragmática dos conceitos é fundamental para a aprendizagem, tanto no campo da psicologia e da didática quanto na história da ciência. Ao resolver problemas concretos, as crianças atribuem significado aos conceitos, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa.

Vergnaud (1986) reconhece que a formação de conceitos por meio da resolução de problemas requer tempo e que erros podem surgir ao longo desse processo. Ele enfatiza a importância de compreender como as concepções e competências das crianças são formadas, a fim de superar esses erros e promover um desenvolvimento conceitual mais sólido. A resolução de problemas permite aos alunos aplicarem e vivenciarem os conceitos em contextos reais, facilitando a assimilação e a acomodação do conhecimento para enfrentar novos desafios.

Ao se referir ao campo conceitual, Vergnaud (1990) considera que este é formado por situações, esquemas e os invariantes operatórios. Esses elementos estão interconectados e desempenham papéis fundamentais no processo de conceitualização. Assim, Vergnaud (1993, p.8) define os conceitos como um trio de três conjuntos C=(S, I, Y), em que:

S: O conjunto das situações que dão sentido ao conceito, ou seja, as referências concretas nas quais o conceito é aplicado e compreendido;

I: O conjunto das invariantes que sustentam a operacionalidade dos esquemas, ou seja, os padrões consistentes de pensamento e ação que são fundamentais para compreender e aplicar o conceito de forma efetiva;

Y: O conjunto das formas de linguagem, sejam elas simbólicas ou não, que permitem representar o conceito, suas propriedades, as situações envolvidas e os procedimentos de tratamento. Essas formas de linguagem são essenciais para a representação e comunicação do conceito.

Esses três conjuntos, S, I e Y, são componentes interligados e fundamentais na constituição e compreensão de um conceito, proporcionando uma base sólida para seu desenvolvimento e uso adequado.

Outro destaque é a contribuição de Guy Brousseau ao conceito de situação que, conforme destacado por Vergnaud (1993), foi notável, pois ampliou seu alcance didático além da psicologia, visto que enfatizou a importância das dimensões afetiva, dramática e cognitiva nas situações de aprendizagem matemática. Brousseau propôs a encenação de conceitos matemáticos como uma forma de arte que abrange a psicologia social, a epistemologia e a psicologia da matemática.

Entretanto, no contexto matemático, o conceito de situação se refere a tarefas complexas que podem ser analisadas em termos de suas subtarefas específicas e dificuldades. A dificuldade de uma tarefa não é simplesmente a soma ou o produto das dificuldades das subtarefas, mas é importante destacar que a falha em uma subtarefa pode levar ao fracasso geral da tarefa (Vergnaud, 1993).

Em relação a situações, Vergnaud (1993) coloca que existem duas classes de situações: aquelas em que o sujeito possui as competências necessárias para lidar imediatamente com a situação e aquelas em que o sujeito precisa refletir, explorar e experimentar diferentes abordagens para alcançar a solução desejada. O conceito de "esquema" desempenha um papel relevante em ambas as classes de situações, embora funcione de maneiras distintas. No primeiro caso, o sujeito apresenta comportamentos automatizados e organizados por meio de um único esquema. No segundo caso, a utilização de múltiplos esquemas ocorre, e esses esquemas podem competir entre si, exigindo ajustes e combinações para alcançar a solução desejada. Esse processo de utilização de diferentes esquemas está intrinsecamente ligado à descoberta e à aprendizagem do sujeito.

Os esquemas são compreendidos como uma organização consistente do comportamento para uma determinada classe de situações, pois busca compreender os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que tornam a ação do sujeito operatória. O esquema representa a estrutura subjacente que orienta o comportamento e as operações mentais realizadas pelo sujeito ao lidar com determinadas situações. É por meio dos esquemas que o sujeito desenvolve sua compreensão e habilidades em determinado domínio de conhecimento (Vergnaud,1993).

Vergnaud (1993) destaca outros aspectos importantes no contexto dos esquemas que são os invariantes operatórios. Estes são os conhecimentos dos sujeitos presentes nos esquemas, e que ele chamou de "conceito-em-ação" e “teorema-em-ação". Um "teorema-em-ação" é uma proposição que o sujeito acredita ser verdadeira, mesmo que de forma provisória, em determinada situação. É uma afirmação que o sujeito considera válida e relevante na ação diante de um problema ou contexto específico. Por outro lado, um "conceito-em-ação" é um conceito que o sujeito considera pertinente e relevante para ser aplicado na ação em uma determinada situação. Funciona como uma premissa ou informação que o sujeito utiliza para aplicar os teoremas-em-ação, isto é, para resolver problemas e tomar decisões práticas utilizando seus conhecimentos matemáticos (Vergnaud, 1998).

Nesse contexto, a terminologia abrangente proposta por Vergnaud (1993) refere-se aos termos "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação", os quais englobam tanto os conceitos quanto os teoremas aplicados na prática, enfatizando a importância das operações e ações realizadas para a assimilação e apreensão do conhecimento. Em conjunto, esses conceitos e teoremas formam as chamadas invariantes operatórias, elementos fundamentais que permitem ao sujeito agir de maneira adequada e competente diante de uma determinada classe de situações, desempenhando um papel essencial na consolidação e domínio do conhecimento.

As invariantes operatórias são classificadas por Vergnaud (1993) em três tipos lógicos: As invariantes operatórias do tipo “proposição”, “função proposicional” e “argumento”. As invariantes do tipo “proposição**”** podem ser verdadeiras ou falsas, e os teoremas-em-ação são exemplos de invariantes desse tipo. Esses teoremas, quando aplicados na prática, fornecem proposições que podem ser verdadeiras ou falsas, dependendo das condições e das operações realizadas. Portanto, os teoremas-em-ação são considerados invariantes no sentido de que sua veracidade permanece constante, independentemente das ações ou operações realizadas.

Um exemplo de invariante operatório do tipo "proposição" é apresentado por Vergnaud (1993): Entre 8 e 10 anos, com sucesso variável de acordo com os indivíduos, muitos alunos compreendem que, se uma quantidade de objetos a venda é multiplicada por 2, 3, 4, 5, 10, 100 ou qualquer número simples, seu preço será 2, 3, 4, 5, 10 ou 100 vezes maior. Pode-se exprimir este conhecimento por um teorema-em-ação: $f(nx) = nf(x)$ para todo n inteiro e simples. Em que: $f(x)$ representa o preço original de uma quantidade de objetos x à venda; n é um número inteiro e simples que indica o fator de multiplicação; $f(nx)$ representa o preço resultante após a multiplicação por n.

Essa proposição é um exemplo de invariante operatório porque representa um conhecimento que os alunos podem aplicar em diferentes situações e problemas relacionados à multiplicação e ao cálculo de preços. Esse tipo de entendimento é fundamental para desenvolver uma compreensão mais profunda das relações multiplicativas e é um marco importante no processo de aprendizagem matemática.

As invariantes do tipo "função proposicional" não são avaliadas em termos de verdade ou falsidade, mas são elementos cruciais na construção de proposições. Eles fornecem estruturas e conceitos fundamentais que são essenciais para a compreensão de determinado domínio de conhecimento matemático. Por exemplo, os conceitos de cardinalidade e coleção, assim como os de estado inicial, transformação e relação quantificada, são invariáveis do tipo "função proposicional", que desempenham um papel central na conceitualização das estruturas aditivas. Esses invariantes não são proposições em si, mas são componentes fundamentais que permitem a formulação e o entendimento das proposições matemáticas relacionadas. Eles fornecem a base para a construção de conhecimentos mais avançados e complexos dentro do domínio específico (Vergnaud, 1993).

Um exemplo de função proposicional com um argumento seria a propriedade de ser um número par. Por exemplo, ao considerar o número 6, podemos aplicar a função proposicional de paridade e determinar que 6 é um número par. Esse conceito-em-ação de paridade é uma função proposicional que nos permite estabelecer uma proposição verdadeira ou falsa com base no argumento fornecido (número par ou ímpar).

Para Vergnaud (1993), as invariantes do tipo "argumento" estão relacionadas à utilização de argumentos lógicos na formulação e validação de proposições. Quando se fala em função proposicional e proposição, é necessário considerar os argumentos envolvidos. No contexto clássico, os exemplos de argumentos são frequentemente extraídos de objetos materiais comuns e suas propriedades. Os argumentos podem ser representados por valores particulares das variáveis x, y e z, que correspondem a objetos como um livro, uma mesa ou uma pessoa chamada Paulo. Além disso, as funções materiais, como "colocar o livro em cima da mesa", podem ser expressas como proposições através da atribuição desses valores particulares aos argumentos da função proposicional.

Vergnaud (1993, p. 7) apresenta o exemplo, a proposição "Paulo põe o livro em cima da mesa" pode ser representada como R_3 (Paulo, livro, mesa), em que R_3 é a função proposicional com os argumentos x, y, z. Esses argumentos representam pessoas, pequenos objetos manipuláveis e suportes possíveis, respectivamente. Dessa forma, os invariantes do tipo "argumento" são essenciais para a construção de proposições e o estabelecimento de relações lógicas em um determinado contexto.

A definição pragmática de um conceito envolve analisar as situações em que o conceito é aplicado e os padrões de pensamento utilizados pelos indivíduos nessas situações. Isso significa que para compreender plenamente um conceito, é necessário observar como ele é usado em diferentes contextos e como as pessoas pensam e agem ao lidar com ele. Por exemplo, o conceito de relação só pode ser entendido ao examinar uma variedade de problemas práticos e teóricos nos quais esse conceito é aplicado (Vergnaud, 1993).

Vergnaud (1990) aponta três considerações fundamentais para a compreensão acerca de um campo conceitual e os motivos pelos quais é necessário estudar os campos conceituais e não os conceitos restritos ou isolados, a saber: *Consideração 1:* Normalmente uma dada situação não coloca em ação todas as propriedades de um conceito. Se a intenção é fazer com que os alunos encontrem todas as propriedades, é imprescindível fazer referência a uma diversidade de classes de problemas; *Consideração 2:* uma certa situação não coloca em questão um único conceito. Entretanto, a sua análise, vai requerer geralmente, vários conceitos, até mesmo as dificuldades encontradas pelos alunos derivam de vários conceitos; *Consideração 3:* A formação de um conceito por meio das atividades de resolução de problema utiliza um período longo com muitas interações e desníveis.

Em suma, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud apresenta uma abordagem abrangente para a formação de conceitos matemáticos e para compreender de que forma o sujeito, ao se deparar com uma determinada situação, desenvolve esquemas, a partir dos conhecimentos que possui, para a formação de um novo conceito.

A partir das definições apresentadas por Vergnaud (1993) sobre conceito, esquema e invariante operatório, podemos compreender que cada conceito possui várias características que são relevantes em diferentes situações. Algumas características podem ser facilmente compreendidas, enquanto outras podem exigir um maior tempo de desenvolvimento e experiência. Uma abordagem psicológica e educacional para a formação de conceitos matemáticos considera um conceito como um conjunto consistente de padrões de pensamento e ação que são aplicados em diversos contextos. Esses padrões, também conhecidos como invariantes, desempenham um papel fundamental na compreensão e aplicação efetiva do conceito. Eles são essenciais para garantir que o conceito seja compreendido e utilizado de maneira eficaz.

Além do mais, a ação operatória por si só não abrange toda a conceitualização do mundo real. Além das operações realizadas, é necessário levar em consideração outros aspectos importantes. Não é possível discutir a veracidade ou falsidade de um enunciado que é completamente implícito. É crucial identificar os aspectos da realidade aos quais devemos prestar atenção, mesmo na ausência de palavras, enunciados, símbolos e sinais. O uso de significados explícitos desempenha um papel fundamental na conceitualização e compreensão do mundo ao nosso redor (Vergnaud, 1993).

3.1 AS ESTRUTURAS ADITIVAS E MULTIPLICATIVAS

O conceito de campo conceitual é caracterizado por Vergnaud (1993) como um conjunto de situações relacionadas a uma determinada área de conhecimento, como as estruturas aditivas ou multiplicativas. Essa abordagem permite classificar e analisar as tarefas cognitivas e os procedimentos envolvidos em cada situação. Vale ressaltar que o termo "situação" não se limita apenas a contextos didáticos, mas refere-se a tarefas que podem ser compreendidas em sua natureza e dificuldade específicas.

Vale considerar que a complexidade de uma tarefa não é meramente a soma ou produto das dificuldades de suas subtarefas, e é importante destacar que o fracasso em uma subtarefa pode levar ao fracasso geral. Alguns pesquisadores utilizam modelos de complexidade baseados em teorias linguísticas ou de processamento de informações para analisar essas situações. No entanto, a teoria dos campos conceituais enfatiza a importância dos conceitos matemáticos em si, atribuindo-lhes um papel fundamental. Embora a forma dos enunciados e o número de elementos envolvidos possam contribuir para a complexidade, eles são considerados secundários em relação aos conceitos matemáticos (Vergnaud, 1993).

Após tratar a definição e a importância dos campos conceituais, iremos nos aprofundar nos campos conceituais aditivos e multiplicativos. Esses campos representam áreas-chave no estudo da matemática, abrangendo operações fundamentais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Vamos explorar como esses campos conceituais são estruturados, as propriedades dos números envolvidos e como eles são aplicadas na resolução de problemas matemáticos.

3.1.1 O Campo Conceitual Aditivo

O campo conceitual das estruturas aditivas, consiste em um conjunto de situações que envolvem adições e subtrações. Essas situações são analisadas como tarefas matemáticas e abrangem uma variedade de conceitos e teoremas.

Verganud (1993) ressalta que entre os componentes das estruturas aditivas estão conceitos como cardinalidade e medida, que permitem quantificar e medir quantidades. Também incluem transformações temporais, como aumento ou diminuição, representando ações como perder ou gastar uma certa quantidade. A comparação quantificada, como ter mais ou menos de algo, ou ter três anos a mais do que outra pessoa, também faz parte dessas estruturas. Além disso, conceitos como composição binária de medidas (quanto no total?), composição de transformações e relações, operação unitária, inversão, números naturais e números relativos, abcissa, deslocamento orientado e quantificado são elementos importantes nesse campo conceitual.

A compreensão do Campo Conceitual Aditivo é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático, especialmente no que diz respeito a situações que envolvem combinação, contagem, agrupamento e comparação de quantidades.

Para facilitar o entendimento das diferentes situações presentes no campo conceitual aditivo, Vergnaud (1993) utiliza o conceito de transformação como um dos elementos-chave para descrever as categorias de problemas. A ideia de transformação envolve uma ação que ocorre a partir de uma situação inicial, seja de forma direta ou indireta, resultando em um aumento ou diminuição nas quantidades envolvidas. Esse conceito de transformação é fundamental para compreender as relações aditivas e como elas estão relacionadas às mudanças quantitativas que ocorrem ao adicionar ou subtrair elementos. Ao considerar a transformação como um elemento central, é possível explorar as diferentes maneiras pelas quais as quantidades podem ser modificadas e relacionadas no contexto dos problemas aditivos.

Além disso, é importante ressaltar que no contexto da Teoria dos Campos Conceituais, as expressões "relação" ou "estado relativo" possuem um significado específico relacionado à situação em que um determinado elemento do problema se encontra. Essa expressão é utilizada para representar a relação entre as quantidades ou as posições dos elementos envolvidos no contexto do problema. Por exemplo, se houver uma situação de débito de R$5,00 utiliza-se a relação ou estado relativo "-5" para representar essa situação. Dessa forma, a expressão "relação" ou "estado relativo" desempenha um papel fundamental na compreensão das relações aditivas e na resolução de problemas que envolvem transformações quantitativas.

De acordo Vergnaud (2009), o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas é organizado em seis principais categorias para compreender as diferentes formas como as adições e subtrações ocorrem. Cada categoria representa um domínio específico e é elucidada por meio de esquemas relacionais e equações numéricas equivalentes. São elas:

Primeira categoria: refere-se à composição de duas medidas que resultam em uma terceira medida. É a ideia de combinar quantidades para obter um total. “Paulo tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal. Ele tem em tudo 14 bolinhas”. Nesta situação, temos a composição de duas medidas (tem 6 bolinhas de gude de vidro e 8 bolinhas de gude de metal) para obter uma terceira medida (total de bolinhas de gude:14 bolinhas).

Segunda categoria: envolve uma transformação que opera sobre uma medida, resultando em uma medida diferente. Nesse caso, ocorrem mudanças nas quantidades por meio de ações específicas. “Paulo tinha 7 bolinhas de gude antes de jogar. Ganhou 4 bolinhas. Ele agora tem 11”. Neste caso, a transformação (ganhou 4 bolinhas de gude) atua em acréscimo sobre a medida inicial (tinha 7 bolinhas de gude) e resulta em outra medida (total de bolinhas adquirida: 11 bolinhas).

Terceira categoria: aborda as relações entre duas medidas. É a comparação quantificada entre diferentes quantidades, como “mais que” ou “menos que”. “Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 menos que Paulo. Então, Tiago tem 3”. Nesta situação, estamos comparando quantidades (8 bolinhas e 5 bolinhas) para encontrar a diferença entre elas.

Quarta categoria trata da composição de duas transformações que resultam em uma transformação. Ou seja, duas ações específicas são combinadas para criar uma ação modificada.

Paulo ganhou ontem 6 bolinhas de gude e hoje perdeu 9 bolinhas. Em tudo, ele perdeu 3.

Nesta situação tem-se a combinação de duas transformações (ganhou 6 bolinhas e perdeu 9 bolinhas), ao realizar a subtração das bolinhas ganhas (6) e das bolinhas perdidas (9), obtendo o resultado de -3, indicando que, no total, ele perdeu 3 bolinhas.

Quinta categoria: envolve uma transformação que opera sobre um estado relativo, ou seja, uma relação existente entre quantidades. Essa transformação modifica o estado relativo, alterando a relação entre as quantidades. “Paulo devia 6 bolinhas de gude para Henrique. Ele devolveu 4. Agora, ele lhe deve somente 2 bolinhas”. Nesse caso, tem-se uma relação de dívida entre Paulo e Henrique, em que Paulo devia 6 bolinhas para Henrique. Ao devolver 4 bolinhas, a relação de dívida foi modificada, e agora Paulo lhe deve somente 2 bolinhas. Essa situação envolve uma comparação quantificada entre as quantidades de bolinhas de gude que Paulo devia inicialmente e a quantidade que ainda deve após a devolução parcial.

Sexta categoria: trata da composição de dois estados relativos, resultando em um estado relativo modificado. São analisadas as relações entre relações, explorando como elas se combinam e se modificam. “Paulo deve 6 bolinhas de gude a Henrique, mas Henrique lhe deve 4. Então, Paulo deve 2 bolinhas a Henrique”. Nesse contexto, a relação entre as duas quantidades é analisada. Ao subtrair a dívida de Henrique da dívida de Paulo, chegamos à conclusão de que Paulo ainda deve 2 bolinhas a Henrique. Essa situação demonstra como as relações quantificadas podem ser exploradas para compreender as interações entre as medidas e as mudanças nas quantidades envolvidas.

As situações apontadas por Vergnaud (2009) em cada categoria das Estruturas Aditivas ilustra as diferentes formas de adição e subtração que são aplicadas em situações práticas. Cada categoria representa um domínio específico e é elucidada por meio de exemplos que demonstram a composição de medidas, transformações, relações quantificadas e estados relativos. Esses exemplos auxiliam na compreensão dos conceitos e processos matemáticos envolvidos no campo aditivo, permitindo aos estudantes desenvolver habilidades de raciocínio e resolução de problemas. Ao explorar essas categorias, os estudantes podem aprimorar sua compreensão das estruturas aditivas e aplicar esse conhecimento em diversas situações do mundo real que envolvem adição e subtração.

Logo, o campo conceitual das estruturas aditivas desempenha um papel fundamental no ensino e aprendizagem da matemática, pois permite aos estudantes desenvolverem habilidades de raciocínio quantitativo, compreensão das relações aditivas e resolução de problemas. Ao explorar as diferentes categorias e esquemas relacionais dentro desse campo, os alunos são capazes de compreender como as adições e subtrações ocorrem em contextos variados e como podem ser aplicadas em situações do mundo real. A análise cuidadosa das tarefas cognitivas e procedimentos envolvidos em cada situação contribui para uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos subjacentes. Portanto, o estudo do campo conceitual das estruturas aditivas é essencial para promover uma base sólida no domínio das operações básicas e para desenvolver a fluência matemática dos alunos.

3.1.2 O Campo Conceitual Multiplicativo

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é uma área de estudo fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, caracterizado por ser um conjunto de situações matemáticas que envolvem multiplicações, divisões e suas combinações, sendo estas situações informais e heterogêneas em natureza. Essas situações requerem o uso de uma ou várias operações de multiplicação ou divisão, ou mesmo a combinação entre elas, para serem resolvidas (Vergnaud, 1993).

A relevância desse campo conceitual é destacada em nossa pesquisa, que se concentra em problemas de natureza multiplicativa. O estudo permite o desenvolvimento de habilidades essenciais de raciocínio matemático, como o pensamento proporcional na resolução de problemas. Ao analisar as tarefas matemáticas, é possível identificar padrões de pensamento dos estudantes, suas dificuldades específicas e as estratégias utilizadas para resolver os problemas.

De acordo com Vergnaud (1993), o conhecimento das estruturas multiplicativas também contribui para o aprimoramento da fluência matemática dos alunos, bem como para a compreensão de conceitos fundamentais, como fração, proporção simples e múltipla, função linear, bilinear e não linear, razão, quociente, análise dimensional, produto cartesiano, combinação, espaço vetorial, função, entre outros.

O estudo desse campo conceitual é de suma importância para a compreensão dos processos de aprendizagem e ensino da matemática, promovendo práticas educacionais mais eficazes e tornando o aprendizado mais significativo e estimulante para os alunos. Dessa forma, ele fornece ferramentas poderosas para enfrentar problemas do mundo real que envolvem quantidades e medidas numéricas, capacitando os estudantes a utilizar o pensamento matemático de forma eficaz em diversas áreas da vida e da ciência.

É importante ressaltar que as estruturas multiplicativas são profundamente diferentes das estruturas aditivas. Enquanto as estruturas aditivas envolvem relações de base ternária[6], as estruturas multiplicativas envolvem relações de base quaternária[7], pois os problemas mais simples de multiplicação e divisão implicam proporções simples entre duas variáveis, uma em relação à outra (Vergnaud, 1993). Essa distinção é essencial para compreender as características únicas do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e como ele difere do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas.

Vergnaud (2009) classifica os problemas que envolvem multiplicação e divisão em duas categorias distintas: Isomorfismo de medidas e Produto de medidas. No Isomorfismo de medidas, temos uma relação quaternária entre quatro

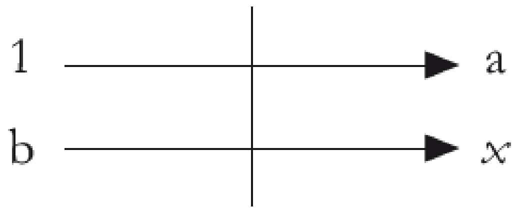
---

[6] Relações ternárias: que ligam três elementos entre si (VERGNAUD, 2009, p. 24)
[7] Relações quaternárias: que ligam quatro elementos entre si (VERGNAUD, 2009, p. 24)

quantidades, duas de um tipo e duas de outro, em que uma delas é igual a um, representando uma proporção direta entre as grandezas. Já no Produto de medidas, encontramos a combinação de duas medidas para formar uma terceira, utilizando operações de multiplicação ou divisão, representando uma relação ternária.

No Isomorfismo de medidas, Vegnaud (2009) apresenta a multiplicação como a primeira grande classe dessa categoria, sendo uma relação quaternária entre quatro quantidades.

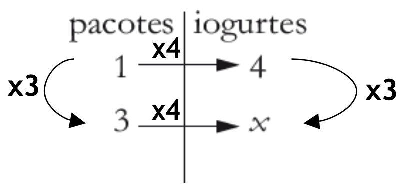
Figura 2 - Esquema multiplicativo



Fonte: Vergnaud, 2009.

Uma situação desse tipo é proposta por Vergnaud (2009, p.239): “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?”.

Figura 3 - Situação multiplicativa



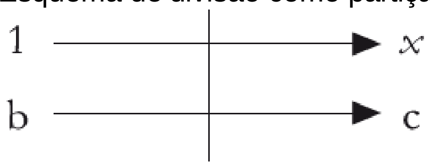
Fonte: Vergnaud, 2009.

Na situação-problema apresentada, temos uma relação quaternária proporcional simples um para muitos que envolve a multiplicação de duas medidas. De acordo com Vergnaud (2009), os números 1 e 3 representam quantidades de pacotes, que são medidas. Da mesma forma, os números 4 e x representam quantidades de iogurtes, que também são medidas, mas de outra natureza. Os operadores verticais x 3 são operadores sem dimensão, ou escalares, que permitem passar de uma linha à outra dentro da mesma categoria de medidas.

Por outro lado, os operadores horizontais x4 representam funções e expressam a passagem de uma categoria de medidas a outra, o que justifica o emprego de uma forma verbal que expressa uma relação: "iogurte por pacote = iogurte/pacote". A notação matemática “iogurte por pacote = iogurte/pacote” representa a relação proporcional entre essas grandezas, indicando que a quantidade de iogurtes por pacote é igual a quantidade total de iogurtes dividida pelo número de pacotes. Isso demonstra a relação de proporcionalidade entre as duas medidas, o que é fundamental para resolver problemas que envolvem a multiplicação de quantidades de naturezas diferentes, como é o caso dessa situação.

Segunda classe de isomorfismo de medidas – divisão (partição): busca do valor unitário. Na divisão partitiva, também conhecida como partição, o foco está no ato de repartir ou dividir quantidades de naturezas diferentes. Nesse tipo de problema, é fornecida uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que essa quantidade deve ser distribuída, sendo necessário encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos). Esse tipo de situação é representado no esquema a seguir (Vergnaud, 2009):

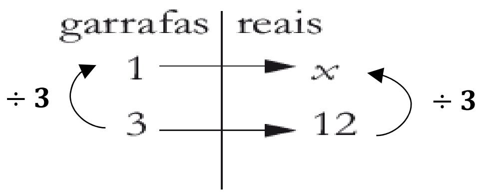
Figura 4 - Esquema de divisão como partição



Fonte: Vergnaud, 2009.

Vergnaud (2009, p. 239) apresenta a seguinte situação que envolve uma divisão partitiva: “Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?”

Figura 5 - Situação de divisão como partição



Fonte: Vergnaud, 2009.

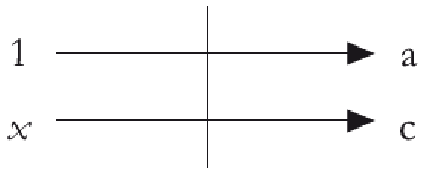
Ao resolver problemas de divisão partitiva, é fundamental entender os significados dos elementos envolvidos. O quociente encontrado representa o tamanho de cada parte, isto é, o valor unitário. O dividendo representa o todo, ou seja, o valor ou quantidade que está sendo dividido em partes iguais. E o divisor representa o número de partes em que o todo está sendo dividido.

Na situação-problema apresentada, temos uma relação proporcional quaternária, pois, conforme Vergnaud (2009, p. 241) enfatiza, “[...] é preciso encontrar o valor unitário, conhecendo-se o elo de correspondência entre duas grandezas de natureza diferente”.

Na situação-problema apresentada por Vergnaud (2009), temos uma relação proporcional quaternária envolvendo as grandezas “valor total pago pelas três garrafas de vinho” e “quantidade de garrafas de vinho compradas”. A relação é expressa por meio do operador de divisão "÷3", que permite encontrar o valor unitário de uma garrafa (representado por "x reais") ao dividir o valor total de R$ 12,00 pelas 3 garrafas. O operador "÷3" representa a passagem de 3 garrafas para 1 garrafa, enquanto o operador "x3" é o inverso, representando a passagem de 1 garrafa para 3 garrafas. Essa relação de divisão e multiplicação entre as quantidades permite determinar o preço de uma única garrafa, sendo uma estratégia importante na resolução de problemas que envolvem relações proporcionais entre grandezas de naturezas diferentes.

A terceira classe de isomorfismo de medidas - divisão (quotição) - busca da quantidade de unidades ou busca de um escalar. Na divisão quotitiva, Vergnaud (2009) esclarece que a ênfase está na ideia de dividir quantidades de mesma natureza em partes iguais ou quotas preestabelecidas. Nesse tipo de problema, é fornecida uma quantidade inicial que precisa ser dividida em partes iguais, e o objetivo é encontrar o tamanho de cada parte ou quota.

Figura 6 - Esquema de divisão como quota

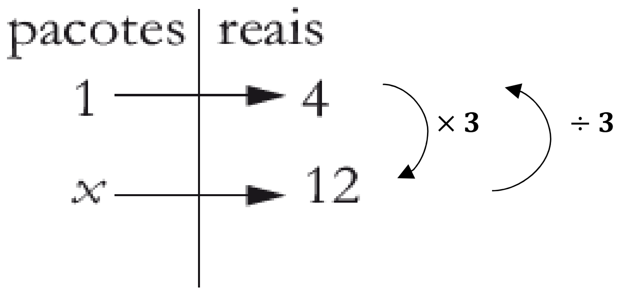


Fonte: Vergnaud, 2009.

Vergnaud (2009, p. 240) apresenta a seguinte situação: “Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?”. Nessa situação, temos uma divisão como quota, em que Pedro possui R$

12,00 e deseja comprar pacotes de bala a R$ 4,00 cada pacote. O objetivo é determinar quantos grupos se pode fazer.

Figura 7 - Situação de divisão como quota



Fonte: Vergnaud, 2009.

Na situação-problema apresentada por Vergnaud (2009), temos uma relação proporcional quaternária envolvendo as grandezas "valor total pago por 4 pacotes de iogurte" e "quantidade de pacotes de iogurte comprados". A relação é expressa por meio do operador de divisão "÷4", que permite encontrar o valor unitário de um pacote de iogurte (representado por "x reais") ao dividir o valor total de R$ 12,00 pelos 4 pacotes. O operador "÷4" representa a passagem de 4 pacotes para 1 pacote, enquanto o operador "x4" é o inverso, representando a passagem de 1 pacote para 4 pacotes, conforme demonstrado na relação horizontal da direita para a esquerda.

Essa operação de divisão "÷4" é uma função inversa da função direta "x R$ 4,00/pacotes", que permite a passagem da unidade ao valor unitário, ou seja, de um pacote ao preço de um pacote. Essas operações são fundamentais para determinar o valor unitário de um pacote de iogurte e são importantes ferramentas para resolver problemas que envolvem relações proporcionais entre grandezas de naturezas diferentes.

Em suma, o reconhecimento dos tipos de situações-problema pertencentes à categoria de Isomorfismo de Medidas é um passo crucial no processo didático do ensino de situações multiplicativas. Essa identificação é fundamental porque está diretamente ligada à primeira etapa da mediação do professor: a escolha da situação de aprendizagem que será proposta aos alunos. Ao compreender quais são as diferentes categorias de problemas multiplicativos, o professor pode selecionar tarefas matemáticas adequadas que permitam aos alunos desenvolverem suas habilidades de raciocínio, resolução de problemas e compreensão conceitual das estruturas multiplicativas.

Vergnaud (2009) define uma relação ternária entre três quantidades. Dentre essas quantidades, uma delas é o produto das outras duas, e essa relação ocorre simultaneamente no plano numérico e no plano dimensional. Duas classes de situações compõem esse eixo: configuração retangular e combinatória.

A classe de configuração retangular no eixo do produto de medida assume o significado de produto cartesiano, em que duas grandezas de mesma natureza são apresentadas, obtendo-se uma terceira grandeza por meio da multiplicação. O esquema mais natural para representar essa relação é o da tabela cartesiana, que se baseia na noção de produto cartesiano de conjuntos para explicar a estrutura do produto de medidas.

Na tabela, as grandezas são organizadas em colunas, e o resultado da multiplicação entre as quantidades correspondentes é registrado em uma terceira coluna. Essa representação visual facilita a compreensão das relações entre as grandezas envolvidas e a forma como a multiplicação atua nessa classe de problemas, permitindo uma abordagem mais eficiente na resolução dessas situações matemáticas (Vergnaud, 2009).

Fazem parte da classe combinatória as situações em que o produto cartesiano parte de dois conjuntos disjuntos, ou seja, conjuntos que não têm elementos em comum, formando as possíveis combinações que podem ser contadas. Vergnaud (2009, p. 253-254) apresenta algumas situações que ilustram o Produto de Medidas:

> Situação 1: “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz que dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?”
> situação 2: “Quer-se fabricar bandeirolas com tecido de duas cores diferentes (vermelho e azul). Fabricando-se bandeirolas de três faixas como a que está abaixo, quantas bandeirolas diferentes podem ser fabricadas?”
> situação 3: “Uma sala retangular tem 4 m de comprimento e 3 m de largura. Qual é sua área?”
> Situação 4: “Trocando somente de pulôver e de cachecol, Ana pode ter 15 trajes diferentes. Ela tem três pulôveres; quantos cachecóis ela tem?”

Situação 5: “Uma piscina tem uma superfície de 250 metros quadrados e são necessários 625 metros cúbicos de água para enchê-la. Qual é a profundidade média dela?”

As duas formas de relações multiplicativas descritas anteriormente estão inter-relacionadas, e a análise dimensional facilita essa conexão de maneira simples. Na verdade, ao utilizar um operador-função para resolver problemas da primeira forma (isomorfismo de medidas), é possível encontrar a segunda forma (produto de medidas). A análise dimensional é uma ferramenta que nos permite entender como as diferentes quantidades se relacionam e como a multiplicação pode ser aplicada para obter novas medidas a partir das relações existentes. Desse modo, ambas as formas de relações multiplicativas permitem complementar uma compreensão mais abrangente das situações matemáticas que envolvem a multiplicação (Vergnaud, 2009).

A releitura dos estudos de Vergnaud (1990; 1993; 2009) realizada por Magina, Santos e Merlini (2010) é altamente relevante, pois proporciona uma nova perspectiva sobre a teoria dos campos conceituais, focando nos problemas multiplicativos e suas classificações. Ao examinar as contribuições originais de Vergnaud, essa revisão permite aprimorar e aprofundar a compreensão desses conceitos, destacando sua aplicabilidade no contexto educacional.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é uma área importante no ensino da matemática, explorada por pesquisadores como Vergnaud (2009) e Magina, Santos e Merlini (2010). A diferença entre os estudos desses autores é que Vergnaud (2009) destaca as categorias de Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas, enquanto Magina, Santos e Merlini (2010) realizam novas reflexões e aplicações práticas no ensino e aprendizagem dos problemas multiplicativos, tornando a abordagem de Vergnaud mais acessível e significativa tanto para educadores quanto para estudantes.

Essa abordagem auxilia na compreensão das situações-problema envolvendo multiplicação e divisão, permitindo uma abordagem mais eficiente no ensino desses conceitos matemáticos. A compreensão dessas estruturas é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e sua aplicação prática em diversas situações da vida cotidiana. O estudo realizado pelos pesquisadores contribui para enriquecer o campo conceitual das estruturas multiplicativas e aprimorar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos matemáticos.

Para Magina, Santos e Merlini (2010), as relações quaternárias são compostas por três eixos principais: Proporção Simples, Proporção Dupla e Proporção Múltipla; e a relação ternária composta por dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas.

De acordo com por Magina, Santos e Merlini (2010), os três eixos da relação quaternária compreendem duas classes: um para muitos e muitos para muitos. Esses eixos podem operar com dois tipos de quantidades: discreta e contínua. Por outro lado, os eixos pertencentes à relação ternária, principalmente o de comparação multiplicativa, consistem em duas classes: A primeira é a configuração retangular, que trabalha exclusivamente com quantidade contínua. A segunda é a combinatória, que opera somente com quantidade discreta. Cada uma dessas classes possui características e propriedades específicas para lidar com os diferentes tipos de quantidades envolvidas. É possível trabalhar com ambos os tipos de quantidades: discreta e contínua.

Magina, Santos e Merlini (2010) destacam duas principais categorias de problemas multiplicativos: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Essas categorias são classificadas de acordo com as relações multiplicativas envolvidas, sendo a relação quaternária e ternária, respectivamente. No eixo de isomorfismo de medidas tem-se três categorias: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. Por outro lado, no eixo de produto de medidas, proposto originalmente por Vergnaud (2009), são explorados problemas que envolvem a multiplicação de quantidades de mesma natureza.

Além disso, Magina, Santos e Merlini (2010) introduzem um novo eixo denominado "comparação multiplicativa", que também se enquadra na relação ternária de problemas multiplicativos. Esse estudo dos autores contribui para uma melhor compreensão e classificação dos problemas multiplicativos e fornece uma base sólida para sua aplicação no contexto educacional.

Nas Estruturas Multiplicativas exploradas por Vergnaud (2009), além das categorias fundamentais de Isomorfismo de Medidas e Produto de Medidas, existem outros conceitos importantes que são explicados por Filho, Santana e Lautert (2017).

Proporção simples: há uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo apenas quatro quantidades. Essas situações proporcionais podem ser representadas pela função f(x) = ax, em que a é o coeficiente angular da função. A Proporção Simples é composta por duas classes de situações: um para muitos e muitos para muitos. Nesses casos, a variação de uma grandeza está diretamente relacionada à variação da outra grandeza de maneira proporcional (Filho; Santana; Lautert, 2017).

Proporção simples um para muitos: A classe "um para muitos" se refere a uma relação em que uma unidade de uma grandeza está associada a várias unidades de outra grandeza. Isso significa que uma unidade de medida em uma das grandezas está relacionada a múltiplas unidades na outra grandeza por meio de uma operação de multiplicação (Filho; Santana; Lautert, 2017).

Situação: um pacote de biscoitos contém 6 unidades de biscoitos, e você deseja calcular quantas unidades de biscoitos existem em 3 pacotes. Nessa situação, a relação é "um para muitos", em que cada pacote de biscoitos (uma unidade) está relacionado a várias unidades de biscoitos (no caso, 6 unidades por pacote), resultando em um total de 18 unidades de biscoitos para os 3 pacotes.

Proporção simples muitos para muitos: A classe "um para muitos" é uma situação mais complexa em comparação com problemas de proporção simples. Nessa classe, a relação envolve uma unidade de uma grandeza que está associada a várias unidades da outra grandeza, de forma que o cálculo envolve a multiplicação ou divisão para encontrar o valor total (Filho; Santana; Lautert, 2017).

Para este caso, temos a seguinte situação-problema: um pacote de biscoitos custa R$ 5,00, e você deseja calcular o custo de 3 pacotes. Nessa situação, a relação é "um para muitos", estando cada pacote de biscoitos (uma unidade) está relacionado a vários pacotes (no caso, 3 pacotes), e é necessário usar a multiplicação (5 x 3) para obter o valor total de R$ 15,00.

Essa classe de problemas requer o uso do operador escalar (a quantidade de unidades de uma grandeza) e do operador funcional (a multiplicação ou divisão) para resolver a situação e encontrar a resposta final. É uma etapa avançada no campo conceitual das estruturas multiplicativas e exige uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

Proporção dupla: Nas situações de proporção dupla, há mais de duas grandezas relacionadas duas a duas, formando uma relação proporcional entre quatro quantidades. Essa situação pode ser expressa por uma função bilinear ou n-linear, ou seja, uma função de n variáveis. Um exemplo disso é a função f(x, y) = xy, sendo que 'x' representa a quantidade de pessoas e 'y' a quantidade de dias. Nesse caso, a relação é proporcional, e a função bilinear descreve como o número de pessoas e o número de dias estão relacionados, de modo que a quantidade total é dada pelo produto de 'x' e 'y' (Filho; Santana; Lautert, 2017).

Situação: “uma pessoa consome, a cada sete dias, 850g de carne. Quantas gramas de carne serão consumidas por uma família de quatro pessoas, em 21 dias?” De acordo com Filho, Santana, Lautert (2017), essas situações de proporção dupla são mais complexas do que as de proporção simples, envolvendo mais variáveis e exigindo um entendimento mais avançado dos conceitos matemáticos.

Proporção múltipla: As situações de proporção múltipla podem ser entendidas como uma composição de funções. No exemplo em questão, temos $f(x) = 8x$ e $g(x) = 3x$. Assim, em termos funcionais, temos: fog ou $f(g(x)) = 8 * 3x \rightarrow f(g(x)) = 24x$. Embora seja possível verificar a existência da função composta em situações de proporção múltipla, recomenda-se que, inicialmente, não se dê ênfase na representação algébrica, mas sim na compreensão das relações (Filho; Santana; Lautert, 2017).

Situação: “Em duas caixas iguais, cabem 16 vasos idênticos de flores, totalizando flores. Quantas flores há em uma caixa?”.

Após discorrer sobre os três eixos da Relação Quaternária, discutiremos a seguir somente sobre o eixo da Relação Ternária - Comparação multiplicativa, pois o eixo Produto de Medidas já foi abordado anteriormente.

Neste eixo da Relação Ternária - Comparação Multiplicativa, as situações matemáticas envolvem três grandezas relacionadas de forma multiplicativa. É uma classe de problemas em que são comparadas quantidades através da multiplicação, em vez de adição ou subtração.

As situações apresentadas por Magina, Santos e Merlini (2010) ilustram as duas classes da Relação Ternária - Comparação Multiplicativa:

Relação desconhecida: “Pergunta: Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?". Nesta situação, o referente é o preço da boneca (R$ 21,00) e o referido é o preço da bola (R$ 3,00). O problema requer o cálculo da relação existente entre esses dois valores, ou seja, quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola.

Referido desconhecido: “Pergunta: A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?". Nesta situação, já conhecemos o referente, que é a idade de Paulo (30 anos), e a relação, que é 5 vezes maior que a idade do filho. O problema solicita calcular o referido desconhecido, em outras palavras, a idade do filho.

O campo conceitual multiplicativo, de acordo com a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1996), abrange as relações proporcionais entre grandezas, como multiplicação, divisão, proporção e razão. Ele oferece aos estudantes a oportunidade de desenvolver habilidades de raciocínio proporcional e resolução de problemas, por meio da aplicação dessas relações em diferentes contextos. A classificação das situações multiplicativas em relações ternárias e quaternárias ajuda a identificar padrões e regularidades, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos. O estudo desse campo possibilita aos estudantes a construção de um conhecimento matemático sólido e significativo, preparando-os para desafios futuros em matemática e em outras áreas relacionadas.

No próximo capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa e o caminho metodológico que será seguido para atingir o objetivo desta pesquisa na formação dos conceitos de razão e proporção na perspectiva da resolução de problemas.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA

O objetivo deste capítulo é discorrer sobre a metodologia de pesquisa adotada para este trabalho e os procedimentos metodológicos.

4.1 DESIGN RESEARCH

Neste estudo, adotamos o Design Science Research (DSR), também conhecido como Design Research, como guia para nossa investigação. Essa metodologia tem como propósito “[...] projetar e desenvolver artefatos, bem como soluções prescritivas, seja em um ambiente real ou não” (Dresch; Lacerda; Antunes Júnior, 2015, p. 95).

Nos anos 90, uma nova metodologia começou a se destacar no campo das ciências da aprendizagem: a Design Research (Pesquisa em Design). Impulsionada por ideias provenientes das ciências do artificial, que serviam como base científica para a tradição da engenharia, essa abordagem de pesquisa baseada em design começou a ser delineada nos trabalhos iniciais de Brown (1992) e Collins (1992). Concordando com essa perspectiva, Molina, Castro e Castro (2007) afirmam que a Design Research representa um novo paradigma metodológico ao ser aplicado e desenvolvido em pesquisas educacionais, com foco qualitativo, principalmente dentro das ciências da aprendizagem.

Para Brown (1992), a principal motivação por trás da Design Research era a busca por compreender os mecanismos da aprendizagem que se desenrolavam no ambiente vibrante e complexo das salas de aula. Essa investigação inovadora representou um importante marco no campo da educação, desafiando a tradição dominante da pesquisa experimental.

Ao contrário das abordagens experimentais tradicionais, que muitas vezes falhavam em criar ambientes de aprendizagem inovadores, a Design Research propôs uma abordagem mais abrangente e contextualizada. Conforme apontado por Prediger, Gravemeijer e Confrey (2015), as teorias existentes muitas vezes não ofereciam suporte adequado para o desenvolvimento desses ambientes, e os métodos de design educacional convencionais não eram eficazes em sua aplicação.

Gravemeijer e Cobb (2006) argumentaram que a pesquisa baseada em design tem um papel fundamental na superação do fosso existente entre teoria e prática educacional. Isso se deve ao fato de que, nesse tipo de pesquisa, o conhecimento científico, que é construído sobre a experiência profissional, oferece também heurísticas que podem enriquecer e fortalecer a prática profissional.

Nesse contexto da Design Research, Cobb *et al*. (2003, p. 9) afirmam que as experiências realizadas visam obter um maior entendimento sobre uma ecologia de aprendizagem, definida como um sistema complexo e interativo que envolve múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Através da concepção desses elementos e da antecipação de como eles funcionam em conjunto para apoiar a aprendizagem, busca-se alcançar esse entendimento. Assim, os elementos de uma ecologia de aprendizagem geralmente incluem as tarefas e problemas propostos aos alunos, os tipos de discurso incentivados, as normas de participação estabelecidas, as ferramentas e recursos materiais disponibilizados e os processos pelos quais os professores podem coordenar as interações entre esses elementos na sala de aula.

De acordo com Molina, Castro e Castro (2007), a investigação baseada em design proporciona uma compreensão mais profunda dos contextos de aprendizagem ao projetar seus elementos e prever como eles atuarão em conjunto para favorecer o aprendizado. Além de desenvolver designs que se encaixem para determinados tipos de aprendizagem, os estudos de design explicam os motivos pelos quais um design funciona e sugerem formas de adaptá-lo a novas situações.

A Design Research, ou Investigação Baseada no Design (IBD), no contexto educacional, compartilha várias características e princípios fundamentais que reforçam sua utilidade e aplicação prática na melhoria dos processos de ensino-aprendizagem, conforme descrito por Molina, Castro e Castro (2007) e Cobb, Jackson e Dunlap (2016).

- Foco no Processo de Ensino-Aprendizagem: A IBD coloca o processo de ensino-aprendizagem no centro das atenções, registrando-o minuciosamente para uma análise profunda (Molina; Castro; Castro, 2007). De forma semelhante, Cobb, Jackson e Dunlap (2016) enfatizam que a IBD incide sobre problemas enfrentados pelos profissionais de ensino, com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos.
- Participação Ativa do Professor: É essencial que um dos participantes da pesquisa assuma o papel de professor, engajando-se ativamente em todas as etapas da investigação (Molina; Castro; Castro, 2007). Essa abordagem prática é também refletida por Cobb, Jackson e Dunlap

(2016), que ressaltam a natureza intervencionista da IBD, transformando processos de ensino em tempo real.

- Flexibilidade para Diversos Contextos: A flexibilidade da IBD permite que ela se adapte a diferentes contextos da vida real, destacando sua versatilidade e relevância em diferentes ambientes educacionais (Molina; Castro; Castro, 2007). Cobb, Jackson e Dunlap (2016) também reconhecem essa flexibilidade, indicando que a IBD pode ser aplicada em uma variedade de situações e ambientes educacionais.
- Teorias Simples e Úteis: As teorias desenvolvidas pela IBD são simples e específicas, facilitando a identificação de padrões e regularidades (Molina; Castro; Castro, 2007). Da mesma forma, Cobb, Jackson e Dunlap (2016) mencionam que a IBD possui uma base teórica robusta e pragmática, ajudando a explicar e adaptar os designs para novos contextos.
- Análise Rigorosa e Constante Revisão: A análise rigorosa dos dados e a revisão constante são características fundamentais da IBD (Molina; Castro; Castro, 2007). Esta abordagem é paralela à de Cobb, Jackson e Dunlap (2016), que envolvem testar, revisar ou rejeitar conjeturas sobre os processos de aprendizagem, assegurando que a investigação seja precisa e relevante.
- Análise Preliminar e Retrospectiva (final): A IBD se caracteriza pela realização de duas análises de dados: uma preliminar após cada ciclo do processo e uma final retrospectiva, que considera todo o conjunto de dados coletados, garantindo uma compreensão abrangente e detalhada dos resultados (Molina; Castro; Castro, 2007). Cobb, Jackson e Dunlap (2016) também enfatizam a preocupação teórica com a generalização e validação dos resultados ao longo do estudo.

Em linhas gerais, tanto Molina, Castro e Castro (2007) quanto Cobb, Jackson e Dunlap (2016) destacam que a Investigação Baseada em Design combina uma orientação teórica e pragmática. Teoricamente, testa e revisa conjecturas sobre os processos de aprendizagem e os meios para sustentá-los, resultando em uma teoria que justifica o design. Na pragmática (ou na prática), investiga e melhora designs para apoiar a aprendizagem. Assim, a IBD se estabelece como uma abordagem metodológica que permite elaborar, desenvolver e aperfeiçoar experimentos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem, embasada em rigor científico e aplicação prática.

Na modalidade de experiência de ensino, Molina, Castro e Castro (2007) e Cobb *et al*. (2003) descrevem que as pesquisas baseadas em design envolvem três etapas principais: (1) preparação da experiência, (2) experimentação (ou execução) em sala de aula e (3) condução da análise retrospectiva.

Na etapa de preparação da experiência, Molina, Castro e Castro (2007) explicam que a proposta de ensino é desenhada levando em conta as informações obtidas dos estudos revisados. De maneira semelhante, Cobb *et al*. (2003) indicam que a preparação de uma IBD envolve clarificar a intenção teórica, definir os objetivos de aprendizagem e especificar os pontos de partida intelectuais e sociais para as formas de aprendizagem pretendidas. Ambas as abordagens destacam a importância de uma preparação teórica e metodológica sólida, incorporando informações e pressupostos teóricos para desenhar a proposta de ensino.

A etapa da experimentação (ou execução) em sala de aula, segundo Molina, Castro e Castro (2007), envolve a aplicação da proposta de ensino pelo pesquisador, testando a eficácia do design. Similarmente, Cobb *et al*. (2003) ressaltam que a realização de uma experiência de design requer uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem, manutenção de meios de suporte potenciais e uma relação de trabalho positiva com os atores no terreno. Eles também enfatizam a importância de momentos de reflexão regulares durante a experimentação.

Na etapa da condução da análise retrospectiva, Molina, Castro e Castro (2007) propõem examinar os dados coletados durante a experimentação, confrontando-os e validando-os para atingir os objetivos da pesquisa. Esta análise pode ocorrer tanto de forma parcial, ao longo do processo, quanto de forma geral, ao final da pesquisa. Cobb *et al*. (2003) destacam que a análise retrospectiva tem como objetivo situar a experiência de design em um contexto teórico mais amplo, considerando-a um caso paradigmático de um fenômeno maior.

De acordo com Sandoval e Bell (2004), as pesquisas baseadas na Design Research têm como objetivos desenvolver ambientes de aprendizagem eficazes e usar tais ambientes como laboratórios naturais para estudar a aprendizagem e o ensino. Nesse sentido, a abordagem metodológica da Design Research é uma forte aliada para alcançar os objetivos da nossa pesquisa, tendo em vista o objetivo de experimentar em sala de aula se uma metodologia de ensino ajuda o aluno a aprender o conteúdo de proporcionalidade através da resolução de problemas. Portanto, diante dessa experimentação de ensino que entendemos que as etapas da Design Research, como experimento de ensino, se conectam com o passo a passo da nossa pesquisa.

Para a análise de dados, utilizaremos as etapas de análise de conteúdos de Bardin (2011), que se constitui em um método de pesquisa qualitativa que visa uma análise sistemática e objetiva do conteúdo das mensagens, sejam elas textos escritos, entrevistas, discursos, imagens, vídeos ou outras formas de comunicação.

Com esse método, é possível extrair informações relevantes, identificar padrões, interpretar significados e entender os contextos em que as mensagens foram escritas. De acordo com Bardin (2011), o processo de análise de conteúdo passa por três etapas principais, identificadas como pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, inferência e a interpretação.

Para Bardin (2011), a pré-análise consiste na etapa inicial que envolve a preparação e o planejamento da análise de conteúdo. Durante essa etapa, o pesquisador define os objetivos do estudo, fórmula as questões de pesquisa que deseja responder e seleciona o material que será analisado. Além disso, é necessário estabelecer as unidades de análise, que são as partes ou elementos do conteúdo que serão examinados. É essencial realizar uma revisão bibliográfica sobre o tema de estudo, a fim de embasar teoricamente a pesquisa e conhecer as abordagens anteriores na área. Isso auxilia na definição das categorias de análise, que são os critérios ou temas pelos quais o conteúdo será organizado e interpretado.

Após a conclusão da pré-análise, o pesquisador ingressa na segunda etapa que é a da exploração do material de forma aprofundada. Segundo Bardin (2011), essa exploração aprofundada pode envolver a leitura atenta de textos, a observação detalhada de imagens ou vídeos, ou qualquer outra forma de acesso ao conteúdo. O propósito dessa etapa é identificar informações pertinentes, destacar passagens significativas e fazer anotações preliminares que sirvam como guia para as etapas subsequentes do processo de análise.

Bardin (2011) ressalta que a exploração do material não se trata apenas de uma leitura superficial, mas sim de uma abordagem atenta e reflexiva. O pesquisador busca captar nuances, interpretações e possíveis conexões entre os elementos encontrados, a fim de fundamentar as etapas posteriores da análise de conteúdo. As anotações preliminares realizadas durante essa fase servirão como base para a codificação e categorização do conteúdo nas etapas seguintes.

A terceira e última etapa, por sua vez, que consiste no tratamento dos resultados, inferência e interpretação, é de suma importância na análise de conteúdo. Nesse estágio, Bardin (2011) define que o pesquisador realiza o processo de codificação do material, que consiste em atribuir categorias pré-definidas ou emergentes às unidades de análise identificadas. Após a codificação, ocorre a classificação e o agrupamento dessas unidades de acordo com as categorias estabelecidas.

Nesse sentido, considera-se que as três etapas cronológicas mencionadas na análise de conteúdo de Bardin (2011) são interligadas e complementares. A pré-análise é o ponto de partida, fornecendo direcionamento e estrutura para a análise. A exploração do material aprofunda o conhecimento dos dados, enquanto o tratamento dos resultados, inferência e interpretação representa o cerne da análise, em que os significados do conteúdo são compreendidos e interpretados.

4.2 O CAMINHO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Para atingir o objetivo geral da pesquisa, que é verificar se uma proposta de ensino utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas contribui para a aprendizagem das ideias de razão e proporção dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, seguimos as três etapas da Design Research proposto por Cobb *et al*. (2003) e Molina, Castro e Castro (2007), definida pela elaboração de uma proposta de experimentação em sala de aula destinada aos alunos, aplicação da proposta e análise preliminar e retrospectiva dos dados, com intuito de promover o desenvolvimento pensamento proporcional dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

4.2.1 As etapas da pesquisa

Como ponto de partida, realizamos uma revisão de estudos referente ao tema do ensino e aprendizagem de razão e proporção para alunos da Educação Básica, bem como o desenvolvimento do seu pensamento proporcional, com intuito de conhecer o que já havia sido produzido nesse tema. A partir da revisão de estudos sobre o ensino de razão e proporção e da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, foi desenhada uma proposta de ensino que teve por objetivo promover a aprendizagem dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em razão e proporção.

Na segunda etapa da pesquisa, que é a fase da elaboração do experimento, foram desenvolvidos os instrumentos de coleta de dados. Estes incluíram um questionário para estudante (Apêndice A) com questões abertas e fechadas para avaliar a afinidade dos alunos com a matemática, e planejada uma proposta de ensino que, inicialmente, consistia em nove problemas geradores relacionados ao conteúdo de razão e proporção seguidos por atividades de aprofundamento, distribuídas em sete encontros de 90 minutos cada.

No entanto, durante o período de 04/08/2023 a 08/09/2023, a pesquisa não pôde ser realizada, pois os alunos estavam envolvidos na programação da semana dos jogos intercolegiais. Devido a essa interrupção, foi necessário replanejar as atividades propostas, sem comprometer o rigor da pesquisa. Assim, a nova programação passou a incluir apenas quatro problemas geradores, seguidos por atividades de aprofundamento e uma atividade de revisão, distribuídas em nove encontros. O tempo desses encontros variou entre 45 e 90 minutos.

Para o desenvolvimento das atividades de ensino em sala de aula, foram seguidas as etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas descritas por Alevatto e Onuchic (2021), que são: (1) Proposição do problema gerador; (2) Leitura individual, em que o aluno recorre aos conhecimentos prévios; (3) Em pequenos grupos, alunos discutem e aprimoram compreensões; (4) Alunos em grupos, resolvem o problema; (5) Observação e incentivo por parte do professor; (6) Apresentação das resoluções pelos alunos; (7) Discussão das ideias e concepções em plenária, envolvendo professor e alunos; (8) Busca de consenso sobre as resoluções; (9) Formalização do conteúdo matemático pelo professor; e (10) Proposição e resolução de novos problemas.

Na proposta de pesquisa, utilizamos problemas de razão e proporção, conteúdos que fazem parte do Campo Conceitual Multiplicativo. Os problemas selecionados envolvem relações denominadas quaternárias e são divididos em problemas de proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. De acordo com Vergnaud (2009), as proporções simples são compostas por duas classes de situações: um para muitos e muitos para muitos. Devido à interrupção ocorrida durante a pesquisa, é importante ressaltar que os problemas relacionados à proporção dupla e múltipla não foram abordados. Dessa forma, a pesquisa concentrou-se em problemas de proporções simples, como um para muitos, muitos para muitos e na proporção inversa.

Nesse sentido, os problemas de proporção simples de muitos para muitos tiveram como objetivo fazer com que os alunos avançassem na compreensão de situações de proporção simples mais complexas, pois este tipo de proporção apresentava um grau de dificuldade maior quando comparado com problemas de proporção simples um para muitos. Logo, os alunos precisaram saber reconhecer que neste tipo de problema há uma relação entre duas grandezas, sendo que dentro da mesma situação se mantém constante.

Além disso, para efeito de aprofundamento de estudo, foram apresentados aos alunos problemas de proporção simples inversa para contribuir com sua aprendizagem. Por último, foram apresentados aos alunos o pós-teste do processo de investigação dos problemas. Estes problemas tinham como objetivo verificar o que os alunos conseguiram compreender, bem como verificar por meio dos esquemas de resolução a presença de estruturas multiplicativas, apontando assim para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Na terceira etapa da pesquisa, que corresponde à fase de experimentação em sala de aula, foram aplicados os instrumentos de coleta de dados. Inicialmente, no primeiro encontro, aplicou-se um teste diagnóstico denominado pré-teste (Apêndice B), composto por questões sobre razão e proporção, com o objetivo de avaliar o conhecimento inicial dos alunos sobre pensamento proporcional. Nos encontros subsequentes, os alunos resolveram as atividades da proposta de ensino. Ao final do experimento, foi aplicado um segundo teste diagnóstico, denominado pós-teste (Apêndice B), para avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da pesquisa.

Antes da aplicação do experimento de ensino, o projeto da proposta de ensino foi devidamente apresentado ao professor da turma e à direção da escola. Após a análise, a direção concedeu autorização formal, mediante a assinatura do Termo de Autorização (Apêndice E), o que permitiu o avanço para a próxima etapa. Além disso, um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) foi enviado aos pais dos alunos, solicitando a permissão para que seus filhos participassem da pesquisa (Apêndice F).

Na quarta etapa da pesquisa ocorreu a análise retrospectiva dos dados coletados e a discussão dos resultados seguindo as etapas da análise de conteúdo de Bardin (2011), na qual foram criadas as categorias de análise. Outrossim, na coleta do material de pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos: questionários, testes, fotografias, gravações em áudio, registros escritos pelos alunos e um diário de campo.

O questionário, segundo Gil (1999), pode ser definido como uma técnica de pesquisa que apresentava por escrito um número considerável de questões, cujo objetivo era obter opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, entre outros.

Outro instrumento foi um teste diagnóstico que nos permitiu verificar os conhecimentos prévios dos alunos relacionados aos conteúdos de razão e proporção. Segundo Carvalho e Giordano (2019), o teste diagnóstico pode ser definido como um instrumento construído com a finalidade de conhecer o ponto inicial de uma turma, permitindo coletar informações para percorrer o caminho mais adequado para atingir as metas do ano letivo. Em nossa pesquisa, o teste também serviu para verificar os conhecimentos adquiridos ao final da proposta de ensino, em que fora feita a comparação dos resultados do pré e pós-teste. O teste foi composto por seis problemas de proporção que envolviam situações do tipo de proporção simples de um para muitos, muitos para muitos, proporção dupla, múltipla e inversa.

As fotos e gravações de áudio foram realizadas durante o momento em que os alunos resolveram as tarefas propostas, para podermos captar suas hipóteses, argumentações e decisões na resolução dos problemas.

Por último, destaca-se a importância do diário de campo, que serviu como um importante instrumento para o pesquisador registrar informações relevantes. Este recurso permitiu a revisão das anotações no momento oportuno. Segundo Leal (2016), sem o uso do diário, muitas informações poderiam se perder ao confiar exclusivamente na memória. Assim, foi essencial ter o diário de campo em mãos durante a observação dos sujeitos da pesquisa, pois a memória, em determinados momentos, falhava diante dos inúmeros e surpreendentes detalhes observados.

4.2.2. Análise prospectiva das atividades do experimento de ensino

Dentre os nove encontros realizados na pesquisa, quatro deles foram destinados à realização das atividades do experimento de ensino, que consistiu na aplicação à turma dos 4 problemas geradores, seguindo as etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas descritas por Alevatto e Onuchic (2021); enquanto que cinco encontros foram destinados à aplicação do questionário, pré e pós-teste, atividades de aprofundamento e à revisão final com a turma sobre o tema.

Nesse sentido, seguindo as orientações da Design Research, apresentamos uma análise prospectiva das atividades do experimento de ensino. A primeira atividade de ensino do experimento com a turma foi realizada durante o segundo encontro da pesquisa, com o foco na resolução do problema, como mostra o Quadro 4.

Quadro 4 - Descrição do problema.

Problema gerador 1: Susi e Julie estavam correndo com a mesma velocidade ao redor de uma trilha. Susi começou primeiro. Quando Susi completou 9 voltas, Julie completou 3 voltas. Quando Julie completou 15 voltas, quantas voltas Susi completou?

Fonte: Van de Walle (2009).

Essa primeira atividade de ensino teve como objetivo apresentar aos alunos a diferença entre o pensamento aditivo e o multiplicativo por meio da resolução do problema. Essa atividade foi acessível aos alunos e permitiu que eles mobilizassem seus conhecimentos matemáticos, desenvolvendo estratégias de resolução adequadas ao enunciado do problema.

Esperava-se que os alunos utilizassem mais frequentemente o pensamento aditivo em vez do multiplicativo na exploração do problema, o que de fato ocorreu. Durante a formalização do conteúdo, abordamos os conceitos envolvidos no pensamento aditivo e do pensamento multiplicativo, destacando suas diferenças em relação ao pensamento multiplicativo.

A segunda atividade de ensino do experimento foi realizada no terceiro encontro da pesquisa, com o foco na resolução do problema gerador, como mostra o Quadro 5.

Quadro 5 - Descrição do problema gerador.

Problema gerador 2: Há duas semanas, duas plantas foram medidas e tinham 8 cm e 12 cm, respectivamente. Hoje estão com 11 cm e 15 cm. Quem cresceu mais, a planta de 8 cm ou a de 12 cm?

Fonte: Van de Walle (2009).

Essa segunda atividade de ensino teve como objetivo introduzir a ideia da razão e do pensamento multiplicativo através da resolução do problema gerador. Essa atividade exigiu mais dos conhecimentos dos alunos, pois o problema não apenas tratou dos conceitos de pensamento multiplicativo e dos conceitos envolvidos na idéia da razão, mas também os desafiou diante da situação apresentada, estimulando-os a pensar de forma proporcional, mesmo que ainda não dominassem completamente essa habilidade do pensamento matemático.

Após a segunda atividade de ensino do experimento, tivemos que suspender temporariamente as atividades de pesquisa pelo fato de que ocorreu a programação da semana dos jogos intercolegiais de que os alunos da escola estavam participando, no período de 04/08/2023 a 08/09/2023. Para evitar a quebra de aprendizado por meio do experimento de ensino em razão do intervalo de uma semana sem aula, retomamos a pesquisa revisando a ideia de razão e mostrando a diferença do pensamento aditivo e multiplicativo por meio da primeira atividade aprofundamento, em 11/09/2023, com o foco na resolução do problema proposto ocorrido no quarto encontro, como mostra no Quadro 6.

Quadro 6 - Descrição do problema proposto.

A lagarta A tem 6 cm de comprimento e a lagarta B tem 4 cm de comprimento. a) Quanto a lagarta A é maior que a lagarta B? b) Quantas vezes a lagarta A é mais longa que a lagarta B?

Fonte: Adaptado pelos autores.

A primeira atividade de aprofundamento teve como objetivo revisar conceitos prévios sobre razão e diferenciar entre pensamento aditivo e multiplicativo. Esses conteúdos foram trabalhados no segundo e terceiro encontros por meio da resolução dos problemas geradores 1 e 2.

Essa primeira atividade de aprofundamento apresentou um desafio aos alunos, pois exigiu que eles mobilizassem seus conhecimentos matemáticos para resolver a situação proposta no problema. Dessa forma, a atividade estimulou os alunos a começarem a pensar de forma proporcional, interagindo com o pensamento multiplicativo e os conceitos envolvidos na ideia de razão.

A quarta atividade de ensino do experimento ocorreu durante o quinto encontro da pesquisa, com o foco na resolução do problema gerador, como mostra no Quadro 7.

Quadro 7 - Descrição do problema gerador.

Problema gerador 3 - Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas para cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas?

Fonte: Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010).

A quarta atividade de ensino teve como objetivo fortalecer o pensamento multiplicativo dos alunos e desenvolver a compreensão da ideia de proporção simples. Por intermédio do problema gerador, foi reforçado o significado do conceito de grandeza e reiterada a importância da razão, explicando o conceito de proporção. Dessa forma, os alunos puderam compreender a relação proporcional entre as quantidades da grandeza envolvida no problema.

A segunda atividade de aprofundamento ocorreu durante o sexto encontro da pesquisa, que teve como objetivo desenvolver o pensamento multiplicativo dos alunos e aplicar o conceito de proporção simples. A atividade consistiu na resolução de seis problemas práticos envolvendo proporção simples. Esses problemas foram elaborados para exercitar o conhecimento adquirido sobre proporção, permitindo que os alunos praticassem e aprofundassem seus entendimentos. Isso possibilitou o avanço na compreensão, a inferência, e a acomodação pelo pensamento multiplicativo, ao mesmo tempo em que esclareciam dúvidas pendentes. A seguir, são apresentadas as descrições dos problemas propostos aos alunos:

1- Pedro comprou um saco com 20 bombons. Se ele comprasse 5 sacos quantos bombons teria?
2- Um pacote de biscoito de maisena custa R$ 5,00. Quanto terei que pagar por três pacotes?
3- Na festa de aniversário de Anita, teremos 36 convidados. Em cada uma das mesas ficarão 4 convidados. Quantas mesas serão necessárias?
4- Carla lê uma página do livro em 5 minutos. Quantos minutos gastaria para ler 6 páginas?
5- Para fazer 3 vestidos são necessários 5m de tecido. Rosana tem 35m de tecido. Quantas vestidos ela pode fazer?
6- Caio foi ao supermercado e comprou 9 caixas de suco e pagou R$ 36,00. Se ele comprasse 3 caixas de suco, quanto em reais ele precisaria pagar?

Colocamos cada problema no quadro para garantir que todos pudessem vê-los claramente. Também conduzimos uma leitura coletiva de cada problema com a turma para auxiliá-los na interpretação. Após isso, os alunos foram divididos em grupos e receberam cerca de 10 minutos para ler, compreender e resolver cada problema proposto.

A quinta atividade de ensino do experimento ocorreu durante o sétimo encontro da pesquisa, com o foco na resolução do problema gerador, como mostra no Quadro 8.

Quadro 8 - Descrição do problema gerador.

Problema gerador 4 - Três alunos levaram 6 horas para arrumar a quadra da escola para a festa junina. Se aumentar o número de alunos para 9, quantas horas levará?

Fonte: Adaptado pelos autores.

.

A quinta atividade de ensino teve como objetivo introduzir a ideia de proporção inversa simples. Partindo da noção do conceito de proporção direta, que foi trabalhado com os alunos no quinto e sexto encontro, os alunos puderam compreender a relação inversamente proporcional entre as quantidades da grandeza envolvida no problema gerador.

No oitavo encontro da pesquisa, realizamos uma revisão dos conteúdos trabalhados propondo novos problema para os alunos resolverem. Finalmente, no nono encontro realizamos o pós-teste, que teve por objetivo avaliar as aprendizagens dos alunos durante as atividades da pesquisa.

4.2.3 Conhecendo o Local da pesquisa

A proposta de ensino desenhada foi aplicada no segundo semestre de 2023, em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belém/PA, que abriga 17 turmas, distribuídas entre os turnos da manhã e tarde. A instituição escolar oferece Ensino Fundamental menor (1º ao 5º ano) e maior (6º ao 9º ano), atendendo a aproximadamente 464 alunos em 2023, com apenas 12 transferências registradas.

A escola dispõe de uma diretoria, uma equipe técnica e pedagógica e auxiliares administrativos, além de uma equipe de serventes e porteiros. Quanto ao quadro de professores, a escola é atendida por 33 professores, sendo 5 professores atendem o fundamental menor e 28 professores atendem o fundamental maior. Dentre esses professores, 2 professores são da área da matemática, ambos atuam no 7º ano nos turnos da manhã e tarde. Quanto ao fundamental maior, a escola dispõe de 3 turmas do 6º ano, 3 turmas são do 7º ano, 3 turmas são do 8º ano e 3 turmas são do 9º ano, as quais são distribuídas nos turnos da manhã e tarde. A infraestrutura da escola é considerada regular, contando com uma quadra de esportes descoberta e refeitório. A escolha por essa escola foi devido a orientadora da pesquisa desenvolver projetos nesse local e ter boas relações com o professor da turma e com a coordenação da escola, possibilitando nosso acesso sem maiores dificuldades.

A escola desenvolve ações socioeducacionais que têm apresentado resultados positivos no processo de ensino-aprendizagem, especialmente ao lidar com as lacunas e dificuldades enfrentadas pelos alunos decorrentes do período restritivo da pandemia de Covid-19. A gestão escolar, em colaboração com os professores, desenvolve atividades pedagógicas focadas nas defasagens percebidas, contribuindo para melhorar o desempenho dos alunos de acordo com o currículo do ano letivo. A direção destaca a implementação de grupos de WhatsApp específicos para cada turma, facilitando a comunicação entre professores, pais e responsáveis.

Essa plataforma tem sido utilizada para postar atividades, comunicados e agendar reuniões, proporcionando um canal eficaz para discutir o desempenho individual de cada aluno. Essa abordagem tem promovido o envolvimento ativo dos pais, incentivando, monitorando e auxiliando os alunos em suas atividades extraclasse.

4.2.4 Descrição dos sujeitos da pesquisa

No primeiro encontro, que ocorreu em 29/08/2023, foram apresentadas à turma do (7º ano^{2})[8], duas atividades de pesquisa. A primeira consistia em um questionário para caracterizar os participantes da pesquisa (Apêndice A), enquanto a segunda era um pré-teste de natureza de sondagem em relação ao conhecimento matemático (Apêndice B). Essas atividades foram conduzidas em uma única aula de 40 minutos, com um tempo estimado de 5 a 10 minutos para a resposta do questionário e de 20 a 30 minutos para o pré-teste. A seguir, detalharemos o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula.

[8] Turma selecionada pela direção escolar e professor responsável.

Imagem 1 - Turma do 7º ano respondendo o questionário e o pré-teste.

Fonte: Acervo pessoal (2023).

4.2.4.1 Dados coletados do questionário

O questionário do estudante foi composto por dez perguntas destinadas à caracterização dos participantes da pesquisa. Algumas dessas perguntas solicitavam respostas abertas, enquanto outras eram de natureza fechada. O objetivo era investigar aspectos como gênero, idade e o grau de afinidade dos alunos com a matemática. A finalidade era alcançar uma caracterização mais abrangente dos estudantes e aprofundar a compreensão de seu interesse pelo conhecimento matemático. A turma do 7º ano[2] selecionada é composta por 25 alunos, entretanto, apenas 22 deles compareceram à aula e responderam ao questionário. A seguir, são apresentados os resultados obtidos do questionário.

A Tabela 1 apresenta a distribuição quantitativa e percentual sobre as idades dos sujeitos da pesquisa.

Tabela 1 - Idade dos alunos participantes.

Idade	Quantitativo	Porcentagem
11	3	13,6%
12	9	40,9%
13	10	45,5%
Maiores de 13	-	-
Total	**22**	**100%**

Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

Em relação à idade, observamos que a totalidade dos alunos que participaram da pesquisa está dentro da faixa etária de 11 a 13 anos, que é indicada para o 7º ano do Ensino Fundamental regular.

A distribuição quantitativa e percentual por gênero é destacada na Tabela 2.

Tabela 2 - Gênero dos alunos participantes.

Sexo	Quantitativo	Porcentagem
Feminino	15	68,2%
Masculino	7	31,8%
Outros	-	-
Total	**22**	**100%**

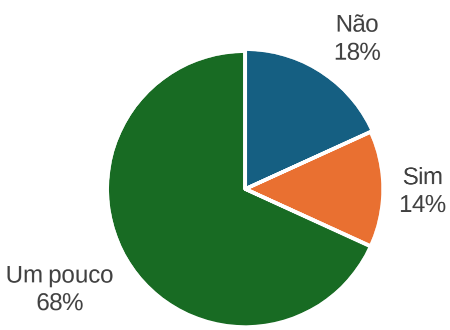
Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

A abordagem sobre o gênero buscou analisar a composição dos participantes na pesquisa. É notável que a maioria dos envolvidos é do gênero feminino, representando 68,2%, o que representa mais que o dobro do número de participantes do gênero masculino, que corresponde a 31,8%.

Todos os participantes indicaram no questionário que fizeram o 6º ano do Ensino Fundamental em Escola Estadual. Isso sugere que estão familiarizados com o modelo educacional adotado, o que pode influenciar sua percepção e adaptação ao estilo de ensino específico desse tipo de escola. Além disso, foi perguntado se algum dos participantes repetiu o 7º ano, e todos responderam que não.

Fora perguntado aos participantes sobre o quanto gostam de matemática. Como resposta, tiveram que escolher entre três opções: não, sim ou um pouco, como é ilustrado no Gráfico 3.

Gráfico 3 - Gosta de matemática



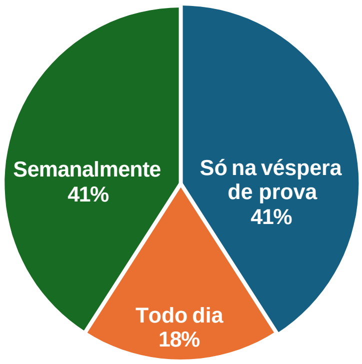
Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

No que diz respeito ao gosto pela matemática, foi observado que 68% dos participantes indicou ter pouco interesse, enquanto 18% expressou não ter afinidade por ela. Contudo, apenas 14% demonstrou um forte gosto pela matemática. Essa distribuição reflete o grau de afinidade da turma com a matemática.

Dado que a maioria apresenta um interesse moderado e que o número de participantes que não têm afinidade com a matemática supera os que a apreciam, levanta-se a possibilidade de enfrentar desafios no processo de ensino da matemática na escola. Esses desafios podem emergir de várias fontes, como dificuldades na leitura, interpretação e compreensão dos conceitos e propriedades presentes nos problemas matemáticos. Portanto, isso indica obstáculos no processo de assimilação do conhecimento matemático.

Outra questão relevante abordada com os participantes foi sobre seus hábitos de estudo em relação à matemática. Eles foram solicitados a selecionar uma das três opções: estudar apenas na véspera da prova, estudar diariamente ou estudar semanalmente. O Gráfico 4 mostra a distribuição percentual das respostas.

Gráfico 4 - Hábitos de estudo com a matemática.



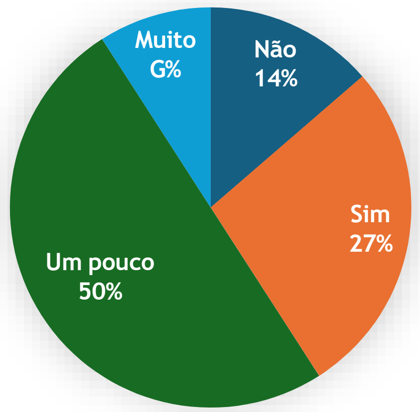
Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

Quanto aos hábitos de estudo dos participantes, notamos que houve um empate entre aqueles que estudam matemática semanalmente e aqueles que estudam apenas na véspera da prova, ambos com um percentual de 41% do total dos participantes. E apenas 18% dos participantes relataram estudar matemática diariamente. Esse resultado indica que poucos dedicam tempo diariamente para o estudo da matemática, o que seria fundamental para a consolidação do aprendizado.

Aqueles que declararam estudar semanalmente ou apenas na véspera da prova podem estar em desvantagem no que diz respeito à absorção do conhecimento matemático, o que pode impactar negativamente em seu desempenho de aprendizagem e dificuldades na resolução de problemas matemáticos.

Os participantes foram perguntados sobre a presença de dificuldades no aprendizado da matemática. Eles foram convidados a escolher entre quatro alternativas: não, sim, um pouco ou muito, conforme apresentado no Gráfico 5, que retrata a distribuição percentual das respostas.

Gráfico 5 -Tem dificuldade em aprender matemática.



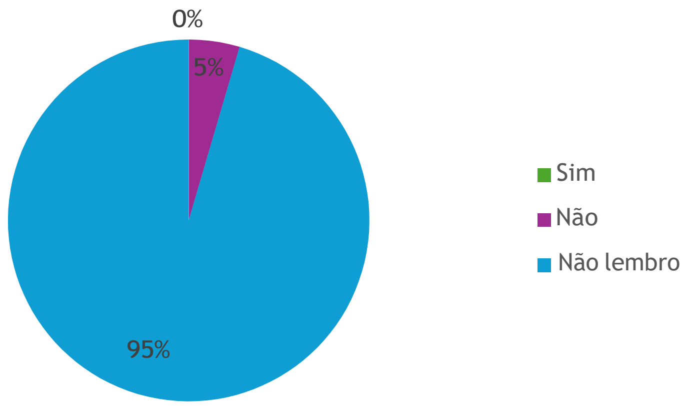
Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

A análise dos dados revela que os participantes apresentam uma ampla gama de experiências e percepções em relação ao aprendizado da matemática. A maioria, representada por 50% dos participantes, indicou sentir um pouco de dificuldade ao lidar com a disciplina. Em seguida, 27% relataram enfrentar dificuldades mais substanciais, sugerindo uma necessidade de apoio adicional no processo de aprendizagem. Um grupo menor, composto por 9% dos participantes, manifestou enfrentar considerável desafio ao aprender matemática, indicando a presença de barreiras significativas no processo educacional. Por fim, 14% dos participantes relataram não ter nenhuma dificuldade em assimilar os conceitos matemáticos, indicando uma relativa facilidade na abordagem dessa disciplina específica. Essa diversidade de experiências ressalta a importância de abordagens pedagógicas diferenciadas, adaptadas às necessidades individuais dos estudantes.

Perguntamos aos participantes quanto às dificuldades em resolver problemas de matemática, e suas respostas apontaram que possuem diferentes dificuldades na resolução de problemas, tais como: dificuldade com as operações com números naturais e racionais e na álgebra.

Por fim, os participantes foram perguntados se já estudaram sobre razão e proporção. Para responder esta pergunta, eles foram convidados a escolher entre três alternativas: sim, não ou não lembro, conforme apresentado no Gráfico 6, que retrata a distribuição percentual das respostas.

Gráfico 6 - Os alunos estudaram sobre razão e proporção.



Fonte: Questionário da pesquisa (2023).

Com base nas informações fornecidas, podemos fazer a seguinte análise: a maioria dos estudantes expressou incerteza quanto ao estudo prévio de razão e proporção, enquanto uma minoria relatou nunca ter tido contato com o assunto. O fato de nenhum participante indicar conhecimento prévio sobre razão e proporção sugere uma possível limitação no entendimento do tema entre os estudantes.

No próximo capítulo, apresentamos a descrição do experimento da pesquisa, a partir do qual desenvolvemos atividades com a resolução de problemas para ensinar razão e proporção.

5. DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo descrevemos a aplicação da proposta de ensino que foi elaborada para promover a aprendizagem dos alunos nos conteúdos de razão e proporção usando a metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática por meio da resolução de problemas.

5.1 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DE ENSINO

5.1.1 Segundo encontro

No dia 30/08/2023, aconteceu o segundo encontro, no qual estavam presentes 22 alunos, que contaram com um tempo referente a duas aulas, totalizando 60 minutos. Iniciamos a aula apresentando um problema que tinha por objetivo verificar o pensamento aditivo que os alunos iriam usar para resolver.

PROBLEMA - Susi e Julie estavam correndo com a mesma velocidade ao redor de uma trilha. Susi começou primeiro. Quando Susi completou 9 voltas, Julie completou 3 voltas. Quando Julie completou 15 voltas, quantas voltas Susi completou?

Fonte: Van de Walle (2009).

Os alunos receberam o problema, que foi impresso e entregue a eles. Em seguida, foi solicitado aos alunos que fizessem a leitura de forma individual, sendo orientados a utilizarem esse momento exclusivamente para se familiarizar com o problema para resolvê-lo. Após 5 minutos de leitura individual, realizamos uma leitura coletiva para esclarecer possíveis dúvidas relacionadas a palavras desconhecidas no problema, garantindo assim uma compreensão clara das instruções.

Depois disso, foram orientados a formar grupos, com um mínimo de 3 e um máximo de 4 integrantes. Assim, formou-se 6 grupos de trabalho, como mostra a Imagem 2.

Imagem 2 - Os alunos em grupos para resolver o problema.

Fonte: Acervo pessoal (2023).

Em seguida, os alunos foram instruídos a pensar como poderiam resolver o problema mobilizando seus conhecimentos prévios e compartilhando entre os membros do grupo suas ideias, dessa forma, a intenção era a de que cada um contribuísse com a construção da resolução. Durante o trabalho em grupo, fizemos algumas orientações.

> Professor: Atenção turma! Agora, vocês terão 20 minutos para reler o problema e discuti-lo com seus colegas. Concentrem-se no problema em questão e evitem conversas paralelas. Alguma dúvida?
> Integrante de um grupo: Professor, já podemos responder o problema?
> Professor: Calma! Ainda não é hora de responder. Este momento é para vocês aprofundarem a compreensão do problema em conjunto. Todos devem participar, compartilhando suas ideias e construindo um plano de resolução com base em seus conhecimentos prévios.
> Integrante de um grupo: Entendido, professor!
> Professor: Confiem em suas habilidades, turma!
> Integrante de um grupo: Professor, posso fazer uma pergunta?
> Professor: Claro, pode perguntar.
> Integrante de um grupo: A Susi está correndo mais rápido que a Julie?
> Professor: Não, as duas estão correndo na mesma velocidade. A diferença é que a Susi começou a corrida antes da Julie. Quando a Susi completou 9 voltas, a Julie estava completando 3 voltas.
> Integrante de um grupo: Ah, agora entendi! Muito obrigado pelo esclarecimento, professor.

> Professor: De nada! Agora, explorem sua criatividade e ousem na resolução do problema. Sejam detalhistas e utilizem todos os recursos que acharem necessários na estratégia de resolução. Desenhos e gráficos também são bem-vindos na elaboração da resposta. Se surgir alguma dúvida, sintam-se à vontade para perguntar.

Entretanto, percebemos que alguns grupos ainda estavam com conversas paralelas, o que poderia gerar distração e dificultar o foco na resolução do problema.

> Professor: Turma, vamos utilizar este tempo de trabalho em equipe da melhor forma possível, concentrem na compreensão do problema e buscando soluções de forma colaborativa e criativa!

Após os 20 minutos destinados para relerem o problema, discuti-lo com seus colegas e elaborarem um plano de resolução, foi dado o comando para que os alunos resolvessem o problema em seus devidos grupos.

> Professor: Atenção turma! Agora que vocês releram, analisaram e discutiram o problema em grupo, utilizando seus conhecimentos matemáticos prévios, já devem ter escolhido uma estratégia de resolução. Correto?
> A turma: Sim, professor!
> Professor: Ótimo! Vocês terão 30 minutos para resolver o problema em grupo.
> A turma: Certo, professor!

Ao observarmos o trabalho dos grupos, notamos que alguns ainda enfrentavam dificuldades de compreensão, mesmo após a leitura individual e em grupo. Percebemos dificuldades de interpretação e mobilização do conhecimento matemático para a construção de uma estratégia de resolução.

Visitamos cada grupo, monitorando seu desempenho. Alguns já estavam avançando na construção da estratégia, enquanto outros ainda não haviam iniciado. Ao observá-los, os incentivamos e os motivamos a pensarem profundamente sobre o problema e não desistirem. Fomos, assim, caminhando e orientando os grupos. Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: O grupo 1, já desenvolveram uma estratégia de resolução?

Integrante do grupo 1: Sim, professor, a gente acha que sim!

Professor: Ótimo! Gostaria de entender como vocês chegaram à resposta do problema. Poderiam explicar o raciocínio de vocês?

Integrante do grupo 1: Está certo então, professor! A gente vai tentar explicar.

Integrante do grupo 1: Então, professor, nós pensamos da seguinte maneira: se Susi completou 9 voltas e Julie completou 3, isso significa que Susi tem 6 voltas a mais (9 - 3 = 6). Como Julie deu 15 voltas no total, então Susi deve ter dado 21 voltas (15 + 6 = 21). Foi essa a resposta que encontramos, professor!

Professor: Vocês têm certeza de que está correta?

Integrante do grupo 1: Acreditamos que sim, professor, porque percebemos que a distância de 6 voltas de uma para outra não vai mudar. Então, quando Julie completou 15 voltas, Susi completou 21 voltas!

Professor: Muito bem, entendi o raciocínio do grupo!

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

Professor: Olá, Grupo 2! Vocês já definiram a estratégia para solucionar o problema?

Integrante do grupo 2: Sim, professor!

Professor: Ótimo! Que bom saber! Poderiam compartilhar como chegaram à resposta?

Integrante do grupo 2: Aqui no nosso grupo a gente decidiu seguir a seguinte lógica: Para Julie, aumentamos o número de voltas em 3 a cada momento, até alcançarmos o total de 15 voltas. Já para Susi, a cada etapa, adicionamos 9 voltas ao seu total.

Professor: Compreendo. Mas, no caso da Susi, como vocês determinaram o número final de voltas percorridas, considerando essa adição de 9 voltas a cada etapa?

Integrante do grupo 2: Professor, como a Julie completa 3 voltas a cada vez, para chegarmos em 15 voltas, ela precisará completar 5 séries de 3 voltas. Para a Susi, a cada 5 séries de 3 voltas da Julie, aí adicionamos 9 voltas. Ou seja, 5 séries de 9 voltas para Susi. Já para calcular o total de voltas da Susi, fizemos a seguinte soma: 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45. Portanto, quando Julie completar 15 voltas, Susi terá completado 45 voltas!

Professor: Você tem certeza da resposta encontrada?

Integrante do grupo 2: Sim, professor, porque as duas realizaram as suas voltas em cinco séries, sendo Julie 3 voltas e Susi 9 voltas.

Professor: Ok, entendi o raciocínio grupo!

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Professor: E aí, pessoal do Grupo 3, já elaboraram uma estratégia de resolução?

Integrante do grupo 3: Já sim, professor!

Professor: Certo! Poderiam nos explicar qual estratégia utilizaram para chegar à resposta?

Integrante do Grupo 3: Sim, professor! Para encontrar a solução, a gente usou a seguinte estratégia: Repetimos a soma de 3 voltas por 15 vezes, a fim de alcançar o total de 15 voltas da Julie.

Professor: Me expliquem com mais detalhes como chegaram a essa ideia?

Integrante do Grupo 3: Através de uma conversa que tivemos aqui entre nós do grupo, concluímos que, ao alcançar 45 voltas, poderíamos dividir esse valor por 9, resultando em 5. Esse número 5 representa a quantidade de vezes que Julie realizou 3 voltas, aí acreditamos que a resposta esteja correta.

Professor: Existe outra possibilidade de resolver este problema?

Integrante do Grupo 3: Não sabemos, professor, encontramos somente está!

Professor: Ok, entendi o raciocínio do grupo!

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: Olá, Grupo 4! Já avançaram na elaboração de uma estratégia para solucionar o problema?

Integrante do grupo 4: Já sim, professor!

Professor: Ótimo! Poderiam compartilhar qual estratégia adotaram para chegar na resposta?

Integrante do Grupo 4: Claro, professor! Pensamos em aumentar 3 voltas para Julie a cada vez, até atingir total de 15 voltas. E para Susi, vamos acrescentar 9 voltas a cada vez. Assim, para Julie fazer 15 voltas, a gente precisou só somar 5 séries de 3 voltas. Da mesma forma, somamos 5 séries de 9 voltas para Susi, totalizando 45 voltas realizadas por ela.
Professor: Ok, entendi o raciocínio do grupo!

Na orientação do grupo 5, estabelecemos o seguinte diálogo:

Professor: "Olá, grupo 5! Já desenvolveram uma estratégia para resolver o problema?"
Integrante do grupo 5: "Sim, professor!"
Professor: "Ótimo! Poderiam me explicar como chegaram à resposta?"
Integrante do grupo 5: "Sim, professor! O problema nos informa que quando Julie completou 3 voltas, Susi completou 9 voltas. Portanto, subtraímos as 9 voltas de Susi pelas 3 voltas de Julie, resultando em uma diferença de 6 voltas entre elas. Com isso, percebemos que Susi estará sempre 6 voltas à frente de Julie."
Professor: "Entendi. E qual foi o resultado encontrado?"
Integrante do grupo 5: "Bem, professor, somamos as 6 voltas à quantidade de voltas que Julie completou, totalizando 6 + 15 = 21 voltas. Ou seja, Susi completou 21 voltas."
Professor: "Muito bem, compreendi o raciocínio do grupo!"

Na orientação do grupo 6, estabelecemos o diálogo:

Professor: Olá pessoal do Grupo 6! Já estão com alguma ideia de como resolver o problema?
Integrante do grupo 6: Professor, estamos com dificuldades em encontrar a resposta.
Professor: Sem problemas! Vamos reler o problema juntos, com atenção total do grupo, ok?
Integrante do grupo 6: Certo, professor!

Após a releitura do problema.

Integrante do grupo 6: Ah, agora sim! Percebi que interpretamos errado. A gente estava achando que o problema pedia para descobrir quantas voltas Julie fez em relação às de Susi, mas não é isso! O que o problema está perguntando é quantas voltas Susi terá completado quando Julie alcançar 15 voltas.

Professor: Certo! Vocês perceberam como estavam distraídos e não totalmente concentrados na resolução do problema. Agora, pensem e me digam, como podemos chegar à resposta?

Integrante do grupo 6: Bom, professor, agora conseguimos pensar dessa forma, 15 voltas, é o mesmo que multiplicar 3 voltas x 5, então 9 voltas x 5 =48 voltas.

Professor: Tem certeza que é esta resposta final?

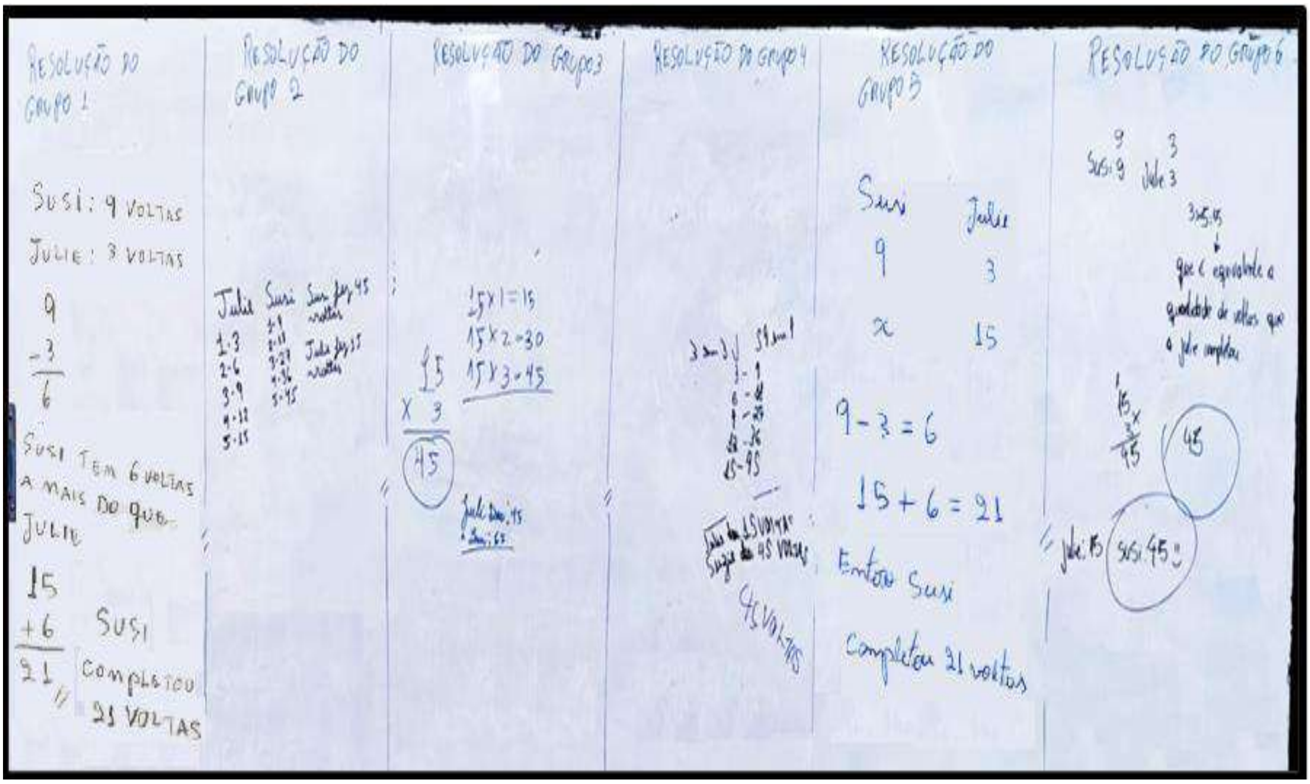
Aluno do grupo 6: Opa, professor! Percebemos um erro no nosso cálculo, não é 48 voltas, porque 9x5=45. Então Susi fez 45 voltas.

Professor: Ok, entendi o raciocínio do grupo!

Enquanto os alunos trabalhavam no problema, destacamos para eles que enfrentar desafios e superar obstáculos faz parte natural do aprendizado. Salientamos a importância de lidar com o problema de maneira eficiente, encarar as dificuldades de entendimento e persistir até compreender bem os conceitos necessários para resolver a situação apresentada. Isso os ajudaria a entender melhor o assunto e a chegar à resposta certa de forma consistente e de acordo com o que foi pedido no problema.

Após os grupos resolverem o problema, pedimos que cada um escolhesse um integrante para registrar a resolução no quadro. Os Integrantes dos seis grupos dirigiram-se ao quadro e registraram as estratégias de resolução do Problema, como mostra a Imagem 3.

Imagem 3 - Registro no quadro das resoluções do problema.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

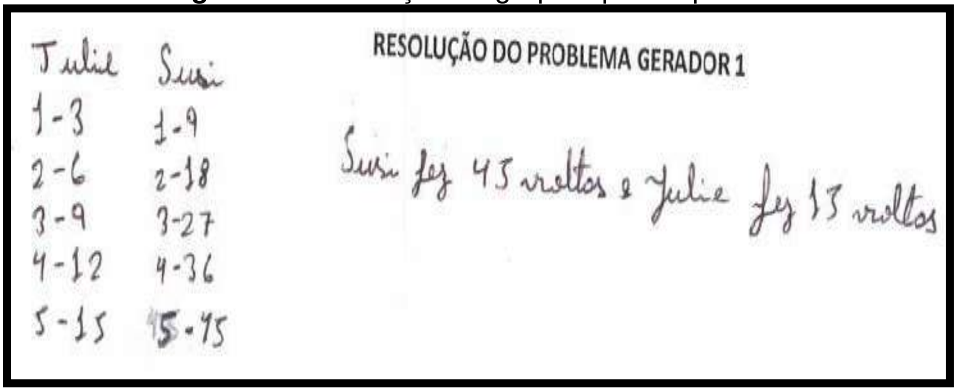
Considerando que a maioria dos representantes simplesmente escreveu a resolução no quadro, solicitamos que um dos membros de cada grupo apresentasse e explicasse a estratégia de resolução elaborada por eles. Apesar de alguma hesitação, os grupos conseguiram explicar seus raciocínios. Nesse momento, pudemos observar as dificuldades que os alunos enfrentam ao tentar explicar ou narrar suas ideias, talvez por não estarem acostumados a fazerem isso nas aulas de matemática. E apesar das dificuldades, eles se esforçaram para explicar a estratégia de resolução adotada para solucionar o problema, mesmo que de forma tímida e cada um à sua maneira. Por isso, organizamos as explicações para que os alunos pudessem compreender melhor o que fizeram.

Na atividade, seis grupos participaram e adotaram as seguintes estratégias de resolução:

- Dois grupos optaram por utilizar apenas a adição de forma implícita para obter a resposta;
- Dois grupos optaram por utilizar apenas a adição de forma explícita para obter a resposta;
- Dois grupos escolheram a multiplicação para obter a resposta.

Os grupos que se concentraram, exclusivamente, na adição implícita para obter a resposta foram os grupos 2 e 4, conforme evidenciado nas imagens 4 e 5.

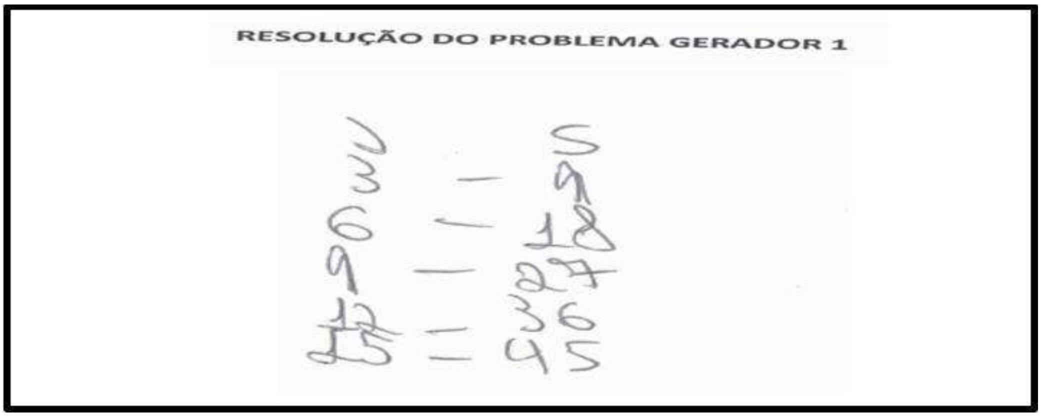
Imagem 4 - Resolução do grupo 2 para o problema.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 4, o grupo 2 adotou uma estratégia de resolução do problema que envolveu o uso da adição de forma implícita. Eles identificaram a constante de acréscimo de voltas de Julie, que é 3, e a constante de acréscimo de voltas de Susi, que é 9. Depois, organizaram em colunas a sequência de voltas de cada uma até alcançarem a quinta posição, onde Julie completou 15 voltas. Seguindo a mesma lógica, determinaram que Susi havia completado 45 voltas. O grupo 4 também utilizou essa estratégia, como podemos ver na Imagem 5.

Imagem 5 - Resolução do grupo 4 para o problema.



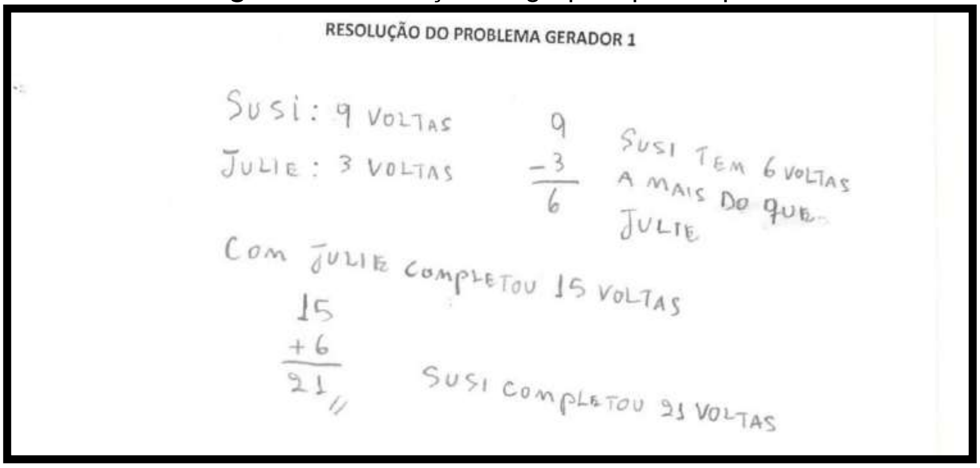
Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 5, o grupo 4 adotou uma estratégia semelhante àquela do grupo 2, utilizando a adição implícita. No entanto, a diferença observada é que, neste registro de resposta escrito da Imagem 5, eles não organizaram nem apresentaram os dados da resolução na estratégia desenvolvida. Além disso, não mencionaram os nomes de Julie e Susi nas colunas referentes às suas voltas. Simplesmente, foram adicionando o fator de crescimento de uma e da outra a cada momento, até atingir o quinto momento. A resposta encontrada não foi destacada, conforme solicitado pelo enunciado do problema.

Vale ressaltar que somente na estratégia de resolução exposto no quadro, o integrante do grupo 4 inseriu a letra “J” para Julie na coluna de voltas da esquerda e a letra “S” para Susi na coluna de voltas da direita. Por fim, registraram no quadro que Julie fez 15 voltas e Susi fez 45 voltas, como foi mostrado na Imagem 3.

Já o grupo 1 escolheu adição como estratégia para resolver o problema, como apresenta a Imagem 6.

Imagem 6 - Resolução do grupo 1 para o problema.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 6, o grupo 1 utilizou uma estratégia de resolução baseada em estrutura aditiva. Primeiramente, eles calcularam a diferença entre as 9 voltas completas feitas por Susi e as 3 voltas completas feitas por Julie. Ao subtrair esses valores, descobriram que Susi estava 6 voltas à frente das voltas completadas por Julie. Em seguida, para encontrar a quantidade total de voltas de Susi, somaram as 6 voltas adicionais as 15 voltas realizadas por Julie. O resultado foi 21 voltas para Susi. Portanto, quando Julie completou 15 voltas, Susi já havia completado 21 voltas.

No entanto, os grupos 3 e 6 escolheram utilizar a multiplicação como estratégia para obter o resultado, como pode ser observado nas Imagens 7 e 9.

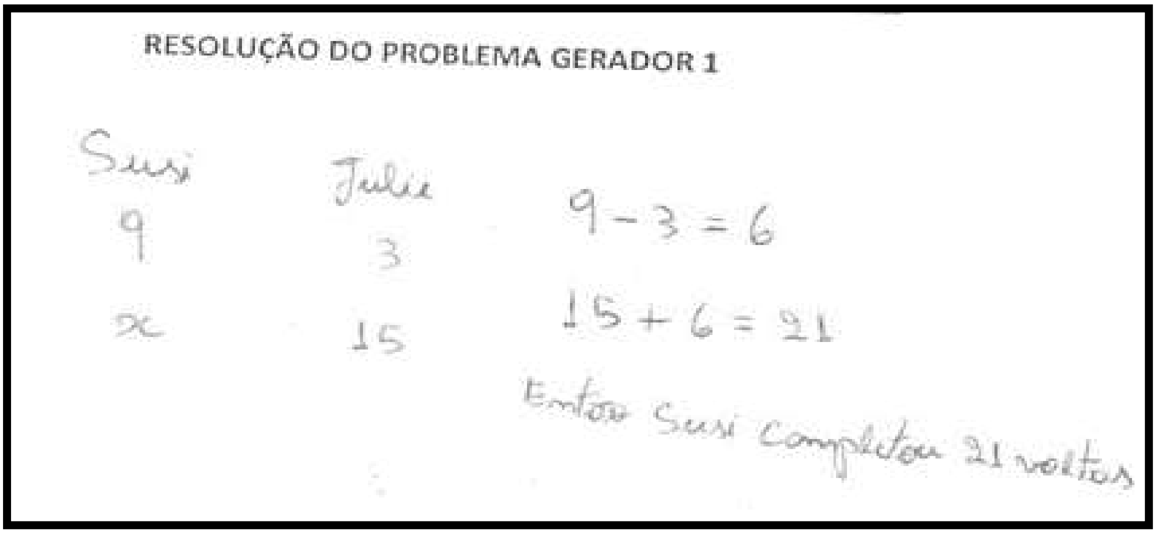
Imagem 7 - Resolução do grupo 3 para o problema.

Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 7, observamos que o grupo 3 adotou a multiplicação como sua estratégia, sem fornecer detalhes sobre seu processo de cálculo. Eles multiplicaram 15 por 3, obtendo 45. Além disso, desmembraram toda a multiplicação sucessiva por 3 até alcançar a quinta vez, resultando em 45. É importante destacar que somente na estratégia de resolução apresentado no quadro, como visto na Imagem 4, o representante do grupo 3 registrou por escrito que Susi completou 45 voltas e Julie completou 15 voltas.

O grupo 5 adotou a adição como estratégia de resolução, como se pode ver a seguir.

Imagem 8 - Resolução do grupo 5 para o problema.

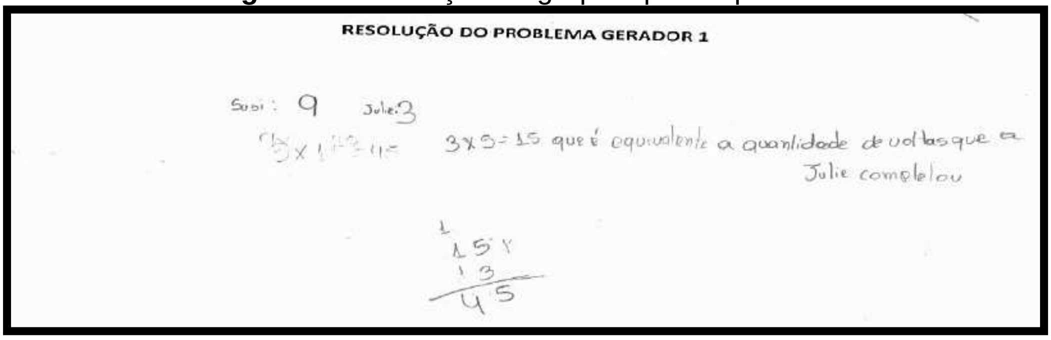


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 8, é perceptível que o grupo 5 optou pela mesma estratégia de estrutura aditiva que o grupo 1, e que ambos os grupos encontraram a mesma resposta para Susi de 21 voltas.

Semelhante ao grupo 3, o grupo 6 também adotou a multiplicação com estratégia de resposta, como se pode ver na Imagem 9.

Imagem 9 - Resolução do grupo 6 para o problema.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 9, fica evidente que o grupo 6 escolheu a multiplicação como estratégia de resposta. Primeiramente, eles registraram a constante de voltas da Susi, que é 9, e a constante de voltas da Julie, que é 3. Durante o cálculo, reconheceram as 15 voltas da Julie ao multiplicar 3 por 5. Assim, perceberam que, ao multiplicar 15 por 3, chegaram a 45 voltas da Susi. No entanto, em nenhum momento o grupo utilizou a constante de voltas da Susi, que é 9, para encontrar a resposta.

Após os grupos terem apresentado suas resoluções no quadro, fizemos um bate-papo com a turma sobre as estratégias adotadas por eles na resolução do problema. Eles observaram que a resposta encontrada pelos grupos 1 e 5 foi que Susi completou 21 voltas, enquanto os grupos 2, 3, 4 e 6, que usaram como estratégia a adição implícita e a multiplicação, chegaram à conclusão de que Susi completou 45 voltas.

Diante disso, chegamos a um consenso com a turma, após analisarmos juntos cada estratégia utilizada, de que os grupos 2, 3, 4 e 6, que adotaram estratégias que levaram à resposta de 45 voltas para Susi, não consideraram a constante de 6 voltas que Susi estava à frente de Julie. Eles consideraram apenas a sequência de 5 vezes em que ambas corredoras completaram suas respectivas voltas. Por outro lado, os grupos 1 e 5 não levaram em consideração a sequência de 5 vezes em que ambas correram, mas sim a diferença de voltas entre as corredoras.

Com isso, os grupos 1 e 5 utilizaram a diferença constante nas voltas completadas, ou seja, $Susi - Julie = diferença\ constante$. Desse modo, encontram a primeira informação: $9 - 3 = 6$. Isso nos mostra que Susi sempre completou 6 voltas a mais do que Julie. Para a segunda parte, quando Julie completou 15 voltas, Susi completou 21 voltas. A resolução do problema nos mostrou que a maior parte dos grupos usaram o pensamento aditivo, que envolve as operações de adição e subtração, que são as operações mais fáceis para os alunos. No encontro seguinte, o problema 2 permitiu que os alunos utilizassem o pensamento aditivo e multiplicativo.

5.1.2 Terceiro encontro

No terceiro encontro, realizado em 31/08/2023, 19 alunos da turma estiveram presentes. A aula teve duração de 45 minutos e os alunos foram organizados em 4 grupos de trabalho. Cada grupo recebeu uma cópia do problema gerador, cujo objetivo era mostrar a diferença do pensamento aditivo e multiplicativo e introduzir a ideia de razão.

PROBLEMA GERADOR: Há duas semanas, duas plantas foram medidas e tinham 8 cm e 12 cm, respectivamente. Hoje estão com 11 cm e 15 cm. Quem cresceu mais, a planta de 8 cm ou a de 12 cm?

Fonte: Van de Walle (2009).

Inicialmente, orientamos os alunos a fazerem uma leitura individual do problema por aproximadamente 5 minutos. Com os alunos organizados em seus grupos, tiveram 5 minutos para debater a situação apresentada, corrigir eventuais compreensões equivocadas, ampliar seus conhecimentos e reunir procedimentos matemáticos para abordar a resolução do problema. Logo após, deu-se início à resolução do problema, em que os alunos tiveram aproximadamente 20 minutos para aplicar seus conhecimentos.

Enquanto tentavam resolver o problema, fornecíamos orientação e auxílio para esclarecer as dúvidas que surgiam. Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Olá grupo 1, Diga como vocês pensaram em resolver o problema?
> Integrante do grupo 1: Bom, professor, a gente pensou em uma forma simples de resolver. Percebemos que as duas plantas cresceram ao

mesmo tempo 3 cm. Então achamos que quem cresceu mais foi a planta de 12 cm.
Professor: Mas como vocês chegaram a essa conclusão?
Integrante do grupo 1: Foi assim, professor, porque a planta que tinha 12 cm passou para 15 cm e a planta que tinha 8 cm passou para 11 cm. Logo, 15 cm é maior que 11 cm.
Professor: Agora uma pergunta que todos querem saber. Esta é a resposta correta?
Integrante do grupo 1: Bom, professor, sinceramente nenhum de nós temos certeza. Mas temos uma pergunta: como uma planta cresceu mais que a outra se as duas teve o mesmo 3 cm de crescimento?
Professor: É isso que vocês precisam descobrir! Observem que cada planta tem um tamanho inicial que diferem uma da outra, mas ambas cresceram 3 cm. Então, partindo do tamanho inicial das plantas, qual delas cresceu mais? Sugiro que leiam novamente o problema!

Após a leitura, o grupo ainda estava confuso. Foi quando percebemos que todos os grupos enfrentavam dificuldades semelhantes. Sugerimos que desenhassem as duas plantas para visualizar melhor a situação e utilizassem a ideia de barras e frações para auxiliar na compreensão. Tendo os grupos compreendido como representar os dados do problema em formas de barras e frações, começaram a apresentar a ideia de como resolver o problema. Assim, o Integrante do grupo 3, argumentou:

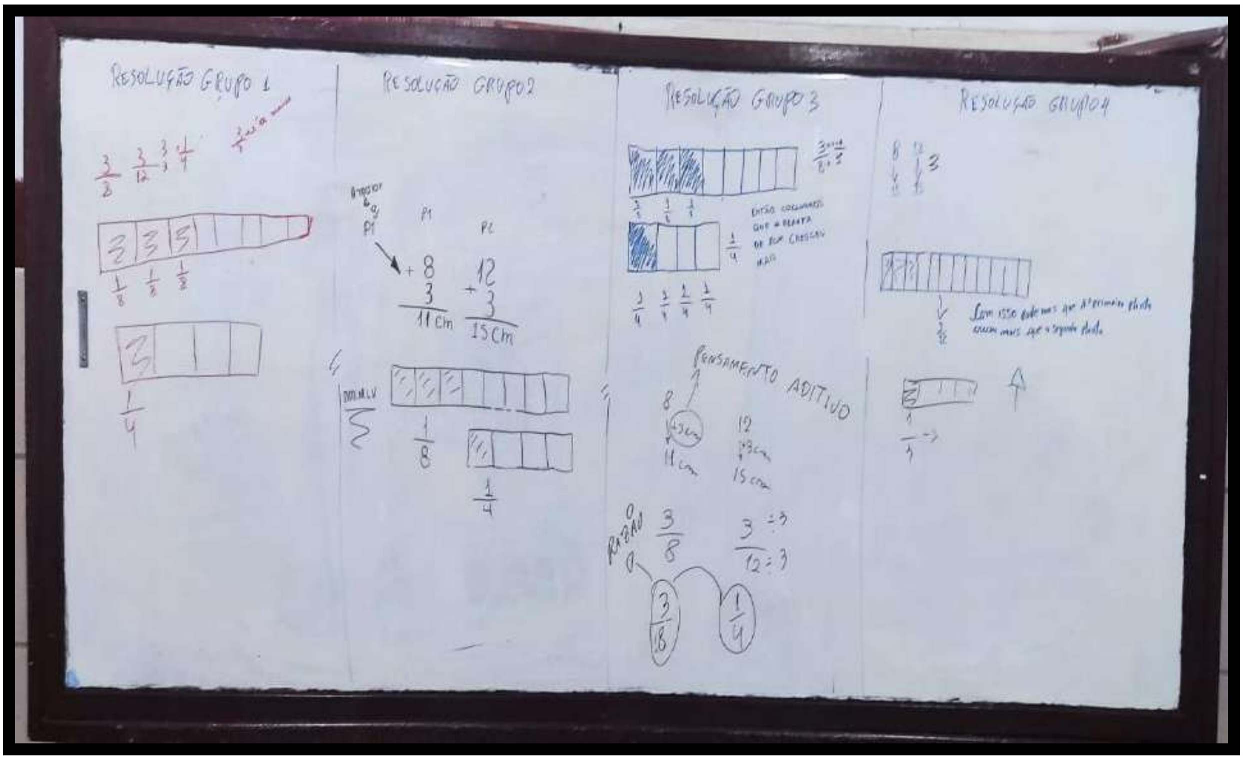
Integrante do grupo 3: Professor, agora temos uma ideia!
Professor: Certo, qual seria a ideia?
Integrante do grupo 3: Professor, veja a ideia que tivemos! Analisamos as plantas usando barrinhas. A planta de 8 cm foi dividida em oito quadradinhos de 1 cm cada. Pintamos três desses quadradinhos para mostrar que cresceu 3 cm. Fizemos o mesmo com a planta de 12 cm. Ao olhar para as barras, percebemos que havia frações no meio. Calculamos o crescimento de cada planta: a primeira foi $\frac{3}{8}$ e a segunda foi $\frac{3}{12}$. Simplificamos a segunda fração por 3, $\frac{3\div 3}{12\div 3} = \frac{1}{4}$. Comparando as barras de $\frac{3}{8}$ com $\frac{1}{4}$, concluímos que $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$. Logo, a primeira planta, que tinha o

tamanho inicial de 8 cm, cresceu mais do que a planta que tinha o tamanho inicial de 12 cm.

Professor: Ótima resposta, parabéns grupo pela resposta dada!

Depois que os grupos resolveram o problema, um integrante de cada grupo foi escolhido para anotar a solução no quadro, conforme mostra a Imagem 10.

Imagem 10 - Registro no quadro das resoluções do problema.

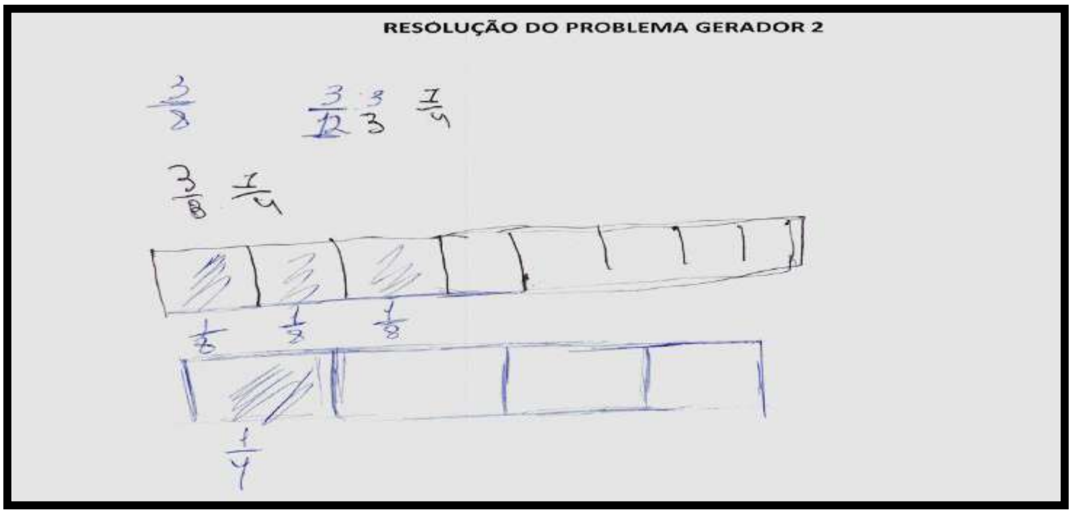


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Durante a plenária, todos os grupos escolheram usar representações por barras e fracionária para elaborar suas respostas. Os alunos de cada grupo apresentaram e explicaram suas estratégias de resolução, e nós acompanhamos e dialogamos com eles sobre os resultados obtidos.

O Grupo 1 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem 11.

Imagem 11 - Resolução do grupo 1 para o problema gerador.

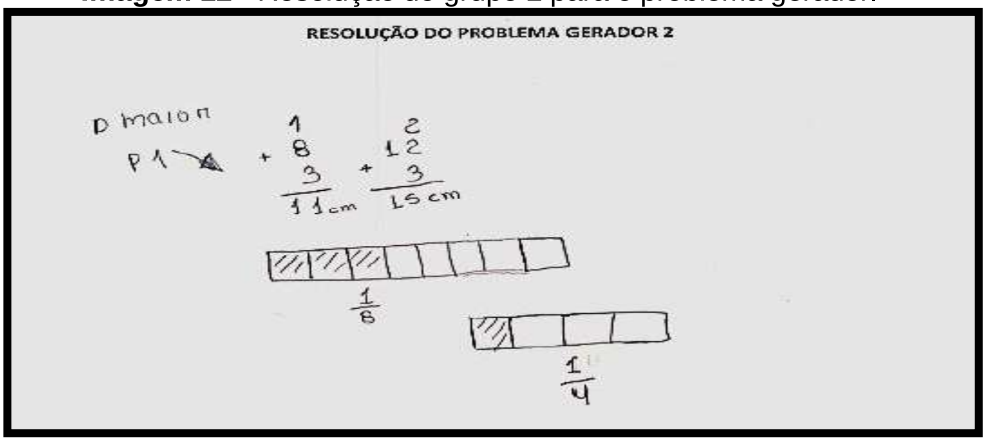


Fonte: Acervo pessoal (2023).

O Grupo 1 optou por uma representação fracionária para representar o crescimento das plantas, indicando as frações de crescimento como 3/8 e 1/4. Para demonstrar esse crescimento, eles criaram uma representação visual com barras, preenchendo os quadros apropriados. No entanto, na descrição escrita, não ficou claro qual era o resultado final. Após serem questionados, eles explicaram que esqueceram de incluir a resposta, mas destacaram que, de acordo com sua análise, o crescimento diferenciado da primeira planta foi percebido não apenas pela soma dos incrementos de 3 cm, já que ambas as plantas tiveram o mesmo acréscimo, mas sim pela sua fração de crescimento.

O grupo 2 apresentou o seu registro de resposta, conforme é mostrado na Imagem 12.

Imagem 12 - Resolução do grupo 2 para o problema gerador.

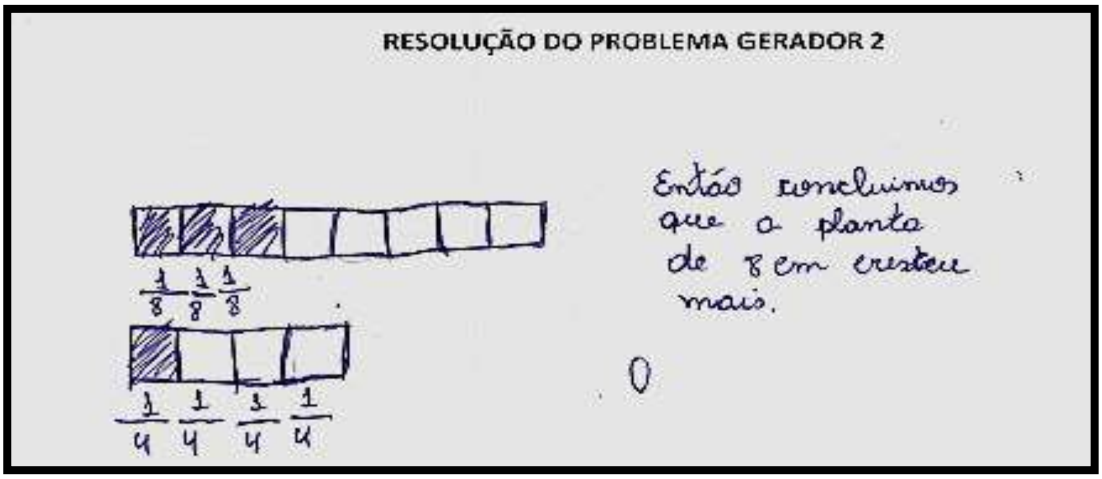


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Na Imagem 12, observamos que o grupo 2 iniciou a resolução adicionando 3 cm a ambas as plantas, apresentando os resultados de 11 cm e 15 cm, respectivamente. Em seguida, escolheu representar o problema utilizando a forma fracionária, destacando a razão de crescimento de ambas as plantas. Além disso, optaram por utilizar a representação por barras para ilustrar o crescimento por meio de quadros preenchidos. Ao final, concluíram que a primeira planta teve o maior crescimento.

O grupo 3 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme ilustrado na Imagem 13.

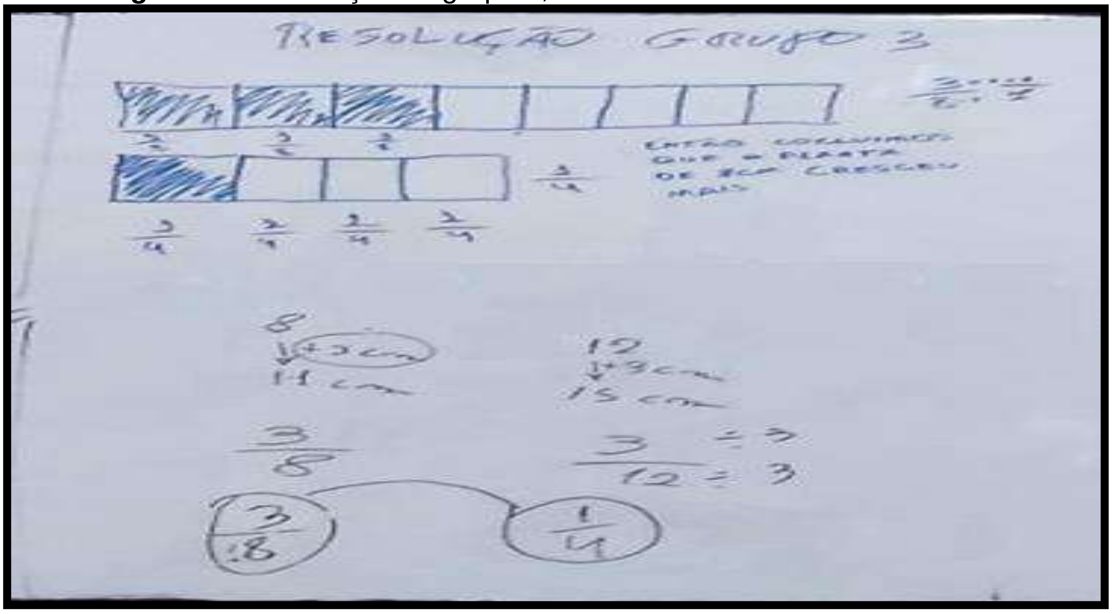
Imagem 13 - Resolução do grupo 3 para o problema gerador.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

De acordo com a imagem 13, o grupo 3 optou pela representação por barras, exibindo o valor dos quadros preenchidos por meio de frações. Entretanto, o grupo não mostrou por completo as fases do processo de resolução e sem mostrar a razão obtida, concluindo que a planta de 8 cm cresceu mais. É importante registrar que no momento que colocaram a resposta no quadro, o grupo 3 acrescentou as frações de crescimento, conforme imagem 14.

Imagem 14 - Resolução do grupo 3, acrescentou as razões de crescimento.

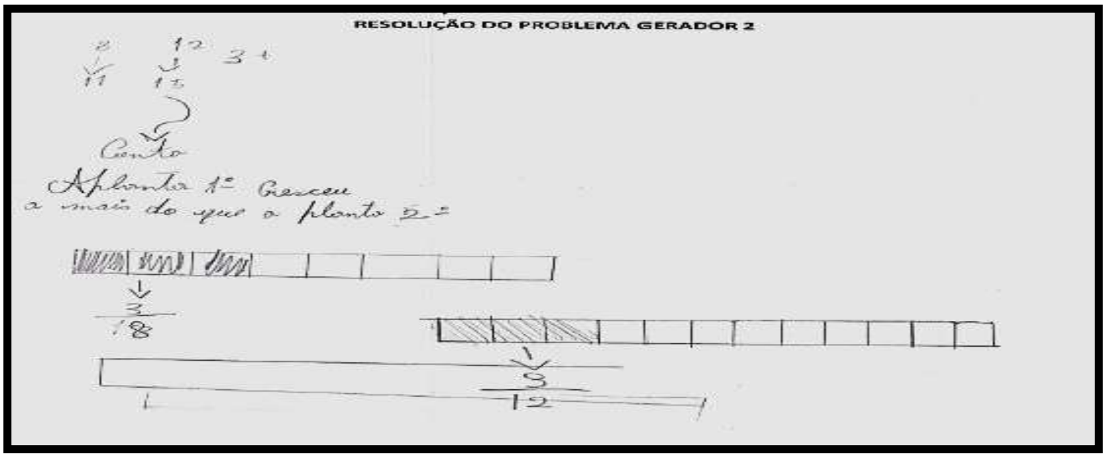


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 14, o grupo 3 representou por meio da forma fracionário as razões de crescimento de ambas as plantas, antes e depois da simplificação, justificando a resposta, sinalizando avanço na compreensão do problema.

E por último, o grupo 4, que apresentou a sua estratégia de resposta conforme mostra a imagem 15:

Imagem 15 - Resolução do grupo 4 para o problema gerador.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Como indicado na Imagem 15, o grupo 4 começou a resolver o problema adicionando 3 cm em ambas as plantas, resultando em medidas de 11 cm e 15 cm, respectivamente. Em seguida, eles apresentaram a fração de crescimento de forma irredutível, sem detalhar o processo de simplificação. Além disso, optaram por representar o crescimento através de barras, utilizando quadros preenchidos. Concluíram que a primeira planta, começando com 8 cm, teve um crescimento superior à segunda planta, que iniciou com 12 cm.

Após todos os grupos terem apresentado no quadro suas estratégias de resolução do problema, concluímos com a turma que todos conseguiram encontrar a resposta correta, utilizando a mesma estratégia de representação por barras e frações. É importante destacar que os grupos não detalharam minuciosamente cada passo da construção da resposta, omitindo alguns procedimentos matemáticos e apresentando a resposta apenas ao final.

Em seguida, na formalização do conteúdo, explicamos o conceito de grandeza e introduzimos a ideia de razão a partir das estratégias elaboradas pelos alunos. Chegamos a um consenso com a turma sobre qual das estratégias de resolução melhor explorou a situação apresentada no problema. A estratégia escolhida foi a realizada pelo grupo 3. Sendo assim, explicamos à turma o conceito de grandeza, que é tudo aquilo que pode ser medido.

Na estratégia do grupo 3, foi registrado que a planta que tinha o tamanho inicial de 8 cm passou a medir 11 cm, e a outra planta que tinha o tamanho inicial de 12 cm passou a medir 15 cm. Com isso, o grupo 3 mostrou que ambas as plantas cresceram a mesma quantidade de 3 cm, representaram da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} 8cm & 12cm \\ + & + \\ 3cm & 3cm \\ \downarrow & \downarrow \\ 11cm & 15cm \end{array}$$

No entanto, o grupo 3 percebeu que, por meio da adição, só foi possível determinar que ambas as plantas cresceram igualmente 3 cm. Isso significa que uma quantidade única foi adicionada às medidas iniciais, resultando em duas novas medidas, mas sem determinar qual planta cresceu mais. Para resolver essa questão, o grupo 3 adotou em sua estratégia a comparação da quantidade de crescimento em relação à altura inicial das plantas.

Sendo assim, o grupo 3 expressou as razões de crescimento a seguir:

$$\begin{array}{cc} Planta\ de\ 8\ cm & Planta\ de\ 12\ cm \\ \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{3}{8} & \dfrac{3}{12} \end{array}$$

Em seguida, o grupo 3 simplificou $\frac{3 \div 3}{12 \div 3}$, obtendo $\frac{1}{4}$ da planta de 12 cm:

$$\begin{array}{cc} Planta\ de\ 8\ cm & Planta\ de\ 12\ cm \\ \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{3}{8} & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Com essa informação, explicamos aos alunos que a primeira planta cresceu $\frac{3}{8}$ de sua altura, enquanto a segunda planta cresceu $\frac{1}{4}$. Nessa compreensão, o grupo 3 representou o crescimento das plantas por barras, conforme mostrado na Imagem 14, comparando as barras de $\frac{3}{8}$ com $\frac{1}{4}$, concluímos que $\frac{3}{8} > \frac{1}{4}$. Logo, o grupo 3 concluiu que a primeira planta, que tinha o tamanho inicial de 8 cm, cresceu mais do que a planta que tinha o tamanho inicial de 12 cm.

Ademais, mostramos à turma que apenas comparar as alturas finais das plantas (11 cm e 15 cm) não é suficiente para avaliar o crescimento de forma justa. Para isso, utilizamos a ideia da razão, que, segundo Van de Walle (2009, p. 282), é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades ou medidas. Ele ressalta que um aspecto essencial para a compreensão desse conceito é a capacidade do estudante de reconhecer a razão como uma entidade independente, distinta das medidas que a constituem, o que é fundamental para o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Com base nesse entendimento, explicamos à turma que a razão de crescimento da primeira planta é dada por $\frac{Altura\ final}{Altura\ inicial} = \frac{11\ cm}{8cm} = 1{,}375$. Já a razão de crescimento da segunda planta é $\frac{Altura\ final}{Altura\ inicial} = \frac{15\ cm}{12cm} = 1{,}25$. Portanto, a primeira planta cresceu 1,375 vezes seu tamanho inicial, enquanto a segunda planta cresceu 1,25 vezes seu tamanho inicial. Comparando as razões, concluímos que a primeira planta teve um crescimento relativo maior do que a segunda. Os alunos perceberam que essas explicações tornaram o conteúdo mais claro e os ajudaram a compreender melhor a ideia da razão ao resolver o problema.

Para resolver o problema, os alunos utilizaram o pensamento multiplicativo de forma implícita. Isso ficou evidente quando, em cada grupo, eles usaram a comparação por barras na representação das razões relativas de cada planta. Ao comparar as barras de $\frac{3}{8}$ com $\frac{1}{4}$, concluíram que a barra que representa a razão $\frac{3}{8}$ era maior que a da razão $\frac{1}{4}$. Dessa forma, determinaram que a planta com altura inicial de 8 cm cresceu mais.

Além do uso implícito do pensamento multiplicativo para comparar o crescimento das plantas, os alunos também empregaram o pensamento aditivo anteriormente. No caso do grupo 3, por exemplo, os alunos observaram que, através da adição, puderam apenas determinar que ambas as plantas cresceram igualmente 3 cm. Isso significa que uma quantidade fixa foi adicionada às alturas iniciais, resultando em duas novas alturas, mas sem permitir a determinação de qual planta teve um crescimento maior.

Diante disso, Van de Walle (2009) afirma que, em problemas envolvendo situações aditivas e multiplicativas, tanto o pensamento aditivo quanto o multiplicativo podem produzir respostas válidas, embora distintas. Nesse contexto, é essencial que a discussão enfoque a natureza dessas comparações, evidenciando a distinção entre comparações aditivas e multiplicativas. O autor destaca que a habilidade de compreender essa diferença é um indicativo de pensamento proporcional.

Observamos que, ao desenvolverem as estratégias para resolver o problema, os alunos enfrentaram dificuldades com o conceito de razão, especialmente na realização da comparação multiplicativa entre a quantidade de crescimento e a altura inicial de cada planta. Além disso, houve dificuldade em justificar com clareza qual planta cresceu mais.

Por exemplo, o grupo 2 utilizou a adição para expressar que ambas as plantas cresceram a mesma quantidade, 3 cm. No entanto, embora tenham desenhado barras representando o crescimento de cada planta, não explicitaram as razões de crescimento em relação aos tamanhos iniciais. Apenas afirmaram que a primeira planta era maior, ou seja, que teve um crescimento maior em relação à sua altura inicial, sem justificar adequadamente essa conclusão. A falta de uma explicação detalhada sobre a comparação da quantidade de crescimento em relação ao tamanho inicial de cada planta indica que os alunos desse grupo tiveram dificuldades em organizar e expressar o cálculo de forma processual e clara.

No entanto, diante das dificuldades dos alunos em escrever e organizar os cálculos de forma processual, pudemos contribuir ao formalizar os conceitos e esclarecer as dúvidas que surgiram durante a resolução do problema. No decorrer da atividade, ficou evidente que eles tinham compreendido pouco sobre a ideia de razão, apesar de demonstrarem certo entendimento sobre a comparação entre quantidades. Contudo, a noção de comparação multiplicativa ainda não havia sido internalizada, indicando que eles precisavam de mais práticas de ensino para consolidar essa ideia.

Nesse sentido, avaliamos que a aprendizagem dos alunos apresentou avanços, pois, através de erros e acertos, eles passaram a compreender a natureza do problema e a distinguir quando utilizar o pensamento aditivo e quando empregar o pensamento multiplicativo. Para auxiliá-los a praticar e consolidar o conhecimento adquirido durante essa atividade, desenvolvemos a Atividade de Aprofundamento 1, realizada no quarto encontro.

É importante destacar que durante a semana de 04/09 a 08/09/2023, devido aos jogos intercolegiais, não houve atividades de pesquisa na escola. Toda a comunidade escolar, incluindo os alunos participantes da pesquisa, esteve envolvida nesse evento. Para evitar a quebra de aprendizado causada por uma semana sem aulas, retomamos a pesquisa em 11/09/2023 com a atividade de aprofundamento 1, revisando os conceitos discutidos nos encontros anteriores e focando na resolução do problema proposto no quarto encontro.

5.1.3 Quarto encontro

O quarto encontro, ocorrido na escola em 11/09/2023, teve como objetivo revisar os conceitos que envolvem a ideia de razão e mostrar a diferença entre o pensamento aditivo e multiplicativo. Esse encontro, com duração de duas aulas consecutivas, totalizando 80 minutos, foi inteiramente dedicado à realização da atividade de aprofundamento 1. Participaram 22 alunos, organizados em 6 grupos, cada um com 4 a 5 membros. Os grupos colaboraram na resolução do problema proposto, trocando ideias e discutindo abordagens.

PROBLEMA DE APROFUNDAMENTO 1 - A lagarta A tem 6 cm de comprimento e a lagarta B tem 4 cm de comprimento. b) Quanto a lagarta A é maior que a lagarta B? b) Quantas vezes a lagarta A é mais longa que a lagarta B?

Fonte: Adaptado pelos autores (2023).

Ao iniciarem a atividade, concedemos 10 minutos para que eles lessem o problema individualmente e, posteriormente, em grupo.

Após a leitura do problema, os alunos iniciaram a resolução do problema, tendo cerca de 20 minutos para aplicar seus conhecimentos. Desde o início, percebemos que eles enfrentavam desafios em manter a concentração, o que resultava em demora e adiamento na elaboração de suas respostas. Diante dessa situação, fizemos intervenções, encorajando-os a manter o foco, esclarecendo dúvidas e dando condições de prosseguirem em suas resoluções. Além disso, ressaltamos que não economizassem nos detalhes ao registrar a estratégia de resolução e que poderiam utilizar os desenhos das lagartas para melhor visualizarem a situação do problema.

Acerca do momento de intermediação com os grupos, em relação ao grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Olá grupo 1, Diga como vocês pensaram em resolver o problema?
>
> Integrante do grupo 1: Bom, professor, a letra a) é fácil, nós simplesmente pegamos o tamanho da lagarta A (6 cm) e diminuímos do tamanho da lagarta B (4 cm). Então, a resposta é que a lagarta A é 2 cm maior que a lagarta B.
>
> Professor: Muito bem grupo 1. E sobre a letra b), qual foi a resposta encontrada?
>
> Integrante do grupo 1: Bom, professor, pegamos os mesmos dados do problema, conversando entre nós, percebemos que a Letra b) tem a mesma resposta da letra a) que é 2 cm.
>
> Professor: Mas como vocês chegaram nessa conclusão?
>
> Integrante do grupo 1: A gente considerou que a lagarta A passou 2 cm da lagarta B, aí pensamos que a Lagarta A é duas vezes mais longa que a lagarta B.
>
> Professor: Vocês acreditam que esta resposta está correta?
>
> Integrante do grupo 1: Não temos certeza, professor, mas foi o que encontramos.

> Professor: Ok, façam novamente a leitura do problema, tentem observar se existe outra forma de resposta na letra b).
> Integrante do grupo 1: Certo, Professor!

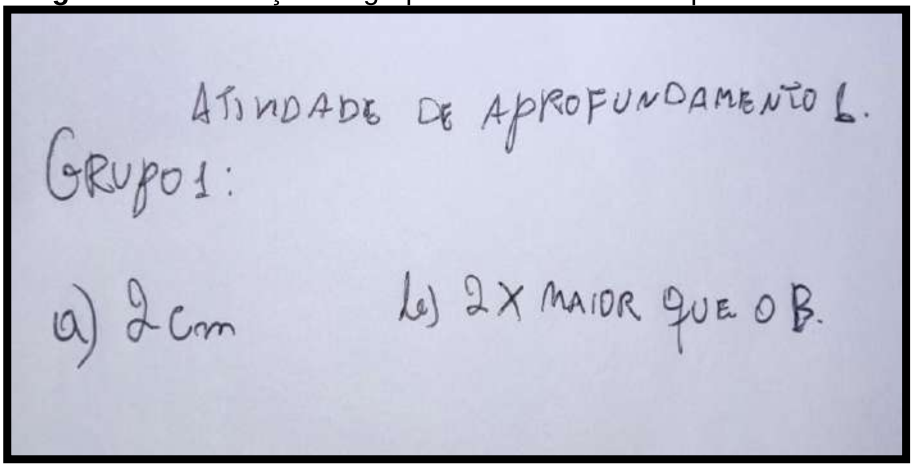
Compreendemos que, na pergunta (a) do problema, os seis grupos chegaram à resposta correta, identificando que a lagarta A era 2 cm maior que a lagarta B. No entanto, notamos que a maioria não estruturou completamente a resposta, omitindo a unidade de medida e deixando de explicar o significado do valor encontrado.

Para a pergunta (b), nenhum grupo acertou. Eles assumiram que a resposta seria a mesma da letra (a), devido à natureza da questão, que pedia quantas vezes a lagarta A é mais longa do que a lagarta B. Isso revela que os alunos tiveram dificuldade na compreensão da expressão "quantas vezes é mais longa", muitas vezes recorrendo apenas ao pensamento aditivo em suas estratégias. A falta de compreensão sobre a ideia da razão ficou evidente, já que não conseguiram aplicar corretamente a multiplicação para resolver a comparação entre os tamanhos das lagartas.

Posteriormente, um integrante de cada grupo apresentou a resolução do problema no quadro, permitindo que discutíssemos os procedimentos de respostas adotadas por eles, como podemos observar na resposta produzida por cada grupo a seguir.

O Grupo 1, apresentou a sua estratégia de resolução, conforme mostra a Imagem 16.

Imagem 16 - Resolução do grupo 1 da atividade de aprofundamento 1.

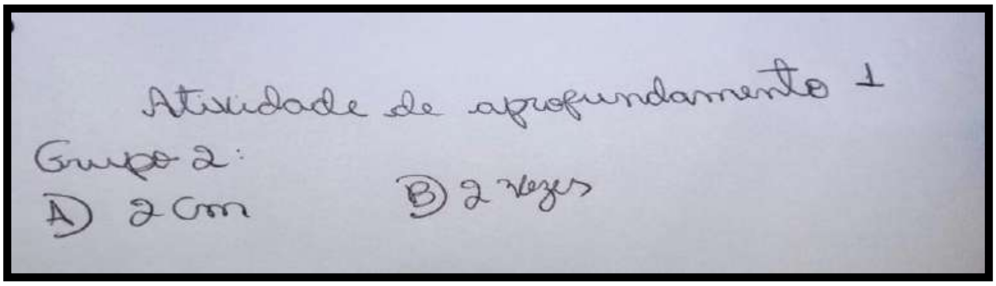


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 16, o grupo 1 na parte a) encontrou a resposta correta, apontando que a lagarta A é 2 cm maior que a lagarta B. No entanto, não detalharam o procedimento matemático utilizado para chegar a essa conclusão. Já na parte b), o Grupo 1 afirmou que a lagarta A é 2 vezes maior que a lagarta B, porém, essa resposta não está correta de acordo com o enunciado do problema. Além disso, não explicaram o raciocínio por trás dessa conclusão. A ausência de registro do procedimento matemático adotado dificulta a compreensão do pensamento seguido pelo Grupo 1 nessa etapa.

O Grupo 2, por sua vez, apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem 17.

Imagem 17 - Resolução do grupo 2 da atividade de aprofundamento 1.

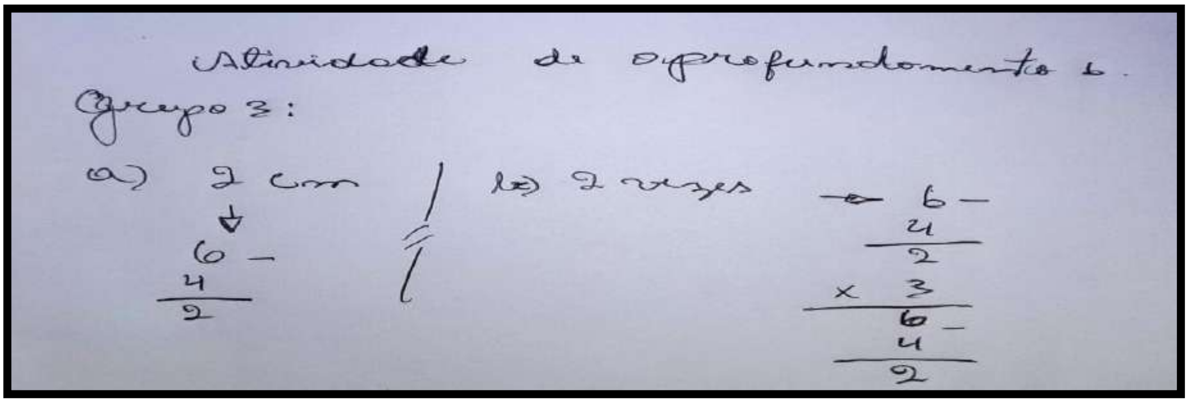


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 17, o grupo 2 chegou a conclusões semelhantes àquelas do grupo 1 tanto na parte a) quanto na parte b) do problema envolvendo as lagartas A e B. No entanto, assim como o grupo 1, eles não mostraram o procedimento matemático utilizado para chegar a essas conclusões.

O Grupo 3 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a imagem 18 a seguir.

Imagem 18 - Resolução do grupo 3 da atividade de aprofundamento 1.



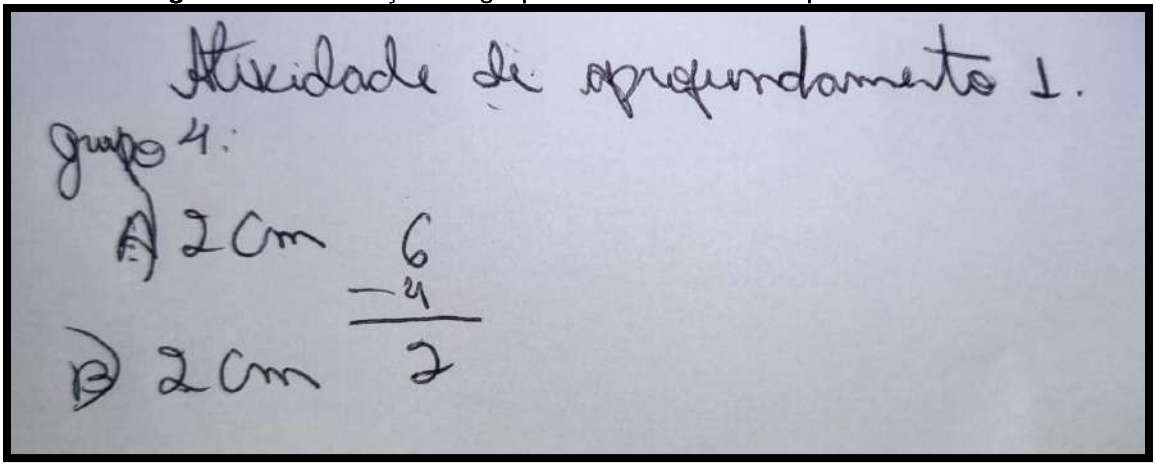
Fonte: Acervo pessoal (2023).

De acordo com a Imagem 18, o Grupo 3 acertou a resposta na parte a), indicando que a lagarta A é 2 cm maior que a lagarta B. Eles apresentaram o procedimento matemático utilizado, que consistiu em subtrair o tamanho da lagarta B do tamanho da lagarta A, resultando em 2 cm. Na parte b), para justificar a resposta de que a lagarta A é 2 vezes mais longa que a lagarta B, o Grupo 3 combinou o pensamento aditivo com o multiplicativo. Eles partiram da diferença entre o tamanho da lagarta A e o tamanho da lagarta B, que é de 2 cm, e perceberam que, para alcançar os 6 cm da lagarta A, era necessário multiplicar 2 cm por 3, resultando em 6 cm.

Em seguida, subtraíram novamente os 6 cm da lagarta A pelos 4 cm da lagarta B, obtendo novamente 2 cm. Entretanto, o equívoco ocorreu ao afirmarem que o valor 2 obtido já representava a quantidade de vezes que a lagarta A é mais longa que a lagarta B.

O Grupo 4, apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a imagem 19 a seguir.

Imagem 19 - Resolução do grupo 4 da atividade de aprofundamento 1.

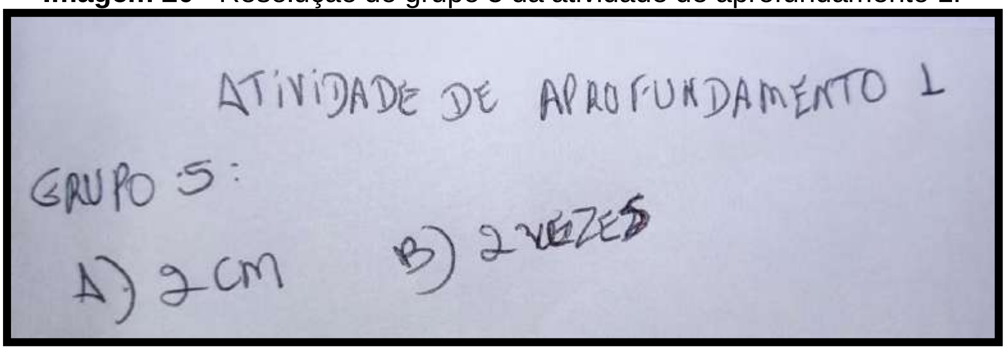


Fonte: Acervo pessoal (2023).

De acordo com a Imagem 19, o Grupo 4 acertou a resposta na parte a), indicando que a lagarta A é 2 cm maior que a lagarta B. Eles apresentaram o procedimento matemático utilizado, que consistiu em subtrair o tamanho da lagarta B do tamanho da lagarta A, resultando em 2 cm. Já na parte b), o Grupo 4 afirmou que a lagarta A é 2 cm maior que a lagarta B, porém, essa resposta não está correta de acordo com o enunciado do problema. Além disso, não explicaram o raciocínio por trás dessa conclusão.

O Grupo 5 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem a seguir:

Imagem 20 - Resolução do grupo 5 da atividade de aprofundamento 1.

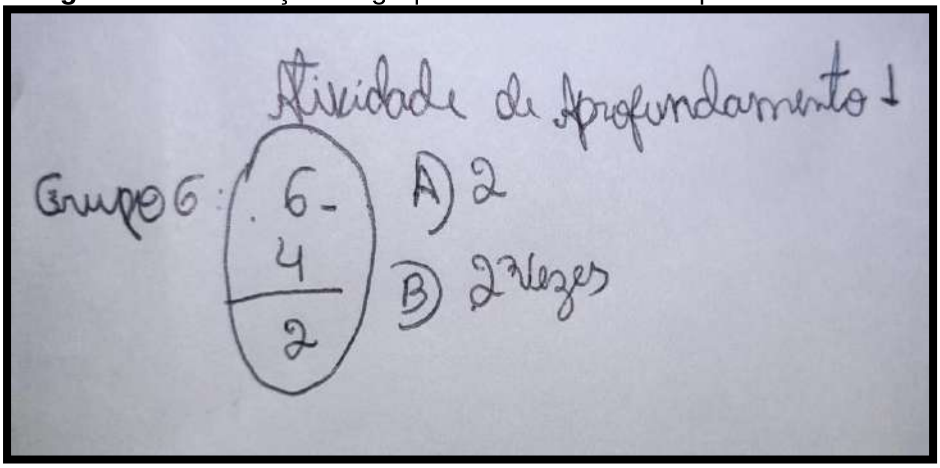


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 20, o grupo 5 chegou a conclusões semelhantes ao grupo 2 tanto na parte a) quanto na parte b) do problema envolvendo as lagartas A e B. No entanto, assim como o grupo 2, eles não detalharam o procedimento matemático utilizado para chegar a essas conclusões.

O Grupo 6 também apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem a seguir:

Imagem 21 - Resolução do grupo 6 da atividade de aprofundamento 1.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 21, o Grupo 6 chegou a conclusões semelhantes aos outros grupos, tanto na parte a) quanto na parte b) do problema envolvendo as lagartas A e B. No entanto, assim como os demais grupos, não forneceram detalhes sobre o procedimento matemático utilizado para chegar a essas conclusões.

Após a exposição no quadro das estratégias de resolução por parte de todos os grupos, chegamos à conclusão com a turma de que todos os grupos seguiram procedimentos semelhantes tanto na parte a) quanto na parte b) do problema envolvendo as lagartas A e B. No entanto, a maioria dos grupos não detalhou o processo utilizado para chegar às suas respostas.

Enquanto analisávamos as dificuldades no item a), notamos que todos acertaram e que apenas o grupo 6 deixou de registrar a unidade (cm) do valor encontrado. Já no item b), observamos que os alunos demonstraram uma falta de compreensão ao não reconhecerem um problema característico do campo multiplicativo. Sem refletirem adequadamente, resolvera-o como se pertencesse ao campo aditivo, revelando, assim, uma compreensão limitada dos diferentes tipos de operações matemáticas ou da expressão “quantas vezes é mais longa”. Essa tendência indicou que os alunos ainda estavam enraizados em estratégias aditivas, possivelmente por serem mais familiares ou intuitivas para eles, o que pode ter dificultado a transição para o pensamento multiplicativo.

Em detrimento dessa dificuldade, os grupos cometeram um erro conceitual na resposta do item b), pois, ao utilizarem a adição em um problema que exigia multiplicação, demonstraram não ter internalizado a ideia de que a multiplicação é uma forma mais eficiente de representar a adição de parcelas iguais. É fundamental ressaltar que, em determinadas situações, a utilização da adição pode conduzir a resultados diferentes daqueles obtidos pela multiplicação, como demonstrado no problema em questão.

Outra dificuldade observada inicialmente foi a falta de concentração para discutirem o problema, pois havia frequência de conversas paralelas entre eles, o que gerou perda de foco na resolução do problema. Além disso, alguns alunos participaram e contribuíram para a construção da estratégia de resposta, enquanto outros não se envolveram.

No entanto, ao percebermos a situação, estimulamos e incentivamos todos os alunos a participarem daquele momento importante de aprendizagem. Pedimos aos grupos que colaborassem mais efetivamente na atividade, enfatizando a importância de focar na resolução do problema.

Diante disso, explicamos acerca das principais relações do pensamento aditivo, que envolvem composição, transformação e comparação. Apresentamos, por meio do problema, a concepção de razão, proporcionando também uma explanação sobre o pensamento multiplicativo. Outrossim, observamos que na parte a) do problema, todos os grupos chegaram à resposta correta, identificando que a lagarta A era 2 cm maior que a lagarta B, visto que subtraíram o tamanho da lagarta B do tamanho da lagarta A, resultando em 2 cm.

Para explicar a letra (b) do problema, desenhamos as duas lagartas no quadro para facilitar a visualização da situação. Expressamos os dados do problema em forma de razão, estabelecendo as medidas das lagartas como uma grandeza comum, ou seja, o comprimento delas. A razão foi expressa como o tamanho da lagarta A em relação ao tamanho da lagarta B, representada por $\frac{A}{B}$, substituindo os valores, obtivemos $\frac{6}{4}$, e ao simplificar $\frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, concluímos que a lagarta A é 1,5 vezes maior do que a lagarta B.

Assim, os estudantes tiveram a oportunidade de consolidar sua compreensão sobre o conceito de razão e de perceber a diferença entre situações envolvendo relações multiplicativas e aditivas. Além disso, puderam enriquecer seu conhecimento ao avaliar seus acertos e erros na elaboração das estratégias de respostas adotada pelo seu grupo.

Observamos que, nas resoluções da Atividade de Aprofundamento 1, os alunos demonstraram domínio do pensamento aditivo; no entanto, na situação multiplicativa, ainda erraram, tratando-a como se fossem do campo aditivo, ou seja, resolvendo-a de maneira inadequada. Ao explorarmos as resoluções realizadas por cada grupo no quadro, tivemos a oportunidade de explicar, a partir dos erros cometidos, onde eles estavam falhando. Dessa forma, conseguimos mostrar a diferença entre o pensamento aditivo e o multiplicativo, destacando a comparação multiplicativa que caracteriza a razão.

Nesse sentido, a aprendizagem e a avaliação dos alunos foram conduzidas de forma processual e reflexiva. O processo de aprendizagem se centrou na construção gradual do conhecimento, em que os alunos tiveram a oportunidade de consolidar conceitos importantes, como a distinção entre o pensamento aditivo e o multiplicativo, e entender a noção de razão. Esse aprendizado foi potencializado pela avaliação contínua, que não apenas identificou erros, mas os utilizou como uma ferramenta no processo de ensino-aprendizagem para aprofundar a compreensão dos alunos.

A avaliação formativa foi fundamental para identificar e corrigir, de forma imediata e contextualizada, as dificuldades dos alunos na situação multiplicativa do problema. Ao explorar os erros e oferecer explicações detalhadas, transformou-se em um momento de aprendizagem, promovendo a compreensão conceitual e procedimental e utilizando os erros como oportunidades de revisão e reflexão, aprimorando o domínio das operações envolvidas.

Dessa forma, a integração entre aprendizagem e avaliação possibilitou um ensino mais efetivo e significativo, pois os alunos não apenas corrigiram suas estratégias, mas também começaram internalizar novos conhecimentos a partir de suas próprias práticas.

5.1.4 Quinto encontro

No quinto encontro, realizado em 12/09/2023, 20 alunos estiveram presentes. Nesse encontro, que durou duas aulas consecutivas, totalizando 80 minutos, os alunos foram organizados em 4 grupos de trabalho. O objetivo desse problema gerador foi introduzir a ideia de proporção.

PROBLEMA GERADOR: Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas para cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teriam que colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas?

Fonte: Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010).

Após cada aluno ter recebido uma cópia do problema gerador, concedemos 10 minutos para que os alunos lessem o problema individualmente, a fim de assimilá-lo melhor. Posteriormente, eles se reuniram em grupos, para compartilhar ideias e procedimentos matemáticos que conseguiram mobilizar com base em seus conhecimentos prévios. Essa colaboração mútua teve como objetivo ajudá-los na elaboração da estratégia de resolução do problema.

Depois de debaterem o problema em seus grupos e escolherem a técnica a ser aplicada, os alunos iniciaram a resolução do problema. Eles tiveram cerca de 20 minutos para aplicar seus conhecimentos. Passados 5 minutos desse tempo, fizemos uma visita a cada grupo para acompanhar o progresso na elaboração da resposta. Observamos os procedimentos matemáticos utilizados e esclarecemos dúvidas que surgiram. Além disso, incentivamos os alunos a não desistirem diante de eventuais dificuldades. É normal enfrentar obstáculos, mas com foco e persistência, logo podem encontrar a resposta desejada.

Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Olá, grupo 1! Como estão se saindo com o problema das rosas?
>
> Integrante 1 do grupo 1: Oi, professor. Estamos tentando resolver, mas estamos um pouco confusos.
>
> Professor: Entendo. Deixe-me captar o raciocínio de vocês. Alguém pode me explicar qual estratégia estão utilizando?
>
> Integrante 2 do grupo 1: Estamos tentando somar aqui para solucionar o problema.
>
> Professor: Certo! Vamos ver como isso funciona. Se a florista fez um ramo com dez rosas brancas, qual é o total de rosas no ramo?
>
> Integrante 3 do grupo 1: Seriam as dez rosas brancas mais o número de rosas amarelas que precisamos somar.

Professor: Certo! Agora, de que maneira vocês sugerem resolver esse problema utilizando a operação de adição?

Integrante 1 do grupo 1: Podemos somar rosas amarelas até atingir a mesma quantidade de rosas brancas.

Professor: Exatamente! Então, quantas rosas amarelas precisamos somar para cada duas rosas brancas no ramo?

Integrante 2 do grupo 1: Precisamos somar quatro rosas amarelas para cada duas brancas.

Professor: Certo! E quantas vezes essa sequência de colocar quatro amarelas para cada duas brancas se repete em um ramo com dez rosas brancas?

Integrante 3 do grupo 1: Seriam cinco vezes, já que $\frac{10}{2} = 5$.

Professor: Perfeito! Então, quantas rosas amarelas precisamos somar ao todo?

Integrante 1 do grupo 1: A gente precisa unir 4 amarelas vezes 5, o que dá um total de 20 rosas amarelas.

Professor: Muito bem! Agora, registrem a estratégia de resolução de vocês por escrito. Lembrem-se, se surgir alguma outra dúvida ou se quiserem discutir algo mais, estou à disposição para ajudar.

Integrante 1 do grupo 1: Entendido, professor, vamos fazer isso!

Professor: Certo!

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

Professor: “Olá, pessoal do Grupo 2! Como estão se saindo com o problema das rosas?”

Integrante 1 do grupo 2: “Professor, nós escolhemos a operação de adição para resolver o problema. Começamos adicionando 2 rosas brancas 10 vezes, o que nos deu um total de 20 rosas brancas.”

Professor: “Interessante! Mas parece que vocês tiveram dificuldade de compreensão. Vamos analisar mais detalhadamente. O enunciado diz que a florista coloca duas rosas brancas para cada quatro amarelas. Isso significa que a relação é de 2 para 4. Se temos 10 rosas brancas, quantas rosas amarelas precisamos para manter essa mesma relação?”

Integrante 2 do grupo 2: “Ah, entendi! Se temos 10 rosas brancas, precisamos de 20 rosas amarelas para manter a relação correta.”
Professor: “Excelente! Agora que vocês compreenderam a ideia, registrem a estratégia de resolução por escrito. Se tiverem alguma dúvida, sintam-se à vontade para me perguntar.”
Integrante 2 do grupo 2: "Compreendido, professor!"
Professor: “Ótimo!”

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Pesquisar: Olá, pessoal do grupo 3! Como estão indo com a solução do problema das rosas?
Integrante 1 do grupo 3: Olá, professor! A gente já conseguiu concluir e encontramos a resposta!
Professor: Fantástico! Podem me mostrar como resolveram o problema?
Integrante 2 do grupo 3: Desenhamos os ramos das rosas com base nas informações fornecidas.
Integrante 3 do grupo 3: Criamos cinco ramos, cada um com duas rosas brancas e quatro rosas amarelas, porque a florista deseja um total de dez rosas brancas.
Professor: Ótimo! O desenho do problema é uma maneira eficaz de visualizar a situação.
Integrante 4 do grupo 3: Depois de desenhar os ramos, contamos as rosas amarelas em cada um.
Integrante 4 do grupo 3: Cada ramo possui quatro rosas amarelas, então somamos a quantidade de 4 rosas cinco vezes, encontramos a resposta que é 20 rosas amarelas.
Professor: Excelente! Vocês identificaram a quantidade de rosas amarelas em cada arranjo e chegaram à resposta correta: 20 rosas amarelas.

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: Olá, pessoal grupo 4! Estão conseguindo resolver esse problema com as rosas?

Integrante 1 do grupo 4: Oi, professor. Estamos um pouco perdidos com isso.

Professor: Entendo. Leia novamente o problema para tentar compreender melhor.

Integrante 1 do grupo 4 fez a leitura em voz alta para todos os integrantes do seu grupo.

Professor: Então, a florista está fazendo ramos com rosas amarelas e brancas, mantendo uma relação específica. Vocês sabem qual é essa relação?

Integrante 2 do grupo 4: É duas rosas brancas para cada quatro rosas amarelas, seria isso?

Professor: Isso mesmo! Agora, se ela fizer um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas ela precisa colocar para manter essa relação?

Integrante 3 do grupo 4: Não sei por onde começar.

Professor: Vamos pensar juntos. Se ela precisa de duas brancas para cada quatro amarelas, podemos fazer grupos de duas brancas e ver quantos grupos de quatro amarelas correspondem a esses grupos. Quantos grupos de duas brancas temos em 10 rosas brancas?

Integrante 1 do grupo 4: Cinco grupos.

Professor: Isso mesmo! Se quiserem vocês podem desenhar a situação das rosas para melhor compreenderem.

Integrante 1 do grupo 4: Certo, professor!

Professor: E quantas rosas amarelas são necessárias para cada grupo de duas brancas?

Integrante 2 do grupo 4: Quatro amarelas para cada grupo de duas brancas.

Professor: Correto! Quantos grupos de quatro amarelas precisaríamos então?

Integrante 3 do grupo 4: Se são cinco grupos de duas brancas, precisaríamos de cinco grupos de quatro amarelas.

Professor: Exatamente! E quantas rosas amarelas seriam necessárias ao todo?

Integrante 1 do grupo 4: Seriam 20 rosas amarelas.

Professor: Muito bem! Então, para manter a proporção, a florista precisaria colocar 20 rosas amarelas para cada ramo com 10 rosas brancas. Conseguiram entender?

Integrante 2 do grupo 4: Sim, agora ficou mais claro. Obrigado, professor!

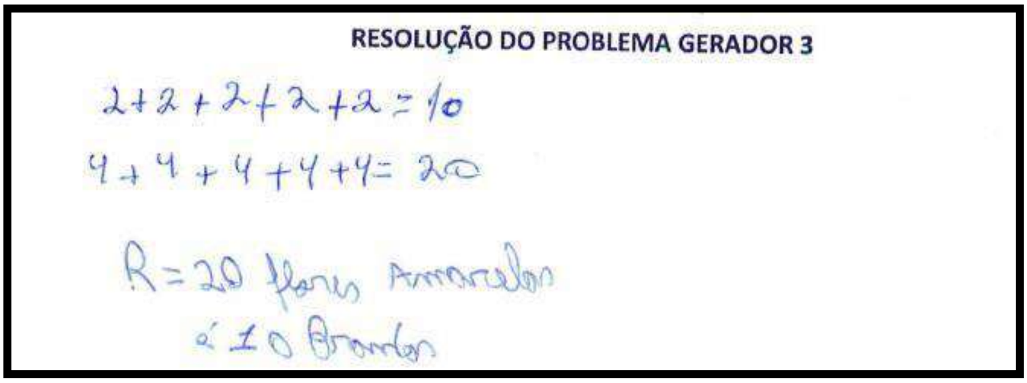
Professor: De nada! Estou aqui para ajudar. Se tiverem mais dúvidas, é só perguntar. Só mais uma coisa! Agora, como vocês compreenderam o problema, façam a estratégia de resolução de vocês por escrito.

Integrante 2 do grupo 4: Certo, professor! Deixe com a gente.

Logo após a resolução do problema, um integrante de cada grupo apresentou a resolução do problema no quadro, permitindo que discutíssemos os procedimentos de respostas adotadas por eles, como podemos observar na resposta produzida por cada grupo a seguir.

O grupo 1 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem 22:

Imagem 22 - Resolução do grupo 1 do problema gerador.


RESOLUÇÃO DO PROBLEMA GERADOR 3

$2+2+2+2+2=10$

$4+4+4+4+4=20$

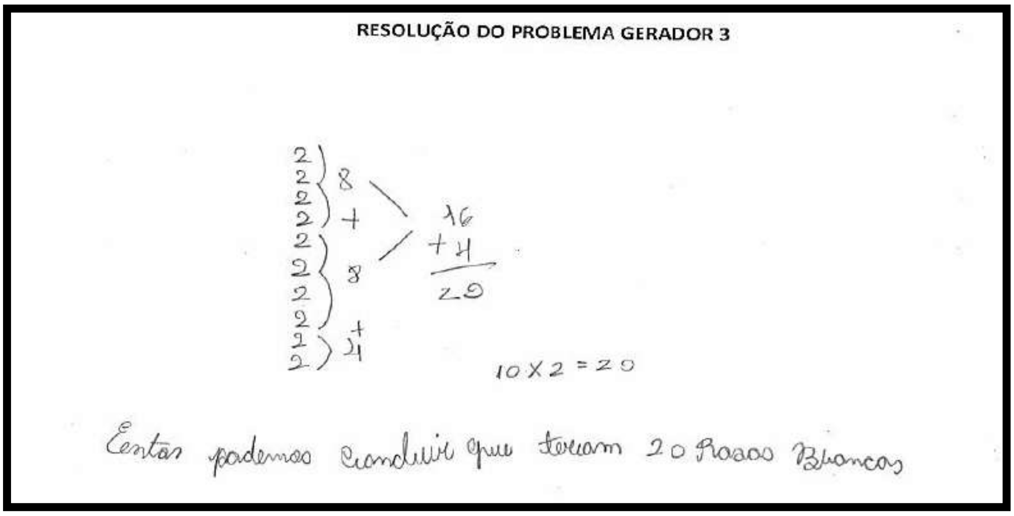
R=20 flores Amarelas
é 10 Brancas

Fonte: Acervo pessoal (2023).

O grupo 1 optou pela adição para resolver o problema das rosas. Eles começaram adicionando 2 rosas brancas cinco vezes, resultando em um total de 10 rosas brancas. Em seguida, aplicaram o mesmo método para determinar o número de rosas amarelas. Ao adicionar as 4 rosas amarelas cinco vezes, chegaram a um total de 20 rosas amarelas.

O grupo 2, por sua vez, apresentou a sua estratégia de resposta, conforme mostra a Imagem 23.

Imagem 23 - Resolução do grupo 2 do problema gerador.



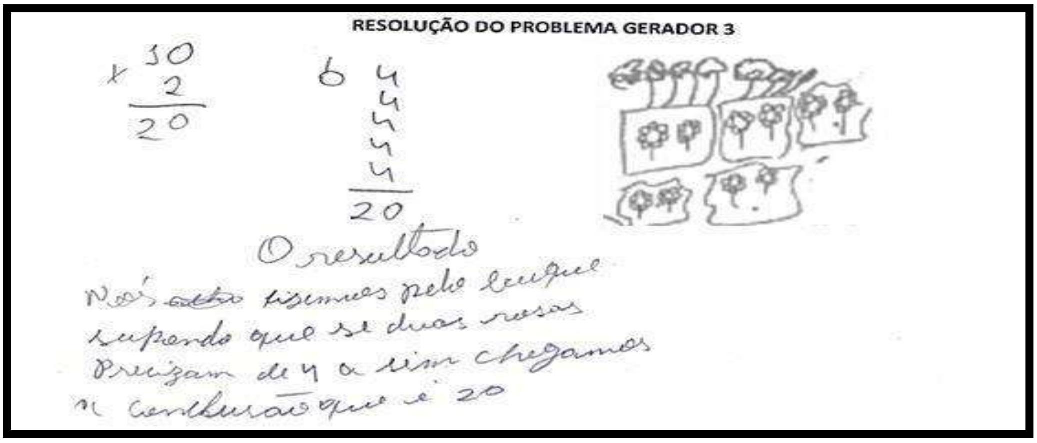
Fonte: Acervo pessoal (2023).

Com base na Imagem 23, o grupo 2 optou pela operação de adição para resolver o problema das rosas. No entanto, eles começaram adicionando 2 rosas brancas 10 vezes, resultando em um total de 20 rosas brancas e não as 20 rosas amarelas. Além disso, eles multiplicaram 10 x 2 como uma alternativa para calcular o número total de rosas amarelas, chegando ao número 20.

Contudo, o grupo apresentou dificuldade para expressar a relação entre as rosas brancas e amarelas. De acordo com o problema, essa relação deveria ser de 2 rosas brancas para 4 rosas amarelas. Durante nossa visita ao grupo, percebemos que eles estavam com dificuldade de compreensão do problema; embora tenham entendido a ideia, não registraram corretamente no quadro conforme haviam compreendido.

O grupo 3 apresentou a sua estratégia de resposta, conforme Imagem 24 a seguir.

Imagem 24 - Resolução do grupo 3 do problema gerador.

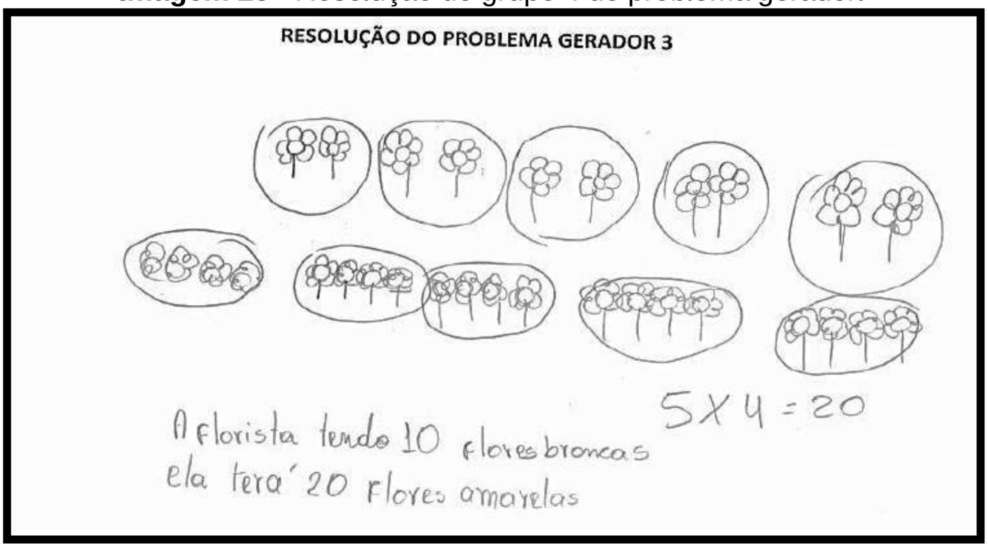


Fonte: Acervo pessoal (2023).

O grupo 3 escolheu a operação de adição e utilizou desenhos para resolver o problema das rosas. Ao observarem o desenho dos ramos de flores, perceberam que a florista organizou cada ramo com 2 flores brancas e 4 flores amarelas. Com base nessa informação, eles concluíram que, com as 10 flores, poderiam formar 5 ramos. Para determinar o número total de rosas amarelas, somaram 4 rosas amarelas repetidamente 5 vezes, chegando ao total de 20 rosas amarelas. Além disso, como uma alternativa de cálculo, multiplicaram 10 x 2, também obtendo o resultado de 20 rosas amarelas.

O grupo 4, apresentou a sua estratégia de resolução, como mostra a Imagem 25.

Imagem 25 - Resolução do grupo 4 do problema gerador.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

O grupo 4 utilizou desenhos das rosas e círculos para representar as rosas brancas e amarelas, respectivamente. Essa representação evidencia que o grupo compreendeu a relação entre as quantidades de rosas. Após desenharem a situação, os integrantes do grupo 4 identificaram um operador vertical (5x). Esse operador multiplicava 2 rosas brancas por 5, resultando em 10 rosas brancas. Além disso, o mesmo operador também multiplicava 4 rosas amarelas por 5, chegando ao total de 20 rosas amarelas. Nesse contexto, é importante ressaltar a presença da estrutura multiplicativa, uma vez que a multiplicação foi a operação escolhida para encontrar a quarta proporcional desejada.

Após a plenária, chegamos a um consenso com a turma sobre qual estratégia elaborada por eles melhor atendia à situação das rosas descrita no problema gerador 3. A estratégia escolhida foi a do grupo 4, que desenhou 10 rosas brancas distribuídas em 5 círculos, com 2 rosas em cada círculo. Da mesma forma, eles desenharam 5 círculos com 20 rosas amarelas, com 4 rosas em cada círculo, respeitando a proporção de 2 rosas brancas para 4 rosas amarelas em cada ramo feito pela florista. Finalmente, eles realizaram a multiplicação 5 x 4 = 20, demonstrando como chegaram à resposta através do cálculo.

Em seguida, procedemos com a formalização do conceito de proporção simples, discutindo o significado de grandezas, reiterando a importância da razão e explicando o conceito de proporção. Conforme foi mostrado na Imagem 25, o grupo 4 apresentou sua estratégia por desenho, na qual desenhou círculos contendo tanto rosas brancas quanto rosas amarelas, levando em consideração a relação entre as rosas para compor o ramo.

Explicamos aos alunos que tanto a quantidade de rosas brancas quantos a quantidade de rosas amarelas são grandezas diretamente proporcionais, ou seja, se uma quantidade de rosas brancas aumenta a quantidade de rosas amarelas aumenta, se uma diminui a outra também diminui. Para que a turma pudesse compreender as relações entre as quantidades de rosas contida na estratégia do grupo 4, explicamos da seguinte forma:

Relação Vertical	$Quantidade Rosa\ Brancas$	.	$Quantidade\ de\ Rosas\ Amarelas$	Relação Vertical
	2	–	4	
	10	–	$?$	

Para encontrar a quantidade de rosas amarelas no ramo maior, os alunos do grupo 4 perceberam que existe uma relação multiplicativa entre a quantidade de rosas no ramo menor, com 2 rosas brancas, e a no ramo maior, com 10 rosas brancas. Dessa forma, foi preciso descobrir o valor do operador, conforme mostrado na equação: $\overbrace{2 \times ? = 10}^{Rosas\ Brancas}$. Ao resolver essa equação, encontraram $? = 5$, ou seja, o operador dessa relação vertical é $\times\ 5$. Utilizando o operador $\times\ 5$, o grupo 4 aplicou essa mesma lógica à relação vertical da quantidade de rosas amarelas para determinar a quantidade desconhecida de rosas amarelas no ramo maior.

Relação Vertical

$$\begin{array}{ccc} Quantidade\ de\ Rosa\ Brancas & . & Quantidade\ de\ Rosas\ Amarelas \\ 2 & - & 4 \\ \downarrow \times 5 & & \downarrow \times 5 \\ 10 & - & ? \end{array}$$

Relação Vertical

Dessa forma, o grupo 4 encontrou a quantidade desconhecida de rosas amarelas ao resolver a equação: $4 \times 5 = ?$, que resultou em $? = 20$. Ou seja, eles determinaram que o ramo maior contém 10 rosas brancas e 20 rosas amarelas.

Nesse momento, explicamos à turma que entre o ramo menor e o maior existe uma razão entre as quantidades das rosas brancas e das rosas amarelas. Então explicamos que a razão é uma maneira de comparar quantidades diferentes. No problema, a razão entre as quantidades de rosas brancas do ramo menor para o ramo maior é $\frac{2}{10}$, isto é, para cada 2 rosas brancas do ramo menor, há 10 rosas brancas no ramo maior. Neste caso, a razão $\frac{2}{10}$ pode ser simplificada dividindo ambos os números por 2, temos a razão $\frac{1}{5}$. Isso significa que para cada 1 rosa branca no ramo menor, há 5 rosas brancas no ramo maior.

Aplicando a mesma lógica, a razão entre as quantidades de rosas amarelas do ramo menor para o ramo maior é $\frac{4}{20}$, logo, para cada 4 rosas amarelas do ramo menor, há 20 rosas amarelas no ramo maior. Neste caso, a razão $\frac{4}{20}$ pode ser simplificada dividindo ambos os números por 4, temos a razão $\frac{1}{5}$. Isso significa que para cada 1 rosa amarela no ramo menor, há 5 rosas amarelas no ramo maior. Assim, temos:

$$\overbrace{Razão\ das\ quant.\ das\ Rosas\ Brancas}^{No\ ramo\ menor} \qquad \overbrace{Razão\ das\ quant.\ das\ Rosas\ Amarelas}^{No\ ramo\ maior}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \qquad & \downarrow \\ \dfrac{2}{10} & & \dfrac{4}{20} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dfrac{1}{5} & & \dfrac{1}{5} \end{array}$$

Portanto, com essas razões, introduzimos aos alunos a ideia de proporção, esclarecendo que uma proporção é uma igualdade entre duas razões. Van de Walle (2009) ressalta que uma razão é um número que expressa uma relação multiplicativa, a qual pode ser aplicada a uma segunda situação em que as quantidades ou medidas relativas sejam as mesmas que na primeira situação. O autor esclarece, portanto, que uma proporção é uma declaração de igualdade entre duas razões.

Para exemplificar a ideia de proporção, Van de Walle (2009) apresenta o seguinte exemplo: se 4 barcos transportam 36 passageiros, então 2 barcos do mesmo tamanho transportarão 18 passageiros, 3 barcos levarão 27 passageiros e 20 barcos levarão 180 passageiros. Nesse contexto, a razão de 4 para 36 pode ser aplicada a cada uma dessas situações, mesmo que as medidas sejam diferentes em cada caso.

Seguindo essa lógica, explicamos aos alunos que existe uma relação multiplicativa entre as 2 rosas brancas com as 4 rosas amarelas do ramo menor. Dessa forma, foi preciso descobrir o valor do operador, conforme mostrado na equação: $2 \times ? = 4$. Ao resolver essa equação, encontraram $? = \frac{4}{2} \Rightarrow ? = 2$, ou seja, o operador dessa relação horizontal é $\times\ 2$. Utilizando o operador $\times\ 2$, aplicamos essa mesma lógica à relação horizontal que envolve as rosas brancas e amarelas do ramo maior para determinar a quantidade desconhecida de rosas amarelas.

Dessa forma, encontramos a quantidade desconhecida de rosas amarelas ao resolver a equação: $10\ \times\ 2\ = ?$, que resultou em $?\ =\ 20$. Isto é, o ramo maior contém 10 rosas brancas e 20 rosas amarelas. Com isso, explicamos à turma que existe uma razão entre as quantidades das rosas brancas e as quantidades das rosas amarelas. É importante destacar que a formalização do conteúdo foi conduzida de forma ativa, envolvendo os alunos no processo de aprendizagem. Os alunos tiveram a oportunidade de esclarecer dúvidas e consolidar o aprendizado por meio da resolução do problema.

Em momentos de aprendizagem como esse, Van de Walle (2009) acrescenta que, para que os alunos comecem a compreender a razão como um valor único aplicável a diferentes situações proporcionais, é fundamental que aprendam a reconhecer essas relações em contextos variados. Além disso, eles devem entender que, em cada situação, as duas quantidades podem estar na mesma razão. O autor também destaca que os alunos precisam ser capazes de comparar situações nas quais as medidas não estão na mesma razão e identificar como essas razões diferem.

Para Van de Walle (2009), muitas das atividades mais valiosas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional não envolvem apenas a resolução de proporções, mas, em vez disso, a comparação de razões em situações semelhantes, porém não proporcionais.

Neste problema de proporção simples, ao avaliarmos a aprendizagem através das resoluções elaboradas pelos alunos em grupo, notamos que a maioria ainda não havia conseguido desvincular o pensamento aditivo em situações que exigiam o pensamento multiplicativo. Esse fato evidenciou a ausência de pensamento proporcional, pois, ao mobilizar o conhecimento matemático para a resolução, apresentaram adição por parcelas, seguindo uma ordem até atingir a quantidade esperada de rosas brancas e amarelas.

Por outro lado, o grupo 4 utilizou o pensamento multiplicativo em seu cálculo para resolver o problema e, além disso, desenvolveu desenhos que envolviam círculos com flores, mantendo uma relação diretamente proporcional, conforme descrito no enunciado do problema. Dessa forma, conseguimos identificar indícios de pensamento proporcional nos alunos do grupo 4.

Com a formalização do conceito de proporção por meio da resolução do problema gerador, pudemos explorar o conceito de razão, o qual a maior parte dos alunos não conseguiu demonstrar compreensão conceitual, como indicado pelos procedimentos matemáticos utilizados. No entanto, com as explicações dos conceitos, conseguimos ajudar os alunos a minimizar suas dificuldades de compreensão e avançarem na aprendizagem, aproximando-os da prática do pensamento multiplicativo. Assim, eles passaram a entender melhor a comparação multiplicativa, que anteriormente apresentava lacunas em sua compreensão.

Para ajudar os alunos a aplicarem e aprofundarem sua aprendizagem sobre os conceitos de razão e proporção trabalhados na atividade com o problema gerador, propusemos, no sexto encontro, a Atividade de Aprofundamento 2.

5.1.5 Sexto encontro

No dia 13/09/2023, ocorreu o sexto encontro na escola que se estendeu por duas aulas consecutivas, totalizando 80 minutos. Nesse encontro fizemos 6 grupos na sala de aula, cada um com 4 a 5 membros, e teve por objetivo aplicar a atividade de aprofundamento do conceito de proporção (Apêndice C).

A atividade consistiu na resolução de seis problemas práticos envolvendo proporção simples para exercitarem o conhecimento apreendido de proporção, permitindo que os alunos praticassem e aprofundassem seus conhecimentos sobre o assunto, ao mesmo tempo em que esclareciam dúvidas pendentes. Seguem as descrições dos problemas apresentados:

1 - Pedro comprou um saco com 20 bombons. Se ele comprasse 5 sacos quantos bombons teria?

2 - Um pacote de biscoito de maisena custa R$ 5,00. Quanto terei que pagar por três pacotes?

3 - Na festa de aniversário de Anita teremos 36 convidados. Em cada uma das mesas ficarão 4 convidados. Quantas mesas serão necessárias?

4 - Carla ler uma página do livro em 5 minutos. Quantos minutos gastaria para ler 6 páginas?

5 - Para fazer 3 vestidos são necessários 5m de tecido. Rosana tem 35 m de tecido. Quantas vestidos ela pode fazer?

6 - Caio foi ao supermercado e comprou 9 caixas de suco e pagou R$ 36,00. Se ele comprasse 3 caixas de suco, quanto em reais ele precisaria pagar?

Colocamos cada problema no quadro para garantir que todos pudessem vê-los claramente. Em seguida, conduzimos uma leitura coletiva de cada problema com a turma para auxiliá-los na interpretação. Após essa etapa, os alunos foram divididos em grupos e receberam cerca de 10 minutos para lerem, compreenderem e resolverem cada problema proposto.

Em geral, os alunos enfrentaram poucas dificuldades. As que surgiram estavam, principalmente, relacionadas à falta de concentração e à dificuldade de interpretação durante a leitura dos problemas. Para superar essas dificuldades, visitamos cada grupo, incentivando-os a pensarem de forma matemática para resolver cada problema.

Durante os primeiros 5 minutos do período destinado à compreensão e resolução do problema, circulamos entre os grupos para acompanhar como estão resolvendo o primeiro problema. A seguir, apresentamos os diálogos que tivemos com os grupos:

PROBLEMA 1 - Pedro comprou um saco com 20 bombons. Se ele comprasse 5 sacos quantos bombons teria?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Após a leitura, discussão e elaboração do plano de resposta, realizamos um diálogo com os grupos para compreender como chegaram à solução.

> Professor: Olá, turma! Gostaria de ver como vocês estão resolvendo o problema. Alguém já pode me contar como estão pensando em seus grupos?
> Integrante do grupo 1: Nós podemos, professor! A gente entendeu aqui, que precisamos multiplicar o número de bombons em um saco pelo número total de sacos que Pedro comprou.
> Professor: Ótimo ponto de partida! Então, quanto bombons há em um saco?
> Integrante do grupo 1: O problema diz que Pedro comprou um saco com 20 bombons.
> Professor: Correto! E quantos sacos ele comprou no total
> Integrante do grupo 2: Cinco sacos, segundo o enunciado.
> Professor: Perfeito! Agora, como podemos usar essas informações para determinar quantos bombons Pedro teria ao todo?
> Integrante do grupo 3: Podemos multiplicar o número de bombons em um saco pelo número total de sacos.
> Professor: Exatamente! Vocês conseguem fazer essa multiplicação?
> Integrante do grupo 4: Sim, 20 vezes 5 é igual a 100.
> Professor: Muito bem! Vocês estão no caminho certo. Agora, gostaria de saber quem mais conseguiu fazer ou alguma dúvida que gostaria de discutir?

> Integrante do grupo 5: Nós também pensamos em multiplicar o número de bombons em um saco pelo número total de sacos, professor. Parece ser a maneira mais direta de resolver o problema.
> Professor: Concordo, essa é uma abordagem bastante lógica. E vocês, Grupo 6, têm algo a acrescentar?
> Integrante do grupo 6: Estamos pensando da mesma forma, professor. Parece que multiplicar 20 por 5 nos dá a resposta que estamos procurando.
> Professor: Bom trabalho, todos! Agora, vamos para o próximo problema.

PROBLEMA 2 - Um pacote de biscoito de maisena custa R$ 5,00. Quanto terei que pagar por três pacotes?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Depois de lerem, debaterem e criarem uma estratégia de resolução, conduzimos uma conversa com os grupos para entender o processo que os levou à conclusão.

Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Olá pessoal! Como estão progredindo na resolução do problema?
> Integrante 1 do grupo 1: Estamos tentando descobrir quanto vamos pagar por três pacotes de biscoito de maisena.
> Professor: Ótimo! Já chegaram a alguma resposta?
> Integrante 2 do grupo 1: Acreditamos que aqui o valor será R$ 15,00, mas não temos certeza.
> Professor: Muito interessante! Vocês podem me explicar como chegaram a essa conclusão?
> Integrante 3 do grupo 1: Multiplicamos o preço de um pacote, R$ 5,00, por três, que é a quantidade que queremos comprar.
> Professor: Excelente!

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

> Professor: E aí, pessoal! Já descobriram o valor total a ser pago?
> Integrante 4 do grupo 2: Sim, professor! Calculamos que será R$ 15,00.

> Professor: Perfeito! Vocês poderiam compartilhar com a turma como chegaram a esse resultado?
> Integrante 2 do grupo 2: Fizemos uma soma simples: R$ 5,00 + R$ 5,00 + R$ 5,00, somando o preço de cada pacote.
> Professor: Muito bem! Essa é mais uma maneira válida de encontrar o valor total. Vocês podem pensar em outras formas de chegar ao mesmo resultado?
> Integrante 3 do grupo 2: Eu acho que podemos usar a multiplicação.
> Professor: Ótima ideia! Como podemos fazer isso?
> Integrante 1 do grupo 2: Podemos multiplicar o preço de um pacote pelo número de pacotes que queremos comprar.
> Professor: Exatamente! Quantos pacotes queremos comprar?
> Integrante 4 do grupo 2: Queremos comprar três pacotes.
> Professor: Então, vamos multiplicar R$ 5,00 por 3. Qual é o resultado?
> Integrante 2 do grupo 2: O resultado é R$ 15,00!
> Professor: Muito bem! Percebam que chegamos ao mesmo resultado utilizando duas estratégias diferentes: a soma e a multiplicação.

Os demais grupos seguiram a mesma linha de raciocínio apresentada pelos grupos 1 e 2, utilizando a multiplicação método de resolução e chegaram no mesmo resultado de R$ 15,00.

PROBLEMA 3 - Na festa de aniversário de Anita teremos 36 convidados. Em cada uma das mesas ficarão 4 convidados. Quantas mesas serão necessárias?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Uma vez que tenham lido, discutido e preparado uma estratégia de resolução, promovemos um diálogo com os grupos para explorar o raciocínio por trás da solução.

Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 1, como estão indo na resolução do problema? Algum grupo gostaria de compartilhar o que discutiram até agora?
>
> Integrante do grupo 1: Estamos usando a divisão para calcular o número de mesas necessárias. Aqui a gente tá achando que serão 9 mesas no total.

Professor: Ótimo trabalho, grupo 1! Essa é uma abordagem válida.” Grupo 2, vocês concordam com essa solução ou têm algo mais a acrescentar?
Integrante do grupo 2: Sim, concordamos com a divisão. Parece ser a maneira mais rápida de encontrar a resposta.
Professor: Perfeito!

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Professor: Entendi. Grupo 3, vocês mencionaram que estavam considerando outras maneiras de resolver o problema. Alguma ideia diferente?
Integrante do grupo 3: Estamos aqui pensando em utilizar a multiplicação. Se a gente multiplicar o número de mesas pelo número de convidados por mesa, também chegaremos ao total de convidados.
Professor: Excelente observação, grupo 3! A multiplicação é uma estratégia válida também.

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 4, o que vocês acham dessa abordagem?
Integrante do grupo 4: Concordamos com o uso da multiplicação. Parece ser uma maneira eficiente de resolver o problema.
Professor: Ok!

Na orientação do grupo 5, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 5, o que vocês acham dessa abordagem?
Integrante do grupo 5: Faz sentido! Porque se a gente multiplicar 9 mesas por 4 convidados por mesa, também chegamos a 36 convidados.
Professor: Muito bem observado, grupo 5!

Na orientação do grupo 6, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 6, alguma outra ideia ou dúvida que queiram compartilhar?
Integrante do grupo 6: Não, professor! Também fizemos da mesma forma, usamos a multiplicação para encontrar a resposta.

> Professor: Excelente! Isso significa que todos compreenderam e resolveram o problema. Parabéns a todos! Agora, avançaremos para o quarto problema, que é mais desafiador.

De maneira geral, inicialmente, os alunos enfrentaram dificuldades de concentração devido a conversas paralelas, o que dificultou a aplicação dos procedimentos matemáticos necessários para resolver o problema. A situação envolvia a determinação da quantidade de mesas necessárias para acomodar 36 convidados, sabendo que cada mesa comportava 4 convidados. Reconhecendo essa dificuldade, incentivamos os alunos a focarem na situação apresentada. Com essa orientação, os alunos conseguiram resolver o problema utilizando o pensamento multiplicativo e, assim, encontraram a resposta correta, empregando tanto a divisão quanto a multiplicação.

PROBLEMA 4 - Carla lê uma página do livro em 5 minutos. Quantos minutos gastaria para ler 6 páginas?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Após terem lido, discutido e elaborado uma estratégia de resolução, conduzimos um diálogo com os grupos para entender como chegaram à resposta.

> Professor: Grupo 1, como vocês encontraram a solução para o desafio? Qual estratégia aplicaram?
> Integrante do grupo 1: Nós pensando aqui, que se ela demora 5 minutos para ler uma página, então para 6 páginas seriam 5 minutos × 6 = 30 minutos.
> Professor: Excelente! Vocês adotaram uma abordagem direta e eficaz. Agora.

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 2, qual foi a estratégia de vocês?
> Integrante do grupo 2: Nós também fomos pela multiplicação para calcular o tempo total. Se ela leva 5 minutos para uma página, então para 6 páginas seriam 5 minutos × 6 = 30 minutos.
> Professor: Ótimo! Vocês estão aplicando a mesma lógica, mas de maneira diferente.

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 3, como chegaram à resposta?
> Integrante do grupo 3: Nós multiplicamos o número de páginas pelo tempo necessário para ler uma página. Assim, 6 páginas × 5 minutos = 30 minutos.
> Professor: Muito bem! Essa é uma abordagem inteligente.

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 4, qual foi a estratégia de vocês?
> Integrante do grupo 4: Nós também multiplicamos o tempo que ela leva para ler uma página por 6. 5 minutos × 6 = 30 minutos.
> Professor: Excelente! Vocês estão no caminho certo. Grupo 5, vocês mencionaram adição. Como chegaram a essa estratégia de resolução?
> Integrante do grupo 5: Aqui a gente somamos o tempo. Se ela leva 5 minutos para ler uma página, então para 6 páginas seria 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 minutos. Mas também conseguimos fazer pela multiplicação, professor, como os demais grupos estão fazendo.
> Professor: Muito bem! E, finalmente, Grupo 6, qual foi a estratégia de vocês?
> Integrante do grupo 6: Nós também utilizamos a multiplicação, mas de uma maneira diferente. Se ela leva 5 minutos para ler uma página, então 6 páginas seriam 5 × 6 = 30 minutos.
> Professor: Muito bem turma! Todos alcançaram a resposta, vamos o quinto problema de aprofundamento.

PROBLEMA 5 - Para fazer 3 vestidos são necessários 5m de tecido. Rosana tem 35 m de tecido. Quantas vestidos ela pode fazer?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Mais uma vez, após terem lido, debatido e elaborado uma estratégia de resolução, realizamos uma conversa com os grupos para compreender o processo que os levou à conclusão.

> Professor: Muito bem, pessoal! Agora que cada grupo já teve tempo para discutir e resolver o problema, vamos compartilhar as diferentes estratégias que vocês utilizaram.

Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 1, podem apresentar para a turma como vocês chegaram à resposta?

Integrante do grupo 1: Podemos sim, professor! Nós dividimos 5 metros de tecido por 3 vestidos para descobrir que cada vestido requer mais ou menos 1,67 metros de tecido. Então, dividimos 35 metros de tecido por 1,67 para obter a resposta.

Professor: Excelente raciocínio, Grupo 1!

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 2, como vocês responderam o problema?

Integrante do grupo 2: Nós fizemos uma tabela que começou com 3 vestidos para 5 metros de tecido e então dobramos os números até chegar perto de 35 metros. Descobrimos que 21 vestidos precisam de 35 metros de tecido.

Professor: Ótimo trabalho, Grupo 2!

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 3, como vocês responderam o problema?

Integrante do grupo 3: Nós fizemos um desenho com 3 vestidos com 5 metros de tecido e então repetimos o padrão até chegar a 35 metros. Também conseguimos perceber que Rosana pode fazer 21 vestidos.

Professor: Muito bem, Grupo 3!

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 4, como foi a sua abordagem?

Integrante do grupo 4: Nós criamos uma equação onde x é o número de vestidos e $\frac{5}{3} \cdot x = 35$. Resolvendo para x, descobrimos que x é aproximadamente 21, então Rosana pode fazer 21 vestidos.

Integrante do grupo 4: Aqui percebemos que os vestidos e metros de tecido é proporcional.

Professor: Excelente! Essa é uma ótima maneira de resolver o problema.

Na orientação do grupo 5, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 5, como vocês usaram proporção para resolver o problema?
> Integrante do grupo 5: Nós fizemos uma proporção onde 3 vestidos é para 5 metros de tecido assim como x vestidos é para 35 metros de tecido. Resolvendo para x, descobrimos que x é 21, então Rosana pode fazer 21 vestidos.
> Professor: Muito bem, Grupo 5!

Na orientação do grupo 6, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo 6, como vocês usaram a regra de três para resolver o problema?
> Integrante do grupo 6: Nós fizemos uma multiplicação cruzada onde 3 vestidos correspondem a 5 metros de tecido e x vestidos correspondem a 35 metros de tecido. Resolvendo para x, a gente descobriu que x é 21, então Rosana pode fazer 21 vestidos.
> Professor: Bom trabalho, Grupo 6. Vocês resolveram o problema corretamente e usaram diferentes estratégias para chegar à resposta.

PROBLEMA 6 - Caio foi ao supermercado e comprou 9 caixas de suco e pagou R$ 36,00. Se ele comprasse 3 caixas de suco, quanto em reais ele precisaria pagar?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Após a leitura, discussão e desenvolvimento de uma estratégia de resolução, conduzimos um diálogo com os grupos para desvendar o caminho que os levou à solução. Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Grupo1, como vocês resolveram esse problema?
> Integrante do grupo 1: Nós dividimos o total gasto (R$ 36,00) pelo número de caixas de suco que ele comprou (9). Então, multiplicamos esse valor por 3 para encontrar o custo de 3 caixas.
> Professor: Boa abordagem! Qual é o resultado?
> Integrante do grupo 1: R$ 12,00.
> Professor: Beleza!

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 2, como vocês resolveram esse problema?

Integrante do grupo 2: Optamos por calcular o preço de uma caixa de suco multiplicando o total pago pelo número de caixas. Então, dividimos esse valor por 9 e multiplicamos por 3 para encontrar o preço de 3 caixas.

Professor: Ótimo raciocínio! Qual é o resultado?

Integrante do grupo 2: R$ 12,00, igual ao primeiro grupo.

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 3, qual foi a estratégia de resolução que vocês utilizaram para resolver esse problema?

Integrante do grupo 3: Fizemos uma multiplicação. Se 9 caixas custam R$ 36,00, então 3 caixas custariam um terço desse valor.

Professor: Certo, vocês poderiam explicar melhor como resolveram esse problema?

Integrante do grupo 3: Bem, nós dividimos o total gasto (R$ 36,00) pelo número de caixas de suco que ele comprou (9). Então, multiplicamos esse valor por 3 para encontrar o custo de 3 caixas.

Professor: Boa abordagem! Qual é o resultado?

Integrante do grupo 3: R$ 12,00.

Professor: Muito bem!

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 4, como vocês resolveram o problema?

Integrante do grupo 4: Utilizamos a média. Dividimos o total gasto por 9 para encontrar o preço de uma caixa e, em seguida, multiplicamos por 3 para obter o valor de 3 caixas.

Professor: Boa estratégia! E o resultado?

Integrante do grupo 4: R$ 12,00, igual aos outros grupos.

Professor: Ótimo!

Na orientação do grupo 5, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 5, como vocês resolveram o problema?

Integrante do grupo 5: Primeiro, descobrimos quanto custa uma caixa dividindo os R$ 36,00 por 9. Depois, pegamos esse valor e multiplicamos por 3 para saber quanto custam 3 caixas.
Professor: Excelente! E qual foi o resultado?
Integrante do grupo 5: Chegamos a R$ 12,00.
Professor: Muito bem!

Na orientação do grupo 6, estabelecemos o diálogo:

Professor: Grupo 6, como resolveram o problema?
Integrante do grupo 6: Decidimos calcular o custo de uma caixa e, em seguida, multiplicar por 3 para encontrar o preço de 3 caixas.
Professor: Boa escolha! Qual é o resultado?
Integrante do grupo 6: R$ 12,00, assim como os outros grupos.
Professor: Ótimo!" Parabéns a todos! Vocês demonstraram diferentes estratégias de como resolver esse problema, mas todos chegaram à mesma resposta correta, que é R$ 12,00. Isso mostra como podemos usar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema.

Observamos que a maioria dos grupos utilizaram o mesmo procedimento matemático, com exceção do grupo 3, que utilizou a multiplicação cruzada como procedimento de resolução.

5.1.6 Sétimo encontro

No sétimo encontro, realizado em 14/09/2023, 24 alunos estiveram presentes. Esse encontro durou duas aulas consecutivas, totalizando 80 minutos. Os alunos foram organizados em 5 grupos de trabalho. Cada aluno, dentro do seu respectivo grupo, recebeu uma cópia do Problema gerador. O objetivo desse problema era construir a ideia de proporção inversa simples.

PROBLEMA GERADOR: Três alunos levaram 6 horas para arrumar a quadra da escola para a festa junina. Se aumentar o número de alunos para 9, quantas horas levará?

Fonte: Adaptado pelo autor (2023).

Depois que cada aluno recebeu uma cópia do problema gerador, concedemos 10 minutos para que os alunos lessem o problema individualmente, permitindo uma melhor assimilação. Posteriormente, eles se reuniram em grupos para compartilhar ideias e procedimentos matemáticos baseados em seus conhecimentos prévios.

Depois de discutirem o problema em seus grupos e escolherem a estratégia a ser aplicada, os alunos iniciaram a resolução do problema. Eles tiveram cerca de 20 minutos para aplicar seus conhecimentos. Passados 10 minutos desse tempo, fizemos uma visita a cada grupo para acompanhar o progresso na elaboração da resposta. Observamos os procedimentos matemáticos utilizados e esclarecemos dúvidas que surgiram. Além disso, incentivamos os alunos a não desistirem diante de eventuais dificuldades.

Na orientação do grupo 1, estabelecemos o diálogo:

> Professor: Olá, grupo 1! Conseguiram compreender e responder o que se pede o problema?
> Integrante 2 do grupo 1: Oi, professor! Então, estamos um pouco confusos, pois esse problema envolve quantidade de alunos e quantidade de horas. Professor, a dúvida que temos é sobre as horas. Nessa situação podemos medir as horas com os alunos?
> Professor: Sim, pode sim medir as horas! Como vocês mesmos observaram, envolve quantidade de alunos e quantidade de horas. Como vocês aprenderam nos encontros anteriores sobre grandeza, que é tudo aquilo que pode ser medido, logo a quantidade de alunos e a quantidade de horas pode ser medido em relação um ao outro.
> Integrante 2 do grupo 1: Humm! Acho que entendi, professor, é igual àquela situação se aumentarmos uma, devemos aumentar a outra?
> Professor: Bom, isso depende do tipo de grandeza envolvido. Pois tem relação de grandezas que quando uma cresce a outra cresce, ou quando uma diminui a outra diminui. No entanto, tem relação de grandezas que quando uma cresce a outra faz é diminui ou se uma diminui a outra cresce, vice e versa.
> Integrante 1 do grupo 1: Então, professor, se aumentarmos a quantidade de alunos a quantidade de horas também vai aumentar, não é?
> Professor: Bom, é isso que vocês em grupo devem avaliar a relação entre as grandezas. Pensem e respondam!
> Integrante 1 do grupo 1: Certo, professor, vamos ver direitinho.

Em grupo, ao avaliarem melhor, disseram:

Integrante 3 do grupo 1: Professor, acredito que agora compreendemos a situação entre os alunos e as horas.

Professor: Certo! O que pensaram e qual estratégia adotada?

Integrante 3 do grupo 1: Professor, agora percebemos que a grandeza alunos não cresce com as horas. Pois não faz sentido aumentar a quantidade de alunos para limpar a quadra e aumentar o tempo. O que faz sentido é se aumento a quantidade de alunos para fazer o mesmo serviço, o tempo tem que ser menor.

Professor: Muito bem! Então, como fizeram?

Integrante 4 do grupo 1: Bom, professor, ao percebermos que a quantidade de alunos cresce e a quantidade de horas diminui, ficou assim: Se antes 3 alunos levavam 6 horas para arrumar a quadra, percebemos que a quantidade de alunos foi aumentada 3x, passando para 9 alunos. Logo, como as horas foi diminuída, mas para isso, dividimos a quantidade de 6 horas por 3, e obtemos 2 horas que os 9 alunos levaram para limpar a quadra.

Professor: Excelente! Ótima compreensão e estratégia elaborada.

Na orientação do grupo 2, estabelecemos o diálogo:

Professor: E aí, pessoal do grupo 2! Conseguiram compreender e responder o problema?

Integrante 1 do grupo 2: Sim, professor! Nós lemos o problema bem devagar, percebemos que como 3 alunos levam 6 horas para arrumar a quadra. Então, antes de aumentarmos a quantidade de alunos para 9, fizemos assim, queríamos saber quantas horas 1 aluno levaria para limpar sozinho a quadra.

Professor: Entendi! Então, o que vocês encontraram?

Integrante 2 do grupo 2: Certo, professor! A gente fez assim, como 3 alunos levam 6 horas para realizar o serviço, então 1 aluno conseguiu sozinho 3x a quantidade de horas realizada por 3 alunos. Logo, multiplicamos 3x6=18, ou seja, 1 aluno levará 18 horas para fazer o mesmo serviço de 3 alunos em arrumar a quadra.

Professor: Muito bem! Com essa estratégia, o que quantas horas levou 9 alunos para arrumar a quadra?

Integrante 3 do grupo 2: Professor, fizemos assim, como encontramos que 1 aluno arrumaria a quadra em 18 horas, dividimos 18 horas por 9 alunos, obtemos que 18÷9=2, ou seja, 9 alunos juntos levaram o mesmo serviço em 2 horas.

Professor: Excelente resposta e boa estratégia!

Na orientação do grupo 3, estabelecemos o diálogo:

Professor: Olá pessoal do grupo 3! Conseguiram compreender e responder o problema?

Integrante 1 do grupo 3: Sim, professor! A informação contida no problema é que 3 alunos levam 6 horas para arrumar a quadra, dessa forma, percebemos que alunos e horas não crescem juntos, mas são opostos.

Professor: Certo! Então como fizeram?

Integrante 3 do grupo 3: Professor, fizemos da seguinte forma: ao aumentar a quantidade de alunos para 9, a gente percebeu que essa medida mostrou que aumentou 3x o número de alunos. Assim, a quantidade de 6 horas que 6 alunos levam para arrumar a quadra, logo, diminui essa quantidade horas 3x, ou seja, divido 6 por 3 que resulta em 6÷3=2. Com isso, a resposta em que 9 alunos levam 2 horas para arrumar a quadra.

Professor: Excelente, ótima estratégia!

Na orientação do grupo 4, estabelecemos o diálogo:

Professor: E aí, pessoal do grupo 4! Conseguiram compreender e responder o problema?

Integrante 1 do grupo 4: Sim, professor! Bom, nós percebemos que a grandeza alunos cresce enquanto a grandeza horas diminui. Assim temos, se 3 alunos levaram 6 horas, logo 9 alunos levaram 2 horas. Isto se dá devido que a quantidade de alunos fora triplicada enquanto a quantidade horas foram divididas em 3 partes.

Professor: Certo! Então como fizeram?

Integrante 2 do grupo 4: Professor, com esse entendimento do cálculo, entendemos que que a quantidade de alunos foi multiplicada por 3

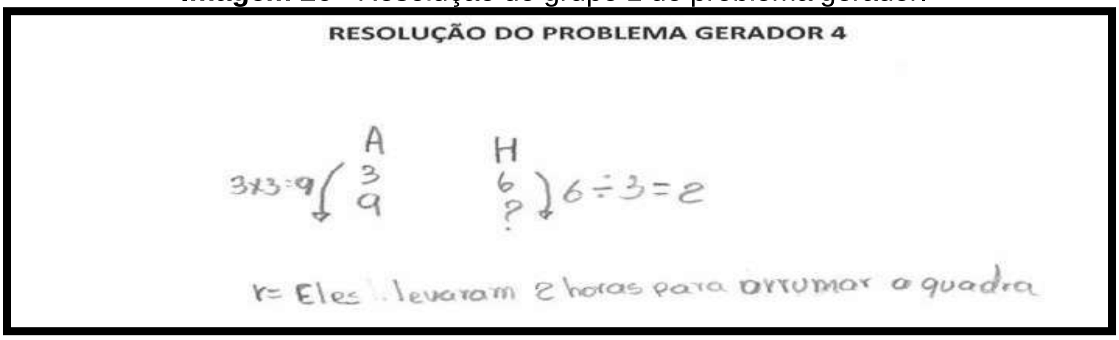
enquanto a quantidade horas é dividida por 3, resultando em 6÷3=2, ou seja, 9 alunos levam 2 horas para arrumar a quadra.
Professor: Excelente resposta e boa estratégia!

Na orientação do grupo 5, estabelecemos o diálogo:

Professor: E aí, pessoal do grupo 5! Conseguiram compreender e responder o problema?
Integrante 1 do grupo 5: Sim, professor! Nós lemos o problema com atenção e percebemos que 3 alunos levam 6 horas para arrumar a quadra. Antes de aumentar a quantidade de alunos para 9, fizemos o seguinte: quisemos descobrir quantas horas 1 aluno levaria para limpar a quadra sozinho.
Professor: Muito bem! Com essa estratégia, quantas horas levou 9 alunos para arrumar a quadra?
Integrante 3 do grupo 5: Professor, fizemos o seguinte: como descobrimos que 1 aluno levaria 18 horas para arrumar a quadra, dividimos esse tempo por 9 alunos. Assim, 18÷9=2, ou seja, 9 alunos juntos fariam o mesmo trabalho em 2 horas.
Professor: Excelente resposta e boa estratégia!

Após a resolução do problema, um membro de cada grupo apresentou sua solução no quadro. Isso possibilitou a discussão das estratégias adotadas por cada grupo, como demonstrado na Imagem a seguir. Vejamos a estratégia de resposta do grupo 1:

Imagem 26 - Resolução do grupo 1 do problema gerador.

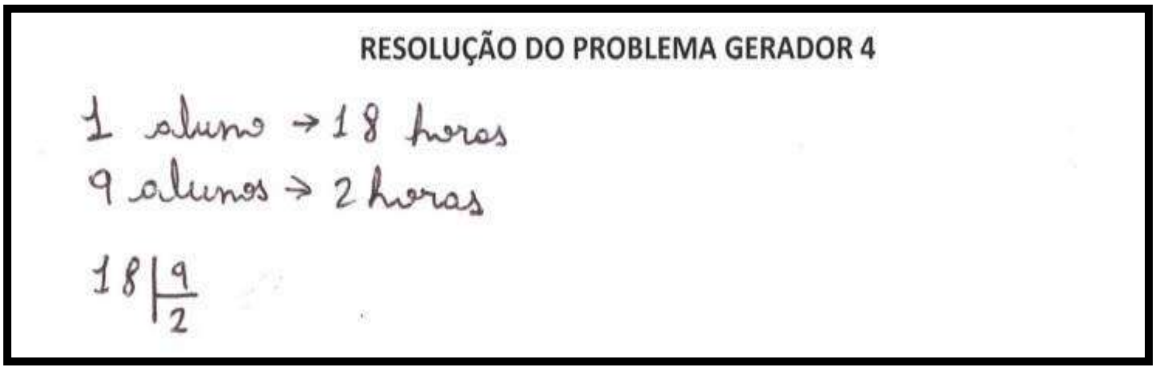


Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 26, na estratégia de resolução do Grupo 1, optou-se por utilizar um operador vertical (3X) associado à grandeza “alunos”. Esse operador multiplicou a quantidade de alunos por 3, resultando em 9 alunos. Inversamente, o Grupo 1 adotou o operador (÷3) associado à grandeza “horas”. Assim, este operador dividiu a quantidade de 6 horas, resultando em 2 horas. Com essa estratégia de proporção inversa, o grupo 1 justificou por escrito que os alunos levaram 2 horas para arrumar a quadra.

O grupo 2 apresentou sua estratégia de resolução, conforme Imagem a seguir:

Imagem 27 - Resolução do grupo 2 do problema gerador.



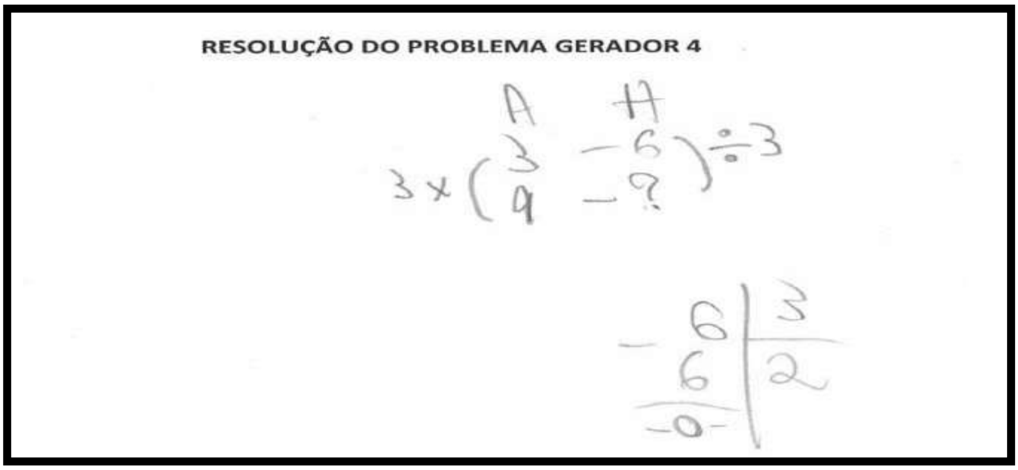
Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 27, na estratégia de resolução do grupo 2, a resposta foi elaborada de maneira implícita, sem apresentar explicitamente os dados do enunciado do problema. No entanto, o grupo 2 optou por primeiro determinar quantas horas um aluno levaria para arrumar a quadra. Eles encontraram que se três alunos levaram 6 horas para completar a atividade, então um único aluno levaria 3 vezes 6 horas, totalizando 18 horas.

Com essa informação, o grupo 2 determinou que um aluno levaria 18 horas para concluir a atividade. Em seguida, para determinar quanto tempo 9 alunos levariam para realizar a mesma tarefa, dividiram 18 horas pelo número de 9 alunos, o que resultou em 2 horas. Observa-se que o grupo utilizou operações matemáticas para chegar à resposta, embora não tenha justificado explicitamente os resultados obtidos da relação da proporção inversa do problema.

O grupo 3 apresentou sua estratégia de resolução, conforme mostrado na imagem 28 a seguir.

Imagem 28 - Resolução do grupo 3 do problema gerador.

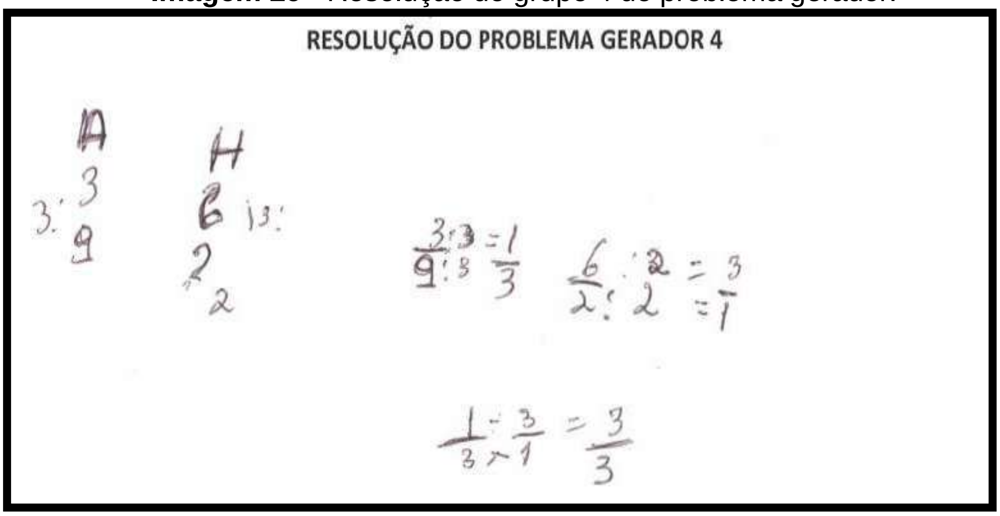


Fonte: Acervo pessoal (2023).

De acordo com a imagem 28, na estratégia de resolução do grupo 3, optou-se pela mesma estratégia do grupo 1, utilizando um operador vertical (3X) associado à grandeza "alunos". Esse operador multiplicou a quantidade de alunos por 3, resultando em 9 alunos. Por outro lado, o grupo 3 adotou o operador (÷3) associado à grandeza "horas". Assim, este operador dividiu a quantidade de 6 horas, resultando em 2 horas. Observamos que o grupo 3 não justificou por escrito a resposta.

O grupo 4 apresentou sua estratégia de resolução, vejamos:

Imagem 29 - Resolução do grupo 4 do problema gerador.



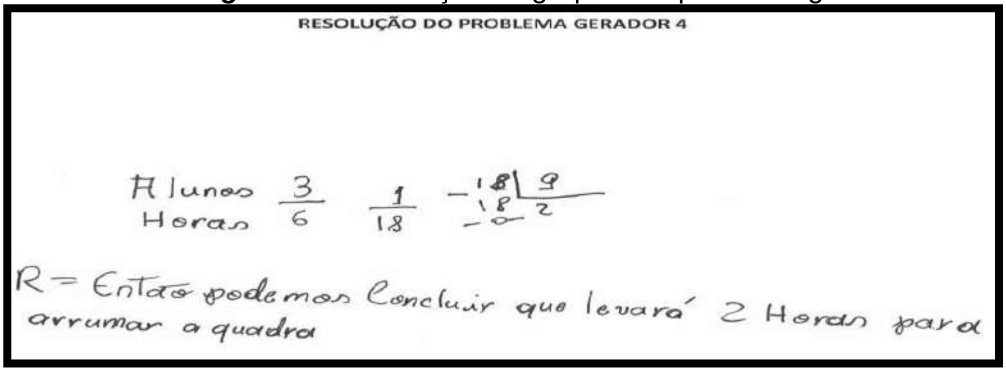
Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a imagem 29, na estratégia de resolução do grupo 4, optou-se pela mesma estratégia adotada pelos grupos 1 e 3. Ou seja, utilizou-se o operador vertical $(3 \times)$ associado à grandeza "alunos" e multiplicou-se pela quantidade de 3 alunos, o que resultou em 9 alunos. De forma inversa, o grupo 3 adotou o operador $(\div\ 3)$ associado à grandeza “horas” e dividiu a quantidade de 6 horas, resultando em 2 horas. Além disso, o grupo 4 simplificou a relação de cada grandeza envolvida e obteve suas razões. Na relação da grandeza “aluno”, obteve a razão 1/3, enquanto na grandeza “horas”, obteve a razão $\frac{3}{1}$.

Com isso, multiplicou-se as razões $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{1}$, o que resultou em $\frac{3}{3} = 1$, provando que suas razões são inversas. Observou-se que o grupo 4 não justificou por escrito a resposta, apenas registrou de forma implícita o cálculo com os dados contidos no enunciado do problema, as relações entre as grandezas e a resposta esperada.

Por último, o grupo 5 também apresentou sua estratégia de resolução:

Imagem 30 - Resolução do grupo 5 do problema gerador.



Fonte: Acervo pessoal (2023).

Conforme a Imagem 30, na estratégia de resolução do grupo 5, optou-se pela mesma estratégia adotada pelo grupo 2. Em primeiro lugar, determinou-se quantas horas um aluno levaria para arrumar a quadra. Com isso, a partir da quantidade de horas necessária para um aluno, que correspondeu a 18 horas, eles encontraram a resposta dividindo 18 horas por 9 alunos, resultando em 2 horas. Assim, justificou-se que 9 alunos levariam 2 horas para arrumar a quadra.

Após a plenária, verificamos que todos os grupos adotaram estratégias que conduziram à resposta correta. No entanto, entre as estratégias adotadas, chegamos a um consenso com a turma sobre qual delas melhor atendia à situação da quantidade de alunos em relação à quantidade de horas descrita no problema gerador 4. A estratégia escolhida, por atender ao objetivo da atividade de ensino desse encontro, foi aquela adotada pelos grupos 1, 3 e 4, que multiplicou o operador vertical (3×) pela quantidade de 3 alunos, obtendo a quantidade de 9 alunos. De forma inversa, o grupo

3 empregou o operador (÷3) para dividir a quantidade de 6 horas, resultando em 2 horas.

Em seguida, procedemos com a formalização do conceito de proporção inversa simples. Discutimos o significado de grandezas, reiteramos a importância da razão e explicamos os conceitos, propriedades, operações e procedimentos matemáticos específicos da proporção inversa. Ademais, partindo da compreensão que trabalhamos nos encontros anteriores sobre a proporção direta, esclarecemos que a proporção inversa é o oposto, detalhando os conceitos e propriedades envolvidos nesse assunto.

Nesta atividade de proporção inversa simples, ao avaliarmos a aprendizagem dos alunos sobre o conceito de proporção inversa, com base nos conhecimentos adquiridos sobre proporção direta, percebemos um avanço significativo na compreensão do conceito de proporção. As resoluções do problema gerador de cada grupo demonstraram que os alunos conseguiram entender a relação inversamente proporcional, evidenciando indícios de pensamento proporcional.

Vale salientar que, durante a formalização do conteúdo, exploramos cada estratégia desenvolvida por eles e notamos que não apresentaram erros conceituais nem procedimentais. No entanto, observamos que uma menor parte dos alunos teve dificuldades na organização dos cálculos e não justificou por escrito o valor omisso encontrado. Isso resultou em respostas finais que não evidenciaram claramente a grandeza da quantidade do valor omisso encontrado.

Para ajudar os alunos a aprofundarem sua aprendizagem neste tipo de problema de proporção inversa, propusemos, ao final deste sétimo encontro, a Atividade de Aprofundamento 3, que incluía o seguinte problema de aprofundamento.

PROBLEMA DE APROFUNDAMENTO - Marcos possui 4 gatos e têm ração suficiente para alimentá-los por 5 dias. Se Marcos tivesse apenas 2 gatos, a ração daria para quantos dias?

Fonte: Adpatado pelo autor (2023).

Os alunos se reuniram em grupos para resolver o problema, e determinaram a razão 2 ao aplicar o operador (÷2) na relação vertical de 4 gatos para 2 gatos. Em relação à grandeza "dias", os alunos realizaram a operação inversa ao multiplicar o operador (2x) pela quantidade de 5 dias, obtendo a resposta esperada de 10 dias.

Com isso, os alunos justificaram a resposta afirmando que a quantidade de ração que Marcos tinha no estoque era suficiente para alimentar 2 gatos durante 10 dias.

No geral, observamos que, durante a atividade de aprofundamento 3 desse encontro, a menor parte dos alunos ainda tendia a pensar de forma diretamente proporcional ao lidar com problemas de proporção inversa simples. No entanto, ao explicarmos as resoluções que eles fizeram, perceberam que essa maneira de pensar não era adequada e compreenderam que, nesse tipo de situação, quando uma grandeza aumentava, a outra diminuía.

Nesse sentido, pudemos avaliar que os alunos avançaram na compreensão da relação inversamente proporcional. Acreditamos que, com mais atividades de resolução desse tipo de problema, os alunos poderiam melhorar ainda mais seu aprendizado, tornando-se capazes de relacionar esses conceitos a outras situações do seu cotidiano.

5.1.7 Oitavo encontro

No dia 15/09/2023, ocorreu a revisão geral no oitavo encontro, cujo objetivo foi revisar os conceitos e propriedades presentes nas situações que envolvem a ideia de razão e proporção, tanto direta quanto inversa. Esse encontro, que durou duas aulas consecutivas, totalizando 90 minutos, foi inteiramente dedicado à realização da atividade de revisão por meio da resolução de problemas, contando com a participação de 25 alunos aplicamos os problemas que estão no (Apêndice E).

5.1.8 Nono encontro

O nono e último encontro, ocorrido no dia 19/09/2023, foi destinado à aplicação do pós-teste. Estiveram presentes 24 alunos. Observamos que, nesse dia, os alunos estavam ansiosos e agitados devido à aproximação da semana das provas escolares. Muitos deles queriam sanar suas pendências nas atividades das outras disciplinas e se preparar melhor para as provas. No entanto, procuramos acalmá-los para que pudessem realizar o pós-teste com tranquilidade.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados comparativos do pré e pós-teste, bem como a discussão e análise dos resultados da pesquisa.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos as análises dos dados e as discussões dos resultados da pesquisa.

6.1 ANÁLISE COMPARATIVA DO PRÉ E PÓS-TESTE

Os testes aplicados antes e após a proposta de ensino nos permitiu avaliar os conhecimentos dos alunos sobre os conteúdos de razão e proporção. O teste foi composto por sete problemas que abordavam os conhecimentos de razão, proporção simples de um para muitos e muitos para muitos, além de proporção múltipla e inversa. A Tabela 3, apresenta o comparativo dos resultados dos testes.

Utilizamos como critérios de avaliação para correção dos testes as seguintes denominações: acerto total, acerto parcial, erros, em branco.

- acerto total – quando o aluno apresenta a resolução da questão e sua resposta correta;
- acerto parcial – a resolução está parcialmente correta, o aluno pode ter iniciado corretamente e não conseguiu finalizar ou apenas colocou a resposta;
- erro – a resolução está totalmente incorreta;
- em branco – não teve nenhuma resolução.

Tabela 3 - Comparativo do desempenho dos alunos no pré e pós-teste.

Problemas	**% pré-teste**				**% pós- teste**			
	acertos	acertos parciais	erros	em branco	acertos	acertos parciais	erros	em branco
Problema 1: a lagarta A tem 6 cm de comprimento e a lagarta B tem 4cm de comprimento. a) quanto a lagarta A é maior que a lagarta B?	41%	31,8%	22,7%	4,5%	36,4%	50%	9,1%	4,5%
b) quantas vezes a lagarta A é mais longa que a lagarta B?	0,0%	0,0%	100%	0,0%	9,1%	50%	31,8%	9,1%
Problema 2: para fazer 1 bolo, maria gastou 3 ovos. se ela precisar fazer 2 bolos, quantos ovos serão necessários?	81,8%	13,6%	0,0%	4,5%	91%	4,5%	0,0%	4,5%
Problema 3: em três pacotes de balões há trinta unidades. quantos balões há em cinco pacotes?	18,2%	0,0%	81,8%	0,0%	68,2%	0,0%	31,8%	0,0%
Problema 4: quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 copos de água e 12 colheres pequenas de café. quantas colheres de café são necessárias se forem usados 20 copos de água?	18,2%	18,2%	63,6%	0,0%	31,8%	13,6%	54,5%	0,0%
Problema 5: Jonas possui 4 cachorros e têm ração suficiente para alimentá-los por 5 dias. se Jonas tivesse 2 cachorros, a ração daria para quantos dias?	72,7%	9,1%	13,6%	4,5%	95,5%	0,0%	4,5%	0,0%
Problema 6: em duas caixas iguais, cabem 16 vasos idênticos de flores, totalizando 48 flores. quantas flores há em uma caixa?	13,6%	13,6%	68,2%	4,5%	59,1%	9,1%	31,8%	0,0%
Problema 7: Maria lê 50 páginas de um livro em 2 horas. quantas páginas serão lidas por maria em 5 horas?	9,1%	9,1%	81,8%	0,0%	27,3%	4,5%	68,2%	0,0%

Fonte: feito pelo autor (2024)

Problema 1:

A lagarta A tem 6 cm de comprimento e a lagarta B tem 4cm de comprimento.
a) quanto a lagarta A é maior que a lagarta B?
b) quantas vezes a lagarta A é mais longa que a lagarta B?

O problema 1 explorou a utilização do pensamento aditivo na resolução da letra (a) e multiplicativo na letra (b), sendo que essa é para utilizar a ideia de razão.

No pré-teste, o problema 1 apresentou na letra (a) 41% de acertos e na letra (b) nenhum acerto, mostrando que os alunos tiveram dificuldades para compreender o problema e utilizar o pensamento multiplicativo para buscar uma estratégia de resolução para o problema. Para este problema, tivemos na letra (a) 22,7% de erros e na letra (b) contamos com 100% de erros, mostrando que os alunos não possuem a ideia de razão, ou possuem limitações no uso do pensamento multiplicativo.

Dentre os erros cometidos, como os de natureza conceitual, procedimental e de estratégia, foi identificado que dezoito alunos não apresentaram cálculos para justificar suas respostas. Dessa forma, não foi possível avaliar o grau de compreensão conceitual e procedimental desses alunos.

Três alunos que utilizaram o pensamento aditivo para resolver o problema da letra (b) deram como resposta $6 - 4 = 2$. Esses erros refletem um erro de interpretação do problema, além dos alunos terem usado o pensamento aditivo no lugar do multiplicativo para resolvê-lo. Um dos alunos utilizou o pensamento multiplicativo para resolver o problema e apresentou o cálculo $4 \div 2 = 2$, registrando como resposta final 2 cm. Logo, parece-nos que os alunos possuem dificuldade em utilizar o pensamento multiplicativo para resolver o problema.

No pós-teste, o desempenho dos alunos foi um pouco melhor, na letra (a), pois o número de erros diminuiu. Assim, tivemos 36,4% de acertos totais e 50% de acertos parciais, mostrando que conseguiram compreender melhor o problema. Os nove alunos que alcançaram acertos totais utilizaram o pensamento aditivo para resolver o problema, e deram como resposta a seguinte estratégia: $\overbrace{6cm}^{Tamanho\ da\ lagrata\ A} - \overbrace{4cm}^{Tamanho\ da\ lagarta\ B} = \overbrace{2cm}^{lagarta\ A\ é\ maior}$. Esse procedimento refletiu uma compreensão conceitual e procedimental adequada para a resolução de problemas de natureza aditiva.

O total de erros na letra (a) foi de 9,1%, sendo que os erros foram de interpretação. No caso do erro de interpretação, apenas um aluno utilizou a operação de multiplicação (2 x 2 = 4) e registrou a resposta final como 4 vezes. Dois alunos não apresentaram seus cálculos, dificultando uma melhor avaliação da estratégia utilizada.

No pós-teste, na letra (b), tivemos 9,1% de acertos totais e 50% de acertos parciais. Observamos que três alunos responderam corretamente, utilizando o pensamento multiplicativo ao concluírem que a lagarta A era 1,5 vezes mais longa que a lagarta B. Esses alunos demonstraram ter compreendido a noção de razão. Por outro lado, onze alunos apresentaram acertos parciais, fornecendo a resposta final correta, mas sem apresentar cálculos para justificar a resposta. Assim, não foi possível avaliar o grau de compreensão conceitual e procedimental desses alunos.

Na letra (b), tivemos 31,8% de erros, mostrando que os alunos avançaram, visto que no pré-teste eles tiveram 100% de erros. Cabe destacar que alguns erros foram do tipo de interpretação, e que oito alunos que apresentaram resposta errada, forneceram apenas a solução, não apresentando cálculo para justificar a resposta encontrada.

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste para esse problema foram melhores do que no pré-teste, indicando que os alunos avançaram na aprendizagem do conceito de razão e passaram a diferenciar melhor o pensamento aditivo do multiplicativo. Na letra (a) do problema, tivemos uma redução significativa dos erros, enquanto os acertos totais diminuíram, em contraste com o aumento dos acertos parciais. Na letra (b), observamos um aumento tanto nos acertos totais quanto nos acertos parciais. Consequentemente, os erros diminuíram, refletindo uma melhoria na compreensão dos alunos.

Problema 2:

Para fazer 1 bolo, maria gastou 3 ovos. Se ela precisar fazer 2 bolos, quantos ovos serão necessários?

O problema 2 explorou a ideia de proporção simples da classe “um para muitos”, uma das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo, conforme defendido por Vergnaud (2009).

No pré-teste, tivemos 81,8% de acertos totais, 13,6% de acertos parciais e nenhum erro. Observamos que seis alunos deram uma resposta correta utilizando o pensamento multiplicativo ao indicar que, para preparar 2 bolos, são necessários 6 ovos. Esses alunos demonstraram compreensão conceitual e procedimental, utilizando a relação multiplicativa e mostraram indícios de pensamento proporcional. No entanto, onze alunos responderam utilizando o pensamento aditivo ao indicar que $\overbrace{3\,ovos}^{1\,bolo} + \overbrace{3\,ovos}^{1\,bolo} = \overbrace{6\,ovos}^{2\,bolos}$. Isso mostra que a ideia de razão e proporção não foi construída por esses alunos. Apenas três alunos apresentaram uma resposta correta, mas não forneceram os cálculos que demonstrassem seu processo de pensamento, não sendo possível avaliar sua compreensão do raciocínio envolvido na solução do problema.

No pós-teste tivemos 91% de acertos e nenhum erro. Ademais, verificamos diferentes resoluções apresentadas pelos alunos. Três alunos utilizaram o pensamento multiplicativo e elaboram um diagrama de relação proporcional entre as quantidades das grandezas envolvidas no problema, conforme é mostrado no diagrama $\begin{array}{cc} Bolo & Ovo \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array}$, resposta final 6 ovos. Esses alunos demonstraram compreensão conceitual e procedimental, utilizando a relação multiplicativa e tiveram indícios de pensamento proporcional.

O pensamento multiplicativo foi usado por dez alunos, ao indicar a relação de que para preparar 2 bolos, são necessários 6 ovos. Esses alunos, igualmente, demonstraram compreensão do problema, tiveram indícios de pensamento proporcional. Uma quantidade de cinco alunos, apesar de terem encontrado a resposta correta, utilizaram o pensamento aditivo ao indicar que $\overbrace{3\,ovos}^{1\,bolo} + \overbrace{3\,ovos}^{1\,bolo} = \overbrace{6\,ovos}^{2\,bolos}$. Esses alunos ainda não desenvolveram o pensamento multiplicativo e se encontram na fase pré-proporcional, conforme indicado por Langrall e Swafford (2000).

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste para esse problema foram melhores do que no pré-teste, pois o número de acertos aumentou, mostrando que os alunos tiveram uma boa compreensão da proporção simples.

Problema 3:

Em três pacotes de balões há trinta unidades. Quantos balões há em cinco pacotes?

O problema 3 explorou a ideia proporção simples da classe muitos para muitos, uma das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo, conforme defendido por Vergnaud (2009).

No pré-teste, tivemos 18,2% de acertos totais e nenhum acerto parcial. observamos que quatro alunos acertaram o problema, sendo que dois alunos empregaram o pensamento multiplicativo. Eles indicaram que 5 pacotes contêm 50 balões, com base no cálculo 5×10=50. Esses alunos demonstraram tanto compreensão conceitual quanto procedimental mostrando indícios do pensamento proporcional.

Dois outros alunos responderam corretamente, mas utilizaram o pensamento aditivo ao indicar que $\overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} = \overbrace{50\ balões}^{5\ pacotes}$. Observamos que eles não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema. Isso influenciou o aspecto procedimental, levando-os à utilização de uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando uma fase inicial do pensamento proporcional.

Para este problema, tivemos 81,8% de erros de diferentes tipos. 14 alunos erraram dando como resposta 150 balões, pois calcularam 5×30=150. Isso indicou que não interpretaram corretamente o problema, apresentando, assim, uma compreensão conceitual parcial e demonstrando dificuldades no aspecto procedimental. Outra resposta dada por um aluno: $\overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} = \overbrace{150\ balões}^{5\ pacotes}$. Isso indicou que ele não interpretou corretamente o problema, indicando um erro conceitual de proporção.

Três alunos forneceram a resposta errada de 150 balões, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar suas compreensões em relação ao raciocínio necessário para solucionar o problema.

No pós-teste, este problema teve 68,2% de acertos totais e nenhum acerto parcial. observamos que 11 alunos responderam corretamente, visto que compreenderam o problema apresentaram as resoluções. Entre esses alunos, apenas um aluno desenvolveu um diagrama que refletiu a relação proporcional entre as grandezas envolvidas, conforme o diagrama $\begin{array}{ccc} Pacote & . & Balão \\ 1 & - & 10 \\ 5 & - & 50 \end{array}$, resposta final 50 balões.

Dessa forma, esses alunos demonstraram tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao utilizarem a relação multiplicativa e tiveram indícios de pensamento proporcional.

Quatro alunos responderam corretamente, mas utilizaram o pensamento aditivo ao indicar que $\overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{10\ balões}^{1\ pacote} = \overbrace{50\ balões}^{5\ pacotes}$, levando-os à utilização de uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando uma fase pré-proporcional.

Este problema no pós-teste teve 31,8% de diferentes tipos de erros. 6 alunos forneceram a resposta errada de 150 balões, pois apenas multiplicaram 5×30=150, sem fazer uma reflexão do que o problema queria, o que indica que eles não interpretaram corretamente o problema, demonstrando uma compreensão conceitual parcial.

Um dos alunos forneceu como resposta 150 balões utilizando o pensamento aditivo com base no cálculo desenvolvido $\overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} + \overbrace{30\ balões}^{1\ pacote} = \overbrace{150\ balões}^{5\ pacotes}$. Isso indicou que ele não interpretou corretamente o problema, apresentando um erro conceitual.

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste para esse problema foram melhores do que no pré-teste, pois o número de erros diminuiu e o de acertos aumentou consideravelmente, mostrando que os alunos tiveram uma melhor compreensão da ideia de proporção simples.

Problema 4:

Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 copos de água e 12 colheres pequenas de café. quantas colheres de café são necessárias se forem usados 20 copos de água?

O problema 4 explorou a ideia de proporções simples da classe muitos para muitos, uma das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo, conforme defendido por Vergnaud (2009).

No pré-teste, este problema apresentou o mesmo percentual de 18,2% tanto nos acertos totais quanto nos acertos parciais. Ao analisarmos as respostas dos alunos, observamos que quatro alunos acertaram totalmente e quatro acertaram parcialmente. Três alunos responderam corretamente, utilizando o pensamento multiplicativo ao desenvolverem um diagrama que refletiu a relação proporcional entre as grandezas envolvidas, conforme o diagrama $\begin{array}{cc} copos & colheres \\ 10 & 15 \\ 20 & 30 \end{array}$, resposta final: 30 colheres.

Esses alunos demonstraram compreensão conceitual e procedimental ao aplicarem a relação multiplicativa e apresentaram indícios de pensamento proporcional. Um dos alunos encontrou a solução correta, mas utilizou o pensamento aditivo com base no cálculo 24+6=30. Observamos que ele não demonstrou compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, isso influenciou o aspecto procedimental, levando-o a utilizar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando a falta de pensamento proporcional.

Quatro alunos tiveram acertos parciais ao fornecerem como resposta final 30 colheres, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento, portanto, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Nesse problema tivemos 63,6 % de erros de diferentes tipos de interpretação e de estratégia. Quatro alunos forneceram a resposta errada de 24 colheres, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo 12×2=24. Isso indicou que não interpretaram corretamente o problema, resultando em uma compreensão conceitual parcial.

Sete alunos forneceram a resposta errada de 24 colheres, utilizando o pensamento aditivo com o cálculo 20+4=24. Observamos que eles não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, isso influenciou o aspecto procedimental, levando-os a utilizar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando a falta de pensamento proporcional.

Três alunos forneceram a resposta errada de 24 colheres, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para solucionar o problema.

Tal problema, no pós-teste, teve 31,8% de acertos totais e 13,6% de acerto parcialmente, sendo que dois alunos responderam corretamente, demonstrando que compreenderam o problema e utilizaram o pensamento multiplicativo. Além disso, desenvolveram um diagrama que refletiu a relação proporcional entre as grandezas envolvidas. esses alunos demonstraram tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao aplicarem a relação multiplicativa e apresentaram indícios de pensamento proporcional.

Tivemos 5 alunos que deram a resposta correta de 30 colheres, mas utilizaram o pensamento aditivo com base no cálculo 24+6=30. Observamos que não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, isso influenciou o aspecto procedimental, levando-os a utilizarem uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando um pensamento pré-proporcional.

Três alunos forneceram a resposta correta de 30 colheres, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Ainda para esse problema, tivemos 54,5% de erros de diferentes tipos, quatro alunos forneceram a resposta errada de 24 colheres, utilizando o pensamento multiplicativo com base no cálculo 12×2=24. Isso indicou que eles não interpretaram corretamente o problema, demonstrando uma compreensão conceitual parcial e enfrentando dificuldades no aspecto procedimental.

Sete alunos forneceram a resposta errada de 24 colheres, utilizando o pensamento aditivo com o cálculo 20+4=24. Observamos que eles não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema. Isso influenciou o aspecto procedimental, levando-os a utilizar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando a falta de pensamento proporcional. Um aluno forneceu a resposta errada de 48 colheres, mas não apresentou o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento, por isso, não foi possível avaliar a compreensão dele em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste para esse problema foram melhores do que no pré-teste. O número de erros diminuiu e o de acertos totais aumentou, demonstrando que os alunos tiveram uma melhor compreensão da ideia de proporção simples muitos para muitos.

Problema 5:

Jonas possui 4 cachorros e têm ração suficiente para alimentá-los por 5 dias. se Jonas tivesse 2 cachorros, a ração daria para quantos dias?

O problema 5 explorou a ideia de proporção inversa simples. O problema apresentado, caracterizado por uma relação inversa simples, pode ser compreendido como um caso particular de uma relação quaternária, em que duas grandezas variam inversamente enquanto as outras duas permanecem constantes.

Este problema teve no pré-teste 72,7% de acertos totais e 9,1% de parciais. Ao analisarmos as respostas dos alunos, observamos 14 alunos responderam corretamente com a resposta final de 10 dias, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo 2×5=10. Eles demonstraram compreensão conceitual e procedimental ao aplicar a relação multiplicativa e apresentaram indícios de pensamento proporcional. Por outro lado, um aluno deu como resposta 10 dias, mas utilizou o pensamento aditivo com o cálculo 5+5=10. Verificamos que ele não demonstrou compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, o que influenciou o aspecto procedimental, levando-o a usar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando um pensamento pré-proporcional.

Dois alunos forneceram uma resposta parcial correta de 10 dias, mas não apresentaram o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

No pré-teste este problema teve 13,6% de erros de diferentes tipos, um dos alunos forneceu a resposta errada de 3 dias, utilizando o cálculo de subtração 5-2=3. Observamos que ele não demonstrou compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema. Isso influenciou o aspecto procedimental, levando-o a utilizar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando um pensamento pré-proporcional.

Dois alunos forneceram a resposta errada, mas não apresentaram o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

O problema 5 no pós-teste apresentou 95,5% de acertos totais e nenhum acerto parcial. Notamos que 21 alunos responderam corretamente com a resposta final de 10 dias. Eles pensaram de forma adequada e realizaram os cálculos corretos, demonstrando que compreenderam a relação de proporção inversa e utilizaram o pensamento multiplicativo com o cálculo 2×5=10. Esses alunos evidenciaram tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao aplicarem a relação multiplicativa, apresentando indícios de pensamento proporcional.

Neste problema, um aluno forneceu a resposta errada de 17 dias, sem apresentar o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar sua compreensão em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema. Esse erro sem justificativa correspondeu a 4,5%. No entanto, durante as atividades em aula, o aluno demonstrou uma compreensão conceitual e procedimental adequada do conceito de proporção inversa simples. Assim, podemos inferir que o erro cometido no pós-teste não indica necessariamente que o aluno não compreendeu o conteúdo, mas pode ter ocorrido por falta de atenção ou outros fatores que o levaram ao erro.

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste desse problema foram melhores do que no pré-teste, pois os erros diminuíram pela metade e a quantidade de acertos gerais aumentou 22,8%. Esses dados indicaram que os alunos desenvolveram uma boa compreensão de proporção inversa simples, apresentando indícios de pensamento proporcional.

Problema 6:

Em duas caixas iguais, cabem 16 vasos idênticos de flores, totalizando 48 flores. quantas flores há em uma caixa?

O problema 6 explorou a ideia de proporção múltipla. O problema apresentado é característico do eixo das proporções múltipla, uma das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo, conforme defendido por Vergnaud (2009).

No pré-teste este problema apresentou 13,6% de acertos totais e 13,6% de acertos parciais. Ao analisarmos as respostas dos alunos, observamos que 3 alunos responderam corretamente, uma vez que pensaram de forma adequada e realizaram os cálculos corretos, mostrando que conseguiram compreender o problema e utilizaram o pensamento multiplicativo. Esses alunos demonstraram tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao utilizarem a relação multiplicativa, logo, tiveram indícios de pensamento proporcional.

Três alunos tiveram acertos parciais ao fornecerem a resposta final correta de 24 flores, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento. Desse modo, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

No pré-teste tivemos 68,2% de diferentes erros. Três alunos forneceram a resposta errada de 48 flores, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo $16 \times 3 = 48$. Isso indicou que não interpretaram corretamente o problema, demonstrando uma compreensão conceitual parcial.

Por outro lado, 8 alunos forneceram a resposta errada de 3 flores, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo de divisão $48 \div 16 = 3$. Assim como no grupo anterior, isso indicou uma interpretação incorreta do problema, revelando uma compreensão conceitual parcial. Um aluno forneceu a resposta incorreta de 32 flores, utilizando o pensamento aditivo com o cálculo de subtração $48 - 16 = 32$. Essa resposta evidenciou que ele não compreendeu a relação proporcional envolvida no problema. Além disso, três alunos deram como resposta final 3 flores, mas não apresentaram o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por isso, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

No pós-teste, tivemos 59,1% de acertos total e 9,1% de acertos parciais para esse problema. 15 alunos responderam corretamente, visto que compreenderam o problema e realizaram os cálculos corretos. Destacamos que 4 desses alunos desenvolveram um diagrama refletindo a relação proporcional entre as grandezas envolvidas, conforme mostrado no diagrama $\begin{array}{ccc} caixa & vaso & flor \\ 2 & 16 & 48 \\ 1 & 8 & 24 \end{array}$, resposta final 24 flores. Esses alunos evidenciaram tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao aplicarem a relação multiplicativa, mostrando indícios de pensamento proporcional.

Dois alunos tiveram acertos parciais ao fornecerem a resposta final correta de 24 flores, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento. Portanto, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Este problema no pós-teste teve 31,8% de diferentes tipos de erros no pós-teste, sendo que 6 alunos deram como resposta incorreta de 3 flores, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo de divisão $48 \div 16 = 3$. Essa resposta indicou uma interpretação equivocada do problema, revelando uma compreensão conceitual parcial e dificuldades no aspecto procedimental. Um dos alunos forneceu a resposta incorreta de 8 flores, utilizando o pensamento aditivo com o cálculo de subtração $16 - 8 = 8$. Essa resposta evidenciou que ele não compreendeu a relação proporcional envolvida no problema. A falta de entendimento conceitual influenciou diretamente o aspecto procedimental, levando-o a aplicar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, o que destacou a ausência de pensamento proporcional.

Alguns dos alunos que erraram no pós-teste demonstraram uma compreensão conceitual e procedimental adequada do conceito de proporção durante as atividades das aulas, utilizaram o pensamento multiplicativo para resolver o problema, com indícios de pensamento proporcional. Diante disso, podemos inferir que o erro no pós-teste não indicou necessariamente que os alunos não aprenderam, mas que por falta de atenção ou outra situação que os levaram aos erros.

De forma geral, o desempenho dos alunos melhorou no pós-teste em relação ao pré-teste, pois o número de acertos gerais foi bem melhor, com um aumento significativo de 45,5%, mostrando que a compreensão dos alunos sobre proporção múltipla melhorou. Por outro lado, os erros diminuíram em 36,4%, ou seja, mais da metade. Os acertos parciais também apresentaram redução, indicando que os alunos passaram a justificar mais suas respostas finais, utilizando estratégias de resolução.

Problema 7:

Maria lê 50 páginas de um livro em 2 horas. quantas páginas serão lidas por maria em 5 horas?

O problema 7 explorou a ideia de proporção simples muitos para muitos. O problema apresentado é característico do eixo das proporções simples da classe “muitos para muitos”, uma das relações quaternárias do campo conceitual multiplicativo, conforme defendido por Vergnaud (2009).

No pré-teste os alunos apresentaram 9,1% de acertos total e 9,1% de acertos parciais. Observamos que um dos alunos respondeu corretamente, chegando à resposta final de 125 páginas ao utilizar o pensamento multiplicativo com o cálculo $\overbrace{5}^{horas} \times \overbrace{25}^{páginas} = 125 \rightarrow quantidades\ de\ paginas\ lidas\ em\ 5\ horas$. Ele demonstrou tanto compreensão conceitual quanto procedimental ao aplicar a relação multiplicativa, evidenciando indícios de pensamento proporcional. Outro aluno forneceu resposta correta de 125 páginas, o qual utilizou o pensamento aditivo com base no cálculo desenvolvido $\overbrace{50\ páginas}^{2\ horas} + \overbrace{50\ páginas}^{2\ horas} + \overbrace{25\ páginas}^{1\ hora} = \overbrace{125\ páginas}^{5\ horas}$. Isso indicou que ele não demonstrou compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, o que influenciou o aspecto procedimental, levando-o à utilização de uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando uma fase inicial do pensamento proporcional.

Dois alunos tiveram acertos parciais ao fornecerem a resposta final correta de 125 páginas, mas não apresentaram os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento, logo, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Neste problema tivemos 81,8% de diferentes tipos de erros, sendo que 14 alunos deram a resposta errada de 250 páginas, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo 5 × 50 = 250. Tal fato indicou que não interpretaram corretamente o problema, demonstrando uma compreensão conceitual parcial e dificuldades no aspecto procedimental.

Dois alunos forneceram respostas incorretas de 55 e 135 páginas, utilizando o pensamento aditivo. Um deles fez o cálculo 5 + 50 = 55, enquanto o outro utilizou 50 + 50 + 35 = 135, indicando que eles não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema. Essa dificuldade influenciou o aspecto procedimental, levando-os a aplicar uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, o que evidenciou a falta de pensamento proporcional.

Dois alunos forneceram as respostas incorretas de 24 e 52 páginas, mas não apresentaram o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por esse motivo, não foi possível avaliar sua compreensão em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

No pós-teste tivemos 27,3% de acertos, mostrando que esse tipo de problema foi um dos mais difíceis para os alunos, pois o índice de acertos foi baixo; seis alunos responderam corretamente o problema respondendo $5 \times 25 = 125$. Eles pensaram de forma adequada e realizaram os cálculos corretos, demonstrando que compreenderam o problema e utilizaram o pensamento proporcional.

Um dos alunos forneceu resposta correta de 125 páginas, utilizando o pensamento aditivo com base no cálculo desenvolvido $\overbrace{100\ páginas}^{4\ horas} + \overbrace{25\ páginas}^{1\ hora} = \overbrace{125\ páginas}^{5\ horas}$. Isso indicou que eles não demonstraram compreensão conceitual da relação proporcional envolvida no problema, o que influenciou o aspecto procedimental, levando-os à utilização de uma estrutura aditiva em vez de multiplicativa, evidenciando uma fase inicial do pensamento proporcional.

Um aluno teve acertos parciais ao fornecer a resposta de 125 páginas, mas não apresentou os cálculos que evidenciassem seu processo de pensamento, portanto, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Esse problema teve 68,2% de erros de tipos diferentes, treze alunos forneceram a resposta incorreta de 250 páginas, utilizando o pensamento multiplicativo com o cálculo 5 × 50 = 250. Outro aluno forneceu a resposta incorreta de 105 páginas, utilizando o pensamento aditivo e desenvolvendo um diagrama de adição por parcelas. Outro aluno deu como resposta 250 páginas, utilizando o pensamento aditivo com o cálculo de adição 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 250. Essa resposta evidenciou que ele não compreendeu a relação proporcional envolvida no problema.

Dois outros alunos forneceram respostas incorretas, mas não apresentaram o cálculo que evidenciasse seu processo de pensamento. Por essa razão, não foi possível avaliar a compreensão deles em relação ao raciocínio necessário para resolver o problema.

Ao analisarmos as respostas dos alunos, observamos que, além de demonstrarem falta de compreensão conceitual de proporção envolvida no problema, eles possuem dificuldades procedimental na realização dos cálculos. Muitos usaram o pensamento aditivo em vez do multiplicativo, mostrando que o problema foi de difícil compreensão para eles.

Ao analisar as respostas incorretas de cinco alunos no problema 7 do pós-teste, observou-se que, durante as atividades em sala de aula que abordaram esse tipo de problema, esses estudantes demonstraram uma compreensão conceitual e procedimental adequada sobre o conceito de proporção. Utilizaram o pensamento multiplicativo para resolver problemas, com indícios de pensamento proporcional. Assim, podemos inferir que o erro cometido no pós-teste não necessariamente reflete uma falta de compreensão do conteúdo, mas pode ter ocorrido devido a fatores como falta de atenção ou distração, considerando que nas atividades esses alunos mostraram domínio dos conceitos trabalhados.

De forma geral, observamos que os resultados do pós-teste para esse tipo de problema foram melhores do que no pré-teste, com o número de erros caindo quase pela metade. Isso indicou que os alunos tiveram uma compreensão razoável da ideia de proporção aplicada no problema. Esse problema, assim como o problema 4, evidenciou ser de difícil compreensão para os alunos. Durante as aulas, esse tipo de problema de proporção simples, muitos para muitos, foi bem trabalhado por meio da resolução de problemas, com as dúvidas dos alunos sendo esclarecidas e a formalização desse conteúdo matemático contribuindo para o aprendizado.

No entanto, parte dos alunos absorveu apenas parcialmente a ideia de proporção simples e enfrentou dificuldades em lidar com esse tipo de problema. Ao relacionar as quantidades envolvidas, muitos confundiam esse problema como se fosse uma proporção simples de um para muitos, o que resultou em erros procedimentais.

De acordo com Filho, Santana e Lautert (2017), os estudantes enfrentam mais dificuldades em resolver problemas de proporção simples do tipo muitos para muitos em comparação com os de um para muitos, devido à exigência de realizar dois cálculos – um de multiplicação e outro de divisão. Os autores destacam a importância de trabalhar regularmente com esse tipo de situação para que os alunos possam desenvolver uma compreensão adequada.

6.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para analisarmos as aprendizagens dos alunos sobre o conteúdo de razão e proporção e sobre o desenvolvimento do pensamento proporcional, baseamo-nos no estudo de Langrall e Swafford (2000), que propôs quatro níveis distintos de pensamento proporcional.

O nível 0 é caracterizado pelo **pensamento não proporcional**, o qual revela a dificuldade dos alunos em reconhecer e aplicar o pensamento proporcional, optando, frequentemente, por estratégias inadequadas, como a adição direta, sem considerar as relações entre as grandezas envolvidas (Langrall; Swafford, 2000).

Durante o experimento de ensino, observamos que menos da metade dos alunos apresentaram indícios desse nível, pois utilizavam cálculos aditivos e cometiam erros no uso das operações, o que ficou evidente nas atividades e durante as aulas como nos testes. Ao resolver os problemas dos testes, os alunos usavam mais o pensamento aditivo do que o multiplicativo para resolver os problemas de proporção. Van de Walle (2009) aponta que a habilidade de diferenciar entre situações proporcionais e não proporcionais é um indicador essencial do desenvolvimento do pensamento proporcional.

Os estudos de Macedo (2012), Porto (2015), Miranda (2016), Aguiar (2017) e Ferreira (2017) indicaram que os alunos frequentemente recorriam a adições sucessivas para resolver problemas de multiplicação, tratando-os como somas repetidas. Embora essa abordagem, em alguns casos, levasse ao resultado correto, ela se mostrava trabalhosa e ineficaz em problemas mais complexos, além de não refletir adequadamente o conceito central do pensamento multiplicativo.

Lamon (1999) ressalta que crianças enfrentam grande dificuldade em compreender a natureza multiplicativa em situações proporcionais, frequentemente preferindo abordagens aditivas por se sentirem mais confortáveis com elas. A multiplicação, que lida com processos como ampliação e redução, exige uma análise mais profunda das relações quantitativas. Com o tempo e a experiência, os alunos começam a entender que as operações aditivas não são adequadas nesses contextos, sendo necessário identificar as quantidades intensivas para a aplicação correta das operações multiplicativas.

O nível 1 apontado por Langrall e Swafford (2000), é caracterizado como **pensamento informal sobre situações proporcionais**, e refere-se ao momento em que os alunos começam a perceber que as quantidades estão relacionadas, mas ainda utilizam desenhos e estratégias que não são totalmente precisas ou formalizadas.

Durante as atividades desenvolvidas em aula, verificamos que poucos alunos apresentaram indícios do referido estágio, empregando desenhos e formas não formalizadas de resolução. No quinto encontro, que teve como objetivo trabalhar a resolução de um problema gerador para introduzir a ideia de proporção simples, percebemos que um dos grupos de alunos utilizou desenhos dos ramos e das rosas como estratégia. No entanto, eles não conseguiram completar corretamente a relação proporcional entre as quantidades de rosas brancas e amarelas. Além disso, o grupo combinou estruturas aditivas e multiplicativas, o que evidenciou suas dificuldades na compreensão plena do problema.

No estudo de Leite (2016), algo semelhante foi observado, com os alunos utilizando desenhos e algoritmos escritos em suas resoluções. Porém, a autora concluiu que o conhecimento declarativo sobre os conceitos de razão e proporção apresentava-se frágil e marcado por inseguranças, refletindo uma compreensão ainda superficial desses conceitos.

O nível 2 é caracterizado como **pensamento quantitativo**, que envolve uma compreensão mais avançada, a partir da qual os alunos começam a aplicar operações matemáticas de forma mais consistente e apropriada às situações proporcionais. Eles conseguem identificar quando é necessário usar multiplicação ou divisão e aplicam esses procedimentos com maior precisão, embora ainda possam cometer erros esporádicos (Langrall; Swafford, 2000).

Durante as aulas, mais da metade dos alunos demonstrou indícios desse estágio, utilizando estratégias que envolveram as operações de multiplicação e divisão para resolverem os problemas de proporção simples e inversa, o que também foi observado durante a resolução dos problemas dos testes. No aprimoramento do pensamento proporcional, os alunos, ao resolverem problemas de proporção, demonstraram uma evolução no pensamento quantitativo, especialmente ao lidarem com situações de natureza multiplicativa.

Problemas de proporção pertencem ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, que segundo Vergnaud (1993), é caracterizado por um conjunto de situações matemáticas que envolvem multiplicações, divisões e suas combinações. Essas situações, muitas vezes informais e heterogêneas, exigiam o uso de uma ou várias operações de multiplicação ou divisão, ou até a combinação entre elas, para serem resolvidas de maneira adequada.

Neste sentido, quanto mais os alunos aprimoram seus conhecimentos matemáticos e dominam as estruturas multiplicativas na resolução de problemas de razão e proporção, mais conseguirão acessar e relacionar com outros conteúdos matemáticos que envolvem essas estruturas. Vergnaud (1993) explica que o conhecimento das estruturas multiplicativas também contribui para o aprimoramento da fluência matemática dos alunos, bem como para a compreensão de conceitos fundamentais, como fração, proporção simples e múltipla, função linear, bilinear e não linear, razão, quociente, análise dimensional, produto cartesiano, combinação, espaço vetorial, função, entre outros.

Esse progresso de aprendizagem observado no estágio do pensamento quantitativo também foi constatado nos estudos de Aguiar (2017), Ferreira (2017), Tobias (2018), Batista (2018), Matulle (2019), Vargas (2020) e Silva (2022). Esses estudos destacaram que durante as atividades de ensino envolvendo a resolução de problemas de razão e proporção, os alunos demonstraram avanços significativos na compreensão das estruturas multiplicativas.

Outro ponto a destacar é que os estudos supracitados apontaram que nas resoluções dos alunos foi possível observar a presença da relação entre grandezas, tanto diretamente quanto inversamente proporcionais, ou seja, tiveram compreensão intuitiva da noção da relação proporcional, mas essa compreensão não atingiu um nível de sistematização ou conceituação completa. Isso apontou, por meio desses estudos, para a necessidade de gradualmente aprimorar a competência dos alunos em relação à sistematização do conceito de proporção.

O nível 3 apontado por Langrall e Swafford (2000) é o último nível. Caracterizado como **pensamento proporcional formal,** representa o estágio mais avançado, por meio do qual os alunos demonstram um entendimento completo e formal das proporções. Neste nível, eles conseguem identificar e aplicar corretamente o pensamento proporcional em uma variedade de contextos, utilizando operações matemáticas de maneira eficiente e justificando suas escolhas com base no entendimento das relações proporcionais.

Observamos que pelas estratégias dos alunos, não houve indícios que tenham atingido o estágio de nível 3, denominado proporcional formal, que envolve uma compreensão mais avançada e completa da relação de proporção. Sabemos que para os alunos atingirem esse nível é preciso tempo e maturidade cognitiva, e que provavelmente atinjam esse nível no ensino médio. Como tivemos pouco tempo com os alunos e não logramos realizar um aprofundamento maior das aprendizagens de razão e proporção, esse nível ficou apenas em processo de construção, logo, não houve uma consolidação dessas aprendizagens.

A ausência de alunos nesse estágio mais avançado do pensamento proporcional formal é explicado por Lesh, Post e Behr (1988), Lamon (1999) e Langrall e Swafford (2000), quando afirmam que o desenvolvimento do pensamento proporcional é um processo gradual e complexo que pode levar anos para ser plenamente alcançado.

Estes autores ressaltam que esse tipo de pensamento não surge de forma espontânea, mas através de uma progressão de experiências e aprendizagens que permitem aos alunos compreenderem e aplicar conceitos de proporção em diferentes contextos. O desenvolvimento dessa habilidade envolve a construção de relações entre quantidades, a capacidade de reconhecer padrões proporcionais e a aplicação correta das operações matemáticas adequadas, o que demanda tempo e prática contínua.

De forma geral os dados analisados no desempenho dos testes e nas atividades desenvolvidas durante as aulas nos permitiu perceber os avanços dos alunos na aprendizagem dos conceitos de razão e proporção, visto que esses conceitos foram sendo construídos dia após dia nas aulas, no processo de resolução de problemas em que os alunos se envolviam. O trabalho com a resolução de problemas nas aulas possibilitou que os alunos desenvolvessem suas próprias estratégias e refletissem sobre seus erros em diálogo com seus colegas, assim como permitiu que o processo de avaliação das aprendizagens acontecesse juntamente com o processo de ensino e de aprendizagem e não em outro momento de forma separada.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo verificar se uma proposta de ensino utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribui para a aprendizagem das ideias de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Assim, procuramos responder à seguinte questão de pesquisa: "A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem das ideias de razão e proporção e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental?"

Para desenvolver esta pesquisa, realizamos uma revisão de estudos com o intuito de compreender as discussões que envolvem os conceitos de proporcionalidade, pensamento proporcional e proporção, bem como a sua importância no processo de ensino e aprendizagem. Também investigamos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, buscando entender o que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de proporção mostram sobre as metodologias já desenvolvidas e as dificuldades enfrentadas pelos alunos nesse tema.

Os estudos revisados revelaram que os alunos possuem dificuldades desde a falta de compreensão de conceitos essenciais para a construção da ideia de razão e proporção até dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas. Além disso, o pensamento mecanizado para a resolução de problemas mostrou-se profundamente enraizado. Por esse motivo, esses estudos defenderam a adoção de práticas metodológicas que incentivassem os alunos a investigarem e descobrirem, com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem, não apenas o desenvolvimento do pensamento proporcional, mas também em outros conteúdos e no crescimento pessoal.

Durante a aplicação do experimento de ensino em sala de aula, no qual utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, percebemos que os alunos se mostraram interessados e ansiosos para vivenciar as aulas, que eram diferentes do ensino tradicional ao qual estavam acostumados. Em relação ao engajamento dos alunos durante as atividades do experimento de ensino, observamos um bom envolvimento desde a leitura individual do problema gerador até o momento em que começaram a trocar ideias sobre a situação e elaborar estratégias de resolução. Embora tenham apresentado dificuldades na interpretação de alguns problemas, conseguiram expor suas ideias durante as discussões em plenária. Isso lhes proporcionou a oportunidade de compreender tanto os acertos quanto os erros.

Em relação à satisfação dos alunos com a proposta de ensino, observamos que ela favoreceu um ambiente propício à aprendizagem. A maioria dos alunos participou ativamente de todos os encontros. Eles foram se adaptando à dinâmica da aula, desenvolvendo maior autonomia para compartilhar suas opiniões e estratégias com os colegas e aprimoraram suas habilidades de trabalho em equipe. Compreenderam que os erros não eram um obstáculo nem motivo de constrangimento. Ademais, agradeceram e expressaram que apreciaram as aulas, mencionando que aprenderam sobre razão e proporção durante o processo de resolução de problemas.

Os resultados da pesquisa indicaram que os alunos assimilaram as noções de razão e proporção, bem como as relações de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Isso ficou evidente na resolução dos problemas durante as aulas. Embora tenham cometido alguns erros, esses equívocos foram atribuídos à falta de certos conhecimentos prévios necessários para a resolução dos problemas, o que também pode ser explicado pelo impacto do cenário pandêmico que vivenciaram.

Com base na experiência adquirida durante o experimento de ensino, constatamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proporcionou uma abordagem diferenciada para a condução das aulas. Essa proposta metodológica nos possibilitou realizar diagnósticos dos alunos em cada etapa e socializar as dificuldades e erros de forma clara. Observamos que, durante a experimentação, o ensino se tornou mais dinâmico, promovendo um diálogo constante sobre as percepções dos alunos, tanto em relação às situações dos problemas quanto ao seu entorno. Essa metodologia permitiu reconhecer e validar diversas formas de pensamento e estratégias de resolução que não eram previstas antes do início das aulas.

Diante disso, em resposta à questão de pesquisa, inferimos que o experimento de ensino, ao empregar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, não apenas contribuiu para a aprendizagem dos alunos sobre razão e proporção, mas também revelou fragilidades em seus conhecimentos prévios. Essas fragilidades refletiram lacunas de aprendizagem que podem ter sido intensificadas durante o período de restrições impostas pela pandemia.

Por meio da prática da metodologia de ensino baseada na resolução de problemas, foi possível observar indícios de avanços no desenvolvimento do pensamento proporcional entre os alunos. Apesar desses avanços, não houve indícios de que algum aluno tenha atingido o estágio mais avançado de pensamento proporcional formal, o que reforça a ideia de que o desenvolvimento desse tipo de pensamento é um processo gradual e complexo, que pode levar anos para ser plenamente alcançado, conforme destacado por estudos de Lesh, Post e Behr (1988), Lamon (1999), e Langrall e Swafford (2000).

No entanto, o trabalho em grupos colaborativos e a socialização de ideias criaram um ambiente de apoio mútuo, onde os alunos puderam discutir e construir juntos novas estratégias de resolução. Esse espaço colaborativo incentivou a troca de conhecimentos, ajudou os alunos a superar algumas dificuldades e promoveu um avanço significativo na compreensão dos conceitos matemáticos.

E por fim, este estudo contribuiu de forma positiva para a minha formação como professor, ampliando os meus horizontes sobre o ensino da matemática. Essas experiências aprofundaram os meus conhecimentos sobre o conteúdo específico, abrangendo desde o contexto histórico até a revisão dos estudos anteriores sobre o tema. Neste sentido, esperamos que este estudo contribua para a formação de outros professores de matemática e que possa oferecer caminhos para outras pesquisas relativas ao tema.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. B. **Introduzindo a noção de proporcionalidade via resolução de problemas:** uma análise acerca de esquemas mobilizados por estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 2017.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. D. L. R. As diferentes" personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justulin, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí-SP: Paco Editorial. 2021. p. 37-57.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 1–14, 2019. Disponivel em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2334>. Acesso em: 25 out. 2023.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, v. 55, p. 133-154, 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In:* ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí-SP: Paco Editorial. 2014. p. 37-57.

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, v. 25, n. 1, p. 113-132, 2016.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BATISTA, J. D. A. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém-PA, 2018.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. **O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. 3ª ed. São Paulo - SP: Livraria da Física, 2023.

BITENCOURT, R. R. R. **Aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Amapá, Macapá-AP, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasilia, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 25 jun. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRIGHT, G. W.; JOYNER, J. M.; WALLIS, C. Assessing proportional thinking. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 9, n. 3, p. 166-172, 2003.

BROWN, A. Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. **The Journal of the Learning Science**, v. 2, n. 2, p.141-178, 1992.

CARVALHO, C. C. S.; GIORDANO, L. V. O. Avaliação diagnóstica de matemática no ensino médio: da elaboração ao planejamento de intervenções. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 07. Mato Grosso. Cuiabá-MT: **Anais**. 2019. p. 1-8.

CARVALHO, F. S.; MARANHÃO, M. C. A. Atividades que envolvem o pensamento proporcional suscitam o pensamento matemático avançado? **Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, v. 1, n. 1, 2012.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. *In:* ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education New York: Routledge**, p. 481-503, 2016.

COBB, P. *et al*. Design experiments in educational research. **Educational researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COLLINS, A. Towards a design science education. *In:* SCANLON, E.; O'SHEA, T. (Ed.). **New directions in educational technology.** Berlin: Springer, p. 15-22, 1992.

CORDEL, B.; MASON, R. **Proportional reasoning (Algebraic thinking series)**. Fresno, CA: Aims Education Foundation, 2000.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and Teaching ratio and proportion: research implications. *In:* OWENS, D.T. (Ed.) **Research ideas for the classroom:** middle grades mathematics. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 6a Ed. São Paulo: Editora Ática, 1995.

DIAS, A. C. A. M. **Avaliação de um objeto de aprendizagem para a compreensão do conceito de proporcionalidade por estudantes do 6º. Ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza-CE, 2016.

DRESCH, A.; LACERDA, D. P.; JUNIOR, J. A. V. A. **Design Science research:** método de pesquisa para avanço da ciência e tecnologia. Porto Alegre-RS: Bookman, 2015.

DUTRA, M. J. V. **O ensino de razão e proporção no ensino fundamental usando experimentos de movimento retilíneo uniforme**. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional de Ensino de Física) -Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda-RJ, 2016.

FALVO, S. R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022.

FARIA, R. W. S. C. Os conteúdos da aprendizagem e o raciocínio proporcional. **Revista de Educação do Vale do Arinos-RELVA**, v. 6, n. 1, p. 251-272, 2019.

FERREIRA, C. D. R. **Conceito de proporcionalidade:** uma proposta para o processo ensino-aprendizagem do 7º ano do ensino fundamental. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Maranhão, Imperatriz-MA, 2013.

FERREIRA, M. J. **O potencial dos grupos interativos para o ensino de proporcionalidade:** um estudo de caso com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, 2017.

GARIBOTTI, C. R. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo:** um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais. Patrulha-RS: Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –FURG, 2019.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo-SP: Atlas, 1999.

GONÇALVES, R. **Avaliação Integrada ao Ensino e Aprendizagem Significativa das Funções Definidas por Várias Sentenças através da Resolução de Problemas.**Tese.2023. 223f. (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2023.

GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from a learning design perspective. *In:* **Educational design research.** Routledge, 2006, p. 29-63.

ILANY, B-S.; KERET, Y.; BEN-CHAIM, D. Implementation of a Model Using Authentic Investigative Activities for Teaching Ratio & Proportion in Pre-Service

Teacher Education. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2004.

JACONIANO, E. A. **Resolução de problemas de proporcionalidade através da redução à unidade**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2017.

KARPLUS, R.; PULOS, S.; STAGE, E. Proportional reasoning of early adolescents. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Org.). **Acquisition of mathematical concepts and processes.** New York, NY: Academic Press, 1993.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Routledge, 2012.

LANGRALL, C. W.; SWAFFORD, J. Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. **Mathematics teaching in the middle school**, v. 6, n. 4, p. 254-261, 2000.

LAUREANO, J. L.; LEITE, O. V. **Os segredos da matemática financeira.** São Paulo: Ática, 1987.

LEAL, J. **Diários de campo:** modos de fazer, modos de usar. ALMEIDA, S. V.; CACHADO, R. Á. (Orgs.). Os arquivos dos antropólogos. Lisboa: Palavrão. 2016.

LEÃO, H. S. **O uso do geogebra na aprendizagem de proporcinalidade**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Educação, Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2016.

LEITE, A. B. B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla:** um olhar para as situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2016.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportinal reasoning. *In:* HIEBERT, J.; BEHR, M. (Org.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, A: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93–118.

LESTER, F. K. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. **Journal for research in mathematics education.** [s.n.]. 1994. p. 660-675.

LIVY, S.; VALE, C. First year pre-service teachers mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. **Mathematics Teacher Education and Development**, Nova Zelândia, v. 13, n. 2, p. 22-43. 2011.

LO, J. J.; WATANABE, T. Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. **Journal for research in mathematics education**, v. 28, n. 2, p. 216-236, 1997.

LOBATO JÚNIOR, J. M. D. S. **O ensino de razão e proporção por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém-PA, 2018.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem na escola:** reelaborando conceitos e criando a prática. Salvador-BA: Malabares Comunicações e eventos, v. 2, 2005.

MACEDO, E. L. D. **Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais:** uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2012.

MACÊDO, L. N. de et al. Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A de (Org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico.** Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 17-26.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MAGINA S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** v. 1, n. 1, p. 1-23, Jun. 2010.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. A estrutura multiplicativa à luz da teoria dos campos conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. *In:* Castro Filho, Jose; Barreto, Marcília; Barguil, Paulo; Maia, Dennys; Pinheiro Joserlene (Eds.) **Matemática, Cultura e Tecnologia:** perspectivas internacionais. Curitiba: CRV, p. 65-82, 2016.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. D. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 141-156, 2011.

MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. **Aprender Matemática resolvendo Problemas.** Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

MATTA, A. E. R.; DA SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa metodologia para pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA**: Educação e Contemporaneidade, v. 23, n. 42, p. 23-36, 2014.

MATULLE, L**. O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da resolução de problemas com estudantes do 7° ano do ensino fundamental.** Dissertação (mestrado de Ciências Naturiais e Matemática) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava-PR, 2019.

MIRANDA, J. A. **Desenvolvimento do raciocínio proporcional:** uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, 2016.

MIRANDA, M R. **Pensamento proporcional:** uma metanálise dissertativa de dissertações, 2009.136 f. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MODESTOU, M; GAGATSIS, A. Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 12, n. 1, p. 36-53, 2010.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; CASTRO, E. Teaching experiments within design research. **The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences**, v. 2, n. 4, p. 435-440, 2007.

MORAIS, R. D. S.; ONUCHIC, L. D. L. R. Uma abordagem Histórica da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí-SP: Paco Editorial. 2021. p. 19-36.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências.** v.7, n.1, 2002, p. 7-29.

NOGUEIRA, L. M.; FERREIRA, R. S. Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade. **Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade:** desafios e possibilidades. São Paulo, 2016.

NORTON, S. J. The Construction of Proportional Reasoning. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 4, p. 17-24, 2005.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas:** perspectivas didático-matemática na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 p. Tese (Doutorado em Educação na área de Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? 1. ed**. Revista Espaço Pedagógico**, v. 20,

2013. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3509>. Acesso em: 08 abr. 2023.

ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática. *In:* BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo-SP: Editora UNESP. 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? **IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática**. UPF. Passo Fundo. 2012.

OWE, C.; NUNES, T.; BRYANT, P. Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *In:* **International journal of science and mathematics education.** National Science Council. Taiwan, 2010.

PAULA, M. R. D. **Razão como taxa:** Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2012.

PÉREZ, L.C.; CABRERA, C.R. Curso especial Geometria y resolucion de problemas. *In:* **XIV RELME**, Panamá, 2000. p.117-124.

PIRONEL, M. **Avaliação para a aprendizagem:** a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas em ação. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2019.

POLYA, G. **Mathematical discovery:** on understanding, learning and teaching problem solving. USA: Library of Congress Catalog, vol.1, 1962.

PORTO, E. R. S. **Raciocínio proporcional:** a resolução de problemas por estudantes da EJA. Dissertação (mestrado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PB, 2015.

PREDIGER, S.; GRAVEMEIJER, K.; CONFREY, J. Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. **ZDM**, v. 47, p. 877-891, 2015.

REIS, C. D. **Matemática e Educação Ambiental no Ensino Fundamental:** a construção de cisternas e as relações de proporcionalidade. Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, 2022.

REYES-GASPERINI, D.; CANTORAL, R. Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica: ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? **Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación**, v. 2, n. 11, p. 155-176, 2016.

RIBEIRO, M. D. S. N. **Percurso de estudo e pesquisa:** uma proposta para aprender proporcionalidade no ensino fundamental. Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo; Programa de Doutorado em Educação Matemática, São Paulo-SP, 2021.

ROMERO, P. Breve estudo sobre Lev Vygotsky e o sociointeracionismo. **Educação Pública**, v. 15, 2015. p. 8-28.

SANDOVAL, W. A.; BELL, P. Design-based research methods for studying learning in context: Introduction. **Educational psychologist**, v. 39, n. 4, p. 199-201, 2004.

SANTANA, E.; LAUTERT, S.; CASTRO FILHO, J. **Ensinando multiplicação e divisão: 6º ao 9º ano**. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2017.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 197-223, 2020.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, v. 39, p. 537-551, 2007.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. **New directions for elementary school mathematics**, v. 31, p. 42, 1989.

SILVA, M. F. D. **Razão, proporção e resolução de problemas:** uma proposta para o ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2022.

SILVA, R. L. D. **Conhecimentos prévios revelados por estudantes de sexto e sétimo anos do ensino fundamental relativos à proporcionalidade**. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo-SP, 2013.

SILVA, T. M.; PALANCH, W. B.L. O raciocínio proporcional nas atividades de proporcionalidade do sétimo ano no Caderno da Cidade Saberes e Aprendizagens. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 1, p. 1-22, 2021.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Resolução de Problemas de Valor Omisso: Análise das Estratégias dos Alunos. *In:* **Anais XIXEIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática**. Vila Real, 2009.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. **Revista Educação e Cultura Contemporânea**, v. 5, n. 10, p. 61-89, 2008.

SOUSA, D. P.; FÁVERO, M. T. M. Educação Física nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. **Revista Digital EFDESPORTE.**, n. 147, Buenos Aires, 2010. Disponível em: < http://www.efdeportes.com/efd147/educacao-fisica-na-perspectiva-dos-parametros-curriculares-nacionais.htm>. Acesso em: 09 ago. 2023.

SOUZA, A. R. **Razão áurea e aplicações:** contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9o ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto-MG, 2013.

STANIC, G.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. **The teaching and assessing of mathematical problem solving**, v. 3, p. 1-22, 1989.

TORRE, J.; TJOE, H.; RHOADS, K.; LAM, D. Conceptual and Theoretical Issues in Proportional Resoning. **International Journal for Studies in Mathematics Education**. v. 6, n. 1, p. 21-38, 2013.

TOBIAS, P. R. N. A. **Sala de aula invertida na educação matemática:** uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação, Belo Horizonte-MG, 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: 4a edição, Logman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VARGAS, C. L. **A resolução de problemas como metodologia de ensino de razão e proporção**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes-RJ, 2020.

VERGARA, A.; ESTRELLA, S.; VIDAL-SZABÓ, P. Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 23, n. 1, p. 7-36, mar. 2020.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

VERGNAUD. G. Teoria dos campos conceituais. In: **Anais 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, 1993, UFRJ, Rio de Janeiro: Projeto FundãoInstituto de Matematica-UFRJ, 1993, p. 1 – 26.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** New York: Academic Press Inc. 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, G. La théorie dês champs conceptuels. **Recherches em Didactique dêsMathématiques**, v. 10, n. 23. p. 133-70, 1990.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. **Learning and teaching mathematics**. Psychology Press, 1997. p. 5-28.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. *In:* NASSER, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** 1993, p.1-26. Disponível em: http://odin.mat.ufrgs.br/usuarios/paula/Teoria_do_Campo_Conceitual_G.Vergnaud.pdf Acesso em: 9, abr. 2023.

VIANA, T. L. E. A. **Contribuições do sociointeracionismo para o processo de ensino aprendizagem**. Betim-MG: Monografia de Curso de Pedagogia do Centro Universitário UNA, 2021.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa. *In:* VILA, A.; CALLEJO **Matemática para aprender a pensar:** O papel das crenças na resolução de problemas. Tradução Ernani Rosa. ARTMED Editora S.A., S. P., 2006. p.127- 182.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário para Estudantes

Universidade do Estado Pará
Pró- Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação – CCSE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGED

1. nome: ____

Idade:________ gênero: masculino ( ) feminino ( ) outros ( )

2. Você estudou o 6º ano em que tipo de escola:

( ) Estadual ( ) Municipal ( ) Particular ( ) Outra. Qual? _____________

3. Você é repetente do 7º ano? ( ) Não ( ) Sim.

4. Você gosta de matemática?

( ) não ( ) sim ( ) um pouco

5. Você costuma estudar matemática:

( ) só na véspera da prova ( ) todo dia ( ) semanalmente

6. Você tem dificuldade em aprender matemática?

( ) Não ( ) sim ( ) um pouco ( ) muito

7. Quais são suas dificuldades em Matemática?

8. Você tem dificuldades para resolver problemas de matemática? Explique.

9. Você já estudou razão e proporção?

( ) sim ( ) não ( ) não lembro

APÊNDICE B – Pré/Pós-Teste

Aluno:____

1. A lagarta A tem 6 cm de comprimento e a lagarta B tem 4cm de comprimento.

   c) Quanto a lagarta A é maior que a lagarta B?

   b) Quantas vezes a lagarta A é mais longa que a lagarta B?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia do pensamento aditivo e multiplicativo e de razão.

2. Para fazer 1 bolo, Maria gastou 3 ovos. Se ela precisar fazer 2 bolos, quantos ovos serão necessários?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção simples.

3. Em três pacotes de balões há trinta unidades. Quantos balões há em cinco pacotes?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção simples.

4. Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 copos de água e 12 colheres pequenas de café. Quantas colheres de café são necessárias se forem usados 20 copos de água?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção simples

5. Jonas possui 4 cachorros e têm ração suficiente para alimentá-los por 5 dias. Se Jonas tivesse 2 cachorros, a ração daria para quantos dias?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção inversa.

6. Em duas caixas iguais, cabem 16 vasos idênticos de flores, totalizando 48 flores. Quantas flores há em uma caixa?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção múltipla.

7. Maria lê 50 páginas de um livro em 2 horas. Quantas páginas serão lidas por Maria em 5 horas?

   objetivo: verificar se o aluno tem construída a ideia de proporção simples.

APÊNDICE C - Problemas de aprofundamento de aprendizagem de proporção simples

1. Um pacote de biscoito de maisena custa R$ 5,00. Quanto terei que pagar por três pacotes?

2. Na festa de aniversário de Anita teremos 36 convidados. Em cada uma das mesas ficarão 4 convidados. Quantas mesas serão necessárias?

3. Pedro comprou um saco com 20 bombons. Se ele comprasse 5 sacos quantos bombons teria?

4. Carla ler uma página do livro em 5 minutos. Quantos minutos gastaria para ler 6 páginas?

5. Para fazer 3 vestidos são necessários 5m de tecido. Rosana tem 35m de tecido. Quantas vestidos ela pode fazer?

6. Caio foi ao supermercado e comprou 9 caixas de suco e pagou R$ 36,00. Se ele comprasse 3 caixas de suco, quanto em reais ele precisaria pagar?

7. Alex está treinando para uma corrida. A cada 3 voltas correndo na quadra vale 4 pontos. Alex deu 15 voltas na quadra. Quantos pontos ele marcou?

8. Um carro percorre 240km em 3 horas. Quanto tempo levará para percorrer 400km na mesma velocidade?

APÊNDICE D – ATIVIDADE DE REVISÃO

1- Um automóvel gasta 8 litros para percorrer 1km. Quantos quilômetros o carro irá percorrer com 480 litros de gasolina?

2- Camila comprou 4 blusas e pagou R$ 72,00. Quanto ela pagou por uma blusa?

3- Em três pacotes de Bombom há 30 unidades. Quantos bombons há em 5 pacotes?

4- Em uma limpeza geral de uma escola, oito zeladoras levam 2 horas para concluir a limpeza. Se faltassem 6 zeladoras, quantas horas levará?

APÊNDICE E – Termo de Autorização para realizar pesquisa na Instituição

Universidade do Estado Pará
Pró- Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação – CCSE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGED

Caro(a) Senhor (a) Diretor (a) da escola ____,

venho por meio deste documento solicitar a vossa autorização para realizar a pesquisa de mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará intitulada **Ensino de Razão e proporção por meio da resolução de problemas para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental** sob minha responsabilidade Iales Oliveira Nascimento (pesquisador), RG nº 4117725 PC/PA, CPF n° 900.435.532-49 e sob a orientação da professora Dra. Rosineide de Sousa Jucá, da Universidade do Estado do Pará. Informo que à pesquisa será realizada nas dependências da Escola durante as aulas de Matemática e não atrapalhará no andamento das atividades regulares dos alunos. Pois o conteúdo de matemática que será trabalhado faz parte do currículo do 7º ano, e o professor da turma estará presente durante a pesquisa. Ressalto, a participação dos alunos na pesquisa é apenas de participar de atividades de ensino elaboradas sobre o conteúdo matemático de razão e proporção, planejadas com o objetivo de melhorar o processo de aprendizagem de matemática. Com base, nas informações descritas, eu ____, diretor (a) da Escola_____________________________________, uma instituição localizada em Belém do Pará, em exercício, RG nº___________________, CPF nº ____________________________, AUTORIZO os pesquisadores, a realizarem observação, registro fotográfico e/ou gravações em áudio, realizar entrevistas, com os participantes da pesquisa que frequentam a referida instituição de ensino. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato você poderá entrar em contato com o pesquisador responsável Iales Oliveira Nascimento pelo fone:(91) 98825-8874 ou pelo e-mail: iales.virtual@gmail.com. O pesquisador acima citado se compromete a:

1. Obedecer às disposições éticas de proteger os participantes da pesquisa, garantindo-lhes o máximo de benefícios.

2. Assegurar a privacidade das pessoas citadas nos documentos institucionais e/ou contatadas diretamente, de modo a proteger suas imagens, bem como garante que não utilizará as informações coletadas em prejuízo dessas pessoas e/ou da instituição, respeitando deste modo as Diretrizes Éticas da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, nos termos estabelecidos na Resolução CNS N° 466/2012, e obedecendo as disposições legais estabelecidas na Constituição Federal Brasileira, artigo 5°, incisos X e XIV e no Novo Código Civil, artigo 20.

Belém/PA, ________de ______________________de 2023

____
Assinatura do pesquisador

____

Diretor (a) da Escola_______________________________.

APÊNDICE F – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Universidade do Estado Pará
Pró- Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação – CCSE
Programa de Pós-Graduação em Educação - PPGED

Prezado (a) Senhor (a) responsável,

Venho por meio deste documento convidar seu filho a participar como voluntário de uma pesquisa de mestrado do Programa Pós-graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará intitulada **Ensino de Razão e proporção por meio da resolução de problemas para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental** sob responsabilidade do pesquisador Iales Oliveira Nascimento e sob a orientação da professora Dra. Rosineide de Sousa Jucá, da Universidade do Estado do Pará.

A participação de seu filho (a) à pesquisa será realizada nas dependências da Escola que ele estuda e durante as aulas de Matemática e não atrapalhará no andamento de suas atividades regulares. Pois o conteúdo de matemática que será trabalhado faz parte do currículo do 7º ano, e o professor da turma estará presente durante a pesquisa. A participação dele é apenas de participar de atividades de ensino elaboradas sobre o conteúdo matemático de razão e proporção, planejadas com o objetivo de melhorar o processo de aprendizagem de matemática. Em nenhum momento seu (sua) filho (a) será identificado (a). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade dele (a) será mantida em sigilo. Você ou seu filho (a) não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Não há riscos aos participantes de nenhuma natureza, seja ela física ou psicológica. Os benefícios serão de natureza acadêmica por meio de um estudo sobre o ensino-aprendizagem matemática. Seu filho (a) é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Aos pais é garantido o livre acesso as informações e esclarecimentos referentes à pesquisa.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o pesquisador responsável Iales Oliveira Nascimento pelo fone: (91) 98825-8874 ou pelo e-mail: iales.virtual@gmail.com.

Belém/PA, ________de ______________________de 2023.

____

Assinatura do pesquisador

Eu,____
aceito ou autorizo meu filho (a), a participar da pesquisa citada acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido (a).

____

Responsável pelo Participante da pesquisa

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
http://ccse.uepa.br/mestradoeducacao