UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

RITA DE CÁSSIA FLORÊNCIO ROCHA KASAHARA

O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PONTO DE PARTIDA E ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Belém-Pará
2025

Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara

O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PONTO DE PARTIDA E ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação da Universidade do Estado do Pará.
Área de Concentração: Saberes Culturais e Educação na Amazônia
Orientador: Profº Dr. Pedro Franco de Sá

Belém-Pará
2025

Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara

O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PONTO DE PARTIDA E ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação da Universidade do Estado do Pará.
Área de Concentração: Saberes Culturais e Educação na Amazônia

Data da aprovação:

Banca Examinadora

_____ - Orientador
Profº Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

_____ - Membro externo
Profº Dr João Cláudio Brandemberg Quaresma
Doutor em Educação
Universidade Federal do Pará

_____ - Membro externo
Profº Dr Thiago Beirigo Lopes
Doutor em Educação em Ciências e Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso

_____ - Membro interno
Profº Dra Marta Genú Soares
Doutora em Educação
Universidade do Estado do Pará

_____ - Membro interno
Profº Dra Rosineide de Sousa Jucá
Doutora em Educação em Ciências e Matemática
Universidade do Estado do Pará

Belém - Pará
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Kasahara, Rita de Cássia Florêncio Rocha

O ensino de vetores geométricos por meio de resolução de problemas como ponto de partida e atividades experimentais / Rita de Cassia Florêncio Rocha Kasahara; orientação de Pedro de Franco de Sá. - Belém, 2025.

Tese (Doutorado em Educação) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Educação. - Belém, 2025.

1.Vetores geométricos. 2. Engenharia didática. 3. Ensino por atividades experimentais. Sá, Pedro Franco de (orient.). II. Título.

CDD. 23ºed. 516

Bibliotecária: Regina Ribeiro CRB-2 739

À Jesus Misericordioso.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à Deus e à Jesus misericordioso por me dar essa oportunidade e me colocar no lugar certo, na hora certa e com a pessoa certa, à Santa Faustina e à Santa Rita de Cássia.

À minha família, em nome de meu pai Afonso, minha mãe Norma, meu esposo Paulo Kasahara, meu filho que está a caminho, meus irmãos Thatiana e Everson, meus sobrinhos Luiz Gabriel, Rafael e Maria Juliana e meu cunhado Waldiney pela confiança em mim e certeza de que todo o esforço será válido e por me lembrarem que pra cada hora há o seu momento, que não basta, apenas, estudar, há de se ter o equilíbrio, e que a família deve estar em primeiro lugar.

Agradeço aos meus familiares, em nome de meus padrinhos José Felipe, que sempre foi um incentivador dos meus estudos e ajudou a guiar os caminhos que trilhei em minha carreira acadêmica e profissional, e Maria de Jesus e de minhas primas Jossi (e seu cônjuge Renato) e Luciana por todo o apoio, incentivo e orações para a condução e realização desse trabalho.

Ao meu orientador, Profº. Dr. Pedro Franco de Sá pela tranquilidade e confiança e, principalmente, pela sua humanidade; por não só nos ensinar a ser pesquisadores, mas a viver em plenitude e com equilíbrio. Obrigada por tudo, não há palavras para expressar minha gratidão a você; só tenho a dizer que Deus escreve certo por linhas tortas. Que Deus o abençoe, proteja e guarde.

Agradeço, ainda, ao IFPA, meu local de trabalho, que me possibilitou a realização desse trabalho, em especial, aos meus colegas do curso de Telecomunicações, ao professor que me concedeu parte da carga horária de sua disciplina para a realização da experimentação e aos alunos que colaboraram e se empenharam em prover bons resultados que levaram a conclusão, finalização e validação dessa tese.

Por fim, agradeço a banca examinadora por todo o cuidado e contribuição no andamento e finalização dessa tese, bem como, a toda a equipe técnica e de docentes do PPGED-UEPA.

Nada te perturbe,
nada te amedronte.
Tudo passa,
a paciência tudo alcança.
A quem tem Deus nada falta.
Só Deus basta!
(Santa Terese D’Avila)

RESUMO

Esse trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve por objetivo principal analisar efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais em relação à análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções. Assim, ao final, responde ao seguinte questionamento: De que forma a utilização de metodologias de ensino baseadas no protagonismo do ensino compartilhado entre docentes e discentes, tais como, a Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções? Para tanto, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática, uma Sequência Didática foi aplicada a uma turma do 4º período do curso de Engenharia Elétrica do IFPA, campus Belém. A verificação dos resultados da experimentação teve por aporte a teoria da Atividade de Leontiev, a Atividade de Estudo de Davydov e a análise de erros, bem como, de técnicas quanti-qualitativas e estatísticas. Por fim, concluiu-se, dentre outras coisas, que os alunos em relação a: 1) Análise: mostraram entender o procedimento a ser realizado de forma a planejar ações para atingir os objetivos com destaque a abstração e a generalização; 2) Dedução: conseguiram transformar as relações particulares de um objeto em gerais e fizeram conexões com conhecimentos anteriores; 3) Domínio: demostraram ter desenvolvido o pensamento teórico, sequencial e lógico; 4) Autonomia: conseguiram fazer escolhas conscientes em relação a resolução das atividades; 5) Desempenho: diminuíram o números de erros e de questões em branco e aumentaram a assertividade; e 6) Emoções: mostraram-se motivados, calmos, orgulhos e felizes em entender e resolver as atividades e com seu próprio desempenho; sobretudo, tiveram alterações positivas em relação a raiva e a ansiedade. Portanto, constatou-se a tese de que o ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções.

Palavras-chave: Vetores Geométricos. Engenharia Didática. Resolução de Problemas como ponto de partida. Ensino por atividades experimentais.

ABSTRACT

This work presents the results of research whose main objective was to analyze the effects of teaching Geometric Vectors through problem-solving as a starting point and Experimental Activities about analysis, deduction, mastery, autonomy, performance, and emotions. Thus, in the end, it answers the following question: In what way does the use of teaching methodologies based on the protagonism of shared teaching between teachers and students, such as Problem-Solving as a starting point and Experimental Activities, favor the teaching and learning process about analysis, deduction, mastery, autonomy, performance, and emotions? To this end, using Didactic Engineering as a research methodology, a Didactic Sequence was applied to a class of the 4th period of the Electrical Engineering course at IFPA, Belém campus. The verification of the experiment results was supported by Leontiev's Activity Theory, Davydov's Study Activity and error analysis, and quantitative-qualitative and statistical techniques. Finally, it was concluded, among other things, that the students: 1) Analysis: they showed an understanding of the procedure to be carried out to plan actions to achieve the objectives, with emphasis on abstraction and generalization; 2) Deduction: they were able to transform the particular relations of an object into general relations and connections with previous knowledge; 3) Mastery: they demonstrated having developed theoretical, sequential and logical thinking; 4) Autonomy: they were able to make conscious choices about solving the activities; 5) Performance: they reduced the number of errors and blank questions and increased assertiveness; and 6) Emotions: they were motivated, calm, proud and happy in understanding and solving the activities and with their performance; above all, they had positive changes about anger and anxiety. Therefore, the thesis found that teaching Geometric Vectors through problem-solving as a starting point and Experimental Activities favors the teaching and learning process about analysis, deduction, mastery, autonomy, performance, and emotions.

Keywords: Geometric Vectors. Didactic Engineering. Problem-Solving as a starting point. Teaching through experimental activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Quadro Metodológico-Instrumental 32
Figura 2 - Resumo - Etapas da ED 33
Figura 3 - Fórmula para o cálculo do Ranking Médio 42
Figura 4 - Ilustração do Quadro Metodológico - Instrumental 44
Figura 5 - Períodos do desenvolvimento do Espírito Científico por Bachelard .46
Figura 6 - Principais contribuições do Período pré-científico: da antiguidade até o séc. XVIII 47
Figura 7 - Principais contribuições por autor do período do Estado Científico ..48
Figura 8 - Notação Gibbs x Tait Fonte: elaborado a partir de Crowe (1994).....50
Figura 9 – Resumos de cada etapa dos procedimentos metodológicos 57
Figura 10 - Categorias e subcategorias.....58
Figura 11- MADE proposto por Torre (2007) 119
Figura 12 - Categorias de Erros propostas pelo MADE 121
Figura 13 - - Passos da Metodologia de Análise de Erros proposta por Cury (2006) 122
Figura 14 - Etapas de Organização das atividades em sala de aula 127
Figura 15 - Etapas das aulas que utilizam RPPP 131
Figura 16 – Resumo do desenvolvimento das etapas metodológicas em sala de aula para cada tipo de atividade da Sequência Didática 133
Figura 17 - Deslocamentos apresentados na Atividade 02 136
Figura 18 – Proposta da atividade 03.....138
Figura 19 - Mapeamento dos enlaces para a atividade 04 140
Figura 20 - Disposição dos enlaces para a atividade 05 142
Figura 21 - Ilustração da atividade 08 148
Figura 22 - Eixo contendo os vetores para a resolução da atividade 09.....150
Figura 23 - a) atleta deslocando os carros com uma corda presa ao tronco; b) atleta deslocando os carros com a corda presa aos dentes 153
Figura 24 - Ilustração do problema da atividade 11; sendo FA força aplicada na situação A e FB, na Situação B.....153
Figura 25 - Ilustração do problema da atividade 12.....155
Figura 26 –Ilustração do paralelepípedo para a atividade 13 157
Figura 27 - Obtenção e representação dos deslocamentos para a Atividade 03 pelas equipes.....197
Figura 28 - Expressão Algébrica esperada e a apresentada por dupla para a Atividade 04 200
Figura 29 - Preenchimento da tabela pelas duplas para atividade 05 202
Figura 30- Codificação utilizada para identificar as atividades 238
Figura 31 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 1 247
Figura 32- Árvore Coesitiva para a Categoria 1 250
Figura 33 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 2 258
Figura 34 - Árvore Coesitiva para a Categoria 2 261
Figura 35 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 3 274
Figura 36 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 4 284
Figura 37 - Esboço do aluno A2 para a Questão 5.....310

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1– Níveis de ensino que os participantes da pesquisa ministraram o conteúdo de vetores....68
Gráfico 2– Sobre a prática do conteúdo de vetores com os estudantes....72
Gráfico 3 - Relação entre as variáveis Sexo x Faixa Etária....85
Gráfico 4 - Nível de Instrução do responsável....85
Gráfico 5 - Você gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores? 88
Gráfico 6 - Como você classificaria o seu nível de aprendizado sobre o assunto vetores....89
Gráfico 7 - Como você classificaria o seu nível de interesse sobre o assunto vetores....89
Gráfico 8 – Você costumava estudar Cálculo Vetorial fora da Universidade? ..91
Gráfico 9 – Quem lhe auxiliava, fora da sala de aula, nas resoluções dos exercícios?....91
Gráfico 10 - Tendências em Educação Matemática por Categoria....115
Gráfico 11 - Resposta a pergunta: O que o motivou a participar dessa pesquisa? 178
Gráfico 12 - Ranking Médio para o teste de Emoções antes da Experimentação 180
Gráfico 13 - Contagem das respostas para a emoção Prazer antes da Experimentação....180
Gráfico 14 - Contagem das respostas para a emoção Orgulho antes da Experimentação....181
Gráfico 15 - Contagem das respostas para a emoção Vergonha antes da Experimentação....182
Gráfico 16 - Contagem das respostas para a emoção Ansiedade antes da Experimentação....182
Gráfico 17 - Contagem das respostas para a emoção Raiva antes da Experimentação....183
Gráfico 18 - Ranking Médio para o teste de Autoconceito Acadêmico 184
Gráfico 19 – Contagem das respostas Teste de Autoconceito Acadêmico antes da Experimentação....185
Gráfico 20 - Quantidade de erros para a categoria 01 de acordo com o MADE 242
Gráfico 21 - Classificação das Observações para a Categoria 01....246
Gráfico 22 -Tempo de resolução das atividades da Categoria 01 246
Gráfico 23 - Quantidade de erros para a categoria 02 de acordo com o MADE 254
Gráfico 24 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 2 256
Gráfico 25 - Tempo de execução das atividades da Categoria 02 257
Gráfico 26 - Percentual de erros, Categoria 1 e 2, em ordem cronológica 267
Gráfico 27 - Classificação das observações e respostas finais para as Categorias 1 e 2....268
Gráfico 28 - Quantidade de erros para a categoria 03 de acordo com o MADE 270
Gráfico 29 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 3 273

Gráfico 30 - Tempo de execução das atividades da Categoria 03 273
Gráfico 31 - Quantidade de erros para a categoria 04 de acordo com o MADE 279
Gráfico 32 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 4 282
Gráfico 33 - Tempo de execução das atividades da Categoria 04 283
Gráfico 34 - Percentual de erros - Categoria 3 e 4 288
Gráfico 35 - Classificação das respostas finais para as Categorias 3 e 4.....289
Gráfico 36 – Desempenho por questão pré e pós-teste 304
Gráfico 37 - Resumo - Desempenho individual por aluno 321
Gráfico 38 – RM - Emoção Prazer - Antes e Depois da Experimentação.....340
Gráfico 39 – Contagem das respostas para a emoção Prazer - Antes e Depois da Experimentação 341
Gráfico 40 – RM - Emoção Orgulho - Antes e Depois da Experimentação.....341
Gráfico 41 – Contagem das respostas para a emoção Orgulho - Antes e Depois da Experimentação 342
Gráfico 42 – RM - Emoção Vergonha - Antes e Depois da Experimentação ..343
Gráfico 43 – Contagem das respostas para a emoção Vergonha - Antes e Depois da Experimentação 343
Gráfico 44 - Emoção Ansiedade - Antes e Depois da Experimentação 344
Gráfico 45 – Contagem das respostas para a Emoção Ansiedade antes e depois da Experimentação 345
Gráfico 46 - Emoção Raiva - Antes e Depois da Experimentação.....345
Gráfico 47 - Contagem das respostas para a Emoção Raiva antes e depois da Experimentação 346
Gráfico 48 – Crença na habilidade cognitiva em matemática - Antes e Depois da Experimentação 346
Gráfico 49 – Contagem das respostas para a Crença na Habilidade Cognitiva 347
Gráfico 50 – Crença na Autoatribuição - Antes e Depois da Experimentação 348
Gráfico 51 – Contagem das respostas para a Crença na Autoatribuição 348
Gráfico 52 – Média Geral para cada Emoção e Autoconceito Acadêmico – Antes e Depois da Experimentação 349

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Estudos/Pesquisas realizadas para as Análise Prévias.....34
Quadro 2 - Classificações para o tamanho do efeito de V-Cramer.....39
Quadro 3 – Principais técnicas de Análise de Dados 42
Quadro 4 – Principais Axiomas por Autor.....51
Quadro 5 – Principais Notações utilizadas em vetores.....53
Quadro 6 – Inclusão do Estudo Brasileiro com proposta de sequência didática com experimentação em sala de aula, além dos apresentados em Kasahara e Sá (2023). 59
Quadro 7 – Síntese das principais características dos trabalhos analisados por categoria 63
Quadro 8– Metodologia para consulta aos docentes e discentes.....64
Quadro 9 – Como os docentes entrevistados iniciam a aula sobre vetores.....70
Quadro 10– Classificação do grau de dificuldade de compreensão pelos alunos de acordo com o conteúdo segundo os docentes 76
Quadro 11– Classificação das questões de acordo com o grau de dificuldade para os estudos após o ensino do Assunto, segundo os docentes. 80
Quadro 12 - Resumo dos principais resultados obtidos: consulta aos docentes 83
Quadro 13 - Variáveis com Associações Estatísticas Significativas - Questionário Docente 84
Quadro 14 – Frequência relativa ao Ano de Ingresso no Curso 86
Quadro 15 - Resposta à pergunta: Você faz algum curso Extracurricular? 87
Quadro 16- Em qual(is) disciplinas você estudos o assunto vetores? 87
Quadro 17 - Você se distraia nas aulas de Cálculo Vetorial? 90
Quadro 18- Quando você estudou cálculo vetorial a maioria das aulas iniciavam por 92
Quadro 19 – Você está satisfeito com a metodologia utilizada para o Ensino de Vetores? 93
Quadro 20 - Para exercitar os conteúdos de Cálculo Vetorial seu professor costumava 93
Quadro 21– Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar 95
Quadro 22 – Comparação percentual entre as variáveis indicadas.....95
Quadro 23 - Classificação do grau de dificuldade de compreensão pelos alunos de acordo com o conteúdo.....96
Quadro 24 – Indique se você seria capaz de resolver as questões abaixo 100
Quadro 25 – Resumo dos principais resultados obtidos: consulta aos discentes 102
Quadro 26 - Resultado Teste de Fischer - Questionário Discente.....103
Quadro 27 - Características dos elementos da estrutura da atividade 106
Quadro 28 - Apresentação das Tendências em Educação Matemática 112
Quadro 29 - Elemento da atividade em aula de matemática por meio da Resolução de Problemas 113
Quadro 30 - Tendências em Educação Matemática observados no Ensino de Vetores 114
Quadro 31 - Ementa utilizada para a elaboração da Sequência Didática.....132
Quadro 32 - Texto para a Atividade 01 134
Quadro 33 - Resolução da Atividade 01.....135

Quadro 34 - Quadro de resposta da questão motivadora da Atividade 02 137
Quadro 35 – Resolução da Atividade 03 139
Quadro 36 – Resolução da Atividade 04 141
Quadro 37 - Resolução da atividade 05 143
Quadro 38 – Resolução da atividade 06 145
Quadro 39 - Resolução da atividade 07 148
Quadro 40 - Resolução da Atividade por Redescoberta da Atividade 08 149
Quadro 41 - Resolução do quadro de registros da atividade 09 151
Quadro 42 - Resolução da atividade 10 152
Quadro 43 - Resolução da atividade 11 154
Quadro 44 - Resolução da atividade 12 156
Quadro 45 - Resolução da atividade 13 158
Quadro 46 - Quadro resumo da Sequência Didática e Análise a *Priori* 160
Quadro 47– Instrumentos para produção dos dados, finalidade e indicação da localização 164
Quadro 48 - Objetivo das perguntas do questionário acadêmico e socioeconômico 165
Quadro 49 - Emoções relacionados no questionário de Emoções de Aprendizagem 167
Quadro 50 - Fatores analisados no questionário de autoconceito acadêmico 168
Quadro 51 - Assunto por questão do pré/pós teste 169
Quadro 52 - Roteiro das Sessões da Etapa de Experimentação 172
Quadro 53 - Quadro Resumo - Perfil dos Participantes 177
Quadro 54 - Média Global para cada teste antes da experimentação 185
Quadro 55 – Resolução da Atividade 01 187
Quadro 56- Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 01 190
Quadro 57 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 01 190
Quadro 58 - Resolução da Atividade 02 192
Quadro 59 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 02 194
Quadro 60 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 02 194
Quadro 61 - Resposta esperada e dos alunos à questão problema da Atividade 03 198
Quadro 62 - Resposta Esperada e dos alunos para a primeira parte da Atividade 04 199
Quadro 63 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 04 200
Quadro 64 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 04 201
Quadro 65- Valor absoluto e relativo (%) das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 05 202
Quadro 66 - Expressão esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 05 203
Quadro 67 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 05 204
Quadro 68 - Observação esperada e das duplas em relação a segunda parte da atividade 06 205
Quadro 69 - Resolução esperada e a dos alunos para atividade 07 207
Quadro 70 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 07 208
Quadro 71 -Resultado previsto e apresentado para os alunos na atividade 08 209

Quadro 72 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 08 210
Quadro 73 - Resolução esperada e a dos alunos para a atividade 09 211
Quadro 74 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 09 212
Quadro 75 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 09 213
Quadro 76 - Resolução esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 10.....213
Quadro 77 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 10 215
Quadro 78 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 4)? 216
Quadro 79 - Resposta as perguntas: 1) Como você avalia a metodologia que está sendo utilizada em sala de aula? 2) Como você avalia o seu aprendizado até agora?.....217
Quadro 80 - Resolução esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 11.....221
Quadro 81 - Quantidade e Percentual das Respostas para a Atividade 11 222
Quadro 82 - Resolução esperada e forma como os alunos tentaram resolver a Atividade 12 223
Quadro 83 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 12 224
Quadro 84 - Resolução esperada e forma como os alunos tentaram resolver a Atividade 13 225
Quadro 85 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 13 227
Quadro 86 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 5)? 227
Quadro 87 - Resultado do Quiz por aluno 230
Quadro 88 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 6)? 231
Quadro 89 - Técnicas estatísticas e a Análise de dados 237
Quadro 90 - Quantidade de atividades da sequência didática por tipo 239
Quadro 91 - Metodologia de Validação das atividades por Categoria 239
Quadro 92 - Codificação do MADE utilizando o CHIC 240
Quadro 93 - Quantitativo de atividades com erro - Categoria 01 241
Quadro 94 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Categoria 2 - Subclasse C11 à C14. 248
Quadro 95 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade - Subclasse C12 249
Quadro 96 - Interpretação Árvore Coesitiva - Categoria 1.....250
Quadro 97 - Associações estatísticas significativos entre as variáveis do MADE - Categoria 1 250
Quadro 98 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 02 253
Quadro 99 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C21 - Categoria 2 259
Quadro 100 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C22 - Categoria 2 260
Quadro 101 - Interpretação Árvore Coesitiva - Categoria 2.....261
Quadro 102 - Associações estatísticas significativas entre as variáveis do MADE - Categoria 2 262
Quadro 103 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 03 269
Quadro 104 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C31 - Categoria 3 275

Quadro 105 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C32 - Categoria 3 276
Quadro 106 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 04 278
Quadro 107 - Interpretação da Árvore de similaridade – Classe C4 - Categoria 4 284
Quadro 108 - Associações estatísticas significativos entre as variáveis do MADE - Categoria 4 284
Quadro 109 – Confronto entre análise a *priori* e a *posteriori* 291
Quadro 110 - Aproveitamento por questão do Quiz aplicado na Experimentação 298
Quadro 111 – Desempenho por questão: pré e pós-teste 301
Quadro 112 - Análise de Erros - Questão 01 305
Quadro 113 - Análise de Erros - Questão 02 -Item 2.a. – Determinar PT 306
Quadro 114 - Análise de Erros - Questão 02 - Item 2.b. – Caracterizar PT em relação a direção e sentido 307
Quadro 115 - Análise de Erros - Questão 03 - Item 3.a. – Posição final do foguete 307
Quadro 116 - Análise de Erros - Questão 03 - Item 3.b. – Distância percorrida 308
Quadro 117 - Análise de Erros - Questão 04 309
Quadro 118 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.a – Intensidade da Força resultante 310
Quadro 119 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.b 311
Quadro 120 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.c 311
Quadro 121 - Análise de Erros - Questão 06 312
Quadro 122 - Análise de Erros - Questão 09 313
Quadro 123 - Análise de Erros - Questão 07 314
Quadro 124 - Análise de Erros - Questão 08 314
Quadro 125 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.a 316
Quadro 126 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.b 316
Quadro 127 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.c 317
Quadro 128 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.d 318
Quadro 129 - Desempenho individual - pré e pós-teste 319
Quadro 130 - Resultado do teste de Normalidade via *Jamovi* 322
Quadro 131 – Resultado do Teste-t pareado via *Jamovi* 322
Quadro 132 – Teste de Fischer – Escolaridade Responsável Masculino x Escolaridade do Responsável Feminino 324
Quadro 133 – Teste de Fischer – O aluno exerce atividade remunerada X O aluno possui curso profissionalizante 325
Quadro 134 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio X O aluno possui curso profissionalizante 325
Quadro 135 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio X O aluno exerce atividade remunerada 326
Quadro 136 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos adquiridos no Ensino Médio x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática 327
Quadro 137 – Teste de Fischer – O aluno já esteve em dependência x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática 328
Quadro 138 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática 329

Quadro 139 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Ajuda em tarefas de matemática.....330
Quadro 140 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x O aluno já esteve em dependência 331
Quadro 141 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Gostar de matemática 332
Quadro 142 – Teste de Fischer – O aluno já esteve em dependência x Gostar de matemática 333
Quadro 143 – Teste de Fischer – Ajuda nas tarefas de matemática x Gostar de matemática 333
Quadro 144 – Quadro Resumo - Teste de Fischer.....334
Quadro 145 - Teste de Normalidade para o Teste de Correlação 336
Quadro 146 - Rankeamento da Variável Desempenho 337
Quadro 147 – Resultado Correlação de Spearman com a variável Desempenho Rankeada 337
Quadro 148 - Média Global para cada teste antes e depois da experimentação 349
Quadro 149 – Efeitos nas Categorias elencadas na Tese: a) Análise, b) Dedução, c) Domínio, d) Domínio, e) Desempenho, f) Emoções 352
Quadro 150 – Verificação dos erros pelo MADE - Categoria 4: a) Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; b) Erros de Organização da Informação e de Execução 453

LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

A.S.I.	Análise Estatística Implicativa
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CH	Caga Horária
ED	Engenharia Didática
EM	Ensino Médio
GAV	Geometria Analítica e Vetorial
gl	Graus de liberdade
IFPA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Pará
NF	Não Formulou
NVNPND	Não válida, não prevista e não desejada
PNLD	Plano Nacional do Livro e do Material Didático
PPC	Plano Pedagógico de Curso
RM	Rankeamento Médio
RP	Resolução de Problemas
RPPP	Resolução de Problemas como Ponto de Partida
SD	Sequência Didática
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDIC	Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação
TPACK	Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo
UEPS	Unidade de Ensino potencialmente significativa
p-valor	Valor de Probabilidade
VNPND	Válida, não prevista e não desejada.
VPD	Válida, prevista e desejada
VPND	Valida, prevista e não desejada

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 24
2. METODOLOGIA DA PESQUISA: A ENGENHARIA DIDÁTICA 30
2.1. PERCURSO METODOLÓGICO E QUADRO METODOLÓGICO-INSTRUMENTAL 30
2.1.1. Etapa: Análises Prévias ou Preliminares 34
2.1.2. Etapa: Concepção e Análise a Priori 35
2.1.3. Etapa: Experimentação 36
2.1.4. Etapa: Análise a *Posteriori* e Validação 37
2.1.5. Sobre as técnicas de Análise de Dados 37
2.2. RESUMO ILUSTRADO DO QUADRO METODOLÓGICO – INSTRUMENTAL 43
3. ANÁLISES PRÉVIAS 46
3.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE VETORES 46
3.2. ASPECTOS CURRICULARES DE VETORES 54
3.3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE VETORES 56
3.3.1. Estudos com proposta de sequência didática 58
3.3.2. Estudos com proposta de material teórico para ensino interdisciplinar, para a disciplinas de Matemática ou para Física 61
3.3.3. Estudos com aplicações de Vetores 62
3.3.4. Estudos que realizaram, apenas, análise de livros didáticos 62
3.3.5. Estudos que investigam o conhecimento/dificuldades dos alunos 62
3.3.6. Quadro-síntese dos trabalhos por categoria 63
3.4. CONSULTA A DOCENTES E DISCENTES 64
3.4.1. Consulta a docentes 65
3.4.1.1. Síntese: consulta a docentes 81
3.4.2. Consulta a discentes 85
3.4.2.1. Síntese: consulta a discentes 101
3.5. TEORIA DA ATIVIDADE 104
3.6. ALTERNATIVAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 110
3.6.1. Tendências em Educação Matemática e as pesquisas sobre ensino de vetores 114
3.7. O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM 116
3.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DAS ANÁLISES PRÉVIAS 123
4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI 125
4.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 125
4.1.1. O Ensino de Matemática por Atividades Experimentais 126

4.1.2. O Ensino por Resolução de Problemas 128
4.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS 131
4.3. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES 133
4.3.1. Atividade 01: tipos de grandezas 133
4.3.1.1. Análise a priori da Atividade 01 134
4.3.2. Atividade 02: deslocamento 135
4.3.2.1. Análise a priori da Atividade 02 137
4.3.3. Atividade 03: definir vetor 138
4.3.3.1. Análise a priori da Atividade 03 139
4.3.4. Atividade 04: coordenadas de um ponto 139
4.3.4.1. Análise a priori da Atividade 04 141
4.3.5. Atividade 05: definir módulo de um vetor 141
4.3.5.1. Análise a priori da Atividade 05 142
4.3.6. Atividade 06: Adição de Vetores 143
4.3.6.1. Análise a priori da Atividade 06 144
4.3.7. Atividade 07: Definir Vetor Oposto 147
4.3.7.1. Análise a priori da atividade 07 147
4.3.8. Atividade 08: Multiplicação por um escalar 148
4.3.8.1. Análise a priori da Atividade 08 149
4.3.9. Atividade 09: Definição de vetor paralelo 150
4.3.9.1. Análise a priori da Atividade 09 151
4.3.10. Atividade 10: Vetor Unitário 151
4.3.10.1. Análise a priori da Atividade 10 152
4.3.11. Atividade 11: Produto Escalar 153
4.3.11.1. Análise a priori da atividade 11 154
4.3.12. Atividade 12: Produto Vetorial 155
4.3.12.1. Análise a priori da atividade 12 156
4.3.13. Atividade 13: Produto Misto 157
4.3.13.1. Análise a priori da atividade 13 158
4.4. QUADRO – RESUMO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A *PRIORI* 159
4.5. INSTRUMENTOS PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÕES DURANTE A EXPERIMENTAÇÃO 164
4.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI* 170
5. EXPERIMENTAÇÃO 172
5.1. PRIMEIRA SESSÃO DO EXPERIMENTO 175

5.1.1. Perfil Socioeconômico e Acadêmico dos participantes da pesquisa 177

5.1.2. Perfil Emocional e de Autoconceito acadêmico dos participantes da pesquisa em relação a matemática 179

5.1.3. Aplicação das Atividade 01 e Atividade 02 186

5.2. SEGUNDA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADES 03, 04, 05 E 06 196

5.3. TERCEIRA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 07.....207

5.4. QUARTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 08, 09 E 10 209

5.5. QUINTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 11, 12 E 13 220

5.6. SEXTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: REVISÃO E QUIZ TEÓRICO 229

5.7. SÉTIMA SESSÃO DO EXPERIMENTO: APLICAÇÃO DO PÓS-TESTE 232

5.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA EXPERIMENTAÇÃO 232

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO 236

6.1. VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 237

6.1.1. Análise das atividades da Categoria 1 241

6.1.1.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 1.....247

6.1.1.2. Síntese da Categoria 1.....251

6.1.2. Análise das atividades da Categoria 2 253

6.1.2.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 2.....258

6.1.2.2. Síntese da Categoria 2.....264

6.1.3. Breve análise comparativa entre os resultados da Categoria 1 e da Categoria 2265

6.1.4. Análise das Atividades da Categoria 3 269

6.1.4.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 3.....274

6.1.4.2. Síntese da Categoria 3.....276

6.1.5. Análise das atividades da Categoria 4 278

6.1.5.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 4.....283

6.1.5.2. Síntese da Categoria 4.....285

6.1.6. Breve análise comparativa entre os resultados da Categoria 3 e da Categoria 4287

6.1.7. Confronto entre análise e à *priori* e à *posteriori* 290

6.1.8. Contributos da Sequência Didática à luz da Teoria da Atividade 295

6.2. VERIFICAÇÃO DE DESEMPENHO POR MEIO DO PRÉ E PÓS-TESTE 300

6.2.1. Desempenho por questão.....300

6.2.1.1. Análise da questão 01.....305

6.2.1.2. Análise das questões 02 e 03 306

6.2.1.3. Análise da questão 04.....309

6.2.1.4. Análise da questão 05.....309

6.2.1.5. Análise da questão 06 e da questão 09 312

6.2.1.6. Análise da questão 07.....313

6.2.1.7. Análise da questão 08.....314

6.2.1.8. Análise da questão 10.....315

6.2.2. Verificação do desempenho individual: análise comparativa entre o pré e o pós- teste 318

6.2.3. Análises Estatísticas: teste de Hipótese, Associação e Correlação 321

6.2.3.1. Resultados com o teste t-pareado de Hipótese.....322

6.2.3.2. Resultados do teste de associação pelo método exato de Fischer 323

6.2.3.3. Resultado do Teste de Correlação de *Spearman* 336

6.2.3.4. Síntese: Verificação de Desempenho no Pré e no Pós-teste338

6.3. ANÁLISE DO PERFIL EMOCIONAL DOS ESTUDANTES PÓS EXPERIMENTAÇÃO.....340

6.4. SÍNTESE DAS CATEGORIAS ELENCADAS NA TESE 351

6.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO.....356

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....359

REFERÊNCIAS 364

APÊNDICES.....376

ANEXOS 459

1. INTRODUÇÃO

Os conteúdos da matemática perpassam todos os níveis de ensino, bem como, a nossa vida cotidiana. Porém, são inúmeros os desafios e dificuldades encontradas pelos estudantes em relação à aprendizagem e a aplicação dos assuntos aprendidos.

Esses percalços tornam-se ainda mais evidentes diante da necessidade de utilização de conceitos, anteriormente “aprendidos”; seja em componentes curriculares subsequentes ou no nível superior, como no caso do conteúdo de Vetor Geométrico, tema central dessa pesquisa.

Etimologicamente, o termo Vetor é oriundo do verbo latino *vehere* que significa transportar, levar (Venturi, 2015). Para os romanos, vetor era aquele que carregava alguma coisa, pois: *veho* = levar + *or* = aquele que faz.

No caso da matemática, de acordo com Silva Filho (2017) um vetor transporta três informações de uma grandeza vetorial: direção, sentido e magnitude; de outra forma, pode-se dizer que um ponto A é transportado (pelo vetor) até um ponto B. Matematicamente, alguns autores o definem como:

> Def. 1: Vetor é uma tripla constituída de uma direção, um sentido e um número não negativo.
> Def. 2: Vetor é um conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento.
> (Venturi, 2015, p. 64)

> Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equivalentes. (Streinbruch, p. 4)

> Uma classe de equivalência formada por segmentos orientados equipolentes entre si é representada por um ente geométrico chamado VETOR. Assim, quando se refere a vetor $\overrightarrow{AB}$, está se referindo a todos os segmentos orientados que constituem a classe de equivalência da qual o vetor é representante. Qualquer elemento do conjunto de segmentos orientados equipolentes entre si pode ser usado para indicar o vetor. (Julianelli, 2008, p. 8)

Portanto, dos conceitos apresentados pode-se inferir que, teoricamente, o Vetor Geométrico é um conjunto de segmentos orientados equivalentes que possuem o mesmo módulo direção e sentido; no mais, independentemente de sua origem, pode-se dizer que os vetores são segmentos.

Em relação ao ensino de Vetor Geométrico, normalmente, se abordado, é tratado como aporte para conteúdo de geometria analítica, quando do uso da

abordagem vetorial, e/ou para a física, no nível médio e no superior; para essa última, a sua instrução, depende da especificidade do curso e da disciplina.

No entanto, ao entender a importância do ensino do assunto em sala de aula, os estudos de Rodrigues (2015), Dias (2018) e Silva (2013), dentre outros, defendem o uso da abordagem vetorial nos diferentes níveis de ensino, não só como aporte matemático, mas como uma disciplina específica e obrigatória, em especial, no âmbito do nível médio.

Da mesma forma, considerando a minha experiência pessoal, acadêmica e profissional também entendo que o assunto de Vetores Geométricos é essencial, em especial, àqueles que irão cursar o nível superior em Matemática, Física, Engenharia etc.; pois, auxiliam no entendimento e visualização das situações apresentadas, além de facilitar e dar agilidade a solução de problemas matemáticos em quaisquer níveis de ensino.

Diante desse cenário, o meu interesse no assunto se deu, inicialmente, ao realizar a graduação em Engenharia de Telecomunicações; durante esse período, a minha dificuldade e da maioria da turma com o conteúdo de Vetores tornou-se evidente; sendo que, uma das justificativas, comumente relatada, era a ausência de tal conteúdo no nível fundamental e médio em disciplinas de matemática e o ensino, apenas, como “ferramenta” para a resoluções de questões de física e no que fosse necessário para determinado conteúdo.

Apesar do curso em questão ofertar uma disciplina voltado ao ensino de Vetores, os assuntos lecionados e a aprendizagem alcançada não foram suficientes para aplicá-lo nas disciplinas subsequentes, como por exemplo, Eletromagnetismo, Antenas e Propagação, que o utilizaram como base.

Motivos como a metodologia utilizada, falta de contextualização e/ou sua aplicação em situações práticas e cotidianas, problemas de base matemática, motivação e interesse dos alunos, dentro outros, poderiam ser alguns dos argumentos para fundamentar o insuficiente nível de aprendizagem.

Contudo, o interesse crescente pela área de Eletromagnetismo, Antenas e Propagação estimularam-me a buscar pelo entendimento e pelo estudo de Vetores para entender e aplicar em questões relacionadas a esse assunto.

Assim, ao final do curso defendi o trabalho *Projeto e Construção de Antenas de Microfita* e publiquei e apresentei o artigo intitulado *Arranjo de Antenas de Microfita com sobrestrato caracterizado com estrutura fotônica* em

um evento internacional, cujo conteúdo de Vetores foram primordiais para o desenvolvimento da pesquisa.

Após a conclusão do nível superior, em 2007, iniciei o mestrado em Engenharia Elétrica com ênfase em Telecomunicações na área de Eletromagnetismo Aplicado e, mais uma vez, a aprendizagem de vetores foi essencial para a conclusão da dissertação e publicação de artigos na área.

Em 2009, tornei-me professora efetiva do IFPA e desde 2016, após ser removida para o Campus Belém, assumi a disciplina de Eletromagnetismo, que tem como pré-requisito o conteúdo de vetores, no curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações.

Em 2017, fiz o curso de Especialização em Docência para a Educação Profissional no IFPA que foi um divisor de águas no meu caminho profissional, acadêmico e pessoal, pois:

- ajudou-me a refletir e a entender o meu papel como engenheira e, principalmente, professora. Assim, passei por um processo de identificação pessoal e profissional de entender que eu não era, somente, uma engenheira, mas uma profissional da área da educação. A partir desse momento, passei a identificar-me como uma **Professora que ensina Engenharia** e não mais, apenas, como uma engenheira que ensina ou é professora;

- verifiquei que, de fato, as dificuldades na disciplina de Eletromagnetismo não se tratavam, somente, de questões metodológicos e, sim, de base matemática vetorial. Pois, a minha monografia tinha por objeto a Pesquisa como Princípio Educativo e Processo Avaliativo no ensino de Eletromagnetismo aplicada a alunos do curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações do IFPA. Os resultados revelaram melhora no entendimento teórico, mas não no matemático (Rocha R., Palheta e Rocha, N., 2017; Kasahara e Rocha, 2017).

Por fim, senti a necessidade de verificar se, de fato, essas dificuldades observadas eram advindas do conteúdo de vetores ou de Eletromagnetismo, cujos resultados foram publicados em Kasahara e Sá (2019), esse estudo apontou em suas conclusões que

> [...] em relação a aprendizagem entre teoria e prática pode se verificar que os alunos entendem a teoria, porém, na maioria dos casos, possuem dificuldades em aplicá-la em um caso concreto de resolução de problemas. Assim, ainda é preciso um grande avanço em relação a didática da matemática, pois resolver questões semelhantes ou sem

> ser atreladas com a realidade e/ou contextualizadas não garantem um bom aprendizado. (Kasahara e Sá, 2019, p. 949)

Portanto, as investigações destacadas foram necessárias para fundamentar a problemática para a elaboração e proposição da pesquisa do doutorado; seja pela verificação das dificuldades no entendimento e ou pela aplicação de Vetores que impossibilitam a aprendizagem de disciplinas que o tem como pré-requisito, tais como, Eletromagnetismo e Antenas e Propagação.

Contudo, diante da problemática verificada, se fazia necessário um estudo para a proposição e testagem de novas metodologias de ensino que pudessem melhorar o desempenho, promover autonomia, análise, dedução, domínio e emoções dos estudantes em relação ao objeto proposto, bem como, dar um novo olhar sobre o conteúdo e, também, acerca da matemática com um todo.

Assim, os objetivos do programa de Pós-graduação da UEPA, o interesse já existente do Profº. Dr. Pedro Sá, meu orientador, em, também, investigar questões relativas ao ensino de Vetores, tendo por foco alternativas metodológicas para o ensino de matemática e as demais questões motivacionais e problemática já apresentadas, e em consonância com o meu caminho acadêmico, profissional e pessoal, impulsionarem-me a realização da pesquisa a nível de Doutorado cujo objeto de estudo é o Ensino de Vetores Geométricos.

O diferencial do trabalho está na proposição de alternativas metodológicas que tem por foco o ensino compartilhado entre o docente e o aluno, tendo o professor como mediador do processo de construção do conhecimento e por utilizar tendências atuais em educação matemática de forma conjunta e complementar, como a Resolução de Problemas como ponto de partida (RPPP) e o Ensino de matemática por Atividades Experimentais.

Além disso, tem como público-alvo o Ensino Superior, meu principal foco de trabalho e pesquisa. Vale ressaltar, que o projeto de pesquisa foi aprovado junto ao Comitê de Ética em Pesquisa – CEP, cuja consulta pode ser realizada por meio do link https://plataformabrasil.saude.gov.br/login.jsf, conforme parecer no Anexo B.

Assim, com base nas motivações, problemática e justificativas apresentadas pretende-se ao final desse trabalho responder a seguinte questão: De que forma a utilização de metodologias de ensino baseada no protagonismo

do ensino compartilhado entre docentes e discentes, tais como, a Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções?

Diante da questão apresentada, o objetivo geral é: Analisar efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades experimentais em relação a análise, dedução, autonomia, domínio, desempenho e emoções. Para tanto, os objetivos específicos, delineados a partir das etapas da metodologia da pesquisa e demais aspectos da pesquisa, são:

- Realizar uma investigação acerca da melhora da análise, dedução e domínio a partir da verificação de erros conforme resolução das atividades da Sequência Didática e comprovação via métodos estatísticos;

- Verificar e certificar indícios de melhora da autonomia dos alunos durante a aplicação da Sequência Didática;

- Averiguar e comprovar os efeitos do desempenho pós aplicação da Sequência Didática;

- Atestar e compreender os efeitos emocionais e crença na Autoatribuição e na Habilidade Cognitiva antes e após aplicação da Sequência Didática.

Por fim, defende-se a tese de que “O ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções”.

Para a apresentação dessa pesquisa esse trabalho está organizado da seguinte forma:

2. METODOLOGIA DA PESQUISA: A ENGENHARIA DIDÁTICA – descrição da metodologia, do quadro metodológico instrumental e a relação entre autor base, metodologia, teoria de análise e técnicas de ensino;

3. ANÁLISES PRÉVIAS: apresenta os aspectos históricos que levaram ao conceito de vetor, aspectos curriculares de vetores, estudos sobre o ensino de vetores, consulta aos docentes e discentes sobre ensino e aprendizagem de vetores, fundamentação da Teoria da Atividade,

alternativas metodológicas para o ensino de matemática e estudo sobre o erro no processo de ensino e aprendizagem;

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI: apresentação das técnicas de ensino utilizadas (RPPP e Ensino por Atividades Experimentais), da Sequência Didática (SD) que foi aplicada, dos materiais de diagnóstico, dentre outros;

5. EXPERIMENTAÇÃO: descrição da realização do experimento;

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO: apresentação dos resultados obtidos a partir dos experimentos.

7. CONSIDERAÇÕE FINAIS: principais aspectos relatados, observados e analisados por meio da pesquisa.

Vale ressaltar que os Apêndices trarão os questionários aplicados e demais instrumentos para consulta.

2. METODOLOGIA DA PESQUISA: A ENGENHARIA DIDÁTICA

Nessa seção, a metodologia de pesquisa, qual seja a Engenharia Didática (ED), é apresentada. O percurso metodológico discutido incluiu, ainda, uma justificativa para a escolha da fundamentação teórica, das técnicas de ensino e da metodologia, tendo como aporte teórico o estudo de Kasahara e Sá (2023a), que apresenta um retrospecto histórico da didática francesa a fim de elucidar sua origem e o porquê da ED.

Além disso, foi dado um destaque as técnicas de análise de dados utilizadas ao longo da pesquisa; por fim, um resumo ilustrado do quadro metodológico-instrumental é apresentado.

2.1. PERCURSO METODOLÓGICO E QUADRO METODOLÓGICO-INSTRUMENTAL

Como relatado anteriormente, a apresentação do percurso metodológico dessa pesquisa inicia-se por uma breve discussão entre o autor base, a metodologia e as técnicas de ensino utilizadas no desenvolvimento dessa tese a fim de demonstrar uma relação coerente entre estes; seguida da descrição do uso das etapas da ED no estudo e das técnicas de análise de dados.

Assim, para dar início a construção desse diálogo, algumas perguntas foram elaboradas, quais sejam: De que forma fazer a intervenção proposta na tese? De que forma conduzir a pesquisa? Qual metodologia permite o desenvolvimento da pesquisa proposta?

Em primeiro lugar, é importante frisar que para o desenvolvimento da pesquisa, a definição da ED como metodologia de pesquisa, já estava bem definida desde a concepção inicial do projeto, por se tratar de uma experimentação em sala de aula que teve por objetivo organizar, desenvolver, aplicar e analisar o uso da Sequência Didática (SD) a partir de suas quatro fases já bem definidas em Artigue (1988), Sá e Alves (2011a, 2011b), Almouloud e Silva (2002), Almouloud (2007), Kasahara e Sá (2023a), dentre outros.

Em relação a técnica de ensino para o desenvolvimento da sequência didática, a nossa proposta fez uso do ensino de vetores com o protagonismo compartilhado por docentes e estudantes; para isso, as seguintes tendências em

Educação Matemática foram utilizadas: Resolução de Problemas como Ponto de Partida (RPPP) e Ensino por Atividades Experimentais.

Essas tendências têm por características, o protagonismo compartilhado entre professor e alunos e possui recomendações e etapas bem definidas. De acordo com Mendonça (1999), a RPPP irá conduzir o processo de ensino aprendizagem culminando na sistematização dos conceitos previamente determinados pelo professor; nessa mesma linha, Sá (2019) caracteriza o Ensino por Atividades Experimentais como diretivo, estruturado, sequencial e comprometido com o conteúdo e com o desenvolvimento de habilidades além do conteúdo.

Portanto, escolhidos os métodos e técnicas de ensino, seria preciso verificar os resultados por meio de uma teoria de análise e fundamentação que permitisse uma reflexão sobre os resultados alcançados de acordo com a tese proposta: a teoria escolhida foi a Teoria da Atividade de Leontiev (2010, 2014), apoiada pelos estudos de Davydov (1981, 1986, 1988, 1999), Davydov e Márkova (1987) e Davydov e Slobódchikov (1991).

A teoria da Atividade é uma teoria de análise; de acordo com Sá (2019), todas as tendências em Educação Matemática contêm os elementos funcionais da atividade de Leontiev e da atividade de ensino de Davydov (Sá, 2019; Mendonça, 1999; Davydov, 1999). Dessa forma, os processos de ensino a partir da experimentação com uma SD podem ser analisados à luz dessas teorias.

Além disso, essa teoria também foi a principal base para a construção do Ensino por atividades Experimentais proposto por Sá (2019). Portanto, é possível afirmar que o objetivo das atividades propostas estão de acordo com a teoria dos autores base e corroboram com os da tese defendida.

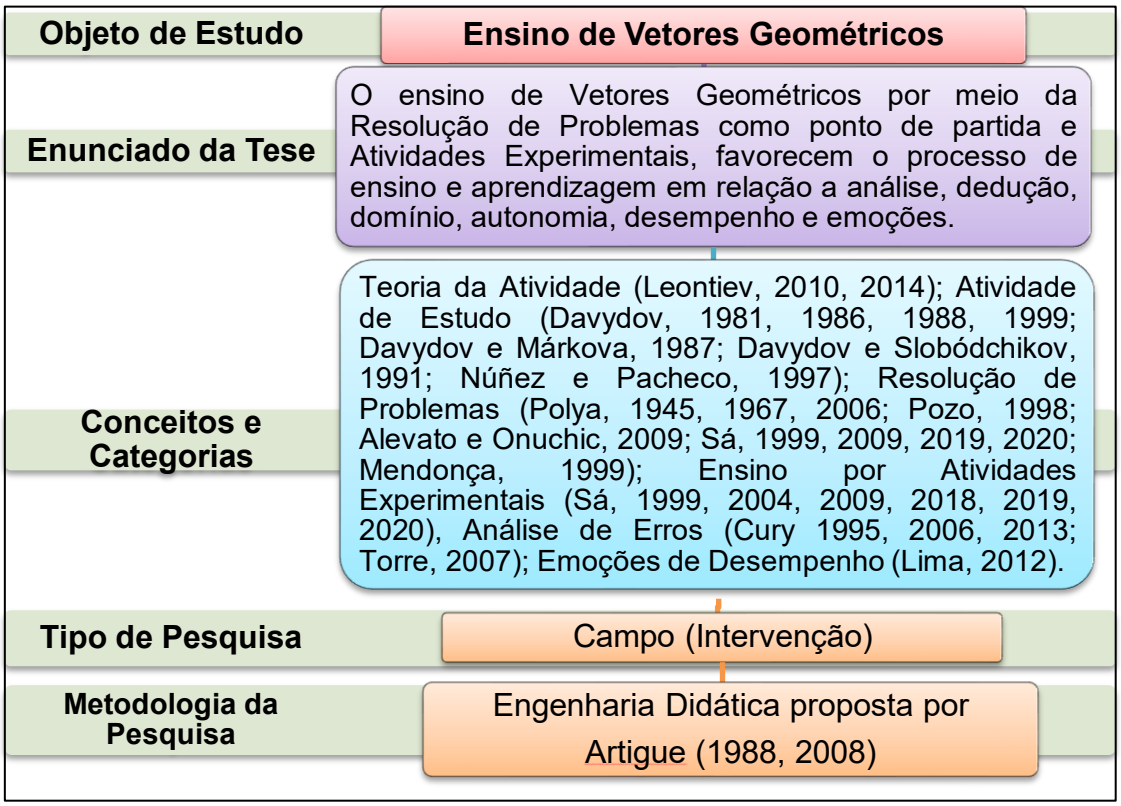
Além do mais, os autores base apresentam discussões acerca dos aspectos destacados na tese (análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções) e serão elucidados na etapa de Análises Prévias.

Diante do exposto, pode-se observar a coerência entre a metodologia de pesquisa, a fundamentação teórica (autor base) e as técnicas de ensino para a produção da SD da pesquisa proposta e afirmar que: Sim, é possível discutir a pesquisa com os autores base e a metodologia!

Vale ressaltar que outros autores e teorias também foram utilizados para ampliar a discussão e permitir a validação dos resultados, tais como, Cury (1995,

2006, 2013) e Torre (2007) para a análise de erros, e Lima (2012) para emoções. Como resultado da análise e da reflexão das questões anteriores o quadro metodológico-instrumental foi construído, de acordo com a ilustração apresentada na Figura 1.

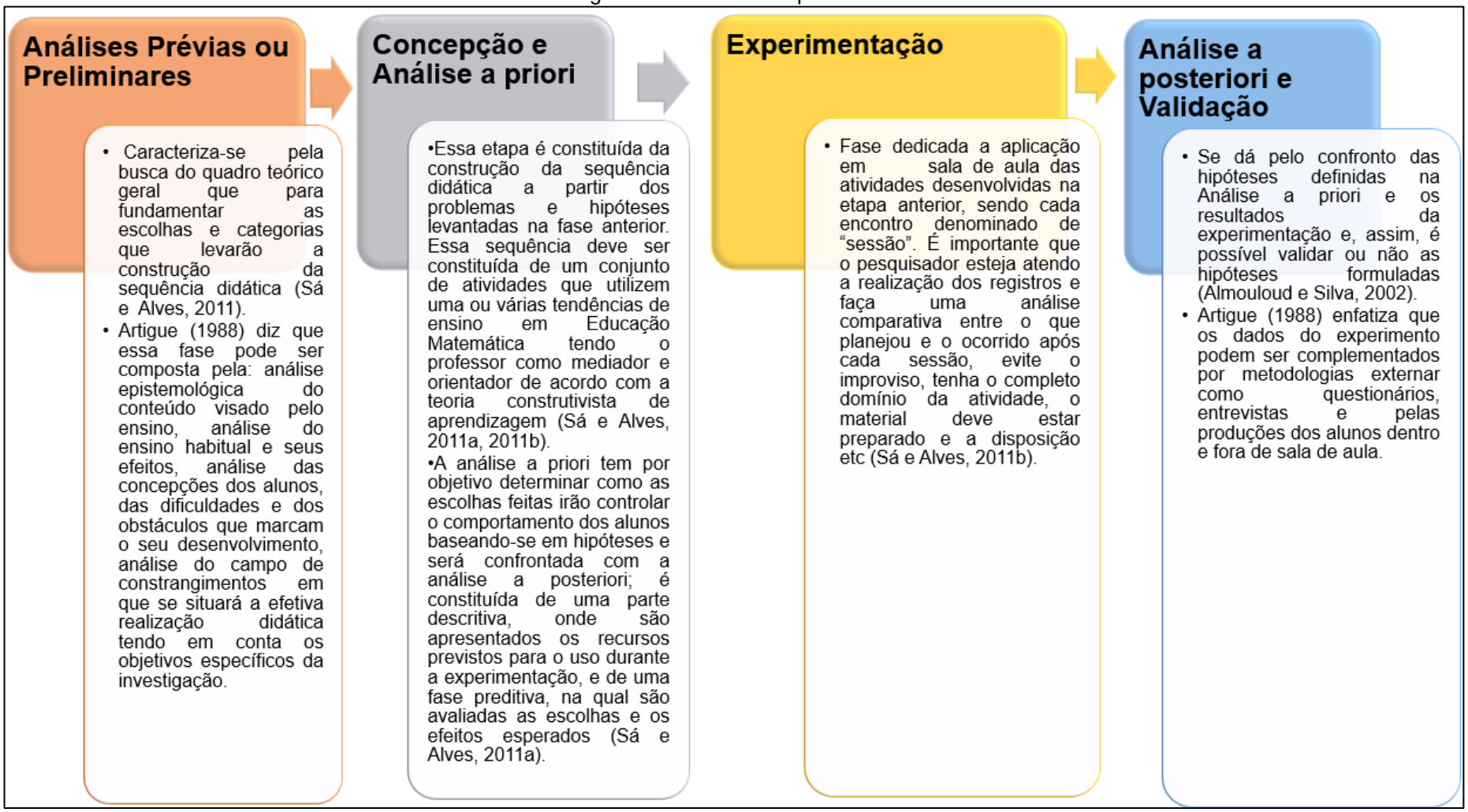
Figura 1 - Quadro Metodológico-Instrumental



Fonte: elaborado a partir da metodologia da pesquisa

Por fim, para fins de elucidação e didáticos, faz-se necessário, tal como em Kasahara e Sá (2023a) e demais autores, expor, de forma resumida, as etapas da ED e seus principais objetivos, a Figura 2 apresenta essas informações.

Figura 2 - Resumo - Etapas da ED



Fonte: elaborado a partir de Kasahara e Sá (2023) e demais autores.

Apesar das etapas claras e bem definidas da ED, durante o desenvolvimento da pesquisa é permitido voltar as fases anteriores para complementação e discussão sempre que necessário.

Dessa forma, considerando que, cada etapa dessa metodologia, permite a utilização de “metodologias próprias” de acordo com o objeto de estudo e a tese proposta, a seguir, será feita uma breve descrição do que foi realizado em cada fase específica, de forma a facilitar o entendimento do percurso metodológico. Vale ressaltar, que as seções da tese foram definidas de acordo com as etapas da ED.

2.1.1. Etapa: Análises Prévias ou Preliminares

Essa fase é caracterizada pela busca do quadro teórico geral para fundamentar as escolhas e categorias que levarão a construção da sequência didática (Sá e Alves, 2011a). Para tanto, o Quadro 1 mostra os estudos e pesquisas realizados, seus objetivos e o tipo de pesquisa utilizada.

Quadro 1 - Estudos/Pesquisas realizadas para as Análise Prévias

Estudo/ Pesquisa	Objetivo	Tipo de Pesquisa[1]
Aspectos históricos	Mostrar o processo de construção do conhecimento sobre vetores, suas principais ideias, motivações, autores e teorias para entender sua concepção, importância ao longo da história.	Bibliográfica
Aspectos curriculares de vetores	Entender como se dá a abordagem do conteúdo de vetores nas diferentes modalidades de ensino desde o fundamental até o superior.	Bibliográfica
Estudos sobre o ensino de vetores	Identificar como o ensino de vetores vêm sendo abordado em dissertações e teses nacionais e internacionais, as metodologias sugeridas, dificuldades e superações no processo de ensino e aprendizagem; bem como, complementar os aspectos curriculares em relação os métodos de ensino e conteúdos ensinados nos diferentes níveis de ensino.	Bibliográfica
Consulta a docentes e discentes	Diagnosticar o ensino de vetores no lócus de pesquisa sobre o olhar docente e discente para justificar os principais problemas de ensino e aprendizagem.	Campo
Teoria da Atividade	Apresentar a principal teoria que fundamentou a análise dos resultados, bem como, aspectos da atividade de estudo.	Bibliográfica
Alternativas Metodológicas para o ensino de Matemática	Apresentar as principais tendências em Educação Matemática quando o objetivo é o ensino compartilhado entre professor e aluno; além das principais tendências observadas nos trabalhos analisados sobre o ensino de vetores.	Bibliográfica
O erro no processo de ensino e aprendizagem	Apresentar a importância da análise de erros e algumas metodologias investigativas de análise de erros que foram utilizadas para a validação das atividades da Sequência Didática.	Bibliográfica

Fonte: elaborado de acordo com as análises prévias.

[1] Tipo de pesquisa quanto aos procedimentos

Assim, os instrumentos para a produção dos dados foram: publicações, teses e dissertações, organização curricular, questionários (para a pesquisa de campo), dentre outros. As técnicas para análise de dados utilizados foram a tabulação, por percentual e por frequência, além da, estatística, qual seja, teste Exato de Fischer, no caso da pesquisa com docentes e discentes.

Em relação a essa, vale ressaltar que, os principais instrumentos para produção de dados foram os questionários aplicados no IFPA. O do docente teve por critério de inclusão o fato de já ter ministrado o conteúdo de vetores na instituição citada e pertencer as áreas de matemática, de física, de tecnologia e/ou de engenharia.

O do discente foi aplicado a alunos do IFPA, Campus Belém, do Curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações que já haviam estudado vetores, inclusive, egressos. Para a participação, todos, professores e alunos, tiveram que dar ciência e estar de acordo com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), Apêndice A e Apêndice B, respectivamente.

Ao final, de acordo com os critérios descritos, 45 docentes, exceto os de Marabá Industrial, que optaram por não participar da pesquisa, e 30 discentes, entre concluintes e egressos, responderam aos questionários. A etapa da aplicação do instrumento ocorreu entre abril e agosto/2021, para os docentes, e entre novembro e dezembro/2021 via *link* do aplicativo *Google Forms* disponibilizado por e-mail, devido ao estado de pandemia à época. O questionário docente consta no Apêndice E e o discente no Apêndice F.

No mais, em linhas gerais, esses foram os principais procedimentos metodológicos, instrumentos de coleta e análise de dados, utilizados nessa etapa. Contudo, outros esclarecimentos foram realizados durante a apresentação das informações sistematizadas na seção correspondente às Análises Prévias. É importante frisar que todas as pesquisas (bibliográficas e campo) serviram como subsídio para as etapas posteriores.

2.1.2. Etapa: Concepção e Análise a Priori

Nessa fase foi realizada a definição das variáveis de estudo, elaboração dos instrumentos de diagnóstico e da SD por meio da RPPP e por Atividades Experimentais, de acordo com as observações advindas das análises prévias.

Os instrumentos elaborados e/ou selecionados, além das 13 atividades construídas para a composição da Sequência Didática, de exercícios de fixação e de aprofundamento, foram: Quiz, ficha de observação e questionário socioeconômico e acadêmico utilizados na etapa de Experimentação e pré/pós teste. Também foi definido o uso do Questionário de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática de Lima (2012).

Todas essas ferramentas foram utilizadas na fase de experimentação para a produção de informações e devidamente esclarecidas com ênfase em seus objetivos, estrutura e características na seção de Concepção e Análise a *Priori,* bem como, também, foi realizada a Análise a *Priori* das atividades da SD, contendo a descrição e previsão dos efeitos esperados durante a fase de experimentação e, que, foram, posteriormente, confrontados com a Análise a *Posteriori* para a validação dos resultados.

Por fim, foi feita, ainda, uma descrição das tendências de ensino em educação matemática com ênfase no seu desenvolvimento para a construção da SD e aplicação em sala de aula.

2.1.3. Etapa: Experimentação

Na etapa referente a Experimentação, foi feito o relato de como se deu a aplicação da SD e dos instrumentos produzidos na etapa anterior (além das repostas e anotações dos estudantes e gravação de voz) e, consequentemente, da metodologia de ensino. O experimento foi realizado em uma turma de 11 alunos do 4º período de Engenharia Elétrica do IFPA, Campus Belém, que estavam cursando a disciplina Cálculo IV.

A escolha do curso de Engenharia Elétrica se deu devido a extinção do de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações, cuja última turma foi concluída no 2º semestre/2023, para a inserção do de Engenharia que teve início no 2º semestre/2021 que, assim como no curso extinto, tem o conteúdo de vetores como imprescindível para o aprendizado de várias disciplinas por agregar os eixos de Telecomunicações e de Eletrotécnica.

Em consequência, a escolha da disciplina de Cálculo IV se deu por conter o assunto de vetores no ementário e pela disponibilidade do professor responsável em

ceder, gentilmente, parte da Carga Horária (CH) para a realização da experimentação. Para participação, todos tiveram que aceitar e estar de acordo com o TCLE (Apêndice C).

Diante do exposto, outros esclarecimentos e detalhamentos foram realizados na seção de Experimentação; após a finalização, as informações produzidas foram analisadas e descritas na etapa posterior (Análise a *Posteriori* e Validação).

2.1.4. Etapa: Análise a *Posteriori* e Validação

Nessa etapa foi realizada a análise das informações produzidas a partir da aplicação das atividades e pela comparação do resultado dos testes em relação ao início e final do experimento, respectivamente, para confirmação e/ou reputação da tese proposta, tendo por apoio, principalmente, a análise de erros e a teoria da Atividade e Atividade de Estudo.

A análise de dados se deu por métodos mistos com o aporte de técnicas estatísticas específicas, de tabulação e de análise por percentual e frequência; definidas de acordo com as características da amostra e tendo por base: as fichas de observação, o levantamento de erros na resolução das atividades e do pré e pós-teste, dos materiais didático e das ferramentas teóricas (teoria da atividade, atividade de estudo, tendências de educação matemática, análise de erros), dentre outras coisas.

Para avaliação estatística foram utilizadas as seguintes técnicas: Classificação Hierárquica Coesitiva (Gráfico de Árvore Coesitiva), Análise de Similaridade (Árvore de Similaridade), Teste Exato de Fischer, Teste t pareado de Hipótese e Teste de Correlação de Spearman.

No mais, devido a diversidade e especificidades de algumas técnicas estatísticas utilizadas, a subseção seguinte apresenta uma breve descrição e a justificativa para o uso de cada uma destas.

2.1.5. Sobre as técnicas de Análise de Dados

Além de análises quanti-qualitativas baseadas na observação e frequência, também foram utilizadas técnicas estatísticas, tanto nas Análises Prévias quanto na

Experimentação e Análise à *Posteriori* e Validação; sendo que, na primeira etapa; o intuito foi verificar estatisticamente as respostas dos docentes e discentes; e, nas demais fases, as variáveis relacionadas com os participantes da experimentação, o perfil socioeconômico e acadêmico, os tipos de erros e o desempenho.

O comparativo do teste de Emoções e Desempenho Acadêmico, antes e depois da experimentação, foi feito pelo método de Rankeamento Médio (RM) por utilizar a escala *Likert.* A seguir é feita uma breve apresentação das técnicas utilizadas.

a) Sobre o Teste Exato de Fischer

Alguns testes estatísticos se enquadram na categoria de testes não-paramétricos, ou seja, em casos em que algumas condições exigidas não são possíveis de serem atendidas, tais como, normalidade e nível intervalar de mediação (Levin, 1987).

Nesse conjunto de testes estão, dentre outros, o teste qui-quadrado e o teste exato de Fischer, ambos, são de significância e utilizados para fazer comparações entre frequências; ocupam-se, essencialmente, com a distinção entre as frequências esperadas e frequências obtidas.

No caso da pesquisa em questão, optou-se pelo teste de Fischer devido aos requisitos exigidos e as características do estudo elencadas por Levin (1987), quais sejam: a amostra é menor ou igual a 30 e algumas frequências esperadas são inferiores a 5.

Assim, essa técnica foi usada com o intuito de verificar associações estatisticamente significativas entre as variáveis do instrumento de produção de dados, tendo por critério o nível de significância (p-valor) de 0,05 (95%), ou seja, foram consideradas estatisticamente significativas associações entre variáveis com p-valor ≤ 0,05; o *software Jamovi* 2.6.13 foi o aporte tecnológico.

Além disso, na presença de associação estatística significativa foi utilizado o coeficiente *V-Cramer,* também calculado pelo programa citado, para medir o efeito do grau de associação entre as variáveis; de acordo com Levin (1987) e Cohen (1988), este é o coeficiente adequado quando da existência de tabelas superiores a 2x2, da mesma forma, Fonseca, Tolendino e Ziviani (2023) reforçam a sua aplicação em conjunto com os resultados do teste exato de Fischer.

O valor do coeficiente varia entre 0 (zero) e 1, sendo que, 0 (zero) indica ausência de associação entre as variáveis e 1 uma associação perfeita. O Quadro 2 apresenta a interpretação do valor de V-Cramer sugerida por Cohen (1988); sendo que, os graus de liberdade (gl) equivalem ao menor valor entre a quantidade de linhas e a quantidade de colunas menos 1 da tabela de referência cruzada em análise.

Quadro 2 - Classificações para o tamanho do efeito de V-Cramer

Efeito de V-Cramer				
gl	**Irrisório**	**Pequeno**	**Médio**	**Grande**
1	<0,10	<0,30	<0,50	≥0,50
2	<0,07	<0,21	<0,35	≥0,35
3	<0,06	<0,17	<0,29	≥0,29
4	<0,05	<0,15	<0,25	≥0,25
5	<0,05	<0,013	<0,22	≥0,22

Fonte: adaptado de Cohen (1988)

Portanto, a utilização de *V-Cramer,* em conjunto com o nível de significância pré-estabelecido, aumentam a relevância dos resultados apresentados ao indicar o quão forte é a relação entre as variáveis.

Para tanto, recorreu-se a essas técnicas nas fases de Análises Prévias e Análise a *Posteriori* e Validação. Na primeira, foi para a investigação dos questionários docentes e discentes; na outra, aconteceu em dois momentos distintos, quais sejam: 1) entre os tipos de erros dos alunos verificados nas atividades, como apoio aos resultados obtidos via Classificação Hierárquica Coesitiva e Análise por Similaridade, que serão descrito a seguir; e, 2) entre algumas variáveis do perfil socioeconômico e acadêmico relacionado ao desempenho dos alunos.

b) Sobre a Análise de Confiabilidade – Coeficiente Alfa de Conbrach (α)

A análise por meio desse coeficiente (α) permite avaliar a consistência interna de uma escala e possui valores entre 0 e 1 indicando o grau de confiabilidade, quais sejam: 0 a 0,21 – pequena; 0,21 a 0,40 – razoável; 0,41 a 0,60 – moderada; 0,61 a 0,80 – substancial; e 0,81 a 1,0 – quase perfeita (Landis e Koch, 1977).

Assim, foi utilizado para avaliar a confiabilidade das respostas do teste de Emoções de Aprendizagem e desempenho na Matemática, antes e depois do experimento, nas fases de Experimentação e Análise a *Posteriori* e Validação. Teve por aporte tecnológico o *software Jamovi* 2.6.13.

c) Classificação Hierárquica Coesitiva e Análise de Similaridade

A Classificação Hierárquica Coesitiva faz parte da Análise Estatística Implicativa (A.S.I) e estabelece metarregras do tipo (regras de regras), tal como, “se a então b” e a análise por meio do gráfico de árvore coesitiva (Régnier e Andrade, 2020). O grau de coesão é medido pelo índice de coesão que foi considerado, em todo o caso, nesse estudo, de 0.7. Resultados abaixo desse valor não foram considerados.

A árvore de similaridade, obtida por meio da Análise de Similaridade, consiste em agrupar sujeitos com características semelhantes, quanto maior o índice de similaridade, maior a semelhança entre estes; porém não faz parte da A.S.I. O grau de similaridade é medido pelo índice de similaridade que foi considerado, em todo o caso, nesse estudo, de 0,9. Resultados abaixo desse valor não foram considerados.

Para as duas técnicas, como aporte tecnológico fez-se uso do *Sotware* CHIC 7.0 com modelagem binomial devido o universo de estudo finito, de acordo com a quantidade de participante; sendo utilizadas para a verificação da existência de metarregras e similaridades, respectivamente, entre os tipos de erros e os sujeitos da pesquisa na fase de Análise a *Posteriori* e Validação.

d) Teste t pareado de Hipótese

De acordo com Larson e Farber (2015, p. 323, grifo do autor), “Um teste de hipótese é um processo que usa estatísticas amostrais para testar uma afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional” e auxilia na tomada de decisões ao permitir a comparação entre duas médias da mesma amostra obtida em tempos diferentes, esse procedimento é chamado por Levin (1978) de planejamento antes-depois. As condições necessárias para aplicar essa técnica são:

> 1. As amostras são selecionadas aleatoriamente.
> 2. As amostras são dependentes (emparelhadas).
> 3. As populações são normalmente distribuídas ou o número *n* de pares de dados é pelo menos 30.
> (Larson e Farber, 2015, p.410)

Portanto, considerando as características da amostra, que atendem as exigências citadas, bem como, o objetivo da pesquisa e os requisitos necessários para

utilizar o teste-t pareado, foi feita a opção por essa análise estatística. A comprovação das condições necessárias será demonstrada quando da aplicação da técnica na seção de Análise a *Posteriori* e Validação. O *software Jamovi* 2.6.13 foi utilizado como recurso tecnológico.

Assim, em nosso estudo, a intenção é comparar as médias do pré-teste (μ_1) e do pós-teste (μ_2) a fim de comprovar a hipótese de melhoria do desempenho após a aplicação da sequência didática, sendo a hipótese de pesquisa $\mu_1<\mu_2$, vale ressaltar que as médias do pré e do pós-teste são baseadas no número de acertos, nos dois casos.

e) Teste de Correlação de Spearman

O teste de correlação permite indicar uma relação entre as variáveis (Levin, 1987), que pode ser causal ou não. Contudo, assim, como qualquer outro método, para sua utilização é necessário que alguns requisitos sejam atendidos. Nesse sentido, para o uso do coeficiente de Spearman (Rho de Spearman), as seguintes condições tem de ser satisfeitas:

> 1. Correlação Linear – O rs (coeficiente de correlação de postos de Spearman) só detecta correlações lineares entre X e Y, quaisquer que sejam essas variáveis.
> 2. Dados Ordinais – As variáveis X e Y devem ser passíveis de ordenação; como alternativa, deve ser possível atribuir-lhes postos.
> 3. Amostragem casual – Os sujeitos amostrais devem ter sido extraídos aletoriamente de uma dada população.
> (Levin, 1987)

Como se vê nos requisitos não há necessidade de que a variáveis sejam distribuídas normalmente, tal como exigido, no coeficiente de Pearson. Assim, considerando as características das variáveis testadas, o teste de Spearman foi escolhido.

Nesse sentido, nessa pesquisa, recorreu-se a esse teste na fase de experimentação a fim de verificar uma possível relação entre algumas variáveis do perfil socioeconômico e acadêmico dos participantes da experimentação e do desempenho dos alunos e, entre essa última e frequência dos alunos durante a SD.

f) Rankeamento Médio (RM)

O uso do RM foi a ferramenta quantitativa utilizada para avaliar o questionário de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática; esse procedimento foi proposto por Oliveira (2005) e em trabalhos da área de Educação em Ciências como Bohrer e Farias (2013) e Passos e Del Pino (2014).

Essa técnica tem por objetivo mensurar o grau de concordância dos sujeitos que responderam a um questionário estruturado com a escala Likert de 5 pontos; sendo que o valor 3 é considerado “neutro”, os maiores a este são concordantes e os menores discordantes (Oliveira, 2005). Portanto, quanto mais próximo o valor de RM for de 5, melhor será o grau de aquiescência dos participantes da pesquisa. O cálculo de RM se dá de acordo com a equação mostrada na Figura 3.

Figura 3 - Fórmula para o cálculo do Ranking Médio

$$RM = \frac{\Sigma(F_i V_i)}{NT}$$

Onde:
RM = Ranking Médio.
F_i = frequência observada por resposta e por item.
V_i = valor de cada resposta.
NT = número total de informantes

Fonte: adaptado de Oliveira (2005)

Nesse sentido, considerando os dados da pesquisa obtidos por meio do questionário citado, essa ferramenta apresenta-se adequada para análise comparativa das emoções e do autoconceito acadêmico antes e depois da aplicação da SD. Os resultados são apresentados na seção correspondente a Análise a *Posteriori* e Validação.

Por fim, para fins de complementação e didáticos, o Quadro 3 apresenta as técnicas apresentadas de acordo com o objetivo de sua utilização, as Etapa da ED, os critérios de análise e o software de apoio matemático.

Quadro 3 – Principais técnicas de Análise de Dados

Técnica Estatística	**Objetivo**	**Etapa da ED**	**Critérios**	***Software***
Teste Exato de Fischer e coeficiente *V-Cramer*	Verificar a significância estatística nas respostas dos questionários docentes e discentes e o grau de associação destas, respectivamente.	Análise Prévias	Nível de significância: 95% (0,05)	*Jamovi* 2.6.13
	Verificar a existência de associação entre as repostas do perfil socioeconômico e acadêmico dos	Análise à *Posteriori* e Validação		

	participantes da experimentação relacionado as notas do pré e pós teste.			
Coeficiente alfa de C*onbrach* (α)	Testar a consistência das repostas dos questionários de Emoções de Aprendizagem e de Autoconceito Acadêmico	Experimentação e Análise à *Posteriori* e Validação	Mínimo: 0,60	*Jamovi* 2.6.13
Classificação Hierárquica Coesitiva - gráfico de árvore coesitiva	Verificar a existência de Metarregras entre os sujeitos e tipos de erros cometidos nas atividades da experimentação.	Análise à *Posteriori* e Validação	Índice de Coesão: 0,7	CHIC 7.0
Análise de similaridade – árvore de similaridade	Agrupar alunos com características semelhantes e verificar se há similaridade entre estes de acordo com os erros cometidos nas atividades de experimentação.		Índice de Similaridade: 0,9	CHIC 7.0
Teste-t pareado	Verificar se houve Melhora de desempenho a partir das médias do pré e pós-teste		-	*Jamovi 2.6.13*
Teste de Correlação de Spearman	Verificar a existência de relação entre as respostas do questionário do perfil socioeconômico e acadêmicos e o desempenho dos participantes da experimentação.		Não há necessidade de que todas as variáveis tenham distribuição normal.	*Jamovi 2.6.13*
RM	Verificar o grau de concordância entre as repostas do teste de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática, antes e depois da experimentação.		Escala *Likert* de 5 pontos	Microsoft Excel

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

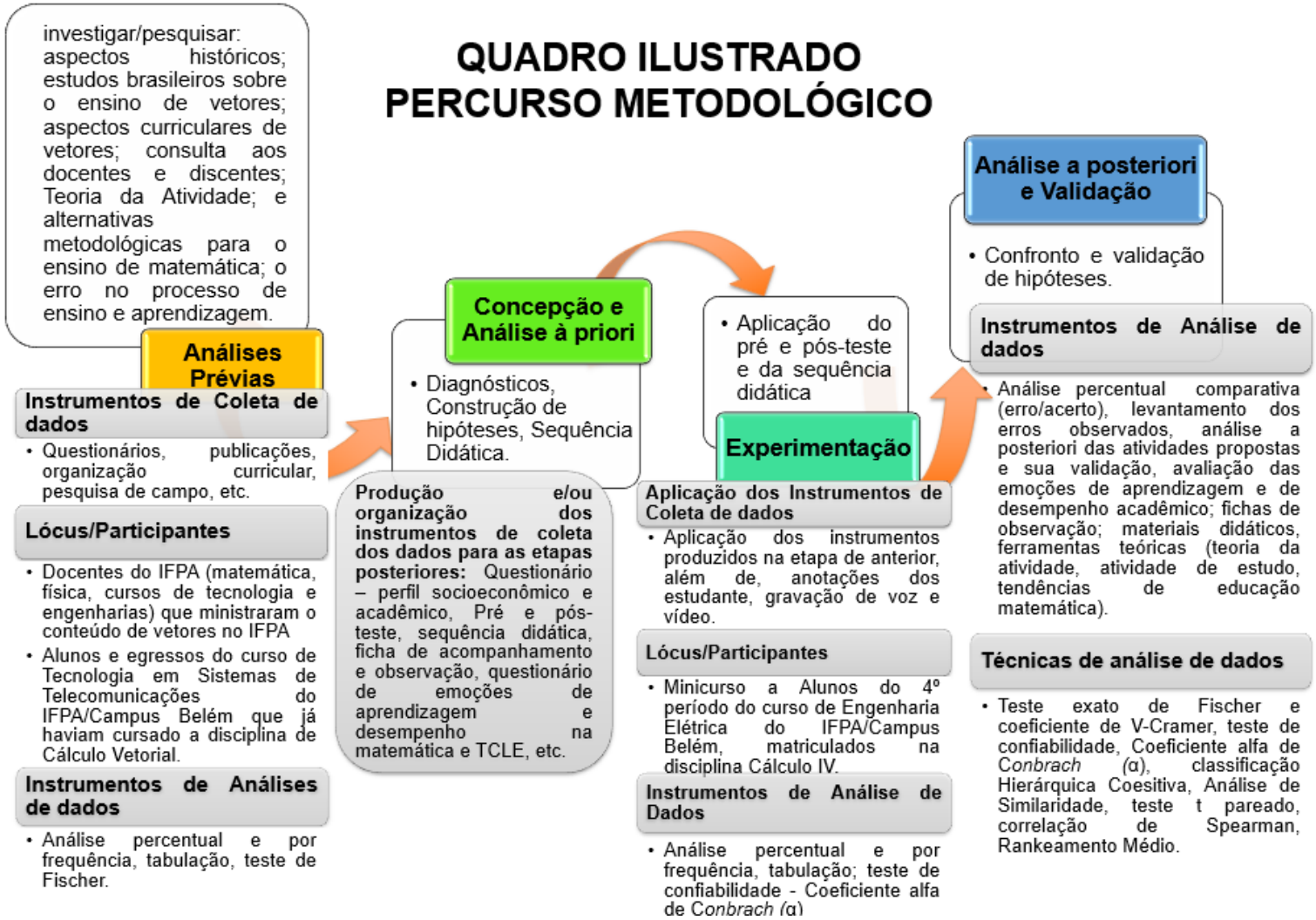
Vale frisar que essa subseção teve por objetivo elucidar os principais aspectos metodológicos utilizados em cada etapa da pesquisa e esclarecer o motivo da escolha e diversidade das técnicas de análises de dados para que quaisquer leitores possa compreender o desenvolvimento desse estudo e seu processo de validação.

No mais, maiores esclarecimentos e aspectos pontuais serão discutidos nas seções correspondentes.

2.2. RESUMO ILUSTRADO DO QUADRO METODOLÓGICO – INSTRUMENTAL

A Figura 4 apresenta a síntese dos procedimentos metodológicos discutidos e apresentados anteriormente a partir das etapas da Engenharia Didática.

Figura 4 - Ilustração do Quadro Metodológico - Instrumental



Fonte: da autora a partir da descrição do percurso metodológico.

Assim, o caminho trilhado, discutido nas disciplinas da pós-graduação e o diálogo constante com o orientador resultou na organização e estruturação amadurecida do percurso metodológico apresentado, com etapas bem definidas que nortearam a pesquisa até o produto final; não se tratando, contudo, de um projeto engessado e imutável, mas fruto de um diálogo constante entre os procedimentos metodológicos, a fundamentação teórica e os resultados.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Essa etapa, como descrito anteriormente, teve por característica fazer um levantamento sobre objeto de estudo para fundamentar e justificar as demais fases e dar prosseguimento a pesquisa. Cabe ressaltar, que as Análise Prévias foram revisitadas ao longo de toda pesquisa para melhoramentos e acréscimos teóricos.

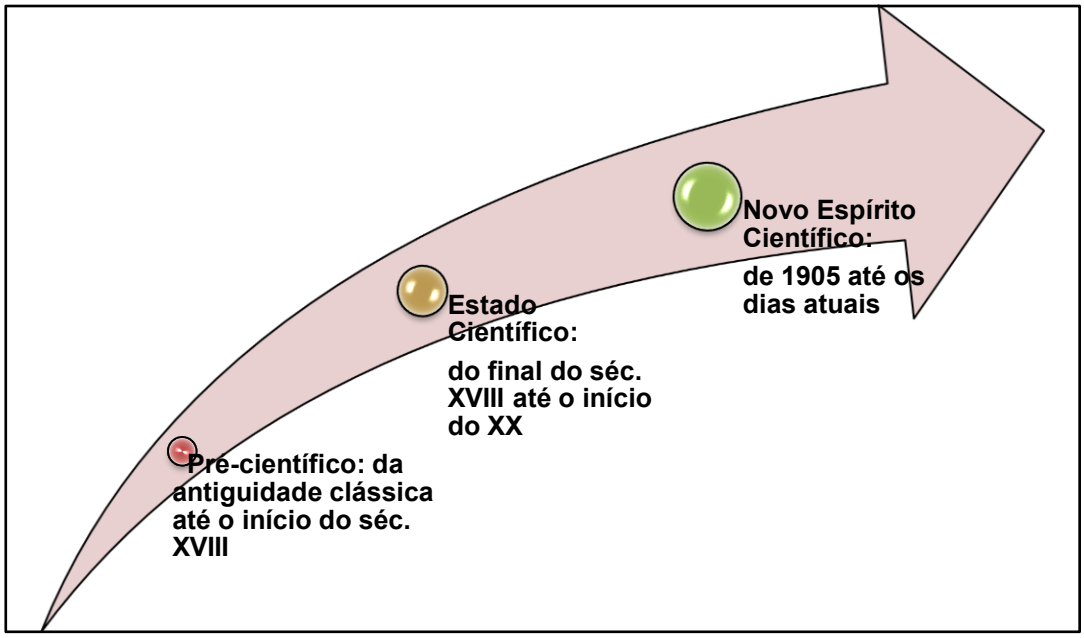
A seguir, os estudos realizados são apresentados.

3.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE VETORES

Os estudos realizados sobre a História dos Vetores foram publicados, de forma detalhada, em Kasahara e Sá (2021) e Kasahara, Apoluceno e Sá (2022); portanto, nessa subseção, os principais aspectos serão apresentados de forma sucinta, com base nos artigos citados.

O estudo de Kasahara, Apoluceno e Sá (2022, p. 687) objetivou “analisar o desenvolvimento do conhecimento científico da história dos vetores a partir do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard”. A Figura 5 apresenta os períodos tal como em Kasahara, Apoluceno e Sá (2022).

Figura 5 - Períodos do desenvolvimento do Espírito Científico por Bachelard

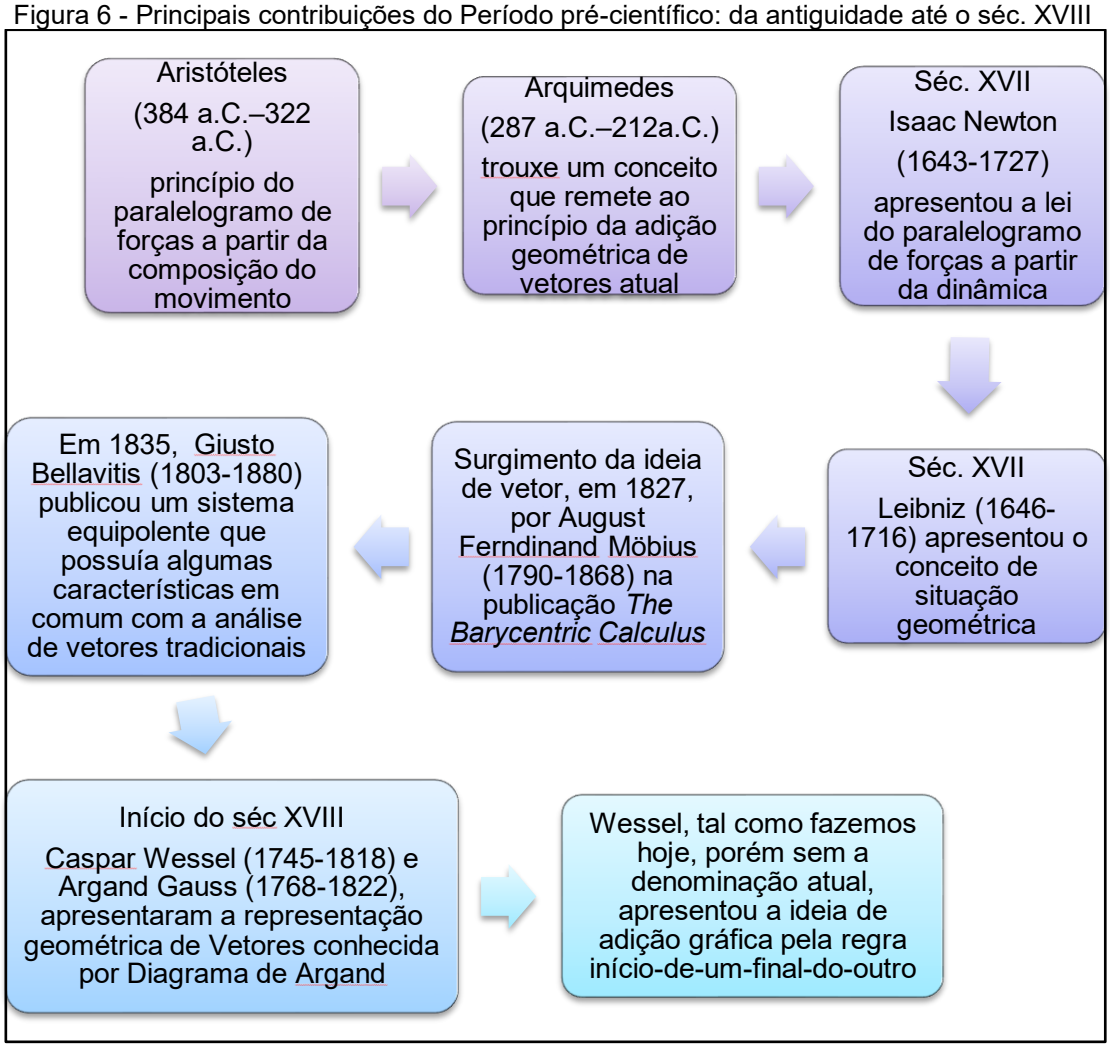


Fonte: elaborado a partir de Kasahara, Apoluceno e Sá (2022).

Para o primeiro período, chamado pré-científico, as contribuições foram impulsionadas pela necessidade de denominar grandezas físicas e pela utilização de métodos e teoria, até então, sem a denominação de vetores; mas, que demarcaram o início das concepções da teoria moderna de vetores (Kasahara e Sá, 2022).

Sobre o período pré-científico, a Figura 6 apresenta a condensação das principais contribuições de alguns estudiosos desde a antiguidade até o início do séc. XVIII destacando as primeiras ideias que levariam, posteriormente ao desenvolvimento da teoria relativa aos vetores geométricos.

Figura 6 - Principais contribuições do Período pré-científico: da antiguidade até o séc. XVIII

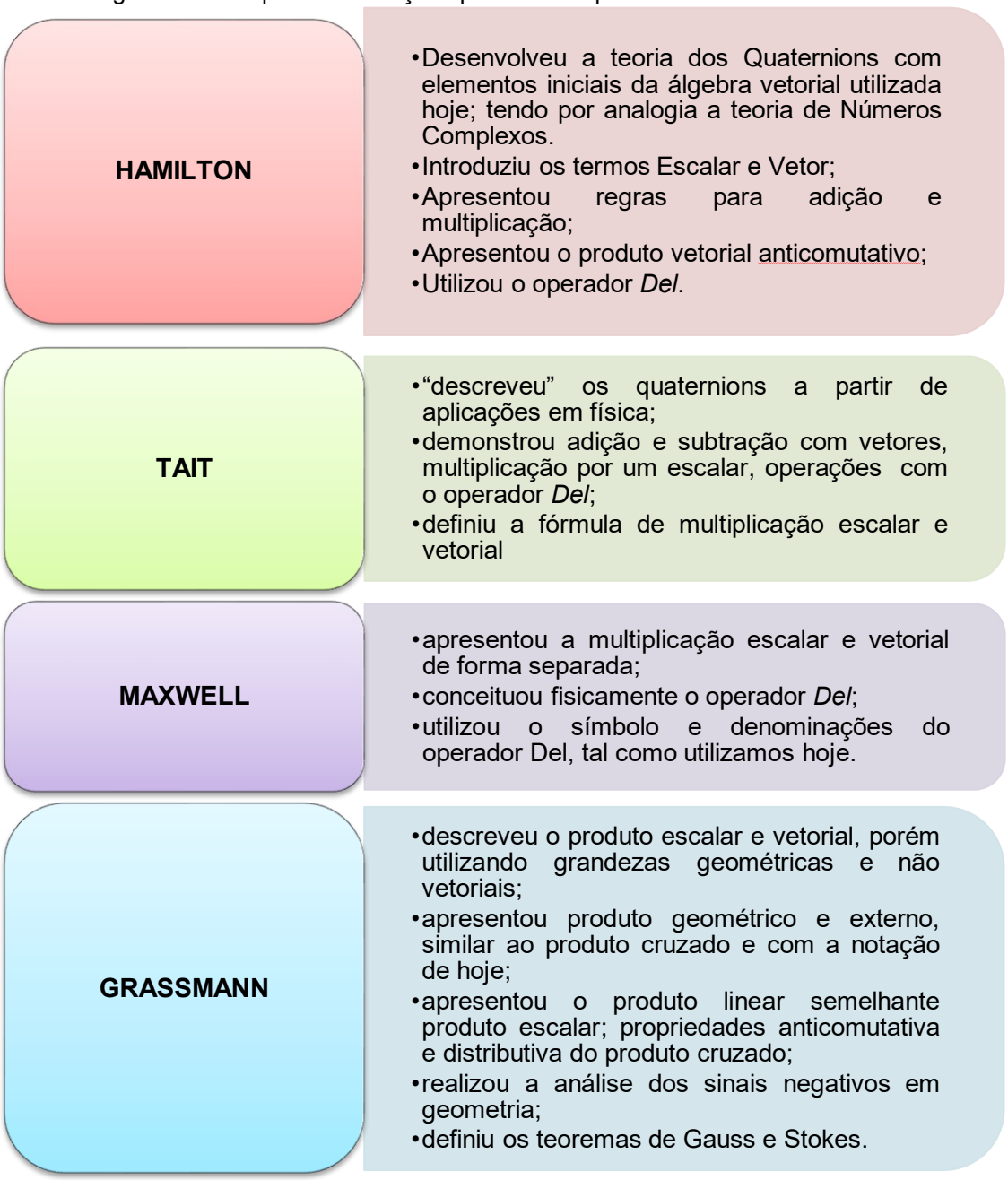


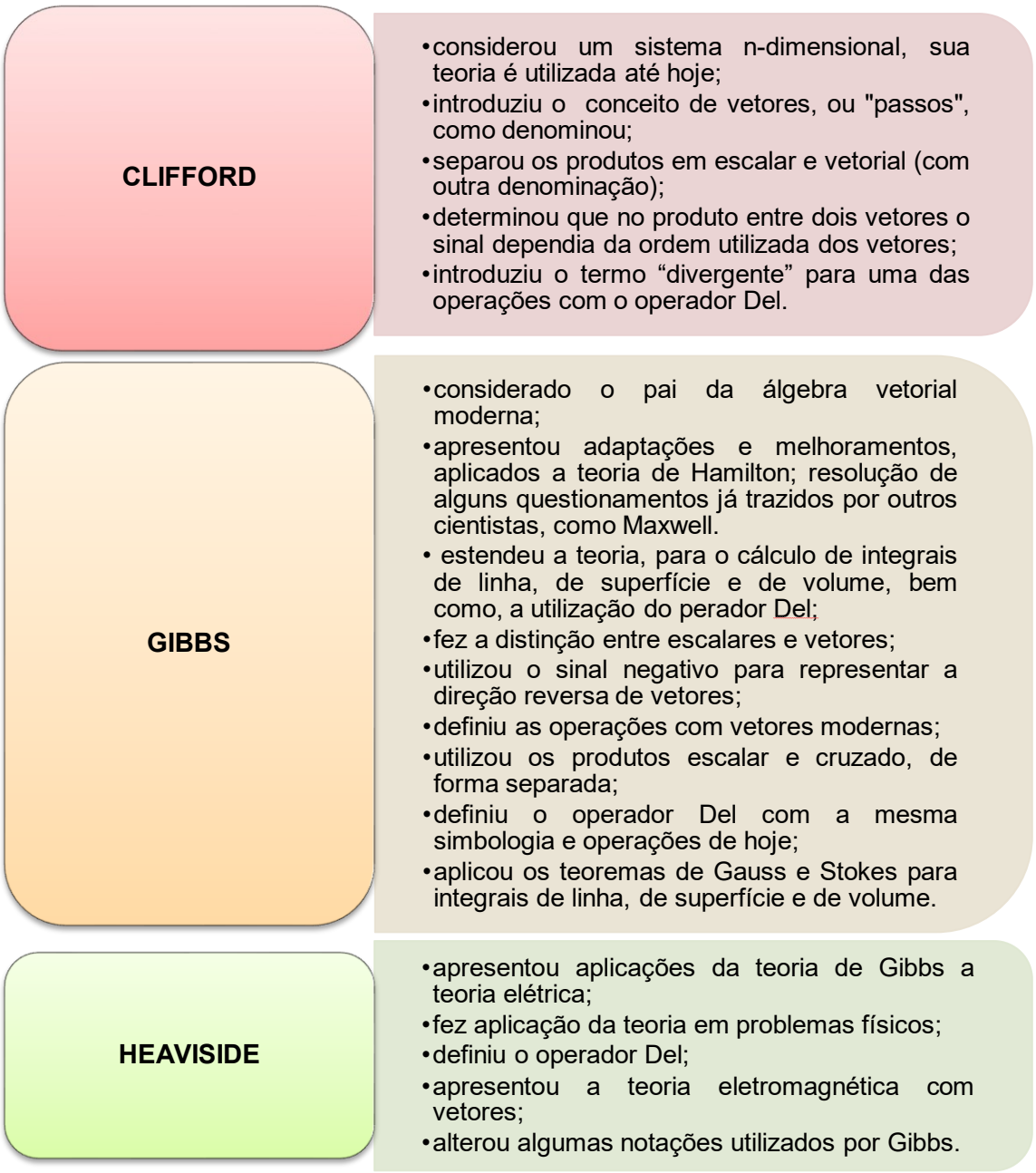
Fonte: elaborado a partir de Kasahara, Apoluceno e Sá (2022) e Dugas (2011).

Kasahara e Sá (2021) mostraram o processo histórico que motivou e culminou na análise vetorial moderna, desde as teorias antigas que influenciaram o surgimento dos vetores (Período Pré-científico) às proposições

de autores como Hamilton(1805-1865), Tait(1831-1901), Maxwell (1831-1879), Grassmann (1809-1877), Clifford (1845-1879), Gibbs (1839-1903) e Heaviside (1850-1925), que fazem parte do período denominado de Estado Científico, até o período de Axiomatização, que caracteriza o Novo Espírito Científico. A Figura 7 apresenta as principais contribuições por autor do Período do Estado Científico.

Figura 7 - Principais contribuições por autor do período do Estado Científico





Fonte: elaborado a partir da pesquisa.

Vale ressaltar que Gibbs (1881) deixou claro que sua obra não tem relação com a de Tait (1890), discípulo de Hamilton; porém, ao longo do trabalho de Gibbs pode-se perceber algumas similaridades como o simbolismo e a matemática utilizadas por Tait (1890), o que é justificado pelo fato de que Gibbs, talvez, apesar de negar, tenha estudado o Quaternion. Para fins de comparação, a Figura 8 mostra um estudo adaptado de Crowe (1994) com as notações utilizadas por Tait e Gibbs.

Figura 8 - Notação Gibbs x Tait

GIBBS	OPERAÇÃO / PROPRIEDADE	TAIT
$\alpha.\beta = \beta.\alpha$	**PRODUTO ESCALAR**	$\mathbf{S}\alpha\beta = \mathbf{S}\beta\alpha$
$\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$	**PROPRIEDADE ANTICOMUTATIVA**	$\mathbf{V}\alpha\beta = -\mathbf{V}\beta\alpha$
$\alpha.\beta = xx' + yy' + zz' \quad x\,\beta = (yz' - zy')i + (zx' + xz')j + (xy' - ux')k$	**MULTIPLICAÇÃO VETORIAL**	$\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' + xz')j + (xy' - ux')k$
$\alpha \times [\beta \times \gamma] = (\alpha.\gamma)\beta - (\alpha.\beta)\gamma$	**PRODUTO VETORIAL TRIPLO**	$\mathbf{V}\alpha\mathbf{V}\beta\gamma = \gamma\mathbf{S}\alpha\beta - \beta\mathbf{S}\gamma\alpha$
$[\alpha \times \beta] \times [\gamma \times \delta] = (\alpha.\gamma \times \delta)\beta - (\beta.\gamma \times \delta)\alpha$	**PROPRIEDADE PRODUTO VETORIAL**	$\mathbf{VV}\alpha\beta\mathbf{V}\gamma\delta = -\beta\mathbf{S}\alpha\mathbf{V}\gamma\delta + \alpha\mathbf{S}\beta\mathbf{V}\gamma\delta$

Fonte: elaborado a partir de Crowe (1994)

Assim, para Kasahara, Apoluceno e Sá (2022), o segundo período foi marcado pela análise crítica das teorias, correção e melhorias e elaboração de novas, bem como, pela retificação de generalizações e de expressões que fundamentaram a álgebra vetorial moderna.

Por fim, no Período do Novo Estado Científico, “há uma corrida pela axiomatização, formalização da álgebra linear, bem como, do espaço vetorial a partir de teoremas” (Kasahara e Sá 2021, p.717), com a proposição de autores como Peano (1852-1932), Darboux (1842-1917), Rudolf Shimmarck (1881-1912), Geog Hamel (1877-1954), Hermann Weyl (1855- 955), Hans Hahn (1879-1934), Wiener (1894-1964) e Banach (1892-1945*)*. O Quadro 4 traz um resumo dos principais axiomas propostos por cada um dos autores citados.

Quadro 4 – Principais Axiomas por Autor

AUTOR	AXIOMAS
Peano	Se a é um ponto e u é um vetor, então existe um ponto b com b - a=u
	Se a é um ponto e u é um vetor, a+u é um ponto
	Para algum vetor u e v, u+v é um único x tal que para algum ponto a, x=((a+u)+v)-a
	Se a é inteiro positivo e u é um vetor, então au=0 resulta em u=0
	Se a é um inteiro positivo e u é um vetor, então existe um vetor v tal que av=u
	u|v[2] é um número real
	u|v= v|u
	(u+v)|w=u|w+v|w
	Se u≠0, então u|u é um número real positivo
	O comprimento de u foi definido como a raiz quadrada de u|u
Darboux	Dado n segmentos orientados, todos com origem no mesmo ponto O, a lei da composição é tal que: 1. A resultante total é única e não muda ao se permutar a ordem das resultantes parciais; 2. A resultante total não é alterado pela rotação dos segmentos em torno de O; 3. A lei da composição reduz a adição algébrica para segmentos orientados com a mesma direção; 4. A direção e a magnitude da resultante são funções contínuas dos segmentos.
Schimmark	Se um vetor B tem um comprimento r; então para qualquer escalar positivo a, o comprimento do vetor B + a B é (1+a)r
Hamel	Existe uma solução descontínua para a equação funcional f(x+y) = f(x)+f(y)
Weyl	Quaisquer dois pontos determinam um vetor a pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$ =a. Se A é um ponto qualquer e a é um vetor, então existe um e somente um ponto B para qual $\overrightarrow{AB}$ =a
	Se $\overrightarrow{AB}$ =a e $\overrightarrow{BC}$ =b, então $\overrightarrow{AC}$ =a+b.
Hahn	Se R é um espaço vetorial normalizado completo tem um subespaço completo R_o e se $f_o(x)$ é uma função linear definida sobre R_o e tem norma igual a M, então existe uma função linear f(x) definida sobre todo R que concorda com $f_o(x)$ e R_o e também tem norma M.
Wiener	Quaisquer dois pontos A e B em K determinam um vetor AB em σ[3].
	Dado algum A em K e α em σ, existe algum B em K tal que AB=α.
	Se A, B, C, D estão em K, então AC=AB⊕ BC, e AB=CD implica que BA=DC[4].
Bannach	Seja E um espaço vetorial composto por X, Y, Z, e a e b números reais, então: 1. X +Y é um elemento determinado da classe E 2. X + Y = Y + X 3. X + (Y + Z) = (X + Y) + Z 4. X + Y = X + Z então Y=Z 5. Se existe um elemento de E que determina θ então X + θ = X 6. a. X é um elemento determinado da classe E 7. a. X=θ equivale a X=θ ou a=0 8. a≠0 e a . X=b . Y então X=Y 9. X≠θ e a . X=b . Y então a=b 10. a . (X+Y) = a . X + a . Y 11. (a + b).X = a.X + b.X 12. 1.X = X 13. a.(b.X) = (a . b)

Fonte: Kasahara, Apoluceno e Sá (2022).

[2] *u*|*v* representa o produto interno bruto entre os vetores *u* e *v*

[3] K representa um conjunto de pontos e σ um conjunto de vetores.

[4] O símbolo ⊕ indica adição de vetores

De acordo com Moore (1995), o fim do período da axiomatização pode ser considerado com a publicação em 1941 da obra *A Survey of Modern Algebra*, por Garret Birkhoff (1884-1944) e Saunders Mac Lane (1909-2005), estudantes de Harvard. Nessa obra a noção de espaço vetorial foi definida de uma forma abstrata pelos autores tal como transcreve Moore (1995, p. 263):

> Um espaço vetorial V sobre um campo F é dito ser um conjunto V com uma operação + em um grupo Abeliano e satisfaz os seguintes quatro axiomas: existe uma operação, chamada produto escalar, qual para algum a em F e algum x em V resulta em ax e é tal que (V1) a(x+y)=ax+ay; (V2) (a + b)x=ax+bx; (V3) (ab)x=a(bx); (V4) 1x=x. (Moore, 1995, p.263, tradução nossa)[5]

De forma geral, essa foi a "escalada" para a construção da teoria sobre vetores utilizada hoje. Em relação a notação de vetores, a de Gibbs-Heaviside teve grande aceitação. Durante os anos de 1909-1910 aconteceu um grande debate sobre o melhor simbolismo a ser utilizado.

Em 1903, uma comissão foi formada em Kassel no *Naturforschrtversammlung* para tratar da questão da notação; contudo, a partir desses estudos três novas notações surgiram. Em 1908, Burali-Forti (1861-1931) e Marcolongo (1862-1943) publicaram um longo estudo sobre as origens de várias notações e recomendarem o estabelecimento de um novo sistema de notação (Crowe, 1994).

Contudo, há de se considerar que para tratar de notações de forma mais abrangente e cronológica caberia um estudo mais aprofundado; contudo, a título de curiosidade e como forma complementar a esse estudo, será mostrado um quadro resumo, Quadro 5, contendo as principais notações utilizadas ao longo das teorias e publicações de trabalhos e qual o autor que a utilizou primeiramente, de acordo com Cajori (1929).

[5] A vector space V over a field F was said to be a set V with na operation + that is an Abelian group and satisfies the following four axioms : There is an operation, called the scalar product, which for any *a* in F and any *x* in V gives *ax* and is such that (V1) *a*(*x*+*y*)=a*x*+a*y*; (V2) (*a* + *b*)*x*=a*x*+b*x*; (V3) (*ab*)*x*=*a(bx);* (V4) 1*x*=*x.* (Moore, 1995, p.263)

Quadro 5 – Principais Notações utilizadas em vetores

NOTAÇÕES				
PARA UM VETOR				
ARGAND, 1806	MOBIUS, 1827,1885	HAMILTON ; TAIT, P. G. ; GIBBS, J. W.	LANGEVIN, P., 1912	
$\overline{\mathbf{AB}}$	AB	A (LETRAS GREGAS MINÚSCULAS)	$\vec{\alpha}$ (VETOR POLAR) $\overset{\smile}{\alpha}$ (VETOR AXIAL)	
MÓDULO DE UM VETOR				
BELLAVITIS	GRASSMANN, H. G.	HAMILTON, W. R.	GANS, R.	
AB	$\sqrt{R^2}$	***T**R* (TENSOR DE UM VETOR R)	$\|\boldsymbol{R}\|$	
PRODUTO ESCALAR (PRODUTO PONTO)				
HAMILTON, W. R.[6]	GRASSMANN, H. G.	RÉSAL, H.; PEANO, G.; BURALI-FORT, C. E MARCOLONGO, R.	SOMOV, P.; HEAVISIDE O.; FÖPPL; FERRARIS, G.	GIBBS, J. W.
$\boldsymbol{S\rho\rho'}$ (PARTE ESCALAR)	$a \times b$[7] $[\mathrm{U}\|\mathrm{V}]$[8]	$a \times b$ $\mathrm{U}\|\mathrm{V}$[9]	UV	U . V
PRODUTO VETORIAL (PRODUTO CRUZADO)				
HAMILTON, W.; HEAVISIDE, O.	GRASSMANN, H. G.	BURALI-FORT ; MARCOLONGO		GIBBS, J. W.
$\boldsymbol{V\rho\rho'}$ (PARTE VETORIAL)	[UV]	U ∧ V		$a \times b$

Fonte: elaborado a partir de Cajori (1929)

Portanto, através desse breve resumo pode-se perceber que os autores apesar de independentes, em momentos, muitas vezes, diferentes, e quase sem contato algum contribuíram de forma complementar para a teoria de vetores utilizada hoje.

Na verdade, a teoria não é resultado de um único autor, mas surge da complementariedade das ideias dos mesmos, através dos melhoramentos, estudos avançados e aplicações da teoria em questões físicas.

Entretanto, as ideias que tiveram maior aceitação e/ou popularidade à época em que foram divulgadas, foram as que, porventura, tiveram aplicações em problemas físicos, tais como, a teoria de Hamilton que foi aplicada em problemas físicos por Tait, e de Gibbs, que teve aplicações feitas por Heaviside; o que ressalta a importância da contextualização e utilização do *milieu* no processo de ensino-aprendizagem.

Para tanto, a subseção seguinte apresenta os aspectos curriculares de vetores em relação aos níveis de ensino no Brasil.

---

[6] Hamilton considerou somente um produto, $\rho\rho'$, com uma parte vetorial e outra escalar
[7] 1846
[8] 1844
[9] Notação utilizada por G. Peano, posteriormente, em 1888.

3.2. ASPECTOS CURRICULARES DE VETORES

O ensino de vetores não é previsto na Base Nacional Curricular para o Ensino Fundamental. Contudo, a Unidade Temática referente a Geometria faz referência ao estudo de posições e deslocamentos no espaço e destaca que, nos anos finais, deve-se aproximar a Álgebra da Geometria ao iniciar a discussão sobre plano cartesiano por meio da Geometria Analítica (Brasil, 2018).

Além disso, uma das competências específicas de Matemática para o Ensino fundamental é:

> Compreender as relações entre os conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (Brasil, 2018, p. 267)

Segundo a competência descrita, o ensino da Matemática deve envolver a relação e a abrangência entre diferentes campos da Matemática e áreas diversas e, de acordo com Piazza (2020), essa orientação dialoga com o conteúdo de vetores apontando como uma possibilidade de assunto para essa modalidade de ensino.

Para o Ensino Médio, que compreende a etapa final da educação básica, e tem por finalidade, de acordo com o art. 35, Lei 9.394/1996:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, *possibilitando o prosseguimento dos estudos*;
> II – a *preparação básica* para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade e novas condições de ocupação ou *aperfeiçoamento posteriores*;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o *desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico*;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, *relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina*.
> (Brasil, 1996, *grifo nosso*)

Os grifos realizados nos incisos ressaltam a importância de um ensino que estimule a formação crítica do aluno, seja para o prosseguimento dos estudos ou para o mundo do trabalho. Destaca, também, sobremaneira, a preparação advinda do EM para a continuidade dos estudos, trabalho e

aperfeiçoamentos a partir de uma base sólida de aprofundamento e consolidação dos conhecimentos.

Em relação ao ensino de vetores para esse nível de ensino, assim como, no fundamental, não há previsão na Base Nacional Comum Curricular; porém, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio há uma recomendação sobre o entendimento de formas geométricas via álgebra e do conceito de vetor da seguinte forma:

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (BRASIL, 2006)

A recomendação além de propor o ensino de vetor, também, ressalta a importância desse conteúdo ser atrelado à Matemática e não ser utilizado, apenas, como “ferramenta” nas aulas de física do Ensino Médio. Outra questão levantada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio é em relação ao ensino interdisciplinar entre os mapa-múndi e suas características geométricas e as suas transformações no espaço bi e tri dimensionais.

Assim, de acordo com o documento, “[...]uma introdução à geometria vetorial e às transformações geométricas no plano e no espaço – isometria e homotetia – é também mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico” (Brasil, 2006, p.93).

Porém, é importante ressaltar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, não são, como o próprio nome sugere, obrigatórias; mas, são recomendações elaboradas a partir da ampla discussão entre as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública com o objetivo de “contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente” (Brasil, 2006, p.6) e ser objeto de reflexão permanente da prática cotidiana dos professores.

Para a Educação Superior, é assegurada autonomia no exercício de suas atribuições, tais como, “art. 53, II – fixar os currículos de seus cursos e programas, observadas as diretrizes gerais pertinentes” (Brasil, 2006). Nesse

sentido, as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia, por exemplo, dizem que:

> Art. 7º Com base no perfil dos seus ingressantes, o Projeto Pedagógico do Curso (PPC) deve prever os sistemas de acolhimento e nivelamento, visando à diminuição da retenção e da evasão, ao considerar:
> I - as necessidades de conhecimentos básicos que são pré-requisitos para o ingresso nas atividades do curso de graduação em Engenharia;
> II - a preparação pedagógica e psicopedagógica para o acompanhamento das atividades do curso de graduação em Engenharia; e
> III - a orientação para o ingressante, visando melhorar as suas condições de permanência no ambiente da educação superior.
> (Brasil, 2019)

A legislação também prevê que conteúdos básicos, profissionais e específicos devem estar discriminados em seu Projeto Político Pedagógico e relacionados as competências a serem desenvolvidas; dentre os básicos todos os cursos de Engenharia devem contemplar, dentre outros, Matemática, Informática e Física (Brasil, 2019).

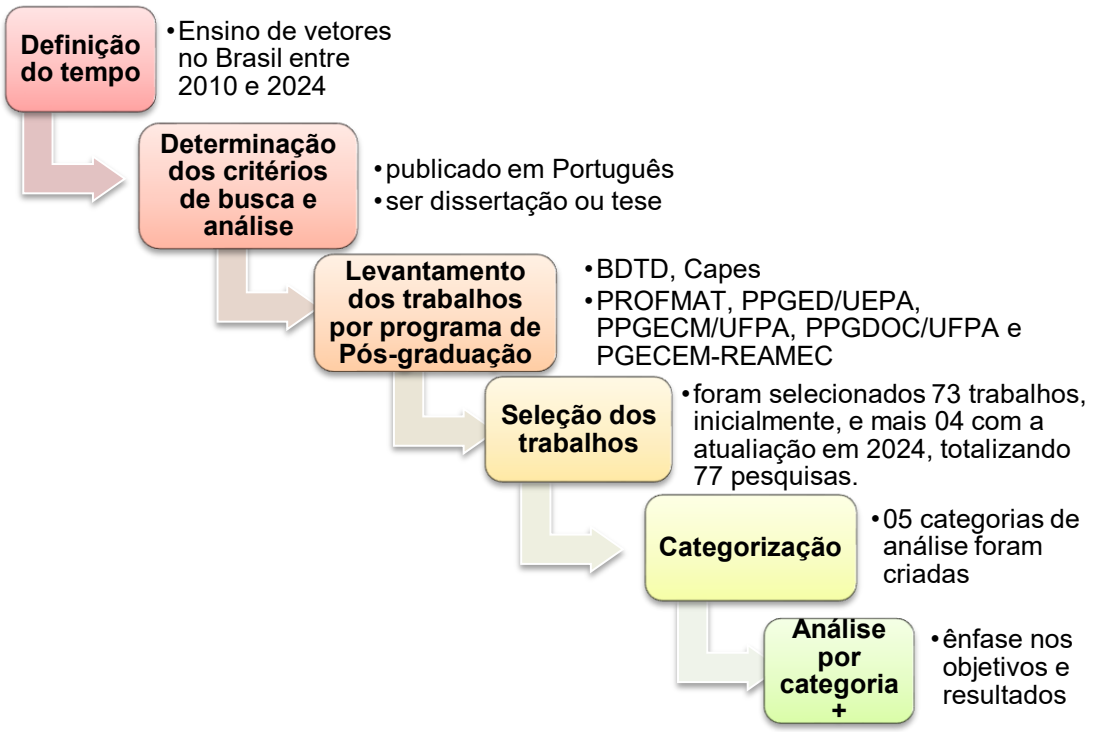
Portanto, os aspectos curriculares mostram que o assunto de Vetores Geométrico não trata, de uma disciplina em sim, mas de um conteúdo que dá suporte a elas e que pode perpassar todos os níveis de ensino, desde o fundamental até o superior, bem como, a pós-graduação.

Nesse sentido, de posse dessas informações, a revisão de estudos descrita a seguir busca ampliar o debate sobre esse conteúdo e analisar de que forma ele vem sendo abordado em todos os níveis de ensino no Brasil, inclusive na área de Engenharia.

3.3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE VETORES

Essa subseção teve por objetivo realizar uma revisão de estudos em teses e dissertações brasileiras, durante o período de 2010 à 2024, que tiveram por objeto de estudo o ensino de vetores. Os procedimentos metodológicos e critérios para a busca foram os definidos em Kasahara e Sá (2022a, 2022b, 2023) e de forma resumida estão disponíveis no Apêndice D. A Figura 9 apresenta um resumo dessas etapas.

Figura 9 – Resumos de cada etapa dos procedimentos metodológicos



Fonte: elaborado a partir de Kasahara e Sá (2022).

Os estudos foram distribuídos nas seguintes categorias e subcategorias:

1) Estudos com proposta de sequência didática: essa categoria é justificada por agrupar e focalizar os trabalhos que, de fato, desenvolveram uma sequência didática, que é um dos objetivos desse trabalho. Duas subcategorias foram criadas: a) Sem resultados de experimentação em sala de aula; b) Com resultados de experimentação em sala de aula; à exceção do trabalho de Pontes (2023), os demais estudos estão publicados em Kasahara e Sá (2023);

2) Estudos com proposta de material teórico: nessa categoria estão os trabalhos de estudo teórico sobre vetores e aqueles que não caracterizaram a sua proposta com uma sequência didática, mas como um material de estudo para o ensino da teoria, seguida de exemplos e exercícios e que não fizeram experimentação em sala de aula. Foram subcategorizados como com proposta de ensino: a) interdisciplinar, b) para matemática e c) para física;

3) Estudos com aplicações de Vetores: essas pesquisas foram assim caracterizadas por apresentarem a utilização de vetores em assuntos que

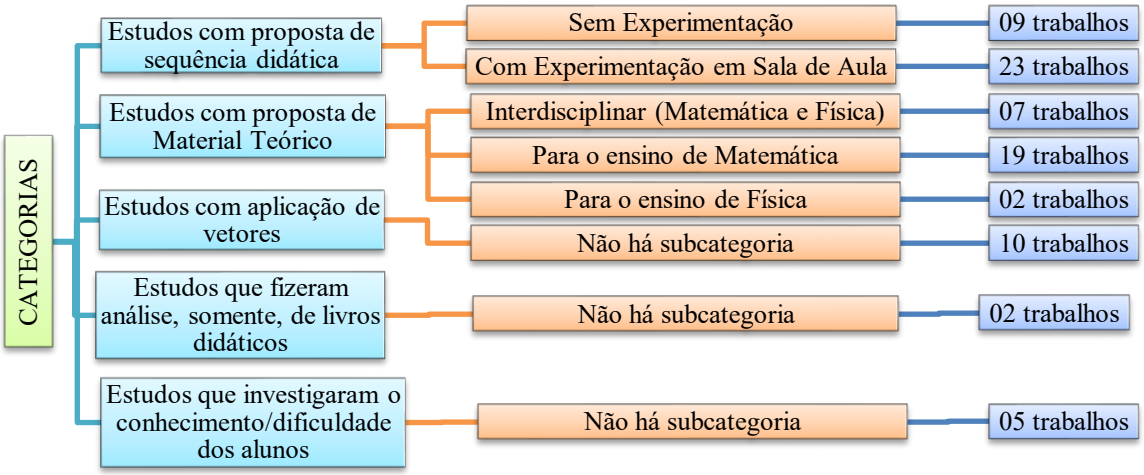
não o utilizam com frequência, em especial na matemática. Não foram criadas subcategorias.

4) Estudos que realizaram, somente, análise de livros didáticos: as análises para essa categoria foram publicadas em Kasahara e Sá (2022a).

5) Estudos que investigaram conhecimento/dificuldades dos alunos: os trabalhos nessa categoria analisaram o conhecimento/dificuldades dos alunos, seja os já existentes ou após a realização de um curso, de aulas de forma tradicional ou da utilização de um software desenvolvido pelo autor.

A Figura 10 apresenta as categorias e subcategorias e as quantidades de trabalhos em cada uma.

Figura 10 - Categorias e subcategorias



Fonte: Elaborado pela autora a partir da busca no BDTD, Capes e programas de Pós-graduação.

Por fim, a etapa da análise foi desenvolvida por categorias e global; as análises, de forma sintética, serão apresentadas a seguir; todas os trabalhos estão catalogados, por categoria, no Apêndice G, com destaque para o seu objetivo, características e resultados.

3.3.1. Estudos com proposta de sequência didática

Para a subcategoria com proposição de SD sem experimentação em sala de aula, foi observada a preocupação de alguns autores em apresentar a metodologia de pesquisa, fundamentação teórica e/ou justificativa para a

pesquisa, a metodologia de ensino proposta, o uso de software e o público-alvo a quem se destinava as atividades.

Das análises para essa subcategoria foi observado que os estudos eram voltados para o Ensino Básico, especialmente, para o Ensino Médio e propuseram o uso do *software* Geogebra como recurso pedagógico. Em relação a metodologia de Ensino, apenas, Lucas (2017) deixou claro o uso da sequência de Fedathi; contudo, Silva (2013) destacou o professor como mediador e a importância da construção lógica e organizada do conhecimento promovido pela sequência proposta.

As duas fases iniciais da Engenharia didática com frequência foram utilizadas nesses tipos de trabalho. Outro destaque é em relação a discussão apontada por todos os autores sobre a importância da inserção dos conteúdos de vetores no Ensino Médio como apoio ao ensino de Geometria Analítica ou Álgebra Linear e, não, apenas, em disciplinas de Física.

Para a outra subcategoria, com experimentação em sala de aula, a busca de Kasahara e Sá (2023) resultou em 21 trabalhos, sendo uma tese; contudo, a atualização da pesquisa em 2024 apontou mais 1 (um) trabalho relacionado a essa categoria, tal como mostra o Quadro 6.

Quadro 6 – Inclusão do Estudo Brasileiro com proposta de sequência didática com experimentação em sala de aula, além dos apresentados em Kasahara e Sá (2023).

AUTOR /ANO	OBJETIVO	RESULTADOS
Pontes (2023)	Descreve a apropriação de um projeto metodológico de ensino, de caráter intervencionista que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática	Concluiu que através da intervenção de ensino realizada, os licenciandos possuem uma perspectiva positiva da abordagem vetorial, e que a utilização dessa abordagem auxiliou na compreensão, aprendizagem e na realização de tarefas ligadas ao Ensino Básico.

Fonte: da autora a partir dos trabalhos analisados.

Em relação a esse trabalho e considerando as análises em Kasahara e Sá (2023), as principais observações são:

- ✓ Para os estudos aplicados à disciplina de Matemática no Ensino Médio: o ensino de vetores, quando proposto para alunos do 3º ano do Ensino Médio como ferramenta para a Geometria Analítica permitiu a resolução de problemas de forma mais ágil, melhorou o aprendizado e entusiasmo.

O uso de softwares facilitou a aprendizagem, com destaque para o *software* Geogebra, sem desconsiderar a resolução de questões no caderno com o uso de folhas quadriculadas, de preferência.

Ainda é preciso aprofundar o estudo sobre vetores em três dimensões, dar ênfase a contextualização e a proposição de abordagens com outras teorias de aprendizagem.

- ✓ Para os estudos aplicados à disciplina de Física no Ensino Médio e Fundamental: para esses estudos, o ensino de vetores melhorou o aprendizado de Física, bem como, o uso de softwares e materiais manipuláveis. Com destaque para o de realidade aumentada que conseguiu reproduzir com maior dinamicidade e veracidade a situação apresentada influenciando no entusiasmo, aprendizado e dedicação dos alunos.
- ✓ Para os estudos aplicados à alunos de licenciatura: o uso de vetores contribuiu para formação de imagens e conceitos para as disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear; o uso de recursos tecnológicos também se mostraram eficazes, além da percepção, de mostrar à futuros docentes novos métodos de ensino e a influência positiva na aprendizagem quando o aluno atuou como sujeito ativo.
- ✓ Para os estudos aplicados ao curso de Engenharia e Arquitetura: como nas demais categorias, o uso, também, de realidade aumentada como facilitadora da aprendizagem, e do conteúdo de vetores foram eficazes. Porém, a ausência de contextualização e erros conceituais de associações foram observados.

Por fim, pode-se destacar para essa categoria que o uso de *softwares* dinâmicos, como o Geogebra para o ensino de Matemática e o uso da realidade aumentada para os cursos de Nível Superior e em disciplinas de Física permitiram melhor visualização e aplicação ao contexto.

Contudo, ainda é perceptível a necessidade da contextualização, do ensino de vetores em 3D e no Ensino Médio como ferramenta facilitadora para as disciplinas de Álgebra, Geometria Analítica, Física, dentre outras. Dessa forma, esse conteúdo, além de permitir a resolução de problemas de forma mais ágil e com melhor entendimento, ainda permitiu a preparação mais efetiva dos

alunos que pretendiam seguir nas áreas de Engenharia, Arquitetura, Física, Matemática e Cursos Correlatos.

3.3.2. Estudos com proposta de material teórico para ensino interdisciplinar, para a disciplinas de Matemática ou para Física

Para a subcategoria de material didático interdisciplinar, pode-se observar a importância do conteúdo de vetores e aplicado à Física, em todos os níveis de ensino, além da carência de trabalhos que propõem essa abordagem. A maioria dos autores apresentaram propostas interdisciplinares que auxiliam o professor a suprir a ausência e mediar esse tipo de estudo e, também, promover, o ensino de forma contextualizada. Ressalta-se a necessidade da experimentação das propostas em sala de aula.

Para os voltados ao ensino de Física e Matemática, constatou-se que a maioria dos trabalhos eram voltados para aplicações no Ensino Médio e, constantemente, os autores justificaram que não era objetivo sanar o assunto, mas de promover uma reflexão aos docentes a partir das abordagens e aplicações mostrando o quão útil é o ensino do conteúdo quando atrelado, em especial, ao da Geometria Analítica.

Os trabalhos também, de forma geral, expuseram a facilidade e agilidade na resolução de problemas por meio de vetores, melhor visualização, entendimento crítico e pensar reflexivo dos alunos, em especial, quando do uso de algum facilitador como o *software* Geogebra.

Outra questão levantada nos trabalhos foi a alteração da base curricular do ensino médio incluindo vetores como elemento para o ensino de alguns assuntos e, não, apenas, como uma orientação; porém, ressaltaram que não se trata da inclusão de uma nova disciplina e, sim, de agregar o conteúdo as já existentes, não deixando a cargo, apenas, das disciplinas de física.

Em relação a estas, os autores disseram que o conteúdo tem de ser visto como uma ferramenta para resolução de questões e que deve ser estudado em matemática e aplicado a problemas físicos.

3.3.3. Estudos com aplicações de Vetores

Os trabalhos dessa categoria trouxeram importandes aplicações de vetores que podem ser utilizadas em sala de aula a depender do contexto e necessidade dos professores; à exceção dos trabalhos de Lis (2018), Teles (2018) e Silveira (2018), todos os demais foram idealizados tendo por público-alvo o Ensino Médio.

O destaque foi para o uso de software para facilitar a visualização dos objetos, sugerido em poucos trabalhos. No mais, é importante a continuidade dos trabalhos com a aplicação em sala de aula, conforme evidenciado pela maioria dos autores.

3.3.4. Estudos que realizaram, apenas, análise de livros didáticos

Os resultados em Kasahara e Sá (2022) ressaltaram que os trabalhos trouxeram à tona os mesmos equívocos em relação aos livros didáticos, tanto os do ensino Médio quanto os do Superior, em especial, os relativos as notações e conversão de representações vetoriais.

Além disso, os livros do Ensino Médio têm problemas de discussão, representação e notação, assim como os de Matemática do Ensino Superior além do uso, somente, da abordagem cartesiana; entretanto, as biografias técnico-científicas adotam a geométrica e trigonométrica, dificultando, segundo os autores, a correlação entre as formas de representação e que, de acordo com os estudos, pode ser um dos motivos de dificuldades de aprendizagem dos alunos.

3.3.5. Estudos que investigam o conhecimento/dificuldades dos alunos

Após a análise das pesquisas dessa categoria, foi possível verificar uma particularidade: todas tiveram por público-alvo estudantes do nível superior da área de Engenharia, Matemática e afins. Dessa forma, é visível a necessidade de um sólido conhecimento vetorial para alunos que desejam seguir carreira nessas áreas.

De certa forma, os mesmo conhecimentos e dificuldades são relatados pelos autores, tais como: dificuldades operacionais, conceituais e de representação algébrica e geométrica e a ausência de embasamento matemático em assuntos vistos no EM.

Contudo, destacaram que a ausência ou a não obrigatoriedade do ensino de vetores no Ensino Médio podem ser os motivos que acarretam essas dificuldades latentes para cursar o nível superior, no qual, com frequência, esse conteúdo é exigido por facilitar o entendimento e a resolução de problemas.

3.3.6. Quadro-síntese dos trabalhos por categoria

O Quadro 7 destaca as principais característica para cada categoria.

Quadro 7 – Síntese das principais características dos trabalhos analisados por categoria

CATEGORIA	RESUMO
Estudos com proposta de sequência didática	Preconizaram o uso do *software* Geogebra para o Ensino Médio e Fundamental como recurso pedagógico. Para os com experimentação, especialmente, além da proposição do uso de *software* destacaram o de realidade aumentada para visualização do espaço e de aplicações físicas; contudo, a ausência de contextualização nos materiais didáticos foi relatada, erros advindos de associações incorretas, conceitos vagos e representação de vetores também foram destacados. No mais, outro destaque é para o uso de vetores para facilitar a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra linear. De forma crítica, observou-se a falta de contextualização nas experimentações.
Estudos que Investigaram o conhecimento/ dificuldade dos alunos	Foram relatadas dificuldades em resolução de problemas, de diferenciar algumas características, como ponto e coordenadas, problemas com operações gráficas, noção de espaço vetorial, de conversão de registros etc. Entretanto, os *softwares* mostraram-se como aliados ao processo de ensino aprendizagem; para o ensino superior, foi destacada a quase inexistente associação entre os conceitos vistos no ensino médio para o ensino de vetores.
Estudos com aplicações de vetores	Esses estudos propuseram o uso de vetores como facilitador para resolver problemas, em especial, no Ensino Médio, de reta e circunferência, sistemas lineares, operações com vetores, determinantes, transformações no plano, dentre outras coisas. Em termos didáticos, fornece ao docente aplicações que podem ser trabalhadas em sala de aula.
Estudos com proposta de material didático	Esses estudos permitiram a visualização do ensino de vetores a partir da interdisciplinaridade e propostas de abordagens na matemática, cujos autores consideraram escassa a pedagogia sobre vetores no Ensino Regular. Portanto, essa categoria apresentou materiais que podem vir a ser excelentes materiais de consulta.
Estudos análise de livros didáticos	Esses estudos, apresentaram, alguns problemas nos livros didáticos do PNLD de física e em livros para o nível superior. Observaram carências na discussão vetorial tratada de forma superficial e desvinculação das aplicações, além disso, o uso de diferentes notações, simbologias, representações e ausência do conteúdo em livros de matemática para o ensino superior, estando presente nos livros técnicos.

Fonte: elaborado a partir da pesquisa.

Portanto, a partir da análise dos trabalhos que abordaram o ensino de vetores geométricos foi possível ter parâmetros dos principais aspectos que necessitavam de um olhar mais cuidadoso em relação ao ensino de vetores e que deviam ser levados em consideração, especialmente, no planejamento da aula.

Dentre esses aspectos destacaram-se: a ênfase em aplicações e na contextualização; o foco na ideia, conceito e representações de vetor; a concordância entre diferentes notações e simbologias; o uso de *software*, se possível, como facilitador da aprendizagem e a utilização de metodologias de ensino que estimulem o aluno e facilitem a construção do conhecimento vetorial.

Além disso, o estudo dos trabalhos permitiu uma visualização e confirmação da ausência do ensino de vetores, em especial, em disciplinas de matemática, e o aprendizado pouco efetivo baseado no “no que interessa saber” para resolver questões físicas deixando lacunas que dificultam o aprendizado de conteúdo subsequentes, bem como, são agravados quando o aluno ingressa no Ensino Superior.

Assim, para diagnosticar de que forma o ensino de vetores vêm sendo realizado no IFPA, lócus dessa pesquisa, a subseção a seguir apresentar os resultados de uma consulta aos docentes e discentes dessa instituição.

3.4. CONSULTA A DOCENTES E DISCENTES

As consultas foram desenvolvidas por meio de etapas que estão descritas e destacadas no Quadro 8 de acordo com o público-alvo (docentes e discentes).

Quadro 8– Metodologia para consulta aos docentes e discentes

ETAPAS	**PÚBLICO-ALVO**	
	DOCENTE	**DISCENTE**
1. Determinação do Lócus	IFPA	Campus Belém – IFPA
2. Determinação da amostra	a) ser docente do IFPA; b) ser docente de disciplinas de Matemática, Física e Específicas em Curso da área de Tecnologia, Engenharia e afins; c) aceitar o TCLE.	a) ter sido aluno do curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações do IFPA; b) ter concluído o curso ou estar em fase de conclusão; se estiver em fase de conclusão, já deve ter feito as disciplinas relativas ao estudo de vetores ou de Cálculo Vetorial no referido curso; c) aceitar o TCLE

3. Construção do instrumento de Pesquisa	i) dados pessoais e escolares; ii) ensino de vetores por modalidade de ensino; iii) ensino, aprendizagem e avaliação de vetores; iv) verificação de grau de dificuldade de conteúdos de vetores e resolução de questões.	i) informações pessoais e escolares; ii) informações de ensino e aprendizagem do conteúdo de vetores; iii) averiguação do desempenho dos estudantes em questões propostas envolvendo o conteúdo de vetores. Devido ao método de coleta, a análise desse item não foi realizada de forma criteriosa, pois os alunos não enviaram as resoluções das questões, apesar da solicitação, alegando esquecimento ou falta de tempo. Assim, já prevendo, de certa forma, esse problema foi utilizada a seguinte estratégia para nos possibilitar o mínimo de análise: em cada questão o aluno teve que responder se conseguia resolvê-la e, em caso afirmativo, colocava o resultado obtido; sempre o alertando da importância do envio da memória de cálculo.
4. Obtenção de Consentimentos	TCLE, conforme modelo no Apêndice A	TCLE, conforme modelo no Apêndice B
5. Aplicação do Instrumento	Via WhatsApp e E-mail por meio do *link* do *Google Forms,* devido ao estado de Pandemia à época. O instrumento de pesquisa para os docentes consta no Apêndice E e para os discentes, no Apêndice F.	
6. Análise dos resultados	Uso de técnicas quanti e qualitativas; Percentual; Teste Exato de Fischer e V-Cramer (as tabelas de contingência dos resultados das associações encontradas constam no Apêndice H para os docentes e no Apêndice I para os discentes).	
Total de consultados	**45 docentes**	**30 discentes**

Fonte: elaborado a partir das etapas da metodologia da consulta aos docentes e discentes

Vale destacar que para a determinação do lócus levou-se em consideração o local onde será realizada a etapa experimental dessa pesquisa, qual seja, o IFPA e, também, por ser o meu local de trabalho. A pesquisa docente teve por abrangência todos os campi; enquanto a discente, foi aplicada aos discentes do meu principal curso de atuação à época no IFPA - Campus Belém, qual seja, o curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações.

Os tópicos subsequentes apresentam a análise dos resultados, de forma independente, de acordo com o público-alvo.

3.4.1. Consulta a docentes

Os resultados dessa consulta serão apresentados, de forma sequencial, da seguinte forma: sobre o Perfil dos docentes entrevistados, sobre o ensino de vetores no IFPA por modalidade de ensino e sobre o Ensino, aprendizagem e Avaliação do conteúdo de vetores no IFPA. Por fim, é apresentada uma síntese dos resultados.

Sobre o perfil dos docentes consultados: do total, 27 (60%) já ensinaram o conteúdo de Vetores no IFPA; 36 (80%) eram do sexo masculino e 9 (20%), do sexo feminino. Para essa amostra, 23 (64%) docentes do sexo masculino já haviam ministrado o conteúdo de vetores no IFPA e, 4 (44,5%) do sexo feminino.

A maioria dos docentes pertencia a faixa etária entre 31 e 40 anos. Em relação a formação de Nível Superior, 23 (51%) eram licenciados em Matemática, 14 (31%) em Física; e 8 (18%), bacharéis em cursos de Engenharia. Foi confirmada uma associação estatisticamente significativa entre as variáveis Formação Acadêmica e Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA.

Portanto, pode-se afirmar que no IFPA grande parte dos docentes que ministraram o conteúdo de Vetores possuíam formação em Licenciatura em Física, seguido dos profissionais formados em outras áreas, como em Engenharia. Em contrapartida, os que possuíam formação na área de Matemática representaram a maioria dos que nunca ministraram o conteúdo de vetores no IFPA.

Esse resultado refletiu o exposto nos trabalhos de Veloso (2015), Lucas (2017), Folador (2018) e Piazza (2020) cujas pesquisas são motivadas pelo fato do Conteúdo de Vetores não estar inserido no currículo básico do Ensino Médio e ser ministrado, na maioria das vezes, apenas, em disciplinas de Física; também sinalizou que alguns professores de Matemática não estavam, de certa forma, seguindo as Orientações Curriculares do Ensino Médio em relação ao Ensino de Vetores (Brasil, 2006).

Do total de consultados, 38 (84,5%), concluíram o curso Superior em Instituição Pública e 25 (55,5%) concluíram a sua formação da Graduação entre os anos de 2000 e 2010. Destes, apenas, um docente não possuía nenhum tipo de Pós-Graduação; o que pode ser explicado pelo fato de que para ser professor efetivo do IFPA é pré-requisito mínimo ter algum tipo de pós-graduação, porém para ocupar o cargo de professor substituto nem sempre essa exigência é necessária, que deve ser o caso desse docente.

Dos 27 que já ministraram vetores no IFPA, 12 (44,5%) possuíam Especialização e Mestrado, 5 (18,5%) Mestrado e Doutorado e, em igual percentual, Especialização, Mestrado e Doutorado, 3 (11%) somente Mestrado e 2 (7,5%), apenas, Especialização. A maioria dos entrevistados, tinha tempo de

serviço no IFPA entre 6 e 25 anos. Coincidentemente, era nessa faixa que estavam a maioria dos que já lecionaram vetores no IFPA.

Cooper (1982) e Cardoso (2017) apontaram uma relação entre o tempo de serviço e a realização de experimentações ou mudanças na forma de ensinar em profissionais que possuíam entre 7 e 25 anos de carreira, pois “Durante esta fase, o professor busca novos estímulos, novas ideias, novos compromissos” (Cooper, 1982, p. 81).

Estatisticamente, foi observada associação significativa entre as variáveis Faixa Etária e Tempo de Serviço ao considerar, apenas, os docentes que disseram ter lecionado vetores no IFPA. Os resultados indicaram que os entrevistados que pertenciam a faixa etária entre 41-45 anos e possuíam tempo de serviço, especificamente, entre 11-15 anos foram os que mais ministraram vetores no IFPA.

De acordo com Cardoso (2017) os professores que têm entre 7-25 anos de tempo de serviço estavam na segunda fase do ciclo profissional docente, caracterizada pela diversificação e quebra da rigidez pedagógica e pelo questionamento quanto à carreira e à profissão.

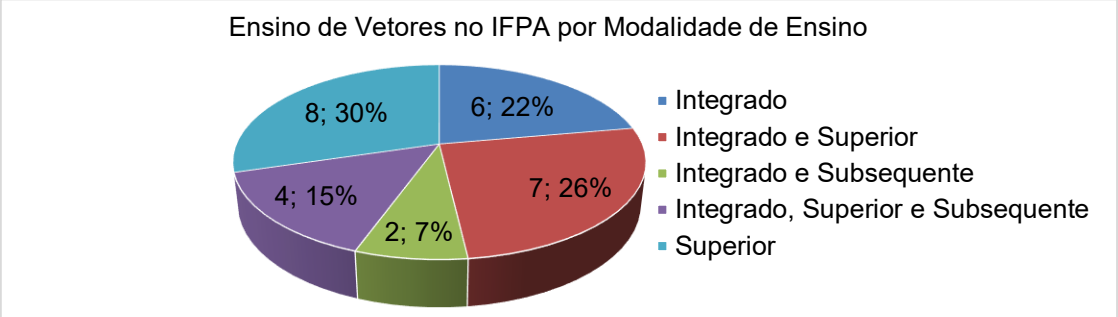
Também foi verificada uma associação significativa entre as variáveis Ano de Conclusão da Graduação e Tempo de Serviço no IFPA dos docentes que já lecionaram vetores no IFPA; dessa forma, pode-se afirmar que os docentes que já ministraram o conteúdo de vetores no IFPA e que tinham tempo de serviço no IFPA entre 11-15 anos eram aqueles que concluíram a sua graduação entre os anos de 2000 - 2010.

Em relação ao Campus de Lotação, o Campus Belém teve o maior número de representantes o que pode ser justificado devido a sua extensão e a concentração de muitos docentes. O teste estatístico de Fischer indicou que havia associação entre as variáveis Campus de Lotação e o Ensino de Vetores.

Portanto, pode-se constatar que o Campus Belém possuía a maioria dos docentes que ministraram o conteúdo de vetores em suas disciplinas. Sobre o Ensino de Vetores no IFPA por modalidade de Ensino é importante destacar que, na instituição, a carreira docente é de Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, dessa forma, qualquer professor, desde que atenda aos requisitos de formação acadêmica, pode ministrar aula em qualquer nível de ensino.

O Gráfico 1 mostra em qual(is) modalidades de ensino os participantes da pesquisa já ministraram o conteúdo de vetores.

Gráfico 1– Níveis de ensino que os participantes da pesquisa ministraram o conteúdo de vetores



Fonte: pesquisa de campo (2021).

A partir da simples categorização das respostas pôde-se perceber que grande parte dos docentes lecionaram o conteúdo de vetores no ensino Integrado e Superior. Algumas importantes observações puderam ser feitas a partir desse resultado: 1) Alguns professores estavam seguindo as orientações curriculares para o Ensino Médio em relação ao ensino de Vetores; e 2) Havia uma coerência entre a prática de sala de aula dos docentes em todos os níveis de Ensino ao considerar a importância do conteúdo de vetores, apesar da ausência desse como parte da ementa.

A relação entre as variáveis Ensino de Vetores por Modalidade de Ensino e Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA foi confirmada estatisticamente. Esse resultado revelou que, na maioria das vezes, o conteúdo de vetores era visto, com maior frequência, no Ensino Superior. Por outro lado, também, ratificou uma das observações (2) feita anteriormente, ou seja, pôde-se verificar uma característica da prática de sala de aula dos docentes: o quão era importante o conteúdo de vetores, pois estava presente em todos os níveis de ensino.

Sobre quais disciplinas os docentes já haviam ensinado o conteúdo de Vetores, de acordo com a modalidade de ensino afirmaram que: no Integrado, 10 disseram em Física, 5 em Específicas e 4 em Matemática; no Subsequente, 5 nas específicas e 1 em Matemática; e, no superior, com igual frequência, 7, em disciplinas de Física e Matemática e 5 nas específicas.

Novamente, os dados ratificaram o que foi visto anteriormente em relação ao Integrado, os licenciados em Física são os que ministraram vetores com mais frequência; e, acrescentou uma informação necessária à observação (1) feita

anteriormente, sinalizando, mais uma vez, para o não seguimento pelos docentes de disciplinas de Matemática da orientação curricular do Ensino Médio.

Para o Subsequente, o resultado pode ser justificado, pois a grade curricular dos cursos é composta, em sua maioria, por disciplinas do núcleo específico; as disciplinas citadas foram: Física, Eletrônica e Eletricidade. No Superior, a própria ementa das disciplinas já previa o ensino de Vetores, em especial, nos cursos das áreas de Tecnologia, Engenharia e Licenciatura em Matemática e Física.

Outro questionamento feito aos docentes foi em relação ao Abandono e Reprovação nas disciplinas em que lecionaram o conteúdo de vetores. Vale ressaltar que o termo abandono foi considerado em sentido restrito, apenas, em relação ao conteúdo em questão; não foi o caso de avaliar evasão escolar ou algo nesse sentido que, com certeza, envolveriam outros aspectos que fogem ao escopo e objetivo desse trabalho.

Assim, de acordo com os resultados da pesquisa, para essa amostra, os índices de Reprovação/Abandono nas disciplinas em que são ministrados os conteúdos de vetores eram baixos; entretanto, de forma alguma, podemos afirmar que isso se deve exclusivamente ou que tenha alguma relação com o ensino de vetores, pois cada disciplina possui o seu grau de dificuldade e outros fatores devem ser analisados como as condições sociais do aluno, motivação, estudos diários, dificuldades de aprendizagem dentre outros coisas.

Também foi perguntado aos docentes se consideravam a Carga Horária (CH) das disciplinas adequadas para ensinar vetores; a questão foi feita para cada nível de ensino de forma independente. A maioria dos professores considerou a CH disponível adequada para o ensino de Vetores, porém com algumas ressalvas conforme observou-se em alguns justificativas dos professores.

De forma geral, as justificativas indicaram que a CH se tornava inadequada, no Superior e no Subsequente, quando o aluno por problemas advindos de outro nível de Ensino tinha dificuldades de aprender o assunto; para outros, a CH era insuficiente por não permitir a prática de exercícios. Os que disseram que a CH erq adequada assim a consideraram, pois alegaram que apenas uma parte do conteúdo de vetores é ministrada com o objetivo de sanar dificuldades de aprendizagem em outros assuntos, principalmente, no Integrado.

Sobre ensino, aprendizagem e avaliação do conteúdo de Vetores no IFPA, inicialmente, foi perguntado aos docentes se eles tinham feito alguma disciplina pedagógica para o ENSINO de Vetores durante a formação de nível superior, todos os docentes disseram NÃO, porém alguns disseram ter feito disciplinas gerais sobre metodologia e didática e outros argumentaram que em cursos de bacharelado não havia disciplinas com formação pedagógica.

Contudo, todos os docentes disseram ter tido disciplinas durante a formação de nível Superior que ensinaram o conteúdo de vetores, sendo que: 14 (52%) disseram que estudaram em disciplinas de Matemática e Física; 8 (30%), somente, em Matemática; 2 (7%), apenas, em Física; e 3 (11%) em matérias Específicas.

Sobre como as aulas iniciavam quando os docentes estudaram vetores, 25 (93%) disseram que a aula iniciava “pela definição seguida de exemplos e exercícios”; os demais, 2 (7%), responderam “Com uma situação problema depois de introduzir o assunto”.

Nesse sentido, pôde-se observar que a principal metodologia de ensino citada era a abordagem que preconizava o ensino da teoria seguida de exemplos e exercícios; poucos professores citaram a utilização de situações problemas após a introdução do assunto.

Sobre o modo como os docentes iniciavam a aula sobre vetores, a pesquisa mostrou que a maioria ainda reproduzia o modo de ensinar da forma como aprenderem, apesar de que, alguns acrescentaram algum outro tipo de metodologia como a proposição de uma situação problema pós introdução do assunto, análise de modelos e, até mesmo, a história do assunto, como pode ser observado no Quadro 9.

Quadro 9 – Como os docentes entrevistados iniciam a aula sobre vetores

COMO OS DOCENTES INICIAM A AULA SOBRE VETORES	TOTAL
Pela definição seguida de exemplos e exercícios	8 (32%)
Com uma situação problema depois de introduzir o assunto	6 (24%)
Pela definição seguida de exemplos e exercícios, com uma situação problema depois de introduzir o assunto	3 (12%)
Com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	2 (8%)
Outro	2 (8%)
Com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo, com a história do assunto	1 (4%)
Com uma situação problema depois de introduzir o assunto, como um experimento para chegar ao conceito	1 (4%)

Com uma situação problema depois de introduzir o assunto, como um experimento para chegar ao conceito, com a história do assunto	1 (4%)
Como um experimento para chegar ao conceito	1 (4%)
Pela definição seguida de exemplos e exercícios, com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	1 (4%)
Pela definição seguida de exemplos e exercícios, com uma situação problema depois de introduzir o assunto, com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	1 (4%)
Total	**27 (100%)**

Fonte: pesquisa de campo (2021).

Sobre a metodologia de ensino da maioria dos docentes, Tardif (2012, p.553-554) diz que "a maioria dos professores reproduzem em suas práticas pedagógicas as mesmas práticas que foram usadas por seus predecessores há mais de um século [...]" e vão testando novos métodos de ensinar ao longo da trajetória docente, a chamada epistemologia espontânea.

Entretanto, práticas de didática rotineiras e repetitivas, sem relação com o cotidiano e aplicação práticas levam a desmotivação e desinteresse dos alunos e fazem com que o processo de ensino aprendizagem se torne apenas um "ensinar por ensinar" e "aprender por aprender"; vale observar que “práticas antigas” de ensino não devem ser eliminadas, porém devem ser aprimoradas e adaptadas ao mundo de hoje envolto por tecnologias e acessos a grande quantidade de informações (D'AMORE, 2007).

Em relação a satisfação com a metodologia utilizada para o ensino de vetores, 18 (67%), disseram estar satisfeitos; 6 (22%), NÃO estão satisfeitos; e 3 (11%), parcialmente. Algumas observações foram: *“Sim. Ainda que seja uma metodologia tradicional minhas turmas apresentaram um bom entendimento sobre o assunto durante a disciplina. Contudo, não tive a oportunidade de avaliar o quanto dos conceitos continuaram no conhecimento dos alunos após o término da disciplina”*, *“Não, pois não disponho do material que necessito para o ideal que gostaria de trabalhar”*, *“Parcialmente, pois sempre há a possibilidade de aperfeiçoamento de nossa metodologia de ensino.”*.

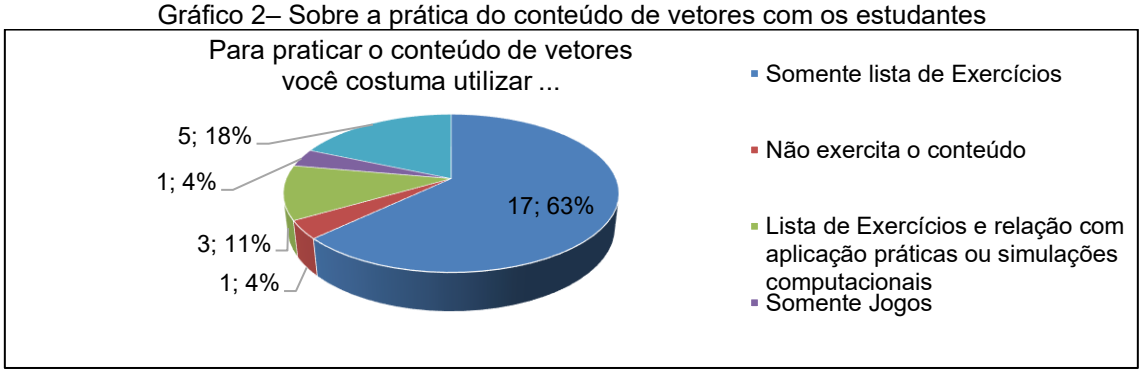
Também foi questionado aos docentes se mudanças na forma de ensinar podiam melhorar o processo de ensino e aprendizagem, 23 (85%) docentes acreditaram que SIM; 1 (4%), disse NÃO e NÃO SABE, respectivamente; e, 2 (7%) disseram que DEPENDE. Estes últimos, justificaram alegando que dependia da turma e do interesse do aluno. É interessante notar que, apesar do alto índice de satisfação com a metodologia, alguns docentes estavam dispostos

a aperfeiçoá-la utilizada, além de destacar a importância da adequação desta de acordo com a turma e a utilização de contextualização e simulações computacionais.

Esse resultado, também, refletiu a fase profissional dos docentes que ministraram vetores que, em sua maioria, de acordo com a classificação de Cardoso (2017), discutida anteriormente, estavam na fase da Serenidade, onde mudanças são possíveis e benvindas para melhorar a qualidade profissional.

Sobre a prática do conteúdo de vetores com os estudantes, Gráfico 2, a maioria dos docentes apresentava somente lista de exercícios a serem resolvidos, seja do seu próprio banco de questões, do livro didático, de processos seletivos ou solicitavam aos alunos para que procurassem questões sobre o assunto, alguns, apresentavam além da lista de exercícios jogos ou aplicações práticas e computacionais, ou somente jogos e ainda havia aqueles que não realizavam nenhum tipo de atividade para a prática por considerar o assunto apenas um suporte para o conteúdo a ser ensinado, posteriormente.

Gráfico 2– Sobre a prática do conteúdo de vetores com os estudantes



Fonte: pesquisa de campo (2021).

Ao serem questionados sobre a utilização de questões contextualizadas para ensinar vetores, 24 (89%) dos docentes disseram utilizar e 3 (11%) que não as utilizavam; apesar da predominância da abordagem de ensino já relatada alguns destes, disseram que usavam, apenas, nos exercícios, e outros para ensinar grandezas vetoriais; porém, sempre ressaltaram a importância da utilização de situações cotidianos ou relacionadas ao curso para o ensino.

Um dos docentes que não utilizava exemplos contextualizado disse que *"Em geral, dedico-me a apresentação das demonstrações. Quanto as aplicações, solicito aos discentes apresentação de aplicações"*, os demais não justificaram. Vale lembrar que as orientações curriculares para o Ensino Médio

apresentam a contextualização como um princípio pedagógico e diz que a sua utilização dá significado aos conhecimentos a partir das situações utilizadas indo além de uma simples ilustração do enunciado.

Em relação a classificação do nível de aprendizado dos alunos, 10 (37%) consideraram “Ótimo”; 8 (29,5%), em igual percentual, “Satisfatório” e “Regular”, e 1 (4%) “Insatisfatório”. Em relação ao nível de interesse dos alunos no assunto vetores, 17 (63%) os classificaram como “Interessado”, 7 (26%) “Pouco Interessado”, 2 (7%) “Muito Interessado” e 1 (4%) “Sem Interesse”.

Sobre o interesse, motivação e o processo de ensino aprendizagem dos alunos sobre vetores foi solicitado aos docentes alguns comentários e por meio de cruzamento relacionamos à classificação do nível de Interesse dos alunos no assunto. Os comentários dos que classificaram como “Muito Interessado” ressaltaram a importância da motivação e da relação teoria e prática e aplicação no cotidiano que o conteúdo de vetores permitia a depender do curso.

Os que classificaram como “Interessado”, destacaram que o interesse em aprender deve ser primordial independente da disciplina e o fato do conteúdo de vetores ser muito abstrato o que gera desmotivação nos alunos. Um único docente classificou como “Sem Interesse” e disse que “é um assunto sem relevância pra vida cotidiana dos alunos”.

Através dos comentários, pôde-se perceber que o fator motivacional está relacionado ao curso, utilização de aplicações em situações cotidianas, complexidade do assunto, dentre outros, ou seja, com a metodologia.

Um fator preocupante é a resposta de um dos docentes que disse não conseguir relacionar ou acredita que o conteúdo ensinado não é pertinente para a vida do aluno; logicamente, espera-se, nesse caso, o pouco interesse do aluno e nos levou ao seguinte questionamento: não seria esse um dos saberes fundamentais da atuação docente, saber relacionar a vida cotidiana, atrelar teoria à prática?

Estatisticamente, foi observada associação significativa entre variáveis “Nível de Interesse” e “Satisfação com o Nível de Aprendizado” dos discentes em relação ao conteúdo de vetores. Assim, quanto maior o nível de interesse melhor a satisfação com a aprendizagem; contudo, não podemos negar que a utilização da metodologia adequada, formas de praticar o conteúdo, avaliação e diversos outros fatores devem ser considerados.

Também, houve uma associação significativa entre as variáveis “Utilização de exemplos contextualizados” e “Satisfação com Nível de Aprendizado” em relação ao conteúdo de vetores. Pode-se afirmar, então, que a utilização de exemplos contextualizados para o ensino de Vetores promoveu níveis de satisfação com o aprendizado dos discentes “Ótimo” e “Satisfatório” em maior percentual em relação aos níveis “Insatisfatório” e “Regular”. Por outro lado, a não utilização de exemplos contextualizados, elevou os níveis de “Insatisfatório” e reduziu o de “Ótimo”.

Apesar de não haver associação estatisticamente significativa entre as variáveis “Como os docentes costumam praticar o conteúdo de vetores” e o “Nível de satisfação com o aprendizado dos discentes”, pode-se afirmar que, para essa amostra, o nível de satisfação com o aprendizado estava relacionado ao tipo de atividade ou à mera utilização de atividades para exercitar o conteúdo, o fato de não exercitar o conteúdo revelou uma insatisfação com o nível de aprendizado.

Por outro lado, o uso de atividades para exercitar o conteúdo, como listas de exercícios, jogos e atividades práticas garantiram um maior nível de satisfação com o aprendizado. Portanto, é necessário a reflexão docente de sua própria prática pedagógica, pois melhoramentos podem garantir elevados índices de satisfação com o aprendizado; bem como, o exercício pedagógico de praticar o assunto ministrado garante a fixação do conteúdo, questionamentos e revisão dos conteúdos.

Sobre quais recursos os docentes utilizavam para preparar aulas sobre vetores, os resultados apontaram a utilização, especialmente, do livro didático, de notas de aula e de apostila; é importante destacar a utilização de mais de uma fonte para o preparo do material didático o que demonstrou o comprometimento com o aprendizado dos alunos e com o aprimoramento do seu saber docente.

Em relação a indicação de material didático aos alunos 18 (67%), dentre o que já lecionaram o conteúdo de vetores no IFPA, costumavam indicar livro didático; os demais, 9 (33%), não o indicaram aos alunos. A não indicação do livro didático pode ser reflexo, dentre outras coisas, da ausência do livro didático na instituição, da linguagem inapropriada dos livros e do desejo de utilização do material preparado especialmente para a disciplina.

Algumas justificativas para a não indicação foram: *“Não. Sempre utilizo material próprio. A maioria dos livros são muito técnicos, e não trazem muito da relação do assunto vetores com a realidade dos alunos”, “Sempre uso meus próprios materiais que organizo para a aula”, “Não. Gosto de pesquisar em vários livros*”.

Para realizar a avaliação do assunto de vetores, 19 (70%), utilizavam prova individual acompanhado de outros tipos de atividades como trabalhos em grupo, modelagem matemática, organização de questões contextualizadas e prova escrita em grupo; 6 (22%) docentes utilizavam somente o método de prova escrita individual; e os demais, 2 (8%), usavam outras formas de avaliação em detrimento da prova individual.

Alguns autores disseram que para a avaliação da aprendizagem é preciso muito mais do que uma prova ou a mera atribuição de notas e conceitos. Contudo, a avaliação deve ser contínua e vista como um processo que avalia, também, o docente e suas práticas pedagógicas; de acordo com Libâneo (2013, p. 216) “a avaliação é uma tarefa complexa que não se resume à realização de provas e atribuição de notas”.

Ao perguntar de onde os docentes costumavam retirar as questões quando realizavam a avaliação por meio de provas/testes, a maioria disse retirar “das notas de aula”, “das questões resolvidas em sala de aula”, “do livro didático adotado/indicado” e “dos exercícios propostos”; apenas 01 (4%) docente assinalou a resposta “Sempre faço adaptações de questões ou crio algumas”.

Em relação as informações sobre “Para preparar suas aulas sobre vetores, em qual material você costuma se basear” e “Quando você aplica as avaliações por meio de provas/testes, de onde você costuma retirar as questões”; os docentes utilizaram, de forma geral, o mesmo tipo de material para preparar as aulas e para retirar e/ou elaborar as questões para as avaliações do tipo provas/testes, além de outras fontes como de questões resolvidas em sala.

Observou-se que as avaliações do tipo prova/teste eram preparadas a partir de meios diversos; porém, especialmente, para os docentes que só realizavam prova escrita individual, as questões eram retiradas dos materiais que estavam à disposição ou que foram indicados aos discentes, inclusive, de questões resolvidas em sala.

Contudo, os docentes que realizavam mais de um tipo de avaliação utilizavam outros materiais além dos disponibilizados/indicados aos discentes. A utilização de formas de avaliação combinadas permite a exploração dos conhecimentos adquiridos e da metodologia utilizada. É importante de fato tornar a avaliação diagnóstica e não um mero processo classificatório.

Em relação aos conteúdos de vetores ministrados, foi solicitado aos docentes que os classificassem de acordo com o grau de dificuldade em relação a compreensão pelos alunos, de acordo com a sua experiência de sala de aula; o Quadro 10 apresenta os resultados; o sombreamento em amarelo indica os conteúdos que eram ministrados por todos os docentes; os em verde a tendência de Fácil à Muito Fácil e os em vermelho de Difícil a Muito Difícil.

Quadro 10– Classificação do grau de dificuldade de compreensão pelos alunos de acordo com o conteúdo segundo os docentes

CONTEÚDO	**VOCÊ JÁ LECIONOU?**		**GRAU DE DIFICULDADE DE COMPREENSÃO PELOS ALUNOS[10]**			
	SIM	**NÃO**	**MF**	**F**	**D**	**MD**
Ideia de vetor	100% 27	0% 0	30% 8	59% 16	11% 3	0% 0
Conceito de vetor	100% 27	0% 0	30% 8	56% 15	15% 4	0% 0
Vetor no plano	100% 27	0% 0	11% 3	67% 18	19% 5	4% 1
Vetor no espaço	85% 23	15% 4	4% 1	26% 6	61% 14	9% 2
Componentes de um vetor no Plano	96% 26	4% 1	7% 2	50% 13	38% 10	4% 1
Componentes de um vetor no Espaço	85% 23	15% 4	7% 2	26% 6	48% 11	17% 4
Módulo de um vetor no plano	100% 27	0% 0	11% 3	48% 13	37% 10	4% 1
Módulo de um vetor no espaço	85% 23	15% 4	11% 3	30% 7	43% 10	13% 3
Direção de um vetor no plano	96% 26	4% 1	11% 3	50% 13	38% 10	0% 0
Direção de um vetor no espaço	85% 23	15% 4	11% 3	30% 7	43% 10	13% 3
Sentido de um vetor no plano	96% 26	4% 1	11% 3	50% 13	35% 9	4% 1
Sentido de um vetor no espaço	81% 22	19% 5	11% 3	32% 7	36% 8	18% 4
Adição geométrica de vetores no plano	100% 27	0% 0	11% 3	52% 14	30% 8	7% 2
Adição geométrica de vetores no espaço	85% 23	15% 4	4% 1	43% 10	26% 6	26% 6
Adição algébrica de vetores no plano	96% 26	4% 1	7% 2	46% 12	35% 9	12% 3

[10] MF – Muito Fácil, F- Fácil, D- Difícil, MF – Muito Difícil

Adição algébrica de vetores no espaço	85% 23	15% 4	7% 2	43% 10	35% 8	13% 3
Vetor nulo	93% 25	7% 2	22% 6	44% 11	32% 8	0% 0
Vetor oposto	96% 26	4% 1	22% 6	50% 13	27% 7	0% 0
Desigualdade triangular	78% 21	22% 6	7% 2	19% 4	57% 12	14% 3
Subtração geométrica de vetores no plano bidimensional	93% 25	7% 2	15% 4	32% 8	52% 13	0% 0
Subtração geométrica de vetores no espaço tridimensional	81% 22	19% 5	11% 3	18% 4	59% 13	9% 2
Subtração algébrica de vetores no plano	89% 24	11% 3	11% 3	50% 12	33% 8	4% 1
Subtração algébrica de vetores no espaço	81% 22	19% 5	11% 3	32% 7	45% 10	9% 2
Propriedade comutativa da adição de vetores	93% 25	7% 2	15% 4	36% 9	36% 9	12% 3
Propriedade associativa da adição de vetores	85% 23	15% 4	15% 4	35% 8	35% 8	13% 3
Multiplicação de um vetor por um escalar	93% 25	7% 2	22% 6	52% 13	16% 4	8% 2
Propriedades do módulo de um vetor	93% 25	7% 2	11% 3	48% 12	28% 7	12% 3
Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar	89% 24	11% 3	15% 4	50% 12	29% 7	4% 1
Interpretação geométrica de multiplicação de um vetor por um escalar	85% 23	15% 4	11% 3	39% 9	35% 8	13% 3
Interpretação geométrica de da adição de vetores	93% 25	7% 2	11% 3	40% 10	40% 10	8% 2
Interpretação geométrica da subtração de vetores	89% 24	11% 3	11% 3	38% 9	42% 10	8% 2
Produto escalar de vetores	85% 23	15% 4	7% 2	52% 12	35% 8	4% 1
Propriedades do produto escalar de vetores	81% 22	19% 5	7% 2	45% 10	36% 8	9% 2
Interpretação geométrica do produto escalar de vetores	81% 22	19% 5	7% 2	36% 8	50% 11	5% 1
Produto vetorial	85% 23	15%4	7% 2	30% 7	52% 12	9% 2
Interpretação geométrica do produto vetorial	81% 22	19% 5	7% 2	23% 5	45% 10	23% 5
Propriedades do produto vetorial	78% 21	22% 6	7% 2	24% 5	52% 11	14% 3
Produto misto de vetores	74% 20	26% 7	7% 2	25% 5	45% 9	20% 4
Propriedades do produto misto	74% 20	26% 7	7% 2	20% 4	45% 9	25% 5
Interpretação geométrica do produto misto	70% 19	30% 8	7% 2	11% 2	58% 11	21% 4
Resolução de questões envolvendo adição algébrica de vetores	100% 27	0% 0	11% 3	37% 10	48% 13	4% 1
Resolução de questões envolvendo adição geométrica de vetores	100% 27	0% 0	11% 3	33% 9	44% 12	11% 3
Resolução de questões envolvendo subtração algébrica de vetores	93% 25	7% 2	11% 3	40% 10	40% 10	8% 2
Resolução de questões envolvendo subtração geométrica de vetores	96% 26	4% 1	11% 3	31% 8	46% 12	12% 3

Resolução de questões envolvendo multiplicação de um vetor por um escalar	89% 24	11% 3	11% 3	42% 10	42% 10	4% 1
Resolução de questões envolvendo produto escalar	85% 23	15% 4	7% 2	39% 9	48% 11	4% 1
Resolução de questões envolvendo produto vetorial	81% 22	19% 5	7% 2	14% 3	505 11	27% 6
Resolução de questões envolvendo produto misto	78% 21	22% 6	15% 4	10% 2	52% 11	19% 4
Resolução de questões envolvendo área do triângulo com os vértices dados	89% 24	11% 3	7% 2	21% 5	50% 12	21% 5
Resolução de questões envolvendo área do triângulo quando os vértices necessitam ser determinados	81% 22	19% 5	7% 2	14% 3	50% 11	27% 6
Resolução de questões envolvendo a área do paralelogramo com os vértices dados	85% 23	15% 4	7% 2	17% 4	48% 11	26% 6
Resolução de questões envolvendo a área do paralelogramo quando os vértices necessitam ser determinados	78% 21	22% 6	7% 2	14% 3	43% 9	33% 7
Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro com os vértices dados	74% 20	26% 7	7% 2	5% 1	55% 11	30% 6
Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro quando os vértices necessitam ser determinados	70% 19	30% 8	7% 2	11% 2	42% 8	37% 7
Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo com os vértices dados	74% 20	26% 7	7% 2	10% 2	50% 10	30% 6
Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo quando os vértices necessitam ser determinados	74% 20	26% 7	7% 2	10% 2	50% 10	30% 6
Resolução de questões que envolvam o ângulo entre dois vetores	81% 22	19% 5	11% 3	9% 2	59% 13	18% 4
Resolução de questões que solicitem a determinação de um vetor perpendicular a dois vetores simultaneamente	78% 21	22% 6	7% 2	14% 3	57% 12	19% 4
Resolução de questões que solicitem a determinação de um vetor normal a um plano conhecido	78% 21	22% 6	7% 2	14% 3	43% 9	33% 7

Fonte: pesquisa de campo (2021).

Através dos resultados pôde-se perceber que os conteúdos “Ideia de Vetor”, “Conceito de Vetor”, “Vetor no Plano”, “Módulo de um vetor no plano”, “Adição geométrica de vetores no plano” e “Resolução de questões envolvendo adição algébrica de vetores” e “Resolução de questões envolvendo adição geométrica de vetores” eram ministrados por todos os docentes do IFPA que ensinaram o conteúdo de vetores, fato este comprovado estatisticamente.

Por outro lado, 4 (15%) docentes não ministravam assuntos relacionados a vetor no espaço. Outro ponto, que merece destaque é que os docentes consideraram que a maioria dos assuntos iniciais tem nível de dificuldade “Fácil” de compreensão pelos alunos, exceto para os relacionados a vetor no espaço.

No entanto, esse nível de compreensão passa a ser “DIFÍCIL” a medida em que os assuntos avançavam, em especial, na subtração geométrica tanto bi quanto tridimensional, no ensino de propriedade de adição e produto, na interpretação de adição e produto, bem como, durante as resoluções de questões, em especial, as que envolviam figuras geométricas.

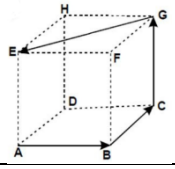
Nesse sentido, cabe uma reflexão em relação ao método de ensino e aprendizagem utilizado nos assuntos iniciais, sabe-se que os assuntos primários tendem a ser mais amenos; contudo, o bom entendimento e compreensão dos mesmos implicam na construção de uma base sólida para a aprendizagem dos assuntos vindouros e que necessitam, obrigatoriamente, desses conhecimentos iniciais.

Em relação a resolução de questões é importante observar se a questão está sendo tratada pelos docentes como exercício ou problema, pois questões quando ainda caracterizadas como problemas demandam o pensar reflexivo dos alunos e lhes impõem um grau de dificuldade; provavelmente, devido ao grau de dificuldade citado pelos docentes para alguns alunos as questões são exercícios, mas para a maioria deles ainda são problemas.

Por fim, foi solicitado aos docentes que classificassem 10 questões, com base em sua experiência docente, de acordo com o grau de dificuldade de cada questão para os estudantes após o ensino assunto; também, foi colocado um campo para marcar caso os alunos não estudassem o assunto da questão.

O Quadro 11 apresenta as questões e as respostas dos docentes. O sombreamento em vermelho indica a tendência de Fácil à Muito Fácil; em verde de Difícil a Muito Difícil e o em amarelo dá destaque aos assuntos que são estudados pelos alunos.

Quadro 11– Classificação das questões de acordo com o grau de dificuldade para os estudos após o ensino do Assunto, segundo os docentes.

QUESTÃO	ENSINAM O ASSUNTO	GRAU DE DIFICULDADE PARA OS ESTUDANTES[11]			
		MF	F	D	MD
1. Encontre a origem do segmento A que representa o vetor V = (2,-3,1), sendo sua extremidade o ponto B = (2,-1,4).	100% 27	7% 2	59% 16	30% 8	4% 1
2. Com base na figura determine o vetor soma dos vetores AB, BC, CG e GE. 	100% 27	4% 1	44% 12	37% 10	15% 4
3. Prove que u + v = w → u = w - v (sendo u, v e w vetores)	100% 27	0% 0	41% 11	41% 11	19% 5
4. Verifique se os pontos A (-1, -5, 0), B (2, 1, 3) e C (-2, -7, -1) são colineares	100% 27	4% 1	41% 11	37% 10	19% 5
5. Dados u = 2i , v = i+j+k e w = -2i+6j+6k, verifique se o vetor w é uma combinação linear dos vetores u e v (sendo u, i, v, j, k, w vetores)	96% 26	0% 0	41% 11	33% 9	22% 7
6. Determine a medida do menor ângulo do triângulo cujos vértices são: A (2, -1, 1), B (1, -3, -5) e C (3, -4, -4).	96% 26	0% 0	30% 8	41% 11	26% 8
7. Determine a medida da área do triângulo cujos vértices são: A (1, -2, 1), B (2, -1, 4) e C (-1, -3, 3)	100% 27	0% 0	33% 9	44% 12	22% 6
8. Determine o perímetro do triângulo com vértices A (2, 4, 0), B (0, 2, 4) e C (6, 0, 2)	100% 27	0% 0	37% 10	52% 14	11% 3
9. Sejam u = (3,1,-1) e v = (a,0,2). Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por u e v seja igual a 5 (sendo u e v vetores)	100% 27	0% 0	37% 10	30% 8	33% 9
10. Determine o volume do tetraedro gerado pelos vetores da base canônica do R^3	96% 26	4% 1	19% 5	41% 11	33% 10

Fonte: pesquisa de campo (2021).

Os resultados mostraram que, segundo os docentes, os assuntos das questões são estudados, na maioria dos casos, e que os alunos possuíam nível de dificuldade maior em questões que precisavam provar ou verificar alguma propriedade e que envolvem desenhos geométricos tridimensionais.

A seguir é apresentada uma síntese dos resultados sobre a consulta aos docentes.

[11] MF – Muito Fácil, F- Fácil, D- Difícil, MF – Muito Difícil

3.4.1.1. Síntese: consulta a docentes

Assim, a partir dos resultados do questionário, o perfil profissional e acadêmico dos docentes que responderam à pesquisa, em especial, dos que já lecionaram o conteúdo de Vetores, apresentou-se da seguinte forma:

- a maioria dos entrevistados era do sexo masculino e pertenciam a faixa etária entre 31 e 40 anos, concluíram o ensino Superior em Escola Pública entre 2000 e 2010; apenas, 01 (um) não possuía pós-graduação. Os licenciados em Matemática representavam 23 (51%) do total de entrevistados;
- 27 (60%) do total já haviam ministrado o conteúdo de vetores no IFPA. contudo, estatisticamente, o conteúdo de vetores era ministrado, principalmente, por Licenciados em Física.
- Os que possuíam tempo de serviço entre 11–15 anos foram os que mais ministraram o conteúdo de vetores no IFPA. Estatisticamente, pôde-se comprovar que os que possuíam entre 11-15 anos de tempo de serviço estavam, concentrados, majoritariamente, na faixa etária entre 36 e 45 anos; e que
- os docentes do Campus Belém foram os que mais ministraram o conteúdo de vetores.

A partir da análise das informações por nível de ensino pôde-se concluir que o conteúdo de vetores no Integrado e no Superior, era visto com maior frequência, e com pouca constância no Subsequente; fato comprovado estatisticamente. Contudo, para o Integrado, apenas, a parte necessária para o entendimento de algum assunto da disciplina era lecionado, pois o conteúdo não fazia parte da ementa, em especial, das disciplinas de Matemática.

Estatisticamente, pôde-se afirmar, que a maioria dos professores de matemática do Integrado não estavam seguindo as orientações curriculares para o Ensino Médio; pois, o assunto era visto, na maioria das vezes, somente, em disciplinas de Física seguido das Específicas.

Para o Ensino Superior, o assunto de vetores era visto com maior frequência em disciplinas de Física e Matemática por fazer parte do ementário

e, na maioria das vezes, por ser pré-requisito para o ensino de alguma disciplina. No subsequente, o assunto era visto em disciplinas específicas.

Em relação a CH das disciplinas, a maioria considerou adequada; contudo, há àqueles que ressaltaram que a adequação da CH depende do nível da turma. Também foi possível verificar o baixo índice de abandono e reprovação nas disciplinas que ministraram o conteúdo de vetores, porém esse resultado não deve ser considerado, única e exclusivamente, pelo fato terem lecionado esse conteúdo.

Em relação ao Ensino, Aprendizagem e Avaliação do conteúdo de Vetores no IFPA a análise mostrou que não há formação pedagógica para o ensino específico de vetores, apesar da presença de disciplina desse tipo em cursos de Licenciatura e, ausência em curso de bacharelado; porém, os docentes disseram ter o ensino do conteúdo de vetores. Entretanto, houve associação significativa entre a formação de nível Superior e as disciplinas nas quais os docentes tiveram o ensino do conteúdo de vetores.

Em relação a forma como a maioria das aulas iniciavam quando os docentes aprenderam o conteúdo de vetores pôde-se perceber a presença das metodologias baseadas na sequência teoria, exemplos e exercícios. Assim como, grande parte dos docentes ainda utilizava esse método de ensino para lecionar o conteúdo de vetores reproduzindo, dessa forma, o modo como aprenderam, porém, com melhoramentos metodológicos. Entretanto, disseram estar satisfeitos com a metodologia usada, mas estão dispostos a aperfeiçoá-la para melhorar o processo de ensino aprendizagem.

Para praticar o conteúdo de vetores, a maioria, utilizava somente lista de exercícios, alguns utilizavam jogos e simulações e questões contextualizadas. O nível de aprendizado dos alunos foi classificado como “Ótimo” e “Satisfatório”. Sobre o nível de interesse dos alunos sobre o assunto vetores, a maioria classificou como “Interessado”.

A análise nos deu indícios, ainda, que o nível de satisfação com a aprendizado do aluno estava relacionado diretamente ao do interesse do aluno, bem como, a utilização de exemplos contextualizados para ensinar vetores. Os alunos, de acordo com os docentes, estavam interessados em aprender vetores, em especial, quando utilizava-se práticas diferenciadas e associadas ao cotidiano.

Para preparar o material das aulas utilizavam o livro didático, notas de aula e apostila; além da indicação do livro didático e materiais diversos. Em relação a avaliação, o uso de prova individual é predominante, porém acompanhado de outras atividades e, frequentemente, as questões eram retiradas do próprio material usado para o preparo das aulas e indicado aos alunos.

Em relação aos conteúdos de vetores ministrados, os docentes apontaram dificuldade de compreensão pelos discentes de assuntos e de resolução de questões que envolviam o espaço e aplicações em geometria. Alguns docentes não ministravam conteúdos relacionados a vetor no espaço. Além disso, destacaram a dificuldade em resolver questões está atrelada ao nível de compreensão do conteúdo.

Por fim, o Quadro 12 apresenta um resumo dos principais resultados obtidos a partir da consulta aos docentes tanto os sem influência isoladamente quanto os que possuíram associações estatísticas significativas via Teste de Fischer.

Quadro 12 - Resumo dos principais resultados obtidos: consulta aos docentes

Resultados obtidos com a pesquisa de campo: consulta aos docentes	
Dados sem influência isoladamente	Alguns professores estavam seguindo as orientações curriculares para o Ensino Médio em relação ao ensino de Vetores
	Havia uma coerência entre a prática de sala de aula dos docentes em todos os níveis de Ensino ao considerar a importância do conteúdo de vetores apesar da ausência desse como parte da ementa.
	os índices de Reprovação/Abandono nas disciplinas em que eram ministrados os conteúdos de vetores são baixos
	A maioria dos professores considerou a CH disponível adequada para o ensino de Vetores
	Todos os docentes disseram ter tido disciplinas durante a formação de nível superior que ensinaram o conteúdo de vetores
	Quando os docentes estudaram vetores a aula iniciava “pela definição seguida de exemplos e exercícios”
	A maioria dos docentes reproduziam no modo de ensinar vetores a forma como aprenderem
	A maioria dos docentes estava satisfeita com a metodologia utilizada, porém acreditavam que mudanças na forma de ensinar podiam melhorar o processo de ensino e aprendizagem.
	A maioria disse utilizar questões contextualizadas para ensinar vetores.
	Em relação ao nível de aprendizado dos alunos no assunto vetores, a maioria o classificou como “Ótimo”
	Em relação ao nível de interesse dos alunos no assunto vetores, a maioria o classificou como “Interessado”
	O nível de satisfação com o aprendizado estava relacionado ao tipo de atividade ou à mera utilização de atividades para exercitar o conteúdo
	Para preparar as aulas sobre vetores os docentes utilizavam, especialmente, o livro didático, as notas de aula e a apostila;

	Em relação a indicação de material didático a maioria costumava indicar o livro didático
	Para realizar a avaliação do assunto de vetores utilizavam prova individual acompanhado de outros tipos de atividades como trabalhos em grupo, modelagem matemática, organização de questões contextualizadas e prova escrita em grupo
	Os docentes costumavam retirar as questões para a avaliação, por meio de provas/testes, das notas de aula, das questões resolvidas em sala de aula, do livro didático adotado/indicado e dos exercícios propostos.
	Os docentes consideraram que a maioria dos assuntos iniciais tem nível de dificuldade “Fácil” de compreensão dos assuntos pelos alunos, exceto para conteúdos relacionados ao vetor no espaço.
	Os alunos possuíam nível de dificuldade maior em questões que precisavam provar ou verificar alguma propriedade e que envolviam desenhos geométricos tridimensionais.
Associações estatísticas significativas entre as variáveis ...	Os Licenciados em Física foram os que mais ministraram o conteúdo de vetores no IFPA.
	Os entrevistados que pertenciam a faixa etária entre 41-45 anos e possuíam tempo de serviço, especificamente, entre 11-15 anos foram os que mais ministraram vetores no IFPA.
	Os docentes que já ministraram o conteúdo de vetores no IFPA e que possuíam tempo de serviço no IFPA entre 11-15 anos eram os que concluíram a sua graduação entre os anos de 2000 - 2010.
	O Campus Belém possuía a maioria dos docentes que ministraram o conteúdo de vetores em suas disciplinas
	O conteúdo de vetores foi visto, com maior frequência, no Ensino Superior.
	Quanto maior o nível de interesse melhor a satisfação com a aprendizagem
	A utilização de exemplos contextualizados para o ensino de Vetores promoveu níveis de satisfação com o aprendizado dos discentes “Ótimo” e “Satisfatório”

Fonte: pesquisa de campo (2021).

Especificamente, o Quadro 13 apresenta os resultados entre cada variável com associações estatísticas significativas verificadas via Teste de Fischer com o seu valor-p e o efeito *V-Cramer.*

Quadro 13 - Variáveis com Associações Estatísticas Significativas - Questionário Docente

Variável 1	**Variável 2**	**p-valor**	**Efeito V-Cramer**
Formação Acadêmica	Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA	0,003	Médio
Faixa Etária	Tempo de Serviço	<.001	Grande
Ano de Conclusão da Graduação	Tempo de Serviço	<.001	Grande
Campus de Lotação	Ministrou vetores no IFPA	0,007	Grande
Ensino de vetores por modalidade de Ensino	Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA	<.001	Grande
Nível de Interesse	Nível de aprendizado	0,006	Grande
Uso de exemplos contextualizados	Satisfação com o Nível de aprendizado	0,028	Grande

Fonte: elaborado a partir dos resultados do Teste de Fischer com o software Jamovi

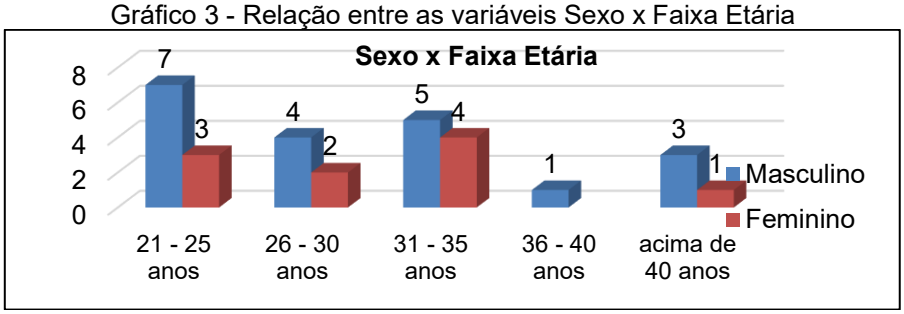
Diante do panorama, segundo o olhar docente, na subseção seguinte será apresentado, sob a ótica discente, como se dá o ensino de vetores no IFPA, Campus Belém.

3.4.2. Consulta a discentes

Os estudantes participantes da pesquisa tinham o seguinte perfil: em relação ao sexo dos entrevistados, 20 (66,5%) eram do Masculino e 10 (33,5%), do Feminino; esse resultado reflete que, tal como relatado por Mesquita (2017), apesar da conquista e ocupação de espaços, em cursos anteriormente estereotipados como tradicionalmente masculinos, em especial, em áreas tecnológicas e de engenharia, ainda é um processo lento, árduo e com muitas barreiras a serem superadas.

Em relação a faixa etária, os entrevistados tinham, majoritariamente, entre 21 à 35 anos de idade. O Gráfico 3 apresenta a relação entre o sexo e a faixa etária.

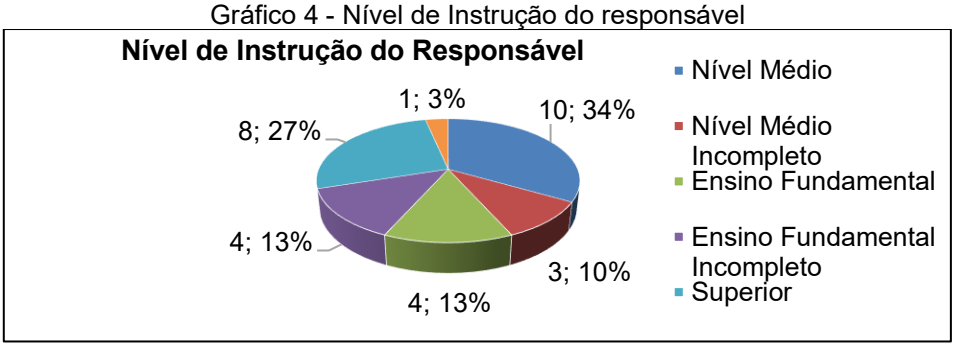
Gráfico 3 - Relação entre as variáveis Sexo x Faixa Etária



Fonte: dados do questionário (2021)

Em relação ao tipo de escola de conclusão do Ensino Médio, 21 (70%) eram oriundos da rede Estadual, 7 (23%) da rede particular e 2 (7%) da federal. Sobre o nível de instrução do responsável, 4 (13%) disseram ter Ensino Fundamental e Ensino Fundamental Incompleto, cada; 10 (34%), Nível Médio; 3 (10%), Nível Médio Incompleto; 8 (27%), Nível Superior; e, 1 (3%), outro. O Gráfico 4 apresenta os níveis de instrução do responsável citados e a frequência.

Gráfico 4 - Nível de Instrução do responsável



Fonte: dados do questionário (2021)

Para a maioria o ano de Ingresso no Curso foi em 2017 e 2018; dos consultados, 12 (40%) eram egressos e os demais, 18 (60%) estava em fase de conclusão; o Quadro 14 apresenta a frequência do ano de ingresso no curso.

Quadro 14 – Frequência relativa ao Ano de Ingresso no Curso

Ano de Ingresso	2006	2011	2012	2013	2014	2015	2017	2018	2019	Total
Frequência	1 (3%)	4 (13%)	2 (7%)	2 (7%)	1 (3%)	4 (13%)	8 (27%)	7 (24%)	1 (3%)	30 (100%)

Fonte: dados do questionário (2021)

Em relação os egressos, 6 (50%) finalizaram o curso em 2018. É interessante notar que, dos egressos apenas 01 (8,5%) concluiu o curso dentro do prazo normal (3 anos). Foi verificado que até a formação completa havia uma média de tempo de 5 anos desde o ingresso até a conclusão do curso.

Também vale destacar que dos alunos em fase de conclusão, 17 (60%) já estavam fora do prazo considerando a extensão máxima, 4,5 anos (4 anos e meio); apenas, 01 (5,5%) estava dentro do prazo máximo com expiração no 2º semestre de 2022.

Esse resultado, nos fez refletir sobre os motivos que desencadearam tal fato: problemas familiares? Falta de afinidade com curso? Problemas financeiros? Motivação? Na verdade, várias razões poderiam ser elencadas e avaliadas, porém fogem ao escopo desse artigo, mas abrem uma gama de possibilidades de investigação para trabalhos futuros.

Do total de discentes, 22 (73%) trabalhavam de forma remunerada e 8 (27%) não estavam no mercado de trabalho. Os que trabalhavam e ainda não tinham concluído o curso representavam 12 (40%) dos participantes da pesquisa. Assim, de certa forma, podemos considerar a hipótese da jornada de trabalho com estudo como um dos limitantes a formação dentro do prazo.

Cursos Extracurriculares estavam sendo realizados por 14 (47%) dos consultados; destes, metade eram egressos. O curso com maior frequência é língua estrangeira, seguido de Informática. O Quadro 15 apresenta os cursos citados e a frequência.

Quadro 15 - Resposta à pergunta: Você faz algum curso Extracurricular?

Curso Extracurricular	**Frequência**	**Percentual**
Língua Estrangeira	6	46%
Informática	4	13%
Design de experiência do usuário	1	10,25%
EAD linguagens de programação	1	10,25%
Projetos de Cloud	1	10,25%
Operador de áudio	1	10,25%
Total	**14**	**100%**

Fonte: dados do questionário (2021)

Sobre o processo de ensino, aprendizagem e avaliação do conteúdo de vetores, a pesquisa revelou que o assunto de vetores foi visto nas disciplinas de Cálculo Vetorial, Eletromagnetismo, Cálculo II, Antenas, linhas de transmissão e Propagação, Física e Satélites; o Quadro 16 mostra a frequência em relação as 06 disciplinas citadas pelos alunos.

Quadro 16- Em qual(is) disciplinas você estudos o assunto vetores?

Disciplinas citadas	Cálculo Vetorial	Eletromagnetismo	Cálculo II	Física	Antenas, linhas de Transmissão e Propagação	Satélites
Frequência	21	15	8	5	3	2

Fonte: dados do questionário (2021)

As disciplinas nas quais o estudo de vetores foi realizado tinham relação com o Projeto Pedagógico do Curso (PPC); em 2007, o PPC/2007 passou por algumas modificações e teve vigência até o encerramento da turma ingressante em 2013, e o PPC/2014 até a aprovação da atualização proposta pelo PPC/2017.

Contudo, em todos os PPC's consultados a disciplina de Cálculo Vetorial estava presente com ementa envolvendo os assuntos: Análise Vetorial e Transformação de Coordenadas, Rotacional, Divergente e Gradiente. De acordo com a análise feita nos documentos do curso, hipoteticamente, a presença das demais disciplinas, citadas pelos alunos, poderiam ser justificadas da seguinte forma:

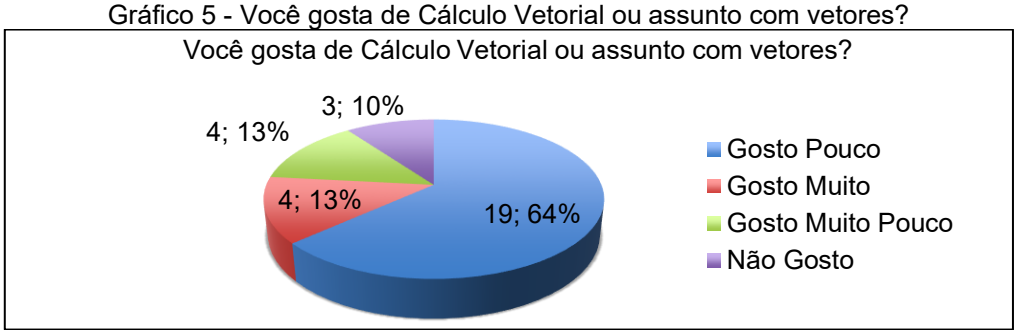
- Cálculo II: não há o assunto vetores, porém há aplicações de Integrais Duplas e Triplas e os operadores DEL pode ter sido utilizado;
- Física: não há a componente curricular com o nome Física no Curso, supomos que essa disciplina pode ter sido citada por tratar do assunto no Ensino Médio ou devido a quantidade de assuntos vistos no Ensino Superior que englobam o assunto;

- Eletromagnetismo, Linhas de transmissão, antenas e propagação e Satélites tinha o assunto de vetores como pré-requisito.

No mais, o que causa estranheza é a disciplina de Cálculo Vetorial não ter sido citada por todos os discentes, já que foi ministrada a todos; porém, ao verificar o ano de ingresso destes que não a citaram, entre 2006 e 2014, infere-se que podem ter confundido o nome das disciplinas ou, até mesmo, ter a memória das aplicações em Eletromagnetismo.

Ao questionar se gostavam de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores, 19 (63,5%) responderam “Gosto Pouco”; 4 (13,5%) “Gosto Muito” e “Gosto Muito Pouco”, cada; e 3 (10%), “Não Gosto”. Sobre a dificuldade para aprender a Cálculo Vetorial, 16 (53%) disseram ter tido “Um Pouco”; 6 (20%), “Muita dificuldade”; 3 (10%), “Muito Pouco”; e 5 (17%), não tiveram dificuldade. O Gráfico 5 apresenta essas informações.

Gráfico 5 - Você gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores?



Fonte: pesquisa de campo (2021)

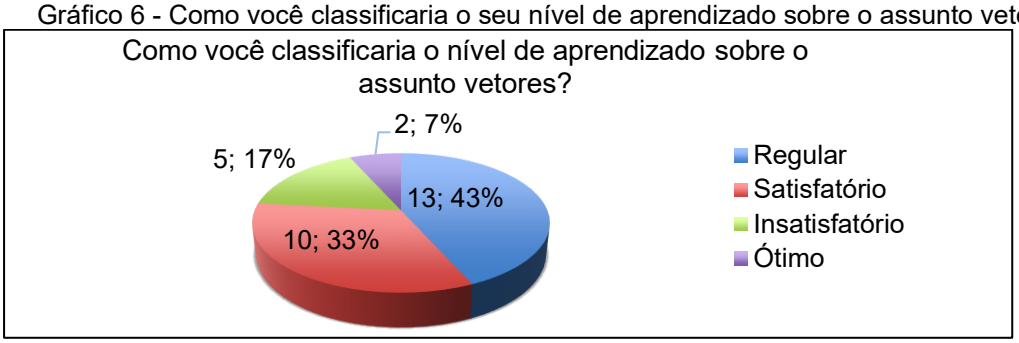
Apesar de não terem sido encontradas associações significativas pelo Teste de Fischer entre as variáveis “Gostar de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores” e “Dificuldade para aprender Cálculo Vetorial”, pode-se destacar que a maioria dos alunos que tiveram “Um pouco” de dificuldade no assunto com vetores também foram os que “Gostavam Pouco” do assunto; assim como, os que tiveram “Muita dificuldade”.

Contudo, as informações obtidas revelaram que, de certa forma, para essa amostra, o “Gostar” do assunto é um fator motivacional relevante em relação às dificuldades: alunos que gostaram do conteúdo e foram, por isso, motivados a aprender, tendem a ter melhor desempenho e, portanto, superaram algumas das dificuldades, por ora existentes, no processo de ensino aprendizagem.

Nesse sentido, as dificuldades devem ser tratadas a partir de uma abordagem pedagógica e metodológica pensada, refletida e discutida, partindo de um diagnóstico da turma e de melhoramentos nas técnicas de ensino através da utilização de trabalhos em grupos, recursos tecnológicos, livros textos, o uso da matemática atrelada ao cotidiano, dentre outras coisas (Masola e Allevato, 2016; D'Ambrosio, 1989).

Sobre o nível de aprendizado sobre o assunto vetores, 13 (43%) disseram "Regular", 10 (33%) "Satisfatório", 5 (17%) "Insatisfatório" e 2 (7%) "Ótimo", o Gráfico 6 mostra o resultado.

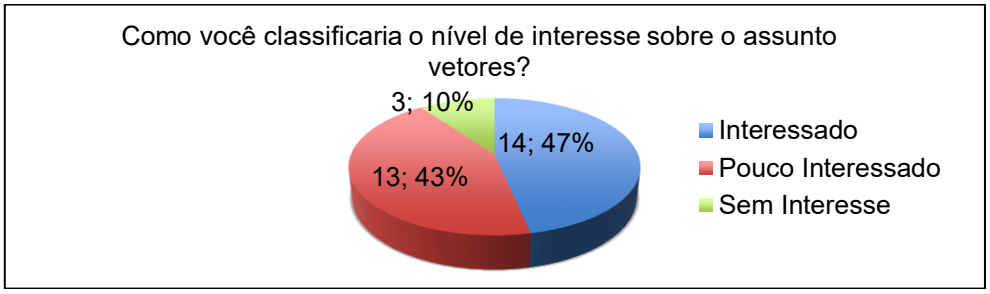
Gráfico 6 - Como você classificaria o seu nível de aprendizado sobre o assunto vetores



Fonte: pesquisa de campo (2021)

Ao classificar o nível de interesse sobre o assunto 14 (47%) responderam "Interessado", 13 (43%) "Pouco Interessado" e 3 (10%) "Sem Interesse", Gráfico 7.

Gráfico 7 - Como você classificaria o seu nível de interesse sobre o assunto vetores



Fonte: pesquisa de campo (2021)

Para essa amostra, mesmo os que disseram não ter interesse no assunto consideraram o seu nível de aprendizado Regular ou Satisfatório. Entretanto, não houve associação estatística significativa entre essas variáveis; contudo, há de se convir que mesmo os alunos "Interessado(s)" ou "Pouco interessado(s)" consideraram o seu aprendizado "Regular".

Por outro lado, as variáveis “Nível de interesse no assunto vetores” e “Gosta de cálculo vetorial ou assunto com vetores” tiveram associação estatística significativa: os alunos que se consideraram “Pouco Interessado” ou “Interessado” foram os que “Gostam Pouco” do assunto e, como analisado anteriormente, classificaram o seu aprendizado “Regular”.

Assim, o nível de interesse em um determinado assunto pode estar relacionado a motivação, ao gostar da disciplina e, vice-versa; para Guimarães e Boruchovitch (2004, p. 143), “a motivação no contexto escolar tem sido avaliada como determinante crítico do nível de qualidade da aprendizagem e do desempenho”.

Dessa forma, ao professor, cabe a utilização de técnicas de ensino que motivem e permitam o gostar e o aumento do nível de interesse dos alunos nos assuntos que estão sendo ensinados e que, consequentemente, tendem a melhorar o aprendizado dos alunos.

Em relação ao comportamento durante as aulas, 24 (80%) disseram NÃO se distrair durante as aulas; e 6 (20%), SIM. Algumas justificativas sobre a não distração foram: a dificuldade na matéria, ter melhor aproveitamento, a didática utilizada e outras coisas.

Para os que se distraiam alguns argumentos foram: a falta de domínio, a didática desvinculada do dia a dia e, também, o fato da disciplina ter sido a distância que indica o estudo da disciplina durante a pandemia do Coronavírus no qual as aulas foram 100% on-line. O Quadro 17, apresenta algumas justificativas.

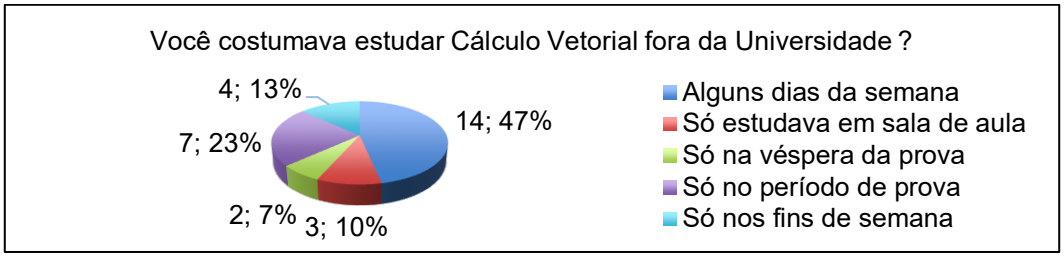
Quadro 17 - Você se distraia nas aulas de Cálculo Vetorial?

ALUNO	Resposta e Justificativa
A	Não, porque devido a dificuldade da matéria exigia toda a atenção
B	Não tinha como, a disciplina era muito boa
C	Não, as aulas eram didáticas
D	Sim, a disciplina foi ministrada à distância
E	Sim, a didática sem vínculo com o dia a dia
F	Sim, as vezes é difícil memorizar muitas propriedades dos vetores.

Fonte: dados do questionário (2021)

Sobre o hábito de estudar Cálculo Vetorial fora da Universidade, a maioria, 14 (47%) disse estudar “Alguns dias da semana”, 7 (23%) “Só no período de prova”, 4 (13%) “Só nos fins de Semana”, 3 (10%) “Só estudava em sala” e 2 (7%) “Só na véspera da prova”; o Gráfico 8 apresenta os resultados.

Gráfico 8 – Você costumava estudar Cálculo Vetorial fora da Universidade?



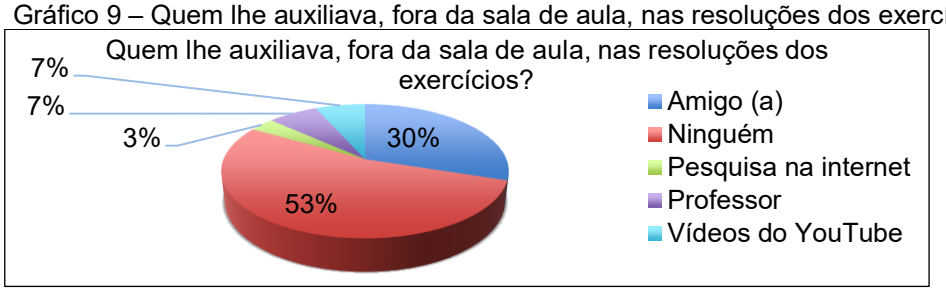
Fonte: dados do questionário (2021)

Segundo Indicadores de Qualidade da Educação Superior 2015, 49% dos estudantes que concluíram o Ensino Superior no Brasil estudavam de uma a três horas por semana e 6% não estudavam, limitando-se a assistir às aulas (Brasil, 2018). Em termos de aprendizagem matemática, a não habitualidade de estudo traz muitas consequências.

Nesse contexto, algumas particularidades são inerentes a disciplina, tais como, ter conteúdos cumulativos e ter domínio conceituais, procedimentais e de aplicações para a resolução de questões. Portanto “Os hábitos de estudo – aprendizagens mais comuns dos discentes brasileiros são incompatíveis com os hábitos de aprendizagem que o estudo da matemática exige” (Souza e Mascarenhas, 2022, p. 321).

Em relação a quem lhe auxiliava, fora de sala, nas resoluções dos exercícios, Gráfico 9, 16 (53%) responderam “Ninguém”, 9 (30%) um “Amigo”, 2 (7%) “Professor” e “Vídeos do Youtube”, cada; e 1 (3%) “Pesquisa na Internet”. O fato de não ter auxílio pode ser reflexo da ausência de formação em Nível Superior de grande parte dos responsáveis.

Gráfico 9 – Quem lhe auxiliava, fora da sala de aula, nas resoluções dos exercícios?



Fonte: dados do questionário (2021)

Sobre como a maioria das aulas iniciavam quando estudaram vetores, 24 (80%), disseram somente “pela definição seguida de exemplos e exercícios”, 1 (4%) “com uma situação problema depois de introduzir o assunto” e, os demais, 5 (16%) responderam que além de iniciar “pela definição seguida de exemplo e

exercícios", os professores utilizavam alguma outra metodologia. O Quadro 18 apresenta os resultados.

Quadro 18- Quando você estudou cálculo vetorial a maioria das aulas iniciavam por ...

RESPOSTA	Total	Percentual
Pela definição seguida de exemplos e exercícios	24	80%
Com uma situação problema depois de introduzir o assunto	1	3,33%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com a história do assunto	1	3,33%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com um experimento para chegar ao conceito	1	3,33%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com uma situação problema depois de introduzir o assunto	1	3,33%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	1	3,33%
Pela definição seguida de exemplos e exercícios; com uma situação problema depois de introduzir o assunto; com um experimento para chegar ao conceito	1	3,33%
Total	**30**	**100%**

Fonte: dados do questionário (2021)

Os resultados mostraram o frequente uso da metodologia baseada na sequência definição, exemplos e exercícios para o ensino de vetores, com a introdução de algumas outras técnicas por poucos professores. D'Ambrósio (1989) cita algumas consequências aos alunos desse ensino tradicional como: a crença de que a aprendizagem matemática se dá pelo acúmulo de formas e aplicação de regras, não conseguir relacionar a solução do mesmo problema em uma situação real, o não questionamento e a ausência da necessidade de compreender como os conceitos funcionam.

Em contrapartida, a autora também destacou que, para os professores, os conteúdos são ensinados por serem úteis aos alunos no futuro e isso resulta em uma "motivação" não realista devido a situação educacional brasileira; além disso, alguns entendem que o aluno aprenderá melhor quanto maior for o número de exercícios resolvidos por ele e conclui que abordagem metodológicas que estimulem a criatividade, a investigação, a resolução de problemas como curiosidade e desafio devem ser estimuladas (D'Ambrósio, 1989).

Ao questionar se o aluno estava satisfeito com a metodologia utilizada para o ensino de vetores, 16 (53%) disseram que "Sim", 11 (37%) "Não", 2 (7%) "Em parte" e 1 (3%) respondeu não lembrar; esse resultado é proporcional aos que disseram ter dito um nível de aprendizado "Regular" ou "Satisfatório", porém é diverso ao comparar com os que disseram ter tido algum tipo de dificuldade no

assunto. Há de se considerar que, talvez, o uso outras metodologias ou melhoramentos tornem o aprendizado “Ótimo” e diminuam as dificuldades de aprendizado. O Quadro 19 apresenta algumas justificativas dos alunos.

Quadro 19 – Você está satisfeito com a metodologia utilizada para o Ensino de Vetores?

ALUNO	RESPOSTA COM JUSTIFICATIVA
A	A parte que estudei no IFPA não fiquei satisfeito, pois, equações muito grandes para resolver, sem um sentido prático, o resultado acaba não representando nada... não se sabe interpretar o resultado.
B	Na época, não pois não fixei o conteúdo e a teoria não foi associada a exemplos práticos
C	Não, acredito que contextualizar e apresentar assuntos direcionados a tecnologia seria melhor
D	Não, porém, até o momento, não me apresentaram nenhuma outra maneira de se estudar vetores.
E	Sim, acredito que os exemplos somados aos exercícios resolvidos em sala foram satisfatórios para elucidar o conhecimento dos assuntos relacionado à disciplina.
F	Sim, apesar da dificuldade do assunto creio que a melhor maneira de aprendê-lo foi da maneira apresentada.
G	Sim, porém requer muita prática para ter segurança em resolver as atividades.
H	Um pouco. Os vetores em planos tridimensionais as vezes são difíceis de se visualizar apenas com imagens em 2D.

Fonte: dados do questionário (2021)

Sobre a forma utilizada pelo professor para exercitar o conteúdo, 20 (66,5%) alunos responderam que apresentavam, somente, uma lista de exercícios a serem resolvidas; 7 (23%), além da proposição da lista de exercícios a ser resolvida também utilizavam algum outro recurso; 1 (3,5%), costumava propor questões do próprio banco de dados e; 2 (7%), solicitavam que resolvessem questões do livro didático; o Quadro 20 apresenta os resultados.

Quadro 20 - Para exercitar os conteúdos de Cálculo Vetorial seu professor costumava ...

RESPOSTA	Total	Percentual
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	20	66%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; propor questões do próprio Banco de Dados	3	10%
Solicitar a resolução de questões do livro didático	2	6,5%
Propor questões do seu próprio Banco de Dados	1	3,5%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático	1	3,5%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar a resolução de questões do livro didático; propor questões do seu próprio Banco de Dados	1	3,5%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar a resolução de questões do livro didático; solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver	1	3,5%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; utilizar questões de processos seletivos como ENEM ou similares; propor questões do seu próprio Banco de Dados	1	3,5%
Total	**30**	**100%**

Fonte: dados do questionário (2021)

Sobre se os professores utilizavam questões contextualizadas para o ensino de vetores, 16 (53%) disseram que “Sim”, 10 (33,5%) “Não” e 4 (13,5%) responderam que “Às vezes”. Contudo, ao questionar se os entrevistados conseguiriam resolver questões contextualizadas a partir dos assuntos visto em sala de aula, 13 (43,5%) responderam “Não”, 12 (40%), “Sim” e 5 (16,5%), “Talvez”.

Alguns alunos justificaram que não conseguiriam resolver as questões devido ao tempo sem praticar, pela dificuldade no assunto ou por não ter resolvido tantas questões contextualizadas ao estudar o assunto; os que disseram “Sim” acreditam que os fundamentos da disciplina ainda estão na memória, outros alegaram que precisariam, apenas, rever alguns conceitos ou conseguiriam com alguma ajuda. Os que responderam “Talvez” argumentaram pelo fato de ter algumas questões que não ficaram bem esclarecidas durante o momento da aprendizagem.

Estatisticamente, foram encontradas associações significativas entre as variáveis “Professor usava questões contextualizadas para o ensino de vetores” e “Conseguiria resolver questões contextualizadas a partir dos assuntos vistos em sala”; assim, apesar do professor ter utilizado questões contextualizadas os alunos não seriam capazes de resolver questões com contextualização.

Nesse sentido, Reis e Nehring (2017) ressaltam que o uso da contextualização pelos professores de forma restrita, sem problematizar a formação dos conceitos matemáticos não garante a aprendizagem devido à ausência de sentidos; portanto, é necessário alinhar o uso de uma *práxis* sobre contextualização.

Outra associação significativa encontrada foi em relação as variáveis “Professor usava questões contextualizadas para o ensino de vetores” e “Satisfação com a metodologia utilizada para o Ensino de Vetores”, portanto os alunos que estavam satisfeitos com a metodologia foram os que tiveram professores que usaram questões contextualizadas para o ensino, ou seja, são professores que não utilizaram, somente, a metodologia da explicação da teoria, seguida de exemplos e exercícios.

Em relação a avaliação do assunto de vetores, 20 (66,5%) disseram que os professores só realizavam “Prova Escrita Individual”, 9 (30%) responderam “Prova Escrita Individual” acrescido de algum outro tipo de atividade e 1 (3,5%)

“Trabalho Individual e Organização de Questões resolvidas sobre o assunto”. O Quadro 21 detalha esse resultado.

Quadro 21– Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar

Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar ...	**Total**	**Percentual**
Prova escrita individual	20	66%
Prova escrita individual; trabalho individual	3	10%
Prova escrita individual; trabalho individual, trabalho em grupos	2	6,5%
Prova Escrita Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1	3,5%
Prova Escrita Individual; Prova Escrita em grupo; Trabalho em grupos	1	3,5%
Prova Escrita Individual; Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1	3,5%
Prova Escrita Individual; Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto; Organização de questões contextualizadas sobre o assunto	1	3,5%
Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1	3,5%
Total	**30**	**100%**

Fonte: dados do questionário (2021)

Em termos quantitativos, o mesmo resultado foi obtido em relação aos professores que apresentavam somente lista de exercícios para serem resolvidas para exercitar o assunto e os que utilizavam a Prova Escrita Individual como único instrumento de avaliação.

Curiosamente, o mesmo acontece para as demais categorias de resposta considerando as mesmas variáveis “Para exercitar os conteúdos de Cálculo Vetorial o seu professor costumava...” e “Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar...”. Veja o Quadro 22 comparativo.

Quadro 22 – Comparação percentual entre as variáveis indicadas

Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar ...	**Total**	**Para exercitar os conteúdos de Cálculo Vetorial seu professor costumava ...**
Prova escrita individual	20 (66%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
Prova escrita individual; trabalho individual	3 (10%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; propor questões do próprio Banco de Dados
Prova escrita individual; trabalho individual, trabalho em grupos	2 (6,5%)	Solicitar a resolução de questões do livro didático
Prova Escrita Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1 (3,5%)	Propor questões do seu próprio Banco de Dados
Prova Escrita Individual; Prova Escrita em grupo; Trabalho em grupos	1 (3,5%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático
Prova Escrita Individual; Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1 (3,5%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar a resolução de questões do livro didático; propor questões do seu próprio Banco de Dados

Prova Escrita Individual; Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto; Organização de questões contextualizadas sobre o assunto	1 (3,5%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; solicitar a resolução de questões do livro didático; solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver
Trabalho Individual; Organização de questões resolvidas sobre o assunto	1 (3,5%)	Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; utilizar questões de processos seletivos como ENEM ou similares; propor questões do seu próprio Banco de Dados
Total	30 (100%)	**Total**

Fonte: dados do questionário (2021)

Nesse sentido, podemos dizer que, no IFPA, segundo os alunos, metade dos professores que realizavam, apenas, a avaliação do tipo Prova Escrita Individual são aqueles que apresentavam, somente, uma lista de exercícios a serem resolvidos como meio para exercitar os assuntos vistos em sala de aula.

Em relação aos conteúdos de vetores ministrados, foi solicitado aos discentes que os classificassem de acordo com o grau de dificuldade, o Quadro 23 apresenta os resultados com a seguinte legenda: NL – Não lembro de ter estudado, MF – Muito Fácil, F- Fácil, R – Regular, D – Difícil e MD – Muito Difícil. O sombreamento em amarelo indica o maior percentual obtido, o verde a tendência de Regular à Muito Fácil e o vermelho de Regular e Muito Difícil.

Quadro 23 - Classificação do grau de dificuldade de compreensão pelos alunos de acordo com o conteúdo

ITEM	CONTEÚDO	NL	GRAU DE DIFICULDADE DE COMPREENSÃO SEGUNDO OS ALUNOS				
			MF	F	R	D	MD
1	Ideia de vetor	2 7%	9 30%	12 40%	6 20%	0 0%	1 3%
2	Conceito de vetor	0 0%	9 30%	13 43%	6 20%	1 3%	1 3%
3	Vetor no plano	1 3%	6 20%	12 40%	7 23%	3 10%	1 3%
4	Vetor no espaço	3 10%	1 3%	7 23%	14 47%	5 17%	0 0%
5	Componentes de um vetor no Plano	3 10%	1 3%	10 33%	12 40%	2 7%	2 7%
6	Componentes de um vetor no Espaço	5 17%	1 3%	3 10%	14 47%	6 20%	1 3%
7	Módulo de um vetor no plano	3 10%	3 10%	8 27%	10 33%	5 17%	1 3%
8	Módulo de um vetor no espaço	7 23%	1 3%	4 13%	12 40%	5 17%	1 3%
9	Direção de um vetor no plano	2 7%	2 7%	10 33%	13 43%	1 3%	2 7%
10	Direção de um vetor no espaço	5	0	8	14	3	0

		17%	0%	27%	47%	10%	0%
11	Sentido de um vetor no plano	3 10%	1 3%	8 27%	16 53%	1 3%	1 3%
12	Sentido de um vetor no espaço	6 20%	0 0%	6 20%	13 43%	4 13%	1 3%
13	Adição geométrica de vetores no plano	6 20%	2 7%	7 23%	12 40%	3 10%	0 0%
14	Adição geométrica de vetores no espaço	8 27%	2 7%	3 10%	11 37%	6 20%	0 0%
15	Adição algébrica de vetores no plano	5 17%	3 10%	6 20%	13 43%	3 10%	0 0%
16	Adição algébrica de vetores no espaço	6 20%	2 7%	2 7%	13 43%	5 17%	2 7%
17	Vetor nulo	4 13%	5 17%	9 30%	9 30%	1 3%	2 7%
18	Vetor oposto	4 13%	6 20%	6 20%	11 37%	1 3%	2 7%
19	Desigualdade triangular	11 37%	2 7%	2 7%	10 33%	4 13%	1 3%
20	Subtração geométrica de vetores no plano bidimensional	7 23%	3 10%	6 20%	10 33%	4 13%	0 0%
21	Subtração geométrica de vetores no espaço tridimensional	7 23%	3 10%	2 7%	12 40%	6 20%	0 0%
22	Subtração algébrica de vetores no plano	5 17%	4 13%	6 20%	11 37%	4 13%	0 0%
23	Subtração algébrica de vetores no espaço	7 23%	3 10%	4 13%	10 33%	5 17%	1 3%
24	Propriedade comutativa da adição de vetores	3 10%	3 10%	8 27%	10 33%	3 10%	3 10%
25	Propriedade associativa da adição de vetores	2 7%	2 7%	10 33%	10 33%	3 10%	3 10%
26	Multiplicação de um vetor por um escalar	3 10%	3 10%	10 33%	9 30%	3 10%	2 7%
27	Propriedades do módulo de um vetor	1 3%	3 10%	11 37%	10 33%	3 10%	2 7%
28	Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar	3 10%	3 10%	8 27%	12 40%	3 10%	1 3%
29	Interpretação geométrica de multiplicação de um vetor por um escalar	3 10%	4 13%	6 20%	11 37%	5 17%	1 3%
30	Interpretação geométrica de da adição de vetores	3 10%	4 13%	5 17%	13 43%	2 7%	3 10%
31	Interpretação geométrica da subtração de vetores	3 10%	4 13%	5 17%	13 43%	3 10%	2 7%
32	Produto escalar de vetores	1 3%	5 17%	6 20%	15 50%	2 7%	1 3%
33	Propriedades do produto escalar de vetores	3 10%	2 7%	6 20%	14 47%	3 10%	2 7%
34	Interpretação geométrica do produto escalar de vetores	4 13%	3 10%	3 10%	15 50%	3 10%	2 7%
35	Produto vetorial	1 3%	5 17%	6 20%	15 50%	2 7%	1 3% 2
36	Interpretação geométrica do produto vetorial	5 17%	3 10%	6 20%	10 33%	4 13%	2 7%
37	Propriedades do produto vetorial	4	2	7	11	4	2

		13%	7%	23%	37%	13%	7%
38	Produto misto de vetores	5 17%	2 7%	1 3%	15 50%	2 7%	5 17%
39	Propriedades do produto misto	7 23%	0 0%	3 10%	13 43%	4 13%	3 10%
40	Interpretação geométrica do produto misto	8 27%	1 3%	2 7%	12 40%	4 13%	3 10%
41	Resolução de questões envolvendo adição algébrica de vetores	1 3%	5 17%	4 13%	15 50%	4 13%	1 3%
42	Resolução de questões envolvendo adição geométrica de vetores	4 13%	5 17%	4 13%	12 40%	4 13%	1 3%
43	Resolução de questões envolvendo subtração algébrica de vetores	3 10%	4 13%	5 17%	14 47%	3 10%	1 3%
44	Resolução de questões envolvendo subtração geométrica de vetores	4 13%	5 17%	4 13%	12 40%	4 13%	1 3%
45	Resolução de questões envolvendo multiplicação de um vetor por um escalar	3 10%	3 10%	6 20%	12 40%	5 17%	1 3%
46	Resolução de questões envolvendo produto escalar	2 7%	3 10%	6 20%	12 40%	6 20%	1 3%
47	Resolução de questões envolvendo produto vetorial	3 10%	3 10%	6 20%	11 37%	6 20%	1 3%
48	Resolução de questões envolvendo produto misto	6 20%	2 7%	3 10%	12 40%	6 20%	1 3%
49	Resolução de questões envolvendo área do triângulo com os vértices dados	8 27%	1 3%	4 13%	9 30%	7 23%	1 3%
50	Resolução de questões envolvendo área do triângulo quando os vértices necessitam ser determinados	8 27%	1 3%	2 7%	9 30%	9 30%	1 3%
51	Resolução de questões envolvendo a área do paralelogramo com os vértices dados	7 23%	3 10%	2 7%	8 27%	9 30%	1 3%
52	Resolução de questões envolvendo a área do paralelogramo quando os vértices necessitam ser determinados	6 20%	3 10%	2 7%	8 27%	10 33%	1 3%
53	Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro com os vértices dados	6 20%	2 7%	3 10%	9 30%	8 27%	2 7%
54	Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro quando os vértices necessitam ser determinados	6 20%	2 7%	4 13%	8 27%	7 23%	3 10%
55	Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo com os vértices dados	6 20%	2 7%	4 13%	9 30%	6 20%	3 10%
56	Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo quando os vértices necessitam ser determinados	6 20%	2 7%	2 7%	9 30%	8 27%	3 10%

Fonte: pesquisa de campo (2021)

Os resultados apontaram que a maioria dos assuntos tem grau de dificuldade de compreensão “Regular” tendendo a “Fácil” e “Muito Fácil”; contudo, foi possível perceber maiores problemas de entendimento de conteúdos relacionados ao produto misto, suas propriedades e interpretação geométrica; desigualdade triangular; adição e subtração algébrica e geométrica

de vetores, com destaque, as relacionadas ao espaço, e na resolução de questões envolvendo produto misto e objetos geométricos.

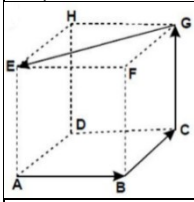
Também foi possível observar uma contradição em relação aos conteúdos e a resolução de questões, por exemplo, os discentes disseram ter dificuldade no conteúdo de adição e subtração de vetores geométrica e algébrica, porém não apresentaram a mesma dificuldade quando utilizam o assunto aprendido na resolução de questões.

Outra observação pertinente é em relação ao grau de dificuldade de resoluções de questões envolvendo figuras geométricas como triângulo, paralelogramo, tetraedro e paralelepípedo podendo ser uma indicativo da ausência do uso de questões aplicadas e/ou contextualizadas ou da dificuldade dos alunos em resolver questões contextualizadas que corrobora com o resultado estatístico obtido entre variáveis “Professor usava questões contextualizadas para o ensino de vetores” e “Você conseguiria resolver questões contextualizadas a partir dos assuntos vistos em sala”, já descritas anteriormente.

Outra característica observada foi a dificuldade nas resoluções de questões envolvendo o conteúdo já estudado, em especial, novamente, as que envolvem figuras geométricas. Por fim, foi proposto aos alunos a resolução de 10 questões e foi perguntado se ele seria capaz de resolver.

Infelizmente, devido ao período pandêmico a consulta não foi feita de forma presencial e, portanto, não tivemos acesso ao processo de resolução das questões pelos discentes e nem se os mesmos tentaram resolvê-las, apesar da solicitação individualmente, não obtivemos retorno. O Quadro 24 apresenta os resultados; o sombreamento em verde destaca o maior percentual e em amarelo, os percentuais iguais.

Quadro 24 – Indique se você seria capaz de resolver as questões abaixo

QUESTÃO	Indique se você seria capaz de resolver as questões abaixo, relativas à disciplina de Cálculo Vetorial	
	SIM	NÃO
1. Encontre a origem do segmento A que representa o vetor V = (2,-3,1), sendo sua extremidade o ponto B = (2,-1,4).	18 60%	12 40%
 2. Com base na figura determine o vetor soma dos vetores AB, BC, CG e GE.	17 56%	13 44%
3. Prove que u + v = w à u = w - v (sendo u, v e w vetores)	15 50%	15 50%
4. Verifique se os pontos A (-1, -5, 0), B (2, 1, 3) e C (-2, -7, -1) são colineares.	15 50%	15 50%
5. Dados u = 2i , v = i+j+k e w = -2i+6j+6k, verifique se o vetor w é uma combinação linear dos vetores u e v (sendo u, i, v, j, k, w vetores)	11 37%	19 63%
6. Determine a medida do menor ângulo do triângulo cujos vértices são: A (2, -1, 1), B (1, -3, -5) e C (3, -4, -4).	15 50%	15 50%
7. Determine a medida da área do triângulo cujos vértices são: A (1, -2, 1), B (2, -1, 4) e C (-1, -3, 3)	14 47%	16 53%
8. Determine o perímetro do triângulo com vértices A (2, 4, 0), B (0, 2, 4) e C (6, 0, 2)	15 50%	15 50%
9. Sejam u = (3,1,-1) e v = (a,0,2). Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por u e v seja igual a 5 (sendo u e v vetores)	12 40%	18 60%
10. Determine o volume do tetraedro gerado pelos vetores da base canônica do R^3	8 27%	22 73%

Fonte: pesquisa de campo (2021)

Dos resultados pode-se ressaltar que a maioria dos discentes não conseguiriam resolver as questões, em especial, as que envolviam figuras geométricas, o que confirmou o resultado obtido quando perguntado o grau de dificuldade de compreensão de determinados assuntos.

Por outro lado, a interpretação dos resultados indicou que a classificação da dificuldade em compreender o assunto como “Regular”, “Fácil” e, até mesmo, “Muito Fácil” não foi suficiente para uma aprendizagem efetiva, pois, como visto, não garantiu que os alunos conseguiriam resolver questões relacionadas aos assuntos. Contudo, a não resolução das questões, também, pode indicar a não problematização do assunto e/ou a não realização de exercícios.

3.4.2.1. Síntese: consulta a discentes

A partir das informações analisadas pôde-se traçar o perfil dos discentes consultados, sendo a maioria do sexo masculino e na faixa etária entre 21-25 anos; em relação a formação de nível médio, a maioria era oriundo da rede Estadual de Ensino.

O ingresso no curso foi entre 2006 e 2019; a maior parte dos estudantes, estava em fase de conclusão do curso, porém já haviam ultrapassado o tempo máximo de integralização, sendo que, apenas, 01 estava dentro do prazo máximo. Os egressos representaram 12 (40%) dos entrevistados. Dos entrevistados, 22 (73%) trabalhavam de forma remunerada e 14 (47%) faziam algum tipo de curso extracurricular.

Sobre o processo de ensino, aprendizagem e avaliação do conteúdo de vetores pôde-se concluir que, segundo os discentes, assuntos de cálculo vetorial foram vistos em uma disciplina específica e em outras correlatas. A maioria dos alunos do curso gostavam do assunto de vetores, porém tiveram um pouco de dificuldade para aprender.

Os alunos classificaram o seu nível de aprendizado como “Regular” e o nível de interesse como “Interessado” e disseram não se distrair nas aulas; não tinham o hábito de estudar diariamente fora da Universidade e quando o faziam não tinham auxílio.

Essa amostra também indicou que o fato de gostar está diretamente relacionado a ter tido dificuldades em aprender o que indica uma relação com o fator motivacional; assim como, o nível de aprendizado relacionado ao nível de interesse sobre o assunto de vetores.

Sobre a metodologia de ensino, disseram que a maioria das aulas iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios, e sentiam-se satisfeitos com o método; para exercitar o conteúdo os professores, frequentemente, apresentavam uma lista de exercícios a serem resolvidos e as avaliações eram realizadas, somente, por meio de Prova Escrita Individual.

Em relação ao grau de dificuldade de compreensão, a maioria dos assuntos, foi considerada como de “Regular à Muito Fácil”, a exceção dos assuntos envolvendo produto misto, adição e subtração de vetores,

desigualdade triangular e a resolução de questões relacionadas a algum objeto geométrico

Estatisticamente, pode-se afirmar que: apesar do uso de questões contextualizadas para o ensino, os alunos, majoritariamente, não conseguiriam resolvê-las hoje e que o uso desse tipo de questão para o ensino traz maior satisfação com a metodologia utilizada; os alunos que são “Pouco Interessado” ou “Interessado” no assunto foram aqueles que gostaram, ao menos, “Um pouco” do conteúdo em estudo.

Segundo os discentes, os professores que utilizavam somente avaliação do tipo Prova Escrita Individual eram os que, também, utilizavam uma lista de exercícios como único meio de para exercitar os conteúdos.

Além disso, as dificuldades de aprendizagem estavam concentradas na resolução de questões; os alunos eram capazes de resolver questões relacionadas a assuntos que tiveram um grau de dificuldade de “Regular à Fácil”, porém não conseguiriam resolver as que necessitavam de conteúdos classificados como grau de compreensão de “Regular à Difícil”.

O Quadro 25 apresenta, resumidamente, os principais resultados da consulta aos discentes, destacando os dados sem influência isoladamente e os com associações estatísticas significativas.

Quadro 25 – Resumo dos principais resultados obtidos: consulta aos discentes

Resultados obtidos com a pesquisa de campo: consulta aos discentes	
Dados sem influência isoladamente	Cálculo Vetorial, Eletromagnetismo, Cálculo II, Antenas, Linhas de Transmissão e Propagação, Física e Satélites foram as disciplinas nas quais os alunos viram assuntos relacionados a vetores.
	19 (63%) dos alunos Gostam Pouco de assunto de vetores.
	16 (53%) disseram ter tido Um Pouco de dificuldade para aprender Cálculo Vetorial.
	13 (43%) classificaram o nível de aprendizado como Regular.
	14 (47%) classificaram o nível de interesse no assunto como Interessado.
	24 (80%) disseram não se distrair nas aulas.
	14 (47%) disseram que estudavam o assunto fora da Universidade “Alguns dias da semana” .
	16 (53%) não tinham auxílio, fora de sala, na resolução dos exercícios.
	24 (80%) disseram que a maioria das aulas iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios.
	16 (53%) disseram estar satisfeitos com a metodologia utilizada.
	20 (67%) disseram que para exercitar o conteúdo os professores, apresentavam, somente, uma lista de exercícios a serem resolvidas.
	16 (53%) disseram que os professores utilizavam questões contextualizadas para o ensino de vetores.
	13 (43%) disseram que não conseguiriam resolver questões contextualizadas a partir dos assuntos vistos em sala de aula.

	20 (67%) disseram que os professores só realizavam para avaliação do assunto “prova escrita individual”
	A maioria dos conteúdos foi classificado com grau de dificuldade de compreensão Regular.
	Os conteúdos com maior grau de dificuldade de compreensão foram: componentes de um vetor no espaço, módulo de um vetor no espaço, adição geométrica e algébrica de vetores no espaço, desigualdade triangular, subtração geométrica de vetores no espaço, produto misto e suas propriedades e interpretação geométrica, resolução de questões envolvendo produto vetorial, produto misto e com figuras geométricas.
	Os alunos disseram ser menos capazes de resolver questões envolvendo figuras geométricas.
Associações estatísticas significativas entre as variáveis ...	Os alunos que se consideraram “Pouco Interessado” ou “Interessado” são os que “Gostam Pouco” do assunto.
	Apesar do uso de questões contextualizadas pelo professor para o ensino de vetores, os alunos não conseguiriam resolver questões desse tipo a partir dos assuntos vistos em sala de aula, à exceção, daqueles que estavam satisfeitos com a metodologia.
	Os professores que utilizaram somente avaliação do tipo prova individual escrita apresentavam a lista de exercícios como único meio para exercitar os assuntos vistos em sala de aula.
	O grau de dificuldade de compreensão estava diretamente relacionado a dificuldade para aprender Cálculo Vetorial, ou seja, quanto mais fácil o assunto melhor o grau de compreensão adquirido e, vice-versa.
	A não capacidade de resolver as questões não significou que o assunto não foi compreendido; porém indicou que a compreensão Regular não era suficiente para garantir que o assunto tinha sido aprendido pelos alunos.

Fonte: pesquisa de campo (2021).

Especificamente, o Quadro 26 apresenta os resultados entre cada variável com associações estatísticas significativas verificadas via Teste de Fischer com o seu p-valor e o efeito *V-Cramer.*

Quadro 26 - Resultado Teste de Fischer - Questionário Discente

Variável 1	**Variável 2**	**Valor-p**	**Efeito V-Cramer**	**Interpretação**
Gostar de Cálculo Vetorial ou assunto com Vetores	Dificuldades para aprender Cálculo Vetorial	0,334	-	Não há associação estatística significativa
Nível de aprendizado sobre o assunto vetores	Nível de interesse sobre o assunto vetores	0,440	-	Não há associação estatística significativa
Nível de Interesse no assunto vetores	Gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores	<.001	Grande	Há associação estatística significativa
Professor usava questões contextualizadas	Conseguiria resolver questões contextualizadas	<.001	Grande	Há associação estatística significativa
Professor usava questões contextualizadas	Satisfação com a metodologia utilizada	0,006	Grande	Há associação estatística significativa

Fonte: elaborado a partir dos resultados do Teste de Fischer com o software Jamovi

Por fim, tanto a análise do diagnóstico discente quanto docente nos apontaram quais variáveis deveriam ser destacadas, analisadas e verificadas durante a produção e aplicação da sequência didática.

Para fins de composição das análises prévias, a seguir, será apresentada, de forma breve, as principais características da Teoria da Atividade que foi a Teoria de Análise considerada nessa tese.

3.5. TEORIA DA ATIVIDADE

De acordo com Piccolo (2012) a Teoria da Atividade tem por base as ideias de Vigotsky (1896-1934), psicólogo bielo-russo, por meio da Psicologia Histórico Cultural; foi desenvolvida, também, por Leontiev (1903-1979), psicólogo e filósofo soviético, e também estudada por Vasily Davydov (1930–1998), psicólogo russo, dentre outros. Libâneo (2004) disse que a teoria Histórico-cultural da Atividade desenvolvida, incialmente, por Leontiev, Rubinstein e Luria, é uma continuidade daquela iniciada por Vigotsky.

A teoria de Vigotsky representa uma corrente psicológica que surgiu na década de 1920 na União Soviética e explica desenvolvimento da mente humana com base nos métodos e princípios do materialismo dialético (Libâneo e Freitas, 2006).

O ponto chave desse método, de acordo com Cole e Scribner (1991), é o estudo dos fenômenos como processos em movimento e mudança, o que levou Vigostsky a acreditar que este seria a solução dos principais paradoxos de seus contemporâneos.

A teoria do materialismo histórico de Marx também influenciou o pensamento de Vigostsky, pois “[...]De acordo com Marx, mudanças históricas na sociedade e na vida material produzem mudanças na ‘natureza humana’ (consciência e comportamento)” (Cole e Scribner, 1991, p.10).

Piccolo (2012, p. 284) acrescenta que Vygotsky também é partidário do conceito de trabalho de Marx como “atividade reprodutora, criadora e transformadora, seja de ideias, da natureza ou do próprio ser humano”, pedra angular do materialismo histórico.

Libâneo e Freitas (2006, p. 3 e 4) enfatizam que

> Na concepção histórico-cultural, a atividade é um conceito-chave, explicativo do processo de mediação. A atividade mediatiza a relação entre o homem e a realidade objetiva. O homem não reage mecanicamente aos estímulos do meio, ao contrário, pela sua atividade, põe-se em contato com os objetos e fenômenos do mundo circundante, atua sobre eles e transforma-os, transformando também a si mesmo. Centrada na categoria teórica da atividade, a teoria histórico-cultural da atividade (ou teoria da atividade) surgiu como desdobramento da concepção histórico-cultural e foi desenvolvida por Leontiev (1903-1979) e depois por seus seguidores. (Libâneo e Freitas, 2006, p. 3 e 4)

Os autores ressaltam um conceito primordial em termos da caracterização da atividade que é o processo de mediação, como um “regulador”, ou “impulsionador” da ação do homem sobre o meio; no caso da educação, o professor é o responsável pela mediação, ele é o elo entre o aluno e o conhecimento para que a aprendizagem seja possível (Libâneo, 2004). Piccolo (2012) diz que a “atividade é a mediação concretizada face à realidade externa”.

Sobre a relação entre a atividade e a mediação Santos e Asbahr (2020, p. 8)

> [...] a atividade é a mediação pela qual a relação objetiva/subjetiva estabelecida entre homem e mundo se concretiza, faz-se necessário destacar que essa relação é diretamente determinada pelo lugar ocupado pelo sujeito no sistema de relações sociais estabelecidas entre os homens para reprodução nos modos de produção. (Santos e Asbahr, 2020, p.8)

Para Leontiev (2014) a atividade do homem depende de sua posição na sociedade e de como ele se vê, compreende e entende essa posição; portanto,

> Atividade é uma unidade molar, não uma unidade aditiva da vida do sujeito físico, material. Em sentido estreito, isto é, no nível psicológico, é uma unidade de vida, mediada pelo reflexo psíquico, a função real a qual é aquela que orienta o sujeito no mundo objetivo. Em outras palavras, a atividade não é uma reação e não uma totalidade de reações, mas um sistema que tem estrutura, suas próprias transições e transformações internas, seu próprio desenvolvimento. (LEONTIEV, 2014, p. 48)

Nesse sentido, a estrutura geral da atividade contém os seguintes elementos: sujeito, objeto, necessidade, motivo, objetivo, instrumentos, operações, ação e produto (Núñez e Pacheco, 1997; Leontiev, 2014; Sá, 2020). O Quadro 27 elenca cada elemento da estrutura de uma atividade e sua característica.

Quadro 27 - Características dos elementos da estrutura da atividade

ELEMENTO	CARACTERÍSTICA DOS ELEMENTOS
Sujeito	detentor de necessidades
Objeto	dá a atividade uma direção; é o seu verdadeiro motivo
Necessidade	direciona e regula a atividade concreta do sujeito em um ambiente objetivo; dirigem a atividade na parte do sujeito
Motivo	Pode ser material ou ideal, presente na percepção ou exclusivamente na imaginação ou no pensamento; surge a partir da necessidade e do objeto
Objetivo	é a percepção do resultado imediato, a conquista de uma atividade que satisfaz a necessidade do sujeito; finalidade de uma ação
Ação	direcionadas ao objetivo e provocadas pelo motivo
Operações	resultado de uma transformação de uma ação que é resultado de outra ação e assim sucessivamente (“tecnização”); contéudo de uma ação e o modo de realizá-la
Instrumentos	Ferramentas para a realização das operações
Produto	apresentação do resultado

Fonte: elaborado a partir de Leontiev (2014) e Santos e Asbahr (2020).

A análise dos elementos da estrutura da atividade nos remetem a um movimento encadeado e de dependência entre os elementos, onde um elemento “dá origem” ao outro; porém não se trata de extinguir o elemento anterior ou que lhe deu origem, mas de promover sentido e significado aos elementos e, consequentemente, a atividade em si; “[...] os elementos se articulam em uma totalidade coesa, una, dinâmica, histórica e socialmente determinada” (Santos e Asbahr, 2020, p. 20).

Contudo, os elementos não devem ser definidos como um processo aditivo (Piccolo, 2012); Leontiev (2014) diz que a atividade é uma cadeia de ações e constitui um processo dialético, no qual a atividade pode se transformar em ação quando da perda de seu motivo e a ação em atividade a partir, também, dos motivos que lhe dão causa.

Sá (2020) ressalta que o trabalho docente é realizado por diversas tarefas, tais como, planejamento, organização, revisão, avaliação etc., e que cada uma dessas tarefas contêm os elementos da teoria da atividade e, portanto, podem consideradas como Atividades didáticas. Leontiev (2010) acrescenta que é necessário entender que nem todo processo caracteriza uma atividade; para que o processo seja uma atividade, deve satisfazer uma necessidade especial na relação entre o homem e o mundo. Exemplifica que

> [...] Nós não chamamos de atividade um processo como, por exemplo, a recordação porque ela, em si mesma, não realiza via de regra, nenhuma relação independente com o mundo e não satisfaz qualquer necessidade especial. (Leontiev, 2010, p.68).

Além de Leontiev, outros pesquisadores também se dedicaram ao desenvolvimento da Teoria da Atividade: Piotr Iakovlevich Galperin (1902-1988) formulou a teoria do desenvolvimento psíquico; Daniel B. Elkonin (1904-1984) investigou a periodização do desenvolvimento humano e a aprendizagem escolar e V. V. Davydov (1930-1988), fundamentado em Vygotsky, Leontiev e Elkonin elaborou a Teoria do Ensino Desenvolvimental com foco na atividade de estudo (Libâneo e Freitas, 2006, 2013).

Portanto, a teoria de Vigotsky está centrada na atividade humana de forma geral, Leontiev e seus seguidores investigaram a organização concreta da atividade humana; porém para Davydov é necessário uma atividade especial para a escola que desenvolva e permita a assimilação, a apropriação, dos procedimentos e conhecimentos do conteúdo, qual seja, a atividade de estudo (Davydov e Markova, 1987).

Davydov e Slobódchikov (1991, p. 128, *tradução nossa*) elencam as características de uma atividade de estudo do aluno de escola da seguinte forma:

> Em primeiro lugar, ela contém todos os componentes do conceito geral de atividade descritos acima. Em segundo lugar, estes componentes têm um conteúdo específico orientado para um objeto difere de qualquer outro tipo de atividade (por exemplo, da atividade de jogo ou de trabalho). Em terceiro, na atividade de estudo é necessário que haja o princípio criativo ou transformador. Se nas atividades dos alunos em sala de aula não estão presentes os elementos citados, então os alunos ou não estão de todo realizando a atividade de estudo propriamente dita, ou a estão realizando em uma forma muito incompleta (é preciso dizer que semelhante situação se observa com frequência nas escolas). (Davydov e Slobódchikov, 1991, p.128, *tradução nossa*)

Assim, os autores contextualizam a atividade como uma possiblidade de desenvolvimento e aprendizagem para os alunos, que são os sujeitos detentores de necessidades; a estes Davydov (1986) acrescenta que se constituem a partir de duas etapas, diferentes e complementares: o sujeito individual e o coletivo.

O primeiro surge da participação, das relações, da colaboração com o outro, do aprender participativo, mediado e que “[...] por meio da apropriação, reproduz em si mesmo as formas histórico-sociais da atividade” (Davydov, 1986, p. 13); já o sujeito coletivo é uma “consequência” do primeiro, que busca o

aprendizado por si próprio, ou seja, de forma autônoma, com habilidades que podem suprir as suas necessidades.

Portanto, é essa exploração que leva a ações, operações, instrumentos que resultam na apresentação dos resultados, produto, e tendem a constituir a autonomia do estudante a partir da realização das atividades de estudo.

Dentro dessa perspectiva, Davydov (1988, 1999), ainda em relação aos elementos estruturantes da Atividade de Estudo, acrescenta aos já propostos por Leontiev (2014), no que diz respeito à Teoria da Atividade: o elemento DESEJO, "´núcleo básico de uma necessidade" (Davydov, 1999, p. 3), que considera essencial na estrutura interdisciplinar da atividade. E acrescenta

> Necessidades e desejo compõem a base sobre a qual as emoções funcionam. O termo *esfera das necessidades e emoções* surgiu na psicologia e não sem razão. A partir de nossas observações da vida real e de alguns dados de pesquisa, podemos entender que as emoções e necessidades não podem ser consideradas separadamente, pois as necessidades se mostram através de manifestações emocionais.
> O termo *desejo* atinge a verdadeira essência da questão: as emoções são inseparáveis de uma necessidade. Ao discutir uma certa emoção podemos sempre identificar a necessidade em que está baseada a emoção. E quando estamos discutindo um tipo de necessidade, temos que definir as emoções que dela se originam [...] (Davydov, 1999, p. 3, tradução de José Carlos Libâneo).

Portanto, de acordo com o autor, as ações são dirigidas a partir de uma necessidade impulsionadas por um desejo, por exemplo: a necessidade de aprender pelo desejo de ser um profissional, a necessidade de tirar boas notas pelo desejo da aprovação e, até mesmo, a necessidade de comer pelo desejo de manter-se bem, de manter-se viva. Porém, a maior dificuldade é transformar o desejo em uma necessidade (Davydov, 1999).

Enfim, todas as necessidades podem dar origem a emoções como ansiedade, prazer, orgulho, raiva, vergonha, dentre outras; e, de acordo com Davydov (1999, p.7), "A função geral das emoções é capacitar uma pessoa a pôr-se certas tarefas vitais, mas este é somente meio caminho andado", pois se as emoções levarem o sujeito a atender que ele possui os meios para solucionar determinada tarefa, ele irá realizá-la; caso contrário, irá recusá-la; assim, "incidentalmente, nesse ponto de vista, as emoções são mais fundamentais que os pensamentos".

A partir desse contexto, no meio escolar, para a realização da atividade de estudo, Davydov (1988), estabelece seis ações para o seu andamento que, inicia-se com a orientação do professor e depois é feita pelos alunos de forma autônoma, “de modo que se forme nele a capacidade de agir independentemente com os conteúdos científicos, chegando, com isso a formação do pensamento produtivo, criativo.” (Miller, 2019, p. 82). As ações de forma objetiva de acordo com Davydov (1988), são:

1. Análise do conteúdo da atividade a fim de verificar uma relação geral do objeto dado que deve ser refletido no conceito teórico;
2. Formulação de um modelo por meio de gráficos, letras, a fim de fixar a relação observada incialmente de forma organizada; são os “meios materiais de idealização e estruturação da materialidade científica” (Davydov, 1981, p.132, *tradução nossa*);
3. Transformação do modelo para estudar as relações universais estabelecidas,

> “Por meio da transformação do modelo, o aluno é capaz de perceber a dinâmica das conexões internas do objeto, conexões essas representadas no modelo que ele elaborou antes, ou seja, ele consegue captar o movimento interno do objeto em estudo” (Miller, 2019, p.85).

4. Determinação pelos alunos de um procedimento único e geral definidos a partir das ações anteriores: “consiste na dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares” (Davydov, 1988, p. 183, *tradução nossa*);
5. Ação de controle: “destina-se a manter a coerência operacional das ações conforme as condições nas quais ela é executada, de modo a manter a integridade do sistema de ações no interior da atividade de estudo” (Miller, 2019, p. 85)
6. Ação de avaliação: para verificar em que medida o objetivo final foi atingido e/ou ainda de que forma os estudantes realizaram as tarefas.

Assim, a Atividade de Estudo promove um conjunto de ações mentais a serem desenvolvidas pelos estudantes e a vivência da formação dos conceitos a partir das relações que ele mesmo observa; além disso, a medida em que, desenvolve esse pensamento, esse conjunto de ideias, é levado a tomar

decisões de forma autônoma e com maior coerência e assertividade de acordo com objeto em estudo, desde que, a atividade proposta esteja amparada nos elementos estruturantes elencados.

No mais, Davydov (1988, p. 161) enfatiza que, no meio escolar, as atividades propostas pelos professores devem ter por objetivo e exigência dos alunos:

> ***1)*** a **análise** do material factual a fim de descobrir nele alguma relação geral que apresente uma vinculação governada por uma lei com as diversas manifestações deste material, ou seja, a construção da generalização e da abstração substantivas; **2)** a **dedução**, baseada na abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em algum objeto integral, ou seja, a construção de seu "núcleo" e do objeto mental concreto; e ***3)*** o **domínio**, neste processo de análise e síntese, do procedimento geral ("modo geral") de construção do objeto estudado.
> (Davydov, 1988, p. 161, grifo do autor)

De forma clara, entende-se que o autor destaca os aspectos de análise, dedução e domínio, como parâmetros a serem verificados em relação aos estudantes e que tornam a Teoria da Atividade com ênfase na Atividade de Estudo uma poderosa ferramenta de diagnóstico de ensino e aprendizagem de cunho interdisciplinar.

Assim, também, é por esse motivo que essa teoria vem sendo utilizada, especialmente, em pesquisas da área da Educação Matemática quando da utilização de metodologias alternativas de ensino tendo o professor como mediador e o ensino compartilhado entre docentes e discentes (Núñez e Pacheco, 1997; Fossa, 2020; Sá, 2020).

Para fins de esclarecimentos gerais, a subseção seguinte, apresenta, de forma resumida, as alternativas metodológicas para o ensino de Matemática "vinculadas" a Teoria da Atividade com foco na atividade de estudo, também referenciadas como tendências para o ensino em Educação Matemática.

3.6. ALTERNATIVAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

O avanço tecnológico das últimas décadas tem provocado mudanças sociais e comportamentais que exigem novas abordagens educacionais para

estimular e promover a participação do aluno em sala de aula e desenvolver de forma satisfatória a aprendizagem. Santos e Mafra (2020, p. 80) destacam que

> A maneira como deve ocorrer o processo educativo de hoje não deve ser igual como ocorria no século XX. Houve profundas transformações no âmbito político, econômico, cultural, tecnológico, dentre outros. Não se pode considerar a escola como algo isolado da sociedade, sem discutir, refletir e praticar, dentro do ambiente de ensino, as mudanças que ocorreram ao longo dos anos. Dessa forma, deve haver a preocupação de como a escola e os professores lidam com os novos desafios desse século. É preciso que se faça a reflexão de como deve ser a sala de aula, de como a escola deve se preparar para a utilização dos recursos computacionais e de qual será o papel do professor nesse novo contexto. (Santos e Mafra, 2020, p. 80)

Em relação ao ensino de matemática, inúmeras são as críticas recebidas pela necessidade de um ensino com melhor qualidade, atrelado a questões cotidianas, contextualizado, reflexivo, dinâmico, dentre outras coisas. De acordo com Sá (2020) essas críticas impulsionaram o surgimento de alternativas metodológicas denominadas de Tendências da Educação Matemática.

Essas metodologias têm por característica sair do modo tradicional de ministrar aulas e promover o protagonismo compartilhado por docentes e estudantes tendo o professor como mediador; vários estudos têm trazido diversas possibilidades de recursos que podem ser utilizadas como alternativas metodológicas para possibilitar essa interação (Sá, 2020; Fossa, 2020).

Nesse sentido, Brasil (1998) já apontava alguns caminhos para o ensino da matemática, quais sejam: a resolução de problemas, a história da matemática, as tecnologias de comunicação e os jogos. Mendes e Fossa (1998) destacaram como tendências o uso de: jogos, materiais concretos, etnomatemática, resolução de problemas, modelagem, uso de história, uso de computadores e estratégias psicológicas.

Sá (2020) apresentou as seguintes metodologias: jogos, modelagem, histórica da matemática, etnomatemática, tecnologias de comunicação, investigação matemática, resolução de problemas e por atividades experimentais.

Sobre esse rol cabe algumas considerações importantes tendo por base também o conjunto de trabalhos analisados de Ensino de Vetores: 1) não se trata de um rol exaustivo, mas simplificativo; 2) as tendências não são excludentes entre si, mas complementares a depender do objeto de ensino; 3) uma ou um

conjunto de tendências podem ser utilizadas para o mesmo objeto de ensino e na mesma atividade. Fossa (2020) ressalta que

> Em alguns casos, há certa aproximação entre as tendências assinaladas. O uso de jogos e o uso de materiais concretos – pelo menos quando este é feito dentro de um contexto de atividades estruturadas, sejam, ou não, elas de caráter de redescoberta – se assemelham bastante, a diferença sendo apenas a ênfase dada aos elementos lúdicos contemplados nas interações com os alunos. Em outros casos, há uma mesclagem de duas ou mais dessas tendências que faz surgir um novo tipo de intervenção com características inovadoras devidas à reciprocidade das características das tendências componentes. Um exemplo simples é o desenvolvimento de um modelo de ensino baseado em atividades construtivistas informadas pela história da matemática, iniciado pelo presente autor no início dos anos 90 (ver, e.g., Fossa (1998)) e desenvolvido num estudo científico pela primeira vez por Mendes (1997). (Fossa, 2020, p.11)

A fim de facilitar a visualização da aproximação entre as tendências ou a possibilidade de uso, o Quadro 28 apresenta algumas das tendências destacadas e o seu objetivo principal.

Quadro 28 - Apresentação das Tendências em Educação Matemática

TENDÊNCIA	**OBJETIVO**
Resolução de Problemas	Visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas do aluno a partir de uma situação que demanda uma série ações/operações para obter um resultado ou estimular a construção do conhecimento pelo aluno.
História da Matemática	É um instrumento de resgate da própria identidade cultural, pode esclarecer pensamentos, dar respostas a alguns “porquês” e sugerir ideias de abordagem de um conceito.
Tecnologias de Comunicação	Facilita a visualização, compreensão e demonstração de relações, propriedades e conceitos.
Jogos	Possibilita que os problemas sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções
Materiais Concretos	Inserção de elementos lúdicos nas interações com os alunos, tal como os jogos.
Etnomatemática	Estudo das práticas de diferentes grupos sociais para desenvolver suas atividades do dia a dia.
Modelagem	É investigativa e cooperativa na qual o aluno é agente ativo na construção de seu conhecimento.
Uso de Computadores	Uso de tecnologias de informação com o apoio do computador para desenvolver o pensamento matemático computacional.
Estratégias Psicológicas	Aguçar o interesse e a atenção do aluno
Investigação Matemática	Permite ao aluno levantar hipóteses e conjecturas sobre determinado fenômeno.
Por atividades experimentais	É um processo didático desenvolvido por meio da realização de tarefas.

Fonte: elaborado a partir de Brasil (1998), Fossa (2020), Santos e Mafra (2020) e Sá (2019,2020).

A partir da teoria da atividade com foco na atividade de estudo pode-se analisar os resultados da utilização de qualquer tendência em educação

matemática; dessa forma, é possível identificar em cada uma das tendências apresentadas os elementos estruturantes de uma atividade, bem como, nas atividades didáticas.

Sá (2020) apresenta quadros com a identificação de cada tendência e os elementos funcionais da atividade. A título de exemplo apresentamos, a partir do autor citado, o Quadro 29, relativo à Resolução por Problemas.

Quadro 29 - Elemento da atividade em aula de matemática por meio da Resolução de Problemas

Elemento Funcional da Atividade	**Elemento da Atividade em aulas de matemática por Resolução de Problemas**
Os sujeitos da atividade	Docentes e estudantes.
O objeto da Atividade	Conhecimento matemático/ problema ou situação motivadora.
O motivo	Necessidade de obter conhecimentos matemáticos.
O objetivo	Resolver problema(s), desenvolver habilidade específica ou introduzir conteúdo.
O sistema de Operações	Ações que são permitidas realizar as informações oriundas do(s) problema(s).
A base orientadora da ação	As informações a respeito das informações e elementos do(s) problema(s)
Os meios	Os recursos disponíveis para a realização da resolução do(s) problema(s).
As condições	As relações que regem as informações referentes ao fenômeno/problema em estudo
O produto	A solução do problema; Domínio de uma técnica de resolução de problema ou formalização de conteúdo específico.

Fonte: Sá (2020)

No que concerne ao ensino por atividades experimentais, estas também podem ser caracterizadas por meio dos elementos funcionais da atividade. Dados detalhados relativos a essas alternativas metodológicas serão apresentadas na seção seguinte para permitir a elaboração e estruturação das atividades.

Outra observação necessária sobre a teoria da atividade é o seu uso nos trabalhos analisados sobre o ensino de vetores. O uso da teoria foi verificado em um único trabalho: a tese de Battisti (2016) cujo público-alvo são alunos de engenharia. Entretanto, não é um estudo com experimentação em sala de aula.

No mais, é importante destacar que cabe ao professor a escolha da tendência ou das tendências a utilizar, pois podem ser utilizadas em conjunto, a depender do objeto e do objetivo e, principalmente, da experiência docente; além disso, a presença de alunos susceptíveis a mudanças e diferentes por natureza tornam o processo ainda mais complexo. Na realidade, há de considerar cada

caso e, se necessário, estar sempre atendo as necessidades de alterações metodológicas.

O tópico a seguir irá fazer uma análise sobre as tendências verificadas ou sugeridas no estudo de revisão sobre ensino de vetores analisados.

3.6.1. Tendências em Educação Matemática e as pesquisas sobre ensino de vetores

Esse tópico tem por objetivo correlacionar as pesquisas analisadas na categoria Estudos brasileiros com ensino de vetores para verificar quais as tendências da educação matemática têm sido utilizadas e propostas para o ensino de vetores. Dentro desse contexto, Kasahara e Sá (2022b) apresentaram uma análise sobre o uso de tendência em Educação Matemática nos estudos do tipo “Proposta de Sequência didática com experimentação em sala de aula”.

Contudo, para fins quantitativos, o Quadro 30 apresenta as Tendências observadas nos estudos sobre ensino de vetores analisados na subseção referente a revisão de estudos.

Quadro 30 - Tendências em Educação Matemática observados no Ensino de Vetores

Tendências	**Quantidade de Estudos**
Investigação Matemática	04
Jogos	01
Resolução de Problemas	01
Resolução de Problemas e Materiais Concretos	02
Resolução de Problemas e Tecnologia de Comunicação – Software	01
Tecnologia de Comunicação – Software	20
Tecnologia de Comunicação – Software e Materiais Concretos	02
Tecnologia de Comunicação – Código de Barras	01
Total	**32**

Fonte: elaborado a partir dos trabalhos consultados sobre Ensino de Vetores

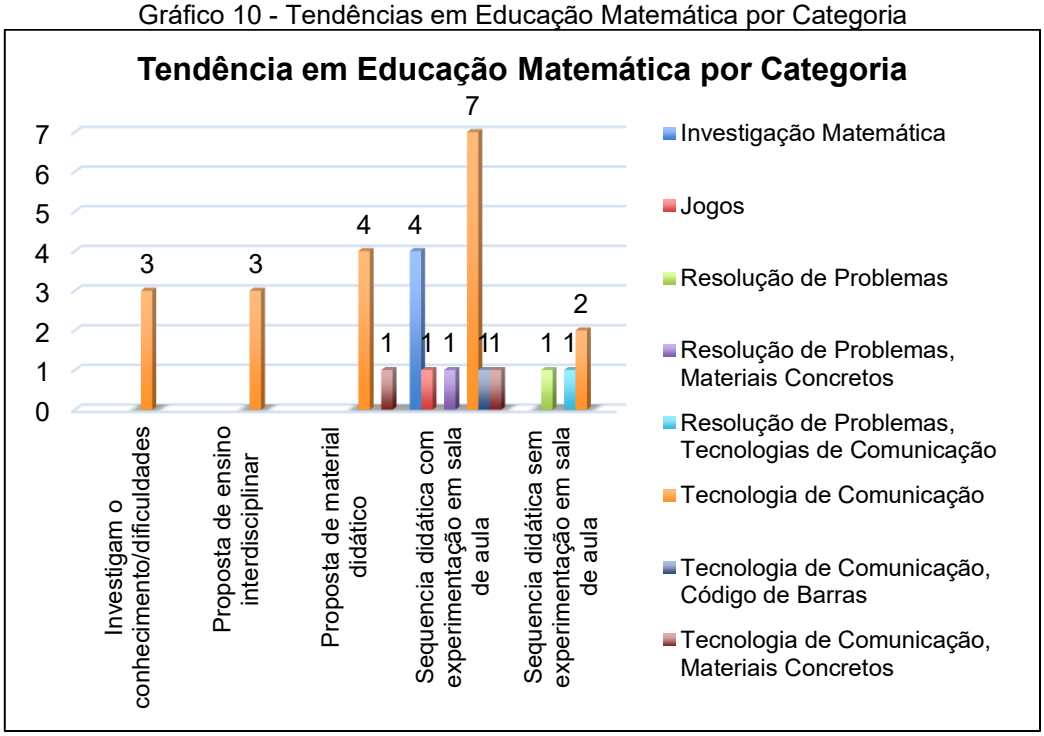
Portanto, a utilização das Tendências em Educação Matemática pôde ser observada em 32 dos 77 trabalhos analisados e, apenas, 03 (três) utilizaram duas tendências em conjunto. No entanto, não é nosso interesse criticar a metodologia tradicional, mas sugerir reflexões em torno destas e dos resultados em termos de ensino aprendizagem em sala de aula.

Em relação a utilização de software, o Geogebra é o mais citado devido as suas funcionalidades e facilidades como destacam os autores dos trabalhos;

vale destacar, além desse, a presença de software de realidade aumentada que têm por intuito facilitar a visualização, principalmente, de objetos tridimensionais.

De forma complementar, o Gráfico 10 mostra a utilização das tendências de acordo com as categorias anteriormente determinadas.

Gráfico 10 - Tendências em Educação Matemática por Categoria



Fonte: elaborado a partir dos trabalhos analisados sobre ensino de vetores

A análise gráfica mostra que os todos os estudos categorizados como de Sequência Didática com Experimentação em Sala de Aula abordaram algum tipo de tendência em educação matemática, sendo que, a maioria utilizou Software como Tecnologia de Comunicação. Os trabalhos com o uso de Investigação Matemática e de Jogo utilizaram essas metodologias de forma isolada.

Por fim, em relação a essa proposta de tese, que realizou experimentação com sequência didática por meio da RPPP e Atividades Experimentais; apenas o trabalho de Gontijo (2017) teve por metodologia a Resolução de Problemas, porém ressaltou que as atividades realizadas foram insuficientes para que os resultados fossem ainda mais satisfatórios.

Portanto, essa tese teve por pretensão, dentre outras coisas, preencher as lacunas deixadas pelos trabalhos pesquisados, bem como, utilizar uma tendência ainda não utilizada para o ensino de vetores, o que garante o ineditismo da pesquisa. Por fim, na subseção seguinte, será apresentado uma

visão geral sobre o erro no processo de ensino e aprendizagem e as metodologias de análises de erros que serviram como aporte à validação dos resultados.

3.7. O ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

No ambiente escolar, a verificação de erros em tarefas escolares é uma das funções do professor; tem por objetivo avaliar e obter a nota dos alunos pela classificação de suas respostas em certas ou erradas de acordo com o sistema escolar e padrão pré-estabelecidos. Assim, o erro, muitas vezes, é visto como algo negativo, punitivo, sinônimo de fracasso, de “burrice”, dentre outros sentimentos negativos.

Ao longo do tempo, diferentes conotações foram dadas a função dos erros no processo de ensino e aprendizagem. Nogaro e Granella (2004), destacam que “Diante do erro escolar, o educador por adotar a punição, a complacência ou construir a possibilidade de aprender”. Para Cury (1995, p. 40, grifo da autora) a forma como os professores agem mediante os erros dos alunos é reflexo de “suas concepções e crenças, sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa *aprender* Matemática”.

Assim, as concepções acerca do erro têm influências de teorias, tanto pedagógicas quanto psicológicas, Jucá (2022, p.3) resume essas ideias da seguinte forma:

> Na concepção Behaviorista, os erros são vistos como fracasso e devem ser evitados a qualquer custo; na piagetiana, os erros são produzidos como resultado dos conflitos cognitivos que os sujeitos vivem no esforço para se adaptarem a novas situações; e na perspectiva construtivista da teoria dos campos conceituais, os erros são frutos de uma construção conceitual insuficiente, e da teoria das situações didáticas, os erros são frutos dos obstáculos de aprendizagem (Jucá, 2022, p.3).

Assim, essas concepções, construídas levando em conta a formação do professor, desde à época de estudante, influenciam na maneira como os docentes lidam com os erros em sala de aula: seja baseado na concepção behaviorista, piagetiana, construtivista ou dos obstáculos de aprendizagem.

Nesse contexto, para essa última concepção relatada, Brousseau (1983), tendo por base a ideia de obstáculos epistemológicos defendidas por Bachelard

(1996), defende que os obstáculos se manifestam por erros; frutos, não somente, da ignorância ou do acaso, mas de compreensões incorretas ou do uso de conhecimento anterior de forma inadequada em alguma situação; para o autor, os erros fazem parte do processo de aprendizagem. Cury (2006, p. 2) destaca que

> Efetivamente, apontar erros e pontuar erros não propicia, ao professor, a oportunidade de compreender a construção do saber matemático de seus alunos. Que garantia temos de que uma resposta correta, pelos cânones acadêmicos indica ter o estudante compreendido o conteúdo em questão? E quando o aluno erra, é possível detectar o que ele sabe? (Cury, 2006, p.2)

Portanto, para a autora, que adota uma visão construtivista, os erros devem ser compreendidos com uma chance de retorno ao que não foi compreendido de forma a detectar, especialmente, aquilo que o aluno não sabe que, nessa visão, tende a ser mais relevante quando o foco não é, somente, resultados.

Analogamente, às concepções apresentadas, Torre (2007) aponta quatro direções, efeitos, que podem ser dados ao erro: destrutivo, deturpativo, criativo e construtivo. Os efeitos destrutivos e deturpativo apontam o erro como resultado.

No primeiro caso, é resultado de uma falha irreversível da natureza, do homem, do acaso, da qual não se pode esperar nada de positivo e tende a criar sentimentos de culpa e de arrependimento. No segundo, traz implícito todos os significados negativos atribuídos aos erros, nos campos do pensamento, da linguagem, da atuação e do erro voluntário cometido por engano.

Segundo o autor, as outras direções, ao contrário, trazem consigo, o erro como processo a partir de uma consideração positiva. No caso do efeito criativo, está em jogo uma postura transformadora diante dos erros; não se tratando, contudo, de transformar em positivo o negativo, mas de reconverter em processo o resultado do erro.

Nessa mesma linha, a direção construtiva, apresenta o erro como método de transmissão cientifica e transmissão didática; muitas vezes, como um erro estratégico, calculado, uma armadilha do pensamento. Acrescenta, ainda, que em um processo de ensino e aprendizagem o enfoque didático dos erros deve

estar inserido em uma consideração construtiva e, até mesmo, criativa dos erros, por meio de metodologias de heurísticas e descobertas, além disso,

> o professor pode se valer do erro em outros sentidos, como: analisando as causas dos erros, adotando uma atitude compreensiva, propondo situações ou processos para que o aluno descubra as suas falhas, utilizando-o como critério de diferenciação de processos de aprendizagem (Torre, 2007, p. 15-16).

Portanto, apesar das direções apontadas pelo autor, há o destaque e a preferência, sem dúvida, por Torre (2007), pela perspectiva construtiva no qual destaca a importância de aprender com os erros, pautado em uma metodologia de ensino que tenha o enfoque didático de erros, ou seja: um método de verificação, análise e correção de erros que vai além da atribuição de notas e de resultados quantitativos.

Em relação a análise de erros, Cury (2006) diz que pode ser considerada uma abordagem de pesquisa ou de metodologia de ensino, e explica

> Em pesquisas, podemos analisar detalhadamente as respostas dos alunos a uma determinada questão, para entender suas formas de resolução. A partir dos resultados da investigação, podemos elaborar estratégias de ensino para auxiliar os alunos a superarem suas dificuldades no conteúdo em questão e construírem um saber matemático condizente com o nível de ensino em que se encontram (Cury, 2006, p.1).

Assim, as formas de abordar os erros entrelaçam-se, em especial, em casos de pesquisas, na qual uma abordagem leva a outra. Entretanto, pode-se dizer que o saber-fazer docente em sala de aula quando pautado na análise de erros, indiretamente, o leva a adequar o seu modo de ensinar as principais dificuldades observadas.

Da mesma forma, Jucá (2021, 2022) corrobora com a autora ao considerar que a análise de erros nos permite verificar o desenvolvimento da aprendizagem do aluno e, ainda, possibilita aos docentes avaliarem suas práticas. Juca (2021) acrescenta que “os estudos sobre erros têm trazido contribuições importantes para o processo de ensino, aprendizagem e avaliação”.

Dentro desse contexto, Borasi (1987) destaca a interpretação dos erros como trampolins para a exploração e a importância, primeiramente, dos erros,

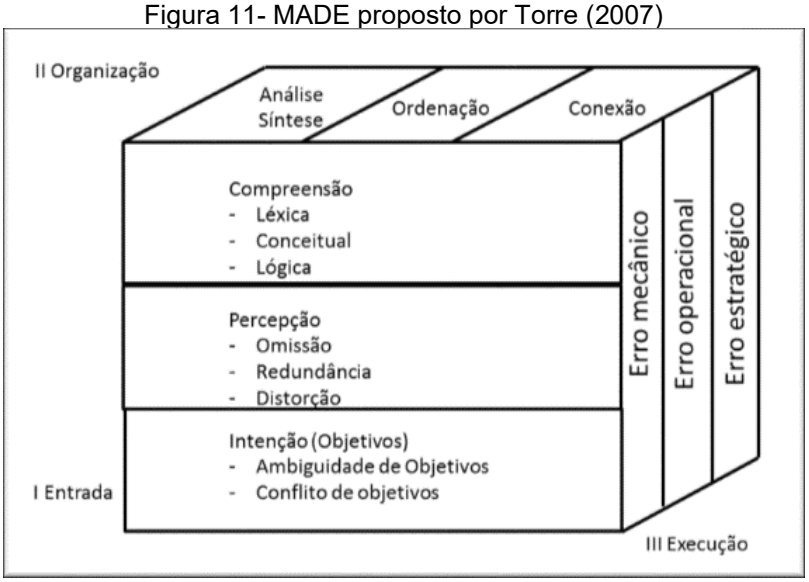
como um estímulo a ação, por fornecer evidências de que o resultado esperado não foi alcançado e que mudanças devem ser realizadas, e acrescenta

> [...] Os erros também podem fornecer informações valiosas sobre as causas das falhas e, então, sugerir alternativas. Entretanto, para que o potencial dos erros seja apreciado de forma completa, é preciso que ele seja interpretado de diferentes formas. Os erros não permitem, apenas, identificar deficiências nas estratégias escolhidas para atingir um objetivo pré-determinado. Mais importante, ainda, os erros apontam pontos fortes e limitações de estratégias disponíveis. Os erros também podem nos ajudar a identificar características específicas do contexto, e assim mostrar que o objetivo original era inadequado e precisa ser redefinido (Borasi, 1987, p. 4, *tradução nossa*).

Portanto, a autora destaca a importância da exploração do erro, em especial, as consequências positivas da sua identificação em termos de avaliação da estratégia didática usada em sala de aula e sobre a necessidade de mudança, assim como Torre (2007) que destaca a utilização do erro como estratégia de mudança; nesse caso, de forma ampla, abarcando as estratégias didáticas e, também, a forma de abordagem em sala de aula.

Assim, como guia para a investigação, análise e tratamento didático do erro, Torre (2007) apresenta um Modelo de Análise Didática de Erros (MADE) baseado em dimensões e categorias de erros e no entendimento de que o erro faz parte do processo de aprendizagem e estrutura-o em três momentos de um procedimento sistêmico: entrada, processamento e saída. A Figura 11 apresenta o MADE com suas dimensões e categorias.

Figura 11- MADE proposto por Torre (2007)



Fonte: Torre (2007)

Da figura podem ser visualizados os três momentos aos quais Torre (2007) se refere, que definem os diferentes tipos de erro. De acordo com o autor o modelo faz referência

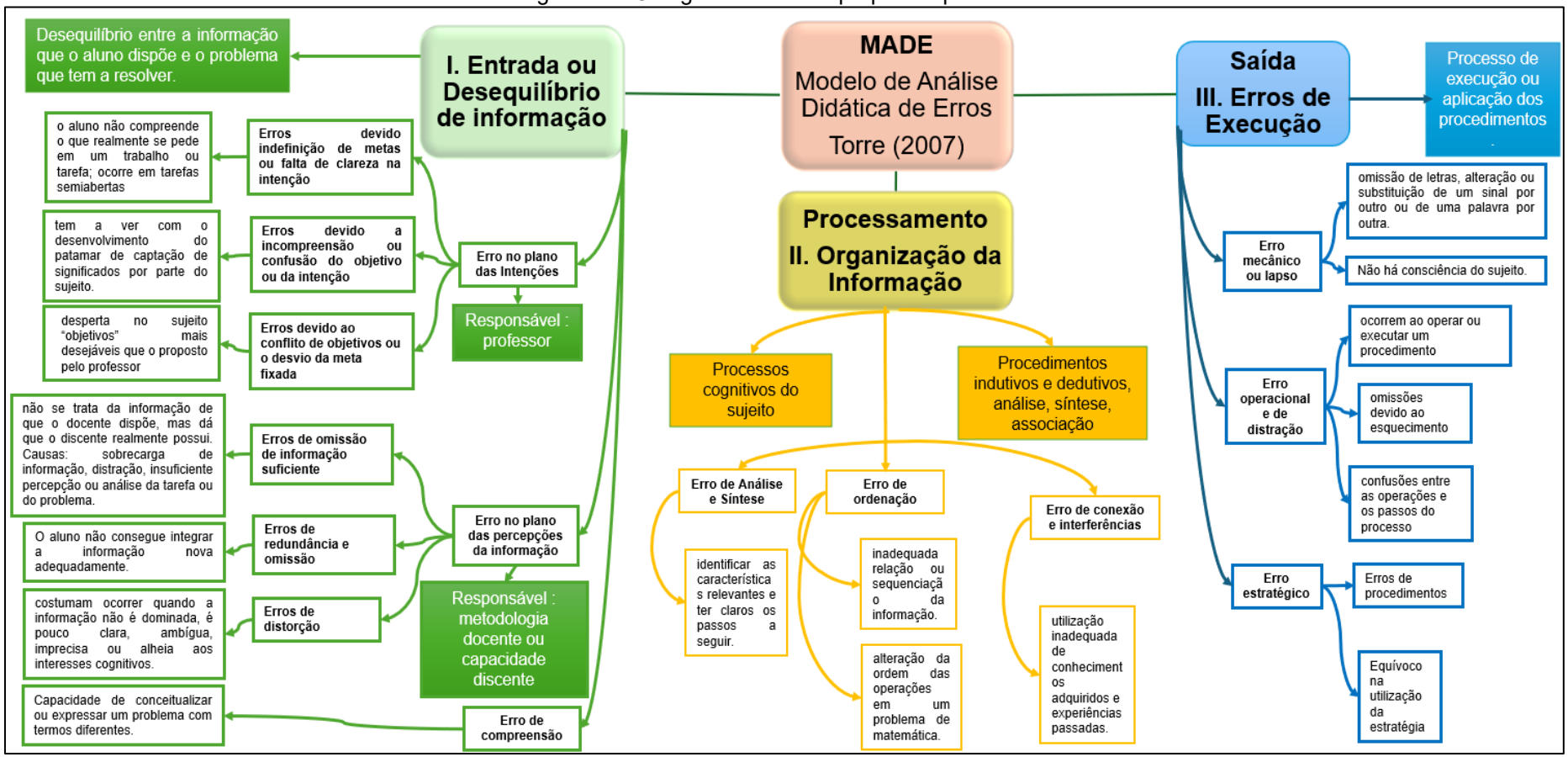
> [...] aos erros que ocorrem em torno da aprendizagem instrutiva, isto é, dos deveres de casa ou nas tarefas de aula, nas perguntas que o professor faz como feedback para sua explicação, em provas, e onde ocorra uma situação de aprendizagem. [...] Embora nosso MADE, tenha uma primeira intenção descritiva, não há dúvida de que pode nos ser útil em nível explicativo, preditivo e corretivo (Torre, 2007, p. 109).

De forma sucinta, a etapa de entrada representa a categoria de Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; de acordo com o autor, é caracterizada por um desequilíbrio entre o esperado e o obtido, podendo ocorrer no plano das Intenções tendo por principal responsável o professor, e das Percepções da informação nas qual a metodologia docente e a capacidade discente tendem a ser os principais responsável; e por equívocos de Compreensão.

A subcategoria do plano da Intenções abrange o Erros devido a Indefinição de Metas ou falta de Clareza na intenção, devido a Incompreensão ou Confusão do Objetivo ou da Intenção e devido ao Conflito de Objetivos ou o Desvio de Meta Fixada. No plano das Percepções estão os Erros de Omissão de Informação suficiente e de Redundância e Omissão.

Na etapa de Organização estão catalogados os Erros de Organização da Informação que podem ser de Análise e Síntese, de Ordenação e de Conexão e Interferências. Por fim, na fase de execução os erros cometidos são do tipo: Mecânico ou Lapso; Operacional e de Distração; e Estratégico. A Figura 12 apresenta um resumo do modelo proposto por Torre (2007) com a descrição sucinta de cada tipo de erro.

Figura 12 - Categorias de Erros propostas pelo MADE

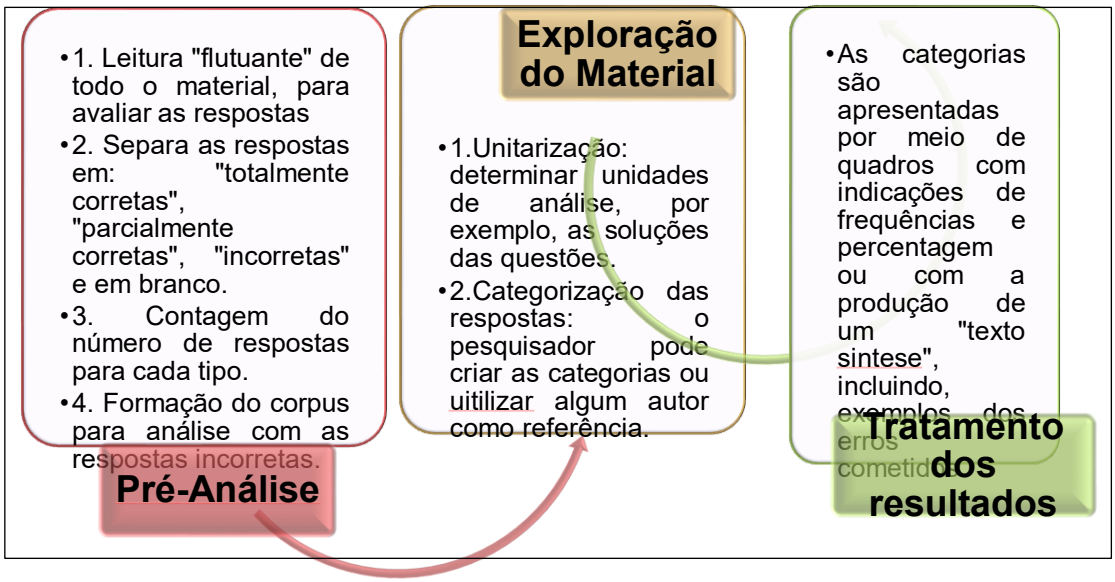


Fonte: elaborado a partir de Torre (2007)

Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009) também apresentaram uma metodologia investigativa de análise qualitativa dos erros baseada na análise de conteúdo de Bardin, sendo, portanto, constituída de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Aplicações e exemplos do uso dessa metodologia podem ser encontradas em Cury (2006, 2013), Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009) e Brum e Cury (2013).

As autoras indicam que respostas a questionários, testes ou experiências podem ser submetidas a esse método. Assim, “as respostas escritas dos estudantes a questões de matemática podem ser objeto de uma análise aprofundada e sistemática” (Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009, p. 2). A Figura 13 apresenta a descrição dos passos para essa metodologia de acordo com as autoras.

Figura 13 - - Passos da Metodologia de Análise de Erros proposta por Cury (2006)



Fonte: elaborado a partir de Cury (2006), Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009) e Brum e Cury (2013).

Outras categorias de erros são apontadas por Radatz (1979, 1980). Portanto, a partir da discussão apresentada, pode-se dizer que ao docente cabe a escolha de uma metodologia investigativa de análise de erros, tal como as apresentadas para compreender as dimensões e categorias dos erros e, também, uma compreensão sobre a forma didática de tratar os erros com meio de promover a aprendizagem revendo suas concepções e adequação ao ambiente escolar, quando necessário.

No mais, essa breve discussão nos aponta diferentes enfoques sobre o uso da análise de erros no processo de ensino e aprendizagem, por exemplo: como ferramenta de aprendizagem, como elementos para que os professores adotem outra estratégia de ensino, como possibilidade de entender como os estudantes constroem o seu conhecimento, para analisar as atitudes dos professores e dos estudantes mediante os erros, dentre outras coisas.

Assim, valendo-se da importância da análise de erros e dos métodos de investigação exemplificados no texto, entende-se que a análise de erros é uma ferramenta com potencial para validar os resultados da tese proposta, em especial, na verificação dos equívocos cometidos pelos alunos ao resolveram as atividades propostas na sequência didática, bem como, para verificação de desempenho no pré e pós-teste.

3.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DAS ANÁLISES PRÉVIAS

Essa seção teve por objetivo apresentar as análises prévias em relação ao objeto de estudo: vetores geométricos. Para tanto, foram apresentados aspectos históricos, curriculares, resultados de pesquisas brasileiras sobre o ensino de vetores, diagnósticos docentes e discentes, tendências em educação matemática como alternativas metodológicas ao ensino de vetores e uma visão sobre o erro no processo de ensino e aprendizagem.

Em relação a construção histórica de vetores pode-se perceber as principais motivações, inicialmente, pautadas na representação de grandezas físicas, seguida da proposição de teorias, que foi primordial para o estabelecimento da álgebra vetorial moderna.

As teorias ao longo do tempo foram tornando-se complementares, ainda que não vistas dessa forma pelos autores; não há obsolescência de teoria mas o “desaparecimento” em função de melhorias que se adaptaram aos conceitos matemáticos e formas de representação. No mais, a teoria de vetores passou a ser grandemente considerada quando aplicada a problemas físicos, o que demonstra a necessidade de contextualização e aplicação.

Ainda nessa seção, a análise curricular mostrou a ausência do conteúdo em níveis fundamental e médio e, quando muito, utilizado como aporte teórico ou facilitador para o ensino de física. Para o nível superior, a presença em cursos

de engenharia, de licenciatura e bacharelado em matemática e física é constante; porém, a dificuldades dos alunos é preocupante já que não tiveram uma formação sólida em relação a esse conteúdo em níveis de subsequentes.

As pesquisas sobre vetores, corroborando com a análise curricular, apresentaram e demonstraram a importância do ensino de vetores já ser realizado no Ensino Médio e a utilização de recursos tecnológicos, metodológicos e técnicas de ensino que ajudem a desenvolver e a construir o conhecimento dos alunos, bem como, os auxiliem, dessa forma, a resolver problemas cotidianos.

Sobre o diagnóstico docente e discente as análises nos direcionaram para necessidade de desenvolver e aplicar novas metodologias e técnicas de e para o ensino de vetores. Quanto aos docentes, estes se mostraram dispostos em realizar melhoramento que pudessem impulsionar a capacidade de resolução de questões avançadas e tornar a aprendizagem mais sólida.

Em relação aos discentes, apesar do cenário aparentemente favorável ao ensino de vetores, o diagnóstico nos indicou que estão satisfeitos com a metodologia, tem um bom nível de interesse e de aprendizado, por exemplo; porém, também nos dão indícios de um processo de aprendizagem e avaliação, supostamente, frágil e com necessidade de aprimoramentos.

Entretanto, cabe um olhar sobre a metodologia que, apesar de “satisfatória”, possui problemas que podem ser minimizados pelo uso de outras técnicas de ensino. Portanto, a utilização de alternativas metodológicas tende a ser um dos caminhos viáveis para sanar as dificuldades no assunto de vetores e é por isso que essa tese apresenta uma metodologia de ensino que envolve a RPPP e Atividades Experimentais.

Por fim, o estudo do erro no processo de ensino e aprendizagem nos apontou alternativas metodológicas para análise das atividades, bem como, a importância de olhar o erro com viés construtivista.

Desse modo, as análises prévias indicaram as principais dificuldades que foram vislumbradas e levadas em consideração, quando da elaboração e desenvolvimento da sequência didática, além de, apresentar aspectos teóricos, em especial, da Teoria da Atividade, das tendências de Ensino em Matemática, bem como, de Análise de Erros, que foram utilizadas como aporte para a experimentação e para a discussão referente a validação da tese.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Essa seção tem por finalidade apresentar todos os instrumentos elaborados e/ou selecionados que foram utilizados nas etapas posteriores. Para tanto, foi subdividida da seguinte forma:

1. Fundamentação Teórica da SD: apresentou uma discussão breve sobre as tendências em educação matemática utilizadas na concepção das atividades, quais sejam, RPPP e Atividades Experimentais tanto de conceituação quanto de redescoberta; e abordou as bases teóricas de cada método e sua aplicação em sala de aula.

   Também, descreveu as atividades elaboradas com ênfase especial na Análise a *Priori*. Vale ressaltar, que o Apêndice K contêm o roteiro completo da Sequência didática, com as atividades, questões de aprofundamento e para casa, questões de revisão e Quiz;

2. Apresentação dos demais Instrumentos para produção de informações durante a experimentação com ênfase em sua finalidade, tais como: o TCLE conforme modelo do CEP, a ficha de observação adaptada de Rocha (2019), os questionários acadêmico e socioeconômico e o de emoções de aprendizagem e desempenho na matemática elaborado por Lima (2012) e o pré/pós teste.

   Para os questionários e o teste foi realizado, ainda, um esclarecimento sobre os itens para fins de justificativa da finalidade e da importância. Os Apêndices com os links para localizar cada um dos instrumentos também foram elencados;

3. Apresentação das considerações finais dessa seção.

Por fim, os pontos definidos anteriormente foram detalhados com o máximo de precisão para possibilitar a sua reprodução e entendimento.

4.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tal como relatado, segue a discussão sobre os métodos de ensino utilizados e a apresentação das 13 atividades que compuseram a SD produzida.

4.1.1. O Ensino de Matemática por Atividades Experimentais

O ensino de Matemática por Atividades é um método de ensino que permite a inserção dos alunos de forma ativa e colaborativa durante todo o processo de ensino aprendizagem fazendo-os perceber e redescobrir conceitos e valorizar o conteúdo aprendido.

Esse método de ensino favorece a construção da aprendizagem pelo próprio aluno, de forma autônoma, através da aquisição de conhecimento e da redescoberta de princípios (Sá, 2020). Sá (2019, p. 13-14) ressalta que

> O ensino por atividades tem as seguintes características:
> 1) É diretivo
> 2) Tem compromisso com o conteúdo
> 3) Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para a formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos
> 11) É iterativo entre estudantes e professor.
> (Sá, 2019, p. 13-14)

Portanto, através das características listadas pode-se observar a ampla participação do professor como orientador e como responsável pela elaboração de atividades com forte cunho didático. Da mesma forma, percebe-se a participação ativa do aluno durante a realização das atividades propostas e da utilização de conhecimentos prévios para a resolução das mesmas.

De acordo com Fossa (2020) e Sá (2020) para que as atividades alcancem os objetivos propostos e a técnica seja aplicada de forma eficiente é necessário um planejamento prévio das atividades. De acordo com os autores, cinco princípios devem ser seguidos durante a elaboração das sequências a serem utilizadas, quais sejam: a revelação dos objetivos, o propósito percebido, a prática apropriada, o conhecimento dos resultados e a diferenciação do ensino.

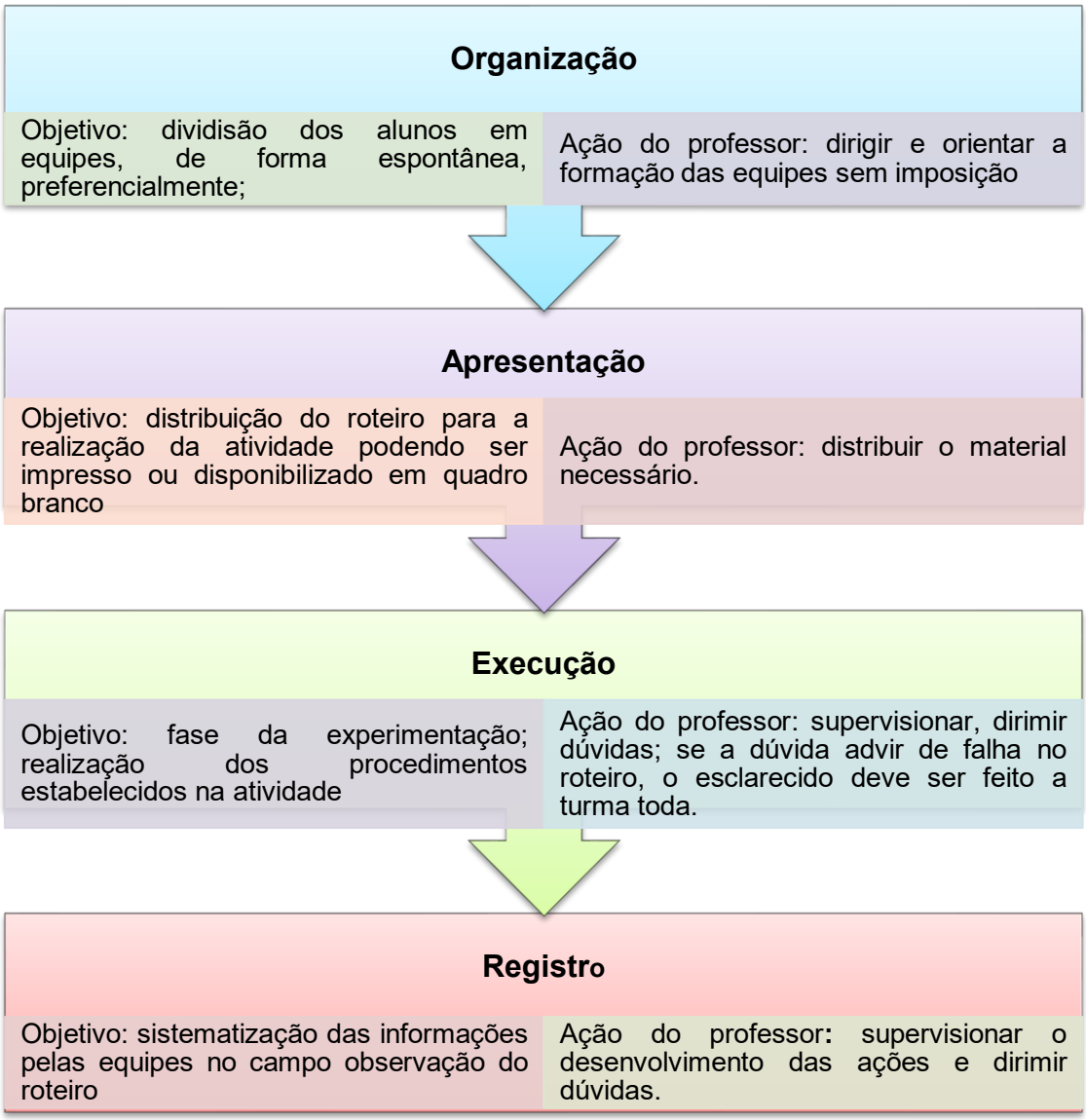
Em relação ao objetivo, Sá (2019) classifica as atividades como de conceituação, que tem por objetivo a definição do objeto pela percepção e a

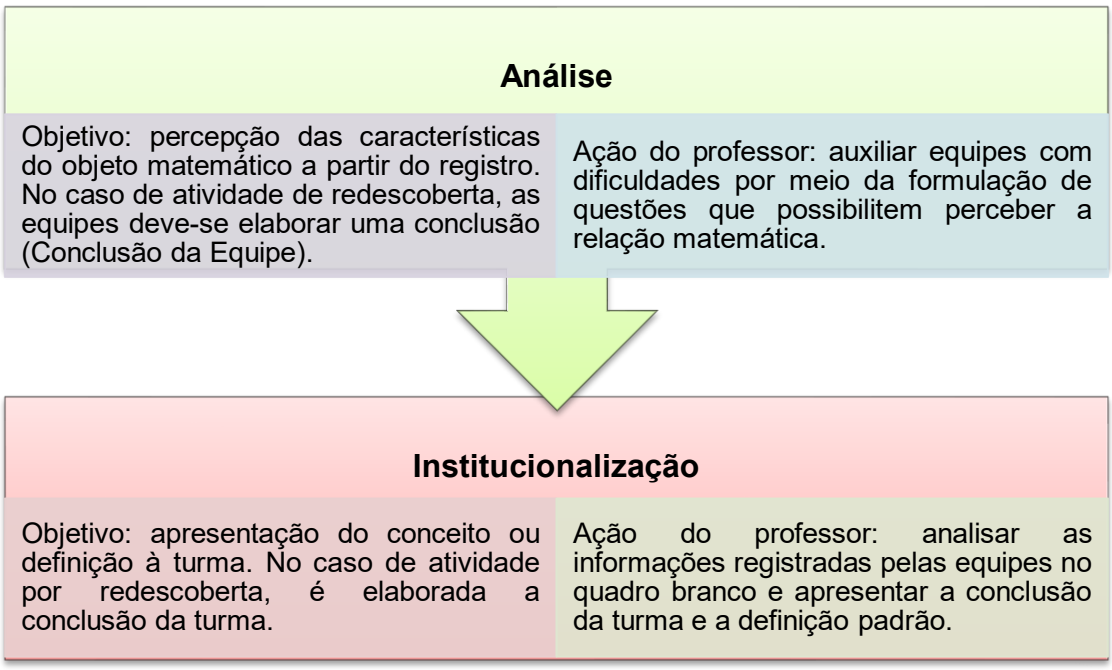
ocorrência na situação; e de redescoberta, que tem por finalidade a descoberta pelo estudante de uma propriedade, uma relação ou uma operação matemática.

Quanto ao modo de desenvolvimento, o autor, as classifica em: por demonstração, quando o professor executa a ação; ou experimental, quando a ação é executada pelos estudantes. Contudo, em qualquer caso, as atividades podem ser tanto de conceituação como de redescoberta.

A Figura 14 apresenta a etapas da organização das atividades de conceituação e de redescoberta em sala de aulas, tais como descritas em Sá (1999, 2018, 2019, 2020) com destaque para o objetivo de cada etapa e para as ações do professor, quais sejam: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

Figura 14 - Etapas de Organização das atividades em sala de aula





Fonte: elaborado a partir de Sá (1999, 2018, 2019, 2020).

Do exposto, pode-se observar que as fases se diferenciam, em especial, durante a análise e a institucionalização; especialmente, na de redescoberta devem ser feitas uma conclusão da equipe e uma conclusão da turma, respectivamente.

Portanto, o método proposto, como pode ser visto, apresenta-se organizado, estruturado e com etapas definidas de forma a possibilitar o aprendizado e promover melhorias no processo de ensino aprendizagem de objetos matemáticos. E, em vista desse motivo, foi utilizado para elaboração da SD a ser apresentada e aplicada, além do Ensino por RPPP cujo panorama sintético será descrito a seguir.

4.1.2. O Ensino por Resolução de Problemas

O ensino por Resolução de Problemas (RP) possui várias perspectivas teóricas e históricas enquanto uma metodologia de ensino. De acordo com Guimarães e Oliveira (2021, p.2)

> A Resolução de Problemas, enquanto uma metodologia no ensino de Matemática, compartilha essa ideia de vincular os problemas em sua gênese, origem teórico metodológica e contribuições para planejar um ensino-aprendizagem onde o professor proponha ações para o desenvolvimento do aluno, criando condições para que este construa

> conhecimentos e se torne cada vez mais ativo nesse processo. (Guimarães e Oliveira, 2021, p. 2)

Portanto, os autores ressaltam que o método tende a tornar o aluno mais ativo por possibilitar a construção do conhecimento por “si próprio”, ou seja, de maneira autônoma. Contudo, várias categorias e/ou possibilidades do uso da RP foram construídas de acordo com Guimarães (2019) e Guimarães e Oliveira (2021), bem como, diversas abordagens foram propostas por Stanic e Kilpratick (1989), Davydov (1988), Polya (2006), Branca (1997), Mendonça (1999) e Onuchic (1999).

Para Stanic e Kilpatrick (1989) a RP deve estar presente como contexto, como capacidade e como arte e considera tema gerais e tornam as possibilidades de resolução acessível as crianças. Polya (2006) diz que o aluno deveria resolver problemas não rotineiros por meio de técnicas de resolução de problemas que pudessem desenvolver a inteligência do aluno e serem discutidos por professor e alunos.

Branca (1997) afirma que a RP pode ser vista como meta, processo e habilidade básica, considera que “aprender a resolver problemas é a razão principal para estudar matemática” (Branca, 1997, p. 5). Na perspectiva de Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011) a RP possui três concepções quais sejam: ensinar sobre solução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas.

Mendonça (1999) apresenta a RP como objetivo, como processo e como ponto de partida: no primeiro caso, de acordo com a autora, a matemática é ensinada para resolver problemas; no segundo, “a resolução de problemas significa olhar para o desempenho/transformação dos alunos como resolvedores de problemas” (Sá, 2004, p. 15); e, como ponto de partida é um “recurso pedagógico, apresentado no início do processo de aprendizagem” (Mendonça, 1999, p. 16).

Na perspectiva de Davydov (1988), o ensino dos conteúdos matemáticos já implica em RP; pois, como afirma Guimarães (2021, p. 76) “traz a formação de conceitos como processo inicial para a formação de novas estruturas do pensamento teórico” com foco na autotransformação do sujeito e de sua atividade mental.

No processo de formação de conceitos, o professor deve ser um elemento mediador, propondo o conteúdo a ser observado e analisado partindo da generalização e abstração. Além disso, deve haver uma relação entre aprendizagem e motivo; para Freitas (2012, p. 413) esse processo de aprendizagem na perspectiva de Davydov

> [...] deve estar intimamente associado aos motivos dos alunos, de forma que a aquisição de conhecimentos teóricos e os modos de pensar precisam surgir de necessidades específicas, de motivos suficientes para o aprendizado, de problemas suficientemente atrativos para mobilizar a atividade de aprendizagem. Por sua vez, os motivos são dependentes do desejo e das emoções como base das necessidades. (Freitas, 2012, p. 413).

Assim, para a elaboração dessa SD, no que diz respeito à RP, corrobora-se com as perspectivas de Davydov (1988) e de Mendonça (1999) que consideram a RPPP como recurso pedagógico para dar início a construção de um conhecimento. De acordo com Mendonça (1999, p.17) para a RPPP

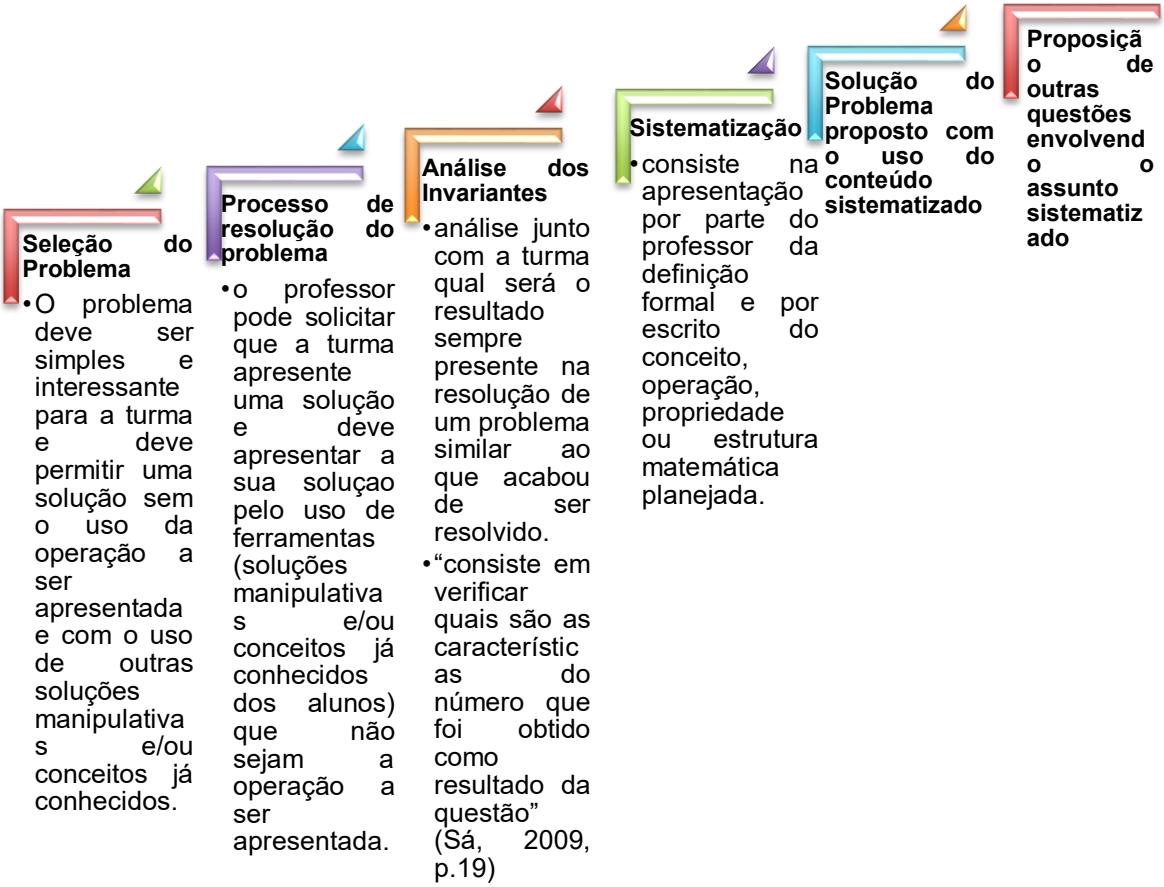
> o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem, culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor. (Mendonça, 1999, p. 17)

Para a autora o desencadeamento de ideias que culmina com a sistematização é o cerne do processo de aprendizagem; da mesma maneira, Sá (2009, p.23) é enfático ao dizer que

> Com o uso da resolução de problemas como ponto de partida o processo de ensino-aprendizagem reproduz, de maneira simplificada, todo o processo de criação do conhecimento matemático, que na maioria das vezes tem seus conceitos e operações oriundos da busca de solução de problemas propostos, seguida pelo estudo dos invariantes da resolução, estudo das propriedades destes invariantes e finalização com a definição de um novo objeto ou operação matemática. (Sá, 2009, p. 23).

Para Sá (2009) as aulas que utilizam a RPPP devem ser estruturadas da seguinte forma: seleção do problema, processo de resolução do problema, análise dos invariantes, sistematização, solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado e a proposição de outras questões envolvendo o assunto sistematizado. A Figura 15 apresenta a ilustração dessas etapas e algumas recomendações de acordo como autor.

Figura 15 - Etapas das aulas que utilizam RPPP



Fonte: elaborado a partir de Sá (2009).

Diante dessas perspectivas, são essas as características que nos levaram a optar por esses métodos de ensino levando em consideração a tese proposta. A SD e sua Análise a *priori* são descritas a seguir.

4.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS

A SD a ser apresentada aborda conteúdo de vetores geométricos desde o seu conceito e definição, formas de representação e operações. Sendo que, para cada assunto foi definido o método de ensino utilizado levando em consideração a teoria a ser ensinada e o diagnóstico realizado para cada classificação do assunto em relação a dificuldade de aprendizagem. O Quadro 31 apresenta a ementa de referência para a sequência didática elaborada.

Quadro 31 - Ementa utilizada para a elaboração da Sequência Didática

Ementa: Tipos de Grandezas. Deslocamento. Definição de Vetores. Norma de Vetor. Classificação de Vetores. Operação com vetores: adição, multiplicação por um escalar, produto escalar, produto vetorial, produto misto.

Fonte: elaborado a partir da sequência didática

Para tanto, foram desenvolvidas 13 atividades, além de questões de aprofundamento e “para casa” retiradas e adaptadas de obras de autores renomados, tais como: Julianelli (2008), Sadiku (2012), Nussenzveig (2013, 1997), Hewitt (2015), Boulos e Camargo (1987), Doca, Biscuola e Bôas (2012), Venturi (2015), Steinbruch e Winterle (1987) e de processos seletivos, como ENEM.

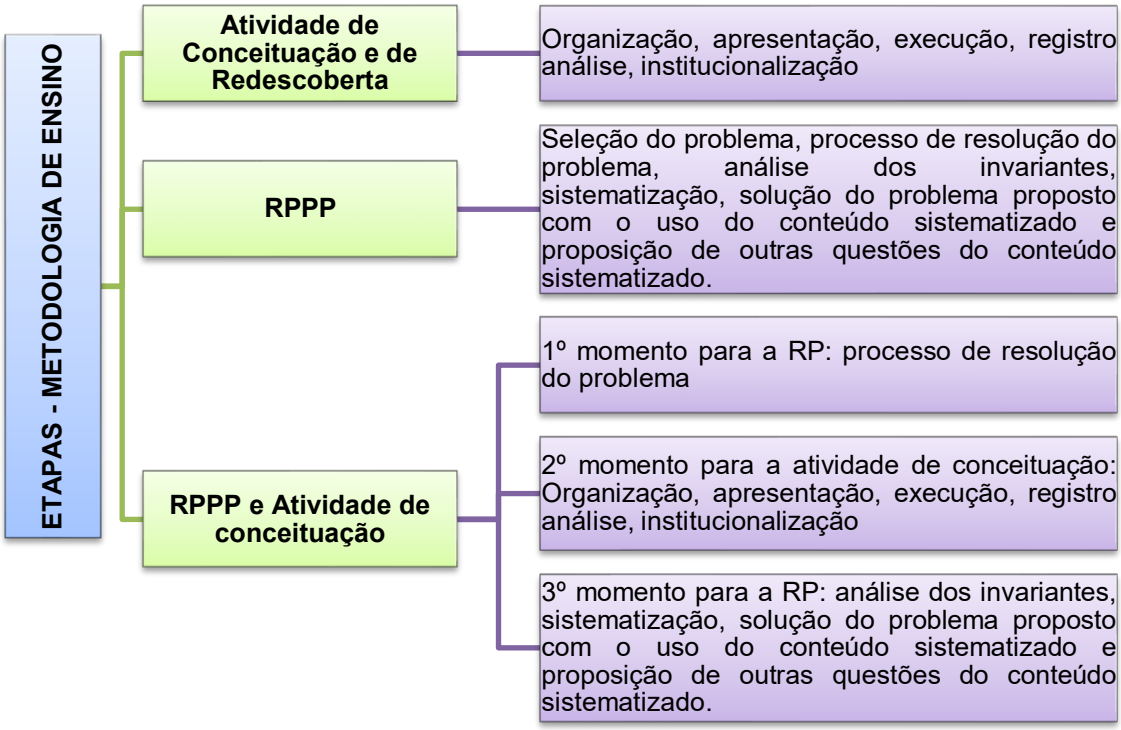
Das atividades da SD: 05 (cinco) envolveram Atividades de Conceituação, 01 (uma) de redescoberta, 06 (quatro) RPPP e 01 (uma) utilizou a Resolução de Problemas em conjunto uma atividade de conceituação.

Em relação a metodologia utilizada em sala de aula: para as atividades de conceituação e de redescoberta foi a proposta em Sá (1999, 2019, 2020); para as que envolvem, somente, RPPP, a apresentada em Sá (2009); e para a que envolve RPPP em conjunto com a atividade de conceituação, uma combinação das anteriores.

Nesse último caso, incialmente, o problema foi proposto e, em seguida, a atividade de conceituação com a execução de todas as etapas de organização da aula e, por fim, retornou-se ao problema inicial para conclusão da atividade. Em todo o caso, ao final de cada atividade ou conjunto de atividades, independentemente do tipo, foram propostas questões de aprofundamento, resolvidas em sala, e “para casa”.

A Figura 16 apresenta um resumo da previsão de como se deu o desenvolvimento das atividades em sala de aula para cada caso, considerado Sá (1999, 2009, 2019, 2020).

Figura 16 – Resumo do desenvolvimento das etapas metodológicas em sala de aula para cada tipo de atividade da Sequência Didática



Fonte: elaborado a partir de Sá (1999, 2009, 2019, 2020)

Na subseção seguinte todas as atividades propostas serão detalhadas e um quadro-resumo é apresentado ao final com as características gerais de cada uma, bem como, a análise a *priori* de cada uma delas.

4.3. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES

Nessa subseção, serão apresentadas as 13 atividades da Sequência Didática e sua análise a priori; ao final serão apresentados os links para acesso direto a cada uma das atividades no Apêndice K correspondente a SD.

4.3.1. Atividade 01: tipos de grandezas

A atividade 01 envolve o ensino por atividades experimentais a partir de uma atividade de conceituação. O objetivo principal dessa atividade é diferenciar grandeza escalar de vetorial para que seja possível conceituar Vetores posteriormente. Inicialmente, foi distribuído aos estudantes um texto que relaciona diversas grandezas e as atividades realizadas no dia a dia.

Os alunos deveriam identificar, a partir das grandezas destacas no texto dado,

Quadro 32, quais características estão presentes em cada uma delas e fazer o registro no espaço apropriado para que na fase de análise percebessem que há grandeza que possui intensidade (módulo), direção e sentido e outras, apenas, intensidade.

Quadro 32 - Texto para a Atividade 01

Minha Rotina Diária

O alarme toca estridente; são 6 horas da manhã. O **tempo** é mesmo implacável, mas começou um novo dia e é hora de estudar. Em um gesto decidido, deixo a cama, dirijo-me ao banheiro e acendo a luz. Uma lâmpada de **potência** de 110 Watts brilha forte no teto chegando quase a ofuscar. Ora, isso não está de acordo com a proposta da família, que é de economizar **energia** já que uma lâmpada com essa potência consome em torno de 16500 Joules se ficar acessa durante 5 horas/dia em 30 dias. Todos estão dizendo que o valor cobrado na conta de luz tem andado pelas alturas…

Então, abro a torneira da pia para iniciar minha higiene matinal e começo a escovar os dentes. Noto então que a água jorra em grande **vazão** de 15 litros/minuto, o que exige uma consciente intervenção. Afinal, há também que se economizar água! Em razão da **força** de 1500 Newtons de uma rajada de vento em direção ao espelho do banheiro no sentindo oposto ao de entrada do quarto, uma porta bate violentamente, quebrando o silêncio próprio da hora. Vejo-me refletido no espelho de **área** de 1500 cm² embaçado pelo vapor ascendente vindo da água quente do chuveiro já aberto…

No rápido café da manhã, a minha primeira refeição, como um bom pedaço de pão com o leite escurecido por 100 gramas de **massa** de chocolate em pó. Desço pelo elevador do prédio em direção ao térreo e leio aquela pequena placa que adverte sobre o **peso** máximo suportado pelo equipamento, 2900 Newtons ...

Já na calçada, noto que o dia será quente, o que é confirmado pela **temperatura** indicada em um painel eletrônico: 24 Celsius. E eis que chega o esperado ônibus de sempre. O tráfego está intenso, o que impõe ao veículo um lento **deslocamento** de 10 quilômetros até a escola, pelas ruas do bairro no sentido Ananindeua/Belém. Visando realizar o percurso com a **velocidade** prevista de 40 Km/h o motorista aproveita para arrancar com grande **aceleração**, em torno de 10 m/s² nos trechos livres…

No ônibus, estou sentado e tenho sobre as pernas uma mochila cheia de livros, cadernos e outros objetos, o que incomoda um pouco por exercer nas superfícies de apoio uma intensa **pressão** em torno de 100 Pascal. Ligeiramente atrasado, finalmente chego ao colégio e percorro apressadamente os 10 metros de **comprimento** do grande corredor principal até a sala de aula.

Fonte: elaborado a partir da atividade 01

A análise de cada grupo foi anotada no quadro branco e, em seguida, a fase de institucionalização foi realizada com a apresentação do conceito de Grandeza Escalar e Vetorial. Por fim, questões de aprofundamento foram propostas. A seguir, será apresentado a análise a *priori* da atividade 01.

4.3.1.1. Análise a priori da Atividade 01

A atividade, por ser conceituação, é apresentada de forma bastante intuitiva, não sendo solicitado aos alunos identificar as grandezas, mas, sim,

suas características que são primordiais para classificá-la. Desse modo, espera-se que os alunos completem o quadro, majoritariamente, de forma correta.

Na fase de registro e análise é possível que tenham dificuldade em expressar suas observações de forma escrita, devido esse tipo de atividade, que envolve análise e dedução, não ser comum. Porém, é provável que as diferenças entre as grandezas sejam observadas. Contudo, intervenções deverão ser realizadas, caso necessário. O Quadro 33 apresenta a resolução da Atividade 01 com o campo “Observações” preenchido com as respostas esperadas.

Quadro 33 - Resolução da Atividade 01

Grandeza	Intensidade (Valor)	Direção	Sentido
Tempo	x		
Potência	x		
Energia	x		
Vazão	x		
Força	x	x	X
Área	x		
Massa	x		
Peso	x	x	X
Temperatura	x		
Deslocamento	x	x	X
Velocidade	x	x	X
Aceleração	x	x	X
Pressão	x		
Comprimento	x		
OBSERVAÇÃO: 01.Há grandezas que possuem somente Intensidade (valor), por exemplo, tempo, potência, energia, vazão, área, massa, pressão e comprimento; outras possuem intensidade, direção e sentido, como força, peso, deslocamento, velocidade e aceleração. 02. O número de grandezas com medida (valor), direção e sentido é menor do que aquelas que só possuem valor, na tabela 03. As grandezas que possuem medida (valor), direção e sentido, são chamadas vetoriais e as que possuem, somente, valor são chamadas escalares.			

Fonte: elaborado a partir da atividade 01.

Por fim, após a institucionalização as Questões para casa da Atividade 01 serão disponibilizadas aos alunos.

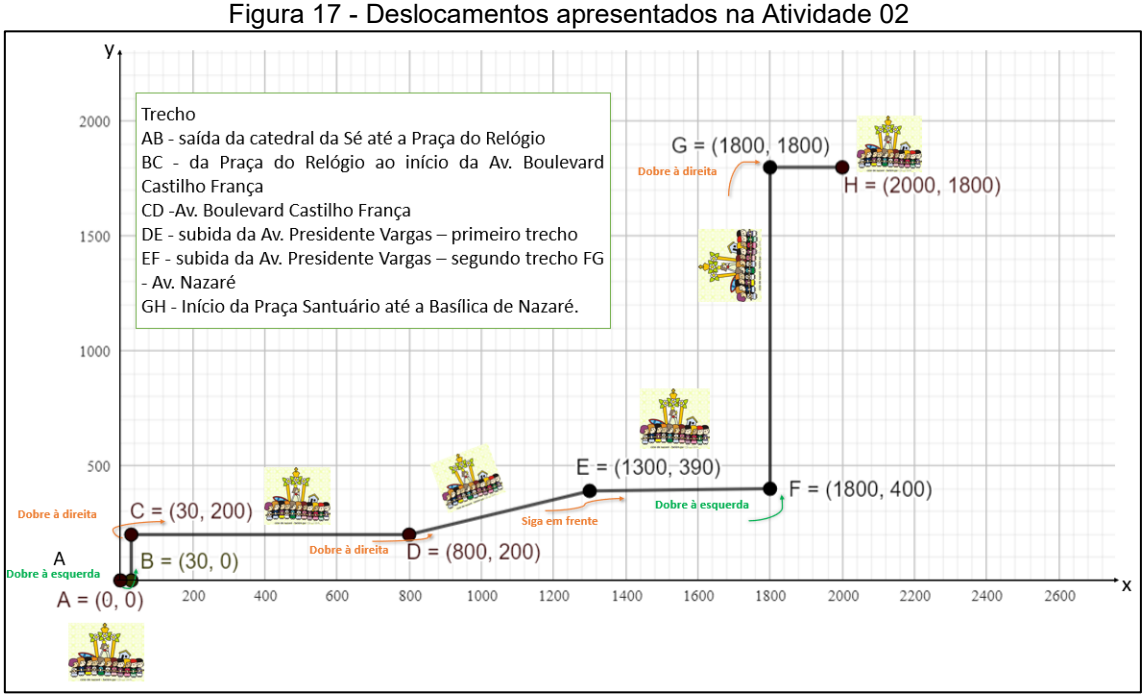
4.3.2. Atividade 02: deslocamento

A atividade 02 tem por objetivo caracterizar e definir o deslocamento vetorial a partir da diferença entre dois pontos por meio de uma atividade experimental de conceituação. O contexto é apresentado a partir do percurso realizado na trasladação e no círio de Nossa Senhora de Nazaré a partir de um

mapa de localização geográfica tendo por base o *Google Maps* e a sua representação no plano cartesiano.

O trajeto foi elaborado de forma a facilitar a verificação dos deslocamentos, evitando curvas e considerando as avenidas/ruas como linhas retas com único deslocamento; à exceção da representação da inclinação Av. Presidente Vargas, trechos DE/ED e EF/FE, que irão possibilitar a verificação de deslocamento tanto na horizontal (eixo x) quanto na vertical (eixo y), Figura 17.

Figura 17 - Deslocamentos apresentados na Atividade 02



Fonte: elaborado a partir da Atividade 02

Portanto, para obter as componentes, os alunos devem quantificar por meio da subtração do ponto final e do inicial de cada trecho apresentado. Inicialmente, o roteiro da atividade será distribuído aos grupos que a partir do contexto e dos exemplos iniciais deverão encontrar os demais deslocamentos, horizontal e/ou vertical do trajeto apresentado e suas respectivas componentes, tal como solicitado na tabela a ser preenchida e disponível na atividade.

Durante as fases de registro e análise, as conclusões dos grupos serão anotadas no quadro branco e na institucionalização será apresentada a definição de diferença entre dois pontos tendo por base as componentes de um deslocamento por meio das coordenadas de seus pontos inicial e final.

A seguir, será apresentada a análise a *Priori* para a Atividade 02.

4.3.2.1. Análise a priori da Atividade 02

Com essa atividade é esperado que alunos consigam identificar os deslocamentos, bem como, associar que o deslocamento na horizontal é ao longo do eixo x e na vertical ao longo do eixo y e sua obtenção a partir da diferença entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial. Contudo, podem ocorrer dúvidas em relação ao trecho em que os deslocamentos são na horizontal e vertical simultaneamente e alguma intervenção pode ser necessária.

No mais, a análise do deslocamento ao inverter o sentido irá possibilitar o entendimento de que inversões do sentido, não indicam, alteração na direção, bem como, no valor absoluto do deslocamento. Contudo, pode haver algum tipo de confusão em relação à direção e ao sentido no registro das observações. O Quadro 34 apresenta a resolução da Atividade 02 com o campo "Observações" preenchido.

Quadro 34 - Quadro de resposta da questão motivadora da Atividade 02

PERCURSO TRASLADAÇÃO				**PERCURSO CÍRIO**			
Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)	Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)
AB	+ 30	Não possui	(30, 0)	BA	- 30	Não possui	(-30,0)
BC	Não possui	+ 200	(0, 200)	CB	Não possui	- 200	(0, -200)
CD	+ 770	Não possui	(770, 0)	DC	-770	Não possui	(-770, 0)
DE	+ 500	+ 190	(500, 190)	ED	-500	-190	(-500, -190)
EF	+ 500	+10	(500, 10)	FE	-500	-10	(-500, -10)
FG	Não possui	+ 1400	(0, 1400)	GF	Não possui	-1400	(0, -1400)
GH	+ 200	Não possui	(200, 0)	HG	-200	Não possui	(-200, 0)
OBSERVAÇÕES: 1. Tanto as componentes do deslocamento horizontal quanto do vertical foram obtidas a partir da diferença entre os pontos inicial e final. 2. A inversão do sentido não implica em alteração da direção. 3. Há inversão dos sinais quando os percursos são invertidos (inversão de sentido), mantendo a direção 4. O deslocamento é o mesmo nos dois percursos.							

Fonte: elaborado a partir da atividade 02

Após a institucionalização, questões para casa serão disponibilizadas aos alunos.

4.3.3. Atividade 03: definir vetor

A atividade 03 será desenvolvida por meio de uma atividade experimental de conceituação, sendo que, ao final uma questão é proposta para ser respondida pelos alunos de acordo com o que foi solicitado. Nesse sentido, é apresentado um contexto puramente matemático no qual, através de um gráfico, Figura 18, os alunos precisam determinar as componentes dos deslocamentos em cada quadrante.

Figura 18 – Proposta da atividade 03

Fonte: elaborado a partir da atividade 03

Os deslocamentos foram organizados por quadrante de forma que cada um contêm deslocamentos em uma dada direção e sentido, por exemplo, tanto no quadrante I quanto no II os deslocamentos estavam na direção diagonal e apontando para cima (sentido positivo), sendo que, no I estavam apontando para o lado direito e no II para o lado esquerdo; da mesma forma no III estavam na direção y, sentido positivo e, no IV, na direção z, sentido negativo.

Logicamente, os vetores de cada quadrante têm o mesmo deslocamento para possibilitar a definição de vetor e, propositalmente, os deslocamentos foram indicados por setas, tal como na representação de vetores. Para fins didáticos, cada conjunto de deslocamentos por quadrante foi representado com a mesma cor.

Após a identificação das componentes dos deslocamentos e observação do gráfico, os alunos têm que responder ao seguinte questionamento: É possível que pares de pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento?

Inicialmente, o roteiro da atividade será distribuído aos grupos e a atividade será explicada de forma detalhada. Durante as fases de registro e análise as equipes deverão escrever no quadro branco suas respostas que serão verificadas durante a institucionalização e culminarão com a definição formal de vetor. A seguir, será apresentado a análise a *priori* da Atividade 03.

4.3.3.1. Análise a priori da Atividade 03

Com essa atividade é esperado que os alunos consigam identificar as componentes dos deslocamentos de forma correta e perceber que é possível que pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento que culminará com a definição de vetor.

Para essa atividade, espera-se que os alunos não tenham dificuldades e nem grandes questionamentos durante o andamento e a conclusão, mesmo porque a pergunta final é bastante direcionada. O Quadro 35 apresenta a resolução da Atividade 03.

Quadro 35 – Resolução da Atividade 03

1. [...] Determine as componentes dos seguintes deslocamentos: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{IJ}$, $\overline{KL}$, $\overline{MN}$, $\overline{OP}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$, $\overline{UV}$, $\overline{WZ}$. Resposta: 1º Quadrante: $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = (2,2)$ 2º Quadrante: $\overline{GH} = \overline{IJ} = \overline{KL} = (-3,3)$ 3º Quadrante: $\overline{MN} = \overline{OP} = \overline{QR} = (5,0)$ 4º Quadrante: $\overline{ST} = \overline{UV} = \overline{WZ} = (0,-1)$
2. A partir do que foi observado no gráfico, responda a seguinte questão: É possível que pares de pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento? Reposta esperada :Sim, a figura mostra que os mesmos deslocamentos podem ser obtidos a partir de pontos distintos.

Fonte: elaborado a partir da atividade 03

Para essas atividades as questões para aprofundamento serão propostas após a finalização da atividade 04 devido ao entrelaçamento dos assuntos.

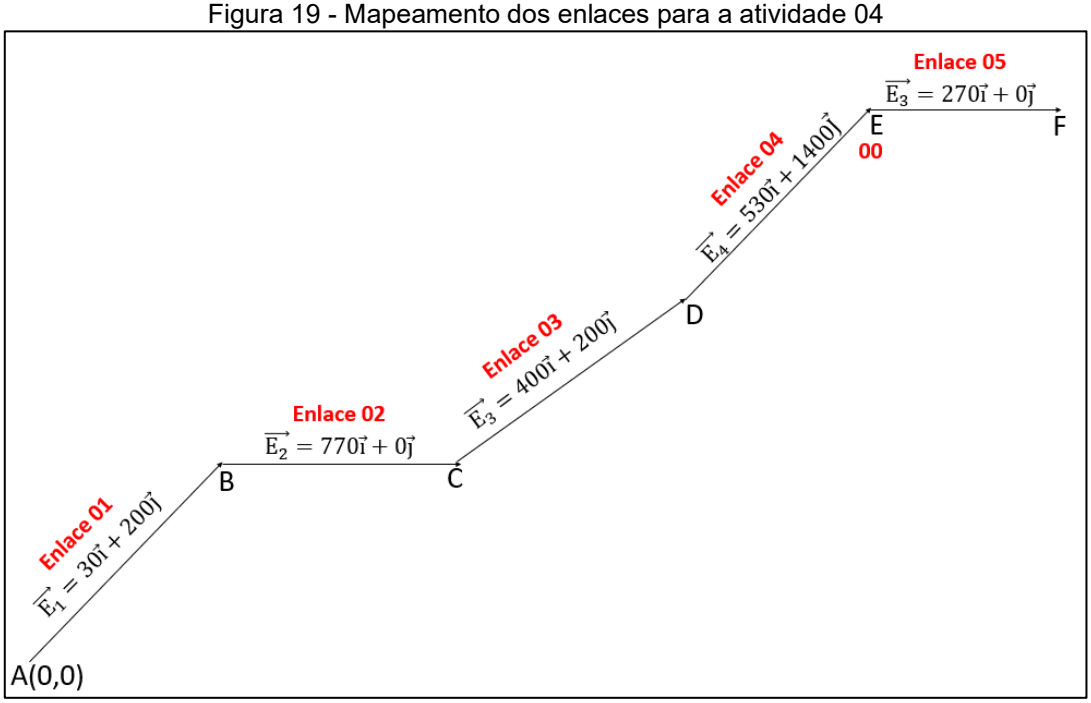
4.3.4. Atividade 04: coordenadas de um ponto

A atividade 04 é desenvolvida por meio de uma atividade experimental de conceituação e apresenta uma “questão” ao final para ser respondida pelos alunos, que serão divididos em grupos, com o objetivo de direcionar o que foi observado e o entendimento do assunto. A questão ao final, na verdade, solicita

uma fórmula generalizada do procedimento realizado para obter as coordenadas dos pontos

Nesse sentido, é apresentado um contexto presente na área de telecomunicações para o “fechamento” de enlaces (links) de comunicação para transmissão ponto-a-ponto. Os alunos receberão uma espécie de mapeamento com a disposição dos enlaces e do vetor correspondente para cada um, sendo que o primeiro enlace inicia no ponto A (0,0), Figura 19.

Figura 19 - Mapeamento dos enlaces para a atividade 04



Fonte: elaborado a partir da atividade 04

Assim, em sequência tendo por base o ponto A e o vetor associado ao Enlace 01, segmento AB, o aluno deve determinar as coordenadas do ponto B e, utilizando a mesma lógica, com os vetores correspondentes determinar as coordenadas dos pontos B, C, D, E e F, pertencentes aos enlaces de 02 a 05, respectivamente.

Ao final, os grupos devem generalizar uma fórmula que permita, em qualquer caso, a obtenção de um ponto terminal conhecidos o ponto inicial e o vetor associado ao segmento em questão. Durante as fases de registro e análise os alunos devem expor no quadro branco as fórmulas encontradas que serão analisadas e culminará com a demonstração da obtenção da fórmula durante a

institucionalização a fim de sanar dúvidas. A seguir é apresentada a análise a priori para a atividade 04.

4.3.4.1. Análise a priori da Atividade 04

Com essa atividade, é esperado que os alunos consigam definir as coordenadas dos pontos de forma satisfatória utilizando, intuitivamente, o somatório da coordenada x ou y do ponto inicial com a componente x ou y do vetor. Contudo, para a generalização da fórmula pode haver alguma dificuldade, pois, historicamente, o modo tradicional de ensino não estimula esse tipo de descoberta e/ou questão a ser resolvida pelos alunos.

No mais, a resolução de forma correta da primeira parte da atividade, já nos dará indícios do alcance do objetivo e do aprendizado baseado, também, nos conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores. O Quadro 36 apresenta a resolução da Atividade 04.

Quadro 36 – Resolução da Atividade 04

1. [...]Determine as componentes do ponto terminal de cada um dos enlaces, quais sejam, ponto: B, C, D, E, F. Resposta: Pontos – B(30,200); C(800,200); D(1200, 400);E(1730,1800); F(2000, 1800)
2. A partir do que foi observado no gráfico, responda a seguinte questão: É possível que pares de pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento? Reposta esperada: $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ $A(x_i, y_i)$ → $B(x_f, y_f)$ $x_f = x_i + a$ $y_f = y_i + b$

Fonte: elaborado a partir da atividade 04

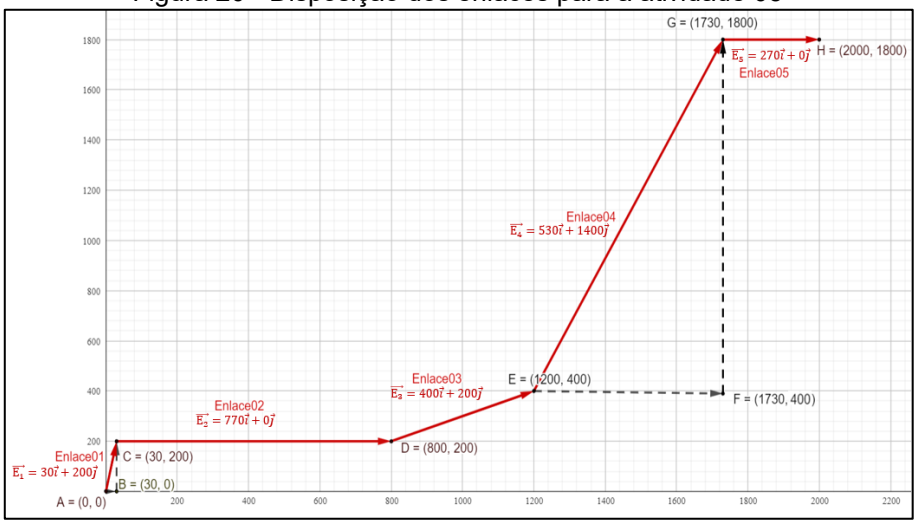
Ao final, dessa atividade, serão propostas as questões de aprofundamento e para casa envolvendo as atividades 02, 03 e 04,

4.3.5. Atividade 05: definir módulo de um vetor

A atividade 05 é desenvolvida por meio do ensino por atividade experimental de conceituação com uma questão ao final tendo por base a atividade 04.

Nesse sentido, a partir de um contexto da área de telecomunicações, solicita aos alunos o cálculo da distância entre cada um dos pontos dos enlaces. Parte da hipótese de que em cada ponto demarcado serão colocadas antenas, Figura 20.

Figura 20 - Disposição dos enlaces para a atividade 05



Fonte: elaborado a partir da atividade 05

Portanto, inicialmente, os alunos precisam calcular a distância entre as antenas, dados os pontos e os vetores; sendo necessário, em alguns casos utilizar o teorema de Pitágoras. Na segunda etapa, a partir dos cálculos realizados, os alunos devem generalizar uma fórmula para o cálculo da distância (módulo do vetor) dado um vetor qualquer.

Nas fases de registro e análise devem colocar suas fórmulas no quadro branco que serão verificadas e consolidadas na fase de institucionalização. A seguir a análise a *priori* para a Atividade 05 será exposto.

4.3.5.1. Análise a priori da Atividade 05

Para solucionar a atividade 05, em alguns casos, os alunos precisam ter, obrigatoriamente, o conhecimento do Teorema de Pitágoras que é ensinado no Ensino Médio. Portanto, é previsível que os alunos consigam calcular a distância de forma correta e, até mesmo, apresentar a fórmula que pode ter sido visto, de forma similar, em alguma disciplina de geometria, para o cálculo da distância entre dois pontos.

O Quadro 37, que também será disponibilizado aos alunos para preenchimento das respostas, apresenta a resolução da atividade; tanto em relação ao cálculo da distância quanto à generalização da fórmula do módulo/norma dado um vetor.

Quadro 37 - Resolução da atividade 05

Preencha o quadro com as distâncias que as antenas devem estar dispostas para cada enlace

Enlace	Disposição das antenas de transmissão e recepção	Cálculo da distância entre as anten
01	Pontos A(0,0) e C(30,200)	$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{30^2 + 200^2} = 202{,}23$
02	Pontos C(30,200) e D(800,200)	$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{770^2} = 770$
03	Pontos D(800,200) e E(1200,400)	$\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{400^2 + 200^2} = 447{,}21$
04	Pontos E(1200,400) e G(1730,1800)	$\|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{530^2 + 1400^2} = 1496{,}9$
05	Pontos G(1730,1800) e H(2000,1800)	$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{270^2} = 270$

2. Generalize uma fórmula para o cálculo da distância entre as antenas, dado o vetor $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$. Resposta: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Fonte: elaborado a partir da atividade 05

.

Ao final, espera-se que os alunos possam entender e sanar dúvidas acerca não, somente, do cálculo da distância, mas do conceito, significado e importância do conhecimento do módulo de um vetor. Contudo, ainda assim, pode aparecer erros de representação.

Ao final da resolução dessa atividade serão resolvidas questões de aprofundamento em sala e outras serão propostas para casa.

4.3.6. Atividade 06: Adição de Vetores

A atividade 06 envolve o ensino via resolução por problemas (Questão 01) a partir de uma abordagem contextualizada em conjunto com uso do ensino por atividades experimentais de conceituação (Questão 02). O objetivo principal dessa atividade é o ensino de adição de vetores e a observação da regra do triângulo.

O problema apresentado é contextualizado a partir dos deslocamentos de uma ave entre três ninhos localizados em pontos distintos (Questão 01). Sendo, que a ave parte de um ponto A e, depois, para o B e o C; ao final os alunos, em

grupo, são questionados sobre qual vetor representaria o deslocamento direto de A até C.

Para tanto, têm por suporte a atividade experimental, que consiste na disposição em um plano de três pontos pré-determinados, que simulam um deslocamento triangular, tal como relatado na “Questão 01”, tendo por base a figura de um triângulo dada como exemplo.

A partir da disposição dos pontos, os alunos devem perceber a adição vetorial tanto de forma algébrica quanto de forma geométrica. Ao concluir a observação da atividade experimental (Questão 02) os alunos devem retornar ao problema para resolvê-lo ou verificar a forma como foi resolvida.

Vale ressaltar que, inicialmente, os grupos terão acesso a parte 01 e terão um tempo para pensar e solucionar o problema, em seguida, a parte 02 será proposta e apresentada aos mesmos e terão como auxílio, para facilitar a resolução, as folhas quadriculadas.

Ao final da resolução da atividade, será realizada a fase de institucionalização, com verificação das observações e do retorno ao problema inicial. A seguir, será apresentada a análise a *priori* da Atividade 06.

4.3.6.1. Análise a priori da Atividade 06

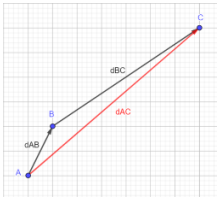
O problema inicial proposto pode ser resolvido tendo por base os conhecimentos anteriores por meio do cálculo do deslocamento. Contudo, a resolução da atividade experimental tem por objetivo mostrar ao aluno um caminho mais curto e rápido para resolver o problema. O Quadro 38 apresenta a resolução da atividade, tanto para a “Questão 01”, quanto para a “Questão 02”.

Quadro 38 – Resolução da atividade 06

Questão 01: De acordo com a situação apresentada responda a questão

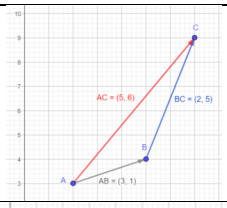
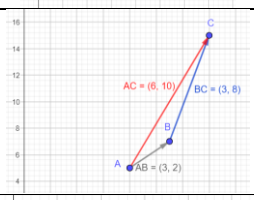
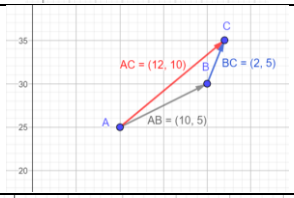
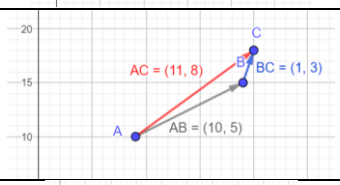
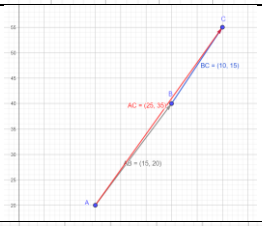
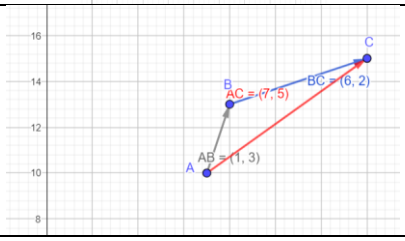
Suponha que uma ave desloca-se de um ninho localizado em A(3,5) até o outro localizado em B(4,7) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{AB}} = (1,2)$.Uma segunda ave parte do ninho localizado em B(4,7) em direção ao ninho em C(10,11) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{BC}} = (6,4)$. Qual o vetor que representaria o deslocamento direto de A até C?

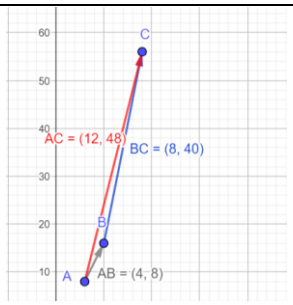
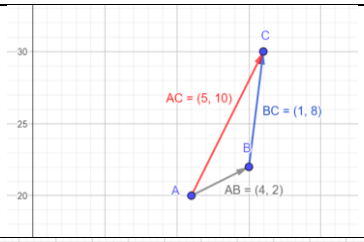
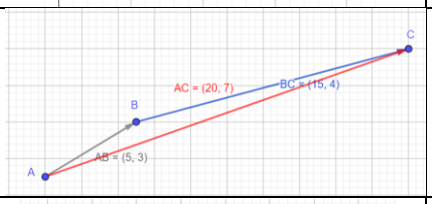
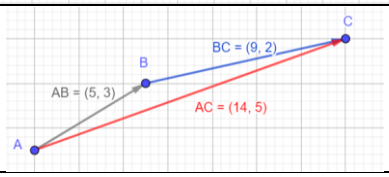
Representação gráfica do problema:



$$\overrightarrow{d_{AC}} = \overrightarrow{d_{AB}} + \overrightarrow{d_{BC}}$$
$$\overrightarrow{d_{AC}} = (1,2) + (6,4)$$
$$\overrightarrow{d_{AC}} = (7,6)$$

Questão 02: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que se pede. Tendo por base o triângulo ao lado, disponha-o no plano cartesiano e preencha os campos com o vetor correspondente e o campo Observação com a relação verificada.

Pontos		Disposição no plano	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
01	A(2,3) B(5,4) C(7,9)		(3,1)	(2, 5)	(5, 6)
02	A(8,5) B(11,7) C(14,15)		(3,2)	(3,8)	(6,10)
03	A(10,5) B(20,30) C(22,35)		(10,25)	(2,5)	(12,30)
04	A(9,10) B(19,15) C(20,18)		(10,5)	(1,3)	(11,8)
05	A(15,20) B(30,40) C(40,55)		(15,20)	(10,15)	(25,35)
06	A(7,10) B(8,13) C(14,15)		(1,3)	(6,2)	(7,5)

07	A(6,8) B(10,16) C(18,56)		(4,8)	(8,40)	(12,48)
08	A(11,20) B(15,22) C(16,30)		(4,2)	(1,8)	(5,10)
09	A(60,13) B(65,16) C(80,20)		(5,3)	(15,4)	(20,7)
10	A(4,7) B(9,10) C(18,12)		(5,3)	(9,2)	(14,5)
Observação: 1. As componentes do vetor resultante, $\overrightarrow{AC}$ são a soma das respectivas componentes de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. 2. Graficamente, o vetor resultante sempre inicia no primeiro vetor, $\overrightarrow{AB}$, e seu término coincide com o final do outro vetor, $\overrightarrow{BC}$.					

Fonte: elaborado a partir da atividade 07

Assim, espera-se que os alunos consigam resolver o problema inicial que, dessa forma, passará a ser visto como um exercício; nesse sentido, a resolução da atividade experimental pode suscitar observações diversas envolvendo tanto a soma vetorial algébrica quanto a geométrica e a disposição do vetor soma no plano, verificadas nos gráficos desenhados, podendo necessitar de intervenções para direcioná-la de acordo com o objetivo da atividade.

Para esse conteúdo, a questões de aprofundamento e para casa serão resolvidas e propostas após o término da atividade 07.

4.3.7. Atividade 07: Definir Vetor Oposto

A atividade 07 tem por objetivo definir vetor oposto a partir da resolução de problemas como ponto de partida, e segue o contexto da atividade anterior, na qual foi solicitado o vetor que desloca a ave diretamente de A até C.

De outra forma, nessa atividade, é solicitado ao aluno encontrar o vetor oposto, ou seja, que desloca a ave diretamente de C até A e, ainda, o resultado da adição entre esses (vetor de A à C e de de C à A) com a finalidade de levar a definição de vetor nulo a partir de uma propriedade do vetor oposto.

Portanto, apesar da atividade ter por objetivo a definição do vetor oposto e ser, aparentemente, simples tem por consequência a introdução de outros dois conteúdos: propriedades de vetor oposto e veto nulo. Pode-se afirmar que além de motivar os alunos a resolução de problemas os ajuda a perceber outros assuntos matemáticos relevantes para a adição de vetores.

Vale ressaltar que essa atividade será realizada de forma individual e que a questão anterior vem descrita na mesma, inclusive com a resolução, para facilitar a logística do aluno ter que relembrar a outra atividade e a sua resposta. A análise a *priori* dessa atividade é apresentada a seguir.

4.3.7.1. Análise a priori da atividade 07

Para essa atividade, o problema tende a ser um motivador para a introdução dos assuntos, pois é esperado que os alunos consigam resolvê-lo de forma rápida e correta a partir do que foi visto nas atividades anteriores. Assim, o problema tende a ser visto pelos discentes como exercício.

No mais, a resolução irá permitir a definição formal de vetor oposto e a demonstração da propriedade do vetor oposto que, consequentemente, levará a visualização do vetor nulo.

Portanto, a atividade tende a mostrar que um simples contexto e aplicação pode melhorar o desempenho e motivação dos alunos. O Quadro 39 apresenta a resolução da atividade 07.

Quadro 39 - Resolução da atividade 07

Vetor que desloca de A até C: $\overrightarrow{AC} = (10,11) - (3,5) = (7,6)$
Vetor que desloca de C até A: $\overrightarrow{CA} = (-7,-6)$
Resultado da adição: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ =0

Fonte: elaborado a partir da atividade 07

Após a finalização da resolução, análise e introdução dos assuntos serão resolvidas questões de aprofundamento em sala de aula e outras serão propostas para casa que irão envolver, especificamente, as atividades 06 e 07, além dos demais assuntos já visto.

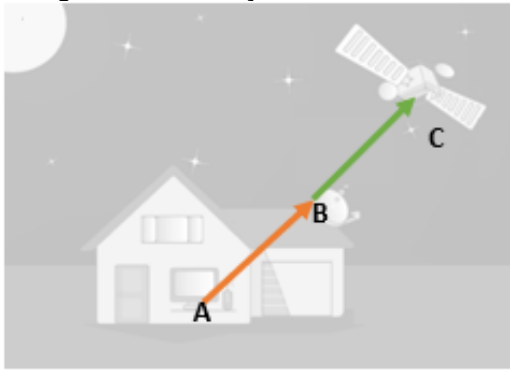
4.3.8. Atividade 08: Multiplicação por um escalar

A atividade 08 tem por objetivo a aprendizagem da multiplicação de um vetor por um escalar por meio de um problema como ponto de partida. O problema gerador parte do contexto da comunicação via satélite envolvendo o deslocamento vetorial de um sinal captado pela antena de uma residência, simulando um *upload*.

Para tanto, optou-se por adotar o sentido positivo (da residência para o satélite) para evitar operações com números negativos e, também, em não aprofundar questões e nomes técnicos de telecomunicações que foram omitidos, no roteiro da atividade.

O sinal, dessa forma, parte da televisão, ponto A, em direção a antena da residência, ponto B, e, por fim, em direção ao satélite, ponto C. O deslocamento vetorial de A até B é representado por um vetor dado na questão e esse mesmo vetor é aplicado de B até C. Em todo o caso, somente, as coordenadas de B são omitidas. A Figura 21 apresenta a ilustração fornecida aos alunos na atividade.

Figura 21 - Ilustração da atividade 08



Fonte: elaborado a partir da atividade 08

A questão problema solicita ao aluno determinar quais as componentes do vetor que levaria diretamente de A até C. Para responder o aluno deveria visualizar que o vetor de A até C corresponde a duas vezes o vetor de A até B dado na questão.

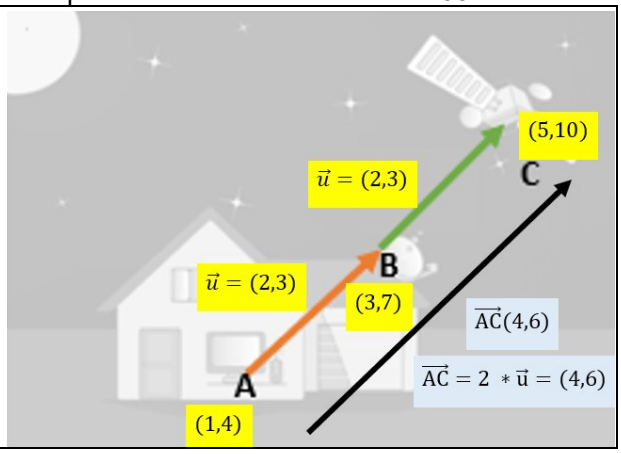
Na finalização do problema, as respostas serão analisadas e a multiplicação por um escalar apresentada. A análise a *priori* da atividade 08 é apresentada a seguir.

4.3.8.1. Análise a priori da Atividade 08

Para essa atividade, é previsível que os alunos consigam resolvê-la pelos conteúdos anteriores e, também, devem perceber ao final o efeito da multiplicação por um escalar nos vetores aplicado ao longo do deslocamento.

Portanto, assim como nos problemas anteriores tende a ser um motivador para o conteúdo a ser ensinado, mesmo porque apresenta um contexto de uma das áreas de estudo da Engenharia Elétrica. O Quadro 40 apresenta a solução para essa atividade, bem como, o contexto apresentado.

Quadro 40 - Resolução da Atividade por Redescoberta da Atividade 08

1. De acordo com a situação apresentada responda a questão abaixo. Imagine que para determinar o deslocamento vetorial do sinal que é captado pela antena da residência foi aplicado um vetor $\vec{u} = (2,3)$ no ponto A(1,4) chegando a B(3,7); o vetor $\vec{u}$ foi aplicado novamente em B chegando a C(5,10), onde o satélite está localizado. Quais as componentes do vetor que levaria A diretamente a C, de acordo com a figura a seguir? Resposta: 2*$\overrightarrow{AB}$ = 2*(2,3)=(4,6)= $\overrightarrow{AC}$	

Fonte: elaborado a partir da atividade 08

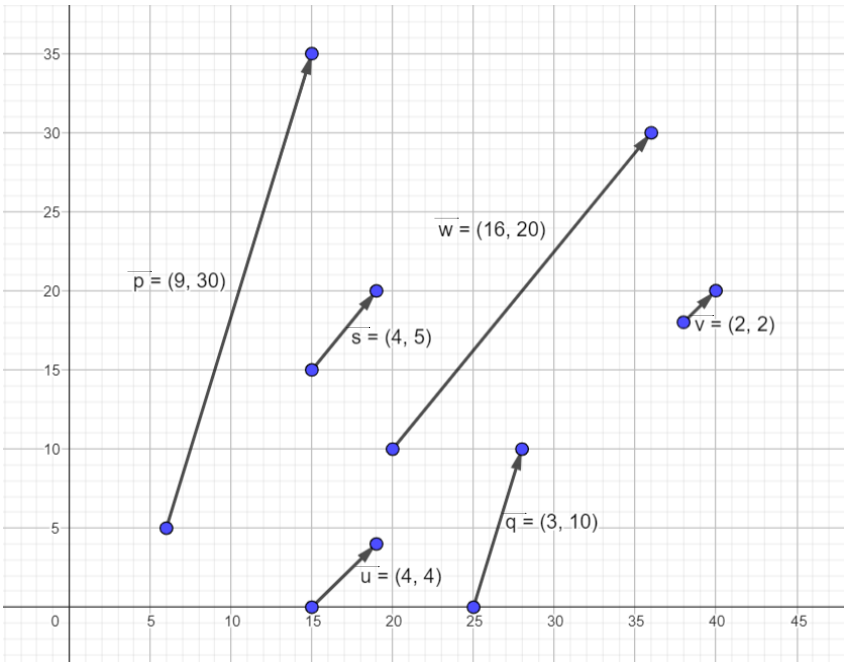
Inicialmente, não serão propostas questões para a atividade 08, estas serão resolvidas e disponibilizadas aos alunos após o término da atividade 10; pois o aporte de assuntos a serem discutidos será maior.

4.3.9. Atividade 09: Definição de vetor paralelo

A atividade 09 propõe o uso do ensino experimental por redescoberta, sendo a única atividade dessa categoria; consiste em investigar características que permitam definir os vetores como paralelos.

Para tanto, inicialmente, é apresentado aos alunos um eixo contendo vários vetores distribuídos, Figura 22, e a partir destes os grupos formados pelos discentes devem preencher um quadro de registro, tabela, com as informações solicitadas.

Figura 22 - Eixo contendo os vetores para a resolução da atividade 09



Fonte: elaborado a partir da atividade 09

O quadro de registro indica vários pares de vetores, retirados dos gráficos, e os alunos devem dizer se são paralelos ou não e indicar as suas componentes. Por meio da observação das informações preenchidas os alunos devem perceber que as componentes dos vetores que são paralelos são proporcionais e chegar à conclusão de que as estas são múltiplas de um determinado número.

Por fim, após a transcrição da conclusão para o quadro branco, serão feitas as análises necessárias para que se possa chegar à conclusão da turma durante a fase de institucionalização. A seguir, a análise a *priori* para essa atividade é apresentada.

4.3.9.1. Análise a priori da Atividade 09

Para essa atividade, é previsível que os alunos consigam preencher a parte inicial do quadro de registros de forma correta e consigam chegar à conclusão desejada. Contudo, pode acontecer que dúvidas apareçam em relação a diferença entre observação e conclusão, ou da relação que deve existir entre elas, por ser a primeira atividade com esse formato que estarão realizando; dúvidas, nesse teor, devem ser dirimidas durante o andamento da atividade.

O Quadro 41 apresenta a resolução da atividade com os campos solicitados preenchidos, inclusive com o campo observação e conclusão como esperados.

Quadro 41 - Resolução do quadro de registros da atividade 09

Pares	Vetores	Os vetores são paralelos		Componentes dos vetores	
		SIM	NÃO	Vetor 1	Vetor 2
Par 01	Vetor 1: $\vec{v}$ Vetor 2: $\vec{u}$	x		(2,2)	(4,4)
Par 02	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{p}$	x		(3,10)	(9,30)
Par 03	Vetor 1: $\vec{s}$ Vetor 2: $\vec{w}$	x		(4,5)	(16,20)
Par 04	Vetor 1: $\vec{p}$ Vetor 2: $\vec{v}$		x	(9,30)	(2,2)
Par 05	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{s}$		x	(3,10)	(4,5)
Par 06	Vetor 1: $\vec{u}$ Vetor 2: $\vec{w}$		x	(4,4)	(16,20)
Observação: As componentes dos vetores que são paralelos são proporcionais, enquanto os vetores que não paralelos não obedecem a essa relação.					
Conclusão: Vetores Paralelos possuem componentes proporcionais. Ou seja, dado um vetor $\vec{v}//\vec{u}$, implica que $\vec{v} = n\vec{u}$, sendo n um número qualquer.					

Fonte: elaborado a partir da atividade 09

Como exposto anteriormente, as questões para essa atividade serão resolvidas e propostas após o término da atividade 10.

4.3.10. Atividade 10: Vetor Unitário

A atividade 10 é do tipo resolução de problemas como ponto de partida tendo por motivador um problema puramente matemático que questiona de que

forma obter um vetor paralelo com magnitude 1 em relação a um vetor dado qualquer.

Portanto, para esse caso, os alunos, individualmente, tentarão resolver o problema sob a supervisão do docente e durante um tempo determinado por este; podendo ser estendido caso perceba que os alunos irão conseguir resolver a questão ou diminuído, caso contrário. Abaixo é apresentada a análise a *priori* da atividade 10.

4.3.10.1. Análise a priori da Atividade 10

Para essa atividade, é previsível que os alunos não consigam resolvê-la e a vejam, de fato, como um problema. Contudo, espera-se que eles tentem de alguma forma, utilizando os conhecimentos adquiridos sobre vetores paralelos e, até mesmo, pelo título, caso já saibam a definição de vetor paralelo; porém, é pouco provável que cheguem ao invariante desejado.

No mais, a própria tentativa de solução, nos dará indícios da motivação dos alunos com o método de ensino e da confiança adquirida com a resolução e entendimento das atividades anteriores. O Quadro 42 apresenta a resolução da atividade 10.

Quadro 42 - Resolução da atividade 10

Dado um vetor $\vec{u}$, como obter um vetor paralelo a ele com magnitude 1.
Solução:
Considere que $\vec{u} = (x, y, z)$; como $\vec{v}//\vec{u}$, então:
$\vec{v} = k\vec{u} = (kx, ky, kz)$ (1) e $|\vec{v}|=1$ (2)
Aplicando (1) em (2): $|\vec{v}| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2} = 1$
$(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2 = 1 \rightarrow k^2(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|}$ (4)
Aplicando (4) em (1): $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ → vetor paralelo a $\vec{u}$ com magnitude 1
Verificando:
Seja $\vec{u} = (x, y, z)$ e $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; logo: $\vec{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}} = 1$$

Fonte: elaborado a partir da atividade 10

Após a finalização da atividade com a demonstração do invariante e definição de vetor unitário, serão resolvidas questões de aprofundamento e as para casa serão propostas, referentes as atividades 08, 09 e 10.

4.3.11. Atividade 11: Produto Escalar

A atividade 11 propõe o uso da RPPP para apresentar a definição de produto escalar a partir de uma questão contextualizada que apresenta uma situação real do recorde de um atleta ao deslocar 16 carros por uma determinada distância.

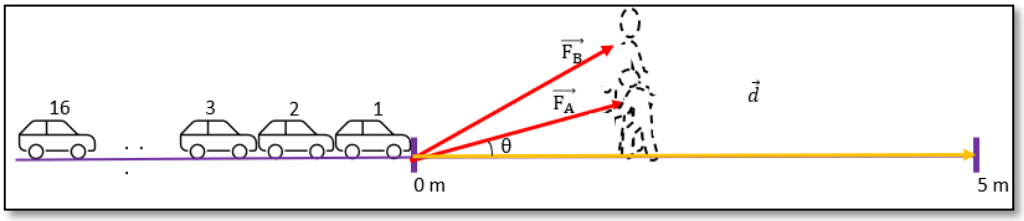
Os alunos precisam determinar o ângulo, de forma literal, formado entre a distância que o carro que foi puxado e a força aplicada pelo homem, tal como apresentado na Figura 23.

Figura 23 - a) atleta deslocando os carros com uma corda presa ao tronco; b) atleta deslocando os carros com a corda presa aos dentes

Fonte: adaptado de https://autoesporte.globo.com/curiosidades/noticia/2021/12/video-homem-quebra-dois-recordes-mundiais-ao-puxar-16-carros-e-movimentar-5-veiculos-com-os-dentes.ghtml, acesso em 21/04/2023.

Para facilitar os alunos também terão acesso a uma ilustração com a indicação dos vetores força e distância, de acordo com a Figura 24.

Figura 24 - Ilustração do problema da atividade 11; sendo $\overrightarrow{F_A}$ força aplicada na situação A e $\overrightarrow{F_B}$, na Situação B



Fonte: elaborado a partir da Figura 11

Para a resolução há possibilidade pela lei dos cossenos, que é o desejado, pela relação trigonométrica e pela aplicação direta da fórmula do produto escalar, caso os alunos tenham conhecimento; porém essas duas últimas opções de resolução não são desejadas; pois o ideal é o desenvolvimento da questão para encontrar o invariante.

Inicialmente, o problema será proposto aos alunos para que tentem solucioná-lo, em seguida, a fase de institucionalização será realizada com a resolução da questão demonstrando o invariante que permite a definição do produto escalar. A seguir, será apresentado a análise a priori da Atividade 11.

4.3.11.1. Análise a priori da atividade 11

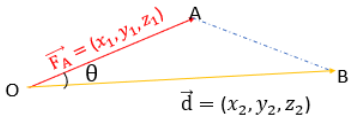
De acordo com o nível de dificuldade do problema proposto, é esperado que os alunos não consigam a priori solucioná-lo como desejado, a menos que conheçam a lei dos cossenos. Contudo, estima-se que alguns alunos tentem resolvê-lo ou o resolvam por meio de relações trigonométricas ou pela aplicação da equação do produto escalar, caso a conheçam.

Por outro lado, o fator surpresa da demonstração do invariante para chegar ao produto escalar tende a motivar os alunos e a percepção de que, para a resolução da maioria dos problemas matemáticos, eles já têm conhecimento das ferramentas a utilizar, mas não foram treinados dessa forma.

Assim, diante da impossibilidade de resolução pelos alunos, ou das tentativas observadas e devidamente registradas no diário de campo; a fase de institucionalização irá ocorrer com determinação do invariante para obter o ângulo entre dois vetores e, consequentemente, a demonstração do produto escalar. O Quadro 43 apresenta a resolução do problema proposto.

Quadro 43 - Resolução da atividade 11

Determine o ângulo θ formado entre $\overrightarrow{F_A} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{d} = (x_2, y_2, z_2)$.



1. Seja a representação no plano de $\overrightarrow{F_B}$ e $\vec{d}$, representados como vetores ligados, e do ângulo θ

2. Aplicação a lei dos cossenos no triângulo ABO: $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{F_B}\right|^2 + \left|\vec{d}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{F_B}\right|\left|\vec{d}\right|cos\theta$ (1)

Em coordenadas, temos:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2{}^2 - 2\left|\vec{d}\right|\left|\overrightarrow{F_B}\right|cos\theta$$

$x_2^2 - 2x_2x_1 + {x_1}^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + {y_1}^2 + z_2^2 - 2z_2z_1 + {z_1}^2 = x_2^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + {z_2}^2 - 2|\vec{d}||\overrightarrow{F_B}|cos\theta$ (2)

Pós simplificação de (2): $-2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_F = -2|\vec{d}||\overrightarrow{F_B}|cos\theta$ (3)

Logo: $cos\theta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\overrightarrow{F_B}||\vec{d}|} \rightarrow \theta = arc\cos\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\overrightarrow{F_B}||\vec{d}|}\right)$

Fonte: elaborado a partir da resolução da atividade 11

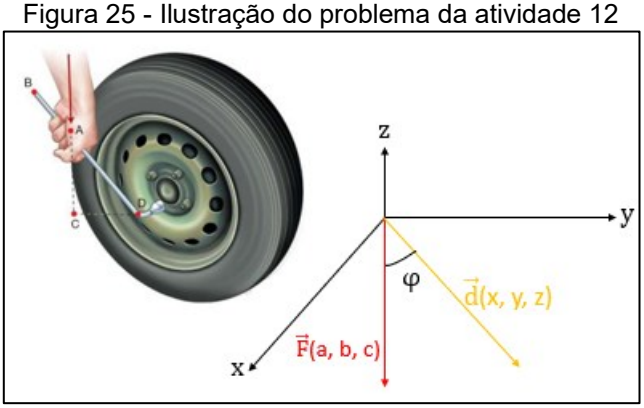
Por fim, após a institucionalização serão propostas as questões de aprofundamento e para casa.

4.3.12. Atividade 12: Produto Vetorial

A atividade 12 propõe o uso da RPPP para apresentar a definição de produto vetorial a partir de uma questão contextualizada envolvendo o torque de uma força (ou momento) que é um vetor na física relacionado ao movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, tal como, o funcionamento de uma alavanca, e é representado matematicamente pelo produto vetorial.

Portanto, para ilustrar a situação problema, utilizou-se o problema clássico da retirada de um parafuso sextavado da roda do automóvel, Figura 25. A partir do problema e da obtenção do invariante, serão demonstradas as equações algébricas do produto vetorial.

Figura 25 - Ilustração do problema da atividade 12



Fonte: elaborado a partir da atividade 12.

Tal como nas atividades anteriores de RPPP, inicialmente, o problema será proposto aos alunos para que tentem solucioná-lo, em seguida, a fase de institucionalização será realizada com a resolução da questão proposta partindo da obtenção do vetor torque representado pelo produto vetorial.

Em seguida, serão propostos exercícios de aprofundamento para a apresentação das propriedades do produto vetorial e outras aplicações, além dos para casa. A seguir, será apresentada a análise a *priori* da Atividade 12.

4.3.12.1. Análise a priori da atividade 12

A atividade 12, apesar de ser resolvida a partir da definição de produto escalar, provavelmente, não será solucionada pelos alunos devido a pouca familiaridade com questões que envolvem demonstração, porém a maturidade adquirida com as atividades anteriores e com o método tende a ser um fator que estimule o aluno a tentar chegar a solução final.

Contudo, resoluções incorretas por decomposição de forças são esperadas, tentativas de resolução por meio da ortogonalidade também ou intuições a partir desta característica. Diante da impossibilidade da resolução, a resolução será apresentada. O Quadro 44 apresenta a resolução do problema proposto.

Quadro 44 - Resolução da atividade 12

Considerando $\vec{F} = (a, b, c)$, $\vec{d} = (x, y, z)$ e $\vec{\tau} = (\alpha, \beta, \theta)$ e de acordo como enunciado e aplicando a propriedade do produto escalar, têm-se:

$\vec{\tau} . \vec{F} = 0$ (1) $\quad \vec{\tau} . \vec{d} = 0$ (2)

De (1) e (2), respectivamente: $\alpha a + \beta b + \theta c = 0$ (3) $\quad \alpha x + \beta y + \theta z = 0$ (4)

Multiplicando (3) por x e (4) por a, obtemos:

$\alpha a x + \beta b x + \theta c x = 0$ (5) $\quad \alpha a x + \beta a y + \theta a z = 0$ (6)

Calculando (5) - (6): $\beta(bx - ay) + \theta(cx - az) = 0 \rightarrow \frac{\beta}{(cx - az)} = \frac{\theta}{(ay - bx)}$ (7)

Multiplicando (3) por y e (4) b, obtemos:

$\alpha a y + \beta b y + \theta c y = 0$ (8) $\quad \alpha b x + \beta b y + \theta b z = 0$ (9)

Calculando (9) - (8): $\alpha(bx - ay) + \theta(bz - cy) = 0 \rightarrow \frac{\alpha}{(bz - cy)} = \frac{\theta}{(ay - bx)}$ (10)

Comparando (7) e (10): $\frac{\alpha}{(bz - cy)} = \frac{\beta}{(cx - az)} = \frac{\theta}{(ay - bx)} = k$ (11)

Fazendo $k = 1$:

$\alpha = bz - cy \quad \beta = cx - az \quad \theta = ay - bx$

Logo: $\vec{\tau} = (bz - cy)\vec{\imath} + (cx - az)\vec{j} + (ay - bx)\vec{k} = \vec{F}\ x\ \vec{d}$

Em forma de determinante:

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborado a partir da atividade 12.

Ao final, as questões de aprofundamento e para casa serão propostas.

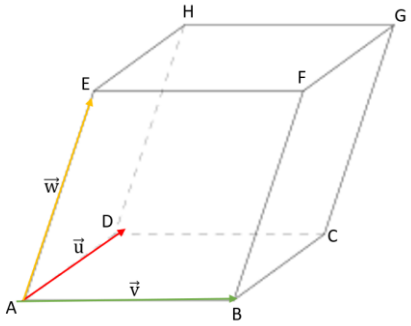
4.3.13. Atividade 13: Produto Misto

A atividade 13 propõe o uso da RPPP para apresentar o produto misto que envolve tanto o produto escalar quanto o produto vetorial. Dentre as aplicações que utilizam o produto misto estão o volume do paralelepípedo e do tetraedro, figuras geométricas comum no cotidiano podendo representar contêineres, prédios, piscinas, reservatórios, caixas etc.

Além disso, pode ser utilizado, também, para verificar se os vetores são linearmente independentes, para verificar a distância de um ponto no espaço até um plano determinado, dentre outras coisas. No mais, a grande utilidade do produto misto, em termos matemáticos, é a resolução de um simples determinante 3x3 ao invés de duas operações vetoriais.

Portanto, para ilustrar a situação problema, utilizou-se um problema matemático que solicitava o volume de um paralelepípedo gerado por três vetores não coplanares, ilustrados como na Figura 26.

Figura 26 –Ilustração do paralelepípedo para a atividade 13



Fonte: elaborado partir da atividade 13

O objetivo principal é representar a fórmula do volume do paralelepípedo utilizando as operações com vetores (multiplicação escalar e vetorial) vistas anteriormente. Para chegar à solução, é preciso lembrar que o volume do paralelepípedo resulta da multiplicação da área do paralelogramo pela altura do mesmo, a partir da figura geométrica dada. Sendo que, a área do paralelogramo pode ser obtida pelo produto vetorial.

A partir dessa aplicação outras serão propostas, tal como, para verificar as propriedades do produto misto e outros exemplos, exercícios de

aprofundamento e de fixação serão propostos ao final da aula. A seguir, será apresentado a análise a *priori* da Atividade 13.

4.3.13.1. Análise a priori da atividade 13

A atividade 13 pode ser considerada de um nível difícil por envolver vários conhecimentos anteriores e interpretação geométrica; no entanto, é possível que os alunos consigam sugerir, ao menos, a solução utilizando o produto vetorial para encontrar a área do paralelogramo, porém podem ter dificuldades em expressá-la matematicamente de forma correta e, da mesma forma, para encontrar a altura a partir dos vetores dados que exige um pouco mais de domínio matemático.

Contudo, assim como nas atividades 12 e 13, o ponto principal a ser observado é a tentativa dos alunos em resolver o problema e, nesse caso, o mínimo de compreensão que precisam utilizar o produto vetorial de alguma forma já é considerado válido e nos dará indícios da aprendizagem dos conteúdos anteriores, além do fator motivação e entusiasmo presentes nas tentativas sem esperar, somente, pela resolução do professor.

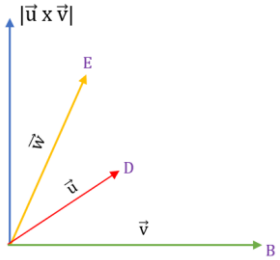
No mais, vários questionamentos e dúvidas são esperados em relação a resolução e as etapas. Após tentativas iniciais ou da impossibilidade de iniciar a resolução do problema e, até mesmo, resolvê-lo, o professor como mediador dever intervir e mostrar a resolução para chegar ao invariante que denominará de produto misto. O Quadro 45 apresenta a resolução do problema.

Quadro 45 - Resolução da atividade 13

Qual é o volume de um paralelepípedo gerado por três vetores não coplanares, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$?
Por definição, o volume do paralelepípedo é V = S x h, sendo S = área da base (paralelogramo) e h= altura

a) Pelo produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ é igual a área do paralelogramo e resulta em um vetor perpendicular a este, tal como, representado na figura

$|\vec{u} \times \vec{v}|$ Logo, $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ (2)



b) Para encontrar h:

Portanto: $h = ||\overrightarrow{w}|cos\theta|$ (3)

Pelo produto escalar: $\cos\theta = \frac{(\vec{u}\ x\ \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u}\ x\ \vec{v}|.|\vec{w}|}$ (4)

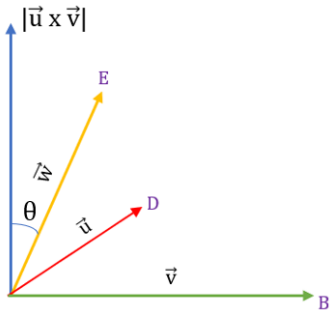
Aplicando (4) em (3): $h = \vec{w}\ .\frac{(\vec{u}\ x\ \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u}\ x\ \vec{v}|.|\vec{w}|}$ (5)

Logo, fazendo (5) e (2) em (1): $V = |\vec{u}\ x\ \vec{v}|.|\vec{w}|.\frac{(\vec{u}\ x\ \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u}\ x\ \vec{v}|.|\vec{w}|}$, pós simplificação: $V = \vec{w}\ .\ |\vec{u}\ x\ \vec{v}|$ → Produto Misto

Considerado $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$, $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ e $\vec{w} = (x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}}, z_{\vec{w}})$, em forma de determinante:

$$V = \begin{bmatrix} x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} & z_{\vec{u}} \\ x_{\vec{v}} & y_{\vec{v}} & z_{\vec{v}} \\ x_{\vec{w}} & y_{\vec{w}} & z_{\vec{w}} \end{bmatrix}$$

Para o volume do paralelepípedo: $V = \left|\begin{bmatrix} x_{\overrightarrow{AE}} & y_{\overrightarrow{AE}} & z_{\overrightarrow{AE}} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}} \end{bmatrix}\right|$



Fonte: elaborado a partir da atividade 13

Ao final dessa atividade, os alunos terão acesso as questões de aprofundamento e para casa relacionadas a essa atividade e, além disso, por ser a última atividades da SD, também, realizarão questões de revisão e um Quiz.

Para melhor visualização das atividades, a subseção seguinte apresenta um resumo sintético da sequência didática com a Análise a *Priori* de cada uma.

4.4. QUADRO – RESUMO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A *PRIORI*

Após a apresentação da sequência didática e antes da apresentação do quadro-resumo, cabem algumas considerações, sobre algumas das atividades e das questões propostas:

- ✓ Para algumas atividades de conceituação, 03, 04 e 05, optou-se por direcionar a observação final por meio de uma questão; essa tem por base de resposta o que foi desenvolvido durante a resolução da atividade;
- ✓ Sobre as atividades de resolução de problemas como ponto de partida: a análise a *priori,* somente, das 06, 07 e 08, apesar de sua natureza, prevê, que os alunos consigam resolvê-las; apresentando-se dessa forma com um caráter motivador e de indícios do aceite da metodologia;
- ✓ Sobre as questões de aprofundamento: serão resolvidas em sala de aula após a institucionalização da atividade ou após um conjunto de atividades, conforme o andamento dos assuntos estudados, sendo previstos um bloco de questões para as atividades de 02 à 04, um para a

05, outro para a 06 e 07, um para a 08, 09 e 10 e, por fim, blocos individuais, para as 11, 12 e 13;

✓ Ainda sobre esse tipo de questões, apesar da divisão em blocos, sempre permeiam todos os assuntos vistos anteriormente e, além disso, os gabaritos são disponibilizados aos alunos;

✓ Sobre as questões para casa: serão resolvidas em sala, conforme a solicitação dos alunos, sendo que, o aluno também tem acesso aos gabaritos;

✓ As questões de revisão serão propostas ao final da atividade 13 e das questões para casa e de aprofundamento, assim como, o Quiz que tem por objetivo proporcionar um momento lúdico para verificação dos conhecimentos;

✓ O Quiz contêm 20 questões de VERDADEIRO ou FALSO sobre vetores geométricos com ênfase nas definições, postulados e propriedades.

Assim, o Quadro 46 apresenta um resumo das atividades da SD com o título, objetivo, o que se deseja que o aluno aprenda, a(s) tendência(s) matemática(s), o contexto motivador e um resumo análise da priori de cada uma delas.

Quadro 46 - Quadro resumo da Sequência Didática e Análise a *Priori*

TÍTULO	OBJETIVO	O QUE SE DESEJA QUE O ALUNO APRENDA?	TENDÊNCIA	CONTEXTO	ANÁLISE A PRIORI
01. Tipos de Grandezas	Diferenciar e caracterizar grandezas	Diferença entre grandezas, conceituar e representar vetores.	Atividade de Conceituação	Rotina Diária	Espera-se que os alunos completem o quadro, majoritariamente, de forma correta. Na fase de registro e análise é possível que tenham dificuldade em expressar suas observações de forma escrita, devido esse tipo de atividade, que envolve análise e dedução, não ser comum. Porém, é provável que as diferenças entre as grandezas sejam observadas. Contudo, intervenções deverão ser realizadas, caso necessário.

02. Deslocamento Vetorial	Conceituar deslocamento		Atividade de Conceituação	Percurso Trasladação/Círio de Nazaré	Com essa atividade é esperado que alunos consigam identificar os deslocamentos, bem como, associar que o deslocamento na horizontal é ao longo do eixo x e na vertical ao longo do eixo y e sua obtenção a partir da diferença entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial. Contudo, podem ocorrer dúvidas em relação ao trecho em que os deslocamentos são na horizontal e vertical e alguma intervenção seja necessária. No mais, a análise do deslocamento ao inverter o sentido irá possibilitar o entendimento de que inversões do sentido, não indicam, alteração na direção, bem como, no valor absoluto do deslocamento. Contudo, pode haver algum tipo de confusão em relação à direção e ao sentido no registro das observações.
03. Vetor	Definir Vetor		Atividade de Conceituação	Matemático	Com essa atividade é esperado que os alunos consigam identificar as componentes dos deslocamentos de forma correta e perceber que é possível que pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento que culminará com a definição de vetor. Para essa atividade, espera-se que os alunos não tenham dificuldades e nem grandes questionamentos durante o andamento e conclusão, mesmo porque a pergunta final é bastante direcionada.
04. Coordenadas de um ponto	Encontrar as coordenadas de um ponto terminal a partir de um vetor	Compreenda como obter as coordenadas de u m ponto terminal dado o vetor e o ponto inicial.	Atividade de Conceituação	Enlaces de telecomunicações	Com essa atividade, é esperado que os alunos consigam definir as coordenadas dos pontos de forma satisfatória utilizando, intuitivamente, o somatório da coordenada x ou y do ponto inicial com a componente x ou y do vetor. Contudo, para a generalização da fórmula pode haver alguma dificuldade, pois, historicamente, o modo tradicional de ensino não estimula esse tipo de descoberta e/ou questão a ser resolvida pelos alunos. No mais, a resolução de forma correta da primeira parte da atividade, já nos dará indícios do alcance do objetivo e do aprendizado baseado, também, nos conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores.

05. Módulo/Norma de um Vetor	Definir Módulo/Norma de um vetor	Entenda como calcular o módulo e seu significado.	Atividade de Conceituação	Distância entre antenas	Para essa atividade, é previsível que os alunos consigam calcular a distância de forma correta e, até mesmo, apresentar a fórmula corretamente. Ao final, espera-se que os alunos possam entender e sanar dúvidas acerca não, somente, do cálculo da distância, mas do conceito, significado e importância do conhecimento do módulo de um vetor; mesmo porque uma aplicação direta é apresentada a eles. Contudo, ainda assim, pode aparecer erros de representação.
06.Adição de Vetores	Conceituar a adição de vetores	Realize adições de forma algébrica e geométrica.	RP / Atividade por Redescoberta	Deslocamento de uma ave entre os ninhos.	Para essa atividade, espera-se que os alunos consigam resolver o problema inicial considerando os conteúdos anteriores envolvendo deslocamento que, de dessa forma, passar a ser visto como um exercício; nesse sentido, a resolução da atividade experimental pode suscitar observações diversas envolvendo tanto a soma vetorial algébrica quanto a geométrica e a disposição do vetor soma no plano, verificadas nos gráficos desenhados, assim, pode ser necessário algumas intervenções para direcioná-la ao objetivo da atividade.
07. Vetor Oposto	Definir vetor oposto	Compreenda o vetor oposto, bem como, suas propriedades e o vetor nulo.	RPPP	Deslocamento de uma ave entre os ninhos	Para essa atividade, o problema tende a ser um motivador para a introdução dos assuntos, pois é esperado que os alunos consigam resolvê-la de forma rápida e correta a partir do que foi visto nas atividades anteriores. Assim, o problema tende a ser visto pelos discentes como exercícios. A atividade tende a mostrar que um simples contexto e aplicação pode melhorar o desempenho e motivação dos alunos.
08. Multiplicação por um escalar	Investigar o efeito da multiplicação de um vetor por um escalar.	Entenda os efeitos da multiplicação de um vetor por um escalar e sua utilização como recurso para resolver problemas de forma mais rápida.	RPPP	Comunicação via Satélite	Para essa atividade, é previsível que os alunos consigam resolvê-la pelos conteúdos anteriores e, também, devem perceber ao final o efeito da multiplicação por um escalar nos vetores aplicado ao longo do deslocamento. Portanto, assim como nos problemas anteriores tende a ser um motivador para o conteúdo a ser ensinado, mesmo porque apresenta um contexto de uma das áreas de estudo da Engenharia Elétrica.

09. Definição de vetor paralelo	Investigar a condição de paralelismo	Defina vetores paralelos a partir da condição de paralelismo	Atividade de Redescoberta	Matemático	Para essa atividade, é previsível que os alunos consigam preencher a parte inicial do quadro de registros de forma correta e consigam chegar à conclusão desejada. Contudo, pode acontecer que dúvidas aparecem em relação a diferença entre observação e conclusão, ou da relação que deve existir entre elas, por ser a primeira atividade com esse formato que estão realizando; dúvidas, nesse teor, devem ser dirimidas durante o andamento da atividade.
10. Vetor Unitário	Definir Vetor Unitário	Compreenda a definição e como calcular o vetor unitário.	RPPP	Matemático	Para essa atividade, é previsível que os alunos não consigam resolvê-lo e a vejam, de fato, como um problema. Contudo, espera-se que eles tentem de alguma forma, utilizando os conhecimentos adquiridos sobre vetores paralelos e, até mesmo, pelo título, caso já saibam a definição de vetor paralelo; porém, é pouco provável que cheguem ao invariante desejado. No mais, a própria tentativa de solução, nos dará indícios da motivação dos alunos com o método de ensino e da confiança adquirida com a resolução e entendimento das atividades anteriores.
11. Produto Escalar	Determinar o ângulo entre dois vetores	Compreenda algébrica e geometricamente o produto escalar.	RPPP	Situação da real de um homem aplicando uma força sob diferentes ângulos para deslocar carros.	De acordo com o nível de dificuldade do problema proposto, é esperado que os alunos não consigam solucioná-lo a priori da forma como desejada, a menos que conheçam a lei dos cossenos. Contudo, estima-se que alguns alunos tentem resolvê-lo por meio de decomposição de forças e/ou por relações trigonométricas. Por outro lado, o fator surpresa da demonstração do invariante para chegar ao produto escalar tende a motivar os alunos e a percepção de que, para a resolução da maioria dos problemas matemáticos, eles já têm conhecimento das ferramentas a utilizar, mas não foram treinados dessa forma.
12. Produto Vetorial	Definir produto vetorial	Compreenda algébrica e geometricamente o produto vetorial	RPPP	Medição do momento ou torque da força durante a rotação de um parafuso.	Essa atividade apesar de ser resolvida a partir da definição de produto escalar, provavelmente, não será solucionada pelos alunos devido a pouca familiaridade com questões que envolvem demonstração, porém a maturidade adquirida com as atividades anteriores e com o método tende a ser um fato que estimule o aluno a tentar chegar a solução final. Contudo, resoluções incorretas por decomposição de forças são esperadas, tentativas de resolução por meio da ortogonalidade também ou intuições a partir desta característica.

13. Produto Misto	Definir produto misto	Compreenda algébrica e geometricamente o produto misto.	RPPP	Volume do paralelepípedo	Essa atividade pode ser considerada de um nível difícil por envolver vários conhecimentos anteriores e interpretação geométrica; no entanto, é possível que consigam sugerir, ao menos, a solução utilizando o produto vetorial para encontrar a área do paralelogramo, porém podem ter dificuldades em expressar matemática de forma correta e, da mesma forma, para encontrar a altura a partir dos vetores dados que exige um pouco mais de domínio matemático. Contudo, assim como nas atividades 12 e 13, o ponto principal a ser observado é a tentativa dos alunos em resolver o problema e, nesse caso, o mínimo de compreensão de que precisam utilizar o produto vetorial de alguma forma já é considerado válido e nos dará indícios da aprendizagem dos conteúdos anteriores, além do fator motivação e entusiasmo presentes nas tentativas sem esperar, somente, pela resolução do professor.

Fonte: elaborado a partir da sequência didática

Os instrumentos que serão utilizados para análise da SD, que foram selecionados e construídos nessa etapa, e utilizados durante a experimentação serão listados e, alguns, também, descritos na subseção seguinte.

4.5. INSTRUMENTOS PARA PRODUÇÃO DE INFORMAÇÕES DURANTE A EXPERIMENTAÇÃO

O Quadro 47, lista os instrumentos serão utilizados durante e após a aplicação da SD de acordo com a sua finalidade e apêndice/anexo no qual está localizado.

Quadro 47– Instrumentos para produção dos dados, finalidade e indicação da localização

INSTRUMENTO[12]	FINALIDADE	LOCALIZAÇÃO
Ficha de Observação	O seu preenchimento em cada sessão será necessário para a fase de validação dos resultados.	APÊNDICE M
Questionário de emoções de aprendizagem e desempenho na matemática	Investigar por meio de autoafirmações as emoções desencadeadas na aprendizagem da matemática a partir do teste de emoções acadêmicas e de autoconceito acadêmico disponível em Lima (2012)	ANEXO A

[12] As Questões de Revisão e o Quiz estão no Apêndice H, referente a Sequência Didática

Questionário acadêmico e socioeconômico	Traçar o perfil pessoal, econômico e acadêmico dos participantes da experimentação.	APÊNDICE J
Quiz	Avaliar os conceitos teóricos aprendidos durante a experimentação de forma lúdica.	APÊNDICE K – QUIZ
Questões de revisão	Revisar os conhecimentos e tirar dúvidas.	APÊNDICE K – QUESTÕES DE REVISÃO
Pré/Pós teste	Tem por finalidade avaliar os conhecimentos antes e após da aplicação da sequência didática. O mesmo teste é aplicado nos dois momentos.	APÊNDICE L

Fonte: a partir do diagnóstico das análises prévias e da concepção e análise a *priori*.

Alguns desses instrumentos serão devidamente esclarecidos a começar pelo questionário acadêmico e socioeconômico, o Quadro 48 irá apresentar o objetivo das questões presentes no mesmo, para facilitar a compreensão as opções de respostas foram omitidas e podem ser consultados no Apêndice J correspondente ao questionário completo.

Quadro 48 - Objetivo das perguntas do questionário acadêmico e socioeconômico

PERGUNTAS (S)	**OBJETIVO**
1. Idade: 2. Sexo: 3. Você se considera: a) branco(a) b) Pardo(a) c) Preto(a) d) Amarelo(a) e) Indígena 4. Qual o seu estado civil? 5. Onde e como você mora atualmente? 6. Quem mora com você? 7.Quantas pessoas moram em sua casa? 8. Você tem filhos? Quantos? 9. Somando a sua renda com a das pessoas que moram com você, quanto é, aproximadamente, a renda familiar?	Identificar o perfil do aluno e sua condição social e econômica; respostas a essas perguntas podem ser relacionadas com o ambiente familiar e desempenho escolar do aluno.
10. Qual a escolaridade de seu Responsável Masculino? 11. Qual a escolaridade de seu Responsável Feminino? 12. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino? 13. Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino? 14. Você trabalha atualmente? Qual profissão?	Identificar a situação acadêmica e profissional de seus pais e/ou responsáveis; respostas a essas perguntar podem ser relacionadas ao desempenho escolar e escolha profissional.
15. Qual o seu nível de escolaridade? 16. Em qual escola concluiu o Ensino Médio? 17. Você tem formação em algum curso técnico ou profissionalizante? Qual? 18. Você tem formação em algum curso Superior? Qual? 19. Você tem formação em algum curso de Pós-graduação? Qual? 20. Você considera que seus conhecimentos adquiridos no ensino médio .... 21. Que nota você daria para a formação que você obteve no ensino médio?	Identificar se o aluno possui experiência anterior em outros níveis de escolaridade, como nível técnico, superior e/ou pós-graduação, bem como, como se vê em relação aos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio.

22. Porque você escolheu cursar Engenharia? 23. O que ajudou você a tomar essa decisão sobre sua profissão?	Identificar o porquê da escolha pelo curso e profissão; perguntas como essa podem indicar se o aluno tem afinidade com o curso, ou foi, apenas, influenciado, por conhecidos e/ou por benefícios financeiros; fatores como estes podem influenciar no desempenho escolar.
24. Você tem acesso a computador? 25. Você tem acesso à internet ? 26. Você tem: a) Telefone Celular Simples b) Telefone Celular c/ Acesso à Internet c) Notebook	Identificar a relação do aluno com a tecnologia da informação e o seu acesso a esta.
27. Você já esteve em dependência em alguma disciplina do curso de Engenharia Elétrica? Quais disciplinas? 28. Você já esteve em dependência em Cálculo IV? Quantas vezes? 29. Com que frequência você costuma estudar disciplinas de Matemática fora da escola? 30. Você gosta de disciplinas da área de Matemática? 31. Quem/o que mais lhe ajuda ou ajudava nas tarefas de Matemática?	Identificar o seu desempenho acadêmico, frequência de estudo e gosto pela matemática que podem nos dá indício e seu desempenho escolar, bem como, da necessidade ou não de ajuda nas disciplinas de matemática. Também foi perguntado se ele já esteve em dependência em Cálculo IV, disciplina na qual será aplicada a sequência didática com o objetivo de saber se ele já havia tido contato com o conteúdo a ser abordado.
32. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Cálculo? 33. Quais as principais formas de avaliação o (a) professor (a) da área de Matemática costuma solicitar a você? 34. Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação da área de Matemática? 35. A maioria das aulas da área de Matemática no Ensino Superior começaram: 36. Para fixar o conteúdo estudado de Matemática, o seu professor (a):	Identificar qual a principal metodologia de ensino utilizada pelos professores que ministraram aulas na área de matemática, bem como, as formas de avaliação e sentimento do aluno mediante a mesma para tentar verificar o contato do aluno com outros tipos de técnicas de ensino e sua familiaridade com essas.

Fonte: elaborado a partir do questionário acadêmico e socioeconômico

Outro instrumento destacado é o Questionário de emoções de aprendizagem e desempenho na matemática de Lima (2012) e é dividido em dois testes: de emoções acadêmicas e de autoconceito acadêmico. Tem por base o uso da escala *Likert*, sendo 01 – Discordo Totalmente, 02 – Discordo,03 – Nem Discordo, nem Concordo, 4 – Concordo e 5 – Concordo Totalmente, contendo sentenças com autoafirmações distribuídas aleatoriamente.

De acordo com Lima (2012, p. 63), para o teste de emoções, “para cada emoção, foram incluídos nos itens da escala, três diferentes situações diretamente relacionadas ao desempenho – instrução em sala de aula, estudos extraclasse/deveres de casa e provas”; contem seis fatores emocionais: prazer (sete itens), orgulho (oito itens), vergonha (oito itens), ansiedade (sete itens) e raiva (sete itens), conforme apresentado no Quadro 49. No quadro as

autoafirmações foram agrupadas pelos sentimentos que expressam e por situações relacionadas ao desempenho.

Quadro 49 - Emoções relacionados no questionário de Emoções de Aprendizagem

EMOÇÃO	SITUAÇÕES RELACIONADAS AO DESEMPENHO	AUTOFIRMAÇÕES
PRAZER	INSTRUÇÃO EM SALA DE AULA	1.Eu adoro as aulas de matemática.
		3.Eu me alegro só em saber que é dia de aula de matemática.
		9. Não sinto prazer em explicar como resolvi um problema de matemática ao professor
		15. Eu adoro aprender um assunto novo de matemática.
		22. Eu fico triste depois de uma aula de matemática que eu não entendi direito.
	ESTUDOS EXTRACLASSE/ DEVERES	2.Eu me divirto estudando matemática.
		12. Para mim é um prazer passar a tarde estudando matemática
ORGULHO	INSTRUÇÃO EM SALA DE AULA	18. Eu fico orgulhoso (a) de estar podendo entender as aulas de matemática.
		20. Eu sinto orgulho quando o professor elogia meu bom desempenho em matemática.
	ESTUDOS EXTRACLASSE/ DEVERES	8. Eu sinto orgulho de mim mesmo (a) ao estudar matemática sem precisar da ajuda de ninguém.
		14. Depois de resolver meu dever de casa de matemática sinto orgulho de mim.
		30. Eu me orgulho sempre que consigo resolver um problema difícil de matemática.
		28. Eu me empolgo quando resolvo um problema de matemática.
	PROVAS	5. Eu sinto orgulho quando tiro a nota máxima em matemática
		7. Eu fico feliz quando faço uma boa prova de matemática.
VERGONHA	INSTRUÇÃO EM SALA DE AULA	13. Geralmente quando o professor está explicando um assunto de matemática e pergunta para toda a turma se entendeu. eu digo que sim só porque tenho vergonha de dizer que não entendi nada.
		24. Em geral eu me envergonho quando não respondo direito as perguntas de matemática que o professor me faz.
		26. Geralmente eu sinto vergonha se na aula de matemática resolvo errado um problema.
	ESTUDOS EXTRACLASSE/ DEVERES	34. Pode acontecer de ficar encabulado (a) quando eu erro um problema de matemática que meus colegas acertaram.
		11. Quando não consigo resolver um dever de casa de matemática eu não procuro o professor para tirar dúvidas porque sinto vergonha.
		32. Geralmente eu sinto vergonha quando participo de um trabalho de matemática em equipe e não sei nada do assunto.
		36. Geralmente não sei fazer certos cálculos de matemática direito e tenho vergonha disso.
	PROVAS	33. Eu me acanho quando às vezes tiro nota baixa em matemática.
ANSIEDADE	INSTRUÇÃO EM SALA DE AULA	16. Durante a aula de matemática ao ter que resolver um exercício sozinho eu fico ansioso (a).
	ESTUDOS EXTRACLASSE/ DEVERES	17. Eu suo frio antes de entregar um dever de casa de matemática.
	PROVAS	4.Eu fico nervoso (a) antes de fazer uma prova de matemática.
		6.Durante uma prova de matemática me dá “um branco” e eu não consigo resolver as questões.

		10. Depois de fazer uma prova de matemática eu me preocupo com a possibilidade de tirar uma nota baixa.
		21. Fico ansioso (a) depois de fazer uma prova de matemática que achei difícil.
		37. Ao fazer uma prova de matemática. pode acontecer de ficar nervoso.
R A I V A	INSTRUÇÃO EM SALA DE AULA	23. Eu me irrito durante as aulas de matemática.
		29. Eu tenho raiva de matemática e. sempre que posso gazeto a aula.
	ESTUDOS EXTRACLASSE/ DEVERES	19. Às vezes eu me irrito ao folhear um livro de matemática que não compreendo.
		27. Eu sinto raiva quando não consigo resolver um problema e tenho vontade de desistir de aprender matemática.
		31. Eu fico com raiva quando tenho que fazer um trabalho de matemática que vale nota.
	PROVAS	25. Eu fico com raiva quando mesmo estudando não tiro uma nota alta em matemática.
		35. Às vezes eu me aborreço quando tenho que ficar em casa estudando para a prova de matemática.

Fonte: adaptado de Lima (2012)

Sobre a parte do questionário de Emoções Acadêmicas e Desempenho relacionada ao teste de Autoconceito Acadêmico; “os itens foram construídos focalizando exclusivamente aspectos cognitivos do conceito, para evitar redundância com a escala das emoções de desempenho” (Lima, 2012, p. 64). Foram utilizados como fatores, de acordo com a autora, apenas, as autoavaliações dos estudantes sobre seu desempenho acadêmico (Habilidade Cognitiva em Matemática) e suas habilidades de aprendizagem (Autoatribuição), conforme mostra o Quadro 50.

Quadro 50 - Fatores analisados no questionário de autoconceito acadêmico

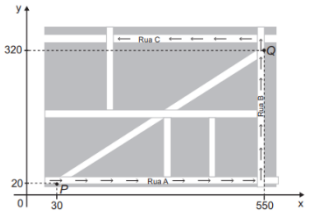
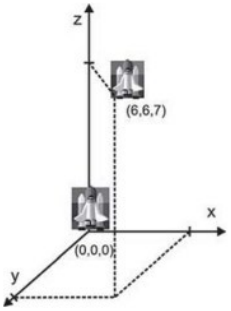
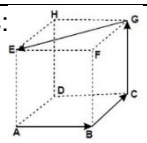
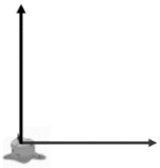
FATORES ANALISADOS	**AUTOAFIRMAÇÕES**
Crença na Habilidade Cognitiva em Matemática	1. Eu tiro boas notas em matemática.
	2. Eu uso meu potencial criativo para resolver problemas de matemática.
	3. Mesmo que o assunto de matemática seja difícil, tenho plena certeza que sou hábil o suficiente para entendê-lo.
	4. Sou uma pessoa inteligente e por isso, dou conta dos estudos de matemática.
	5. Não tenho boa capacidade de raciocínio lógico, por isso, pra mim, é difícil resolver problemas de matemática.
	6. Sei que posso resolver bem uma prova de matemática mesmo que as questões sejam muito difíceis.
	7. Quando tiro uma nota baixa em matemática sei que posso recuperar porque, sou capaz de estudar melhor o assunto e tirar uma nota alta.
	8. Não preciso de muitas horas de estudo, pois aprendo rápido matemática.
Crença na Autoatribuição	9. Sou uma pessoa capaz de enfrentar dificuldades.
	10. Busco atingir minhas metas com determinação.
	11. Dou o melhor de mim como estudante.
	12. Sou uma pessoa objetiva para resolver problemas em geral.

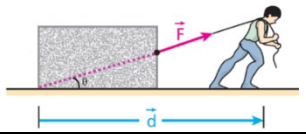
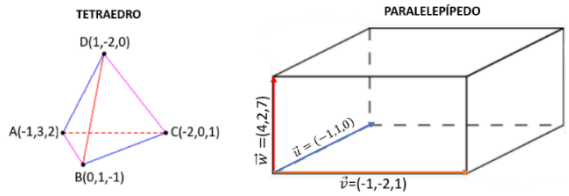
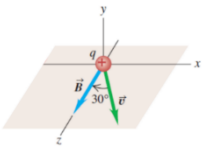
Fonte: elaborado a partir de Lima (2012)

Por fim, faz-se necessário esclarecer a relação entre as 10 questões do pré/pós teste e o assunto ao qual estão vinculadas. Vale ressaltar que esse conjunto de questões foi elaborado e refinado antes, durante e após a definição da SD, sendo uma aporte da outra. O

Quadro 51 apresenta as questões - pergunta(s) principal(is) – e o conteúdo a ser verificado em cada uma delas.

Quadro 51 - Assunto por questão do pré/pós teste

CONTEÚDO	QUESTÃO
Grandeza escalar e grandeza vetorial	1.Dada as grandezas: distância, deslocamento, área, velocidade, temperatura e força. Complete o quadro abaixo, classificando-as em vetoriais ou escalares. No campo justificativa diferencie grandeza escalar de grandeza vetorial.
Direção, sentido, deslocamento e módulo	2. Devido ao aumento de usuários em uma determinada localidade, uma empresa de telefonia celular está realizando estudos para a implantação de uma nova antena para transmissão. A figura mostra a localização de duas de suas atuais antenas representadas por P e Q; a nova antena, localizada em um ponto T, deve estar entre P e Q. Os estudos indicam que o percurso de T até Q é pode ser representado por $\overrightarrow{TQ} = (100,300)$. Determine $\overrightarrow{PT}$ e caracterize-o em relação a direção a sentido. 
	3. Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros. Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z; ao final, do deslocamento. Determine a posição final do foguete e distância percorrida em relação a sua posição inicial (marco zero). 
Adição geométrica de vetores	4. Com base na figura represente o vetor soma dos vetores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{GE}$. 
Multiplicação por um escalar, módulo, direção e sentido	5. Visto de cima, um toco firme é puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 200 N. Esboce a força resultante sobre o toco e responda:  a) qual a intensidade da força resultante? b) o que aconteceria com a intensidade do vetor resultante ($\vec{F}$), caso as forças fossem aplicadas na mesma direção, mas em sentido contrário. c) o que aconteceria com a intensidade da força resultante, caso o toco fosse puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 400N?
Produto Vetorial	6. Um engenheiro foi contratado para projetar uma placa solar para ser adaptada ao telhado de uma casa; utilizando um papel quadriculado, fez um esboço interligando os seguintes pontos de forma sequencial: A(4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3). Determine qual a área ocupada pela placa solar.

Produto Escalar	 7. O esquema a seguir ilustra um homem que puxa um caixote por uma distância de 3 m ao imprimir uma força constante $\vec{F}$= (3,4). Calcule o valor do ângulo (θ) entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.
Produto Misto	8. Uma estrutura metálica em forma de paralelepípedo foi construída para guardar alguns objetos no formato de tetraedro, tal como mostrados na figura. Determine a quantidade de objetos em forma de tetraedro que podem ser guardados no paralelepípedo. 
Produto Vetorial (interpretação)	 9. A equação da força magnética em uma partícula carregada em movimento é $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Considerando a equação dada represente no plano a seguir a orientação da força magnética resultante.
Operações com vetores	10. Dado os vetores $\vec{P} = (2,0,-1)$, $\vec{Q} = (2,-1,2)$ e $\vec{R} = (2,-3,1)$. Determine: a) $\vec{P} \cdot \vec{R}$ b) $(\vec{P}+\vec{Q}) \times (\vec{P}-\vec{Q})$ c) $\lvert(\vec{P}+\vec{Q}) \times (\vec{P}-\vec{Q})\rvert$ d) $\vec{Q} \cdot (\vec{R} \times \vec{P})$

Fonte: elaborado a partir do pré/pós teste.

Além dos instrumentos listados e descritos, a utilização de filmagens, gravações de voz também serão utilizados, porém, preservando o anonimato. Todos esses esclarecimentos constam no TCLE.

4.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Essa seção teve por objetivo apresentar e descrever todos os instrumentos que foram utilizados na etapa de experimentação, quais sejam: a sequência didática incluindo a análise a *priori,* questões e Quiz; questionários; pré/pós teste; ficha de observação e TCLE.

Sobre a sequência didática foram desenvolvidas 13 atividades, sendo: 05 (cinco) de atividades de Conceituação, 01 (uma) de redescoberta, 06 (seis) de RPPP e 01 (uma) de RP em conjunto com uma atividade de conceituação. As tendências foram escolhidas devido a hipótese de que possuem o potencial necessário para o aprendizado dos alunos no que diz respeito a vetores geométricos, a partir do que foi observado nas análises prévias.

Nesse sentido, pelo fato da sequência envolver diversos conteúdos de vetores, optou-se por utilizar várias tendências por acreditar que agregam-se por

similaridades e podem trazem diferentes contextos de aprendizagem para a sala de aula.

Sobre a utilização de outras tendências, durante a experimentação fez-se uso de um jogo por meio de Quiz. Em relação ao uso de *softwares*, que foi algo observado nas análises prévias, como principal facilitador da aprendizagem; inicialmente, não foi possível a utilização destes na sequência; porém, todas atividades podem ser adaptadas para o uso com o Geogebra ou outro aplicativo matemático, inclusivo, de realidade virtual.

Por fim, as atividades foram desenvolvidas tendo em vista sempre um contexto da área ou o mais próximo possível para que os alunos consigam visualizar a aplicação de vetores e sintam-se estimulados a aprender. Espera-se que com essas atividades os alunos obtenham o aprendizado necessário em relação a vetores, melhorem as suas emoções e desempenho em relação à matemática, à análise, à dedução, o domínio e à autonomia.

Em relação aos demais instrumentos para produção de informações, foram apresentados dois questionários: acadêmico e socioeconômico e de emoções de aprendizagem e desempenho na matemática. O primeiro tem por objetivo traçar o perfil dos participantes da experimentação a fim de verificar alguma relação com o seu desempenho escolar e escolha profissional.

O segundo, é dividido em teste de emoções acadêmicas e de autoconceito acadêmico contendo autoafirmações que devem ser escolhidas baseadas em uma escala *Likert*. O primeiro teste tem por objetivo verificar as emoções do aluno em relação a matemática e situações relacionadas ao desempenho; o outro baseia-se em aspectos cognitivos sobre sua habilidade de aprendizagem e cognitiva em matemática.

As questões do pré/pós teste e o assunto correspondente também foram apresentadas; o TCLE e a ficha de observação foram elencados de acordo com a sua finalidade. Desse modo, a partir da aplicação desses instrumentos, pode-se encontrar justificativas para o desempenho e aplicação da sequência didática, bem como, definir as condições de reprodutibilidade e atestar a tese proposta.

Na subseção seguinte, far-se-á a descrição da experimentação, incluindo a reação dos alunos, modo de resolução e algumas análises iniciais em termos de aceitação e validação da SD utilizada.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Nessa seção, será descrita como se deu a etapa de experimentação. Para tanto, além da descrição da aplicação da SD com as 13 atividades construídas na fase anterior, também foram produzidas informações a partir dos questionários Socioeconômico e Acadêmico e de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática, do pré e pós-teste, do Quiz, das fichas de observação e de gravações de voz.

Como relatado anteriormente, o experimento foi realizado em uma turma de Cálculo IV do 4º período de Engenharia Elétrica, do IFPA/Campus Belém, a partir, da concessão de 12 (doze) aulas pelo professor da disciplina, o que corresponde a 04 aulas de 50 minutos por três sexta-feira, horário regular da disciplina.

Segundo o professor, o conteúdo de vetores geométricos, apesar de fazer parte da ementa, era ministrado conforme a necessidade dos estudantes e dos conteúdos da disciplina. Contudo, para a aplicação da sequência didática, questionários e testes, estavam previstas 20 aulas de 50 minutos cada. Assim, para chegar a quantidade de aulas previstas foi necessário combinar algumas aulas extras com os alunos.

Para fins de avaliação, o professor solicitou que ao final da experimentação fosse gerada uma nota dos alunos sobre o conteúdo ministrado, tendo disponibilizado o uso de 40% da nota da 1ª bimestral, 4 pontos, que foi dividido entre participação nas atividades, frequência, assiduidade etc. e a nota final do pós-teste.

O Quadro 52 apresenta o roteiro da experimentação com a indicação da data, da sessão, da atividade desenvolvida, do método de ensino, do formato (individual ou grupo) e do tempo utilizado, que foi computado considerando o início da atividade até o fim da institucionalização.

Quadro 52 - Roteiro das Sessões da Etapa de Experimentação

DATA	SESSÃO	ATIVIDADE	MÉTODO	FORMATO	TEMPO
18/08/2023	1ª (4 aulas)	Apresentação da proposta de pesquisa e Diagnóstico inicial: aplicação dos questionários socioeconômico e de emoções de	-	Individual	40 min

		aprendizagem e desempenho na matemática.			
		Pré-teste	-	Individual	60 min
		Atividade 01 – Diferenciar e caracterizar grandezas	Atividade Experimental de Conceituação	Em grupo	35 min
		Atividade 02 – Conceituar deslocamento		Em grupo	30 minutos
25/08/2023	2ª (4 aulas)	Atividade 03 – Definir Vetor	Atividade Experimental de Conceituação com Questão problema ao final	Em grupo	42 min
		Atividade 04 – Coordenadas de um ponto		Em grupo	25 min
		Atividade 05 – Definir módulo de um vetor		Em grupo	34 min
		Questões de Aprofundamento (atividades 01 à 05)	-	-	48 min
		Atividade 06 – Adição de Vetores	RPPP e atividade de conceituação	Em grupo	69 min
28/08/2023	3ª (2 aulas)	Atividade 07 – Definir Vetor Oposto	RPPP	Individual	30 min
		Questões de Aprofundamento (atividades 06 e 07)	-	-	66 min
30/08/2023	4ª (2 aulas)	Atividade 08 – Multiplicação por um Escalar	RPPP	Individual	10 min
		Atividade 09 – Definição de Vetor Paralelo	Atividade Experimental de Redescoberta	Em grupo	36 min
		Atividade 10 – Vetor Unitário	RPPP	Individual	32 min
01/09/2023	5ª (4 aulas)	Questões de Aprofundamento (atividades 08 à 10)	-	-	26 min
		Atividade 11 – Produto Escalar	RPPP	Individual	19 min
		Questões de Aprofundamento (atividade 11)	-	-	21 min
		Atividade 12 – Produto Vetorial	RPPP	Individual	32 min
		Questões de Aprofundamento (atividade 12)	-	-	40 min
		Atividade 13 – Produto Misto	RPPP	Individual	30 min
		Questões de Aprofundamento (atividade 13)	-	-	30 min
06/09/2023	6ª (2 aulas)	Revisão	-	-	50 min
		Quiz	-	Individual	20 min
13/09/2023	7ª (2 aulas)	Diagnóstico Final: Pós-teste	-	Individual	100 min

Fontes: elaborado a partir de dados da pesquisa.

As sessões 3, 4, 6 e 7 foram realizadas fora do horário regular da disciplina, com anuência dos alunos, em tempos vagos durante a semana, especificamente, nos horários de segunda e/ou quarta de 13 às 14:40hs. Todos os alunos concordaram com as “aulas extras” e disseram ter disponibilidade para participar.

Em relação as questões de aprofundamento, em consonância com o que foi constatado por Silva (2016), o mínimo de duas ou três questões semelhantes eram resolvidas e uma terceira ou quarta, também, semelhante, era proposta aos alunos. Todas as questões de aprofundamento eram resolvidas em sala e para cada atividade o aluno recebia uma lista de questões propostas para resolver em casa.

Para fins de descrição da experimentação, os alunos foram denominados por A1, A2, A3, ..., A11; e para cada atividade de ensino experimental e de RPPP (cuja análise a *priori* previu a resolução pelos alunos), as respostas foram caracterizadas como em Santos (2020), da seguinte forma:

- para o preenchimento de tabelas: correta, parcialmente correta e incorreta;
- para as observações e conclusões:
    - Válida, prevista e desejada (VPD): para as resoluções em acordo com as da análise a *priori,* previstas e desejada;
    - Válida, prevista e não desejada (VPND): para as resoluções, que apesar de válidas e previstas, não estão de acordo com as definidas na análise a *priori,* ou seja, podem estar corretas, mas fogem ao escopo do objetivo da atividade;
    - Válida, não prevista e não desejada (VNPND): para as resoluções que, apesar de válidas, não foram previstas e não estão de acordo com as definidas na análise a *priori,* ou seja, podem estar corretas, mas fogem ao escopo do objetivo da atividade*;*
    - Não válida, prevista e não desejada (NVPND): afirmações incorretas, porém previstas na análise a *priori*;
    - Não válida, não prevista e não desejada (NVNPND): afirmações incorretas, porém não previstas na análise a *priori*; e

- Não formulou (NF): o aluno não respondeu.

No mais, a caracterização do perfil dos participantes e o detalhamento de cada sessão serão relatados a seguir.

5.1. PRIMEIRA SESSÃO DO EXPERIMENTO

Devido a quantidade de aulas disponibilizadas em um único dia, 4 aulas de 50 minutos cada, essa sessão foi dividida em quatro momentos, quais sejam:

- Apresentação da proposta de pesquisa;
- Preenchimento dos questionários de perfil Socioeconômico e Acadêmico e de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática pelos participantes da pesquisa;
- Aplicação do pré-teste; e
- Aplicação das atividades 01 e 02.

Assim, a aula da disciplina iniciou às 13:50hs, porém a apresentação da proposta de pesquisa se deu por volta de 14:00hs, tempo suficiente para que todos os alunos da turma estivessem em sala. Primeiramente, o professor da disciplina “apresentou-me”, apesar de já conhecê-los, pois havia ministrado a disciplina de Metodologia Científica a eles no 2º período do curso, e comunicou-lhes o propósito de eu estar presente, qual seja: realizar a pesquisa/intervenção da minha proposta de tese. Em seguida, deixou-me a vontade informando que estaria na sala ao lado, caso precisasse de alguma ajuda.

Os alunos foram receptivos e mostraram-se satisfeitos e contentes em rever-me. Inicialmente, limitei-me a informá-los que a intervenção se tratava de verificar e diagnosticar os efeitos de uma metodologia diferente para o ensino de Vetores Geométricos e que eram livres para aceitar ou não da pesquisa.

Também esclareci que, independentemente, do aceite ou não de participar da pesquisa, teriam que participar das aulas devido o professor da disciplina ter solicitado a realização da avaliação do conteúdo ministrado para compor 40% da 1ª avaliação bimestral. Frisei que para aqueles que não aceitassem participar os dados coletados não seriam utilizados para a produção de informações para a pesquisa. Por fim, todos concordaram em participar da

pesquisa com entusiasmo e sem intercorrências por meio da assinatura do TCLE.

A turma era composta por 11 alunos, sendo 02 dependentes. A proposta inicial da pesquisa era excluir aqueles que já tivessem visto o conteúdo de vetores no IFPA; contudo, inicialmente, não os retirei e, também, ao final, decidi não os excluir da análise final dos resultados, devido a relevância de dois fatores:

1. Os resultados desses alunos no pré-teste, foi similar e/ou inferior aos dos demais alunos da turma; e
2. Pela percepção da impossibilidade de selecionar alunos que ainda não teriam tido contato com o assunto de vetores geométricos no IFPA, mesmo que de forma superficial, já que relataram que outros professores, de diversas disciplinas anteriores, inclusive, da área de Física, precisaram ministrar algo de vetores para dar suporte a algum conteúdo.

Considerando o aceite dos discentes fiz algumas observações sobre o bom andamento das aulas, como: assiduidade, pontualidade, participação etc. Sobre a realização das atividades, disse que seriam, algumas vezes, realizadas, em grupo, e se, possível que a mesma formação dos grupos fosse mantida em todas as atividades. Em concordância com os alunos, a avaliação ficou distribuída da seguinte forma: 1,0 ponto (10%) de participação, assiduidade, realização de atividades etc. e 3,0 pontos (90%) vinculados a nota da avaliação final.

Além disso, os comuniquei que o número de aulas disponibilizadas pelo professor era insuficiente para a metodologia de ensino proposta e solicitei a realização de aulas em outro horário. Todos os alunos acordaram e propuseram a utilização dos horários de segunda e quarta das 13:00 às 14:40hs que estavam vagos.

Um dos alunos argumentou que trabalhava por turno e que, talvez, perderia algumas aulas; assim, para não o prejudicar as aulas extras foram ajustadas de forma a não coincidir com o seu dia de trabalho. Diante disso, os dias de aulas foram programados para permitir a realização da pesquisa de forma plena: sem prejudicar os alunos e, também, o professor da disciplina e a carga horária planejada para os conteúdos posteriores.

Portanto, feita as observações e acordos iniciais, foram aplicados os questionários Socioeconômico e Acadêmico e o de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática, em seguida, o pré-teste e, por fim, as atividades. Vale ressaltar, que os alunos tiveram tempo de intervalo entre o pré-teste e o início das atividades.

Além disso, parte das informações coletadas através desses questionários foi publicada em Kasahara e Sá (2024); para esses casos, apenas, um resumo será descrito a seguir, seguido, do relato da aplicação das atividades 01 e 02.

5.1.1. Perfil Socioeconômico e Acadêmico dos participantes da pesquisa

A experimentação teve a participação de 11 estudantes e foram estes que responderam ao questionário. A partir de Kasahara e Sá (2024) o Quadro 53 foi construído com o resumo das principais informações concedidas pelos alunos.

Quadro 53 - Quadro Resumo - Perfil dos Participantes

Total de informantes: 11	**Sexo**	Feminino:	Masculino:
		02	09
Sobre a maioria dos estudantes ...			
Perfil geral	Eram do sexo masculino, pardos, tendo entre 18 e 21 anos, solteiros, moravam com familiares, totalizando, de 03 a 04 pessoas morando na mesma residência com renda mínima variável de 01 a 10 salários-mínimos, também, havia alunos que não tinham renda.		
Perfil acadêmico e econômico dos responsáveis	Os responsáveis possuíam Ensino Médio Completo. Todos os pais trabalhavam fora de casa, ao contrário de algumas mães, que eram Do Lar; havia uma mãe desempregada.		
Exercício de função remunerada	Apenas 03 (três) alunos estavam trabalhando.		
Formação acadêmica e técnica	05 (cinco) tinham formação técnica em áreas afins à Engenharia Elétrica, porém todos estavam fazendo o Nível Superior pela primeira vez. Em relação ao Ensino Médio a conclusão se deu em Escola Estadual para 07 (63%).		
Em relação aos conhecimentos adquiridos no EM	Para a maioria proporcionou cultura e conhecimento e deram, em média, a nota de 7.16 para a formação obtida.		
Em relação a escolha do Nível Superior	Os principais fatores que os ajudaram a decidir foram, especialmente, a identificação com a profissão, os pais e a facilidade de obter emprego.		
Em relação ao acesso à computador e internet	Todos os alunos tinham acesso ao computador e à internet banda larga;		
Sobre quem os auxiliava nas tarefas para casa de matemática	As pesquisas na internet eram o principal auxiliar nas tarefas de matemática.		

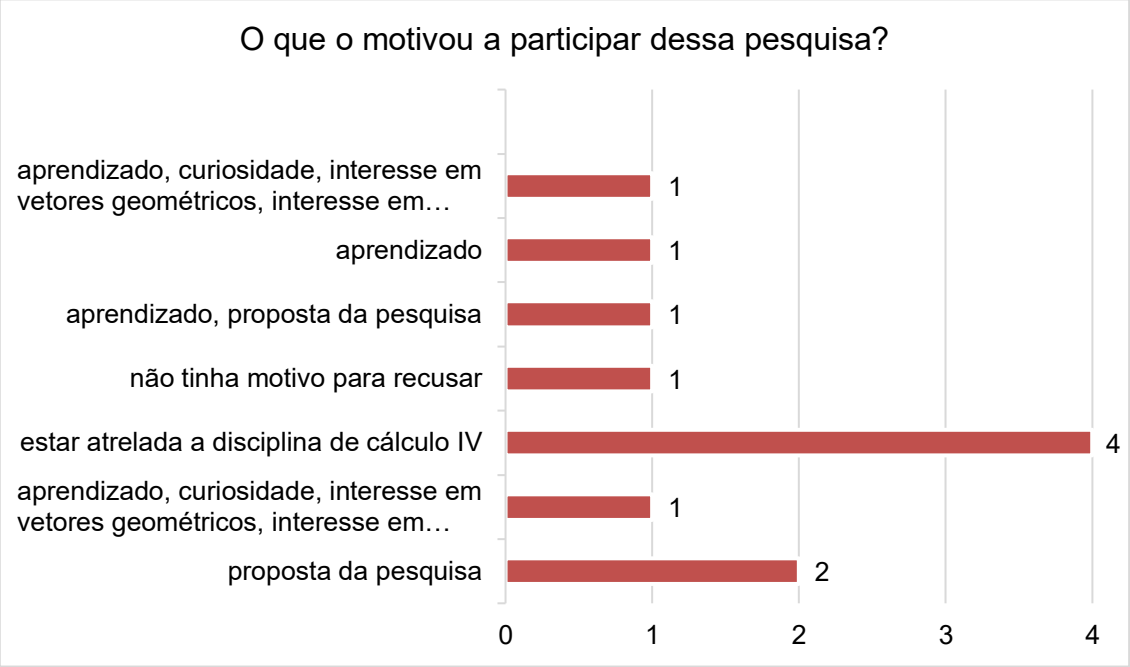
Como iniciavam as aulas no curso de Engenharia Elétrica	Seguiam a metodologia definição (teoria), seguida de exemplos, com avaliação por meio da prova escrita e fixação dos conteúdos por lista de exercícios definida pelo professor; também relataram que conseguiam quase sempre compreender as explicações dadas.
Sobre o hábito de estudo	Somente no período de prova

Fonte: elaborado a partir de Kasahara e Sá (2024)

De forma complementar, à descrição já exposta, foi feita uma pergunta sobre a motivação para participar da pesquisa: 04 (36%) disseram por estar atrelada a disciplina de Cálculo IV, 02 (18%) pela proposta da pesquisa e 01 (9%) pelo aprendizado, somente.

Os demais alegaram vários fatores além dos já citados como: aprendizado, curiosidade, interesse em vetores geométricos, interesse em matemática e participação em uma pesquisa. O Gráfico 11 - Resposta a pergunta: O que o motivou a participar dessa pesquisa? ilustra a resposta a essa indagação.

Gráfico 11 - Resposta a pergunta: O que o motivou a participar dessa pesquisa?



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Os motivos para participar da pesquisa nos deram indícios da possibilidade de resultados positivos da experimentação, pois demonstraram o interesse pelo aprendizado, que ia além do fator NOTA; de acordo com Guimarães e Boruchovitch (2004) a motivação no contexto escolar tende a satisfazer três necessidades psicológicas: a necessidade de autonomia, de

competência e de estabelecer vínculos; alguns destes, objeto de análise dessa tese.

No mais, pôde-se perceber o interesse e o gostar dos estudantes pela profissão que escolheram e da área de matemática, apesar, da não constância de estudo e da recorrente reprovação em disciplinas ligadas ao cálculo.

Dessa forma, era esperado que a pesquisa pudesse agregar conhecimento e um novo olhar sobre o aprender. Por fim, corrobora-se com Kasahara e Sá (2024), de que o perfil dos estudantes era compatível ao da maioria da população brasileira. A seguir, será realizado o diagnóstico sobre emoções de aprendizagem e desempenho na matemática.

5.1.2. Perfil Emocional e de Autoconceito acadêmico dos participantes da pesquisa em relação a matemática

O questionário de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática era dividido em dois testes: de emoções acadêmicas e de autoconceito acadêmico. Ambos foram respondidos por todos os participantes da pesquisa, 11 alunos, e foram analisados de forma individual; sendo que, o primeiro (de emoções) teve parte do resultado publicado em Kasahara e Sá (2024).

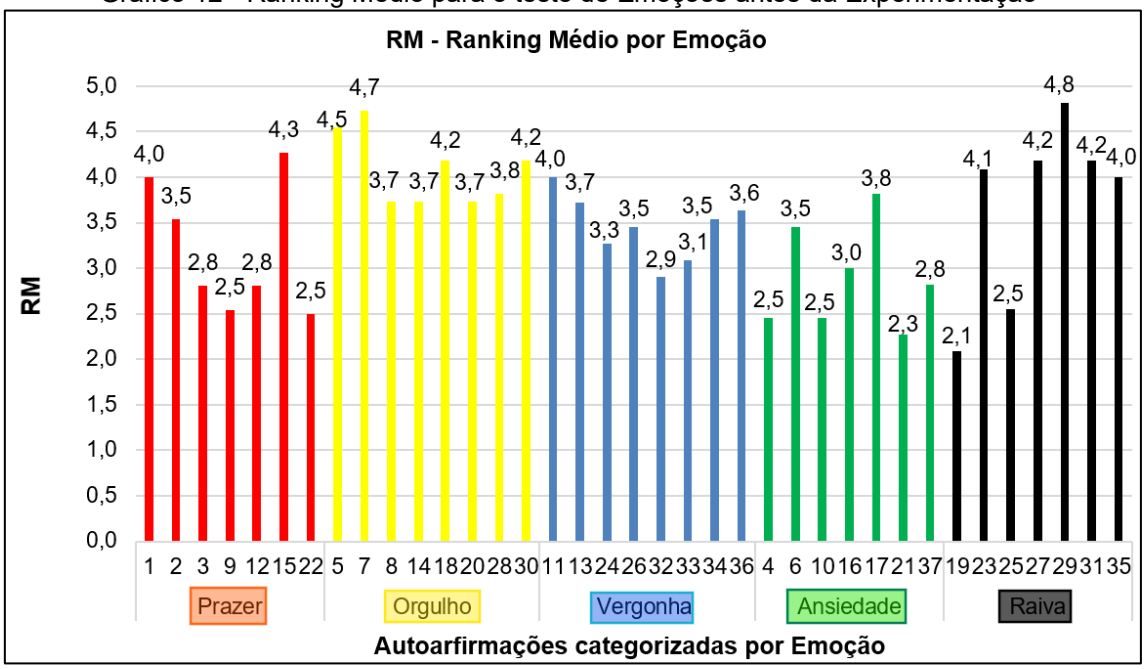
A confirmação da confiabilidade foi realizada de forma individual: para o de Emoções, o valor de α foi de 0,724 e, para o outro, de conceito acadêmico, foi de 0,639. Em todo o caso, considera-se uma consistência substancial e os resultados podem ser considerados confiáveis.

As análises foram realizadas pelo método de RM e pelas respostas dos participantes por meio da contagem, conforme descrito na metodologia e, ao final, foi calculada a média geral para cada categoria baseando-se nas médias individuais dos itens.

Para fins de esclarecimento e didáticos e para facilitar a análise, as emoções Vergonha, Ansiedade e Raiva, que tem conotação negativa, bem como, o item 22, do Prazer, e o 5 do teste de autoconceito acadêmico, tiveram uma inversão do peso, somente, para o cálculo da média ponderada do RM com o propósito de ser mantida a lógica de que quanto mais perto de 5, melhor o resultado e a relação do aluno com a emoção.

Logo, nesses casos citados, a opção Concordo Totalmente recebeu peso 1; Concordo, 2; Discordo, 4; e, Discordo Totalmente, 5. Dentro desse contexto, o Gráfico 12, apresenta o RM por emoção.

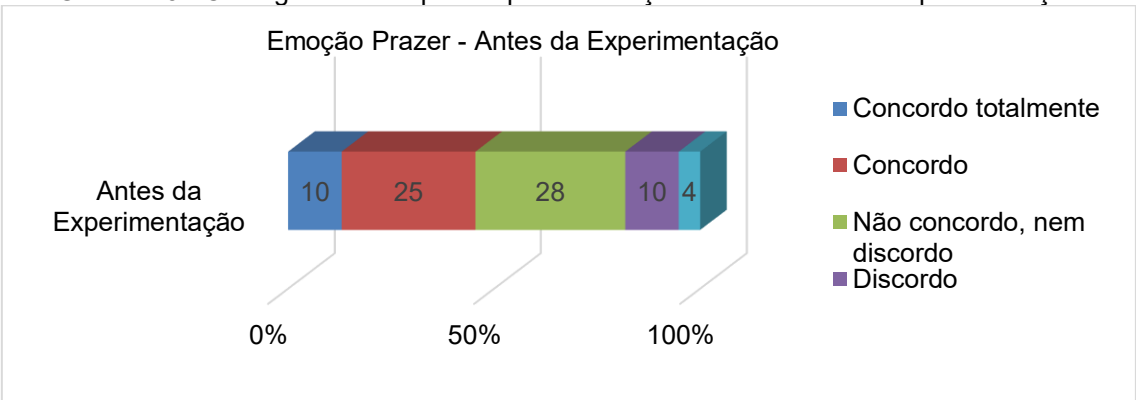
Gráfico 12 - Ranking Médio para o teste de Emoções antes da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Do resultado, pode-se perceber que para a Emoção Prazer as autoafirmações referentes a instruções em sala de aula (itens 3, 9 e 22), e sobre estudos extraclasse (item 12), estão abaixo de 3. A média global foi de 3,2, ou seja, havia uma certa incerteza dos estudantes em relação a essa emoção que variou de acordo com a situação apresentada. O Gráfico 13 apresenta a contagem das respostas para cada item para emoção Prazer.

Gráfico 13 - Contagem das respostas para a emoção Prazer antes da Experimentação

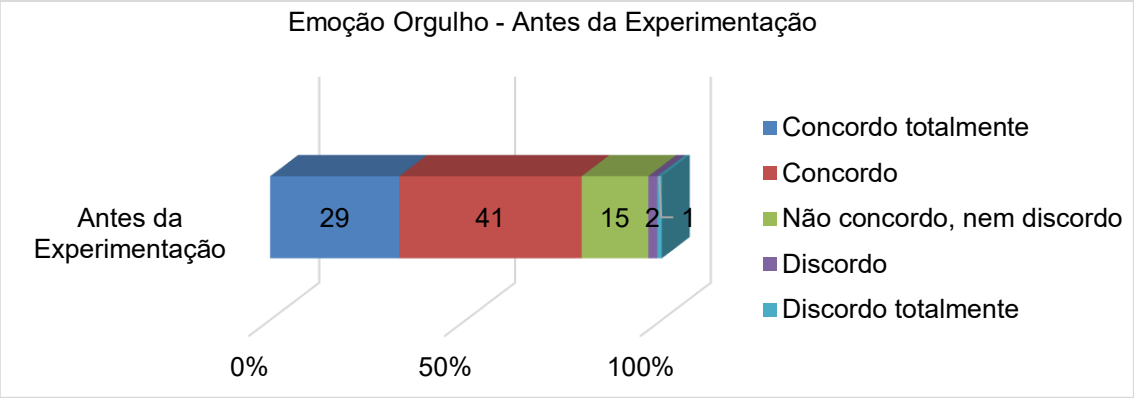


Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Tal como demonstrado pelo método do RM, há o destaque para a opção “Não concordo, nem discordo” que induz a dúvida em relação a essa emoção como relatado anteriormente. Em todo caso, a opção “Concordo” também é ressaltada indicando prazer na aprendizagem e ações referentes a matemática.

Por outro lado, os estudantes demonstraram sentir orgulho quando realizavam ações relacionadas ao bom desempenho em matemática, em especial, àquelas ligadas a provas e a notas satisfatórias (itens 5 e 7). A média geral para essa emoção foi de 4,1; assim, os alunos sentiam orgulho quando obtinham resultados positivos na aprendizagem de matemática. O Gráfico 14 apresenta a contagem das respostas de cada item para emoção Orgulho.

Gráfico 14 - Contagem das respostas para a emoção Orgulho antes da Experimentação

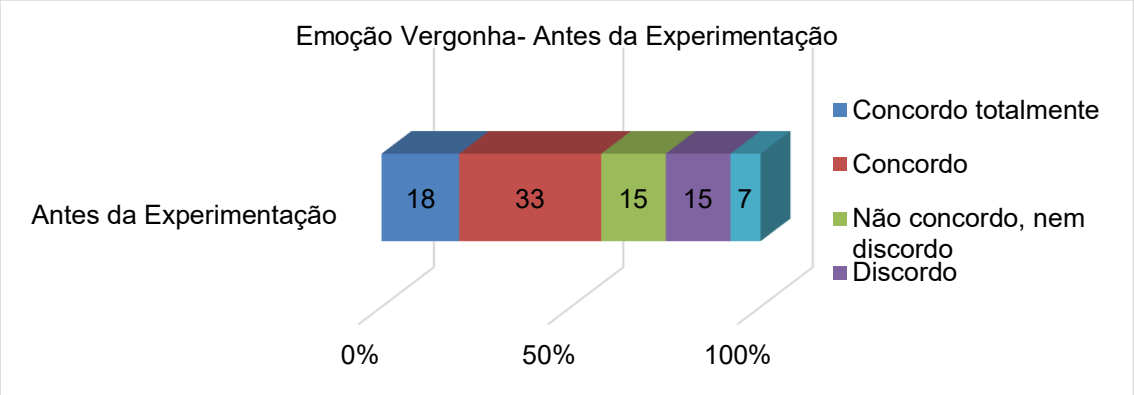


Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Assim, como demonstrado pelo RM, os alunos sentiam-se orgulhosos em relação a aprendizagem em matemática quando tiravam notas boas, ao conseguir resolver problemas difíceis, ao realizar tarefas extraclasses, dentre outras coisas.

Sobre as emoções com conotações negativas, a Vergonha, assim como o prazer, foi observada uma dependência do acontecimento, inclusive, quando tiravam notas baixas em matemática (item 33); a média geral para a emoção Vergonha foi de 3,5. O Gráfico 15 apresenta a contagem das respostas para cada item para emoção prazer.

Gráfico 15 - Contagem das respostas para a emoção Vergonha antes da Experimentação

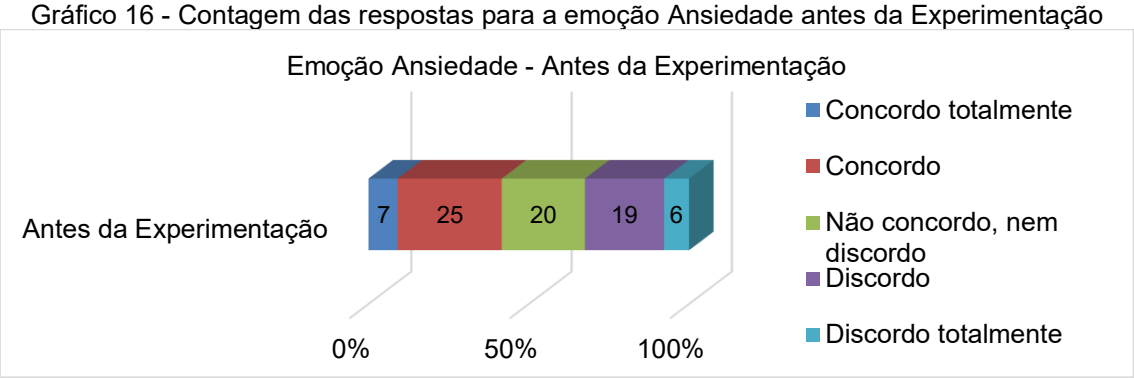


Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Em relação a contagem uma há tendência a não sentir vergonha em relação as situações apresentadas de aprendizagem em matemática, seja de instruções em sala de aula ou tarefas extraclasses e/ou provas tal como o valor obtido, também, por RM. Contudo, há de se considerar cada caso concreto, além de outras variáveis.

De outra forma, os participantes mostraram-se ansiosos em relação ao desempenho em matemática, principalmente, quando a situação estava relacionada à provas (itens 4, 10, 21 e 37), exceto, ao esquecimento durante a realização das avaliações (item 6); há uma tendência a terem menor ansiedade em instruções em sala de aula (itens 16 e 17). Porém, a média geral foi de 2,9, o que indica, também, que dependia da relevância da situação. O Gráfico 16 apresenta a contagem das respostas para cada item para emoção Ansiedade.

Gráfico 16 - Contagem das respostas para a emoção Ansiedade antes da Experimentação



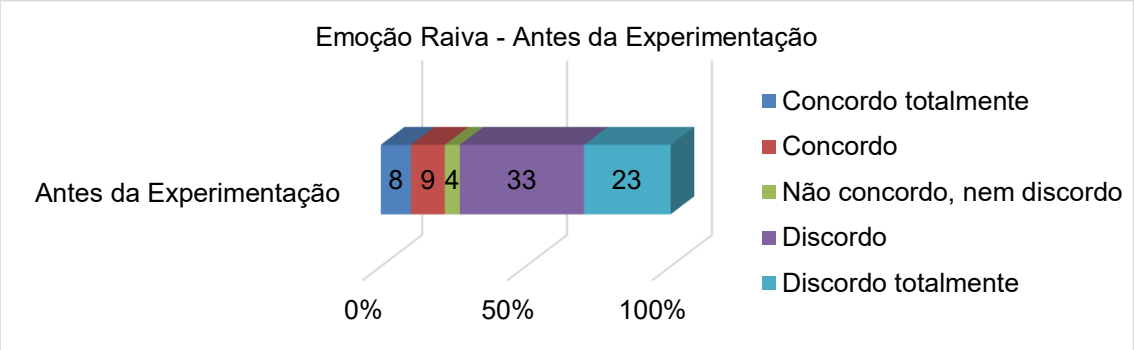
Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Da mesma forma, pela contagem das respostas, há de se observar um nível de ansiedade considerável dos alunos, contudo há de se ressaltar que

vários outros fatores econômicos, sociais e acadêmicos tendem a elevar o grau negativo dessa emoção que, nessa pesquisa, refletiu nos termos da aprendizagem matemática.

Para a última emoção avaliada, os resultados foram positivos. Assim, a Raiva estava pouco presente nas situações relacionadas ao desempenho dos alunos; exceto, na incompreensão de um assunto do livro (item 19) e em relação a nota baixa mesmo estudando (item 25). A média geral foi de 3,7. O Gráfico 17 apresenta a contagem das respostas para cada item para emoção Raiva.

Gráfico 17 - Contagem das respostas para a emoção Raiva antes da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Portanto, tal como na avaliação por RM, os estudantes não sentiam raiva diante de situação relacionadas a aprendizagem em matemática tanto em sala aula, quanto extraclasse e, até mesmo, em situações que pudessem lhes causar ansiedade como provas.

Em conclusão, sobre o perfil acadêmico emocional da turma, pôde-se perceber uma dependência da situação em relação ao prazer, assim como à Vergonha e à Ansiedade, mas sentiam orgulho quando tinham um desempenho satisfatório na matemática. Mostraram-se ansiosos, especialmente, em situações relacionadas a provas, bem como, com Raiva.

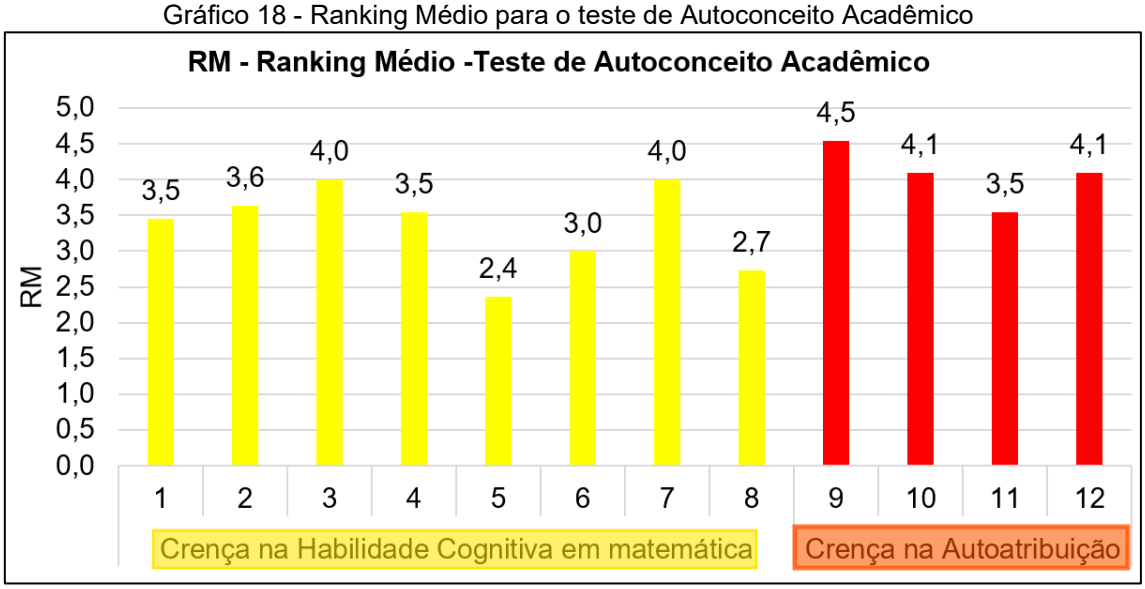
Pelo perfil dos alunos pode-se inferir uma emoção positiva em relação a matemática, porém com muita maturidade em aceitar os erros e a necessidade de estudar e de obter boas notas que pode estar ligado ao processo de ensino aprendizagem que receberam durante os anos passados, principalmente, com a garantia de um futuro profissional.

Nesse sentido, é importante refletir sobre que efeitos ou emoções a experimentação pode, de fato, trazer a esses estudantes em relação a

matemática, já que aparentemente, gostavam da área da matemática e nutriam algumas boas sensações em relação a elas. É esperado, sim, um olhar ainda mais apurado sobre a matemática, pois o fato de gostarem, de serem responsáveis, ajuda e pode até facilitar a aprendizagem, porém não a determinam por si só.

Em relação aos aspectos tratados no teste de autoconceito acadêmico o Gráfico 18 apresenta os resultados de acordo com o RM.

Gráfico 18 - Ranking Médio para o teste de Autoconceito Acadêmico

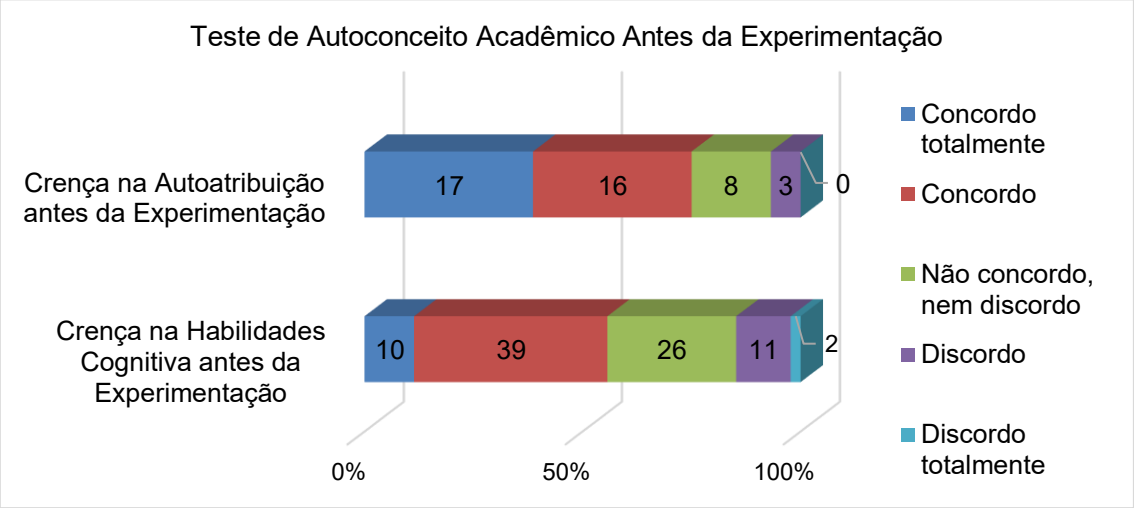


Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

De acordo com os resultados, os alunos acreditavam na sua habilidade cognitiva no que diz respeito a compreensão de assuntos difíceis (item 3) e na recuperação de notas baixas (item 7); por outro lado, tinham incertezas sobre tirar boas notas, do potencial criativo para resolver problemas, de dar conta dos estudos e de resolver questões difíceis. Porém, não acreditavam na sua capacidade de raciocínio lógico (item 5) e de que aprendiam um conteúdo em poucas horas de estudo (item 8). A média geral foi de 3,5.

Entretanto, sobre a Autoatribuição, acreditavam em suas capacidades de resolver e enfrentar os problemas, sobretudo, sozinhos, e atingir metas; mas não acreditavam que davam o melhor de si como estudantes (item 11). A média geral foi de 4,1. O Gráfico 19 apresenta a contagem para os itens avaliados no teste de autoconceito acadêmico: crença na habilidade cognitiva em matemática e crença na Autoatribuição.

Gráfico 19 – Contagem das respostas Teste de Autoconceito Acadêmico antes da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados do questionário.

Assim, os resultados confirmaram os observados pelo RM dessa forma, os alunos acreditavam que eram capazes de aprender matemática e além do mais de que podiam resolver seus problemas e tomar decisões por si próprios e de forma independente. No mais, o Quadro 54 apresenta, em resumo, a média geral para cada Emoção e crença, bem como, a média global para cada teste.

Quadro 54 - Média Global para cada teste antes da experimentação

Teste	Categoria	Média Geral	Média Global
Emoção	Prazer	3,2	3,5
	Orgulho	4,1	
	Vergonha	3,5	
	Ansiedade	2,9	
	Raiva	3,7	
Autoconceito Acadêmico	Crença nas habilidades cognitivas	3,3	3,7
	Crença na Autoatribuição	4,1	

Fonte: elaborado a partir dos dados dos testes.

Assim, resumidamente, em relação as emoções, de forma geral, havia incertezas em relação ao Prazer, Vergonha e Ansiedade, apesar de que, para algumas situações essas emoções eram destacadas, ou até mesmo, menosprezadas; para o orgulho e a raiva, ao contrário, a sensação era, aparentemente, menos negativa.

Sobre o autoconceito acadêmico a média global indica uma tendência positiva, em especial, na Autoatribuição com uma possível dúvida na crença nas habilidades cognitivas. A média global dos dois testes, comparativamente, são equivalentes.

Por fim, aparentemente, a turma tinha maturidade para entender as suas dificuldades, preocupação com o aprendizado e em tirar notas boas; nesse sentido, esse perfil nos dá indício de uma boa aceitação da metodologia proposta, sobretudo, se sentirem melhora em relação ao aprendizado, domínio do conteúdo e autonomia para resolver problemas.

A seguir será descrito como se deu a aplicação das atividades 01 e 02.

5.1.3. Aplicação das Atividade 01 e Atividade 02

Em continuação a sessão 01, foram aplicadas as atividades 01 e 02 que utilizaram o método de ensino por atividades experimentais por conceituação. Os alunos foram divididos em grupos, sendo 4 duplas e 1 trio; a formação manteve-se igual para a realização das duas atividades; durantes todas as atividades a organização proposta foi mantida e os alunos demonstraram bastante interesse.

A atividade 01 versava sobre diferenciar grandezas, foi possível observar a expressiva comunicação entre os colegas do mesmo grupo; o tempo utilizado para conclusão foi de 35 minutos. Contudo, como não estavam familiarizados com o método tiveram dificuldades em entender o que deveriam fazer, em especial, em relação ao preenchimento do campo observação, o que já era esperado; pois os alunos não estavam acostumados a expressar-se de forma escrita quando do uso, somente, da metodologia do tipo teoria, seguida de exemplos e exercícios.

Durante a execução, algumas intervenções foram necessárias por meio de dicas como “leiam a atividade”, “observem o título”, “observem o objetivo”, “se atenham ao texto”, pois eles queriam resolver sem ler, dando a impressão de querer “adivinhar” a solução a partir de uma falsa ideia de que aquele conhecimento eles já tinham e, por isso, queriam pular etapas para resolução.

Além disso, os alunos fizeram perguntas do tipo: “para colocar a unidade de medida, por exemplo, da grandeza Tempo, que estava em horas, é necessário colocar de acordo com o Sistema Internacional de Medidas?”, “tem pegadinha?” e “o que tem que colocar no campo observação?”.

Sobre o campo Observação foi necessário intervir em relação ao que deveria ser feito com questões motivadoras como: “O que vocês observam em

relação as grandezas? O que as diferencia?"; e com orientações de que a atividade deveria ser realizada de forma sequencial: leitura do texto, preenchimento da tabela e, por fim, a escrita no campo Observações a partir da visualização da relação encontrada na tabela; já que, muitos alunos, por terem algum conhecimento do assunto, queriam pular etapas.

Ao final, cada membro da equipe escreveu a sua observação no quadro branco para discussão e análise no momento da institucionalização. O Quadro 55 contém a observação e o preenchimento da atividade como esperado e como as equipes a preencheram, bem como, a análise. A transcrição das observações foi realizada para melhor entendimento.

Quadro 55 – Resolução da Atividade 01

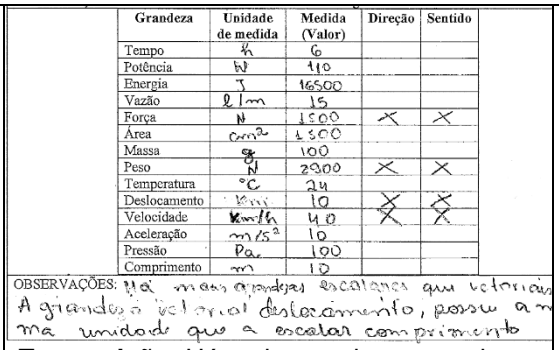
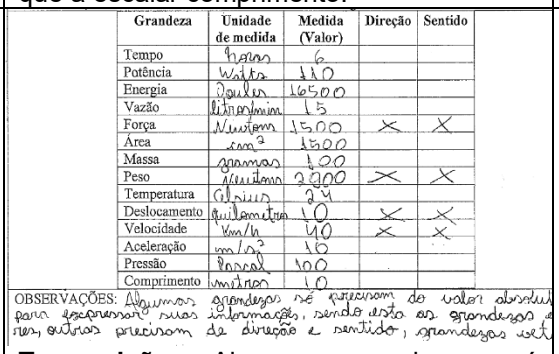
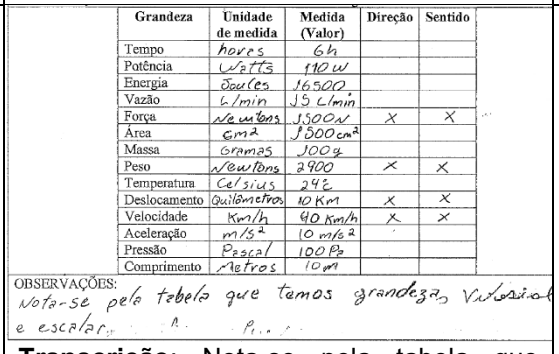
Tabela Preenchida e observação como esperado

Grandeza	Intensidade (Valor)	Direção	Sentido
Tempo	x		
Potência	x		
Energia	x		
Vazão	x		
Força	x	x	x
Área	x		
Massa	x		
Peso	x	x	x
Temperatura	x		
Deslocamento	x	x	x
Velocidade	x	x	x
Aceleração	x	x	x
Pressão	x		
Comprimento	x		

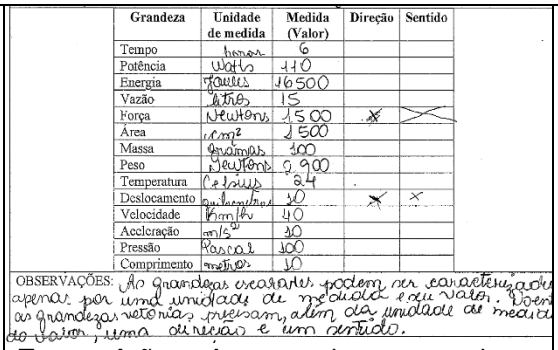
OBSERVAÇÃO:

01.Há grandezas que possuem somente Intensidade (valor), por exemplo, tempo, potência, energia, vazão, área, massa, pressão e comprimento; outras possuem intensidade, direção e sentido, como força, peso, deslocamento, velocidade e aceleração.
02. O número de grandezas com medida (valor), direção e sentido é menor do que aquelas que só possuem valor, na tabela
03. As grandezas que possuem medida (valor), direção e sentido, são chamadas vetoriais e as que possuem, somente, valor são chamadas escalares.

Equipe	Tabela e observação preenchida por equipe	Tabela	Observação	Análise

01 (A3, A9)	 **Transcrição**: Há mais grandezas escalares que vetoriais. A grandeza vetorial deslocamento, possui a mesma unidade que a escalar comprimento.	Correta	VPD	No campo “Observações”, a equipe não diferenciou as grandezas a partir das características verificadas na tabela. Contudo, demonstraram saber a diferença entre grandeza escalar e vetorial por classificar de forma correta as grandezas “deslocamento” e “comprimento”, apesar de que no texto não possuíam a mesma unidade de medida.
02[13] (A2, A4, A6)	 **Transcrição**: Algumas grandezas só precisam do valor absoluto para expressar suas informações, sendo essa as grandezas escalares, outras precisam da direção e sentido, grandezas vetoriais.	Parcialmente Correta	VPD	A observação final foi realizada de forma correta, apesar de não preencherem a grandeza “aceleração” de forma correta.
03 (A5, A11)	 **Transcrição**: que as grandezas vetoriais e escalares se relacionam na tabela.	Parcialmente Correta	NVNPND	A informação de que havia relação entre as grandezas já havia sido falada; por outro lado, os alunos citaram grandezas vetoriais e escalares, porém não é possível afirmar que sabiam diferenciá-las.
04 (A1, A10)	 **Transcrição**: Nota-se pela tabela que temos grandeza vetorial e escalar.	Parcialmente Correta	VPD	Os alunos não diferenciaram as grandezas em função de suas características; porém demonstraram saber das existências dos dois tipos de grandezas.

[13] Única equipe formada por três alunos, as demais eram duplas.

05[14] (A7 e A8)	 **Transcrição**: As grandezas escalares podem ser caracterizadas apenas por uma unidade de medida e seu valor. No entanto, as grandezas vetoriais precisam, além da unidade de medida e do valor, uma direção e um sentido.	Parcialmente Correta	VPD	Apesar dos alunos não preencherem a tabela de forma correta, souberam caracterizar e diferenciar as as grandezas de forma correta.

Grandeza	Unidade de medida	Medida (Valor)	Direção	Sentido
Tempo	horas	6		
Potência	Watts	110		
Energia	Joules	16500		
Vazão	Litros	15		
Força	Newtons	1500	X	
Área	cm²	1500		
Massa	Gramas	100		
Peso	Newtons	0,900		
Temperatura	Celsius	24		
Deslocamento	Quilometros	20	X	X
Velocidade	Km/h	40		
Aceleração	m/s²	20		
Pressão	Pascal	100		
Comprimento	metros	10		

OBSERVAÇÕES: As grandezas escalares podem ser caracterizadas apenas por uma unidade de medida e seu valor. Enquanto as grandezas vetoriais precisam, além da unidade de medida do valor, uma direção e um sentido.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Sobre o preenchimento da tabela apenas a equipe 01 (A3 e A9) a preencheu de forma correta; entretanto, as equipes 02 (A2, A4 e A6) e 04 (A1 e A10) no momento da institucionalização demonstraram saber que a “aceleração” era uma grandeza vetorial, porém não encontraram as características de direção e sentido no texto, por isso, não marcaram. A equipe 03 (A5 e A11) preencheu várias grandezas de forma incorreta e a 05 (A7 e A8) não considerou algumas delas.

Em relação a grandeza aceleração, de fato, o texto não deixava explícito sua direção e sentido, porém é possível inferir a partir de uma leitura minuciosa; entende-se que é necessário deixar essa informação explícita, se a atividade for novamente aplicada. Contudo, é importante ressaltar a falta de atenção dos alunos à leitura e as tentativas de realizá-la de forma extremamente dinâmica.

O Quadro 56 apresenta o valor absoluto e relativo (%) de acordo com Santos (2020) do preenchimento da tabela. Das parcialmente corretas, 02 foram devido a ausência de marcação da grandeza “aceleração” (já explicado anteriormente), 01 pela marcação incorreta da grandeza pressão e tempo e outra pelo não preenchimento completo da tabela, porém a observação dessa equipe foi classificada como VPD tal fato pode ser justificado por esta ser formada pelos dois alunos em dependência na disciplina, ou seja, que já estudaram o assunto anteriormente.

[14] Equipe formada pelos alunos que estavam fazendo dependência.

Quadro 56- Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 01

Tipos de Preenchimento das tabelas	Quantidade	Percentual
Correta	1	20%
Parcialmente Correta	4	80%
Incorreta	0	0%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Sobre as observações realizadas, apenas, as equipes 02 (A2, A4 e A6) e 05 (A7 e A8) a fizeram de forma esperada; contudo, a equipe 05 preencheu a tabela considerando, apenas, as grandezas “força” e “deslocamento” como vetoriais e, as demais, como escalares. Dessa forma, é possível inferir que a observação realizada de forma correta se deu pelo fato de que estão fazendo a disciplina pela segunda vez ou já tinham esse conhecimento. O Quadro 57 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 57 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 01

Classificação das Observações	Quantidade	Percentual
VPD	4	80%
VPND	0	0%
VNPND	0	0%
NVPND	0	0%
NVNPND	1	20%
NF	0	0%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados do campo Observações podem ser considerados satisfatórios pelo quantitativo de Observações VPD. A considerada NVNPND pode expressar a falta de costume com esse tipo de atividade, já que tabela foi preenchida de forma parcialmente correta.

No momento da institucionalização, os alunos demonstraram saber diferenciar entre grandeza escalar e vetorial, mas não escreveram por achar óbvio; confusões desse tipo eram esperadas por ser a primeira atividade a ser realizada com esse método de ensino.

No mais, a resolução da atividade 01 nos impulsiona ao seguinte diagnóstico: os alunos sabiam da existência e da diferença entre grandezas escalares e vetoriais, porém teriam dificuldades em classificá-las, caso as caraterísticas de direção e sentido não estivessem explícitas no texto; espera-se

que esses tipos de questionamentos tenham sido solucionados com a atividade proposta.

Por outro lado, sobre o que foi observado, encontra-se aporte em Bachelard (1996, p. 14) que diz que “a experiência que não retifica nenhum erro, que é monotonamente verdadeira, sem discussão, para que serve?”; portanto, a construção do conhecimento se dá pela desconstrução e, principalmente, retificação, também, dos ditos consolidados e já aprendidos.

Outro fato importante de relatar era a inquietação dos alunos em procurar respostas em fontes externas, foi solicitado que não fizessem uso, ou em conceitos vistos anteriormente que não tinham relação com a atividade. Isso reflete a necessidade de tentar desenvolver nesses alunos a construção do conhecimento pelo experimento e não por meio de fontes que o levam a respostas prontas e, também, de entender que o conceito básico é necessário para aprofundamentos posteriores.

Em seguida, foi realizada a atividade 02 em um tempo de 30 minutos utilizando o mesmo método de ensino. O objetivo era conceituar deslocamento, as mesmas formações de equipes foram mantidas e, também, foi observado interesse e motivação em resolver as atividades com muito interação e colaboração entre os membros das equipes. A solicitação de ajuda da professora foi menos frequente, como esperado, porém ainda foi necessário sanar algumas dúvidas advindas da leitura e da interpretação.

Da mesma forma, como na atividade anterior, foi necessário estimular os alunos com pistas para desenvolver o campo Observação, tais como: “Comparem as colunas!”, “De que forma vocês obtiveram o deslocamento?” e “Quais caraterísticas são comuns em cada trecho? O que os diferencia?”.

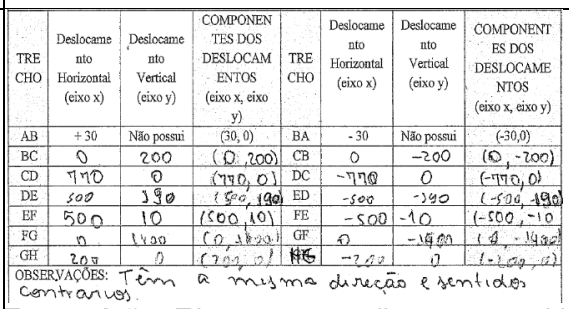
Um erro de digitação foi verificado, o que não acarretou grandes problemas, já que foi, imediatamente, corrigido. O Quadro 58 apresenta a tabela preenchida como esperado e como os alunos a preencheram, a transcrição do campo “Observação” foi realizada para melhor entendimento.

Quadro 58 - Resolução da Atividade 02

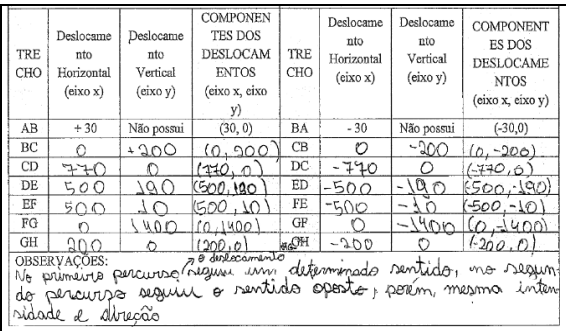
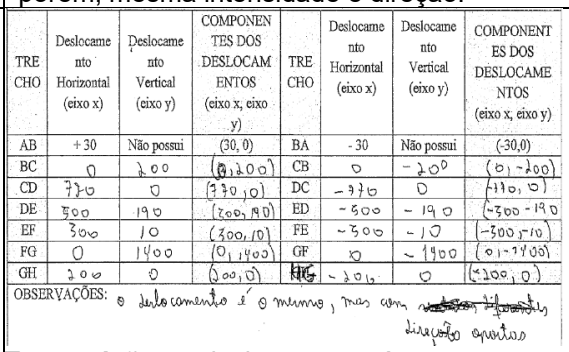
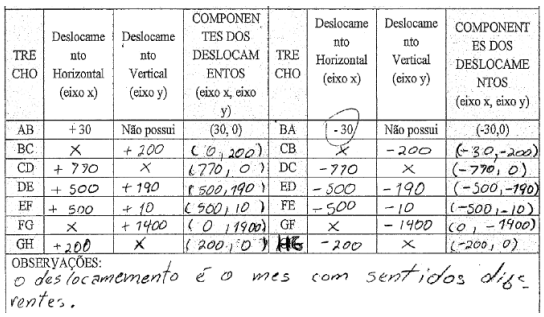
Tabela Preenchida e observação como esperado

PERCURSO TRASLADAÇÃO				PERCURSO CÍRIO			
Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)	Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)
AB	+ 30	Não possui	(30, 0)	BA	- 30	Não possui	(-30,0)
BC	Não possui	+ 200	(0, 200)	CB	Não possui	- 200	(0, -200)
CD	+ 770	Não possui	(770, 0)	DC	-770	Não possui	(-770, 0)
DE	+ 500	+ 190	(500, 190)	ED	-500	-190	(-500, -190)
EF	+ 500	+10	(500, 10)	FE	-500	-10	(-500, -10)
FG	Não possui	+ 1400	(0, 1400)	GF	Não possui	-1400	(0, -1400)
GH	+ 200	Não possui	(200, 0)	HG	-200	Não possui	(-200, 0)

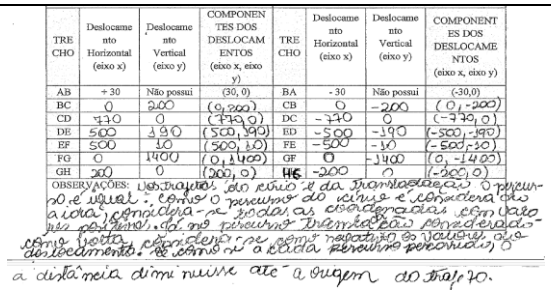
OBSERVAÇÕES:
1. Tanto as componentes do deslocamento horizontal quanto do vertical foram obtidas a partir da diferença entre os pontos inicial e final.
2. A inversão do sentido não implica em alteração da direção.
3. Há inversão dos sinais quando os percursos são invertidos (inversão de sentido), mantendo a direção
4. O deslocamento é o mesmo nos dois percursos.

Equipe	Tabela e observação preenchida por equipe	Tabela	Observação	Análise
01 (A3, A9)		Correta	VPD	A observação estava correta, porém não relataram sobre como obteve o deslocamento ou a relação entre direção e sentido que eram o cerne da atividade.

Transcrição: Têm a mesma direção e sentidos contrários.

02[15] (A2, A4, A6)	 **Transcrição**: No primeiro percurso o deslocamento seguiu um determinado sentido, no segundo percurso seguiu o sentido oposto, porém, mesma intensidade e direção.	Correta	VPD	A observação estava correta, porém incompleta por não ter destacado como o deslocamento foi obtido.
03 (A5, A11)	 **Transcrição**: o deslocamento é o mesmo, mas com direções opostas.	Correta	NVPND	Os alunos demonstraram confusão em diferenciar direção e sentido.
04 (A1, A10)	 **Transcrição**: o deslocamento é o mes [sic] com sentidos diferentes.	Parcialmente correta	VPD	Na tabela havia um erro no trecho CB, porém pode ser atribuído a falta de atenção ao preencher as “Componentes dos deslocamentos”. Sobre o campo “Observações” apesar de correta não destacaram a relação entre direção e sentido e como o deslocamento foi obtido, tal como a equipe anterior.

[15] Única equipe formada por três alunos, as demais eram duplas.

05[16] (A7, A8)	 **Transcrição**: Nos trajetos do círio e da transladação [sic] o percurso é igual. Como o percurso do círio é considerado a ida, considera-se todas as coordenadas com valores positivos. Já no percurso da transladação [sic] considerado como volta, considera-se como negativo os valores do deslocamento. É como se a cada percurso percorrido, a distância diminuísse até a origem do trajeto.	Correta	VPD	Os alunos consideraram que as alterações do sinal se davam por inversão do percurso, sem citar a inversão do sentido. Porém, não apresentaram a relação entre direção e sentido e como o deslocamento foi obtido.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados mostraram que, apenas, uma equipe preencheu a tabela de forma parcialmente correta que pode ter sido ocasionado por erro de distração (grupo 04: alunos A1 e A10). O Quadro 59 apresenta o valor absoluto e relativo (%) de acordo com o preenchimento da tabela.

Quadro 59 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 02

Determinação do ponto terminal de cada enlace	**Quantidade**	**Percentual**
Correta	5	80%
Parcialmente Correta	1	20%
Incorreta	0	0%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Em relação as observações, o grupo 03 (A5 e A11) apresentou uma NVPND, por confundir os conceitos de direção e sentido. As demais equipes fizeram observações pertinentes. O Quadro 60 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 60 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 02

Classificação das Observações	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	4	80%
VPND	0	0
VNPND	0	0
NVPND	1	20%
NVNPND	0	0%
NF	0	0%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

[16] Equipe formada pelos alunos que estavam fazendo dependência.

Contudo, nenhuma das equipes destacou a forma como o deslocamento foi obtido, apesar de calculá-lo de forma correta e apresentar características condizentes extraídas a partir do preenchimento da tabela. É importante ressaltar que a maioria dos grupos relataram os “sentidos contrário” apesar de não o relacionarem com a “mesma direção”, mas com o deslocamento.

No momento da institucionalização, após as equipes terem escrito suas observações no quadro branco, estas foram complementadas e a diferença entre sentido e direção esclarecidas. Sobre a obtenção do deslocamento demostraram saber como foi obtido, porém não o sistematizaram, apesar de o terem calculado corretamente.

Ao final, os discentes demostraram estar satisfeitos por terem, de fato, sanado as dúvidas em relação a direção e ao sentido; um dos alunos fez uma observação em relação ao conceito de sentido de que “não precisava fazer tantos cálculos se soubesse antes”. O relato demonstrou o entendimento e o alcance do objetivo da atividade e do sucesso da mesma que teve 100% de aproveitamento tanto no preenchimento das tabelas, quanto do campo Observações.

Os assuntos das duas atividades realizadas nessa sessão, aparentemente, já eram de conhecimento dos alunos, porém ainda restavam dúvidas e confusões em relação a classificação de algumas grandezas, apesar de saberem diferenciar a escalar da vetorial, e, principalmente, em relação a diferença em direção e sentido e seus efeitos no deslocamento que facilitam os cálculos e aceleram a resolução de questões.

Contudo, o fato de os alunos terem algum conhecimento dificultou, incialmente, a resolução das atividades por quererem, novamente, pular etapas e escrever nas Observações frases, algumas vezes, verdadeiras, porém não adequadas ao que a atividade estava demonstrando ou trazer conceitos prontos sem atentar para o “a mais” que atividade estava proporcionando a eles. Contudo, essa certeza de conhecer o assunto foi diminuindo com o andamento e conclusão das atividades, em especial, a atividade 02.

Ao final da aula, os alunos receberam questões de aprofundamento para resolver em casa referentes as atividades 01 e 02, de forma separada. Foi alertado a eles que os assuntos são interligados e que era preciso acompanhar

a sequência das aulas. No mais, saíram contentes com o método de ensino e ansiosos paras as próximas atividades.

Como docente, foi possível perceber que uma gama de conhecimentos salutares para os conteúdos que precisavam ser reaprendidos, ser “vistos de forma correta”; e que a primeira impressão de “total” conhecimento do assunto pelos alunos foi desfeita ou de invalidade do experimento por esse motivo, certamente “A cabeça bem feita precisa então ser refeita” (Bachelard 1996, p. 20).

5.2. SEGUNDA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADES 03, 04, 05 E 06

A segunda sessão foi realizada, também, no horário regular da turma, com 04 aulas de 50 minutos cada, com intervalo entre o segundo e o terceiro tempo. Dessa forma, foram realizadas as atividades 03, 04,05 e 06. A aula iniciou com atraso de 18 minutos devido à ausência de alguns alunos e foi finalizada após 42 minutos do seu início. Um dos alunos que estava fazendo dependência faltou a essa sessão por estar doente. Esse foi um dos fatores que não foi possível manter a formação inicial dos grupos.

Portanto, a atividade 03 iniciou com a presença de 08 alunos, que foram divididos em duplas, e teve por objetivo definir vetor por meio de uma atividade de conceituação com uma questão problema ao final sobre o que foi observado durante a resolução do quadro contendo os deslocamentos.

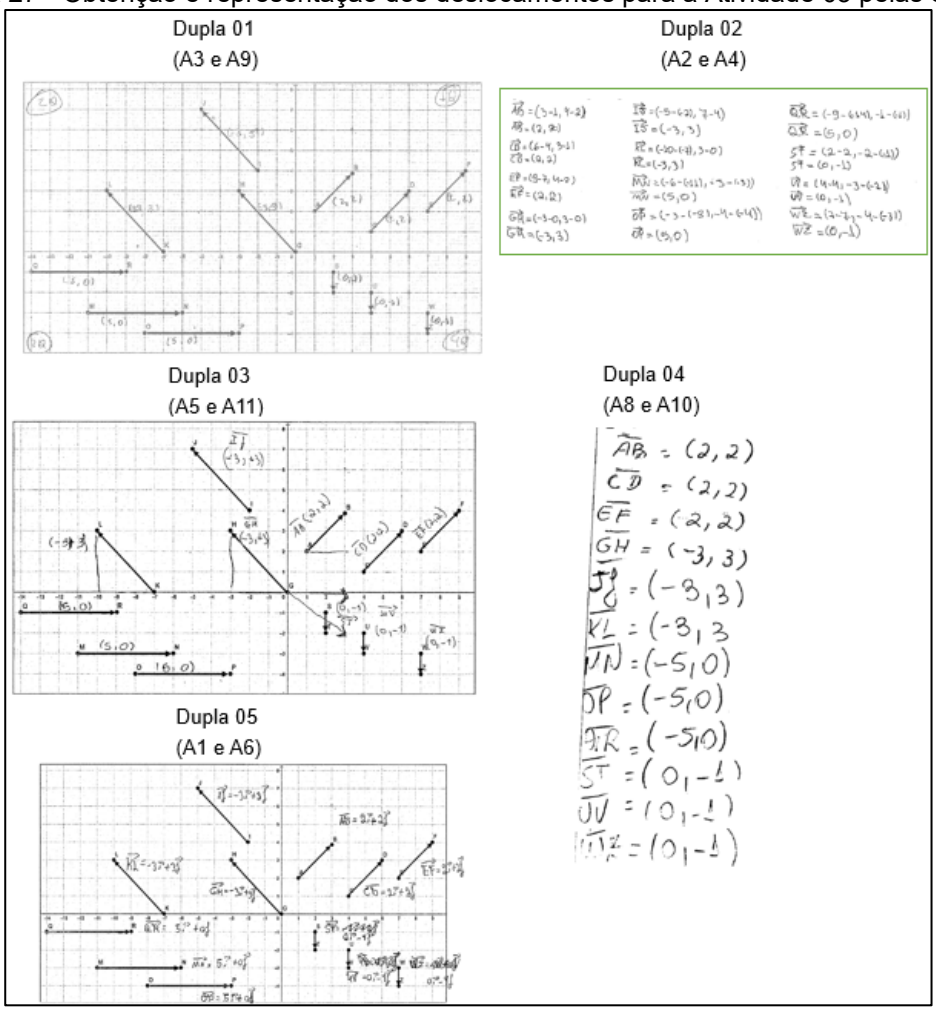
Dois alunos chegaram após o término dessa atividade e pediram para resolvê-la durante o intervalo entre as aulas, o que foi concedido por mim para incentivá-los. Assim, nos resultados dessa atividade serão consideradas 05 (cinco) duplas, sendo a 5ª (quinta) formadas por estes alunos.

Na primeira parte da atividade, os alunos não tiveram dificuldade, pois consistia em obter os deslocamentos já aprendidos na atividade anterior e todos apresentaram a resolução de forma correta. Em relação, ao modo como os alunos descreveram os deslocamentos, a dupla 02 (A2 e A4), deixou explícito que fez uso da definição da obtenção do deslocamento visto na atividade anterior (o ponto final menos o ponto inicial);

As demais equipes, apenas, indicaram as componentes, o que também caracteriza implicitamente o uso do conhecimento anterior. A dupla 4 apresentou um erro de sinal na componente x do 3º quadrante.

A dupla 05 (A1 e A6), formada pelos alunos que chegaram atrasados, apresentou o deslocamento em forma de representação vetorial algébrica o que, para essa atividade, não seria uma resposta válida; isso deve ter acontecido pois eles a fizeram posteriormente à institucionalização da atividade 04. A Figura 27 apresenta a resolução dessa parte da atividade pelas equipes.

Figura 27 - Obtenção e representação dos deslocamentos para a Atividade 03 pelas equipes

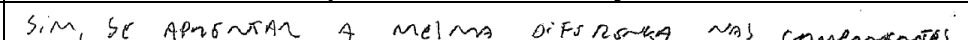
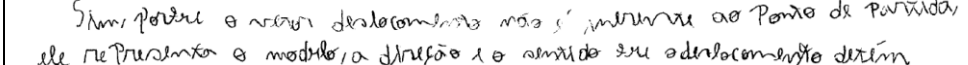
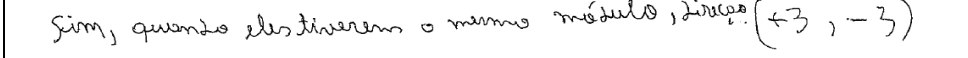
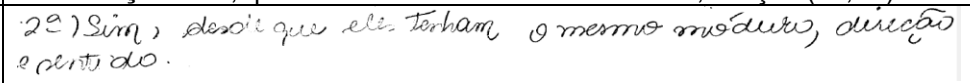
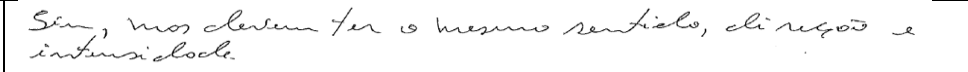


Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Após a obtenção dos deslocamentos, os alunos tinham que responder a questão problema baseado no que observaram. Todas as duplas responderam “Sim” corretamente com justificativas que caracterizavam a grandeza vetorial como aquela que contém “módulo, direção e sentido”, portanto, todas as repostas foram VPD. O Quadro 61 apresenta a resposta esperada e a

apresentada pelos alunos; as transcrições foram realizadas para melhorar o entendimento.

Quadro 61 - Resposta esperada e dos alunos à questão problema da Atividade 03

Resposta Esperada	
Questão problema: É possível que pares de pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento? R: Sim, a figura mostra que os mesmos deslocamentos (com igual módulo, direção e sentido) podem ser obtidos a partir de pontos distintos.	
Dupla	**Resposta dos alunos com justificativa**
01 (A3, A9)	 **Transcrição**: Sim, se apresentar a mesma diferença nas componentes.
02 (A2, A4)	 **Transcrição**: Sim, por que o vetor deslocamento não é inerente ao Ponto de partida, ele representa o módulo, a direção e o sentido que o deslocamento detém.
03 (A5, A11)	 **Transcrição**: Sim, quando eles tiverem o mesmo módulo, direção (+3, -3) e sentido.
04 (A8, A10)	 **Transcrição**: 2ª) Sim, desde que tenham o mesmo módulo, direção e sentido.
05 (A1, A6)	 **Transcrição**: Sim, mas devem ter o mesmo sentido, direção e intensidade.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Do quadro, pode-se inferir que, à exceção das duplas 01 (A3 e A9) e 02 (A2 e A4), as demais tiveram como cerne o mesmo argumento para a justificativa. A dupla 01 partiu da forma de obtenção dos deslocamentos e, de fato, apresentou uma alegação válida, bem como, a dupla 02 que mostrou uma demonstração muito mais próxima e condizente com a definição de vetor. Há de se ressaltar que, para essa atividade, os alunos não tiveram dificuldade e a resolveram de forma satisfatória.

No momento da institucionalização, após colocarem suas respostas no quadro branco, demonstraram satisfação com a forma como a definição de vetor foi apresentada, pois não o "conheciam" a partir desse conceito, apenas, como uma grandeza com módulo, direção e sentido.

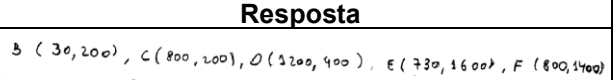
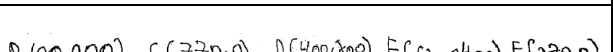
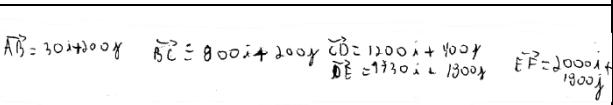
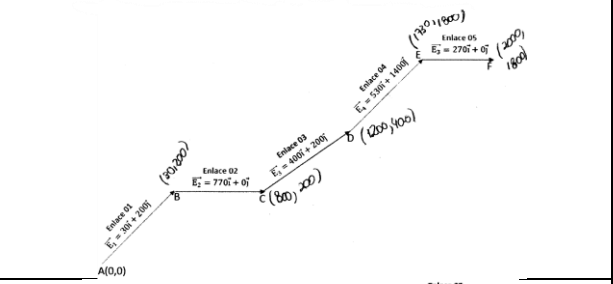
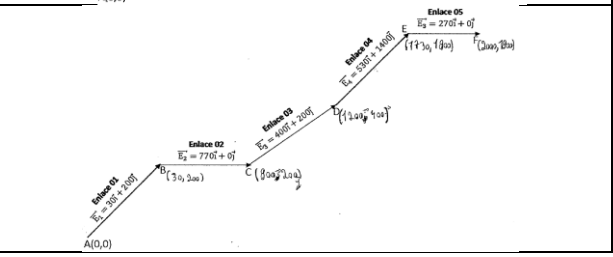
Sobre o conhecimento anterior Bachelard (1996, p. 17) reflete que "No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização". Dessa forma, é possível perceber o sucesso da

atividade, ao permitir “novos” conhecimentos e, consequentemente, a recomposição de conceitos pelos alunos.

A atividade 04, que apresentou uma atividade de conceituação com uma questão problema ao final, teve por objetivo encontrar as coordenadas de um ponto terminal a partir de um vetor, para tanto, os alunos, inicialmente, teriam que determinar em uma série de exercícios o ponto terminal dado um vetor e, em seguida, generalizar uma fórmula para a obtenção do mesmo.

A atividade foi concluída em 25 minutos. Os resultados para a parte inicial, determinar as coordenadas dos pontos de cada um dos enlaces, é apresentada no Quadro 62.

Quadro 62 - Resposta Esperada e dos alunos para a primeira parte da Atividade 04

Resposta Esperada		
Pontos – B(30,200); C(800,200); D(1200, 400);E(1730,1800); F(2000, 1800)		
Dupla	**Resposta**	**Análise**
01 (A3, A9)		Parcialmente correta. Os pontos E e F estão incorretos.
02 (A2, A4)		Parcialmente correta. Apenas o ponto A está correto.
03 (A5, A11)		Incorreta. Foi apresentado vetores que, inclusive, foram dados na questão e não as coordenadas dos pontos como solicitado.
04 (A8, A10)		Correta
05 (A1, A6)		Parcialmente Correta. Os valores das coordenadas dos pontos estão corretos, mas há confusão na representação em alguns deles.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Sobre a determinação das componentes dos pontos, a dupla 01 (A3 e A9) fez de forma correta até o ponto D, porém, possivelmente, um erro de cálculo no ponto D invalidou as demais coordenadas. A dupla 02 (A2 e A4), apesar do ponto

A está correto (este poderia ser obtido de forma direta), nos dá indícios de que não perceberam como obter o ponto terminal, assim como a dupla 03 (A5 e A11) que confundiu as coordenadas do ponto com as componentes do vetor.

As duplas 04 (A8 e A10) e 05 (A1 e A6) determinaram os pontos de forma correta, sendo que a última (dupla 05) confundiu a forma de representação, portanto foi considerada parcialmente correta. O Quadro 63 apresenta o valor absoluto e relativo (%) para a determinação do ponto terminal de cada enlace de acordo com os critérios utilizados para a tabela em Santos (2020).

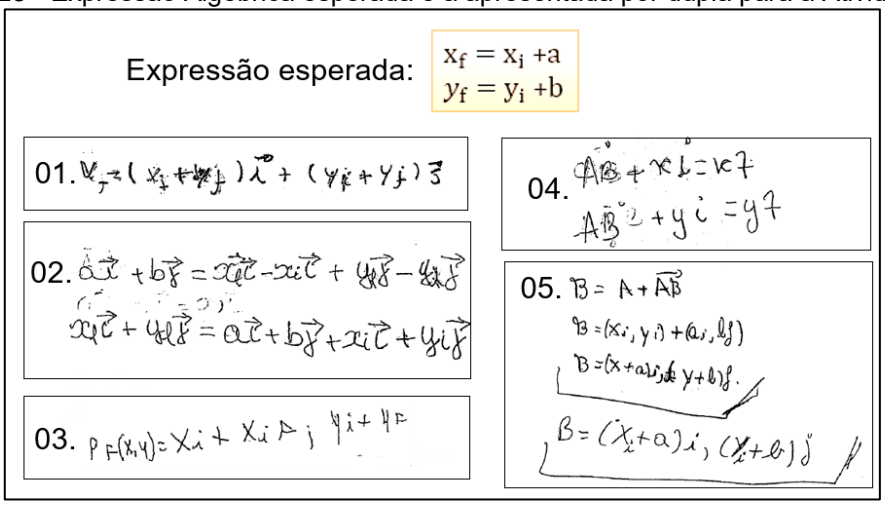
Quadro 63 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 04

Determinação do ponto terminal de cada enlace	**Quantidade**	**Percentual**
Correta	1	20%
Parcialmente Correta	3	60%
Incorreta	1	20%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Em relação a parte 02 da atividade: generalização da fórmula para obtenção do ponto terminal a partir de um vetor, a Figura 28 mostra as expressões determinadas pelas duplas. Vale ressaltar que todas as fórmulas demonstradas pelos alunos foram transcritas para o quadro branco e analisadas com os alunos na fase de institucionalização.

Figura 28 - Expressão Algébrica esperada e a apresentada por dupla para a Atividade 04



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Assim, pode-se observar que, a dupla 01 (A3 e A9) apesar de ter obtido os pontos de forma parcialmente correta não conseguiu determinar a expressão

algébrica; a dupla 02 (A2 e A4), embora não tenha encontrado os pontos de forma correta, a menos por erros de representação e pela ausência dos conhecimentos sobre soma vetorial, poderia ter chegado a expressão correta com alguns ajustes matemáticos.

A dupla 03 (A5 e A11) seguiu o raciocínio incorreto já observado na obtenção dos pontos (primeira parte da atividade). As demais duplas 04 (A8 e A10) e 05 (A1 e A6) apresentaram fórmulas VPND devido ao erro de representação. O Quadro 64 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 64 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 04

Classificação das Observações	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	0	0%
VPND	2	40%
VNPND	1	20%
NVPND	0	0%
NVNPND	2	20%
NF	0	0%
Total	**5**	**100%**

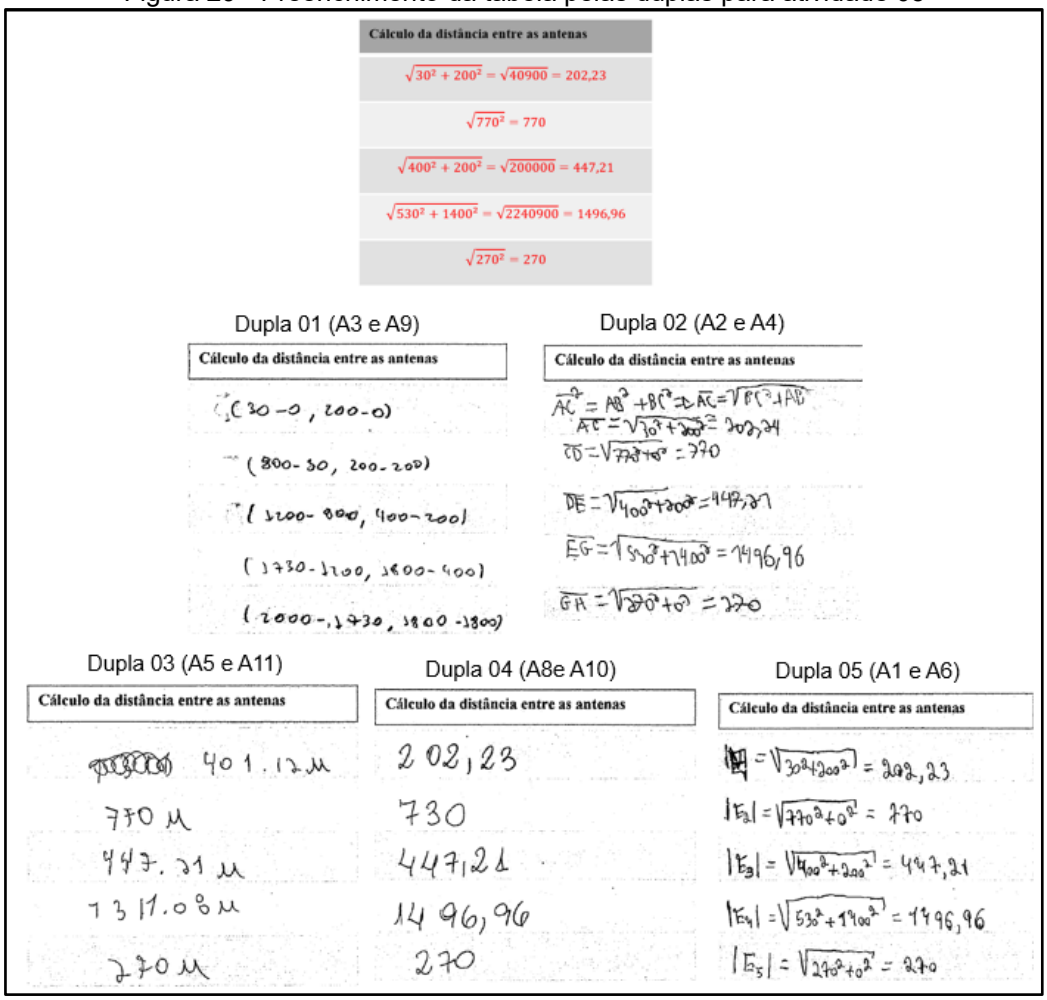
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados indicam que os alunos possuem habilidades matemática para resolver problema, mas têm dificuldades de interpretação algébrica e de sistematização das ações realizadas. Apesar disso, durante a institucionalização, conseguiram perceber e entender a expressão algébrica correta e os erros da primeira parte, principalmente, em relação as formas de representação de ponto e vetor.

Dificuldades como essa, em determinar equações, também foram observadas no estudo de Martins (2018), analisado nas análises prévias dessa tese. Contudo, não é objetivo desse trabalho apontar, de certa forma, as dificuldades, mas saná-las a partir da perspectiva de uma atividade como um meio para construção do conhecimento de forma autônoma e participativa proporcionando autoconfiança e domínio aos alunos.

Em seguida, com as mesmas formações de duplas, a Atividade 05, de conceituação com uma questão problema ao final, foi iniciada e finalizou após 34 minutos. A Figura 29 apresenta a tabela dessa atividade como esperado e como foi preenchido pelas duplas.

Figura 29 - Preenchimento da tabela pelas duplas para atividade 05



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Dos resultados pode-se observar que a dupla 01 (A3 e A9) realizou a atividade de forma incorreta por um erro de interpretação e leitura, conforme afirmaram durante a fase de institucionalização e a dupla 03 apresentou alguns resultados incorretos e, também, não demonstrou como os realizou tendo resolvido a tabela de forma parcialmente correta.

As demais equipes preencheram a tabela da atividade 05 de forma Correta. O Quadro 65 apresenta o valor absoluto e relativo (%) de acordo com Santos (2020) do preenchimento da tabela proposta na atividade 05.

Quadro 65- Valor absoluto e relativo (%) das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 05

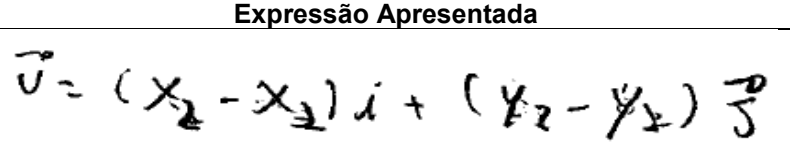
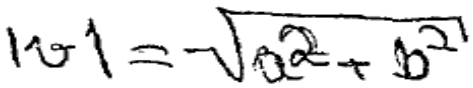
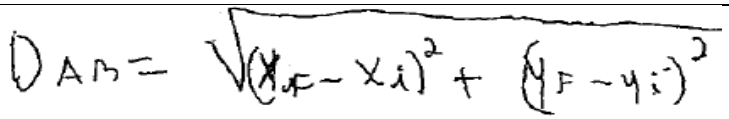
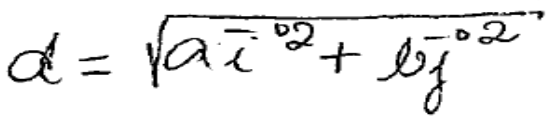
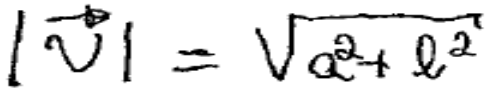
Tipos de Preenchimento das tabelas	Quantidade	Percentual
Correta	3	60%
Parcialmente Correta	1	20%
Incorreta	1	20%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Para a segunda parte da atividade, generalização da fórmula, o Quadro 66 apresenta as expressões esperadas e as apresentadas pelos alunos e que, também, ao final, foram transcritas para o quadro branco.

Quadro 66 - Expressão esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 05

Expressões esperadas: $\sqrt{a^2 + b^2}$ → Válida, prevista e desejada; $\sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$ → Válida, prevista e não desejada

Dupla	Expressão Apresentada	Resolução
01 (A3 e A9)		NVNPND
02 (A2 e A4)		VPD
03 (A5 e A11)		VPND
04 (A8 e A10)		VPND
05 (A1 e A6)		VPD

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Dos resultados destaca-se que, a dupla 01 (A3 e A9) apresentou uma fórmula NVNPND; porém condizente com a forma como resolveu a tabela o que demonstra habilidades matemáticas, mas não o entendimento da atividade. A dupla 03 (A5 e A11) apresentaram uma expressão considerada VPND por não utilizar as componentes do vetor exigidas na questão, porém demonstraram o entendimento e um resultado satisfatório para a atividade.

A fórmula da dupla 04 apresentou um erro de representação devido a presença dos vetores e foi considerada como VPND; as respostas das equipes 01 (A3 e A9) e 05 (A1 e A6), que estavam isentas de qualquer tipo de erro foram classificadas como VPD. O Quadro 67 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 67 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 05

Classificação das Observações	Quantidade	Percentual
VPD	2	40%
VPND	2	40%
VNPND	0	0%
NVPND	0	0%
NVNPND	1	20%
NF	0	0%
Total	**5**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Portanto, de forma geral, para essa atividade, não foram observadas dificuldades, em especial, na parte inicial, em resolvê-la mesmo porque o teorema de Pitágoras era de conhecimento dos alunos, inclusive algumas duplas utilizaram a notação de módulo para apresentar a fórmula para o cálculo da distância entre as antenas. Um aspecto curioso é que os alunos não sabiam que magnitude era sinônimo para o termo módulo.

Contudo, pode-se perceber problemas de representação e de notação vetorial, tal como em Patrício (2011), que foram abordados durante a institucionalização ao analisar as respostas. Por fim, alguns alunos disseram que não conseguiam visualizar a fórmula por Pitágoras quando em três dimensões; a ideia que eles tinham era que formava um sólido geométrico devido a existência de três componentes.

Para solucionar a dúvida, foi utilizado o Geogebra para três dimensões, a partir da visualização da figura exemplificativa criada, conseguiram vislumbrar o uso de Pitágoras, também, para esses casos. Após a finalização dessa atividade, uma série de questões foram resolvidas com os assuntos já estudados. A metodologia da resolução das questões, como explicado anteriormente, partia da resolução de duas ou três questões similares e uma próxima era proposta aos alunos. O tempo utilizado foi de 48 minutos após o intervalo.

Em seguida a resolução de questões, a atividade 06, de resolução de problemas como ponto de partida, seguida, de uma atividade de conceituação foi proposta tendo por objetivo conceituar a adição de vetores.

Metodologicamente, o problema foi apresentado aos alunos que tentaram resolvê-lo, em seguida, foi apresentada a atividade de conceituação como continuação para dar subsídio a resolução do problema; no momento, da institucionalização, primeiramente, as observações da atividade foram verificadas para, depois, seguir para a resolução do problema.

O tempo para conclusão dessa atividade foi de 69 minutos; com a anuência dos alunos, ultrapassamos um pouco o horário regular para concluir a atividade, sendo 15 minutos para a primeira parte e, 54 minutos para a segunda. A primeira parte que envolvia resolução de problemas foi resolvida de forma correta por todos os alunos, como era esperado.

A parte gráfica relativa à atividade de redescoberta foi trabalhosa apesar de terem resolvido de forma correta, além de exigir o preenchimento da Observação que é a parte mais dificultosa para os grupos. Para auxiliar os alunos foi necessário dar dicas como “tem alguma relação nos números algébricos?”, “Qual a relação entre os vetores dos gráficos?”, “Observem no gráfico o vetor resultante...observem a parte algébrica também”.

Durante a realização da atividade, era nítido nas duplas, devido as atividades anteriores, que todos queriam chegar à resposta esperada. Todos as duplas interagiram bastante. Os alunos tiveram acesso a folhas quadriculadas para utilizarem, se necessário. O Quadro 68 apresenta a resposta esperada para o campo Observação da segunda parte da atividade e a apresentada pelas duplas.

Quadro 68 - Observação esperada e das duplas em relação a segunda parte da atividade 06

Observação Esperada		
1. As componentes do vetor resultante, $\overrightarrow{AC}$ são a soma das respectivas componentes de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. 2. Graficamente, o vetor resultante sempre inicia no primeiro vetor, $\overrightarrow{AB}$, e seu término coincide com o final do outro vetor, $\overrightarrow{BC}$.		
Observação da dupla		**Análise**
01 (A3 e A9)	O deslocamento $\overrightarrow{AC}$ é o mesmo que a soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	VPD
02 (A2 e A4)	O deslocamento não depende da trajetória, logo o deslocamento vetor $\overrightarrow{AC}$ é o somatório dos outros vetores de A a B, com o sinal dependendo se for o sentido original (+) e o sentido inverso (-)	VPD
03 (A5 e A11)	Graficamente todos formam triangulos ou retas com sentidos iguais e direções diferentes. as normas de A e B não iguais ao C	VPD
04 (A8 e A10)	A distância das componentes $\overrightarrow{AC}$ é a soma das distâncias entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$	VPD
05 (A1 e A6)	Graficamente observa que o Vetr $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e algebricamente os Componentes X e Y de $\overrightarrow{AC}$ é igual a soma de X e Y dos Componentes de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$	VPD

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Das respostas do quadro pode-se observar que todas estão incompletas, porém são VPD; nenhuma das duplas observou o “desenho” formado pelos vetores que indicam o vetor soma. A dupla 02 trouxe conceitos aprendidos em física sobre trajetória que não era o cerne da atividade; a dupla 04 confundiu o conceito de distância. A sessão foi finalizada após a institucionalização dessa atividade e com a entrega das questões para casa correspondente a cada atividade separadamente.

Por fim, as atividades 03, 04 e 05 tinham uma característica em comum: a presença de uma questão ao término da parte inicial da atividade. Essa questão, de certa forma, direcionou a resolução da atividade e o entendimento do que deveria ser buscado. Na 06, não havia essa pergunta final, mas o campo observação e foi necessário algumas intervenções para direcionar a observação.

Atividades como a 03, 04 e 05 mostraram-se úteis, pois os alunos já tinham certo conhecimento do assunto e os ajudou a focar no que era necessário e não em buscar conceitos prontos, não condizentes com o que a atividade estava mostrando e com o objetivo.

Como na sessão anterior, os alunos demonstraram interesse e participação nas aulas, apresentando dificuldades de leitura/interpretação, em alguns casos. Vale ressaltar, a importância e a necessidade dos alunos escreverem a sua observação no quadro branco e que a institucionalização parte dessas observações e das correções dessas; na maioria das vezes, os próprios alunos perceberam os seus erros ao comparar sua observação com a dos colegas ou as complementaram. Esse momento é primordial, também, para dirimir problemas conceituais e de representação.

Ao final dessa sessão, é importante destacar o sentimento de “aprender com erros” e o verdadeiro papel do professor como mediador para a construção de conhecimentos durante o processo de ensino aprendizagem e a compreensão dos “...erros dos alunos como hipóteses construtivas” (Nogaro e Granella, 2004), tanto em relação ao fazer docente, quanto aos alunos.

Além disso, a predisposição da turma em aprender e superar as dificuldades nos dão indícios dos sucessos das atividades agregado a motivação dos alunos e ao gostar da área de matemática. Como docente, é possível constatar a satisfação dos alunos e o alcance dos objetivos, bem como, um

processo de transformação do saber docente, que não é fácil, nem menos trabalhoso, porém é gratificante e revigorador.

5.3. TERCEIRA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 07

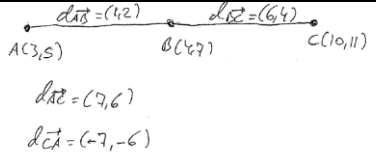
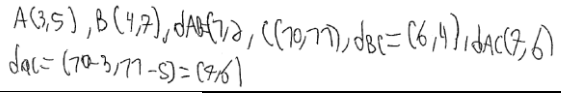
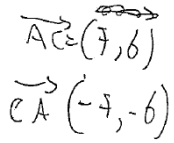
Essa sessão aconteceu em uma aula extra. A atividade 07 era de resolução de problemas como ponto de partida e foi realizada de forma individual, tinha por objetivo definir vetor oposto, a partir do mesmo contexto apresentado na atividade 06.

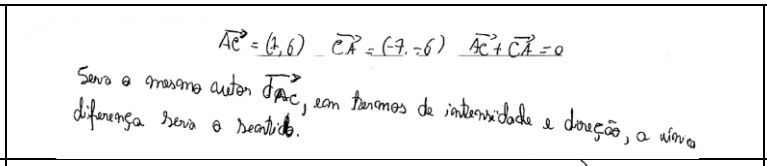
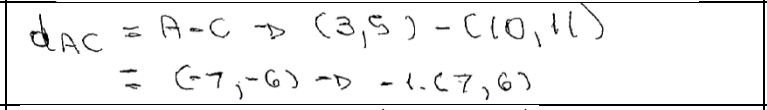
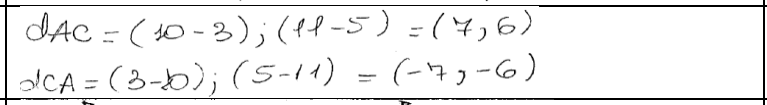
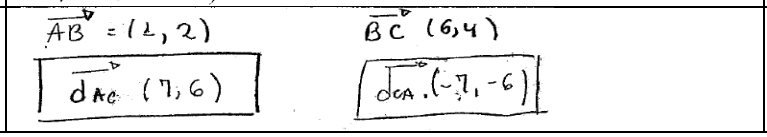
Apenas, 07 alunos (A1, A2, A5, A6, A7, A8 e A9) estavam presentes e realizam a atividade que finalizou em 30 minutos, com introdução do conceito de vetor oposto, vetor nulo e o efeito geométrico destes na adição de vetores. Somente A2 não a resolveu de forma completa e o A7 confundiu a nomenclatura; para este último, a resolução foi considerada VPD, assim como, as demais respostas.

Um dos alunos, A6, além de resolver ainda escreveu o seguinte comentário, demonstrando o seu pleno entendimento do assunto: *"Seria o mesmo vetor* $\overrightarrow{d_{AC}}$*, em termos de intensidade e direção, a única diferença seria o* sentido". O

Quadro 69 apresenta o resultado esperado e o apresentado pelos alunos para a atividade 07.

Quadro 69 - Resolução esperada e a dos alunos para atividade 07

Resolução Esperada: Vetor que desloca de C até A: $\overrightarrow{CA} = (-7, -6)$		
Aluno	**Resolução**	**Análise**
A1		VPD
A2		NVNPND
A5		VPD

A6		VPD
A7		VPD
A8		VPD
A9		VPD

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

O Quadro 70 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 70 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 07

Classificação das Observações	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	8	88,88%
VPND	0	0%
VNPND	0	0%
NVPND	0	0%
NVNPND	1	11,11%
NF	0	0%
Total	**9**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Apesar da maioria dos alunos conseguirem resolver o problema, alguns tiveram dificuldade em visualizar e entender, geometricamente, a adição de vetores com vetor oposto. Ao término da explicação, exercícios de aprofundamento foram realizados envolvendo as atividades 06 e 07 e, consequentemente, os assuntos anteriores. A resolução dessas questões demorou 66 minutos.

Ao final da sessão, pode-se inferir que o problema foi visto como exercício para a maioria dos alunos, pois conseguiram resolvê-lo; contudo, a atividade conseguiu atender o previsto: ser vista como um motivador inicial para a introdução de novos assuntos a partir de um contexto simples.

Portanto, nessa aula houve a necessidade de focar na resolução de questões devido a apreensão dos alunos em relação a adição geométrica de vetores com vetor oposto; em todo o caso, o software Geogebra foi utilizado

como auxiliar, sempre que necessário. Durante a resolução dos exercícios havia 09 alunos presentes na sala de aula.

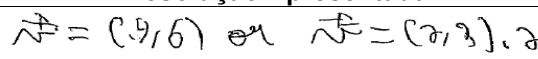
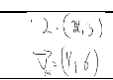
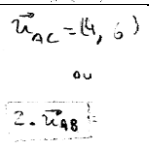
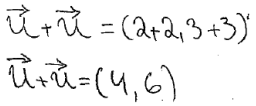
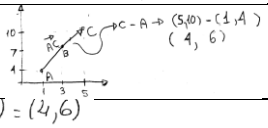
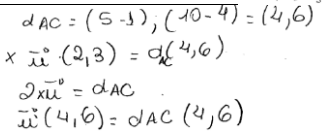
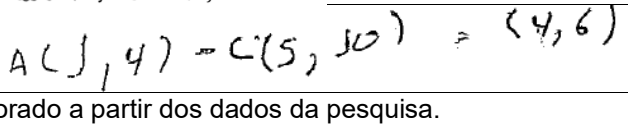
Para essa sessão, como docente, foi possível perceber o amadurecimento dos alunos em relação ao entendimento, formas de resolver e tomar decisões de forma autônoma diante de uma situação problema.

5.4. QUARTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 08, 09 E 10

A quarta sessão foi, também, em uma aula extra e foi possível realizar as atividades 08, de RPPP, a 09, de redescoberta, e a 10, RPPP. Em relação a atividade 08, esta foi finalizada em 10 minutos e realizada de forma individual e correta pelos 07 alunos presentes. O objetivo era investigar o efeito da multiplicação de um vetor por um escalar.

Durante a resolução, percebi que os alunos já estavam resolvendo as atividades considerando o título e o objetivo da mesma. Tanto que, alguns representaram diretamente o resultado por meio da multiplicação por um escalar. O Quadro 71 apresenta o resultado esperado e o apresentado pelos alunos.

Quadro 71 -Resultado previsto e apresentado para os alunos na atividade 08

Resultado esperado: $2*\overrightarrow{AB} = 2*(2,3)=(4,6)= \overrightarrow{AC}$ (VPD) $\overrightarrow{AC} = (5,10) - (1,4) = (4,6)$ (VPND)		
Aluno	**Resolução Apresentada**	**Resolução**
A2		VPD
A3		VPD
A4		VPD
A5		VPD
A7		VPND
A8		VPD
A10		VPND.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados mostram que, apenas, dois alunos, A7 e A10, não conseguiram perceber de qual maneira chegar ao resultado diretamente, utilizando a multiplicação por um escalar, apesar de responderem ao problema corretamente levando-os a um resultado válido, previsto e não desejada. Um erro de operação, também, foi observado na resolução do aluno A10. O Quadro 72 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 72 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 08

Classificação das Observações	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	5	70%
VPND	2	30%
VNPND	0	0%
NVPND	0	0%
NVNPND	0	0%
NF	0	0%
Total	**7**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Todas as dificuldades verificadas foram discutidas no momento da resolução e da explicação do problema; apesar de ser uma atividade do tipo RPPP, foi solicitado aos alunos que colocassem suas soluções no quadro, pois a maioria havia conseguido chegar a solução de forma esperada e desejada.

Ao final da atividade, pode-se concluir que os alunos a resolveram com êxito, seja pelo deslocamento vetorial ou ao conseguir visualizar a multiplicação por um escalar ao longo do caminho entre os pontos; sendo assim, o problema passou a ter, para esses alunos um caráter de motivador para a aprendizagem dos conteúdos.

A apresentação da resolução da atividade por corretos e diferentes processos nos mostra que os alunos estão conseguindo visualizar e utilizar conhecimentos anteriores para a construção de outros, sem considerar um padrão pré-definido, mas utilizando-se das ferramentas que possuem; há uma busca pela variação que para Bachelard (1996) caracteriza o espírito pré-científico e “Enriquece a compreensão do conceito e prepara a matematização da experiência” (Bachelard, 1996, p. 39).

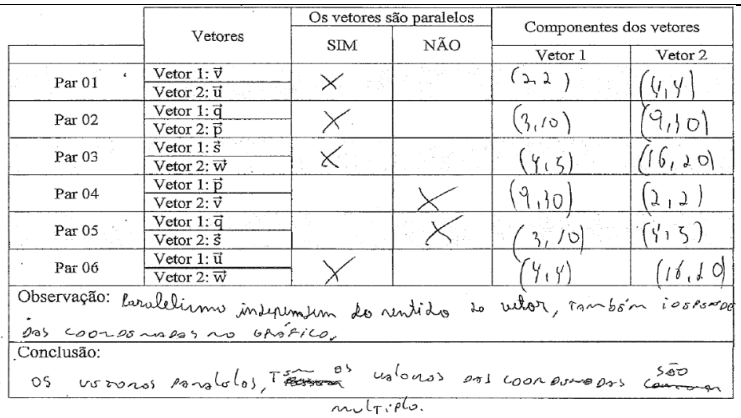
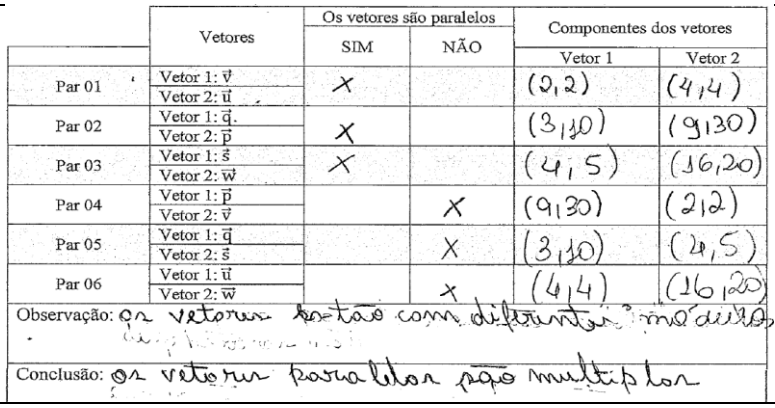
Em seguida, a atividade 09 foi proposta, porém foi realizada em grupos, 2 duplas e 1 trio, por ser uma atividade de redescoberta, o tempo necessário para a conclusão foi de 36 minutos. O objetivo da atividade foi investigar a condição

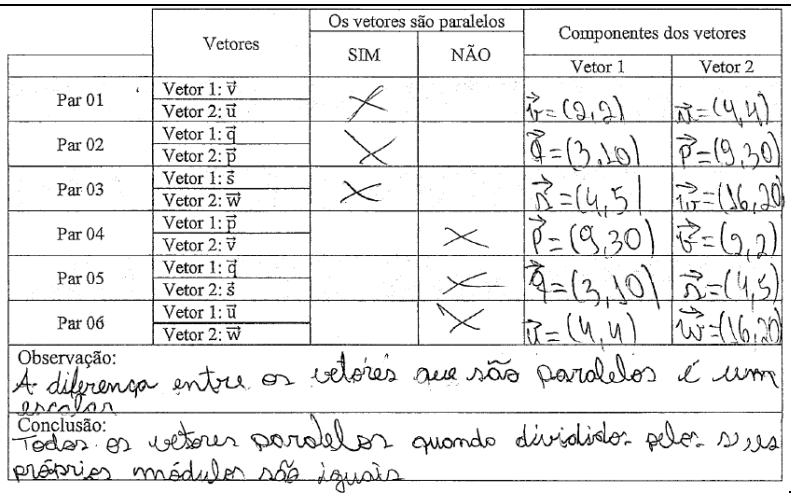
de paralelismo. Os alunos deviam, incialmente, preencher uma tabela de acordo com o gráfico dado e depois elaborar uma observação e conclusão. O Quadro 73 apresenta a resolução esperada e as apresentadas pelos grupos.

Quadro 73 - Resolução esperada e a dos alunos para a atividade 09

Resolução Esperada

Pares	Vetores	Os vetores são paralelos		Componentes dos vetores	
		SIM	NÃO	Vetor 1	Vetor 2
Par 01	Vetor 1: $\vec{v}$ Vetor 2: $\vec{u}$	x		(2,2)	(4,4)
Par 02	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{p}$	x		(3,10)	(9,30)
Par 03	Vetor 1: $\vec{s}$ Vetor 2: $\vec{w}$	x		(4,5)	(16,20)
Par 04	Vetor 1: $\vec{p}$ Vetor 2: $\vec{v}$		x	(9,30)	(2,2)
Par 05	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{s}$		x	(3,10)	(4,5)
Par 06	Vetor 1: $\vec{u}$ Vetor 2: $\vec{w}$		x	(4,4)	(16,20)
Observação: As componentes dos vetores que são paralelos são proporcionais, enquanto os vetores que não paralelos não obedecem a essa relação.					
Conclusão: Vetores Paralelos possuem componentes proporcionais. Ou seja, dado um vetor $\vec{v}//\vec{u}$, implica que $\vec{v} = n\vec{u}$, sendo n um número qualquer.					

Grupo	Resolução dos grupos	Tabela	Conclusão
01 (A3, A5 e A10)		Parcialmente Correta	VPD
02 (A7 e A8)		Correta	VPD

03 (A2 e A4)		Correta	NVNPND

	Vetores	Os vetores são paralelos		Componentes dos vetores	
		SIM	NÃO	Vetor 1	Vetor 2
Par 01	Vetor 1: $\vec{v}$ Vetor 2: $\vec{u}$	X		$\vec{v}=(2,2)$	$\vec{u}=(4,4)$
Par 02	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{p}$	X		$\vec{q}=(3,10)$	$\vec{p}=(9,30)$
Par 03	Vetor 1: $\vec{s}$ Vetor 2: $\vec{w}$	X		$\vec{s}=(4,5)$	$\vec{w}=(16,20)$
Par 04	Vetor 1: $\vec{p}$ Vetor 2: $\vec{v}$		X	$\vec{p}=(9,30)$	$\vec{v}=(2,2)$
Par 05	Vetor 1: $\vec{q}$ Vetor 2: $\vec{s}$		X	$\vec{q}=(3,10)$	$\vec{s}=(4,5)$
Par 06	Vetor 1: $\vec{u}$ Vetor 2: $\vec{w}$		X	$\vec{u}=(4,4)$	$\vec{w}=(16,20)$

Observação:
A diferença entre os vetores que são paralelos é um escalar

Conclusão:
Todos os vetores paralelos quando divididos pelos seus próprios módulos são iguais

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Após a transcrição das conclusões dos grupos para o quadro branco, chegou-se à conclusão da turma, qual seja: “vetores paralelos possuem componentes múltiplas e; por outro lado, se as componentes forem múltiplas, os vetores são paralelos”.

De forma geral, sobre o preenchimento da tabela os alunos não demonstraram dificuldades, apesar da pouca interação entre os membros dos grupos. Apenas, o grupo 01 (A3, A5 e A10) preencheu a tabela de forma parcialmente correta, apenas, por um erro na classificação do Par 06. O Quadro 74 apresenta o valor absoluto e relativo (%) de acordo com Santos (2020) do preenchimento da tabela proposta na atividade 09.

Quadro 74 - Quantidade e Percentual das formas de preenchimento da tabela para a Atividade 09

Tipos de Preenchimento das tabelas	Quantidade	Percentual
Correta	2	67%
Parcialmente Correta	1	33%
Incorreta	0	0%
Total	**3**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Em relação aos campos Observação e Conclusão, um dos alunos perguntou qual a diferença entre estes, o que era esperado pois foi a primeira e única atividade de redescoberta da sequência didática. Nesse sentido, apenas, a Conclusão do grupo 03 (A2 e A4) não foi VNPND, apesar de ter preenchido a tabela corretamente.

Por outro lado, o grupo 01 (A3, A5 e A10) cuja tabela estava parcialmente correta teve a conclusão VPD. O grupo 02 (A7 e A8) preencheu a tabela corretamente, assim como, elaborou uma conclusão VPD. O Quadro 75 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das observações de acordo com a classificação de Santos (2020).

Quadro 75 - Quantidade e Percentual das Observações para a Atividade 09

Classificação das Observações	Quantidade	Percentual
VPD	2	67%
VPND	0	0%
VNPND	0	0%
NVPND	0	0%
NVNPND	1	33%
NF	0	0%
Total	**3**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Apesar do sucesso da atividade 09 e do entendimento dos alunos, nenhuma das equipes conseguiu relacionar a observação e a conclusão, pois ainda não tinham feito nenhum exemplo deste tipo, porém esse fato não trouxe danos a aprendizagem. Contudo, pode-se afirmar que nessa atividade os alunos tiveram grande êxito e conseguiram chegar a conclusões coerentes e esperadas, sobre o paralelismo de vetores.

Por fim, ainda nessa sessão, a atividade 10 foi proposta aos 10 (dez) alunos presentes, de forma individual, por ser de RPPP, e teve por objetivo definir vetor unitário. Como era esperado, nenhum dos alunos conseguiu resolver o problema; 8 alunos apresentaram alguma tentativa de resolução. O tempo utilizado para essa atividade foi de 32 minutos. O Quadro 76 apresenta a solução esperada e as tentativas dos alunos.

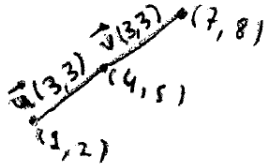
Quadro 76 - Resolução esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 10

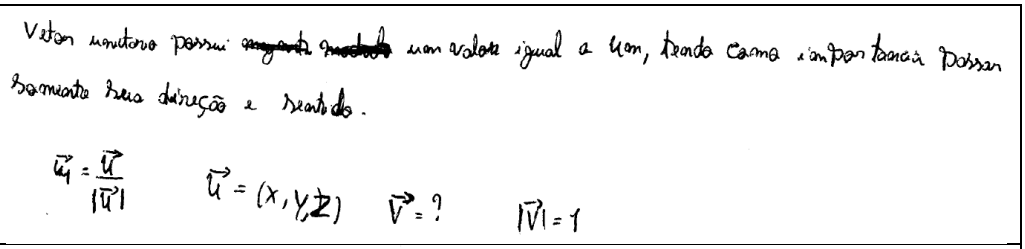
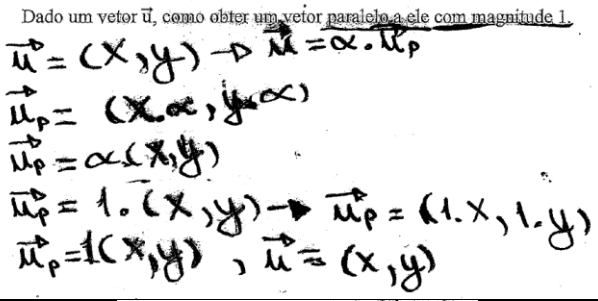
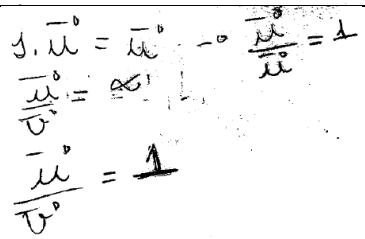
Resolução esperada
Considere que $\vec{u} = (x, y, z)$; como $\vec{v}//\vec{u}$, então: $\vec{v} = k\vec{u} = (kx, ky, kz)$ (1) e $\lvert\vec{v}\rvert=1$ (2) Aplicando (1) em (2): $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2} = 1$ $(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2 = 1$ → $k^2(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ → $k = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\lvert\vec{u}\rvert}$ (4) Aplicando (4) em (1): $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\lvert\vec{u}\rvert}$ → vetor paralelo a $\vec{u}$ com magnitude 1 Verificando: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; logo: $\vec{v} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}} = 1$$

Aluno	Resolução dos Alunos
A01	$\vec{u} = (x, y)$ $x = \alpha a$, $y = \alpha b$ $(x, y) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, b)$; Logo $(x, y) = \alpha(a, b)$ Logo, vetor $\vec{u} = (x, y)$ é paralelo ao vetor $\vec{j} = (a, b)$
A02	$M = (x, y, z) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow (x, y, z) \cdot \left[\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]^{-1}$ $\vec{u} \Rightarrow \|\vec{u}\| = 1$ $\left\|\frac{(1,5)}{\sqrt{4^2+5^2}}\right\| = \left\|\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\| = 1$ $= \|(4/\sqrt{41}, 5/\sqrt{41})\| = \sqrt{(4/\sqrt{41})^2 + (5/\sqrt{41})^2} = 1$
A03	MUDA-SE OS PONTOS, PORÉM MANTÉM A PROPORÇÃO IGUAL A UM 
A04	$\vec{u} \parallel \vec{v}$ $\quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ Um vetor $\vec{u}$ dividido pelo seu módulo é um vetor de magnitude 1
A05	$\vec{V} = (x, y, z)$ se dividir um vetor pelo seu módulo, ele vira um vetor unitário $(5, 4)$ $\quad \sqrt{3^2+4^2} =$ (só me lembro disso?) (não sabia o que era magnitude) $\sqrt{9+16} = 5$

A06	
A07	
A08	
A09	NF
A10	NF

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Assim, como na atividade anterior, os alunos tiveram pouca interação, pois estavam concentrados em resolver o problema, além disso, pode-se inferir que eles tentaram solucionar a questão por meio do título da atividade. Porém, mostraram-se surpresos com a resolução e com a obtenção da definição de vetor unitário a partir de conceitos vistos anteriormente e não com uma fórmula pronta e, também da forma como foi apresentado e interpretado: “como um vetor de magnitude 1 paralelo a um dado vetor”.

Para essa atividade não foram encontradas respostas VPD, conforme mostra o Quadro 77 abaixo, que apresenta o valor absoluto e relativo (%) das respostas adaptado de Santos (2020).

Quadro 77 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 10

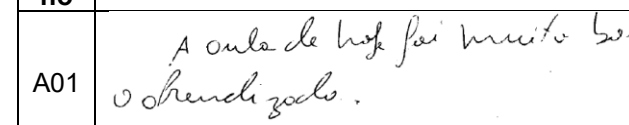
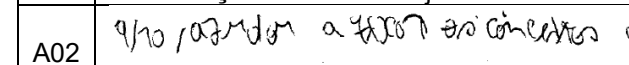
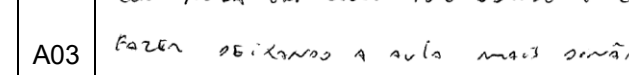
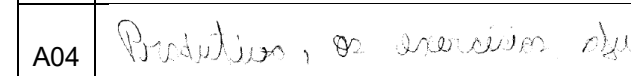
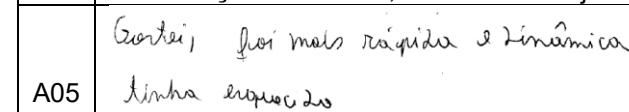
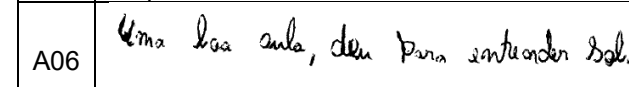
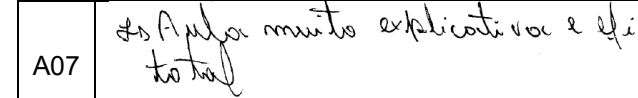
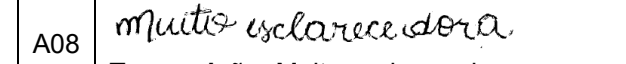
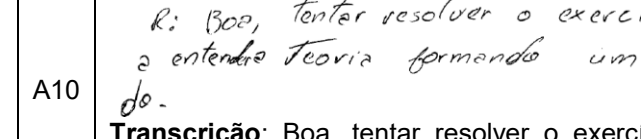
Classificação das Respostas	Quantidade	Percentual
VPD	0	0%
VPND	0	0%
VNPND	0	0%
NVPND	8	80%
NVNPND	0	0%
NF	2	20%
Total	**10**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Todas as respostas foram consideradas NVPND porque era previsível que os alunos não conseguiriam resolver a atividade, apesar de ser desejável que eles a resolvessem. Ao final da sessão, solicitei aos alunos que fizessem uma avaliação da aula do dia, a fim de ter, também, as suas impressões por escrito, sempre ressaltando a eles que, de forma alguma, a sua opinião iria ser utilizada para a sua avaliação, mas para verificar o experimento e permitir a sua validação e posteriores ajustes.

O Quadro 78 apresenta as respostas dos alunos à pergunta “Como você avalia a aula de hoje?”. A transcrição foi necessário para melhor compreensão.

Quadro 78 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 4)?

Aluno	**Como você avalia a aula de hoje?**
A01	 **Transcrição**: A aula de hoje foi muito boa e interessante para o aprendizado.
A02	 **Transcrição**: [sic], ajudou a fixar os conceitos aprendidos anteriormente.
A03	 **Transcrição**: Com pouca explicação por slide e com mais atividades para fazer deixando a aula mais dinâmica.
A04	 **Transcrição**: Produtiva, os exercícios ajudaram a fixar o conteúdo.
A05	 **Transcrição**: Gostei, foi mais rápida e dinâmica e relembrei assunto que tinha esquecido.
A06	 **Transcrição**: Uma boa aula, deu para entender sobre paralelismo e vetor unitário.
A07	 **Transcrição**: Aula muito explicativa e eficiente, total aproveitamento total.
A08	 **Transcrição**: Muito esclarecedora.
A10	 **Transcrição**: Boa, tentar resolver o exercício primeiro aguça a entender a teoria formando um entendimento consolidado.

Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Da avaliação dos alunos sobre a aula, pode-se perceber a satisfação deles com o aprendizado e com a forma como a aula foi realizada, dando ênfase a resolução da atividade para chegar as definições e aos conceitos, o que, segundo os alunos, dinamizou a aula e facilitou o entendimento, consolidando-o; além de, permitir reforçar os conteúdos ainda que já tenham sido vistos em disciplinas anteriores.

Vale destacar que, apesar da dificuldade em resolver as atividades de RPPP, esse fato não os desestimulou ou os impulsionou a não tentar; pelo contrário, os motivou a encontrar a solução e, de certa forma, testar os seus conhecimentos, cujo "insucesso" na resolução não foi considerado de forma alguma como fracasso, mas como uma oportunidade de aprender.

Nesse sentido, Nogaro e Granella (2004, p.8), dizem que "o aluno deve ser desafiado, deve ser estimulado a levantar ideias e hipóteses sobre aquilo que pretendemos que ele aprenda"; para os autores, métodos de ensino com essa característica dão a oportunidade dos alunos desenvolverem sua autonomia e pode dar uma real compreensão do conteúdo pelo discente.

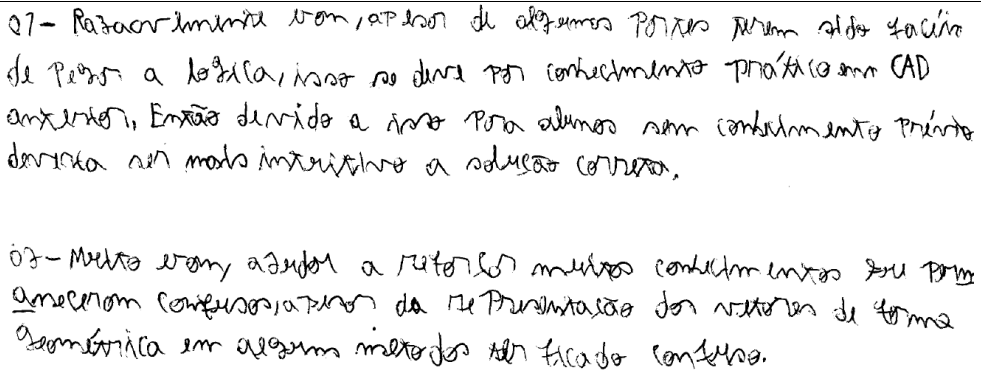
Ao final da sessão, além do questionamento sobre a aula do dia, também foram feitos outros para ter uma visão mais completa do que eles, de fato, estavam achando do método de ensino; pois, até então, as impressões estavam sendo realizadas de forma oral e por meio da ficha de observação.

As perguntas foram: 1) Como você avalia a metodologia que está sendo utilizada em sala de aula? 2) Como você avalia o seu aprendizado até agora? O Quadro 79 apresenta as respostas, transcrição foi realizada quando necessário.

Quadro 79 - Resposta as perguntas: 1) Como você avalia a metodologia que está sendo utilizada em sala de aula? 2) Como você avalia o seu aprendizado até agora?

Aluno	1) Como você avalia a metodologia utilizada em sala de aula? 2) Como você avalia o seu aprendizado?
A01	① A metodologia é muito interessante e de fácil aprendizado pois facilita o entendimento do conteúdo. ② Estou tendo um bom aprendizado até agora.

A03	① DIFERENTE DAS DEMAIS APRESENTADAS, POIS HÁ UMA MAIOR PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS, E POR TER MAIS EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM AULA. ② O COMEÇO DO CONTEÚDO É MAIS FÁCIL DE ASSIMILAR, PORÉM QUANDO SE TRATA DE UMA VISÃO ESPACIAL ATRELADO A ÁLGEBRA SURGEM MAIS DÚVIDAS.
A04	01- A metodologia até o momento é bem eficaz. Eu já tive contato com esse conteúdo antes, mas essas aulas ajuram para revisar e reforça alguns pontos importantes. 02- Regular, ainda possuo algumas falhas
A05	1) Achei a metodologia ~~um pouco~~ lenta para alguém que já tenha visto em outras disciplinas, mas para alguém no primeiro semestre vendo Álgebra linear I achei bom, muito chato rever deslocamento. 2) Até agora, a parte que eu não ~~tenho~~ sabia fazer era a soma dos vetores em um gráfico e consegui entender bem (de um dos jeitos)
A06	1º) ~~uma~~ A metodologia é excelente, visto que ela exemplifica todas as propriedades e realiza atividades, assim facilita a compreensão. 2º) Estou aprendendo a maioria das coisas que estão sendo passadas, logo, classifico como um bom aprendizado.
A07	① muito eficiente e prático. ② muito produtivo, total aproveitamento do aprendizado
A08	1. Estimular o aluno a pensar e a construir os conceitos é bem mais relevante do que ler um conceito e fazer com que o aluno apenas aceite como uma verdade absoluta e decore fórmulas. Nesse contexto, a metodologia aplicada até o momento está sendo muito boa. 2. Eu avalio o meu aprendizado como muito proveitoso, pois estou conseguindo assimilar os conceitos e aplicar aos cálculos.

A09	1) Muito boa. 2) Tenho aprendido e retordado muito.
A10	1) Boa, pois notei que primeiro tentar exercitar nos deixa mais aptos a absorver a explicação mesmo quando não acertamos de primeira o exercício. 2) Satisfatoria.
A12	 **Transcrição:** 01. Razoavelmente boa, apesar de algumas partes terem sido fáceis de pegar a lógica, isso se deve por conhecimento prático em CAD anterior. Então devido a isso para alunos sem conhecimento prévio deveria ser mais intuitivo a solução correta. 02. Muito bom, ajudou a reforçar muitos conhecimentos [sic] permaneceram confusos, apesar da representação de vetores em alguns métodos ter ficado confuso.

Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Sobre a metodologia, os alunos destacaram a facilidade em entender o conteúdo tanto pelo método em si, quanto pela forma que exemplificou e apresentou as definições e propriedade, levando o aluno a pensar e obter suas próprias conclusões, além da prática de exercícios.

Contudo, um dos alunos destacou que, para alguém que já possui o conhecimento, a metodologia é um pouco lenta e outro, que há partes que são mais para observar a lógica. Em relação ao aprendizado, consideraram como bom e ressaltaram as suas falhas, o que é comum, e a facilidade dos conteúdos iniciais. Dentro desse contexto, Zabala (1998, p.29) diz que

> É preciso insistir que tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos. A maneira de organizar a aula, o tipo de incentivos, as expectativas que depositamos, os materiais que utilizamos, cada uma destas decisões veicula determinadas experiências educativas ... (Zabala, 1998, p.29)

Ao finalizar as três atividades, a aula foi encerrada e, como nas sessões anteriores, foram entregues questões de aprofundamento para casa referente a cada um dos conteúdos vistos.

Como docente, a experiência de apresentar uma questão de difícil resolução pelos alunos, a princípio, traz uma insegurança em relação ao estímulo que irá provocar nos alunos. Porém, a percepção foi surpreendente, os alunos sentiram-se motivados e satisfeitos na apresentação de um conceito por outro método e por entender o seu real significado; destaca-se que, nesses casos, o papel do professor como mediador, como olha o “fracasso” da turma, faz toda a diferença: “a questão é como transformar o erro em um problema, um diálogo e por fim em uma situação de aprendizagem” (Nogaro e Granella, 2004, p.9).

5.5. QUINTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: ATIVIDADE 11, 12 E 13

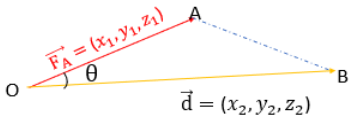
A sessão foi realizada em uma aula regular de sexta-feira, com quatro tempos de 50 minutos, e iniciou com a resolução de questões referentes as atividades 08, 09 e 10, o tempo utilizado foi de 26 minutos iniciais da aula. As três atividades propostas nessa sessão eram do tipo RPPP e foram realizadas de forma individual.

A atividade 11 teve por objetivo determinar o ângulo entre dois vetores e o título foi Produto Escalar; o tempo utilizado foi de 19 minutos. Em relação a resolução, a previsão era de que os alunos não conseguiriam resolvê-la utilizando a propriedade do cosseno.

Contudo, havia a possibilidade de resolução por relação trigonométrica ou pela aplicação direta da fórmula do produto escalar; porém, nesses dois casos, não era o desejado, apesar de válidos. O Quadro 80 apresenta a resolução esperada pela lei dos cossenos e o modo como os alunos tentaram resolver o problema.

Quadro 80 - Resolução esperada e a apresentada pelos alunos para a atividade 11

Resolução Esperada



1. Seja a representação no plano de $\overrightarrow{F_B}$ e $\vec{d}$, representados como vetores ligados, e do ângulo θ

2. Aplicação a lei dos cossenos no triângulo ABO: $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{F_B}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2|\overrightarrow{F_B}||\vec{d}|cos\theta$ (1)

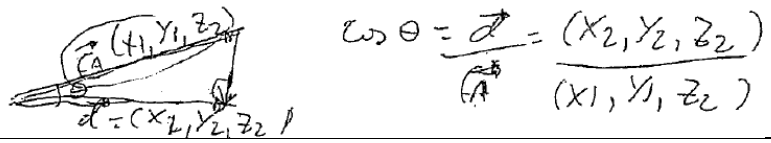
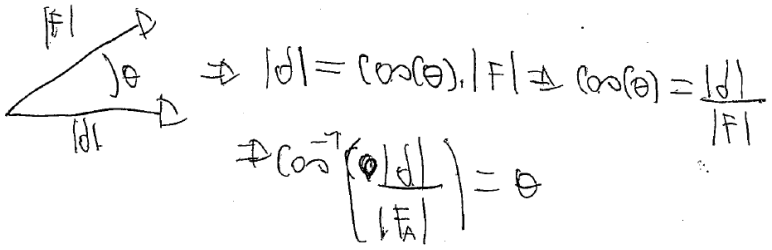
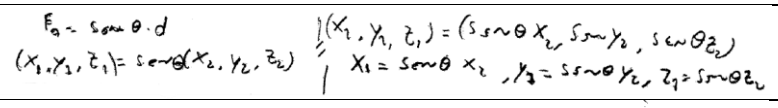
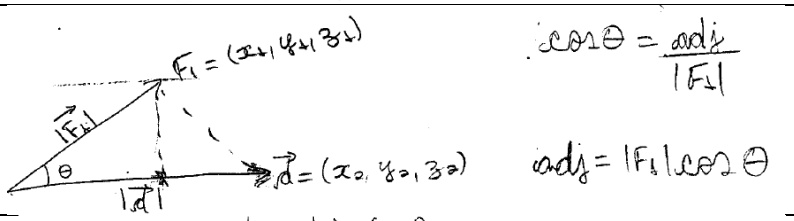
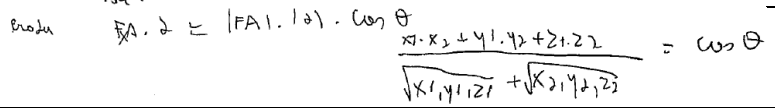
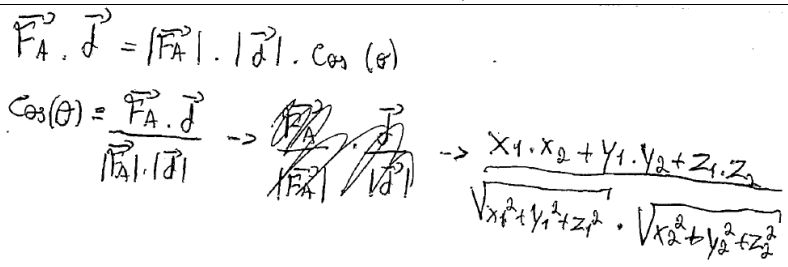
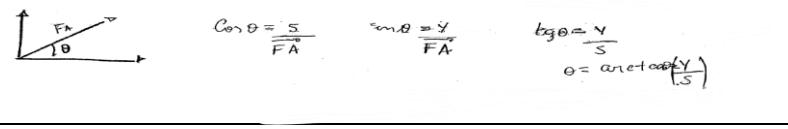
Em coordenadas, temos:

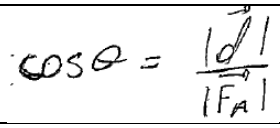
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2|\vec{d}||\overrightarrow{F_B}|cos\theta$$

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 + z_2^2 - 2z_2z_1 + z_1^2 = x_2^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2|\vec{d}||\overrightarrow{F_B}|cos\theta \quad (2)$$

Pós simplificação de (2): $-2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_F = -2|\vec{d}||\overrightarrow{F_B}|cos\theta$ (3)

Logo: $cos\theta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\overrightarrow{F_B}||\vec{d}|} \rightarrow \theta = arc\cos\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\overrightarrow{F_B}||\vec{d}|}\right)$

Aluno	Resolução dos Alunos	Classificação da Respostas
A1		VPND
A2		VPND
A3		NVNPND
A4		NVNPND
A5		VPND
A6		VPND
A9		NVNPND

A10		VPND
A11	NF	NF

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Das resoluções pôde-se observar que A5 e A6 aplicaram a equação do produto escalar de forma direta e, A1, A2 e A10, a relação trigonométrica do cosseno; nesses casos, a resolução está correta, mas não era o desejado, de acordo com o objetivo da atividade que era o desenvolvimento da resolução pela lei dos cossenos para chegar ao invariante e as respostas foram consideradas VPND.

A3, aplicou uma relação trigonométrica incorreta; A4 e A9, fizeram uso de variáveis não declaradas e não utilizadas na questão. Nesses casos, as soluções foram classificadas como NVNPND; A11 não apresentou tentativa de resolução. O Quadro 81 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das respostas finais adaptado de Santos (2020).

Quadro 81 - Quantidade e Percentual das Respostas para a Atividade 11

Classificação das Respostas	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	0	0%
VPND	5	55%
VNPND	0	0%
NVPND	3	35%
NVNPND	0	0%
NF	1	10%
Total	**9**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Ao final dessa atividade, como esperado, os alunos não conseguiram resolvê-la como desejado e utilizaram relações trigonométricas. No mais, para esse tipo de atividade, o mais interessante é o papel motivador e a possibilidade de chegar a um invariante com conhecimentos já existentes e não utilizados para tal fim. Pode-se dizer que a atividade cumpriu o seu papel e impulsionou os alunos a resolvê-la, o que foi perceptível pelo fator surpresa durante a resolução.

A atividade 12 teve por objetivo definir o produto vetorial, sendo, o título Produto Vetorial; 08 dos 09 alunos presentes tentaram resolver a questão. É possível observar através das resoluções dos alunos que alguns tentaram resolver utilizando a definição de produto vetorial, porém não conseguiram

finalizar a resolução; além disso, alguns ainda aplicaram as condições de ortogonalidade vistas no Produto Escalar. O Quadro 82 apresenta a resolução esperada e a apresentada pelos alunos.

Quadro 82 - Resolução esperada e forma como os alunos tentaram resolver a Atividade 12

Resolução Esperada

Considerando $\vec{F} = (a, b, c)$, $\vec{d} = (x, y, z)$ e $\vec{\tau} = (\alpha, \beta, \theta)$ e de acordo como enunciado e aplicando a propriedade do produto escalar, têm-se:

$\vec{\tau} \cdot \vec{F} = 0$ (1) $\quad \vec{\tau} \cdot \vec{d} = 0$ (2)

De (1) e (2), respectivamente: $\alpha a + \beta b + \theta c = 0$ (3) $\quad \alpha x + \beta y + \theta z = 0$ (4)

Multiplicando (3) por x e (4) por a, obtemos:

$\alpha ax + \beta bx + \theta cx = 0$ (5) $\quad \alpha ax + \beta ay + \theta az = 0$ (6)

Calculando (5) - (6): $\beta(bx - ay) + \theta(cx - az) = 0 \rightarrow \frac{\beta}{(cx - az)} = \frac{\theta}{(ay - bx)}$ (7)

Multiplicando (3) por y e (4) b, obtemos:

$\alpha ay + \beta by + \theta cy = 0$ (8) $\quad \alpha bx + \beta by + \theta bz = 0$ (9)

Calculando (9) - (8): $\alpha(bx - ay) + \theta(bz - cy) = 0 \rightarrow \frac{\alpha}{(bz - cy)} = \frac{\theta}{(ay - bx)}$ (10)

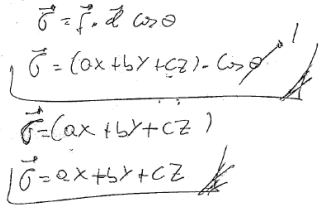
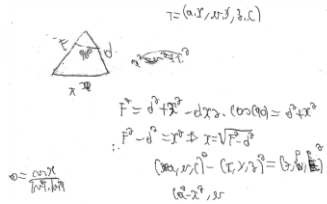
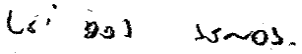
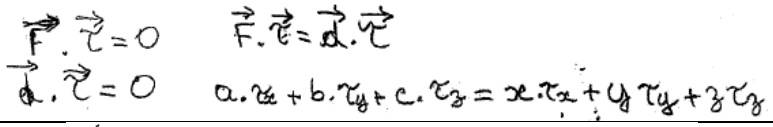
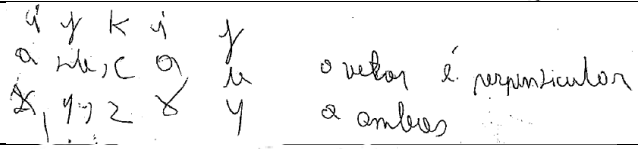
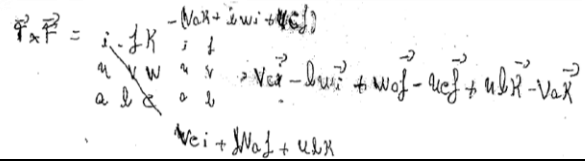
Comparando (7) e (10): $\frac{\alpha}{(bz - cy)} = \frac{\beta}{(cx - az)} = \frac{\theta}{(ay - bx)} = k$ (11)

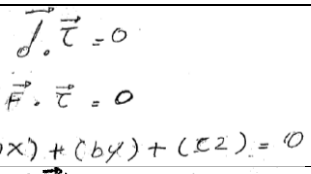
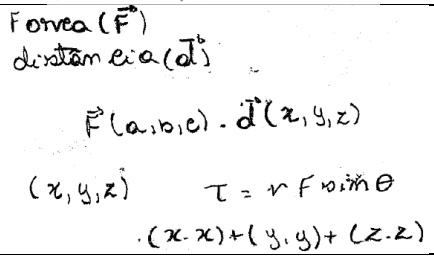
Fazendo $k = 1$:

$\alpha = bz - cy \quad \beta = cx - az \quad \theta = ay - bx$

Logo: $\vec{\tau} = (bz - cy)\vec{i} + (cx - az)\vec{j} + (ay - bx)\vec{k} = \vec{F}\ x\ \vec{d}$

Em forma de determinante: $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$

Aluno	Resolução dos Alunos
A1	
A2	
A3	
A4	
A5	
A6	

A9	NF
A10	
A11	

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Portanto, como previsto, para essa atividade, a maioria dos alunos não obteve êxito na resolução; dois alunos, A5 e A6, resolveram aplicando diretamente a equação do produto vetorial com alguns equívocos. No mais, foi possível perceber a tentativa de utilizar conceitos anteriores visto em produto escalar e da condição de ortogonalidade; outros, ainda, tentaram aplicar a fórmula do produto escalar. O Quadro 83 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das respostas adaptado de Santos (2020).

Quadro 83 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 12

Classificação das Respostas	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	0	0%
VPND	2	22%
VNPND	0	0%
NVPND	6	67%
NVNPND	0	0
NF	1	11%
Total	**9**	**100%**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Da mesma forma que na atividade anterior, as repostas consideradas VPND são as que aplicaram, de forma direta, o produto vetorial; as NVPND são aquelas que, embora incorretas, eram previsíveis de acontecer. No entanto, todas as tentativas de resolução apresentadas nos dão indício do entusiasmo e melhora da confiança dos alunos diante da resolução de problemas que, apesar, da dificuldade do problema não se sentiram intimidados em tentar solucioná-lo.

Por fim, foi proposta a atividade 13, que foi resolvida em 32 minutos e teve por objetivo definir produto misto. Alguns alunos resolveram pela aplicação direta de produto misto; outros chegaram a área da base, pois esse conteúdo já havia

sido aprendido no assunto de Produto Vetorial, porém não conseguiram encontrar a altura. O Quadro 84 apresenta a resolução esperada e a apresentada pelos alunos.

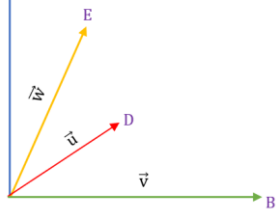
Quadro 84 - Resolução esperada e forma como os alunos tentaram resolver a Atividade 13

Resolução Esperada

Por definição, o volume do paralelepípedo é V = S x h, sendo S = área da base (paralelogramo) e h= altura

b) Pelo produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ é igual a área do paralelogramo e resulta em um vetor perpendicular a este, tal como, representado na figura

$|\vec{u} \times \vec{v}|$ Logo, $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ (2)

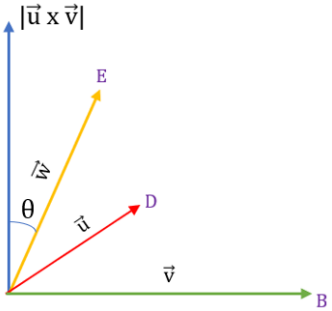


b) Para encontrar h:

Portanto: $h = ||\vec{w}|cos\theta|$ (3)

Pelo produto escalar: $\cos\theta = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}|.|\vec{w}|}$ (4)

Aplicando (4) em (3): $h = \vec{w} . \frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}|.|\vec{w}|}$ (5)

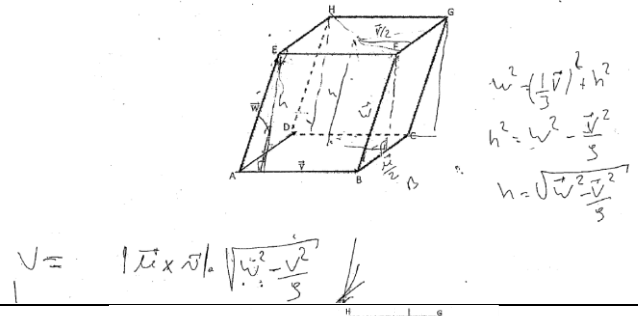
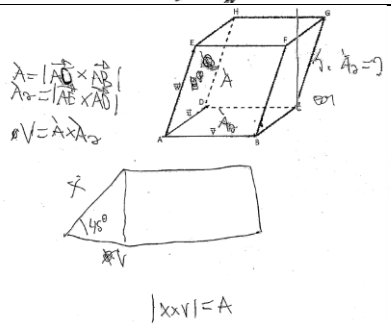


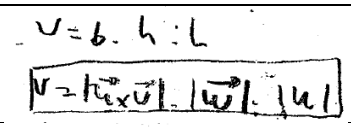
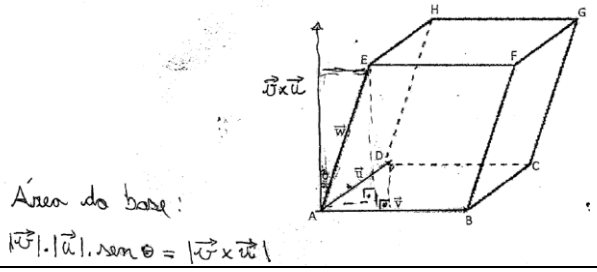
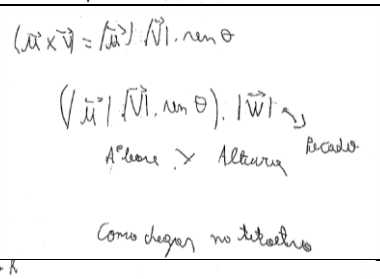
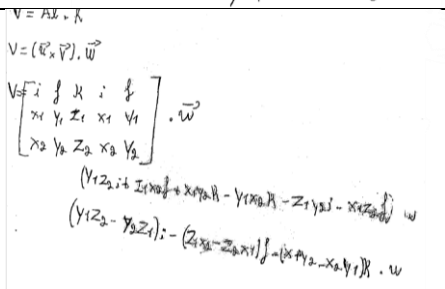
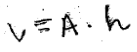
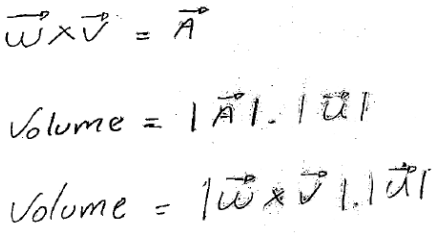
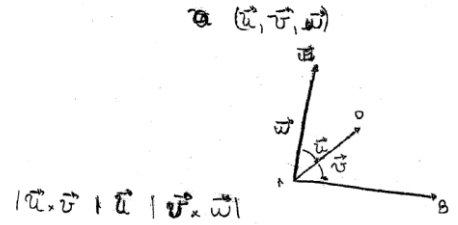
Logo, fazendo (5) e (2) em (1): $V = |\vec{u} \times \vec{v}|.|\vec{w}|.\frac{(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}|.|\vec{w}|}$, pós simplificação: $V = \vec{w} . |\vec{u} \times \vec{v}|$ → Produto Misto

Considerado $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$, $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ e $\vec{w} = (x_{\vec{w}}, y_{\vec{w}}, z_{\vec{w}})$, em forma de determinante:

$$V = \begin{bmatrix} x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} & z_{\vec{u}} \\ x_{\vec{v}} & y_{\vec{v}} & z_{\vec{v}} \\ x_{\vec{w}} & y_{\vec{w}} & z_{\vec{w}} \end{bmatrix}$$

Para o volume do paralelepípedo: $V = \left|\begin{bmatrix} x_{\overrightarrow{AE}} & y_{\overrightarrow{AE}} & z_{\overrightarrow{AE}} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{AD}} & y_{\overrightarrow{AD}} & z_{\overrightarrow{AD}} \end{bmatrix}\right|$

Aluno	Resolução dos Alunos
A1	
A2	

A3	
A4	
A5	
A6	
A9	
A10	
A11	

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Dos resultados podemos perceber que os alunos que conseguiram resolver a questão foram os que sabiam a fórmula do produto misto e a relacionaram, imediatamente, com os vetores dados; nesse caso, as suas repostas foram classificadas como VPND.

Os que não aplicaram o produto misto diretamente, que era a intenção do problema, partiram da fórmula de volume e tiveram muitas dificuldades em encontrar a altura do tetraedro; contudo, como não chegaram ao resultado suas respostas foram consideradas NVPND. Outros erros foram encontrados, porém serão destacados na etapa de validação. O Quadro 85 apresenta o valor absoluto e relativo (%) das respostas adaptado de Santos (2020).

Quadro 85 - Quantidade e Percentual das Respostas Finais para a Atividade 13

Classificação das Respostas	**Quantidade**	**Percentual**
VPD	0	0%
VPND	2	22%
VNPND	0	0%
NVPND	7	78%
NVNPND	0	0%
NF	0	0%
Total	**9**	**100%**

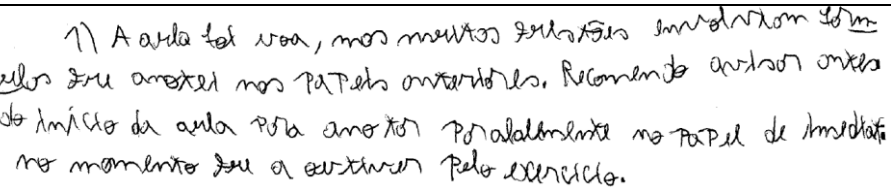
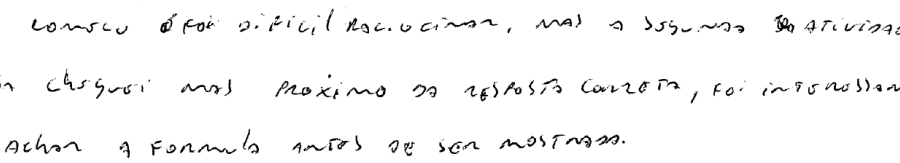
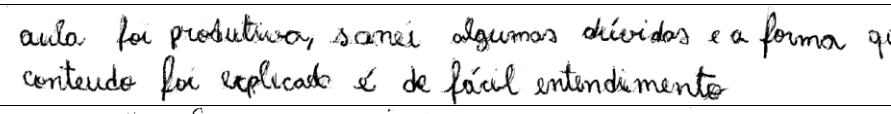
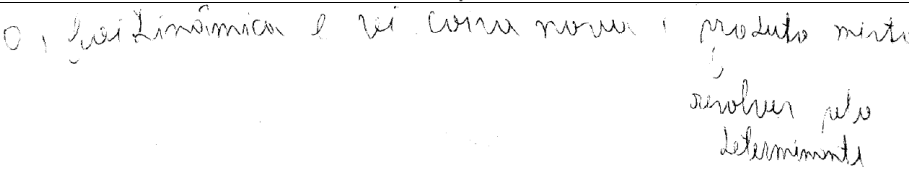
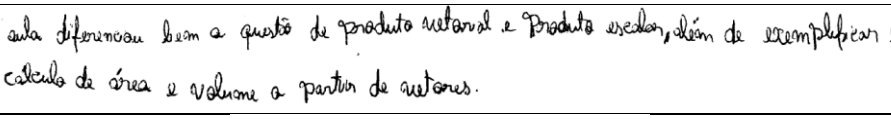
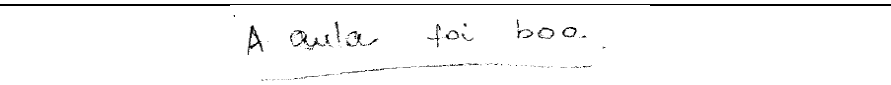
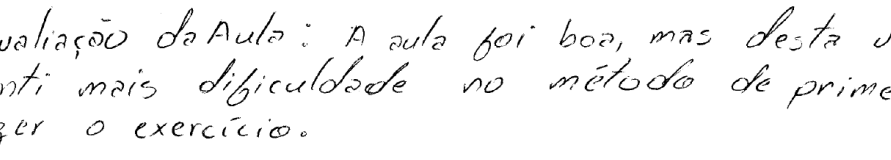
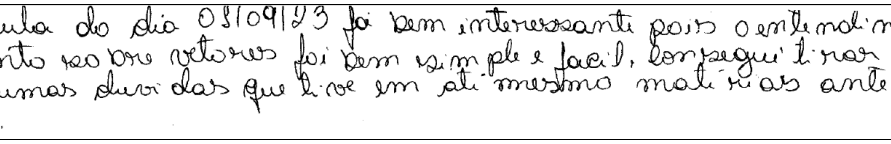
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Ainda, assim, como nas atividades anteriores, 12 e 13, há de se exaltar o fato dos alunos ao menos tentarem resolver a questão o que demonstra entusiasmo, motivação e autoconfiança, ainda que, poucos, tenham conseguido apresentar uma resposta final, mesmo que, por métodos diretos utilizando conhecimentos anteriores, o que destaca a capacidade de conexão dos discentes.

Vale ressaltar que ao final de cada atividade, várias questões foram resolvidas em sala; algumas por mim, professora, e, outras, pelos alunos após a resolução de alguma similar. Além disso, foi realizada a avaliação da aula no fim da sessão, conforme mostra o Quadro 86 com as respostas por aluno, algumas respostas foram transcritas para melhor entendimento.

Quadro 86 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 5)?

Alu No	Como você avalia a aula de hoje?
A01	O método de Aprendizagem foi muito bom e de fácil entendimento, porém, dependendo da turma será necessário um Pré-cálculo. Agradeço pelo excelente trabalho realizado

A02	 **Transcrição**: 1) A aula foi boa, mas muitas questões envolviam fórmulas que anotei nas partes anteriores. Recomendo avisar antes do início da aula para anotar paralelamente no papel de imediato no momento [sic] pelo exercício.
A03	 **Transcrição**: O começo foi difícil raciocinar, mas a segunda atividade já cheguei [mas] próximo da resposta correta, foi interessante achar a fórmula antes de ser mostrada.
A04	
A05	 **Transcrição**: A aula foi dinâmica e veio coisa nova, produto misto → resolver pelo determinante.
A06	
A09	
A10	
A11	

Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa

Em relação a avaliação da aula pelos alunos, pode-se perceber o destaque para a facilidade de aprendizado e a forma diferente de apresentar o conteúdo; sobre as dificuldades relatadas pelos alunos, já era previsível, devido a própria natureza e nível das atividades; no mais, em nenhum momento, algum aluno destacou falta de motivação ou de ânimo por não conseguir solucionar os problemas, muito pelo contrário.

Portanto, sobre as atividades dessa sessão, todas eram do mesmo tipo e com a previsão inicial de que os alunos não conseguiriam resolvê-las, o que foi confirmado; de fato, o principal ganho dessas atividades foi que os alunos perceberam que eles já possuíam as ferramentas necessárias para resolver a maioria dos problemas e ficaram surpresos com esse fato também.

Mais uma vez, como na sessão anterior, o sentimento é de satisfação pela forma como os alunos olharam as atividades e como as enfrentaram utilizando as “armas” que tinham.

5.6. SEXTA SESSÃO DO EXPERIMENTO: REVISÃO E QUIZ TEÓRICO

Essa sessão foi dedicada exclusivamente para a revisão dos conteúdos através da resolução de 09 (nove) questões. Ao final, foi aplicado o Quiz de caráter teórico sobre o assunto; tendo sido realizada em uma aula extra com duração total de 100 minutos e teve a participação de 07 (sete) alunos da turma.

A resolução de questões teve duração de 50 minutos. Inicialmente, cada exercício era apresentado aos alunos com um breve tempo para análise e proposição da solução juntamente comigo, a professora. Algumas questões foram retiradas dos exercícios propostos para casa e a maioria delas tinha algum contexto físico para que os alunos pudessem visualizar a aplicação do assunto estudado, em especial, a 9ª (nona) que possibilitou revisar a maior parte do conteúdo.

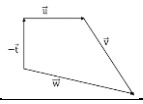
Ao final da resolução dos exercícios, foi proposto aos alunos a resolução de um Quiz aplicado a partir da plataforma https://quizizz.com; para cada questão era dado o tempo de 30 segundos programados previamente no *website*, simulando um jogo online.

Vale ressaltar que ao final de cada resposta do tipo Verdadeiro ou Falso, o Quiz informava ao aluno se havia acertado ou não e, também, mostrava a resposta correta, caso o aluno tivesse errado. Os alunos tinham, apenas, uma tentativa por questão.

O Quadro 87 apresenta as questões, o assunto abordado e a aproveitamento por aluno, sendo **C** para os acertos e **E** para os erros, sombreadas de amarelo e vermelho, respectivamente; as colunas dos alunos estão organizadas da maior para a menor pontuação.

Quadro 87 - Resultado do Quiz por aluno

Afirmações para avaliação	Assunto	Aluno						
		A4	A3	A2	A6	A1	A7	A8
1.As grandezas escalares possuem somente magnitude, enquanto as vetoriais possuem direção, sentido e magnitude.	Diferenciar grandezas	C	C	C	C	C	C	C
2. O deslocamento de um ponto A até um ponto B é dado por A – B.	Deslocamento	C	E	C	C	C	E	C
3. Dado um deslocamento de A até B, o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é o conjunto de deslocamentos de A até B.	Deslocamento	C	C	C	C	E	C	C
4. Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ seu módulo é obtido por $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$.	Módulo	C	C	C	C	C	C	C
5. Dois vetores são paralelos se suas componentes são proporcionais.	Vetores Paralelos	C	C	C	E	C	C	C
6. O vetor unitário é um vetor paralelo a um dado vetor $\vec{t}$ com a magnitude igual a de $\vec{t}$.	Vetor Unitário	E	C	E	C	C	C	E
7. Ao multiplicarmos um vetor por um escalar, seu módulo também é multiplicado por esse mesmo escalar.	Multiplicação por um escalar	C	C	C	C	C	C	C
8. O módulo do produto escalar é dado por $\lvert\vec{u}x\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert \mathrm{sen}\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.	Produto Escalar	C	C	C	C	E	E	E
9. Para calcular o menor ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é necessário encontrar o $\arccos \frac{\lvert\vec{u}x\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}$.	Ângulo entre vetores	C	C	E	E	C	C	C
10. A adição de um vetor com o seu oposto resulta em um vetor nulo.	Vetor Oposto	C	C	C	C	C	C	C
11. A multiplicação de um vetor por um escalar a, sendo a<0, resulta em um vetor de mesma direção, porém de sentido oposto.	Multiplicação de um vetor por um escalar	C	C	E	C	C	C	E
12. Podemos afirmar que três vetores são coplanares se o produto misto entre estes for igual a 0 (zero).	Vetores Coplanares	C	C	C	C	C	C	C
13. O volume de um tetraedro definido por três vetores é igual ao módulo produto vetorial entre estes.	Produto Misto	C	E	C	C	C	E	E
14. O resultado do produto misto é um vetor.	Produto Misto	C	C	C	C	C	E	C
15. O produto vetorial de dois vetores resulta em vetor	Produto Vetorial	C	C	C	C	C	E	C

perpendicular a estes, simultaneamente.								
16. A área de um paralelogramo definido por dois vetores é dada pelo módulo do produto escalar entre estes.	Produto Vetorial	C	C	C	E	E	C	E
17. O produto escalar entre dois vetores perpendiculares é igual a 0 (zero).	Vetores Perpendiculares	C	C	C	C	C	E	E
18. O resultado do produto escalar é uma grandeza vetorial.	Produto Escalar	C	C	C	C	C	C	C
19. Dada a figura: O vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{t}$. 	Adição Vetorial	C	C	C	C	E	C	E
20. Dado o vetor $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; os versores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ indicam o sentido de $\vec{u}$.	Sentido e Direção	E	C	C	E	E	E	E
Aproveitamento por Aluno (%)		**90 %**	**90 %**	**85 %**	**80 %**	**75 %**	**65 %**	**60 %**

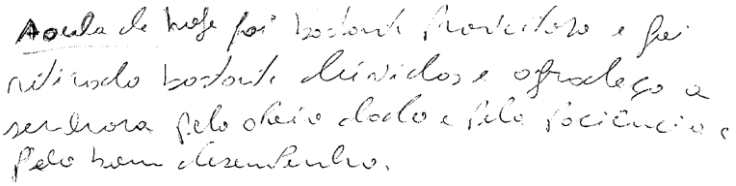
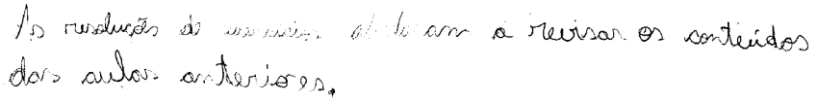
Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa

O índice de aproveitamento geral do Quiz foi de 78%. Contudo, a resposta incorreta em algumas questões suscitou a possibilidade de verificação dos conceitos e a retificação de outros, tais como, direção e sentido e o significado das operações vetoriais de produto. O importante, nessa situação, é a constatação e a compreensão do erro para superá-lo e, assim, provocar a (re)construção do conhecimento.

Ao final da aula, os alunos mostraram-se satisfeitos com os resultados e com aprendizado, pois várias dúvidas foram tiradas para a realização do pós-teste e, também, foi solicitado a eles uma avaliação da aula. O

Quadro 88 mostra as avalições dessa sessão pelos estudantes, algumas transcrições foram feitas para melhor entendimento.

Quadro 88 - Como você avalia a aula de hoje (sessão 6)?

Aluno	Como você avalia a aula de hoje?
A01	 **Transcrição**: A aula de hoje foi bastante produtiva e foi retirado bastante dúvidas e agradeço a senhora pelo apoio dado e pela paciência e pelo bom desempenho.
A04	

	Transcrição: As resoluções dos exercícios ajudaram a revisar os conteúdos das aulas anteriores.
A05	① Cheguei corrido e atrasado, não sei bem como ~~avale~~ avaliar devido estar agitado, porém foram boas explicações, ou seja, bem diretas.
A07	aula muito produtiva, desempenho de aprendizado muito bom,
A08	A aula foi boa, a proposta do quizz foi interessante pois faz a gente buscar todos os conhecimentos que foram passados.
A10	~~A~~. A didática usada até o momento é de fácil entendimento. A revisão ajudou a fixar os conceitos e a compreender.

Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

As avaliações nos indicaram que a aula teve um bom aproveitamento, ressaltando a importância do Quiz como meio de revisar os conceitos, sobretudo, teóricos, dos assuntos estudados e como forma de autoavaliação dos estudantes e fixação dos conceitos.

Além disso, a resolução de questões de revisão ajudou a sanar dúvida. Como docente, essa sessão, confirmou que práticas como a resolução de questões, revisão e a agregação de métodos diferentes são necessários e importantes para o aprendizado.

5.7. SÉTIMA SESSÃO DO EXPERIMENTO: APLICAÇÃO DO PÓS-TESTE

Na sétima e última sessão foi realizada a aplicação do pós-teste com as mesmas questões do teste inicial (pré-teste) para a realização do diagnóstico final. Foi utilizada uma aula extra de 100 minutos, tempo disponível e utilizado pelos alunos para resolver as questões. Todos os alunos estavam presentes.

5.8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA EXPERIMENTAÇÃO

O experimento foi realizado em uma turma de 11 alunos que estava cursando Cálculo IV no 4º período de Engenharia Elétrica, do IFPA/ Campus

Belém, a partir da colaboração e consentimento do professor da disciplina em ceder algumas aulas para a aplicação dos instrumentos de pesquisa.

Para tanto, foram realizadas 7 sessões, incluindo as do pré e pós-teste, totalizando 20 aulas de 50 minutos cada. Todos os alunos aceitaram participar da pesquisa e aceitaram as condições propostas.

Dentre outras características, o perfil da turma, como esperado, era predominantemente do sexo masculino, apenas, 3 (três) representantes do sexo feminino; a maioria se autodeclarou parda. Em sua maioria, as idades estavam entre 18 e 21 anos, disseram ser solteiros, sem filhos e com formação de ensino médio em escola púbica, alguns, com formação em nível técnico.

Em relação a escolha da profissão, a escolheram de forma consciente e os motivos que os fizeram tomar essa decisão foram, dentre outros: identificação com o curso, obtenção de emprego, relação com o trabalho, etc.

Sobre o perfil acadêmico grande parte já esteve em dependência em disciplinas da área de matemática e não tinham o hábito de estudar a disciplina todos os dias, apesar de gostarem dos conteúdos da área de matemática e quase sempre compreenderem as informações dadas, tinham as buscas na internet como principal aliada na resolução de tarefas.

Sobre o ensino na engenharia destacaram o método de teoria, seguida de exemplos e exercícios e avaliações por meio de provas escritas e individuais. Em relação as emoções de aprendizagem e desempenho na matemática os alunos mostraram ter prazer e orgulho em relação as diversas situações que envolviam a matemática e, também, poucos ansiosos, porém com raiva ao não entenderem alguns assuntos e preocupados com as notas.

Contudo, não expressaram vergonha em não entender, não resolver, não saber e em solicitar ajuda sobre os conteúdos; mas, disseram poder ficar encabulados ao errar um problema de matemática que os outros acertam ou quando participam de um trabalho de matemática em equipe e não sabiam nada do assunto. No mais, os alunos, aparentemente, acreditavam em suas habilidades cognitivas em matemática e na sua auto atribuição.

Na primeira sessão, os alunos ficaram surpresos em ter que realizar um pré-teste sem antes ter visto o conteúdo, porém não se opuseram e mostraram-se tranquilos e pouco apreensivos ao realizá-lo. Sobre a experimentação foram aplicadas 13 atividades dos seguintes tipos: atividade experimental de

conceituação (atividades 01, 02); atividade experimental de conceituação com questão problema ao final (atividades 03, 04 e 05); RPPP atrelada a uma atividade de conceituação (atividade 06); atividade experimental de redescoberta (atividade 09) e RPPP (atividades 07, 08, 10, 11, 12 e 13).

A maioria das atividades de conceituação (01 – grandezas, 02 – deslocamento, 03 – definição de vetor, 04 – coordenadas de um ponto terminal, 05 – definir módulo) foram aplicadas nas primeiras sessões e foi possível perceber a dificuldade inicial dos alunos, como previsto, em elaborar as observações e as tentativas de resolvê-las por meio de conhecimentos anteriores. Contudo, com o andamento perceberam que toda e qualquer observação deveria ser construída a partir da proposta da atividade; nas que tinham a questão problema ao final foi perceptível o direcionamento à observação esperada.

Em relação a atividade de RPPP atrelada a uma atividade de conceituação (06 – adição vetorial), a primeira parte (o problema) não constituiu-se como um problema em si, mas como uma questão, pois os alunos conseguiram resolvê-la por meio dos conhecimentos vistos nas atividades anteriores, mas serviu como subsídio e motivador para a resolução da parte experimental de conceituação que, apesar de trabalhosa, levou a observações VPD e a definição e representação da soma vetorial como desejado.

Na atividade experimental de redescoberta, sobre paralelismo entre vetores, o desempenho foi como desejado, apesar dos alunos não conseguirem relacionar a observação e a conclusão, causando certa confusão entre elas; o que era previsto de acontecer por ser a primeira atividade desse estilo.

As de RPPP (07 - vetor oposto, 08 - multiplicação por um escalar, 10 - vetor unitário, 11 - produto escalar, 12 - vetorial e 13 - misto), à exceção, das 07 e 08, constituíram-se, de fato, em problemas aos alunos por não conseguirem solucioná-las. A resolução destas apresentou aos alunos a visão de que os conteúdos necessários para a resposta já lhes tinham sido apresentados, o que provocou surpresa e entusiasmo aos mesmos por perceberem que de uma simples aplicação pode-se chegar a uma definição que, muitas vezes, é somente apresentada.

Por fim, durante a realização do pós-teste não foi possível perceber situações de nervosismo ou apreensão. Vale ressaltar que, além das atividades

alguns momentos e algumas sessões foram reservados a resolução de questões, revisão e aplicação de um Quiz.

Após a finalização da etapa de experimentação, uma das impressões foi que os alunos foram entendendo a metodologia a medida em que as atividades eram propostas e já tentavam resolvê-la sem necessitar da minha intervenção (professora), mas sempre interagindo e discutindo com os colegas naquelas que eram realizadas em grupo, além de estar sempre dispostos e animados, sem demonstrar cansaço ou insatisfação com a proposta de ensino.

Outro destaque é em relação a própria resolução das atividades, com o andamento das aulas passaram a concentrar-se, apenas, nela, sem buscar tantos conhecimentos anteriores acerca de vetores geométricos e fazendo a leitura do roteiro centrando-se no título e objetivo para resolvê-la e escrever a observação/conclusão e/ou questão problema.

Portanto, a etapa de experimentação nos levou a inferir que o método de ensino deixou aos alunos uma nova concepção de ensinar e de aprender ao ouvir comentários como “desse modo não precisa realizar tantos cálculos”, “Se tivessem resolvidos tantas questões não teria reprovado”, “Professora, ministre a disciplina de Eletromagnetismo pra gente” ou, em relação aos testes, “É muito interessante resolver as mesmas questões antes e depois de aprender um assunto”, dentre outras coisas. Aspectos como esses e os relacionados a proposta de teste serão analisados e validados ou não na próxima seção.

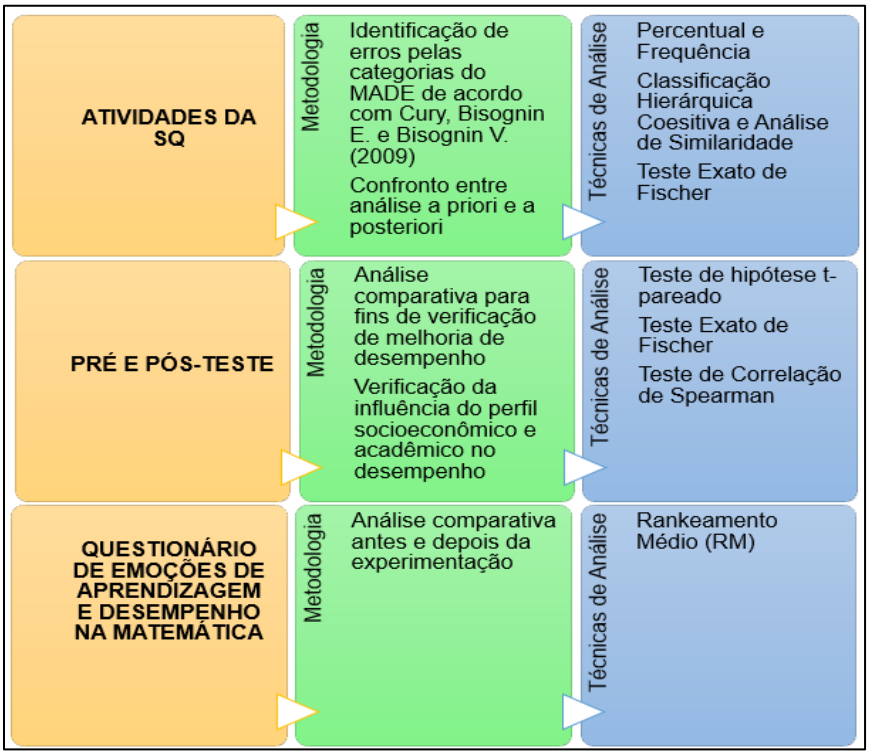
6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

O processo de validação do experimento se deu por meio do confronto entre a análise a *priori* e a *posteriori* e pela verificação das hipóteses feitas no início da pesquisa. Para tanto, essa fase centrou-se em três aspectos principais:

1. Atividades da SD: com a finalidade de identificar, prioritariamente, aspectos relacionados ao desenvolvimento da análise, dedução, domínio e autonomia dos estudantes, tendo como suporte a verificação de erros e técnicas quanti e qualitativas; culminando com o confronto entre a análise a *priori* e a *posteriori*;
2. Pré e Pós-teste: com o objetivo de comparar o desempenho antes e depois da aplicação da SD, essa discussão é permeada em três subseções - uma que tem por foco a análise qualitativa de cada uma das questões dos testes; outra que verifica o desempenho individual e, por último, a que dá ênfase as técnicas estatísticas para fins de comprovação e confirmação das observações e conclusões feitas anteriormente e verificação da relação entre o desempenho e o perfil socioeconômico e acadêmico dos participantes da experimentação;
3. Questionário de Emoções de Aprendizagem e desempenho na Matemática: para verificar alterações no comportamento emocional dos estudantes antes e depois da aplicação da SD.

Vale ressaltar que todos os esclarecimentos necessários sobre os métodos específicos utilizados serão descritos no início de cada de subseção para facilitar o entendimento. No mais, considerando, ainda, a diversidade de técnicas de análise já destacadas na metodologia, o Quadro 89 mostra a quais recorreu-se para a verificação de cada um dos aspectos citados.

Quadro 89 - Técnicas estatísticas e a Análise de dados



Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Em relação a verificação da tese, em termos da melhora do desempenho, análise, dedução, domínio, autonomia e emoções a partir da aplicação da SD, as discussões tiveram como embasamento teórico, prioritariamente, os autores base e categorias elencadas na seção referente a metodologia da pesquisa e, ao final, será apresentado um quadro com o efeito observado em cada característica citada para fins de validação da tese. A seguir os resultados das análises são apresentados.

6.1. VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A validação da sequência didática teve por base principal a análise de erros dos alunos nas atividades considerando a sua importância em termos de verificação da aprendizagem e, nesse caso, especialmente, da estratégia de ensino utilizada, tal como exposto nas Análises Prévias.

Também, foram verificados os campos de observações/conclusão, de forma global, considerando a classificação já realizada na fase de experimentação, o tempo de resolução das atividades e, por fim, o confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori*.

Para tanto, para um melhor entendimento e para facilitar a análise comparativa das atividades e desempenho dos estudantes, as 13 atividades da sequência didática foram categorizadas de acordo com a tendência de ensino utilizado, quais sejam, atividade de:

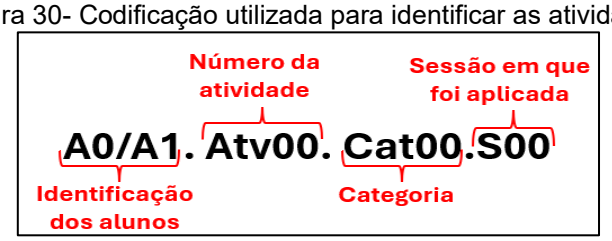
1. ensino experimental padrão: atividades 01, 02, 06 (parte relativa à atividade de ensino) e 9;
2. ensino experimental com questão problema ao final: atividades 03, 04 e 05;
3. resolução de problemas com previsão de resolução pelos alunos: atividade 06 (parte relativa a RPPP), 07 e 08; e
4. resolução de problemas sem previsão de resolução pela alunos: atividades 10, 11, 12 e 13.

O termo “padrão” foi utilizado para a categoria 01 por seguir a estrutura proposta por Sá (1999, 2019, 2020) com o campo observação/conclusão ao final; em contrapartida, as da Categoria 2 por trazer uma questão ao final ao invés do campo observação/conclusão. As das categorias 03 e 04 diferenciam-se devido a previsão na análise a *priori* de resolução ou não pelos alunos, respectivamente.

Outra consideração a ser feita, é em relação as atividades do tipo conceituação e redescoberta (atividade 09); para fins de validação optou-se por analisá-las em uma única categoria (categoria 01) por se tratar da mesma tendência em educação matemática e, pelo fato de que, apenas, uma de redescoberta foi realizada e, dessa forma, não seria possível acompanhar o processo de evolução dos alunos.

Para facilitar, foi definida uma codificação para identificar as atividades, contendo, além da categoria, a identificação dos alunos, do número da atividade e da sessão em que foi aplicada. A Figura 30 apresenta o formato de codificação utilizado com a discriminação de cada campo.

Figura 30- Codificação utilizada para identificar as atividades



Fonte: elaborado das atividades propostas na “Concepção e Análise a *priori*”

Especificamente, para a atividade 06, que é composta por uma questão de RP e uma de conceituação, o número da atividade foi codificado da seguinte forma: Atv06.1, para a parte relativa a RP; e Atv06.2, relativa à atividade de conceituação; essa diferenciação se faz necessária para que cada parte seja analisada individualmente. O Quadro 90 apresenta as atividades classificadas segundo as categorias apresentadas e sua codificação.

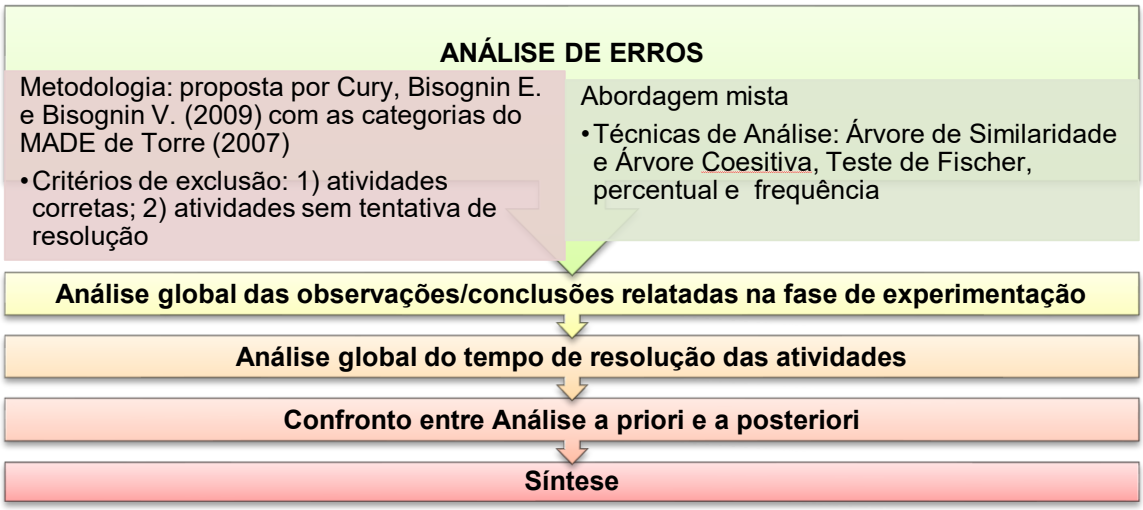
Quadro 90 - Quantidade de atividades da sequência didática por tipo

Categoria	Atividades	Codificação
01 – Atividade de Ensino Experimental padrão	01 Diferenciar e caracterizar grandezas	Atv01.Cat01.S1
	02. Conceituar deslocamento	Atv02.Cat01.S1
	06. Adição de vetores (parte relativa a atividade de ensino)	Atv06.1Cat01S2
	09. Definição de vetor paralelo	Atv09.Cat01.S4
02 – Atividade de Ensino Experimental com questão problema ao final	03. Definir vetor	Atv03.Cat02.S2
	04. Coordenadas de um ponto	Atv04.Cat02.S2
	05. Definir módulo de um vetor	Atv05.Cat02.S2
03 – Atividade de resolução de problemas com previsão de resolução	06. Adição de vetores (parte relativa a RP)	Atv6.2.Cat03.S2
	07. Definir vetor oposto	Atv07.Cat03.S3
	08. Multiplicação por um escalar	Atv08.Cat03.S4
04 – Atividade de resolução de problemas sem previsão de resolução	10. Vetor unitário	Atv10.Cat04.S4
	11. Produto escalar	Atv11.Cat04.S5
	12. Produto vetorial	Atv12.Cat04.S5
	13. Produto misto	Atv13.Cat04.S5

Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Por fim, o Quadro 91 apresenta a metodologia de validação das atividades por categoria.

Quadro 91 - Metodologia de Validação das atividades por Categoria



Fonte: elaborado a partir da análise dos dados

Assim, como complementação, esclarece-se que: foram consideradas corretas atividades cujo TODO procedimento foi isento de quaisquer tipos de erro, bem como, as conclusões/observações foram consideradas VPD. Todas as técnicas estatísticas utilizaram critérios já estabelecidos e descritos na seção de Metodologia da Pesquisa; o quadro detalhado do MADE para cada categoria consta no Apêndice N.

Para a utilização do software CHIC, as variáveis do MADE foram codificados de acordo com os critérios exigidos pelo programa. O Quadro 92 apresenta a codificação utilizada; optou-se por definir as variáveis de forma completa (categoria, subcategoria e tipo) para facilitar a identificação. Os alunos/atividades foram codificados tal como descrito anteriormente.

Quadro 92 - Codificação do MADE utilizando o CHIC

Variável	Codificação
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das intenções, tipo **Indefinição de Metas**	Indef-Metas
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das intenções, tipo **Incompreensão ou Confusão do objetivo ou da intenção.**	Incomp-Confusao-obj-intencao
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das intenções, tipo **Conflito de objetivos ou Desvio de metas fixadas.**	Conf_Obj-Des_Met
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Omissão de Informação suficiente**.	Omis-infor-sufc
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Relação de redundância e de Omissão**.	Red_omis
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Distorção**.	Distorcao
Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, tipo **Erro de Compreensão**	Compreensao
Erro de Organização da Informação, tipo **Erro de Análise e Síntese**	Anal_Sint
Erro de Organização da Informação, tipo **Erro de Ordenação**	Ordenacao
Erro de Organização da Informação, tipo **Erro de Conexão e Interferências**	Conex_Interf
Erro de Execução, tipo **Erro Mecânico ou Lapso**	Mecanicos_Lapsos
Erro de Execução, tipo **Erro Operacional e de Distração**	Oper_Distracao
Erro de Execução, tipo **Erro Estratégico**	Estrategicos

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Ao final da verificação de cada categoria, foi feita uma síntese dos principais pontos analisados; além disso, considerando que, algumas categorias são similares por abordarem a mesma técnica de ensino, após o término da discussão da categoria 2, um texto comparando os principais achados em

relação a categoria 1 é apresentado; o mesmo foi feito em relação as categorias 3 e 4.

Após o confronto entre a análise a *priori* e a *posteriori*, ainda, para fins de validação da tese e de acordo os resultados verificados, também, foi apresentada uma discussão a partir dos pressupostos teóricos a fim de destacar os aspectos relacionados a melhora da análise, da dedução, do domínio e da autonomia, dos alunos, dentre outros. A seguir os resultados são apresentados.

6.1.1. Análise das atividades da Categoria 1

Para a Categoria 1 (Atividade de ensino experimental padrão) as atividades 01, 02, 06.2 (parte 2) e 09 foram consideradas. O Quadro 93 apresenta o quantitativo de atividades corretas, parcialmente corretas, incorretas e o número de atividades que foram analisadas por meio do erro.

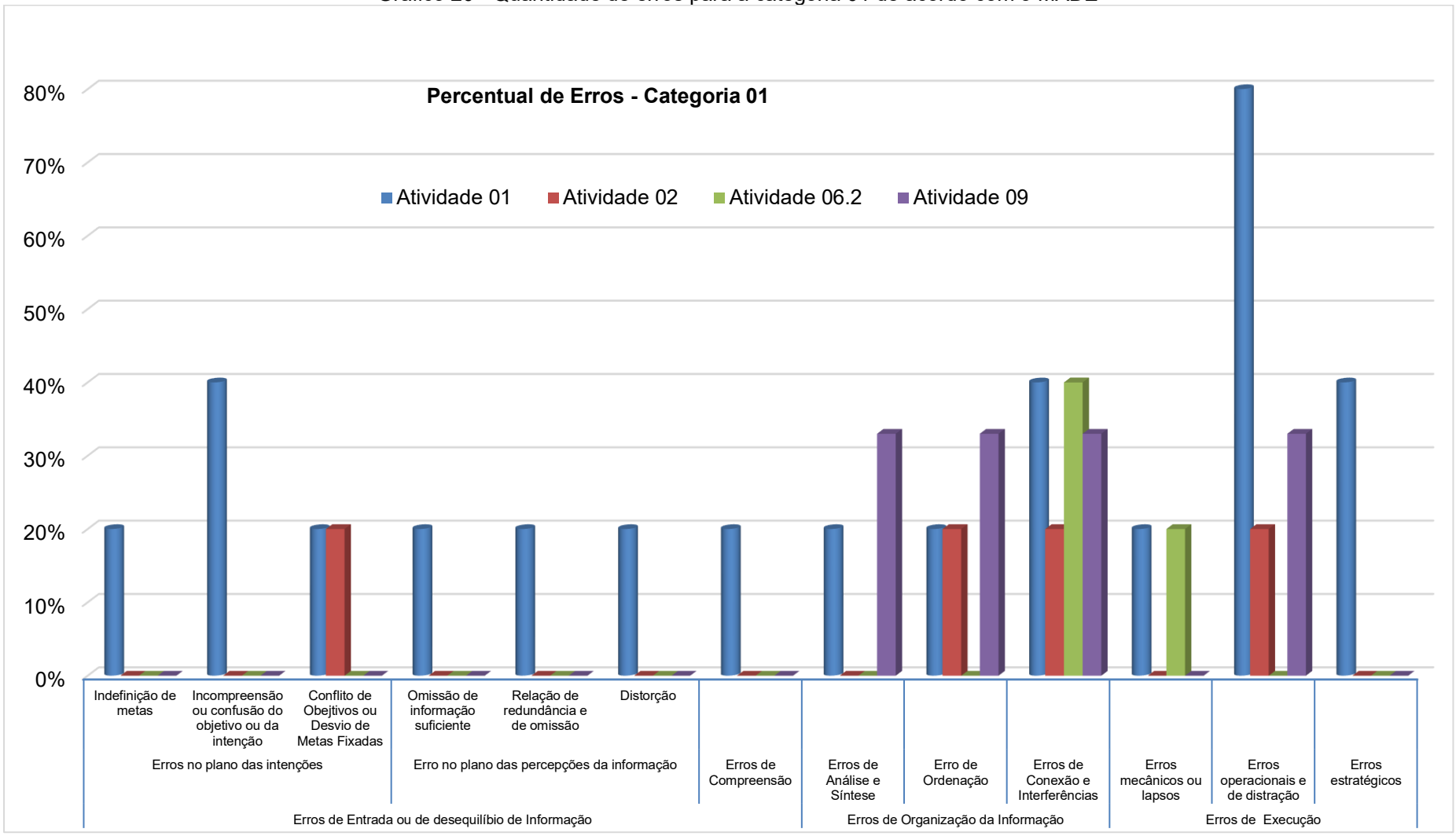
Quadro 93 - Quantitativo de atividades com erro - Categoria 01

Atividade	Número de Equipes	Atividades Corretas	Atividades Parcialmente Corretas	Atividades Incorretas	**Total de Atividades com erro**
01	05	0	04	01	**05**
02	05	02	03	0	**03**
06.2 (parte 02)	05	02	03	0	**03**
09	03	01	02	0	**02**
Totais	**18**	**05**	**12**	**01**	**-**
Total de Atividades com erro					**13**

Fonte: elaborado dos dados da pesquisa

Com a finalidade de avaliar e relacionar, tanto de forma quanti quanto qualitativa, o Gráfico 20 apresenta a quantidade de erros por atividade em percentual (devido a quantidade de equipes não serem a mesma ao longo das sessões).

Gráfico 20 - Quantidade de erros para a categoria 01 de acordo com o MADE



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A partir das informações produzidas, foi realizada uma análise das categorias de erros observadas, separadamente. Sobre os erros de Entrada ou Desequilíbrio de informação, quantitativamente, observou-se que uma maior quantidade de erros estavam presentes na atividade 01, especificamente, na categoria Plano das Intenções, comparando as tarefas 01 e 02.

De acordo com Torre (2007), o professor é o principal responsável pelos erros de intenção, nesse caso, devido a forma como as atividades foram apresentadas que não é o habitual o que pode justificar os erros no plano de intenções da categoria 01, assim como, os de percepção, que tem a metodologia docente e a capacidade discente como protagonistas. No entanto, nas 6.2 e 09 não foram observados erros dessa categoria caracterizando uma aproximação favorável dos alunos com a metodologia proposta.

Portanto, os poucos erros nos dão indícios de que a mediação feita por mim, como professora, foi favorável e de que as atividades cumpriram o seu objetivo didático e pedagógico. Tal como destacado nas análises prévias a mediação é uma das características da atividade proposta por Leontiev (2014) e Davydov (1988) e tem o professor como responsável, assim, essa quase ausência de erros, também, implica no eficaz estabelecimento do elo entre o aluno e o conhecimento de acordo com Libâneo (2004).

Dessa forma, os Erros de Entrada e de Desequilíbrio de Informação mais frequentes na atividade 01, já eram esperados, por ser o primeiro contato dos alunos com esse tipo de atividade. Nesse sentido, poderiam ter tido ainda mais ocorrência, caso não houvesse a interferência docente como mediadora explicando a atividade, sanando dúvidas e a direcionando por meio de questões motivadores para “indicar” de qual forma o campo observação deveria ser preenchido.

A subcategoria de erro no Plano das Intenções, tipo Conflito de Objetivos e Desvio de Metas Fixadas, tem erros tanto na atividade 01, quanto na 02, devido ao fato dos alunos sempre trazerem elementos para a observação ainda não tratados em sala de aula como, por exemplo, usar os termos direção e sentido, que já eram de seu “conhecimento”, ainda que, de forma equivocada, no caso da atividade 02; ou que não eram o objetivo principal da atividade, como a classificação de grandezas em escalares e vetoriais, no caso da atividade 01, esquecendo-se de caracterizar as grandezas apresentadas.

Contraditoriamente, nas análises prévias ao questionar os docentes e discentes sobre o grau de compreensão de alguns assuntos sobre vetores, ambos classificaram os conteúdos de direção e sentido de vetores no plano como “Fácil” ou “Muito Fácil”. Por outro lado, Kasahara e Sá (2023) descreveram que uma das dificuldades relatadas em um dos trabalhos pesquisados era a indicação da direção de um vetor e a diferenciação entre esse conceito e o de sentido.

De acordo com Bastos e Allevato (2018, p.5) os erros surgem durante o processo de ensino e aprendizagem, “construindo obstáculos que se manifestam na prática na forma de respostas equivocadas [...] a manifestação do erro indica que há alguma deficiência ou incompletude no conhecimento”.

Por fim, a atividade 09 apresentou Erros de Organização da Informação, pois por ser de redescoberta trazia os campos Observação e Conclusão que ocasionou uma certa confusão entre esses termos; vale ressaltar que, somente, uma equipe cometeu esse tipo de erro.

Sobre os erros do tipo Organização da Informação, que estão presentes em maior frequência, com destaque, para os Erros de Conexão e Interferências, presente em todas as atividades. Apenas, uma equipe ao realizar a Atividade 01, além desse erro, teve, ainda, os demais tipos.

Em relação aos demais tipos de erros, os de Ordenação foram identificados pela utilização inadequada da relação entre percurso e distância; e o de Conexão e Interferências ocasionados pelo mal uso de conhecimentos anteriores, que provocou confusão entre os termos direção e sentido e entre distância e deslocamento que não constituam o cerne da questão e nem estavam sendo exigidos ou trabalhados, até então, nas atividades.

Essas dificuldades de associar de forma correta conceitos advindos de outro nível de ensino, também, foi observado por Kasahara e Sá (2023) em um dos estudos sobre vetores com experimentação em sala de aula aplicado aos cursos de Engenharia e Arquitetura analisado nas Análises Prévias.

Os Erros de execução, também, foram identificados em todas as subcategorias; na atividade 01, concentraram-se na não caracterização das grandezas de forma correta ocasionado por problemas de interpretação do texto. Na atividade 02, apenas, erros de distração por não identificação de uma das componentes de forma correta foi visualizado. Na 06, aconteceu a troca de um

número por outro; e na 09, uma distração por classificar, apenas, um par de vetores de forma incorreta.

Cabe ainda, uma possível justificativa, para os erros mecânicos ou lapsos acontecidos na atividade 6.2: foi a quarta e última atividade realizada em uma aula de 4 tempos na sessão 2. Como explicado anteriormente, os tempos de cada sessão não foram acordados, mas já haviam sido definidos dessa forma no horário de aula, conforme informação do professor responsável pela disciplina de Cálculo IV.

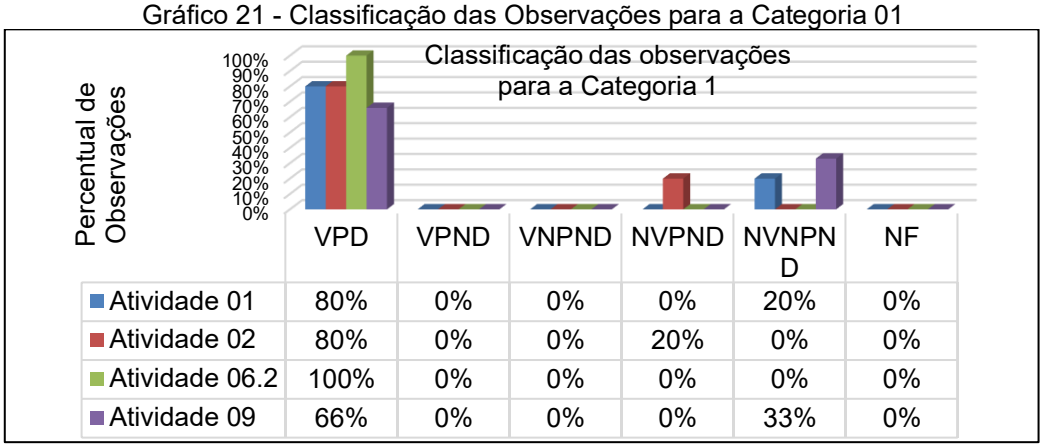
Em resumo, as atividades 01 e 02, que foram realizadas na sessão 01 e com a mesma composição de equipe, comparativamente, os erros diminuíram; especificamente:

- A5/A11Atv01Cat01S01, não realizou a atividade 01 de forma, inteiramente, correta. Entende-se que erros relacionados ao não entendimento da atividade, problemas de leitura e interpretação, ocasionaram erros de forma generalizada ao escrever uma observação sem percepção algumas dos elementos e características relevantes que diferenciavam as grandezas presentes na atividade, em consequência, também da execução incorreta do procedimento para resolução da atividade.
    - Contudo, esse fato aconteceu, apenas, na resolução da primeira atividade, o que confirma a hipótese de não entendimento da atividade e do método de ensino, inicialmente. Esses alunos não cometeram esses equívocos nas atividades subsequentes.
- A2/A4Atv09Cat01S04, para a atividade 09, apesar da realização do procedimento de forma correta, o que permite, de certa forma, justificar a ausência de erros de entrada ou de desequilíbrio de informação, ainda apresentou dificuldade na análise e síntese, ordenação e de conexão e interferências, ao não perceber a relação entre os vetores que deveria ter sido colocada no campo Observação, como as demais equipes fizeram.

Sobre o campo observação/conclusão das atividades, o Gráfico 21 apresenta as classificações das Observações realizadas pelos alunos para a

Categoria 01, de forma percentual, tal como observado e descrito na etapa de Experimentação.

Gráfico 21 - Classificação das Observações para a Categoria 01



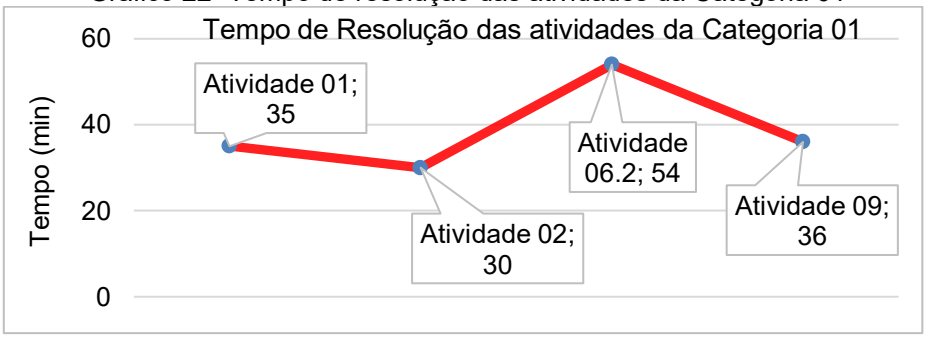
	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 01	80%	0%	0%	0%	20%	0%
Atividade 02	80%	0%	0%	20%	0%	0%
Atividade 06.2	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 09	66%	0%	0%	0%	33%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

De forma geral, é possível perceber que alguns problemas de organização da informação levaram a equívocos na escrita da observação da atividade; porém, nem sempre a invalidaram. No caso dessa categoria, alguns equívocos, da atividade 01 levaram a ponderações NVNPND. Evolutivamente, na atividade 06.2, que foi realizada na sessão seguinte às atividades 01 e 02, o percentual de acertos das observações foi de 100%. Por outro lado, na atividade 09, por ter características diferenciadas, teve uma observação NVNPND.

Sobre o tempo de resolução das atividades dessa categoria, em uma mesma sessão, é perceptível a redução do tempo de execução da atividade. O tempo da atividade 06 pode ser justificado por ser uma atividade, nitidamente, mais trabalhosa. Por outro lado, na atividade 09, o tempo voltou ao patamar da atividade inicial, porém não o superou de forma exorbitante. O Gráfico 22, ilustra os tempos utilizados para cada atividade.

Gráfico 22 -Tempo de resolução das atividades da Categoria 01



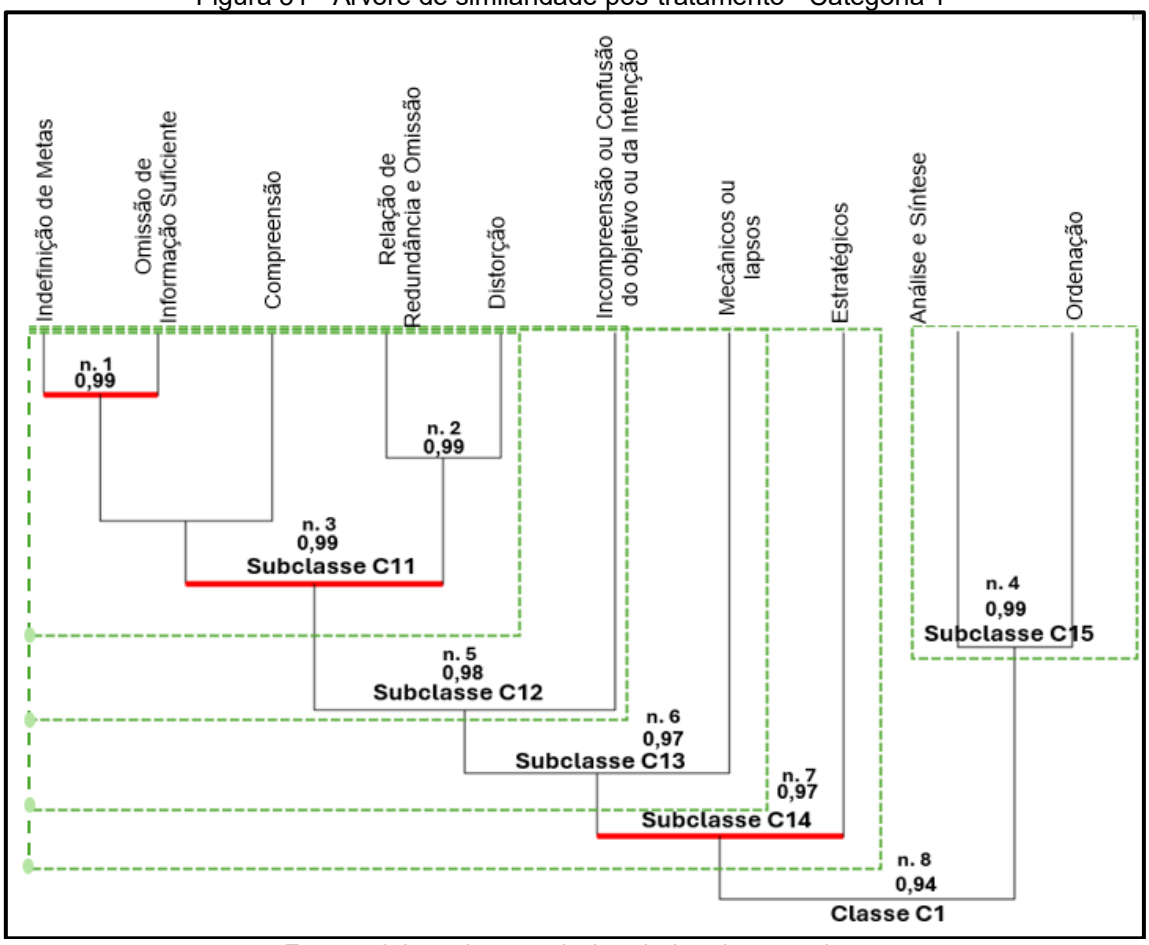
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Para complementar essa análise, a seguir, é apresentado o mapeamento estatístico dos dados por meio do CHIC e do teste de Fischer.

6.1.1.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 1

Para essa análise as variáveis suplementares foram as seguintes: Conf_Obj-Des_Met (Conflito de Objetivos ou desvio de metas fixadas), Anal_Sint (análise e síntese), Ordenacao (Ordenação), Conex_Interf (Conexão e interferências) e Oper_Distracao (Erros Operacionais e de Distração). A Figura 31 apresenta a árvore de similaridade após o tratamento; foram considerados, apenas, nós com similaridade acima de 0,9; os demais foram excluídos.

Figura 31 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 1



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A árvore de similaridade é constituída de uma Classe, classe C1, optou-se por definir várias subclasses para facilitar a análise devido ao encadeamento

de nós significativos. A variável típica é a mesma em quaisquer nós: Conex_Interf (Erro de Organização da Informação, subcategoria Conexão e Interferência) com risco de 0.0399. O sujeito típico para as subclasses de C11 à C14 é A5-A11Atv01Ca01S01; para a C15 são A5-A11Atv01Ca01S01 e A2-A4Atv09Ca01S4.

Para a subclasse C11, as associações entre as variáveis estão concentradas em erros relacionados a Entrada ou Desequilíbrio de Informação, sendo que, o n. 1 concentra equívocos no Plano das Intenções, tipo Indefinição de Metas, e no das Percepções, tipo Omissão de Informação Suficiente; o n. 2, somente, no Plano das Percepções entre os de Redundância e Omissão e de Distorção; o n. 3, entre o n.1 e os erros de Compreensão e, finalmente, 0 n.4 entre o n.3 e n.2.

Para a subclasse C12, há associação entre os equívocos do n.4 e os erros no plano das Intenções, tipo Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção. A subclasse C13, associa C12 com os erros de Execução, tipo mecânicos ou lapsos; e a C14, os da C13 com os de execução, tipo estratégicos. O Quadro 94 apresenta a interpretação desses resultados.

Quadro 94 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Categoria 2 - Subclasse C11 à C14.

Nó	Variáveis	Interpretação
n. 1	**Indef-Metas**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo Indefinição de Metas **Omis-infor-sufc**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções, tipo Omissão de Informação suficiente.	Os alunos que tiveram erro de Indefinição de Metas são os que tiveram erro do tipo Omissão de Informação suficiente.
n. 2	**Red_omis:** Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções, tipo Redundância e Omissão **Distorcao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das percepções da informação, tipo Distorção	Os alunos que tiveram erro de Redundância e Omissão são os que tiveram erro de Distorção.
n. 3	Associação entre as variáveis do n.1 e **Compreensão**: Erro de Compreensão, subcategoria Erro de Compreensão	Os alunos que tiveram erros caracterizados no n.1 são os que tiveram erro de compreensão.
n. 4	Associação das variáveis dos n.2 e n.3	Os alunos que tiveram equívocos do n.3 também tiveram os do n.2.
n. 6	Associação das variáveis do n.4 e **Incomp-Confusao-obj-intencao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo Incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção.	Os alunos que tiveram equívocos do n.4 são os que tiveram erro de Incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção.

n. 7	Associação das variáveis do n.6 e **Mecanicos_Lapsos**: Erro de execução, tipo Mecânicos ou Lapsos.	Os alunos que tiveram equívocos do n.6 são os que tiveram erros mecânicos ou lapsos.
n. 8	Associação das variáveis do n.7 e **Estrategicos**: Erro de execução, tipo Mecânicos ou Lapsos.	Os alunos que tiveram equívocos do n.6 são os que tiveram erros estrategicos.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, para essas classes a árvore de similaridade nos indica que os erros nos planos das Intenções levaram aos erros de Percepções e, estes aos de execução, devido ao encadeamento entre as subclasses, tendo por influência principal a atividade 01 e a equipe formada pelos alunos A5 e A11, que foram os únicos que não conseguiram realizar a tarefa; corroborando com os resultados da análise qualitativa vista anteriormente. Por outro lado, essa análise não mostrou evidências da conexão desses erros com os de Organização da Informação.

Para a Subclasse C15, as associações entre as varáveis estão concentradas em erros de Organização da Informação; a variável típica é a mesma, porém os sujeitos típicos são A5-A11Atv01Cat01S01 e A2-A4Atv09Cat01S04. O Quadro 95 apresenta a interpretação dos resultados da árvore de similaridade para a subclasse C15.

Quadro 95 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade - Subclasse C12

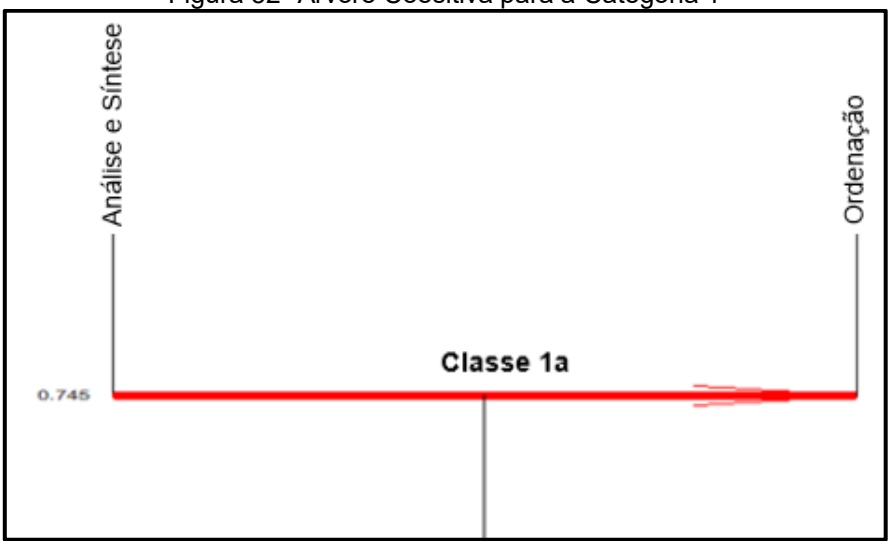
Nó	Variáveis	Interpretação
n. 5	**Anal_Sint:** Erro de Organização da Informação, subcategoria **Análise e Síntese.** **Ordenacao:** Erro de Organização da Informação, subcategoria **Ordenação.**	Os alunos que tiveram erro do tipo Análise e Síntese são os que tiveram erro de Ordenação.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

De forma sucinta, a classe C1 estabelece que os alunos que tiveram erros nos planos das intenções apresentaram problemas com a percepção da informação, de compreensão e estratégicos; e os que tiveram esses equívocos também apresentaram dificuldades em organizar a informação em termos de análise e síntese e ordenação; confirmando, dessa forma, o observado na análise qualitativa anterior.

Em relação a análise da árvore coesitiva foi identificada, somente a classe 1a com índice de coesão de 0,745; classes com índice de coesão menores não foram consideradas. A Figura 32 apresenta a árvore coesitiva para essa categoria com a indicação das classes.

Figura 32- Árvore Coesitiva para a Categoria 1



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A classe 1a pode ser representada da seguinte forma: classe 1a - (Anal_Sint) ⟹ (Ordenacao). O Quadro 96 apresenta a interpretação dos resultados.

Quadro 96 - Interpretação Árvore Coesitiva - Categoria 1

Classe	Variáveis	Interpretação
1a	**Anal_Sint**: Erro de Organização da Informação, subcategoria Erro de **Análise e Síntese**. **Ordenacao**: Erro de Organização da Informação, subcategoria Erro **Ordenação**.	A não identificação das características relevantes implicou na inadequada relação da informação observada.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A análise pelo teste de Fischer revelou algumas associações estatísticas significativas, de acordo com o Quadro 97 que corroboram com os resultados obtidos pelo CHIC, em especial, com os da Árvore Coesitiva.

Quadro 97 - Associações estatísticas significativos entre as variáveis do MADE - Categoria 1

Variável 1	Variável 2	p-valor	V-Cramer	Efeito V-*Cramer*
Erro no plano das intenções de **Indefinição de Metas**	Erro no plano das intenções de **Incompreensão ou confusão do objetivo ou da Intenção**	0,007	1	Perfeito
	Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das intenções, tipo **Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas.**	0,020	0,791	Grande

	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,007	1	Perfeito
	Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, tipo **Erro de Compreensão**	0,007	1	Perfeito
Erro no plano das intenções de **Incompreensão ou confusão do objetivo ou da Intenção**	Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das intenções, tipo **Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas.**	0,020	0,791	Grande
	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,007	1	Perfeito
	Erro de **Compreensão**	0,007	1	Perfeito
Erro no plano das intenções de **Conflito de Objetivos ou Desvio de Metas Fixadas**	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,02	0,791	Grande
	Erro de **Compreensão**	0,02	0,791	Grande
	Erro de Organização da Informação, tipo **Erro de Conexão e Interferências**	0,025	0,632	Grande
Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	Erro de **Compreensão**	0,007	1	Grande
Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	Erro de organização da informação de **Ordenação**	0,029	0,791	Grande
Resultado: houve associação estatística significativa entre cada par de variáveis (1 e 2).				

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Não foram encontradas associações estatísticas significativas entre os Erros de Execução e os demais tipos de equívocos. Porém, para esta amostra, é possível perceber a conexão entre alguns tipos de erros de entrada ou de desequilíbrio de informação, compreensão e os de organização da informação, também, observados pelo CHIC.

A seguir, é apresentada uma síntese dos resultados encontrados para a Categoria 1.

6.1.1.2. Síntese da Categoria 1

Essa categoria teve por característica apresentar os resultados para atividades de ensino experimental “padrão” e, por coincidência, algumas, foram realizadas na mesma sessão ou em sessões subsequentes. No caso das atividades 01 e 02, até mesmo, as equipes foram mantidas.

Apesar da frequência de erros atribuída, especialmente, ao primeiro contato com esse tipo de atividade, as análises indicara

m que, paulatinamente, eles foram sanados no decorrer das sessões e estavam, prioritariamente, concentrados na atividade 01 e nas categorias Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação e de Organização da Informação.

A utilização de conceitos anteriores de forma equivocada contribuiu para a resolução incorreta das atividades. Sendo que, as atividades foram desenvolvidas para forma um “novo conhecimento” ou, até mesmo, solidificar um conhecimento que os alunos acreditavam que dominavam. Equívocos em relação a representação matemática, conceitos e interpretação de texto também foram verificados.

Em relação ao tempo de execução, houve uma diminuição nas atividades realizadas em uma mesma sessão; com picos quando da realização de uma atividade com maior quantidade de procedimentos. Porém, há sempre um patamar médio padrão de tempo de resolução, com algumas exceções.

Estatisticamente, foi possível constatar pelo CHIC que os erros de Indefinição de metas também confundiram o objetivo e a intenção, bem como, os de distorção levaram a erros de compreensão, e, de forma, geral, associaram-se; assim como, alguns tipos de erro no Plano das Percepções e de Execução. Sendo que a atividade 01 foi a que mais contribuiu para esse resultado.

A Análise Coesitiva, indicou uma coesão de 0,785, entre alguns tipos de erros no Plano das Intenções, das Percepções e da Compreensão. Da mesma forma, foram observadas algumas associações estatísticas significativas pelo Teste de Fischer entre as variáveis citadas, incluindo, as do tipo Análise e Síntese e de Ordenação.

No mais, algumas dificuldades verificadas na resolução dessas atividades também já haviam sido constatadas por outros estudos e nos resultados apresentados nas análises prévias e, portanto, já eram esperados. Porém, é perceptível que a metodologia utilizada tenha contribuido para o entendimento e correção desses equívocos.

Por fim, essa análise nos indicou que as atividades foram realizadas tal como esperado: não com isenção de erros, mas com evolução do aprendizado; seja pela diminuição destes, seja pela resolução mais satisfatória e, até mesmo, pela satisfação e pelo interesse demonstrado pelos alunos que, visivelmente,

evoluíram ao longo das sessões e da execução das atividades dessa categoria adaptando-se de forma satisfatória a metodologia proposta.

6.1.2. Análise das atividades da Categoria 2

As atividades 03, 04 e 05 foram consideradas para a análise da Categoria 2 (Atividade de ensino experimental com questão problema ao final) e cada uma foi resolvida por 05 equipes. O Quadro 98 apresenta o quantitativo de atividades corretas, parcialmente corretas, incorretas e o número de atividades que foram analisadas por meio do erro.

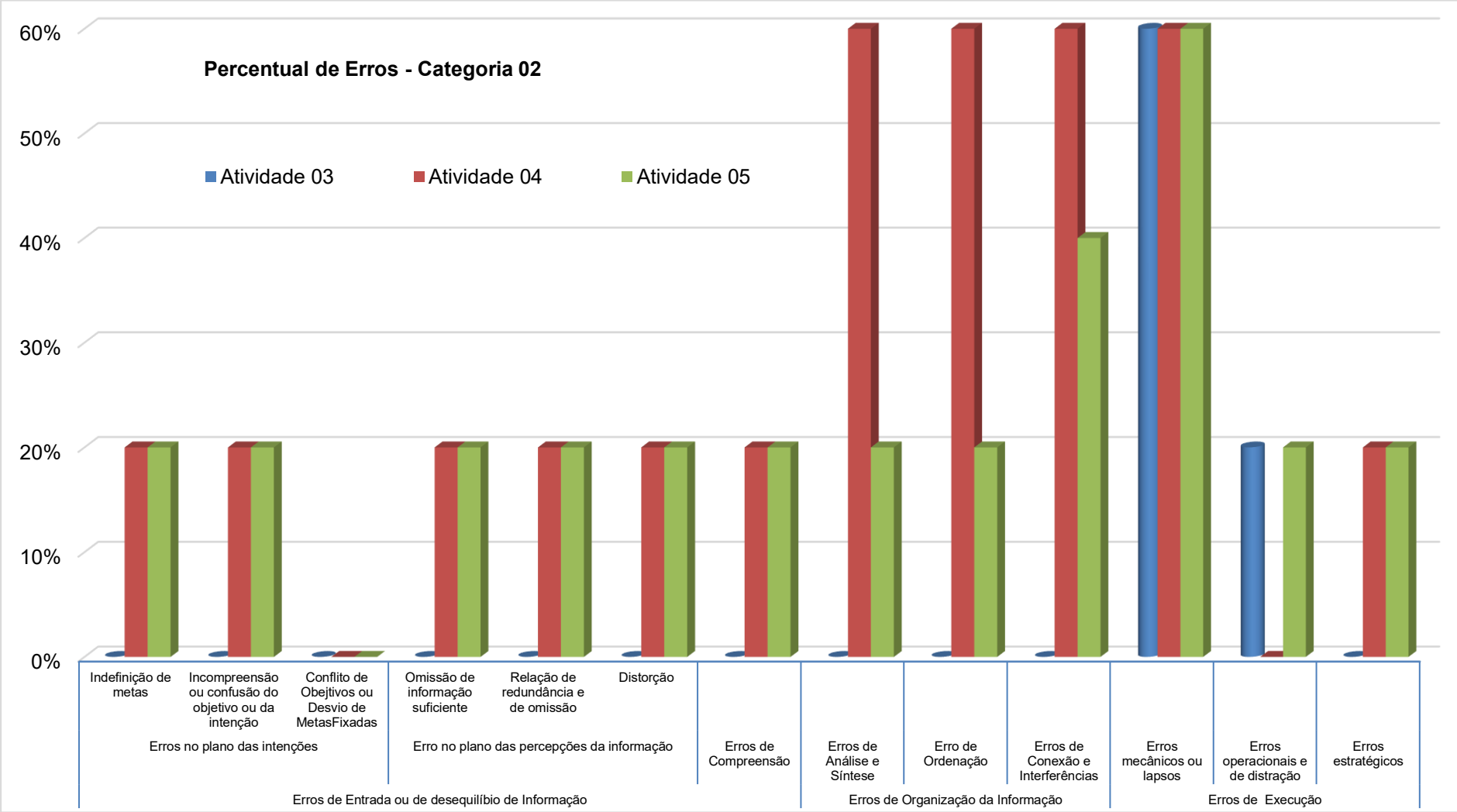
Quadro 98 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 02

Atividade	Número de Equipes	Atividades Corretas	Atividades Parcialmente Corretas	Atividades Incorretas	**Total de Atividades com erro**
03	05	01	04	0	**04**
04	05	0	04	01	**05**
05	05	0	04	01	**05**
Totais	15	01	12	02	**-**
Total de Atividades com erro					**14**

Fonte: elaborado dos dados da pesquisa

Para essa categoria, algumas características peculiares permitiram uma análise ainda mais criteriosa e evolutiva, quais sejam: todas as atividades foram realizadas em uma única sessão (sessão 2), de forma sequencial, as equipes de alunos foram mantidas (cada atividade foi executa por 5 grupos); e, mais ainda, as atividades 4 e 5 tinha por objetivo final a generalização de uma fórmula a partir do procedimento executado. O Gráfico 23 apresenta a quantidade de erros por atividade em percentual para a Categoria 2.

Gráfico 23 - Quantidade de erros para a categoria 02 de acordo com o MADE



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Na atividade 03 não foram observados Erros de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação; porém, na 04 e 05 foi possível observar equívocos em relação a esse critério, ocasionados por não compreensão da atividade por equipes diferentes em cada tarefa.

O não entendimento da atividade, acarretou, em problemas no plano das Intenções e das Percepções da Informação e em Erros de Compreensão, seja devido às dificuldades de interpretação e de leitura ou de confusão entre conceitos matemáticos já estabelecidos, por ainda não tê-los dominado completamente ou por falta de atenção.

Esses equívocos também foram observados na categoria 01 e em estudos discutidos nas análises prévias. É importante ressaltar que, especificamente, os alunos que cometeram esses equívocos estavam compondo as mesmas equipes nas atividades da categoria 01 e não cometeram esses erros naquelas tarefas.

Não se trata de um erro corriqueiro, mas um fato que pode ser atribuído a natureza e ao objetivo da atividade e está dentro dos padrões de normalidade do que se vê em um processo contínuo de ensino e aprendizagem, tal como diz Torre (2007, p. 27), “[...] o erro acompanha o processo” e “[...] não há aprendizagem isenta de erros”.

Os erros de organização da informação, foram frequentes nas atividades 04 e 05 e ausentes na 3, o que já era esperado, devido ao objetivo final das atividades. Pois, os alunos não estavam habituados à conversões da linguagem aritmética para a algébrica, exigido nas atividades 04 e 5; nesses casos específicos: à obtenção de fórmulas a partir da experimentação. Em geral, estas já são apresentadas “prontas” para serem utilizadas no ensino habitual.

Booth (1995, p. 33) ressalta que a álgebra não está separada da aritmética, e “é, em muitos aspectos, a aritmética generalizada” e essa é a principal fonte de dificuldades. Evolutivamente, esse tipo de erros, diminuiu, consideravelmente, ao comparar os resultados das atividades 04 e 05. Na primeira, todos os alunos tiveram erros nessa categoria; em compensação na 05, apenas, os alunos da mesma equipe (A3 e A9) que tiveram problema de entendimento da atividade, conforme exposto anteriormente.

Os Erros de execução foram verificados em todas as atividades; os atribuídos ao tipo mecânicos ou lapsos resultaram da utilização inadequada da

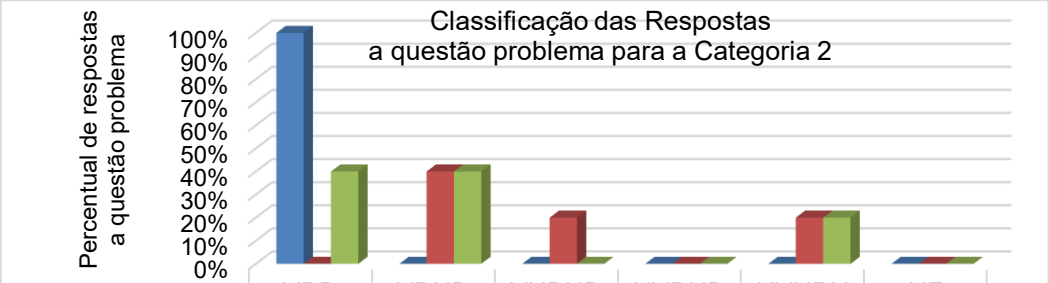
representação de vetores e foi, assim, categorizado porque foi observado em partes da questão, não caracterizando dificuldades com Entrada ou Organização da Informação.

Os Operacionais e de Distração foram visualizados, somente, em algumas operações ao longo do procedimento executado. De outra forma, os Estratégicos podem ter implicado, também, em erros de Organização da Informação, pois para as atividades de ensino experimental o erro no procedimento por utilização de métodos inadequados para resolução levam a respostas finais incorretas e a organização da informação de forma equivocada.

No mais, os erros de Execução foram mais visíveis quando o objetivo da atividade foi alterado, ou melhor, quando de uma resposta dissertativa passou a ser exigido uma equação algébrica; Torre (2007) explica que esses tipo de equívocos podem surgir quando as tarefas exigem dos alunos mais passos do que esse é capaz de entregar naquele momento ou por esquecer algo que já havia aprendido.

Alguns equívocos relacionados especialmente, ao de representações de forma incorreta, também, foram visíveis, nas equações generalizadas apresentadas e, por isso, algumas repostas dos alunos foram consideradas como VPND ou VNPND. O Gráfico 24 apresenta as classificações das respostas à questão problema dos alunos para a Categoria 02, de forma percentual.

Gráfico 24 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 2



	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 03	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 04	0%	40%	20%	0%	20%	0%
Atividade 05	40%	40%	0%	0%	20%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Das repostas finais dos alunos, pode-se inferir o ótimo aproveitamento da atividade 03 que consistiu em uma resposta dissertativa da questão problema.

Como falado anteriormente, as 04 e 05 exigiam uma resposta algébrica; e foi possível perceber a dificuldade dos alunos.

A 05 teve mais respostas VPD, porém duas hipóteses podem ser consideradas para esse efeito: 1) melhora na conversão entre as linguagens matemáticas e, 2) a equação foi mais fácil de ser identificada por ser de módulo, obtido a partir do teorema de Pitágoras que já é muito conhecido pelos alunos.

A primeira hipótese não nos cabe refutar ou validar nesse momento, haja vista que, dificilmente, uma única atividade desse tipo provocaria melhoria de desempenho nesse aspecto e caberia, sim, um olhar mais atento e, talvez, um maior número de atividades com essa característica. Dentro desse contexto, ainda sobre a Álgebra, Brum e Cury (2013) dizem que

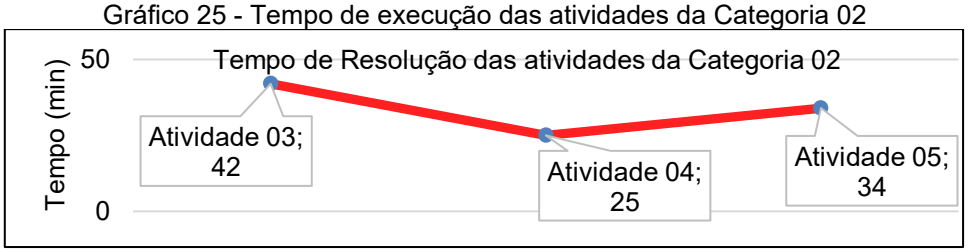
> Os procedimentos que fazem parte do cenário algébrico são complexos para muitos estudantes. Para resolver uma equação, fatorar uma expressão algébrica ou simplificá-la, para reduzi-la a uma expressão mais simples, os alunos precisam utilizar conhecimentos e técnicas, bem como realizar manipulações algébricas às vezes sofisticadas. O uso de convenções algébricas, o conceito de variável, o conceito de incógnita, o recurso a determinado produto notável, o uso de letras em Álgebra, a diversidade de situações que se a referem a variável e incógnita indiferentemente, comprometem, muitas vezes, a compreensão dos estudantes (Brum e Cury, 2013, p. 47).

A segunda, nos leva a crer que a atividade provocou um desequilíbrio positivo entre o conhecimentos sabido e o adquirido ao relacioná-los de forma adequada, bem como, na identificação das características relevantes para a realização do procedimento, implicando em correlações de análise e síntese corretas, tal como apontado por Torre (2007).

Sobre o tempo de execução das atividades, 42, 25 e 34 minutos, respectivamente, é possível perceber que há uma diminuição da 03 para 04, voltando a aumentar na resolução da atividade 05, porém não retornando ao patamar da primeira atividade, ficando com um tempo de execução menor. O

Gráfico 25, apresenta a ilustração dessa informação.

Gráfico 25 - Tempo de execução das atividades da Categoria 02



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

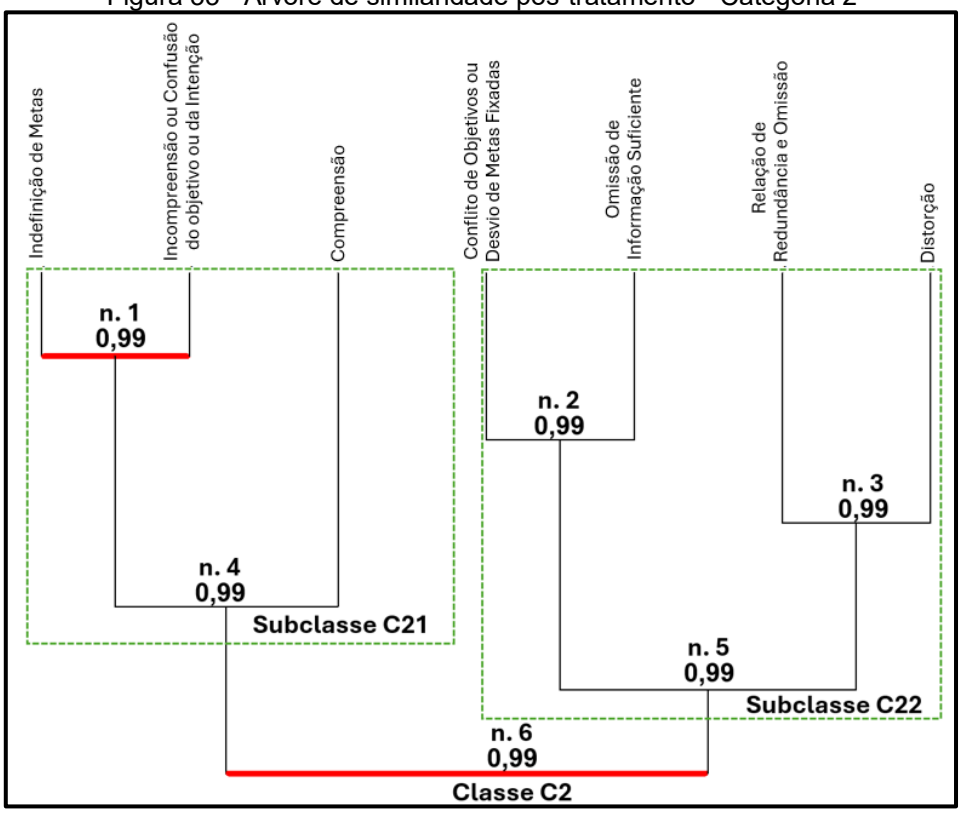
De forma geral, apesar da dificuldade de algumas equipes com a conversão entre a linguagem aritmética e a algébrica, os procedimentos, majoritariamente, foram executados de forma correta; comparativamente, os erros de uma atividade para outra diminuíram, além de que, atividades foram desenvolvidas em um tempo acessível de acordo com o disponibilizado em um ambiente de sala de aula.

A seguir, é apresentado o mapeamento estatístico dos dados por meio do CHIC e do teste de Fischer, para fins de complementação da análise.

6.1.2.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 2

Para a análise de similaridade, as variáveis suplementares foram: Anal_Sint (Análise e Síntese), Ordenacao (Ordenação) e Conex_Interf (Conexão e interferências). A Figura 33 apresenta a árvore de similaridade após o tratamento, foram considerados, apenas, nós com similaridade acima de 0,7; os demais foram excluídos.

Figura 33 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 2



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

A árvore de similaridade é constituída de uma classe, C2, contendo duas Subclasses C21 e C22. Na primeira, estão concentrados os nós 1, e 4 e, na segunda, os nós 2, 3 e 5. Para todas as Subclasses e para a classe C2, tanto a variável típica quanto os sujeitos típicos são os mesmos, quais sejam, respectivamente: Anal_Sint (Erros de Organização da Informação, tipo Análise e Síntese) e A3-A9Atv05Cat02S02 e A2-A4Atv04Cat02S02. A análise dos resultados para cada Subclasse será realizada a seguir.

Para a Subclasse C21 os nós significativos estavam concentrados nos erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; o n. 1 concentrou equívocos no Plano das Intenções, tipo Indefinição de Metas e Incompreensão ou Confusão do Objetivo ou da Intenção, e o n. 4, concentrou a associação entre os erros de n. 1 e de Compreensão. O Quadro 99 apresenta a interpretação dos resultados da árvore de similaridade para a Subclasses C21.

Quadro 99 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C21 - Categoria 2

Nó	Variáveis	Interpretação
n. 1	**Indef-Metas**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Indefinição de Metas.** **Incomp-Confusao-obj-intencao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção**.	Os alunos que tiveram erro de Indefinição de Metas são os que tiveram erro do tipo incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção
n. 2	**Variáveis do n. 1** **Compreensao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, tipo Erro de **Compreensão**.	Os alunos que tiveram erros de indefinição de metas e de incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção são os que tiveram erro de compreensão.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, pode-se dizer que os erros no Plano das Intenções levaram a equívocos nessa mesma subcategoria, bem como, podem ter levado a erros de Compreensão. Assim, na Subclasse C22, o n. 2 concentrou os erros no Plano das Percepções, tipo Confusão do Objetivo ou Desvio de Metas, e das Intenções, tipo Omissão de Informação Suficiente.

O n.3 tinha, somente, erros no Plano das Percepções, quais sejam: de Relação de redundância e de Omissão e de Distorção. Por fim, o n.5 concentrou a associação entre os equívocos do n.2 e do n.3. O Quadro 100 apresenta a

interpretação dos resultados da árvore de similaridade para a Subclasses associadas a Classe C2.

Quadro 100 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C22 - Categoria 2

Nó	Variáveis	Interpretação
n. 2	**Conf_Obj-Des_Met**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Conflito de Objetivos ou desvio de Metas fixadas.** **Omiss-Inf-suf**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da informação, tipo **Omissão de Informação suficiente.**	Os alunos que tiveram erro de Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas são os que tiveram erro de omissão de informação suficiente.
n. 3	**Rel_red_omis**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da informação, tipo **Redundância e Omissão**. **Distocao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Distorção.**	Os alunos que tiveram erro de Relação de redundância e de omissão são os que tiveram erro de Distorção.
n. 5	**Variáveis do n. 2 associadas as variáveis do n. 3.**	Os alunos que tiveram erro relacionados as variáveis do n. 2 também tiveram os erros associados pelo n. 3.

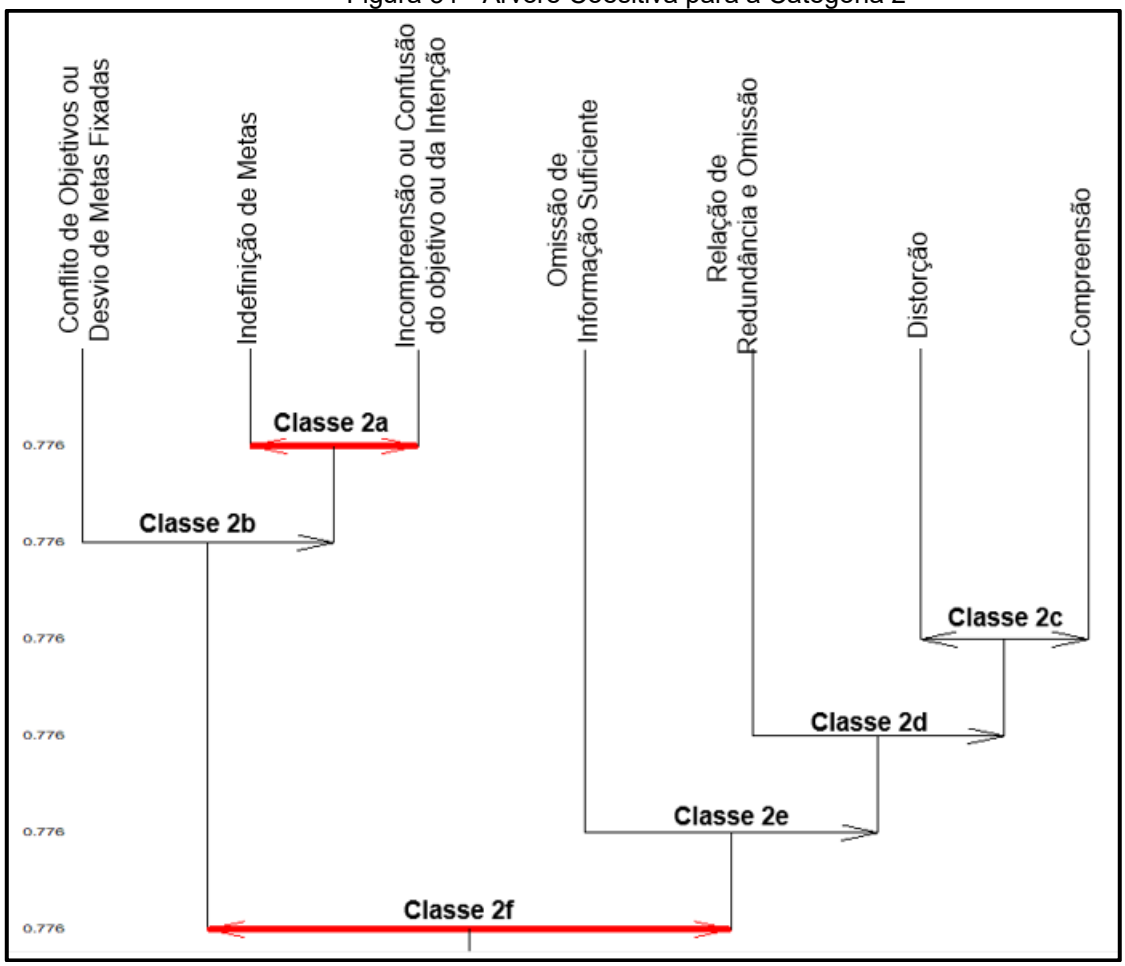
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A análise nos levou ao entendimento de que alguns erros no plano das Percepções levaram a outros equívocos nessa mesma subcategoria e, também, de Intenção; por outro lado, houve uma associação equivalente entre os erros de Intenção e os de Compreensão.

Para concluir, a classe C2 nos confirmou que alguns tipos de erros de Intenção e de Percepção, que levaram a erros de Compreensão, também levaram a associação entre alguns equívocos nos planos das Percepções; as atividades que mais contribuíram para esse resultado foram as 04 e 05 e o erro do tipo Análise e Síntese sendo, também, a variável típica com risco de 0,00853.

Na análise de Hierarquia Coesitiva foram identificadas 6 classes, com um nível de coesão de 0,776, cada; classes com índice de coesão menores não foram consideradas. A Figura 34 apresenta a árvore coesitiva para essa categoria com a indicação das classes.

Figura 34 - Árvore Coesitiva para a Categoria 2



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

As classes 2a, 2c e 2f (esta última formada por metarregras) apresentaram uma dupla implicação, as demais apenas implicações unidirecionais. As variáveis relacionadas estavam ligadas aos Erros de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação. O Quadro 101 apresenta a interpretação dos resultados.

Quadro 101 - Interpretação Árvore Coesitiva - Categoria 2

Classe	Variáveis	Interpretação
2a	**Indef-Metas**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Indefinição de Metas**. **Incomp-Confusao-obj-intencao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção**.	O não entendimento da atividade, ou da intenção do que deve ser feito, implicou erros por falta de compreensão do que se pede; e vice-versa.
2b	**Conf_Obj-Des_Met**: Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Conflito de Objetivos ou o desvio da meta fixada.** **Associação entre as variáveis da Classe 2a**	As atividades despertaram objetivos além dos desejados o que implicou no não entendimento e/ou na falta de compreensão do que se pedia.

2c	**Distorção**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Distorção**. **Compreensao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro de	O pouco domínio da informação implicou nos erros de compreensão e vice-versa.
2d	**Rel_red_omis**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Relação de redundância e de Omissão Associação entre as variáveis da Classe 2c**	A quantidade de informação redundante levou aos equívocos da classe 2c.
2e	**Omis-infor-sufc**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Omissão de Informação suficiente**. **Associação entre as classes 2d e 2c**	A insuficiente percepção ou análise da tarefa implicou nos equívocos da classe 2d e, consequentemente, nos da classe 2c.
2f	**Metarregra formada pela associação entre as classes 2a e 2b e 2c, 2d e 2e.**	Os equívocos da classe 2b implicaram nos da 2a; de tal modo que, a associação entre estes, ocasionou os erros da classe 2e e, de forma sequencial, os da classe 2d e e 2c.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

A análise pela árvore coesitiva revelou relações de causa e efeito entre os erros no Plano das Percepções e os de Percepções e de Intenções; e entre estes últimos. A análise pelo teste de Fischer revelou algumas associações estatísticas significativas que corroboraram com os resultados obtidos por meio do CHIC, o Quadro 102 apresenta os resultados para a categoria 2.

Quadro 102 - Associações estatísticas significativas entre as variáveis do MADE - Categoria 2

Variável 1	**Variável 2**	**p-valor**	**V-Cramer**	**Efeito V-*Cramer***
Erro no plano das intenções de **Indefinição de Metas**	Erro no plano das intenções de **Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Omissão de informação suficiente**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Relação de redundância e de omissão**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,01	1	Perfeito
	Erro de **Compreensão**	0,01	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	0,650	Grande
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0,650	Grande
	Erros de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito

Erro no plano das intenções de **Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção**	Erro no plano de percepção da informação de **Omissão de informação suficiente**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Relação de redundância e de omissão**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,01	1	Perfeito
	Erro de **Compreensão**	0,01	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0,650	Grande
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito
Erro no plano de percepção da informação de **Omissão de informação suficiente**	Erro no plano de percepção da informação de **Relação de redundância e de omissão**	0,01	1	Perfeito
	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,01	1	Perfeito
	Erro de **Compreensão**	0,01	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0650	Perfeito
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito
Erro no plano de percepção da informação de **Relação de redundância e de omissão**	Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	0,01	1	Perfeito
	Erro de **Compreensão**	0,01	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito
Erro no plano de percepção da informação de **Distorção**	Erro de **Compreensão**	0,01	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito
Erro de **Compreensão**	Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de organização da informação de **ordenação**	0,05	0,650	Perfeito
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,01	1	Perfeito
Erro de organização da informação de **Análise e Síntese**	Erro de organização da informação de **ordenação**	<.001	1	Perfeito
	Erro de organização da informação de **Conexão e Interferências**	0,004	0,853	Grande

	Erro de Execução **Estratégicos**	0,05	0,650	
Erro de organização da informação de **ordenação**	Erro de organização da informação de **Conexão e Interferências**	0,004	0,853	Grande
	Erro de Execução **Estratégicos**	0,05	0,650	Grande
Erro de Execução **Mecânicos ou lapsos**	Erro de Execução **Operacionais ou de Distração**	0,044	0,612	Grande
Resultado: houve associação estatística significativa entre cada par de variáveis (1 e 2).				

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Além das ponderações já relatadas pelo CHIC, o teste Fischer revelou, ainda, associações estatísticas significativas entre variáveis da categoria Organização da Informação, quais sejam: Análise e Síntese e Ordenação; Análise e Síntese e Conexão e Interferências; e Ordenação e Conexão e Interferências. Além de associações envolvendo as de variáveis de Erros de Execução.

A seguir é apresentada uma síntese dos resultados encontrados na Categoria 2.

6.1.2.2. Síntese da Categoria 2

A categoria 2 abordou as atividades de ensino experimental que, ao invés de trazer um campo observação e/ou conclusão ao final, apresentou uma questão problema aos alunos; dentro deste escopo estão as tarefas 03, 04 e 05. Todas as atividades foram realizadas na mesma sessão e com a mesma composição de equipes; especificamente, as atividades 04 e 05 exigiam, ao final, a generalização de uma fórmula obtida a partir do procedimento executado.

Em relação aos erros, os alunos tiveram, na atividade 03, equívocos, apenas, do tipo Execução, causado pela representação inadequada ou realização de alguma operação incorreta das solicitadas durante a resolução. Em contrapartida, nas atividades 04 e 05, foi possível observar erros em todas as categorias.

Os de entrada, no plano das Intenções ocasionaram erros, também, no plano das percepções; conforme comprovado estatisticamente, tanto pelo CHIC quanto por Fischer. Os de Execução foram do mesmo tipo que os da atividade

03 causado por problemas mecânicos ou lapsos ou operacionais e de distração; além disso, alguns erros Estratégicos foram identificados.

De forma mais frequente, foram os erros de Organização da Informação devido as dificuldades dos alunos em fazerem a conversão da linguagem algébrica para a aritmética. Porém, quantitativamente, esses erros diminuíram ao longo da execução das atividades.

Sobre a conclusão da questão problema para a atividade 03, não foram identificados problemas; para a 04 e 05, a resposta a questão problema, algumas vezes, foi classificada como VPND quando da ocorrência de representações inadequadas, apesar da fórmula correta; como VNPND quando procedimentos incorretos levaram a equações incorretas e NVNPND em caso totalmente incoerentes.

O tempo de execução das atividades foi favorável para um ambiente de sala de aula, de forma geral, diminuiu na 2ª atividade e aumentou na última, porém sempre em um tempo abaixo do que observado na resolução da 1ª atividade (atividade 03).

Pela análise estatística foram encontradas similaridades entre os erros do Plano das Intenções e das Percepções, bem como, relações de causa e efeito, inclusive com dupla implicação.

As associações significativas por Fischer confirmaram as já estabelecidas pelos testes anteriores e acrescentaram associações estatisticamente significativas entre as variáveis de Execução e entre a de Erros Estratégicos e as relacionados ao plano de intenções e de percepções.

Por fim, apesar dos erros verificados, pode-se concluir que as atividades tiveram um bom aproveitamento pelos alunos favorecendo a aprendizagem e a construção e, em alguns casos, a reconstrução dos conhecimentos.

6.1.3. Breve análise comparativa entre os resultados da Categoria 1 e da Categoria 2

As categorias 01 e 02 diferenciaram-se apenas pelo campo observação ou pela solicitação de uma resposta a questão problema, nesse sentido, acredita-se que uma análise comparativa entre estas auxiliará na análise final e, posteriormente, na conclusão da validação da tese.

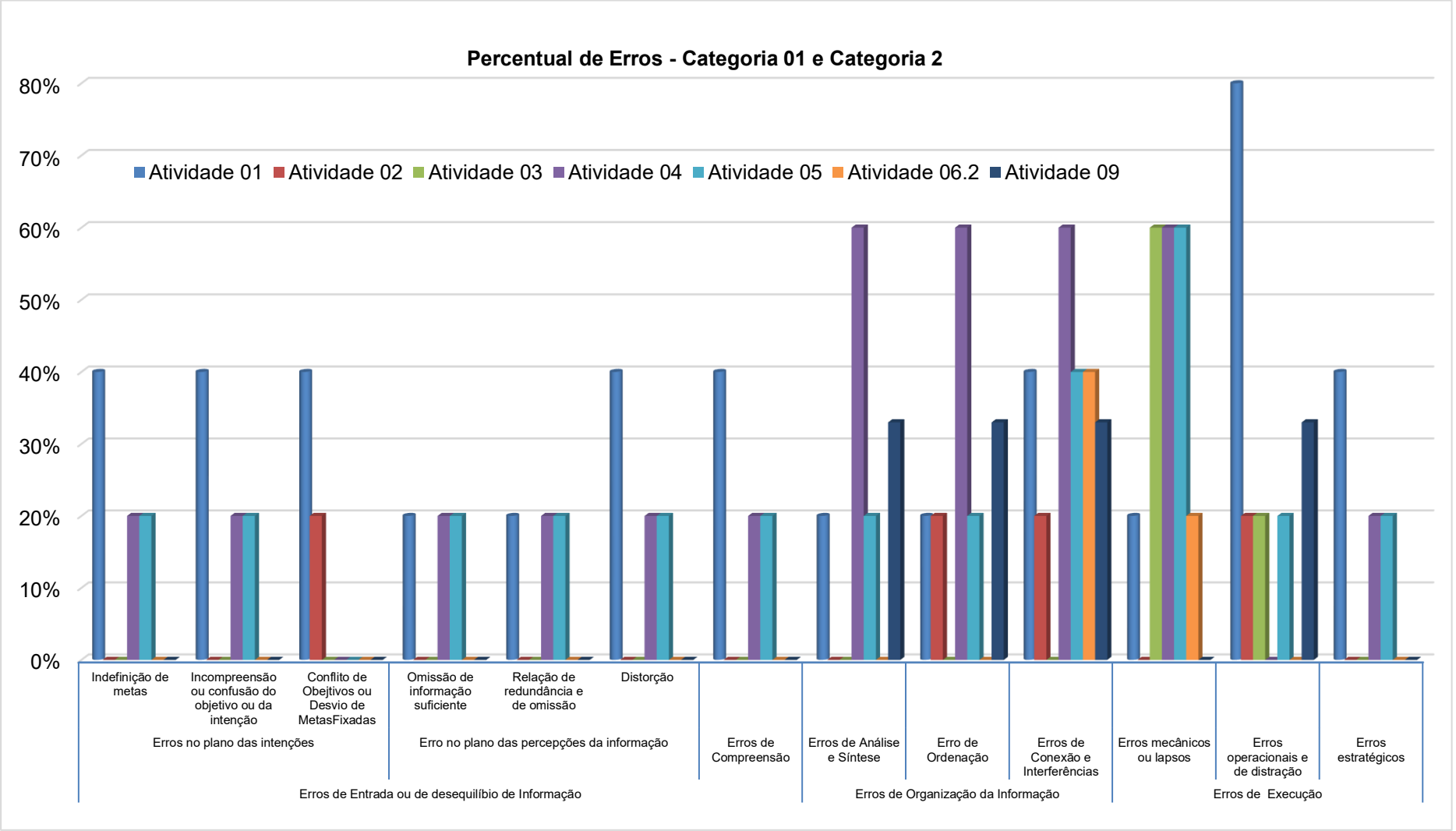
Em relação aos Erros, os de Entrada ou Desequilíbrio de informação foram sendo sanados ao longo da execução das atividades, de forma que, a diminuição desses erros, por estarem ligados a metodologia docente, tendo o professor como principal responsável, indicam o entendimento do método pelos alunos; fato visualizado desde a atividade 02 e confirmados nas seguintes; porém, voltando a aparecer nas 04 e 05, como era esperado.

Da mesma forma, aconteceu com os de Organização da Informação, mas com uma tendência a diminuir. Esses erros estão ligados aos processos cognitivos do sujeito e aos procedimentos indutivos e dedutivos, análise, síntese e associação. Os resultados nos dão indícios de melhoria dos estudantes.

Em contrapartida, os erros de Execução, estiveram presentes devido a omissões de letras, esquecimentos, troca de uma letra por outra, o que acontece de forma inconsciente e pode ser justificado devido a quantidade de execuções do mesmo procedimento que caracteriza o ensino experimental ou, até mesmo, a fatores afetivos como ansiedade, estresse, cansaço etc. Vale destacar que os erros Estratégicos foram menos comuns, o que implica em procedimentos e estratégias de resolução utilizadas de forma correta.

O Gráfico 26 apresenta os erros, de forma percentual, envolvendo tanto as atividades da categoria 1 e da categoria 2, em ordem cronológica; sendo: Sessão 1, Categoria 1- atividades 01 e 02; Sessão 2, Categoria 2 – atividades 03, 04 e 05; Sessão 2, Categoria 1 – atividade 6.2 e, Sessão 4, Categoria, 01 - atividade 09.

Gráfico 26 - Percentual de erros, Categoria 1 e 2, em ordem cronológica



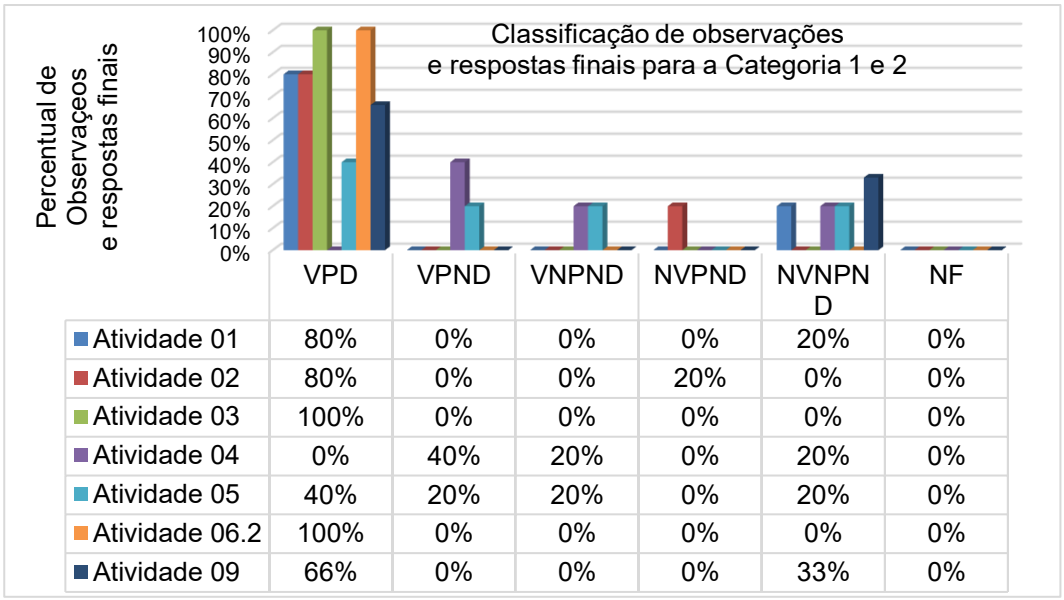
Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Sobre as observações ou respostas VPD, dentre outras classificações, as atividades da categoria 01 tenderam a ter melhor desempenho; é interessante notar o impacto das atividades 04 e 05, o que nos indica que os alunos não estão acostumados com esse tipo de questão, ou problema.

Por outro lado, o uso da questão problema ao final, direcionou a resposta para o objetivo principal da tarefa e foi útil de acordo com o desejado, desde que, compatível com o assunto que está sendo abordado.

O Gráfico 27 apresenta a classificação das observações e respostas finais envolvendo tanto as atividades da categoria 1, quanto da categoria 2, em ordem cronológica.

Gráfico 27 - Classificação das observações e respostas finais para as Categorias 1 e 2



	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 01	80%	0%	0%	0%	20%	0%
Atividade 02	80%	0%	0%	20%	0%	0%
Atividade 03	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 04	0%	40%	20%	0%	20%	0%
Atividade 05	40%	20%	20%	0%	20%	0%
Atividade 06.2	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 09	66%	0%	0%	0%	33%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Outra abordagem que é importante relatar é em relação ao tempo de execução: o mesmo padrão foi observado nas duas categorias. Há uma diminuição gradativa do tempo, na maioria dos casos, podendo haver picos de acordo com a atividade, porém não retornando ao patamar inicial; ou seja, o tempo ficou sempre abaixo ou próximo daquele da atividade inicial. Estatisticamente, as duas categorias, associaram erros de percepção aos de intenção, e vice-versa, em alguns casos; bem como, a associação entre erros da mesma categoria.

Por fim, é possível concluir que as duas categorias apresentaram resultados semelhantes em relação ao desempenho dos alunos. No mais,

revelaram, ainda, fragilidades que devem ser tratadas com métodos adequados e com estímulos em sala de aula, no que diz respeito a incentivar a prática da conversão e utilização da linguagem aritmética e algébrica, principalmente, como meio de construção do conhecimento e o entendimento de que as equações podem surgir da observação de um simples procedimento, assim, como a prática do ensino experimental como metodologia para o ensino de vetores.

6.1.4. Análise das Atividades da Categoria 3

Para a categoria 3 (Atividade de RPPP com previsão de resolução pelos alunos), a primeira parte da atividade 6 (atividade 6.1) e as 07 e 08 foram consideradas. Sendo que, a 6.1 foi realizada em grupo e, as demais, de forma individual; respectivamente, nas sessões 2, 3 e 4.

Para essa categoria, na atividade 6.1 não foram observados erros, o que pode ser justificado por utilizar conceitos visto anteriormente e ao próprio objetivo da questão, que não se apresentava de forma complexa e, exigia, apenas, interpretação e manipulação aritmética. Na 07, dos 07 alunos que a resolveram, 03 cometeram erros; e na 08, 02 alunos dos 07 cometeram erros.

O Quadro 103 apresenta o quantitativo de atividades corretas, parcialmente corretas, incorretas e o número de atividades que foram analisadas por meio do erro.

Quadro 103 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 03

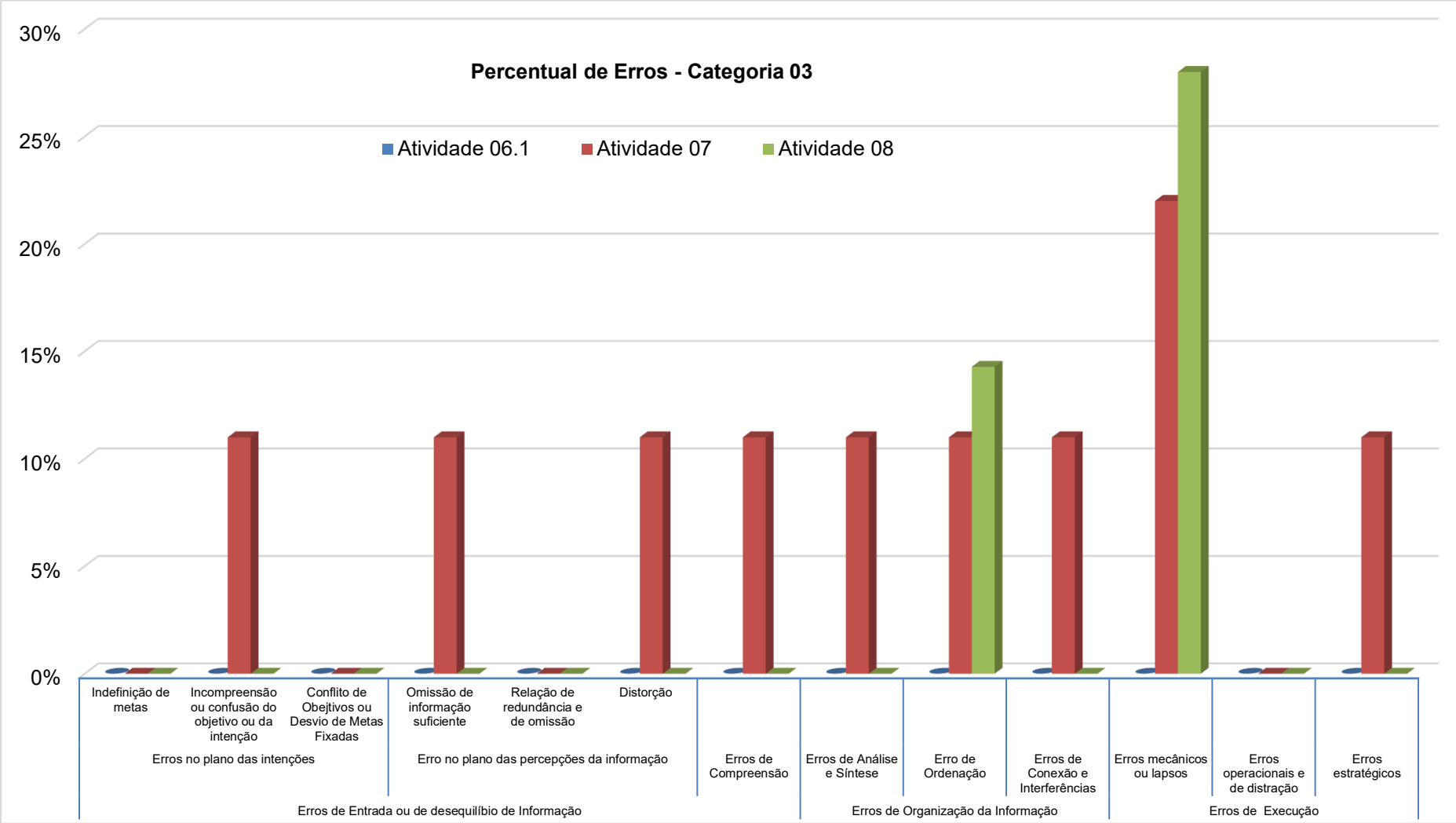
Atividade	Número de participantes	Atividades Corretas	Atividades Parcialmente Corretas	Atividades Incorretas	**Total de Atividades com erro**
06 (parte 1)[17]	04	04	0	0	**0**
07	07	04	02	01	**03**
08	07	05	02	0	**02**
Totais	18	13	04	01	**-**
Total de Atividade com erro					**05**

Fonte: elaborado dos dados da pesquisa

De forma condensada, o Gráfico 28 apresenta o quantitativo de erros para a categoria 03, de forma percentual.

[17] Única atividade dessa categoria realizada em grupo.

Gráfico 28 - Quantidade de erros para a categoria 03 de acordo com o MADE



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os Erros de Entrada e Desequilíbrio de Informação foram observados, somente, na atividade 07. O equívoco foi cometido por, apenas, um aluno, A2, por incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção, por omissão de informação suficiente, por distorção e por compreensão; esses erros ocasionaram uma interpretação incorreta dos objetivos da atividade.

Em contrapartida, esse mesmo aluno, nas categorias anteriores, cujas atividades foram realizadas em grupo, não cometeu esses tipos de erros; contudo, não há evidências de que o aluno foi "beneficiado" pela ajuda dos outros alunos nas tarefas em grupo, pois nas demais atividades individuais dessa categoria não foram observados erros de entrada pelo discente.

Os erros de organização da informação foram identificados nas atividades 07 e 08. Na tarefa 07, como consequência dos erros de entrada do aluno A2 que o direcionou a resposta incorreta do problema; e na 08, houve uma inversão na ordem da operação por A10, o que não acarretou prejuízos a resposta final, pois o discente a corrigiu.

No caso desse aluno, o que deve ser ressaltado é que ele não conseguiu identificar a utilização da multiplicação por um escalar, tal como os outros alunos; apesar de que, não se busca aqui um padrão de resposta, mas a construção do conhecimento pelos alunos.

De acordo com Nogaro e Granella (2004, p.4), "o erro só pode ser considerado como algo satisfatório, na solução de um problema, se tomarmos como acerto uma forma, um padrão a ser seguido". Assim, nesse caso, não há que se falar em erro de análise e síntese, conexão e interferências; mas de Ordenação por relação inadequada.

Os Erros de Execução do tipo Mecânicos ou Lapsos foram causados pela representação incorreta do vetor e por alteração do sinal, na atividade 08; e na 07, também, por representação incorreta do vetor, sendo que ele foi dado na questão, e da operação.

Erros Estratégicos foram identificados, apenas, na atividade 07 pela utilização do procedimento de resolução adequado, porém de forma incorreta e incompleta por A2, como consequência dos erros de entrada e que implicou, ainda, em erros de organização da informação. Erros Operacionais ou de Distração não foram encontrados nessas atividades.

Torre (2007, p. 123) ressalta que “Enquanto os erros de entrada e de organização requerem uma maior orientação nos de execução basta proporcionar pistas indicativas do processo”; de tal forma, que essa categoria de erros, permite ao aluno retornar à resolução e encontrar suas falhas.

Quantitativamente, os erros apareceram com maior frequência na atividade 07, devido ao único aluno que teve problemas com a interpretação e compreensão do problema e consequentemente, com a resolução. Portanto, para essa categoria os alunos não apresentaram grandes dificuldades, apesar da maioria, ter sido realizada individual.

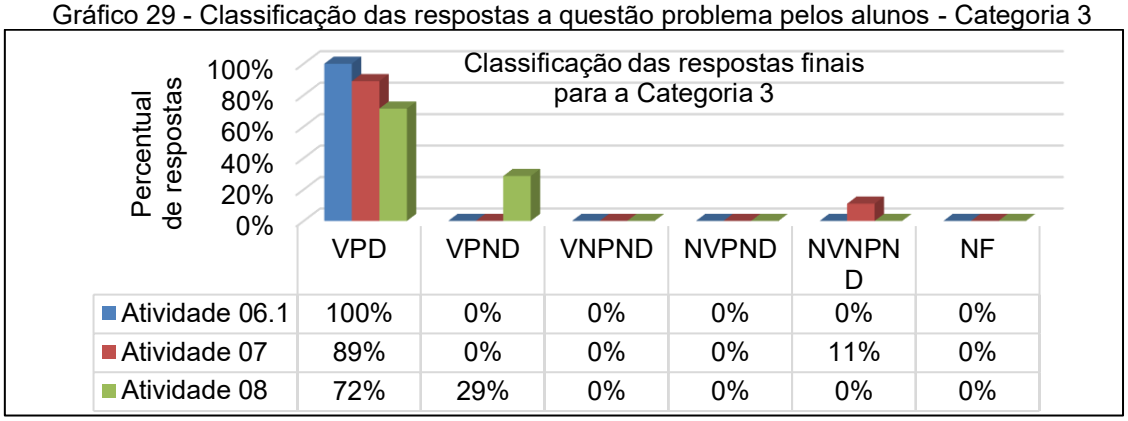
De acordo com Torre (2007) durante a organização da informação acontecem diversas operações, além de procedimentos indutivos e dedutivos, como: “[...] isolar elementos (análise), combiná-los de diferentes maneiras (síntese), associá-los com os conhecimentos prévios (conexão), ordená-los corretamente (sequência)” (Torre, 207, p.118).

As operações relacionadas por Torre quando realizadas corretamente podem indicar capacidades de abstração e generalização e levam a efeitos de análise, dedução e domínio, considerando Davydov (1988). Portanto, há indícios da eficácia das atividades em relação aos aspectos citados; no entanto, aspectos relacionados a atenção devem ser melhorados a fim de evitar erros de Execução.

O estudo de Bastos e Allevato (2018) destacou a importância da resolução de problemas como um dos caminhos para aprender matemática desde que sejam como ponto de partida e possibilitem ao professor fazer conexões com outras áreas da matemática e gerar novos conceitos e conteúdo. Destacaram, ainda, que, infelizmente, os problemas têm sido usados, apenas, para o exercício de conteúdos já aprendidos.

Assim, a aplicação dessas atividades mostraram que essa metodologia de ensino, tal como relatado pelos autores, faz toda a diferença no aprendizado e forma de entendimento dos assuntos, pois além de possibilitar a aprendizagem da matemática possibilita conexões com situações do cotidiano. Esse fato pode ser percebido, também, em relação ao número de respostas VPD, vide Gráfico 29.

Gráfico 29 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 3



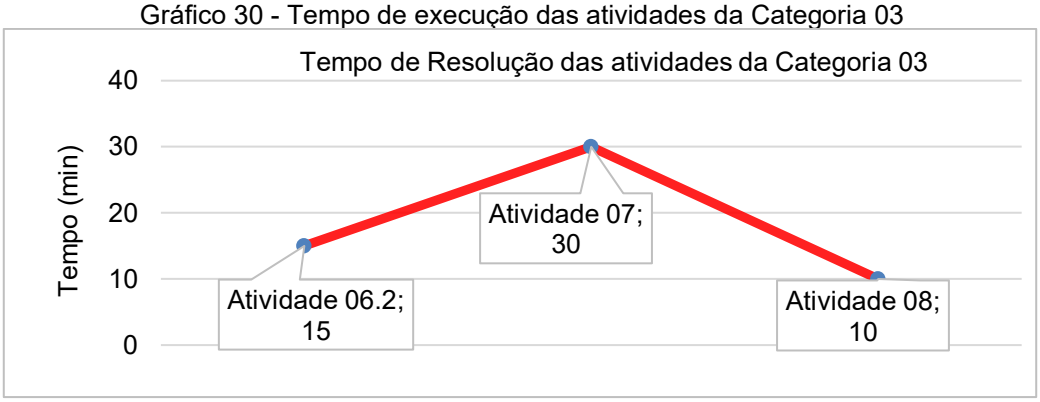
	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 06.1	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 07	89%	0%	0%	0%	11%	0%
Atividade 08	72%	29%	0%	0%	0%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Sobre as respostas, a considerada NVNPND, na atividade 07, corresponde a de A2, pelos motivos já expostos. A VPND, na atividade 08, foi assim classificada devido a não percepção do aluno do efeito da multiplicação por um escalar, apesar da resposta final, estar correta; “Dessa forma não há erro, mas sucesso ou insucesso” (Nogaro e Granella, 2004, p. 4).

Esses resultados, não implicam em dizer que as atividades não tiveram sucesso, pelo contrário, os erros ou a falta de percepção são benéficos quando explorados em sala de aula e favorecem, grandemente, o entendimento. Por outro lado, as repostas dos problemas foram obtidas a partir de uma manipulação aritmética e, aparentemente, havia maior afinidade dos alunos com esse tipo de escrita do que com a dissertativa. Ainda sobre a resolução das atividades, o Gráfico 30 apresenta o tempo de execução das atividades.

Gráfico 30 - Tempo de execução das atividades da Categoria 03



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados apontaram que o tempo de resolução em relação as atividades 06.1 e 07 aumentou, porém diminuiu, consideravelmente, na atividade 08, próximo ao patamar da atividade 06.1, porém abaixo. O tempo aumentado

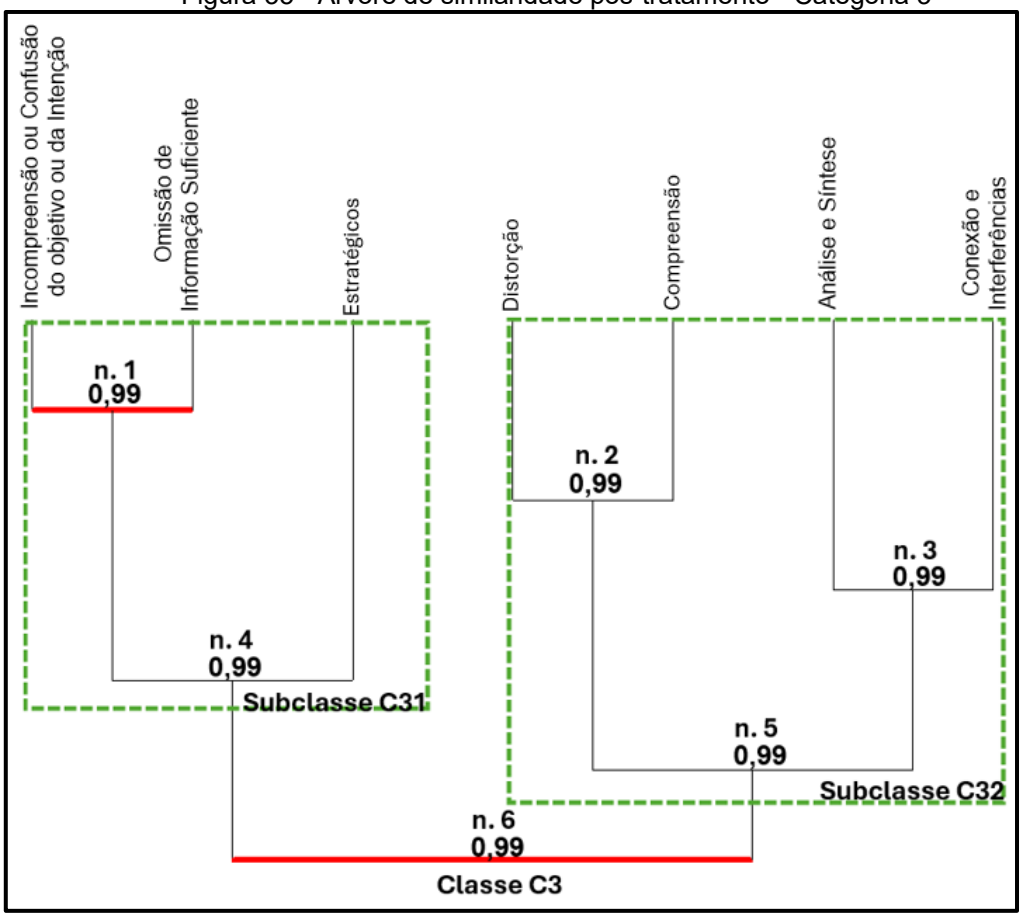
na atividade se deu pela fase de institucionalização e resolução de exercícios, e não pela resolução da tarefa pelos alunos, porém todo o conjunto da sessão foi necessário e importante para o aprendizado; entretanto, para fins de utilização da atividade em sala de aula está dentro dos parâmetros normais.

A seguir, é apresentado o mapeamento estatístico dos dados por meio do CHIC e do teste de Fischer, para fins de complementação da análise.

6.1.4.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 3

Para a análise por similaridade, as variáveis suplementares foram: Ordenacao (Ordenação) e Mecanicos_Lapsos (Mecânicos e Lapsos). A Figura 35 apresenta a árvore de similaridade após o tratamento; foram considerados, apenas, nós com similaridade acima de 0,9; os demais foram excluídos.

Figura 35 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 3



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

A árvore de similaridade estava constituída de uma Classe, C3, com duas Subclasses, C31 e C32, que concentraram os nós significativos. Na C31, estavam os nós n.1 e n. 4; e na C32, os nós n. 2 e n. 3. Para todos os níveis o sujeito e a variável típica foram os mesmos, respectivamente, A2Atv07Cat03S03 e Conf_Obj-Des_Met (Erro de Entrada ou Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo Conflito de Objetivos ou Desvio de Metas Fixadas), com um risco de 0 (zero).

Para a Subclasse C31, o n. 1 concentrou Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação, sendo um no Plano das Intenções, devido a Incompreensão ou Confusão do Objetivo ou da Intenção, associado a outro no Plano das Percepções, tipo Omissão de Informação suficiente. O n. 4 continha o n. 1 associado ao de Execução, subcategoria Estratégicos. O Quadro 104 apresenta a interpretação dos resultados da árvore de similaridade para a Subclasses C31.

Quadro 104 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C31 - Categoria 3

Nó	Variáveis	Interpretação
n. 1	**Incomp-Confusao-obj-intencao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Intenções, tipo **Incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção**. **Omis-infor-sufc**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções, tipo **Erro de Omissão de informação suficiente**.	Os alunos que tiveram erro de incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção são os que tiveram erros de Omissão de Informação suficiente.
n. 4	**Variáveis do n. 1** **Estratégicos**: Erro de Execução, categoria **Erro Estratégico**.	Os alunos que tiveram erro de incompreensão ou confusão do objetivo e da intenção e de Omissão de Informação suficiente são também tiveram erros estratégicos.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, pode-se dizer que os alunos que não conseguiram entender o problema tiveram uma percepção insuficiente da análise do problema e, consequentemente, cometeram erros procedimentais ligados a estratégia definida para a resolução do problema, considerando que o sujeito típico foi A2Atv07Cat03S03, confirmando as evidências expostas anteriormente.

Na Subclasse C32, o n. 2 associa o erro de Percepção, tipo Distorção, ao Erro de Compreensão, ambos de Entrada ou Desequilíbrio de Informação. O n.3, associa erros de Organização da Informação, tipo Análise e Síntese e Conexão e Interferências. O Quadro 105 apresenta a análise para a Subclasse C32.

Quadro 105 - Interpretação dos nós da Árvore de similaridade – Subclasse C32 - Categoria 3

Nó	Variáveis	Interpretação
n. 2	**Distorcao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro no Plano das Percepções da Informação, tipo **Distorção.** **Compreensão:** Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria Erro de **Compreensão.**	Os alunos que tiveram erro de Distorção são os que tiveram erro de Compreensão.
n. 3	**Anal_Sint**: Erro de Organização da Informação, subcategoria **Análise e Síntese**. **Conex_Interf**: Erro de Organização da Informação, subcategoria **Conexão e Interferências.**	Os alunos que tiveram erro de Análise e Síntese são os que tiveram erro de Conexão e Interferências.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Assim, os resultados apontaram que os alunos que tiveram dificuldades com o domínio da informação do problema também tiveram limitações de compreensão léxica, conceitual ou lógica do problema. Da mesma forma, a falta de clareza em identificar as características relevantes para resolver o problema levaram a utilização inadequada de conhecimentos já adquiridos. Por fim, a classe C3, representou a interligação entre as Subclasses analisadas.

A análise por Árvore Coesitiva não foi realizada pois apresentou índices de coesão abaixo de 0,3. Bem como, não foram encontradas associações estatísticas significativas considerando os critérios pré-estabelecidos.

A seguir é apresenta uma síntese da análise dessa categoria.

6.1.4.2. Síntese da Categoria 3

A categoria 3 abordou as atividades do tipo RPPP com previsão de resolução pelos alunos: atividades 6.1 (parte 01), 07 e 08, que foram realizadas em sessões subsequentes (2, 3 e 4). A primeira em grupo e as demais, individuais.

Na atividade 6.1 não foram encontrados equívocos talvez por, de forma muito clara, necessitar da utilização de conhecimentos anteriores e, ainda, por ter sido realizada em grupo e ser, apenas, um motivador para a continuação dessa atividade, parte 02, do tipo ensino por atividade experimental já analisada na categoria 01.

Em contrapartida, nas demais tarefas, alguns erros foram identificados. Na atividade 07, um aluno não compreendeu o problema e o que estava sendo exigido, consequentemente, não conseguiu concluir a tarefa de forma satisfatória. Na atividade 08, um aluno, teve equívoco de Ordenação e de Execução, devido a erros Mecânicos ou Lapsos. Visivelmente, os erros foram menores que nas demais categorias já analisadas; fato constatado, também, pela quantidade de respostas VPD.

Sobre o tempo de execução, as atividades foram realizadas dentro de um tempo aceitável, sendo que, o mesmo padrão foi observado nas categorias anteriores em relação ao aumento e a diminuição do tempo para execução e a sua compatibilidade para o uso das atividades em um ambiente de sala de aula.

Estatisticamente, a análise por similaridade nos levou a inferir que os alunos que tiveram erros de Intenção por compreensão também tiveram dificuldade de analisar o problema por não terem o conhecimento necessário o que, consequentemente, provocou erro de procedimento.

Igualmente, os alunos com pouco domínio da informação ou do assunto não conseguiram entender o problema, ocasionado dificuldades de identificar e definir os passos a seguir e de utilizar conhecimentos anteriores para a resolução. Vale ressaltar que apenas um sujeito contribuiu para esse resultado ao realizar a atividade 07.

O índice de coesão foi abaixo de 0,3 o que impossibilitou a análise da Árvore Coesitiva, assim como, o teste de Fischer não revelou associações estatísticas significativas com p-valor<0.05 entre as variáveis.

Por fim, para essa categoria foram identificados pouco erros podendo nos dar indícios de que, principalmente: 1) as atividades anteriores foram satisfatórias, pois alguns conhecimentos anteriores eram necessários para resolver os problemas; e, 2) houve melhora na percepção e raciocínio que permite ao aluno identificar o objetivo, as características relevantes e os passos a seguir para a resolução da questão.

6.1.5. Análise das atividades da Categoria 4

Para a categoria 4 (Atividade de RPPP sem previsão de resolução pelos alunos), as atividades 10, 11,12 e 13 foram analisadas; todas as tarefas foram realizadas de forma individual; sendo, a 10 na sessão 04 e, as demais, na sessão 5. Essa categoria foi a única em que alguns alunos presentes não apresentaram tentativa de resolução.

Na atividade 10, dos 10 alunos presentes, todos os que resolveram cometeram algum tipo de equívoco, sendo que, 02 não apresentaram tentativa de resolução (A9 e A10). Na 11, somente A6 não cometeu equívocos e A9 não formulou resposta; e em 12, apenas, A5 não teve erros e A11 não respondeu. Na 13, todos os 10 participantes, cometeram equívocos e apresentaram tentativa de resolução.

O Quadro 106 apresenta o quantitativo de atividades corretas, parcialmente corretas, incorretas e o número de atividades que foram analisadas por meio do erro.

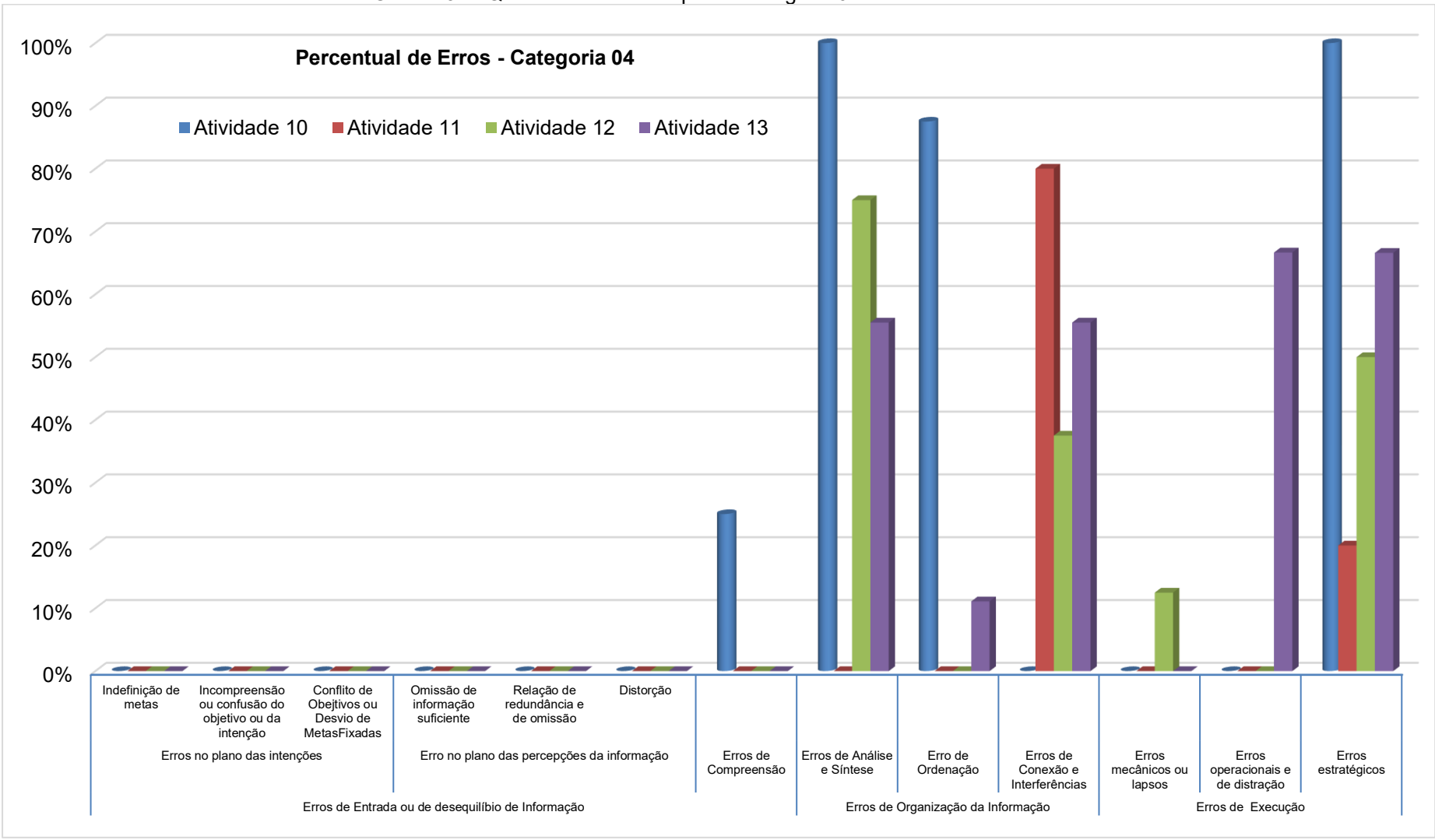
Quadro 106 - Quantitativo de tarefas analisadas - Categoria 04

Atividade	Número de participantes	Atividades Corretas	Atividades Parcialmente Corretas	Atividades Incorretas	Sem tentativa de resolução	**Total de Atividades com erro**
10	10	0	08	0	02	**08**
11	09	03	03	02	01	**06**
12	09	01	01	06	01	**07**
13	09	0	09	0	0	**09**
Totais	37	02	19	12	04	**-**
Total de Atividades com erro:						**30**

Fonte: elaborado dos dados da pesquisa

De forma condensada, o Gráfico 31 apresenta o quantitativo de erros de forma percentual para a categoria 04, desconsiderando os alunos que não apresentaram tentativa de resolução.

Gráfico 31 - Quantidade de erros para a categoria 04 de acordo com o MADE



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Nas atividades dessa categoria não foram observados erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação no plano das Intenções e das Percepções das Informações; 02 alunos tiveram erro de Compreensão por não saber que módulo e magnitude eram sinônimos. Em contrapartida, na atividade 10, 02 (dois) discentes não apresentaram tentativa de resolução e, nas 11 e 12, 01 (um) aluno não resolveu em cada tipo e, dessa forma, não compuseram a análise de erros.

Os poucos erros de entrada para essa atividade podem ser atribuídos a forma como o problema foi apresentado de forma simples e direta; outro fator de destaque também foram os títulos das atividades que deram indícios de qual assunto estava relacionado a questão.

Por outro lado, os erros de Organização da Informação atrelados aos de Execução, em especial, os Estratégicos, foram verificados em todas as atividades. Na atividade 10, os alunos deixaram claro a propriedade de vetor paralelo que deveria ser utilizada, porém não conseguiram fazer uma conexão com um vetor de magnitude 1 e, dessa forma, tiveram dificuldades de demonstrar como obter o vetor solicitado. Algumas vezes, deixaram explícito as características do vetor unitário, mas esqueceram do paralelo e, vice-versa.

Na atividade 11, a tentativa de resolução pela relação trigonométrica do cosseno, seno e tangente foi utilizada por todos os que não tiveram sucesso na resolução, o que incutiu, também, em erro Estratégico. No caso da atividade 12, os alunos tentaram utilizar o produto escalar, porém não conseguiram desenvolver algebricamente a questão.

Na atividade 13, o conhecimento da fórmula geral do volume, os levou a resolução da questão de forma parcial apresentando a área do paralelogramo visto na atividade anterior por produto vetorial, ainda que de forma incorreta para o caso do produto misto; contudo, “esbarraram” na obtenção da altura do tetraedro.

No mais, a atividade 10 não foi resolvida de forma integral por nenhum aluno; as tarefas de 11 à 13 foram solucionadas por alguns estudantes, porém aplicando diretamente as fórmulas dos produtos escalar, vetorial e misto, respectivamente.

Ainda assim, problemas de representação foram verificados e vários equívocos detectados foram expostos e discutidos durante a fase de institucionalização. As principais discussões versaram sobre, dentre outras

coisas: o que acontece quando inverte a ordem dos vetores no produto vetorial e no produto misto? qual o erro de usar o módulo para obter a “parte correspondente a área” no produto misto?

Quantitativamente, há erros de entrada do tipo compreensão na atividade 10, por motivos já explicados anteriormente; os erros de Organização de Informação do tipo Análise e Síntese e Ordenação diminuíram; de forma contrária, os de Conexão e Interferências aumentaram.

A diminuição se deu porque alguns alunos conseguiram resolver os problemas de 11 a 13, ainda que, pela aplicação direta da fórmula, no caso dos erros de Análise e Síntese; e pelo entendimento da questão, em relação aos erros de Ordenação.

Por outro lado, os erros de Conexão e Interferência aumentaram devido a necessidade da utilização dos conhecimentos da tarefa anterior e, assim, sucessivamente, até a 13. Consequentemente, essa relação incorreta entre os conceitos implicou em falta de conexão impossibilitando a resolução da questão e levando a erros Estratégicos nos procedimentos para a conclusão do problema, o que pode justificar a sua alta frequência nos resultados.

Apesar dos estudantes não conseguirem fazer conexões adequadas, vale ressaltar que o fato deles apresentarem o entendimento do que é necessário para resolver a questão já demonstra melhora em seus processos cognitivos. Bastos e Allevato (2018, p. 5) entendem que “o erro deve ser respeitado no aluno, por dar indícios de um processo cognitivo impróprio, e não somente como consequência da carência de conhecimento específico ou uma distração”.

Vale ressaltar que uma característica em comum dessas questões é a necessidade do desenvolvimento algébrico para chegar ao resultado. Sobre o ensino de Álgebra, de forma geral, Ribeiro e Cury (2015, p.16) ressaltaram que esse é, muitas vezes, “ancorado na manipulação algébrica, sem o desenvolvimento das capacidades de abstração e generalização”, suscitando em dificuldades no aprendizado do aluno, em especial, em cursos superiores ligados a área de matemática e de engenharia.

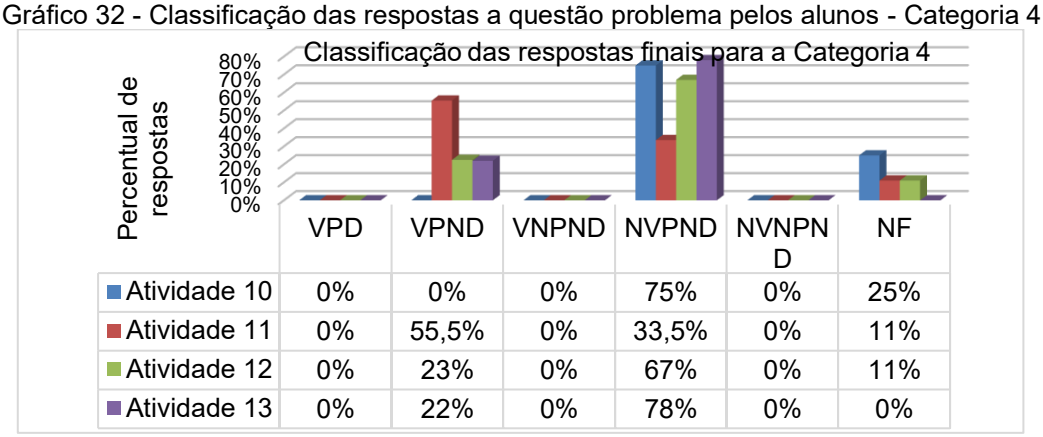
Portanto, nessa categoria, não foram verificadas respostas VPD, Booth (1995) destaca que os alunos, às vezes não resolvem determinada questão, devido as dificuldades algébricas e não pela falta de entendimento, nesse

sentido, esse fator pode ter contribuído para a não resolução integral das questões.

As consideradas VPND foram obtidas por poucos alunos que aplicaram de forma satisfatória as equações ou as citaram, porém a fizeram de forma direta sem explicitar a origem das fórmulas; esse tipo de resolução foi realizado sempre pelos mesmos alunos.

As NVPND demonstraram o interesse dos alunos em tentar resolver as questões, apesar das dificuldades; consequentemente, diminuindo o número de estudantes que não estavam apresentando tentativas de resolução. Outro destaque é em relação ao pequeno número de alunos que não tentaram resolver a questão. O Gráfico 32 apresenta a síntese das classificações das respostas para essa categoria.

Gráfico 32 - Classificação das respostas a questão problema pelos alunos - Categoria 4



	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 10	0%	0%	0%	75%	0%	25%
Atividade 11	0%	55,5%	0%	33,5%	0%	11%
Atividade 12	0%	23%	0%	67%	0%	11%
Atividade 13	0%	22%	0%	78%	0%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

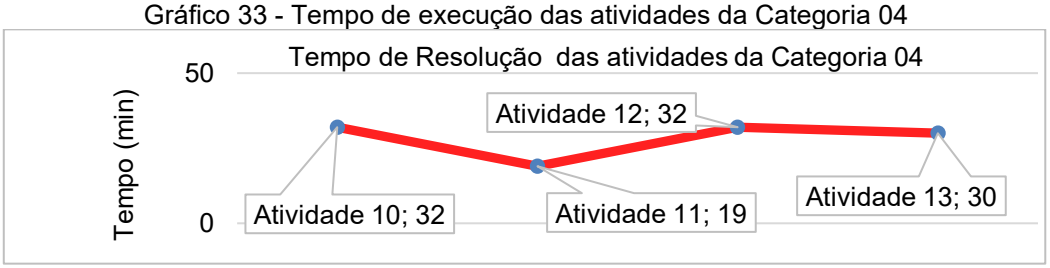
Aspectos como a tentativa de resolução da questão devem ser avaliados positivamente considerando a não previsibilidade da resolução e a exigência destas em utilizar procedimentos algébricos; dentro dessa perspectiva, Brum e Cury (2013, p. 47) ressaltam que

> Os procedimentos que fazem parte do cenário algébrico são complexos para muitos estudantes. Para resolver uma equação, fatorar uma expressão algébrica ou simplificá-la para reduzi-la a uma expressão mais simples, os alunos precisam utilizar conhecimentos e técnicas, bem como realizar manipulações algébricas, às vezes sofisticadas. O uso de convenções algébricas, o conceito de variável, o conceito de incógnita, o recurso a determinado produto notável, o uso de letras em álgebra, a diversidade de situações que se referem a variável e incógnita indiferentemente, comprometem, muitas vezes, a compreensão dos estudantes (Brum e Cury, 2013, p.47)

Dentro desse aspecto, concordamos com os autores sobre a necessidade de conhecimentos técnicos para a resolução das atividades e da dificuldade de compreensão de álgebra e, desta forma, como destacado por Booth (1995) implicam, na maioria das vezes, na não resolução da questão, pois é possível entender onde se quer chegar mas o caminho a ser trilhado nem sempre é fácil de perceber.

Sobre o tempo de resolução das atividades, foi observado um padrão semelhante as demais categorias; a média de tempo está em torno de 28 minutos. Contudo, como essa categoria trata de RP há um controle maior do tempo pelo professor de acordo com a percepção se os alunos estão utilizando estratégias coerentes ou não para a resolução das questões. O Gráfico 33 mostra as variações de tempo para cada atividade.

Gráfico 33 - Tempo de execução das atividades da Categoria 04



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Especificamente, na 11, a estratégia de resolução por relação trigonométrica foi utilizada pela maioria dos alunos e, dessa forma, a resolveram em menos tempo. Porém, de forma geral, pode-se considerar que as atividades são adequadas para serem desenvolvidas em sala de aula.

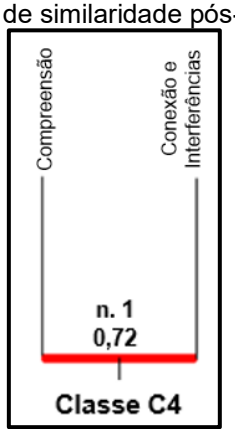
A seguir, é apresentado o mapeamento estatístico dos dados por meio do CHIC e do teste de Fischer, para fins de complementação da análise.

6.1.5.1. Mapeamento dos dados pelo CHIC e pelo Teste de Fischer – Categoria 4

Para a análise por similaridade as variáveis suplementares foram: Anal_Sint (Análise e Síntese) e Estrategicos (Estratégicos). A árvore de similaridade estava constituída por uma única classe: C4, com um índice de

similaridade de 0,7. A Figura 36 apresenta a árvore de similaridade após o tratamento, com o índice de similaridade indicado.

Figura 36 - Árvore de similaridade pós-tratamento - Categoria 4



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

A variável típica a classe C4 foi Anal_Sint com um risco de 0,129 e os sujeitos típicos foram A1Atv10Cat04S04 e A5Atv10Cat04S04. O Quadro 107 apresenta a interpretação da única classe considerada na árvore de similaridade para a categoria 4.

Quadro 107 - Interpretação da Árvore de similaridade – Classe C4 - Categoria 4

Classe	Variáveis	Interpretação
C4	**Compreensao**: Erro de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação, subcategoria **Erro de Compreensão**. **Conex_Interf**: Erro de Organização da Informação, tipo **Erro de Conexão e Interferências**.	Os alunos que tiveram erro de Compreensão são os que tiveram erro do tipo Conexão e Interferências.

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

De forma clara, esse resultado deixa explícito o que foi afirmado por Brum e Cury (2013) sobre a falta de compreensão, em relação a capacidade de conceitualizar ou expressar um problema em termos diferentes e, nesse caso, no entendimento da álgebra matematicamente ao longo da vida escolar, o que pode ter levado a não utilização adequada dos conhecimentos adquiridos em experiencias passadas.

Para a análise de Hierarquia Coesitiva, os nós encontrados não foram considerados por apresentarem um índice de coesão menor que 0,7. Em relação ao Teste de Fischer foi encontrada uma associação estatística significativa mostrada no Quadro 108 quadro abaixo.

Quadro 108 - Associações estatísticas significativos entre as variáveis do MADE - Categoria 4

Variável 1	Variável 2	p-valor	Efeito V-Cramer
Erro de organização da informação, tipo Análise e Síntese	Erro no plano da execução, tipo Estratégicos.	0,004	Grande
Resultado: houve associação estatística significativa entre as variáveis			

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, é possível dizer que os erros de Conexão e Interferência estavam associados estatisticamente aos Estratégicos, de acordo com o Teste de Fischer, o que confirmou a utilização de procedimentos inadequados para resolver as atividades. A seguir é feita uma breve síntese da análise dessa categoria.

6.1.5.2. Síntese da Categoria 4

A Categoria 4 analisou as atividades de 10 à 13 do tipo RPPP, porém nas análises prévias considerou-se que os alunos teriam dificuldades em resolvê-las por envolver o desenvolvimento algébrico; já destacado como um conhecimento de grande dificuldade nas pesquisas de Brum e Cury (2013). A atividade 10 foi realizada na sessão 04 e as demais na sessão 05. Todas foram resolvidas de forma individual.

Os erros de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação foram verificados, somente, na atividade 10, devido a uma questão de significado do termo magnitude, por dois alunos, A1 e A5. De acordo com a análise por similaridades, os estudantes que tiveram esse tipo de erro, também tiveram o de Conexão e Interferência da categoria erros de Organização da Informação.

Em relação aos erros de Organização da Informação esses foram mais frequentes, devido a não conclusão das atividades pela maioria dos alunos, o que, de forma alguma, significa que as atividades não tiveram sucesso, pelo contrário, o fato já era previsível e os equívocos observados tornaram-se subsídios para a fase de institucionalização.

Na atividade 10, os erros de conexão e interferência foram identificados porque apesar dos alunos demonstrarem as propriedades do vetor paralelo não conseguiram relacionar com a magnitude 1; o fato de não conseguirem desenvolver matematicamente a questão implicou em erros de Análise e Síntese, já que as características relevantes e os passos a seguir não estavam claros para os alunos. Da mesma forma, algumas resoluções da atividade 11

levaram a equívocos de conexão e interferência e de execução do tipo estratégicos.

Na atividade 12, os erros de Análise e Síntese foram apontados devido os alunos não conseguirem identificar as propriedades do produto escalar que deveriam ser utilizadas, ou por não conseguirem desenvolver a questão algebricamente ou por indicarem de forma incorreta uma estratégia para a resolução como a lei dos senos e tangente. Ainda nessa atividade, a indefinição de como resolver e/ou a utilização de estratégias incorretas levaram a erros de Execução do tipo Estratégicos.

Na atividade 13, os erros de Organização da Informação concentraram-se nos de Análise e Síntese pois os alunos não sabiam como obter a altura ou volume do tetraedro; os de Conexão e Interferência foram devido, na maioria das vezes, a utilização indevida do módulo e do produto vetorial.

Erros Estratégicos por escolher incorreta da operação, da equação etc. foram identificados, ainda, na atividade 13. Os erros Operacionais e de Distração também foram verificados em relação a representação e utilização do módulo na fórmula de volume, em especial, aos que aplicaram diretamente o produto misto para resolver a questão. Aliás, vários discentes resolveram as questões dessa maneira, utilizando as equações já conhecidas.

O fato de alguns estudantes resolverem a questão com as fórmulas não era o objetivo das tarefas, cuja função principal era encontrar os invariantes, e, por isso, várias respostas foram consideradas como VPND. Por outro lado, as que não chegaram ao resultado foram classificadas como NVPND.

Em relação ao tempo de execução das atividades, foi observado o mesmo padrão das categorias anteriores, com destaque de que, para esse tipo de atividade, o professor pode ter um maior controle ao perceber que os alunos não irão conseguir resolvê-las e pode passar para a fase de institucionalização.

Estatisticamente, a análise por Hierarquia Coesitiva não foi realizada pois os índices de coesão estavam abaixo de 0,7; na análise de similaridade foi encontrada uma classe já discutida nessa síntese e pelo teste de Fischer uma associação estatística significativa foi constatada entre as variáveis erros de Conexão e Interferência e erros Estratégicos.

No mais, essa categoria, nos revela o entusiasmo dos alunos o que pode nos dar indícios de autonomia em resolver problemas, pois foram poucos os

alunos que não tentaram resolver as tarefas; além de revelar aspectos de um processo cognitivo impróprio, tal como destacado por Bastos e Allevato (2018).

Dentro desse contexto, ao analisar os erros matemáticos na resolução de problemas, Bastos e Allevato (2018, p. 13) destacam que

> Assim, o erro pode ser visto com uma valiosa fonte de informações, um sinal, nem sempre muito claro, de que ele pode redirecionar o processo de ensino-aprendizagem. Há a possibilidade de ser também uma fonte de motivação, uma oportunidade para os alunos refletirem, argumentarem discutirem e reverem seus conhecimentos para uma melhor compreensão e uma maior familiaridade com o raciocínio lógico, matemático e físico (Bastos e Allevato, 2018, p. 13).

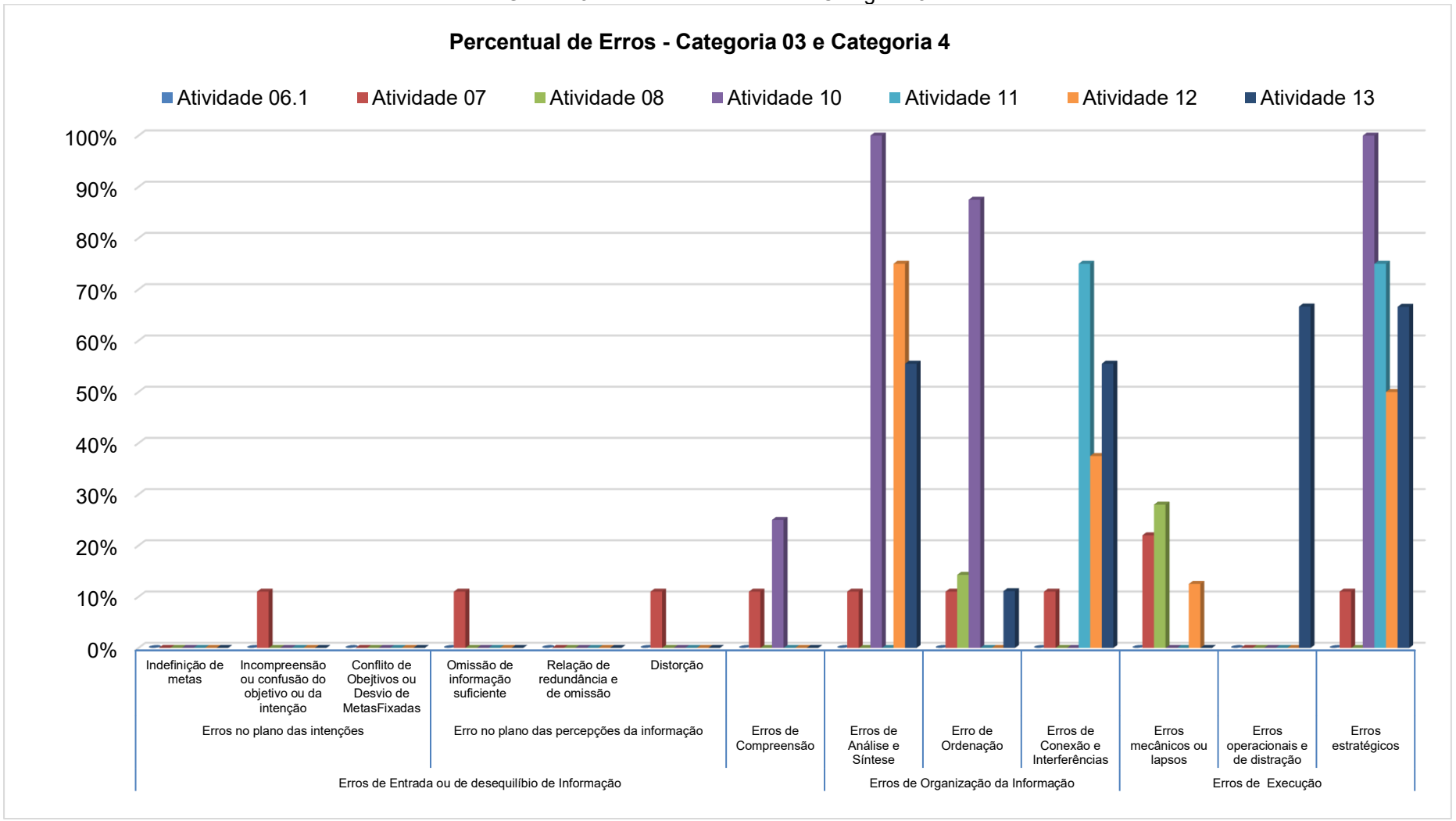
Além disso, há que se prever um enorme ganho de aprendizado nos erros que foram identificados e discutidos em sala. Outro destaque é em relação a surpresa dos alunos durante a resolução na demonstração da obtenção dos invariantes. A seguir, uma breve análise comparativa entre os resultados da Categoria 3 e 4 são apresentados.

6.1.6. Breve análise comparativa entre os resultados da Categoria 3 e da Categoria 4

As categorias 3 e 4 diferenciaram-se, apenas, pelo fato de que a segunda não previa a resolução dos problemas pelos alunos e tinha por objetivo principal apresentar os invariantes a partir do desenvolvimento algébrico tendo conteúdos, funções e propriedades já conhecidos como base; nas da 3, apenas, manipulações aritméticas eram necessárias. Portanto, tal como feito com as categorias 1 e 2, a análise comparativa aqui apresentada será de grande valor para a análise final e validação da tese.

Os erros de Entrada tiveram pouca frequência nas duas categorias, ao contrário, dos de Organização da Informação e de Execução. Comparativamente, a categoria 4 apresentou maior número de erros. O que pode ser justificado pelos argumentos de que: 1) por não serem previsíveis de serem resolvidas pelos alunos, as questões tendiam a ter maior grau de dificuldade; 2) exigia, algumas vezes, a conexão entre vários assuntos; 3) exigiam desenvolvimento algébrico. O Gráfico 34 apresenta os erros, de forma percentual, das atividades das Categorias 3 e 4.

Gráfico 34 - Percentual de erros - Categoria 3 e 4

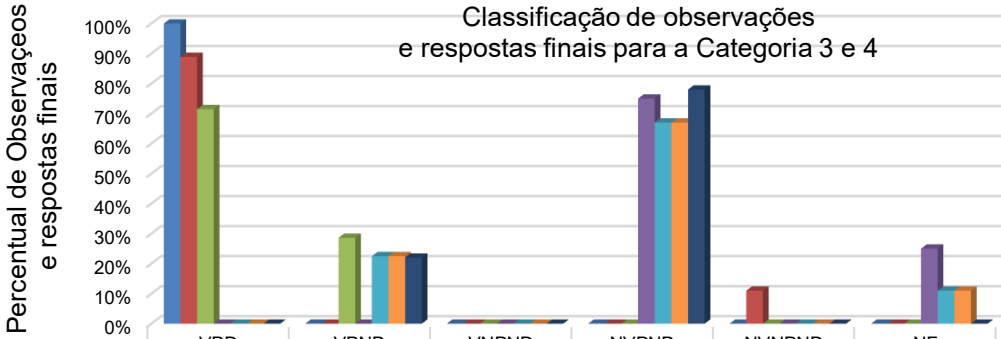


Fonte: elaborado a partir de dados da pesquisa.

Sobre as respostas, obviamente, na Categoria 3, como a maioria dos alunos as resolveram o índice de VPD é considerável. Contudo, na Categoria 4, não houve repostas VPD, pois nenhum dos alunos chegou aos invariantes via desenvolvimento algébrico. Nesse caso, algumas respostas foram classificadas com VPND, pois os alunos aplicaram diretamente a fórmula para resolver o problema; as NVNPND, nas duas categorias, representam os alunos que apresentaram respostas incorretas.

Para as duas categorias é importante frisar as repostas NF, isentas na categoria 2, e, com uma diminuição no decorrer das atividades da 3. O que indica o interesse do aluno em aprender, em resolver, em construir o conhecimento, mesmo nas questões consideradas difíceis. O Gráfico 35 apresenta a classificação das respostas finais das duas categorias.

Gráfico 35 - Classificação das respostas finais para as Categorias 3 e 4



	VPD	VPND	VNPND	NVPND	NVNPND	NF
Atividade 06.1	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Atividade 07	89%	0%	0%	0%	11%	0%
Atividade 08	72%	29%	0%	0%	0%	0%
Atividade 10	0%	0%	0%	75%	0%	25%
Atividade 11	0%	23%	0%	67%	0%	11%
Atividade 12	0%	23%	0%	67%	0%	11%
Atividade 13	0%	22%	0%	78%	0%	0%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Sobre o tempo de resolução, ao olhar, individualmente, para cada categoria, o mesmo padrão visto nas análises anteriores é observado. Estatisticamente, não foi possível analisar via árvore hierárquica de coesão pois os índices estavam abaixo de 0,7.

A análise por similaridade na categoria 3, mostrou aproximação entre erros de Compreensão e os advindos de pouco conhecimento do conteúdo, bem como, com os erros de procedimento; revelou ainda, similaridades entre os de Análise e Síntese os de conexão e interferências. Para a categoria 4, foi contatada similaridade entre os erros de compreensão e de conexão e interferências.

Pelo teste de Fischer, as associações estatísticas significativas encontradas confirmaram as evidências da Árvore de Similaridade para a categoria 3; para a 4, foi encontrada uma associação estatística significativa entre as variáveis erro de Organização da Informação, tipo Conexão e Interferência e outra, entre esta última e Erros Estratégicos. O que nos indica que a pouca familiaridade com a linguagem algébrica dificultou a resolução das atividades.

Como é perceptível, a análise comparativa nos deu indícios de que problemas com resolução de cunho aritmético tendem a ter menos erros, porém questões mais exigentes impulsionam o destaque dos erros que podem ser trabalhados em um processo de construção do conhecimento e, ainda, revelar, dificuldades em conectar e relacionar conteúdos anteriores pelos alunos, bem como, demonstrar aplicações a partir do conhecimento que possuem, mas, que, por vezes não sabem utilizá-lo.

Por outro lado, as demais atividades, que os alunos resolveram de forma consciente, podem ter suscitado a autonomia e a autoconfiança, já que, mesmo diante das dificuldades, os discentes tentaram resolver todas as questões e, ao final, ficaram satisfeitos em ver uma maneira de resolvê-las ainda não conhecida e por encarar e descobrir suas falhas e consertá-las.

Pedagogicamente, mais uma vez, os problemas nos mostram o quão difícil é para os alunos resolverem e desenvolverem soluções algebricamente, o quão difícil é interrelacionar conceitos já aprendidos, o quão difícil é utilizar conteúdos simples e corriqueiros para resolver questões quando estão acostumados com a fórmula pronta. Assim, cabe um olhar voltado para esses apontamentos e a proposição de alternativas que melhorem o processo de ensino e aprendizagem dentro desse contexto.

6.1.7. Confronto entre análise e à *priori* e à *posteriori*

O Quadro 109 a seguir apresenta o confronto entre a análise a priori e a posterior a avaliação da validação da sequência didática, de acordo com as descrições apresentadas.

Quadro 109 – Confronto entre análise a *priori* e a *posteriori*

ATIVIDADE	ANÁLISE A *PRIORI*	ANÁLISE A *POSTERIORI*	VALIDAÇÃO
01) Tipos de Grandezas	Era esperado que os alunos completassem o quadro, majoritariamente, de forma correta. Na fase de registro e análise era possível que tivessem dificuldade em expressar suas observações de forma escrita, devido esse tipo de atividade, que envolve análise e dedução, não ser comum. Porém, era provável que as diferenças entre as grandezas fossem observadas. Contudo, intervenções deverão ser realizadas, caso necessário.	Os alunos, como previsto, em sua maioria, completaram o quadro de forma correta. Para o campo Observações algumas dificuldades foram verificadas que foram sanadas durante a aula. Algumas inquietações se deram por se tratar da primeira vez que se depararam com esse tipo de atividade. No mais, os discentes conseguiram entender as características diferentes entre uma grandeza vetorial e uma escalar, bem como, identificá-las e "conhecê-las", que era um de seus gargalos. O percentual de observações VPD foi de 80% e NVNPND de 20%.	**POSITIVA**
02) Deslocamento	Com essa atividade era esperado que alunos conseguiriam identificar os deslocamentos, bem como, associar que o deslocamento na horizontal é ao longo do eixo x e na vertical ao longo do eixo y e sua obtenção a partir da diferença entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial. Contudo, podiam ocorrer dúvidas em relação ao trecho em que os deslocamentos são na horizontal e vertical e alguma intervenção fosse necessária. No mais, a análise do deslocamento ao inverter o sentido pode possibilitar o entendimento de que inversões do sentido, não implicam, em alteração na direção, bem como, no valor absoluto do deslocamento. Contudo, pode haver algum tipo de confusão em relação à direção e ao sentido no registro das observações.	Todas as equipes preencheram a tabela da atividade de forma correta, bem como, as observações. Contudo, nenhuma das equipes destacou a forma como o deslocamento foi obtido, apesar de calculá-lo de forma correta e apresentar características condizentes extraídas a partir do preenchimento da tabela. É importante ressaltar que a maioria dos grupos relataram os "sentidos contrário" apesar de não o relacionarem com a "mesma direção", mas com o deslocamento. Sobre a obtenção do deslocamento demostraram saber como foi obtido, porém não o sistematizaram, apesar de o terem calculado corretamente. O percentual de observações VPD foi de 80% e de NVPND, de 20%.	**POSITIVA**
03) Definir vetor	Com essa atividade era esperado que os alunos conseguiriam identificar as componentes dos deslocamentos de forma correta e percebessem que é possível que pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento culminando com a definição de vetor. Para essa atividade, esperava-se que os alunos não tivessem dificuldades e nem grandes questionamentos durante o andamento e conclusão, mesmo porque a pergunta final era bastante direcionada.	Os alunos não tiveram dificuldade na resolução dessa atividade, encontraram as componentes dos deslocamentos de forma correta e responderam a questão, também, corretamente; indicando o entendimento da atividade proposta e de seu objetivo. 100% das observações foram VPD.	**POSTITIVA**

04) Coordenadas de um ponto terminal	Com essa atividade, era esperado que os alunos conseguiriam definir as coordenadas dos pontos de forma satisfatória utilizando, intuitivamente, o somatório da coordenada x ou y do ponto inicial com a componente x ou y do vetor. Contudo, para a generalização da fórmula poderia haver alguma dificuldade, pois, historicamente, o modo tradicional de ensino não estimula esse tipo de descoberta e/ou questão a ser resolvida pelos alunos. No mais, a resolução de forma correta da primeira parte da atividade, já nos dará indícios do alcance do objetivo e do aprendizado baseado, também, nos conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores.	Os resultados indicaram que os alunos possuíam habilidades matemática para resolver problema, mas tinham dificuldades de interpretação algébrica e sistematização das ações realizadas. Apesar disso, conseguiram perceber a expressão algébrica correta e os erros na primeira parte, principalmente, em relação as formas de representação de ponto e vetor. Portanto, como esperado os alunos, em sua maioria, conseguiram resolver a primeira parte da atividade, mas tiveram dificuldades em generalizar a fórmula. 40% das observações foram VPND; 20%, VNPND e, igualmente, 20%, NVNPND.	**POSITIVA**
05) Definir Módulo de um vetor	Para essa atividade, era previsível que os alunos conseguiriam calcular a distância de forma correta e, até mesmo, apresentassem a fórmula corretamente. Ao final, esperava-se que os alunos pudessem entender e sanar dúvidas acerca não, somente, do cálculo da distância, mas do conceito, significado e importância do conhecimento do módulo de um vetor; mesmo porque uma aplicação direta foi apresentada a eles. Contudo, ainda assim, podia aparecer erros de representação.	De forma geral, para essa atividade, não foram observadas dificuldades, em especial, na parte inicial, em resolvê-la, mesmo porque o teorema de Pitágoras era de conhecimento dos alunos, inclusive algumas duplas utilizaram a notação de módulo para apresentar a fórmula para o cálculo da distância entre as antenas; contudo, foram observados erro de representação. 40% das observações foram VPD e, igualmente, 40% classificadas como VPND e 20%, NVNPND.	**POSITIVA**
,06) Adição de vetores	Para essa atividade, esperava-se que os alunos conseguiriam resolver o problema inicial considerando os conteúdos anteriores envolvendo deslocamento que, de dessa forma, passariam a ser vistos como um exercício; nesse sentido, a resolução da atividade experimental poderia suscitar observações diversas envolvendo tanto a soma vetorial algébrica quanto a geométrica e a disposição do vetor soma no plano, verificadas nos gráficos desenhados; podendo, assim, ser necessário algumas intervenções para direcioná-la ao objetivo da atividade.	Como previsto, o problema inicial foi resolvido pelos alunos utilizando conhecimentos das atividades anteriores, bem como, a parte 02, apesar de trabalhosa suscitou observações válidas, previstas e desejadas, ainda que incompletas, pois alguns destacaram a soma algébrica e outras, a geométrica. Tanto para a parte relativa a RP, quanto para a experimental, 100% das observações foram VPD.	**POSITIVA**
07) Definir Vetor Oposto	Para essa atividade, o problema tendia a ser um motivador para a introdução dos assuntos, pois era esperado que os alunos conseguiriam resolvê-lo de forma rápida e correta a partir do que foi visto nas atividades anteriores. Assim, o problema passaria a ser visto pelos discentes como exercícios. A atividade tendia a mostrar que um simples contexto e aplicação pode melhorar o desempenho e motivação dos alunos.	Ao final da atividade, pode-se inferir que o problema foi visto como exercício para a maioria dos alunos, pois conseguiram resolvê-lo; atendendo o previsto: ser visto como um motivador inicial para a introdução de novos assuntos a partir de um contexto simples. 89% das respostas foram VPD e 11% NVNPND.	**POSITIVA**

08) Multiplicação por um escalar	Para essa atividade, era previsível que os alunos conseguiriam resolvê-la pelos conteúdos anteriores e, também, perceberiam ao final o efeito da multiplicação por um escalar nos vetores aplicados ao longo do deslocamento. Portanto, assim como nos problemas anteriores, tendia a ser um motivador para o conteúdo a ser ensinado, mesmo porque apresentava um contexto de uma das áreas de estudo da Engenharia Elétrica.	Ao final da atividade, pode-se concluir que os alunos conseguiram resolvê-la com êxito, sendo pelo deslocamento vetorial ou ao conseguir visualizar a multiplicação por um escalar ao longo do caminho entre os pontos; sendo assim, o problema passou a ter, para esses alunos um caráter de motivador para a aprendizagem dos conteúdos. 72% das respostas foram VPD e 29% VPND.	**POSITIVA**
09) Definição de vetor paralelo	Para essa atividade, era previsível que os alunos conseguiriam preencher a parte inicial do quadro de registros de forma correta e chegar à conclusão desejada. Contudo, poderia acontecer que dúvidas aparecessem em relação a diferença entre observação e conclusão, ou da relação que deve existir entre elas, por ser a primeira atividade com esse formato que estariam realizando; dúvidas, nesse teor, deveriam ser dirimidas durante o andamento da atividade.	Ao final dessa atividade, foi possível chegar à conclusão da turma, tal como desejado; em relação ao quadro de registros, o preenchimento foi, em sua maioria, feito de forma correta, bem como, a elaboração da conclusão por grupo. Contudo, os alunos não conseguiram relacionar os campos observação e conclusão, como esperado; porém, isso não acarretou dificuldades no aprendizado ou no andamento da atividade. O percentual de Conclusões VPD foi de 66% e de 33% para as NVNPND.	**POSITIVA**
10) Vetor Unitário	Para essa atividade, era previsível que os alunos não conseguiriam resolvê-la e a vissem, de fato, como um problema. Contudo, esperava-se que eles tendiam a solucioná-la, de alguma forma, utilizando os conhecimentos adquiridos sobre vetores paralelos e, até mesmo, pelo título ou pela definição de vetor paralelo; porém, era pouco provável que cheguem ao invariante desejado. No mais, a própria tentativa de solução, nos dará indícios da motivação dos alunos com o método de ensino e da confiança adquirida com a resolução e entendimento das atividades anteriores.	Como esperado, grande parte dos alunos tentaram resolver o problema, porém não conseguiram chegar ao invariante final, alguns tentaram revolver pelo título por terem conhecimento de vetor unitário, outros utilizando o conteúdo de vetor paralelo visto anteriormente. Contudo, as tentativas de resolução nos deram indícios da melhora do entusiasmo, confiança e da boa recepção da metodologia proposta. O percentual de respostas NVPND foi de 75% e de NF, de 25%.	**POSITIVA**
11) Produto Escalar	De acordo com o nível de dificuldade do problema proposto, era esperado que os alunos não conseguiriam solucioná-lo a *priori*, a menos que conhecessem a lei dos cossenos. Contudo, estimou-se que alguns alunos tentariam resolvê-lo por relação trigonométrica ou pela aplicação direta da fórmula. Por outro lado, o fator surpresa da demonstração do invariante para chegar ao produto escalar tendia a motivar os alunos e a percepção de que, para a resolução da maioria dos problemas matemáticos, eles já tinham conhecimento das ferramentas a utilizar, mas não foram treinados dessa forma.	Ao final dessa atividade, como esperado, os alunos não conseguiram resolvê-la da forma desejada: encontrando o invariante; porém, alguns a resolveram pela relação trigonométrica ou aplicação direta da fórmula. No mais, para esse tipo de problema, o mais interessante é o papel motivador e a possibilidade de chegar a um invariante com conhecimentos já existentes e não utilizados para tal fim. Pode-se dizer que a atividade cumpriu o seu papel e impulsionou os alunos a tentar resolvê-la, o que foi perceptível pelo fator surpresa durante a resolução. 55,5% das respostas foram VPND; 33,5%, NVPND e; 11%, NF.	**POSTITIVA**

12) Produto Vetorial	Essa atividade apesar de ser resolvida a partir da definição de produto escalar, provavelmente, não será solucionada pelos alunos devido a pouca familiaridade com questões que envolvem demonstração, porém a maturidade adquirida com as atividades anteriores e com o método tende a ser um fator que estimule o aluno a tentar chegar à solução final. Contudo, resoluções incorretas por decomposição de forças são esperadas e tentativas de resolução por meio da ortogonalidade ou intuições a partir desta característica, também.	Como previsto, para essa atividade, os alunos não obtiveram êxito na resolução, porém foi possível perceber a tentativa de utilizar conceitos anteriores visto em produto escalar e da condição de ortogonalidade; outros, ainda, tentaram aplicar a fórmula do produto escalar e/ou do produto vetorial diretamente. Todas as tentativas vistas nos deram indícios do entusiasmo e melhora da confiança dos alunos diante da resolução de problemas que, apesar, da dificuldade do problema não se sentiram intimidados em tentar solucioná-lo. 23% das respostas foram VPND, 67% NVPND e 11%, NF.	**POSITIVA**
13) Produto Misto	Essa atividade pode ser considerada de um nível difícil por envolver vários conhecimentos anteriores e interpretação geométrica; no entanto, era possível que sugerissem, ao menos, a solução utilizando o produto vetorial para encontrar a área do paralelogramo, porém podiam ter dificuldades em expressá-la matematicamente de forma correta e, da mesma forma, para encontrar a altura a partir dos vetores dados que exigia um pouco mais de domínio matemático. Contudo, assim como nas atividades 11 e 12, o ponto principal a ser observado era a tentativa dos alunos em resolver o problema e, nesse caso, o mínimo de compreensão de que precisavam utilizar o produto vetorial de alguma forma já será considerado válido e nos dará indícios da aprendizagem dos conteúdos anteriores, além do fator motivação e entusiasmo presentes nas tentativas sem esperar, somente, pela resolução do professor.	Para essa atividade, pôde-se perceber que os alunos tentaram de alguma forma utilizar o produto vetorial para encontrar a área do paralelogramo e tiveram dificuldade para definir a altura que exigia um pouco mais de domínio e percepção matemática. Ainda, assim, como nas atividades anteriores, 11 e 12, há de se exaltar o fato dos alunos ao menos tentarem resolver a questão o que demonstrarem entusiasmo, motivação e autoconfiança, ainda que, não tenham conseguido, nem nesse e nem nos problemas anteriores chegar a solução completa. Essas características nos indicam o possível êxito da metodologia proposta. 22% das respostas foram VPND e 78%, NVPND.	**POSTIVIA**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, em termo da análise a *priori* e *posteriori* a sequência didática foi avaliada de forma positiva e atingiu as expectativas conforme esperado. Contudo, a avaliação positiva das atividades nem sempre se deu pelo fato dos alunos a resolverem de forma correta, mas pelos objetivos intrínsecos, de forma geral, por exemplo: a geração de motivação e entusiasmo dos alunos e pela percepção da evolução dos alunos em ternos de análise, dedução, domínio e autonomia.

6.1.8. Contributos da Sequência Didática à luz da Teoria da Atividade

A tese supõe que o ensino de vetores geométricos por meio da RPPP e por atividades experimentais favorece o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções.

A teoria da atividade de Vygotski (1991) diz que a autonomia surge da capacidade do sujeito de estabelecer regras a si mesmo, ou seja, de fazer escolhas conscientes e de tomar decisões; ao relacionar com a atividade de estudo, Davydov e Markova (1987) acreditam que o cumprimento das atividades podem constatar o grau de autonomia do estudante ao passar de um componente para outro.

Tendo por base Davydov (1988), a análise, dedução e domínio apresentam-se de forma interdependentes, desse modo, a análise é caracterizada pela construção da generalização e da abstração substantivas do material factual, por conseguinte a dedução, baseada nestas, e nas relações particulares de um dado objeto que leva ao objeto completo e, por fim, esse processo de análise e síntese leva ao domínio do procedimento geral de construção do objeto de estudo.

Assim, para a presente discussão, entende-se que a verificação dos contributos da sequência didática deve ser realizada em ordem cronológica da realização das tarefas, baseando-se no que foi observado na análise de erros e, principalmente, no encadeamento dos objetivos das atividades e do modo de desenvolvimento destas pelos alunos.

Portanto, será com base, especialmente, nesses aspectos que essa análise será delineada tendo como ponto de partida a construção de um conceito por meio da generalização e abstração à luz dos pressupostos teóricos da Teoria da Atividade.

A partir de um retrospecto da sequência didática, as atividades 01 e 02 levaram ao conceito de vetor, “descoberto” na atividade 03; de forma sequencial as tarefas 04 e 05 apresentaram as características do vetor, como coordenadas e módulo. A atividade 06, tratou da adição de vetores e deu o pontapé inicial no ensino das operações com vetores e forneceu subsídios a atividade 07 para a definição de vetor oposto.

Da mesma forma, a 08, de multiplicação por um escalar, deu suporte a 09, de definição de vetor paralelo e, esta, a 10, de vetor unitário. Por fim, as atividades de 11 à 13 de RPPP apresentaram as demais operações com vetores.

Ou seja, os conhecimentos estavam interrelacionados e independentes entre si, pois do anterior foi exigido um certo grau de abstração para a compreensão do seguinte e, assim sucessivamente. Para a 01, 02, 03 e 09, era suficiente uma resposta dissertativa; e para a 06, 07 e 08, somente, manipulações aritméticas.

Um atributo específico, como já comentado, foi solicitado nas atividades 04 e 05, conversão da linguagem aritmética para a algébrica para encontrar uma equação que generalizasse o que foi visto no experimento, e nas tarefas de 10 à 13, as manipulações algébricas foram necessárias para chegar ao invariante.

Portanto, após os devidos esclarecimentos, para relembrar algumas características da sequência didática experimentada, o ponto de partida para a análise é fundamentado na ideia de Vygotski (1991) que, tendo por base o aprendizado das crianças, iniciado antes de adentrarem a escola, apresenta uma zona de desenvolvimento proximal, que é a distância entre a capacidade da criança de resolver problemas por si própria, chamada de zona (ou nível) de desenvolvimento real (ZDR), e a capacidade de resolvê-los com a ajuda de alguém, denominada de zona (ou nível) de desenvolvimento potencial (ZDP).

A primeira, ZDR, é caracterizado por ciclos de desenvolvimento já completados; e, a segunda, a ZDP “[...] define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentes em estado embrionário” (Vygotski, 1991, p. 58).

Em um contexto escolar, é a ZDP que prevê a mediação do professor ou de companheiros para ajudar na solução de problemas. Aplicando a teoria ao contexto da sequência didática utilizada, por exemplo, é possível perceber um processo sucessivo de maturação dos conceitos, tal como: de vetor, especialmente, na resolução e na análise de erros da atividade 03, alicerçados na atividade 01 e 02 e, posteriormente na 04 e 05, assim como, na definição de vetor paralelo (atividade 09) demonstrando a base sólida conceitual formada nas demais atividades.

Além disso, a organização de forma lógica e correlata das atividades, tal como demonstrado na sequência didática utilizada, favorece o surgimento da ZDP, pois “[...] o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer” (Vygotski, 1991, p.61).

Assim, pode-se inferir que, apesar dos alunos terem uma ZDR acerca do assunto vetores esta estava, de certo modo, incompleta ou imbuída de equívocos; nesse aspecto, a metodologia utilizada nos permitiu adentrar e desenvolver a ZDP, pois os alunos passaram por um processo de maturação, de apreensão, até a formalização dos conceitos por meio das atividades experimentais: “[...] propiciando o acesso não somente ao que já foi atingido através do desenvolvimento, como também àquilo que está em processo de maturação” (Vygotski, 1991, p. 58).

Além disso, para Vygotski a aprendizagem que produz desenvolvimento é a que se desenvolve na ZDP. Nesse sentido, a formalização dos conceitos, no sentido amplo, tanto em linguagem natural, quanto aritmética e algébrica, nos induzem a garantir que as atividades possibilitaram um desenvolvimento mental desejado para a melhora do aprendizado do objeto de estudo; já que para Vygotski (2008, p.104)

> [...] um conceito é mais do que a soma de certas conexões e associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental; é um ato real e complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver atingido o nível necessário (Vygotski, 2008, p. 104).

Na concepção de Vygotski (2008) a formação do conceito pressupõe a abstração, isolar elementos e um combinação da síntese com a análise, além da generalização. Para Davydov (1988, p. 104), “a generalização se caracteriza como a via fundamental para formação de conceitos escolares”.

De forma complementar às características citadas e, de acordo, com a análise de erros e demais aspectos já listados, nos impulsionaram a intuir sobre o potencial positivo da experimentação didática no aprendizado e desenvolvimento dos alunos em termos de autonomia, análise, dedução e domínio, ao perceber, também, as efetivas conexões entre os resultados alcançados na resolução das atividades; Davydov e Slobódchikov (1991, p. 8, *tradução nossa*) dizem que as “ações que revelam e constroem conexões essenciais e gerais com os objetos servem como fonte para abstrações, generalizações e conceitos teóricos”.

Por outro lado, apesar do favorecimento do processo de ensino e aprendizagem, as atividades que tinham por método de resolução o desenvolvimento da utilização da linguagem algébrica e a conversão da aritmética para essa, revelaram dificuldades em termos de generalização; de acordo com Brum e Cury (2018, p. 49),

“um aspecto importante que bloqueia a concepção algébrica é o conceito de generalização”.

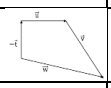
As tarefas 04 e 05, de conversão da linguagem aritmética para a algébrica, tiveram um bom desempenho, porém, ainda, incipiente comparado as atividades que exigiam uma resposta dissertativa; nesse sentido, há necessidade da exposição dos estudantes, em todos os níveis a expressões algébricas e, principalmente, ao desenvolvimento de expressões algébricas

Para as atividades de 10 à 13, não era previsível que fossem resolvidas por eles por ser de RPPP e ter por objetivo chegar aos invariantes, mas os estimulassem e os motivassem, e, também, por, hipoteticamente, não serem condizentes com o nível de aprendizado e maturação que possuíam, apesar do desempenho além do esperado como já discutido na análise de erros; nesse contexto, Davydov (1988) diz que as atividades de estudos também estimulam a assimilação de conhecimento teóricos.

Ainda, para fins de verificação de assimilação do conhecimento teórico, o Quadro 110 mostra o aproveitamento por questão, em percentual, obtido com a aplicação do Quiz na sessão de revisão, anterior a aplicação do pós-teste. O Quiz foi respondido por 07 alunos.

Quadro 110 - Aproveitamento por questão do Quiz aplicado na Experimentação

Questões	**Assunto**	**Quantidade de Acertos**	**Aproveitamento por questão (%)**
1. As grandezas escalares possuem somente magnitude, enquanto as vetoriais possuem direção, sentido e magnitude.	Diferenciar grandezas	07	100%
2 O deslocamento de um ponto A até um ponto B é dado por A – B.	Deslocamento	05	71,5%
3. Dado um deslocamento de A até B, o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é o conjunto de deslocamentos de A até B.	Deslocamento	06	85,7%
4. Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ seu módulo é obtido por $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$.	Módulo	07	100%
5. Dois vetores são paralelos se suas componentes são proporcionais.	Vetores Paralelos	06	85,7%
6. O vetor unitário é um vetor paralelo a um dado vetor $\vec{t}$ com a magnitude igual a de $\vec{t}$.	Vetor Unitário	04	57,14%
7. Ao multiplicarmos um vetor por um escalar, seu módulo também é multiplicado por esse mesmo escalar.	Multiplicação de um vetor por um escalar	07	100%
8. O módulo do produto escalar é dado por $\lvert\vec{u}x\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\text{sen}\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.	Produto Escalar	04	57,14%

9. Para calcular o menor ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é necessário encontrar o $\arccos\frac{\lvert\vec{u}x\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert}$.	Ângulo entre vetores	05	71,5%
10. A adição de um vetor com o seu oposto resulta em um vetor nulo.	Vetor Oposto	07	100%
11. A multiplicação de um vetor por um escalar a, sendo a<0, resulta em um vetor de mesma direção, porém de sentido oposto.	Multiplicação de um vetor por um escalar	05	71,5%
12. Podemos afirmar que três vetores são coplanares se o produto misto entre estes for igual a 0 (zero).	Vetores Coplanares	07	100%
13. O volume de um tetraedro definido por três vetores é igual ao módulo produto vetorial entre estes.	Produto Misto	04	57,14%
14. O resultado do produto misto é um vetor.	Produto Misto	06	87,5%
15. O produto vetorial de dois vetores resulta em vetor perpendicular a estes, simultaneamente.	Produto Vetorial	06	87,5%
16. A área de um paralelogramo definido por dois vetores é dada pelo módulo do produto escalar entre estes.	Produto Vetorial	04	57,14%
17. O produto escalar entre dois vetores perpendiculares é igual a 0 (zero).	Vetores Perpendiculares	05	71,5%
18. O resultado do produto escalar é uma grandeza vetorial.	Produto Escalar	07	100%
19. Dada a figura: O vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{t}$. 	Adição Vetorial	05	71,5%
20. Dado o vetor $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; os versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ indicam o sentido de $\vec{u}$.	Sentido e Direção	02	30%

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Na maioria dos assuntos, os alunos tiveram um bom aproveitamento, inclusive, nos assuntos tratados nas tarefas de caráter algébrico; no mais, para além da verificação da aprendizagem, o Quiz suscitou e possibilitou o esclarecimento de dúvidas em relação a alguns conteúdos, tal como, sentido e direção, além da, confirmação da validação positiva da metodologia aplicada.

Por fim, para além dos objetivos dessa tese, a Teoria da Atividade, em uma perspectiva teórica, tendo por instrumento uma sequência didática apoiada no ensino por atividades experimentais e por RPPP nos indica que a situação didática promoveu a apropriação de conceitos, do pensamento teórico e, por conseguinte, que as atividades de ensino evidenciaram a importância do professor como mediador e da atividade de aprendizagem, bem como, de seu planejamento, com objetivos delineados e pré-definidos; além de possibilitar o papel ativo e consciente do alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, há de se constatar que, apenas, pela avaliação do desenvolvimento das atividades há evidências de melhorias em termos de autonomia, análise, dedução, domínio, desempenho e emoções dos estudantes.

Para as Atividades Experimentais, em relação ao tempo, um comportamento similar foi relatado por Silva, C., Silva, A. e Sá (2024), bem como, em alguns aspectos tratados por Silva, Sá e Alves (2024) sobre o impacto positivo da elaboração de conclusões no que diz respeito, principalmente, a consonância com o objetivo, precisão e validade.

Para fins de complementação e validação dos demais efeitos positivos elencados na tese, a seção seguinte tem por objetivo verificar o desempenho dos estudantes tendo por base os resultados do pré e pós-teste e os questionários de emoções e socioeconômico respondidos pelos participantes da pesquisa.

6.2. VERIFICAÇÃO DE DESEMPENHO POR MEIO DO PRÉ E PÓS-TESTE

Como descrito anteriormente essa subseção é dividida em análise: de desempenho por questão, de desempenho individual e por meio de estatísticas. A seguir as considerações para cada um dos itens citados serão realizadas.

6.2.1. Desempenho por questão

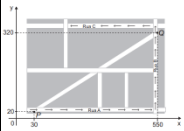
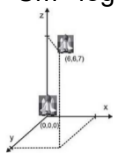
Para a verificação do desempenho por questão foi realizada uma análise comparativa entre o pré e o pós-teste seguindo a metodologia de análise de erros proposta por Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009). Assim, inicialmente, foram verificadas quais questões, nos testes, foram realizadas de forma Correta (C), Incorreta (I) ou em Branco (B). Lembrando que ambos os testes são iguais, diferenciando-se pelo momento de aplicação: antes (pré-teste) ou após (pós-teste) a experimentação.

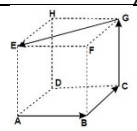
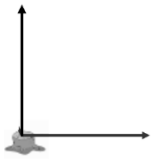
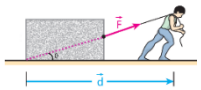
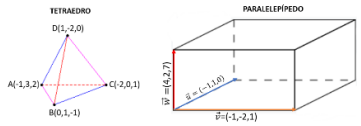
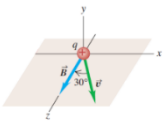
Os testes continham 10 questões; contudo, algumas, em seu enunciado, solicitavam mais de um item de resposta, por exemplo, na questão 01, além da classificação das grandezas, também era solicitado uma justificativa; nesses casos, as questões 01, 02, 03 e 05 foram “desmembrada” em itens para uma análise mais

criteriosa. Essa ação resultou em 19 itens a serem verificados, que foi definida como a pontuação máxima em cada uma das avaliações.

O Quadro 111 apresenta a quantidade e os totais de questões C, I e B, no pré e no pós-teste, de acordo com os itens “desmembrados” e os já existentes. Os itens sombreados vermelho são para destacar variações “negativas” e em amarelo que não foram verificadas alterações. As demais são alterações positivas.

Quadro 111 – Desempenho por questão: pré e pós-teste

QUESTÃO	ITEM	ACERTO		ERRO		BRANCO	
		PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
1. Dada as grandezas: distância, deslocamento, área, velocidade, temperatura e força. Complete o quadro abaixo, classificando-as em vetoriais ou escalares. No campo justificativa diferencie grandeza escalar de grandeza vetorial.	1.a) Classificação das grandezas	6	8	4	3	1	0
	1.b) Justificativa	6	9	3	2	2	0
2. Devido ao aumento de usuários  em uma determinada localidade, uma empresa de telefonia celular está realizando estudos para a implantação de uma nova antena para transmissão. A figura mostra a localização de duas de suas atuais antenas representadas por P e Q; a nova antena, localizada em um ponto T, deve estar entre P e Q. Os estudos indicam que o percurso de T até Q pode ser representado por $\overrightarrow{TQ} = (100,300)$. Determine $\overrightarrow{PT}$ e caracterize-o em relação a direção a sentido.	2.a) Determine $\overrightarrow{PT}$	3	10	5	0	3	1
	2.b) direção e sentido de $\overrightarrow{PT}$	2	4	1	0	8	7
3. Um foguete foi lançado do  marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros. Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z; ao final, do deslocamento. Determine a posição final do foguete e distância percorrida em	3.a) Posição final do foguete	6	5	5	5	0	1
	3.b) distância percorrida	3	9	4	1	4	1

relação a sua posição inicial (marco zero).							
 4. Com base na figura represente o vetor soma dos vetores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{GE}$.		3	10	5	1	3	0
5. Visto de cima, um toco firme é puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 200 N. Esboce a força resultante sobre o toco e responda:  a) qual a intensidade da força resultante? b) o que aconteceria com a intensidade do vetor resultantec) caso as forças fossem aplicadas na mesma direção, mas em sentido contrário. c) o que aconteceria com a intensidade da força resultante, caso o toco fosse puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 400N?	5.Esboço	6	8	1	1	4	2
	5.a)	8	8	2	2	1	1
	5.b)	1	6	8	4	2	1
	5.c)	6	10	3	0	2	1
6. Um engenheiro foi contratado para projetar uma placa solar para ser adaptada ao telhado de uma casa; utilizando um papel quadriculado, fez um esboço interligando os seguintes pontos de forma sequencial: A(4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3). Determine qual a área ocupada pela placa solar.		0	6	5	5	6	0
7. O esquema a seguir ilustra um homem que puxa um caixote por uma distância de 3 m ao imprimir uma força constante $\vec{F}$= (3,4). Calcule o valor do ângulo (θ) entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$. 		4	9	3	0	4	2
8. Uma estrutura metálica em forma de  paralelepípedo foi construída para guardar alguns objetos no formato de tetraedro, tal como mostrados na figura. Determine a quantidade de objetos em forma de tetraedro que podem ser guardados no paralelepípedo.		0	2	2	7	9	2
 9. A equação da força magnética em uma partícula carregada em movimento é $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Considerando a equação dada represente no plano a seguir a orientação da força magnética resultante.		1	6	0	4	10	1
10. Dado os vetores $\vec{P} = (2,0,-1)$, $\vec{Q} = (2,-1,2)$ e $\vec{R} = (2,-3,1)$. Determine: a) $\vec{P} \cdot \vec{R}$ b) $(\vec{P}+\vec{Q}) \times (\vec{P}-\vec{Q})$ c)$\lvert(\vec{P}+\vec{Q}) \times (\vec{P}-\vec{Q})\rvert$ d) $\vec{Q} \cdot (\vec{R} \times \vec{P})$	a)	4	10	4	1	3	0
	b)	0	6	7	5	4	0
	c)	4	9	2	1	5	1
	d)	0	7	6	4	5	0

TOTAIS							
QUESTÕES / itens	**ITENS**	**ACERTO**		**ERRO**		**BRANCO**	
		PRÉ	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**	**PRÉ**	**PÓS**
10 questões / 19 itens	19 itens x 11 alunos = 209	63	143	70	46	76	21
MÉDIA (total / número de itens (19))		3,3	7,5	3,7	2,4	4	1,1

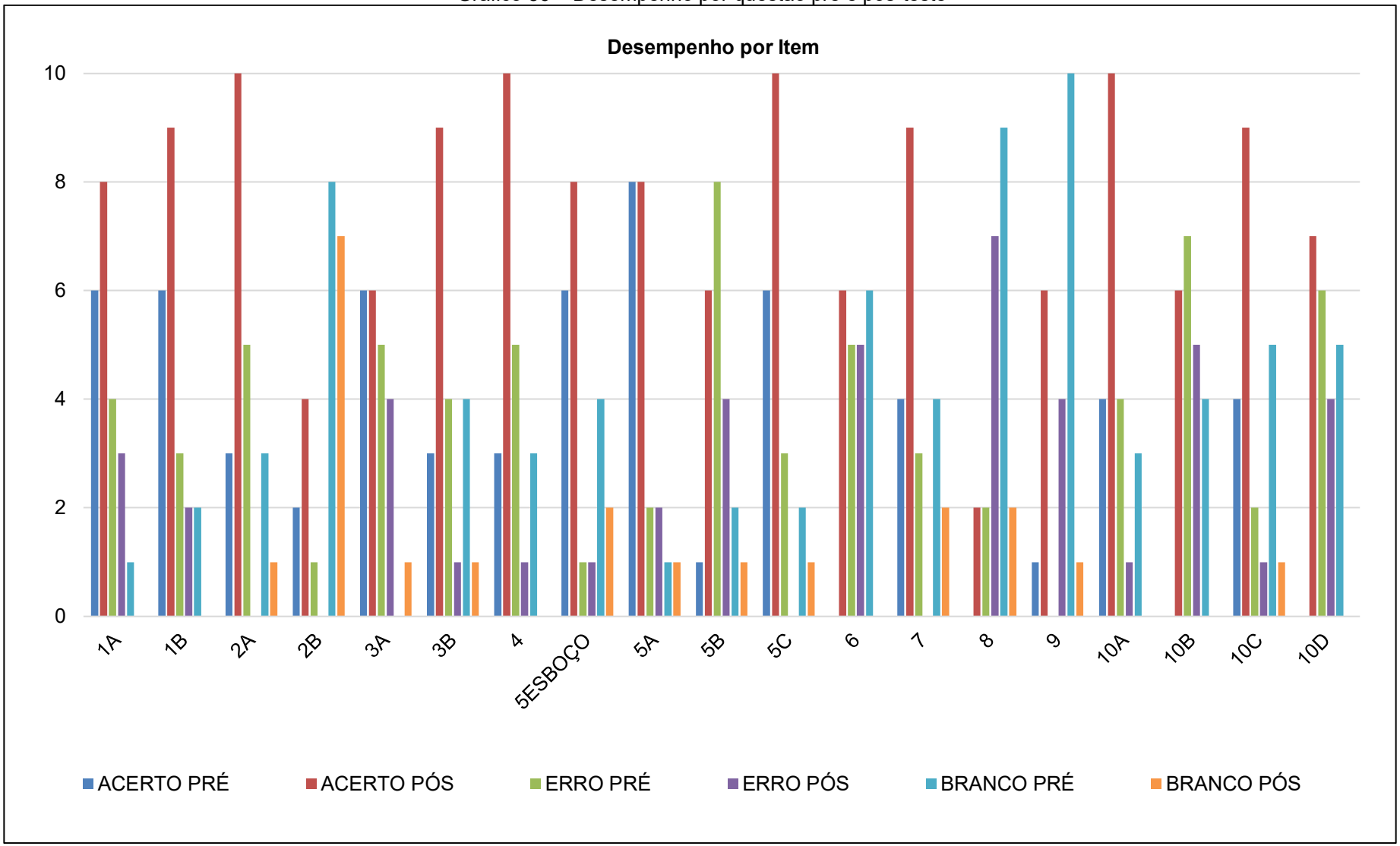
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os dados indicaram uma melhora significativa de desempenho do pós-teste em relação ao pré-teste. Em alguns casos, como nos itens 3A, 5A, 5ESBOÇO, e 6, o número de acertos e/ou erros, tanto no pré quanto no pós-teste foi o mesmo. Especificamente, no item 5A os valores foram os mesmos em todos os casos.

No entanto, no momento, não há que se falar que não houve melhora no desempenho, pois é preciso ver se os alunos que cometeram equívocos foram os mesmos e quais os motivos dos erros. O Gráfico 36, também, apresenta as informações tabuladas anteriormente.

Portanto, a *priori*, diante dos resultados, será feita uma análise por questão e, quando possível, agrupadas por assunto, para permitir uma comparação mais efetiva, por meio da categorização dos erros observados.

Gráfico 36 – Desempenho por questão pré e pós-teste



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

6.2.1.1. Análise da questão 01

A questão 01 teve por objetivo avaliar o conteúdo “Grandeza Escalar e Grandeza Vetorial” e envolveu dois itens: classificação das grandezas (1.a) e justificativa (1.b) das variáveis apresentadas. O quantitativo de equívocos de acordo com as categorias verificadas são apresentados no Quadro 112 relacionado aos dois itens, com a identificação dos alunos.

Quadro 112 - Análise de Erros - Questão 01

n.	CATEGORIA	ERROS	
		PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
01	Classificação correta com justificativa incompleta	3 (A2, A5, A7)	1 (A5)
02	Classificação de uma grandeza de forma incorreta e justificativa correta	2 (A9, A10)	1 (A7)
03	Classificação de uma grandeza de forma incorreta e justificativa em branco	1 (A4)	0
04	Classificação de duas grandezas de forma incorreta e justificativa incompleta	0	1 (A11)
05	Não classificou uma grandeza, porém a justificativa estava correta	1 (A6)	1 (A10)
06	Sem tentativa de resolução (em Branco)	2 (A11, A4 – somente justificativa)	0
Total		**07**	**04**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Do resultado, pode-se perceber o êxito no pós-teste, pois:

- Todos os alunos tentaram resolver os itens no pós-teste, zerando a quantidade de questões em branco;
- Apenas, A5 cometeu o mesmo equívoco em relação a justificativa incompleta, porém a classificação estava correta;
- A7 cometeu um equívoco no pós-teste não cometido no pré-teste, porém, ao contrário do teste anterior, a sua justificativa estava completa e correta;
- A10 não classificou a grandeza no pós-teste que havia errado no pré-teste, porém, nos dois casos, a justificativa estava correta;
- Por fim, A11 havia deixado a questão em branco no pré-teste e, apesar, dos equívocos no pós-teste, teve um aproveitamento melhor que no anterior.

Assim, o resultado apresentado para essa questão é condizente com o observado na atividade 01 que tratava do mesmo conteúdo, além disso, é possível observar respostas mais claras e seguras, além, da diminuição de erros e da não existência de questões em branco no pós-teste.

Em relação a classificação das grandezas, na atividade 01 o texto deixava explícito o módulo, direção e sentido de cada uma, quando vetorial, o que facilitou a sua identificação e, apesar, da questão do teste não apresentar textos complementares, ainda assim, o desempenho foi excelente; logicamente, influenciados, pelo aprendizado durante a sequência didática.

6.2.1.2. Análise das questões 02 e 03

As questões 02 e 03 tiveram por objetivo avaliar, especialmente, os conteúdos: direção, sentido, definição de vetor, encontrar coordenadas de um ponto terminal a partir de um vetor, deslocamento e módulo. Esses assuntos foram abordados nas atividades de 01 à 05.

A questão 02 solicitava, ao final, duas informações que, para essa análise, foram desmembradas em dois itens: determinar $\overrightarrow{PT}$ (2.a) e caracterizar $\overrightarrow{PT}$ em relação a direção e sentido (2.b). Os erros de 2.a são apresentados no Quadro 113, tanto para o pré quanto para o pós-teste; por não perceber relação interdependente entre os erros dos itens, a análise foi realizada de forma individual.

Quadro 113 - Análise de Erros - Questão 02 -Item 2.a. – Determinar $\overrightarrow{PT}$

ITEM 2.a – DETERMINAR $\overrightarrow{PT}$			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Obtenção do vetor de forma incorreta - Inversão das coordenadas de x e y	2 (A3, A7)	0
02	Determinação das coordenadas do ponto T a partir do vetor de forma incorreta	1 (A9)	0
03	Não conseguiu concluir – tentativa de resolução por Geometria Analítica	1 (A8)	0
04	Somente esboço da questão	1 (A2)	0
Total		**5**	**0**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Para o item 2.a, inicialmente, observa-se a confusão dos alunos com a posição das coordenadas, na obtenção do vetor e, também, em utilizar conhecimentos anteriores sem êxito. No pós-teste o desempenho foi de 100% de acerto para os que tentaram resolver a questão (10 alunos); apenas, A11 não apresentou tentativa de resolução tanto no pré quanto no pós-teste.

A questão 02 solicitava, ao final, duas informações que, para essa análise, foram desmembradas em dois itens: determinar $\overrightarrow{PT}$ (2.a) e caracterizar $\overrightarrow{PT}$ em relação a direção e sentido (2.b). Os erros para o item 2.b são apresentados no Quadro 114; nesse caso, os itens em branco foram destacados por serem relevantes.

Quadro 114 - Análise de Erros - Questão 02 - Item 2.b. – Caracterizar $\overrightarrow{PT}$ em relação a direção e sentido

ITEM 2.b – CARACTERIZAR $\overrightarrow{PT}$ EM RELAÇÃO A DIREÇÃO E SENTIDO			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Confusão entre direção e sentido	1 (A01)	0
02	Em Branco	8 (A02, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A11)	7 (A02, A04, A05, A07, A09, A10, A11)
Total		**9**	**7**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados para o item 2.b foram pouco satisfatórios devido a quantidade de questões em branco, contudo A1 sanou o seu erro no pós-teste e A6 respondeu a questão de forma correta, este havia deixado em branco no pré-teste. Contudo, no final da avaliação, ao questionar os alunos sobre o item, os estudantes alegaram esquecimento em responder a questão, se atentando, apenas, ao item 2.a; inclusive, A5 que havia acertado no pré-teste.

A maioria, respondeu, oralmente, de forma correta; porém, havia poucos dados que permitissem comparar o desempenho, mas, quantitativamente, houve um aumento no número de acertos. Qualitativamente, foi possível considerar uma melhora no aprendizado de direção e sentido por meio da observação docente durante o desenvolvimento da sequência didática.

A questão 03 avaliou, principalmente, o deslocamento e o módulo. Tal como realizado na anterior, pelos mesmos motivos, os itens serão desmembrados em: 3.a – Posição final do foguete e 3.b – Distância percorrida. O Quadro 115 apresenta os erros para o item 3.a.

Quadro 115 - Análise de Erros - Questão 03 - Item 3.a. – Posição final do foguete

ITEM 3.a – Posição final do Foguete			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Operação incorreta para obter a coordenada “y”	4 (A2, A3, A4, A9)	5 (A2, A3, A4, A6, A7)
02	Tentativa de resolução – somente esboço	1 (A11)	-
Total		**5**	**5**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

No item 3.a a quantidade de acertos no pré-teste foi maior que nos pós-teste em n.01; curiosamente, no pós-teste, A6 e A7 cometeram equívocos não observados no teste inicial, por outro lado, de forma positiva, o aluno A9 não repetiu o equívoco do pré-teste. Infelizmente, A11 foi o único a deixar a questão em branco no pós-teste.

O erro visto com maior frequência nos testes foi em relação a obtenção da coordenada y, nesse caso, era necessária uma operação de subtração, mediante a leitura e interpretação do texto da questão, para obter o valor correto; e, erroneamente, os alunos fizeram a adição; as demais componentes foram obtidas de forma correta.

Assim, há de se destacar, que os alunos sabiam como obter as coordenadas, mas tiveram problemas de atenção e de interpretação de texto; que pôde ser percebido, também, durante a realização das atividades da sequência didática.

Dessa forma, considerando os erros do item 3.a, para o item seguinte, 3.b, a avaliação foi realizada, unicamente, com a intenção de verificar se os alunos haviam entendido o conceito de módulo do vetor e, consequentemente, da forma como obtê-lo. Nesse caso, foram considerados os valores obtidos no item 3.a (ainda que incorretos) e a forma como a norma do vetor foi obtida. O Quadro 116 apresenta os erros para o item 3.b.

Quadro 116 - Análise de Erros - Questão 03 - Item 3.b. – Distância percorrida

ITEM 3.b – Distância Percorrida			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Utilizou valores diferentes do obtido no item 3.a	1 (A2)	-
02	Procedimento Incorreto	3 (A7, A9, A10)	1 (A6)
Total		**4**	**1**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Portanto, em relação ao módulo, o desempenho foi satisfatório, pois os erros foram sanados no pós-teste para a maioria; A6 havia deixado o item em branco no pré-teste e no posterior apresentou uma resolução incorreta que demonstra o não entendimento do conceito de módulo ou de má interpretação da questão. A11 deixou a questão em branco nas duas avaliações.

Por fim, é importante destacar que as duas questões analisadas exigiam dos estudantes leitura e interpretação de texto, além de atenção, ao resolver a questão. Na questão 02, em especial, no item 2.b os alunos alegaram, posteriormente, a não

percepção do item para justificar a quantidade de itens em branco e, na 03, era essencial a interpretação de texto.

Portanto, essas questões indicaram problemas que vão além do entendimento do assunto e podem refletir no uso do ensino que não prioriza a resolução de problemas e de contextos que envolvem o cotidiano e corroboram com o tipo de ensino baseado em “teoria, exemplos e exercícios” indicado no perfil acadêmico dos alunos participantes da pesquisa.

6.2.1.3. Análise da questão 04

A questão 04 teve por objetivo avaliar a adição geométrica de vetores tratada, especificamente, na atividade 06. O Quadro 117 apresenta os erros categorizados.

Quadro 117 - Análise de Erros - Questão 04

QUESTÃO 04			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Adição geométrica incorreta	03 (A1, A8, A9)	1 (A11)
02	Não indicou o sentido	1 (A2)	-
03	Tentativa por adição algébrica, mas não chegou ao resultado	1 (A4)	-
Total		**5**	**1**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Infelizmente, para os alunos que incorreram em “adição geométrica incorreta” no pré-teste não tivemos como indicar o erro exatamente, pois estes apenas indicaram o vetor, que era o solicitado pela questão. A2 indicou a posição correta e “esqueceu” de indicar o sentido; A4 tentou resolver por adição algébrica, mas não conseguiu chegar ao resultado e indicar o vetor.

No pós-teste os resultados foram satisfatórios, 10 alunos acertaram a questão; A11 errou, porém ao menos tentou responder, já que no teste inicial havia deixado a questão em branco. Nenhum aluno deixou a questão em branco. Esse resultado, mostra um bom aprendizado desse conteúdo, alinhado ao observado na SD.

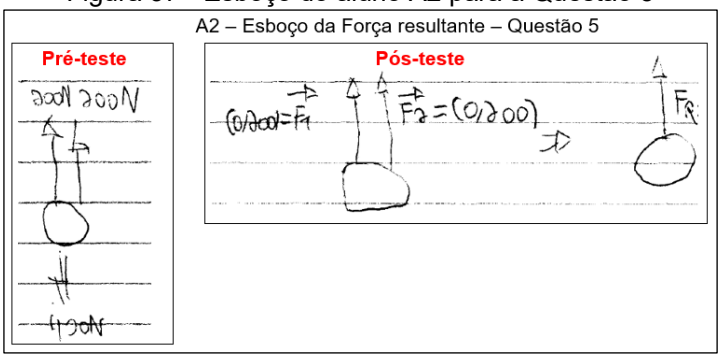
6.2.1.4. Análise da questão 05

A questão 05 teve por objetivo avaliar o aprendizado de vários assuntos, como multiplicação por um escalar, módulo, direção, sentido, etc, visto em atividades

diferentes. Além dos três itens que continha (a, b e c), inicialmente, em seu texto, solicitava um esboço da força resultante no desenho apresentado. Assim, a análise de desempenho será feita considerando os três itens e o esboço de forma independente.

Sobre o esboço, apenas, A2 o fez de forma incorreta. O esboço realizado pelo aluno desconsiderou completamente o desenho apresentado na questão e valeu-se, unicamente, de uma interpretação incorreta do texto, tanto no pré, quanto no pós-teste. A Figura 37 apresenta o esboço apresentado nas duas avaliações por A2.

Figura 37 - Esboço do aluno A2 para a Questão 5



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Em relação ao desempenho da turma, o número de acertos foi de 6 para 8 no pós-teste e o de questões em branco de 4 (A3, A4, A8 e A11) para 2 (A7, A11). O estudante A7 havia acertado a questão no pré-teste e não a respondeu no pós-teste.

O item 5.a solicitava a intensidade da força resultante que para vetores perpendiculares é obtida pela aplicação do Teorema de Pitágoras. O Quadro 118 apresenta os erros categorizados.

Quadro 118 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.a – Intensidade da Força resultante

QUESTÃO 05 – Item 5.a – Intensidade da Força resultante			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Considerou as forças com mesmo sentido e direção e as somou	02 (A02, A03)	01 (A03)
02	Considerou apenas uma força ao aplicar o teorema de Pitágoras	-	1 (A02)
Total		**2**	**2**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

No pré-teste, A2 considerou o seu esboço incorreto para encontrar a força resultante, consequentemente, fez a questão de forma incorreta; assim como A3. No pós-teste, A3 permaneceu no erro e A2 tentou aplicar Pitágoras, porém de forma

incorreta. Ao observar os erros, é perceptível uma falta de atenção, pois a ilustração das forças era dada no problema.

Em relação ao desempenho da turma, não houve alteração em relação as duas avaliações, porém há de se considerar que os resultados do pré-teste já haviam sido bem expressivos. O item 5.b era interpretativo e exigia atenção e o entendimento da diferença entre direção e sentido e teve um resultado bastante expressivo em termos de melhoria de desempenho. O Quadro 119 apresenta os erros categorizados.

Quadro 119 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.b

QUESTÃO 05 – Item 5.b			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Confusão entre direção e sentido	08 (A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10)	03 (A1, A5, A10)
02	Resposta incompleta	-	1 (A9)
Total		**08**	**04**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Para esse item pode-se perceber que o desempenho dos alunos melhorou em relação ao teste inicial, pincipalmente, em relação a confusão entre os termos direção e sentido, porém acredita-se que problemas de interpretação de texto ainda persistem para alguns alunos. Sobre as questões em branco A11 não apresentou tentativa de resolução tanto no pré quanto no pós-teste e A9 havia deixado a questão sem resolução no pré e apresentou uma resposta nos pós, ainda que incorreta.

O item 5.c também era interpretativo mediante a aplicação de uma propriedade do módulo quando multiplicado por um escalar. O Quadro 120 apresenta os erros categorizados.

Quadro 120 - Análise de Erros - Questão 05 – Item 5.c

QUESTÃO 05 – Item 5.c			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Relação incorreta entre o escalar e valor resultante	02 (A1, A4)	-
02	Interpretação Incorreta	1 (A7)	-
Total		**03**	**0**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Dos alunos que responderam ao item no pós-teste, todos acertaram, apenas, A11 deixou em branco nas duas avaliações. A9, que havia deixado em branco no pré-teste, respondeu de forma correta na avaliação posterior.

6.2.1.5. Análise da questão 06 e da questão 09

Essas duas questões serão analisadas em conjunto, pois tratam do assunto produto vetorial, sendo, uma aplicação matemática, questão 06, e outra conceitual, questão 09. Esse conteúdo foi tratado, especificamente, na atividade 12.

Para a questão 06, era exigido o cálculo da área do paralelogramo que poderia ser realizado utilizando uma abordagem por geometria analítica (mais trabalhosa e que exigia habilidades de projeção da figura no plano) e por produto vetorial, que era o desejado, por ser mais fácil e simples e por envolver vetores geométricos.

No pré-teste nenhum aluno acertou a questão, sendo 5 erros e 6 em branco e no pós foram 6 acertos, 5 erros e 0 (zero) em branco. Vale destacar, no pré-teste, as tentativas de resolução de A1, A7 e A8 pela projeção da figura no plano e de A5 que tinha uma pequena noção de que a resolução era por determinante. O Quadro 121 apresenta os erros.

Quadro 121 - Análise de Erros - Questão 06

QUESTÃO 06			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Tentativa de resolução pela projeção da figura no plano	03 (A1, A7, A8)	-
02	Aplicação direta da fórmula de área sem considerar os vetores	01 (A9)	
03	Só esboço	1 (A5)	-
04	Procedimento correto, porém, com erro operacional no cálculo do determinante	-	02 (A3, A7)
05	Procedimento incompleto e com erro operacional		01 (A6)
06	Procedimento incorreto	-	02 (A5, A11)
Total		**05**	**05**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os erros de procedimento foram devido ao uso de um método de resolução por relação trigonométrica e na montagem do determinante, respectivamente; no mais, para essa questão, os erros cometidos foram diferentes nas duas avaliações. Dos estudantes que tentaram resolvê-la no pré-teste, somente, A5 incutiu em um erro de procedimento e A7 teve um erro operacional para encontrar o valor do determinante.

Assim, o desempenho foi superior ao anterior, apesar da quantidade de erros ter se mantido constante, estes não foram cometidos pelos mesmos alunos e os que

haviam deixado a questão em branco no pré-teste, a resolveram de forma correta na avaliação final.

Vale destacar que os erros operacionais na resolução do determinante, diminuíram a quantidade de acertos; esse assunto é visto em disciplinas em anteriores, apesar disso, foi mostrado a título de revisão aos alunos; em relação ao conteúdo de vetores, foi perceptível o entendimento da aplicação do produto vetorial.

Para a questão 09, foi solicitado a orientação da força magnética que é o vetor resultante do produto vetorial de acordo com a equação dada. No pré-teste, 01 único aluno (A1) resolveu e acertou, 10 deixaram em branco; no pós, foram 6 acertos, 4 erros e 1 em branco; o Quadro 122 apresenta os erros.

Quadro 122 - Análise de Erros - Questão 09

QUESTÃO 09			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Sentido Incorreto	-	1 (A3)
02	Sentido e direção incorretos	-	3 (A5, A6, A9)
Total		**0**	**04**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os resultados apontaram que grande parte dos alunos compreenderam a orientação do vetor resultante em um produto vetorial. Comparativamente, dos alunos que erraram a questão 09: A3 errou a questão 06 por apresentar erro de cálculo, A5 e A6 por utilizarem o procedimento incorreto e A9 a acertou.

Assim, considerando que A3 teve um erro operacional, efetivamente, apenas, dois alunos A5 e A6 erraram as duas questões. Portanto, de forma global, o desempenho foi satisfatório.

6.2.1.6. Análise da questão 07

A questão 07 teve por objetivo a utilização do produto escalar, contudo, também, era possível a sua resolução por relação trigonométrica ou por decomposição de força (que também resulta, ao final, em uma relação trigonométrica); mas, poucos alunos o fizeram dessa maneira. O Quadro 123 apresenta os erros.

Quadro 123 - Análise de Erros - Questão 07

QUESTÃO 09			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Utilização incorreta de decomposição de forças	2 (A1, A3)	-
02	Relação trigonométrica incorreta	1 (A6)	-
Total		**3**	**0**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

No teste inicial, os alunos tentaram utilizar conhecimentos anteriores para resolver a questão, quatro alunos tiveram êxito: A4, A5 e A7, que resolveram por relação trigonométrica, e A8, que resolveu por decomposição de forças.

No pós-teste todos os alunos que acertaram a resolveram utilizando produto escalar; assim, o uso de vetores para a resolução nos dão indícios do entendimento do conceito de vetor e de sua utilidade como ferramenta para a resolução de problemas, o que pode ser visualizado, também, no modo como desenvolveram o raciocínio logico-matemático. Em relação as questões em branco, A9 e A11, deixaram em branco nas duas avaliações.

Essa questão demonstra o quão valioso é o ensino de vetores, pois, após os alunos entenderam o seu uso como ferramenta que facilita a resolução de questões de forma mais rápida e com maior segurança o priorizaram, mesmo aqueles que tinham o conhecimento de outras formas de chegar ao resultado do problema.

6.2.1.7. Análise da questão 08

A questão 08 avaliou o conteúdo de produto misto, por meio do cálculo de volume de um tetraedro e de um paralelepípedo, dado as coordenadas dos pontos e os vetores, respectivamente. O Quadro 124 apresenta os erros.

Quadro 124 - Análise de Erros - Questão 08

QUESTÃO 08			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Uso da fórmula incorreta para calcular o volume	1 (A1)	-
02	Tentativa de resolução por projeção das figuras no plano cartesiano tridimensional	1 (A8)	-
03	Volume do paralelepípedo correto, não fez o cálculo do volume do tetraedro – questão incompleta	-	2 (A4, A6)
04	Procedimento correto, erro operacional ao resolver o determinante	-	2 (A7, A8)

05	Volume do paralelepípedo correto, erro operacional no cálculo do tetraedro	-	1 (A3)
06	Erro na estrutura da matriz do determinante	-	1 (A9)
07	Somente esboço da questão	-	1 (A11)
Total		**2**	**7**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Apesar da quantidade de erros, o número de tentativas de resolução demonstrou o comprometimento dos alunos e sua autoconfiança, assim, o número de questões em branco caiu de 9 para 2; A5 e A10 deixaram em branco nas duas avaliações; esse último alegou falta de tempo, pois já ia iniciar a próxima aula. Os erros foram distintos no pré e no pós-teste.

A categoria de erros n. 03 não representa, de fato, um equívoco, mas uma "questão incompleta". Aliás, considerando, o uso e a aplicação do produto misto, os erros das categorias 04 e 05, poderiam ser, de certa forma, também, ignorados, por serem operacionais. Esses tipos de equívocos não retratam o não entendimento do assunto, mas problemas com matemática básica e/ou falta de atenção, esperados em questões que exigem um volume maior de cálculos.

Vale lembrar que os problemas de resolução do determinante também foram detectados na questão 06, inclusive, A7 cometeu o mesmo erro nas duas questões. Por outro lado, não há que se falar em insucesso no desempenho dos alunos, mediante as análises qualitativas expostas, mas chama atenção para problemas que vão além do entendimento de vetores que tendem a classificar o assunto como difícil pelos alunos e criar obstáculos que podem e devem ser superados.

6.2.1.8. Análise da questão 10

A questão 10 apresentava um contexto puramente matemático envolvendo, de certa forma, todos os tipos de operações com vetores. Era composta de 4 itens, especificamente, os itens b e c tinham uma interdependência entre si, pois o resultado do primeiro seria utilizado pelo segundo. No mais, os itens serão avaliados de forma independente.

O item 10.a envolvia a operação de produto escalar. No pré-teste foram 4 acertos, 4 erros e 3 em branco; os erros foram de procedimento em relação a não somar os fatores, considerando-os como coordenadas de um vetor, e por utilizar a

multiplicação distributiva. Em contrapartida, no pós foram 10 acertos, 1 erro e 0 (zero) em branco. O Quadro 125 apresenta os erros

Quadro 125 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.a

QUESTÃO 10 – Item 10.a			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Não somou os fatores – Questão incompleta	3 (A8, A10, A11)	1 (A11)
02	Utilizou multiplicação distributiva	1 (A1)	-
Total		**4**	**1**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

O item 10.b envolvia, inicialmente, as operações de soma e subtração vetorial e, posteriormente, de produto vetorial. Nesse caso, somente A11 fez a subtração algébrica incorreta nas duas avaliações, ainda assim, também não conseguiu fazer o produto vetorial. Os demais alunos, no pré-teste realizaram as operações iniciais de forma correta, porém fizeram a multiplicação aplicando a propriedade distributiva como feito com escalares; sendo que, 4 deixaram a questão em branco.

No pós-teste, A9 que havia deixado em branco no pré, apresentou um erro operacional na subtração, porém, apesar de utilizar, os valores incorretos, “acertou” o produto vetorial. Além disso, novamente, alguns alunos, apresentaram erros operacionais ao resolverem o determinante. O Quadro 126 apresenta os erros.

Quadro 126 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.b

QUESTÃO 10 – Item 10.b			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Utilizou propriedade distributiva para resolver o produto vetorial	4 (A1, A2, A3, A10)	-
02	Resolveram como produto escalar ao invés de vetorial	2 (A7, A8)	
03	Erro operacional ao resolver o determinante	-	3 (A6, A7, A8)
04	Erro operacional na subtração, porém, produto vetorial correto, considerando os vetores utilizados	-	1 (A9)
05	Erro operacional na subtração e uso da propriedade distributiva para resolver o produto vetorial	1 (A11)	1 (A11)
Total		**7**	**5**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Para esse item, no pré-teste, nenhum aluno conseguiu resolver o produto vetorial de forma correta, dos 7 que tentaram. Os erros foram consequência do uso

de procedimento incorreto, os da categoria 01 e 05, resultaram em um vetor incorreto e os de n. 02, em um escalar.

No pós-teste, da mesma forma que na questão 06, vários alunos tiveram erro operacional na resolução do determinante; com exceção de A11, os demais alunos que haviam utilizado a propriedade distributiva na avaliação inicial, utilizaram o procedimento correto posteriormente. A9, apesar de um erro operacional na subtração, desenvolveu o produto vetorial corretamente, ainda que, com os vetores incorretos.

Para essa questão, o item 10.c era continuação do anterior, pois solicitava o módulo do vetor obtido em 10.b. Nesse sentido, foi avaliado considerando os erros das categorias 01, 03, 04 e 05, que resultaram em vetores, ainda que incorretos; portanto, foi considerado o vetor obtido pelos alunos, ainda que não representasse o valor correto, com a intenção, única e exclusiva, de avaliar se os alunos eram capazes de obter o módulo do vetor de forma correta.

Os valores incorretos obtidos na categoria 02 de erros do item 10.b não foram considerados como adequados para a análise por representarem escalares e compuseram uma das categorias de erro, conforme apresentado no Quadro 127.

Quadro 127 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.c

QUESTÃO 10 – Item 10.c			
n.	**CATEGORIA**	**ERROS**	
		PRÉ-TESTE	**PÓS-TESTE**
01	Aplicou a módulo no escalar obtido na questão anterior	2 (A7, A8)	-
02	Não aplicou a raiz quadrada	-	1 (A3)
Total		**2**	**1**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Portanto, no pré-teste foram 4 acertos, 2 erros e 5 em branco; para o pós A3 não acertou e A11 deixou em branco novamente, totalizando 9 acertos. Por fim, o item 10.d apresentou uma questão que podia ser resolvida por produto misto, de forma mais rápida, ou utilizando o produto vetorial e, depois, o escalar.

No pré-teste não houve acertos, pois todos tentaram resolver a questão por multiplicação algébrica aplicando a propriedade distributiva, tal qual o fizeram anteriormente; 5 deixaram em branco. No pós-teste, apenas, A11 insistiu no mesmo erro, mas não houve questões em branco; as categorias de erros são elencadas no Quadro 128.

Quadro 128 - Análise de Erros - Questão 10 – Item 10.d

QUESTÃO 10 – Item 10.c			
n.	CATEGORIA	ERROS	
		PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
01	Aplicou multiplicação algébrica	6 (A1, A2, A3, A7, A8, A10)	1 (A11)
02	Erro no determinante	-	2 (A2, A9)
03	Inversão nos vetores na matriz do determinante		1 (A3)
Total		**6**	**4**

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Dos alunos que tentaram resolver a questão no pós-teste, apenas, A1, A4 e A10 a resolveram por produto misto e de forma correta. Todos os erros foram advindos da resolução que envolviam os produtos vetoriais e escalar, respectivamente, com destaque, novamente, para os erros operacionais ao resolver o determinante da matriz.

A título de comparação, no pré-teste, nenhum aluno havia conseguido fazer a questão 100% correta; contudo, para a avaliação final, 03 alunos resolveram a questão sem erros de nenhuma espécie: A1, A4 e A10.

A seguir, a fim de ratificar as análises feitas por questão, será feita uma breve verificação de desempenho individual.

6.2.2. Verificação do desempenho individual: análise comparativa entre o pré e o pós- teste

A verificação de desempenho individual tem por objetivo definir o quão eficiente foi o experimento, mediante todas as informações já coletadas e analisadas. Para tanto, apesar da importância dada aos acertos que, de fato, é um parâmetro essencial e necessário; para essa análise, também, foram considerados casos de sucesso aqueles em que: no pré-teste o aluno respondeu de forma incorreta ou deixou em branco e no pós acertou a questão ou tentou resolver (ainda que tenha errado).

Entretanto, os casos de “insucesso” são os que: continuaram a errar a questão no pós; acertaram no pré e erraram no pós ou deixaram em branco nos dois casos. O Quadro 129 abaixo apresenta os resultados, sendo que foram sombreados de amarelo os casos de sucesso e de vermelho os de “insucesso”.

Quadro 129 - Desempenho individual - pré e pós-teste

DESEMPENHO POR ALUNO NO PRÉ E PÓS-TESTE											
Questão / Item	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Q1a-Pré	C	C	C	I	C	I	C	C	I	I	B
Q1a-Pós	C	C	C	C	C	C	I	C	C	I	I
Q1b-Pré	C	I	C	B	I	C	I	C	C	C	B
Q1b-Pós	C	C	C	C	I	C	C	C	C	C	I
Q2a-Pré	C	I	I	C	C	B	I	I	I	B	B
Q2a-Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B
Q2b-Pré	I	B	C	B	C	B	B	B	B	B	B
Q2b-Pós	C	B	C	B	B	C	B	C	B	B	B
Q3a-Pré	C	I	I	I	C	C	C	C	I	C	I
Q3a-Pós	C	I	I	I	C	I	I	C	C	C	B
Q3b-Pré	C	I	C	C	B	B	I	B	I	I	B
Q3b-Pós	C	C	C	C	C	I	C	C	C	C	B
Q4-Pré	I	I	C	I	B	C	B	I	I	C	B
Q4-Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
Q5Esboço-Pré	C	I	B	B	C	C	C	B	C	C	B
Q5Esboço-Pós	C	I	C	C	C	C	B	C	C	C	B
Q5a-Pré	C	I	I	C	C	C	C	C	C	C	B
Q5a-Pós	C	I	I	C	C	C	C	C	C	C	B
Q5b-Pré	I	C	I	I	I	I	I	I	B	I	B
Q5b-Pós	I	C	C	C	I	C	C	C	I	I	B
Q5c-Pré	I	C	C	I	C	C	I	C	B	C	B
Q5c-Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B
Q6-Pré	I	B	B	B	I	B	I	I	I	B	B
Q6-Pós	C	C	I	C	I	I	I	C	C	C	I
Q7-Pré	I	B	I	C	I	C	C	C	B	B	B
Q7-Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	B	C	B
Q8-Pré	I	B	B	B	B	B	B	I	B	B	B
Q8-Pós	C	C	I	I	B	I	I	I	I	B	I
Q9-Pré	C	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Q9-Pós	C	C	I	C	I	I	C	C	I	C	B
Q10a-Pré	I	C	C	B	C	B	C	I	B	I	I
Q10a-Pós	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I
Q10b-Pré	I	I	I	B	B	B	I	I	B	I	I
Q10b-Pós	C	C	C	C	C	I	I	I	I	C	I
Q10c-Pré	C	C	C	B	B	B	I	I	B	C	B
Q10c-Pós	C	C	I	C	C	C	C	C	C	C	B
Q10d-Pré	I	I	I	B	B	B	I	I	B	I	B
Q10d-Pós	C	I	I	C	C	C	C	C	I	C	I
TOTAIS											

Frequência	100%	100%	100%	100%	90%	100%	60%	80%	90%	80%	70%
Acertos- Pré	9	5	8	4	8	7	6	6	3	7	0
Acertos-Pós	18	14	12	16	13	13	12	17	12	15	0
Erros-Pré	10	9	7	5	4	2	9	9	6	6	3
Erros-Pós	1	4	7	2	4	6	5	2	5	2	8
Branco-Pré	0	5	4	10	7	10	4	4	10	6	16
Branco-Pós	0	1	0	1	2	0	2	0	2	2	11

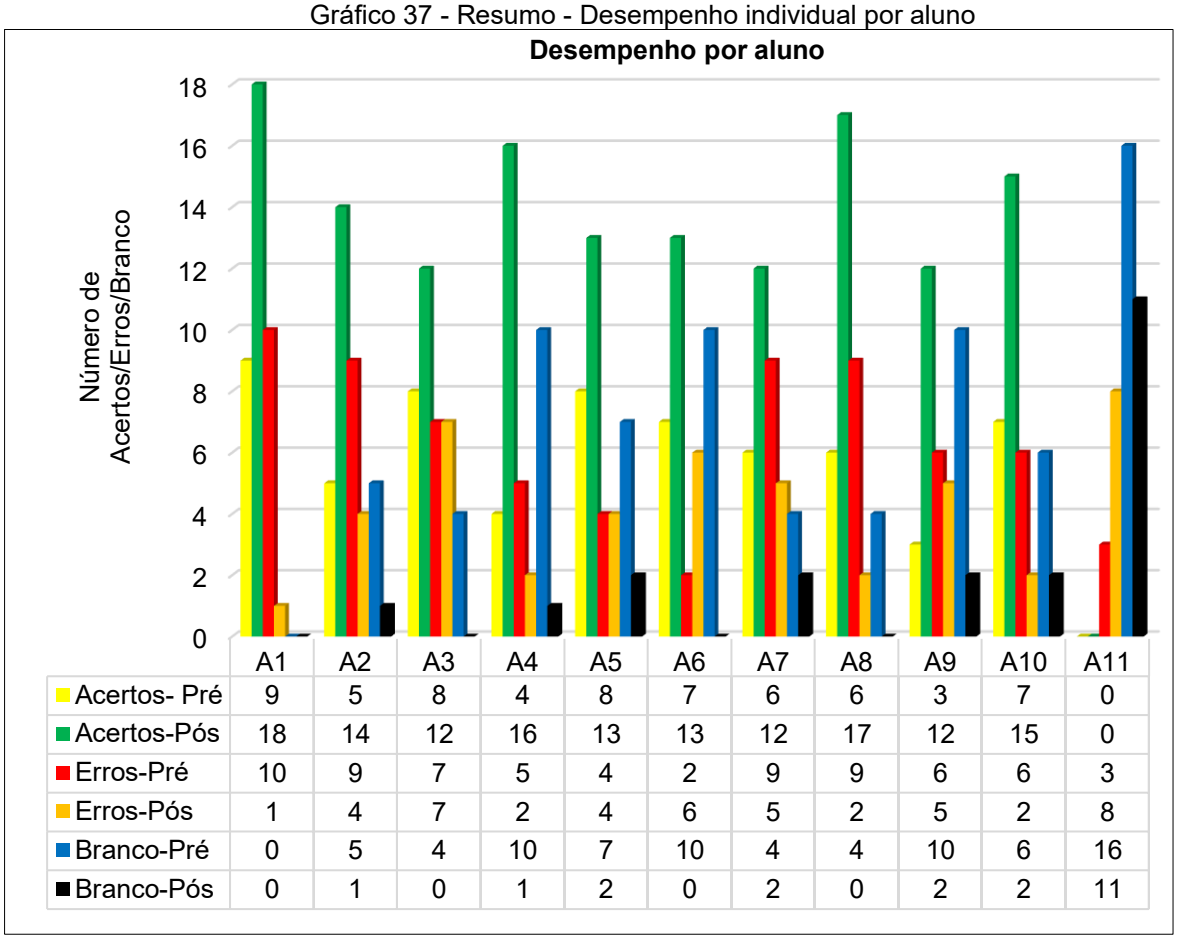
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Em termos de acertos, apenas, A11 não teve melhoria de desempenho de forma global, porém há de se perceber que, ao menos, no pós-teste o número de tentativas de resolução foi superior, ainda que, incorretas. Observando o comportamento do aluno em sala de aula, dois fatos podem ter contribuído para o desempenho obtido, além das dificuldades em matemática: o número de ausências e, principalmente, quando presente na aula, chegava com atraso com a justificativa de morar distante.

O aluno A7, comparativamente, teve uma frequência menor que A11, porém quando presente mostrava-se mais atuante em sala de aula, além que, estava fazendo dependência nessa disciplina. Suas faltas eram justificadas por tratamentos médicos mediante a apresentação de atestados. No entanto, teve resultados positivos no pós-teste.

Outro comportamento observado, apesar do desempenho significativo, foi dos alunos A2, principalmente, e A3 que se mostravam muito ansiosos diante das atividades e da resolução das questões e, na maioria das vezes, tinham erros de interpretação de texto e de falta de atenção. Esses fatores foram constatados durante a realização das atividades e confirmados na correção dos testes. O Gráfico 37 apresenta um resumo do desempenho por aluno.

Gráfico 37 - Resumo - Desempenho individual por aluno



	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
Acertos- Pré	9	5	8	4	8	7	6	6	3	7	0
Acertos-Pós	18	14	12	16	13	13	12	17	12	15	0
Erros-Pré	10	9	7	5	4	2	9	9	6	6	3
Erros-Pós	1	4	7	2	4	6	5	2	5	2	8
Branco-Pré	0	5	4	10	7	10	4	4	10	6	16
Branco-Pós	0	1	0	1	2	0	2	0	2	2	11

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, em termos gerais, o desempenho no pós-teste foi excelente e alguns resultados não tão satisfatórios são esperados em qualquer aplicação de sequência didática e inúmeros fatores podem estar associados, além da frequência.

A seguir, será feita uma verificação estatística dos desempenhos observados com os parâmetros socioeconômicos e acadêmicos.

6.2.3. Análises Estatísticas: teste de Hipótese, Associação e Correlação

Nessa subseção serão mostrados os resultados de testes estatísticos a fim de comprovar as hipóteses de melhoria do desempenho a partir da aplicação da sequência didática com o teste de hipótese t-pareado, verificação de possíveis associações de variáveis relacionadas ao perfil dos estudantes e a nota obtida (número de acertos no pós-teste) com o teste de associação Exato de Fischer e a relação entre as variáveis por meio do teste de correlação de Spearman; todos considerando o nível de significância de 0,05.

6.2.3.1. Resultados com o teste t-pareado de Hipótese

Para esse estudo, as seguintes hipóteses foram consideradas, tendo por base as médias do pré-teste, μ1, e do pós-teste, μ2, a partir das 10 questões propostas:

- Hipótese Nula (μ1 ≥ μ2): o desempenho **NÃO** melhora após a aplicação da sequência didática.
- Hipótese de pesquisa (μ1 < μ2): o desempenho melhora após a aplicação da sequência didática.

Portanto, para aplicar esse teste estatístico, em primeiro lugar, foi verificado que os requisitos elencados por Larson e Farber (2015) e descritos na metodologia da pesquisa estavam sendo atendidos. O Quadro 130 apresenta o resultado do teste de normalidade utilizando três métodos diferentes via *software Jamovi,* quais sejam: Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling.

Quadro 130 - Resultado do teste de Normalidade via *Jamovi*

Resultado do teste de Normalidade		
Teste	**Estatística**	**p-valor**
Shapiro-Wilk	0,952	0,673
Kolmogorov-Smirnov	0,157	0,950
Anderson-Darling	0,275	0,585

Fonte: resultados do software *Jamovi*

Como os p-valor do teste de normalidade são superiores a 0,05 pode-se interpretar que a distribuição dos dados da pesquisa não se diferem de maneira significativa de uma distribuição normal, o que garante o uso do teste estatístico selecionado. Atendidas todas as exigências, o Quadro 131 mostra o resultado do teste-t pareado tendo como dado de entrada o número de acertos no pré e no pós-teste para obtenção das médias.

Quadro 131 – Resultado do Teste-t pareado via *Jamovi*

Teste-t para amostras pareadas para as 10 questões					
Dados: Notas do Pré-teste Notas do Pós-teste			**Valor de t**	**Graus de liberdade**	**p-valor**
			-6,94	10	<.001
Estatística Descritiva para as 10 questões					
Dados	**Amostra**	**Média (μ)**	**Mediana**	**Desvio-padrão**	**Erro-padrão**
Notas do pré-teste	11	5,73	6	2,61	0,787
Notas do pós-teste	11	12,91	13	4,76	1,436

Fonte: resultados do software *Jamovi*

Portanto, como p-valor<.001 pode-se inferir que houve uma diferença estatisticamente significativa entre os resultados do pré e do pós-teste e os resultados da média nos indicam que $\mu 1 < \mu 2$ (Hipótese de pesquisa); consequentemente, pode-se afirmar que houve melhoria no desempenho dos estudantes pós aplicação da sequência didática.

A mesma avaliação foi repetida considerando os 19 itens resultantes do desmembramento das 10 questões e os resultados encontrados foram os mesmos, o que já era esperado devido a natureza do teste estatístico. Os resultados dos testes de associação por Fischer são apresentados a seguir.

6.2.3.2. Resultados do teste de associação pelo método exato de Fischer

Metodologicamente, foram verificadas associações entre as variáveis obtidas na aplicação do questionário de perfil socioeconômico e acadêmico na fase de experimentação e, adicionalmente, foram relacionados as notas dos testes dos alunos (quantidade de acertos) no pré e pós-teste. Vale ressaltar que a escolha das variáveis a serem relacionados e verificadas se deu de modo a satisfazer os objetivos dessa tese.

Para tanto, as seguintes variáveis foram selecionadas: escolaridade do responsável feminino, escolaridade do responsável masculino, o aluno exerce função remunerada, o aluno possui curso profissionalizante, avaliação dos conhecimentos do ensino médio, sentimento do aluno diante de uma avaliação de matemática, o aluno já esteve em dependência, hábito de estudo fora da escola, gostar de matemática, ajuda em tarefas de matemática e frequência durante a experimentação.

Assim, feito os esclarecimentos, inicialmente, foi verificada a associação estatística entre a Escolaridade do Responsável Masculino e a do Feminino, o Quadro 132 apresenta os resultados; com a indicação do aluno e a pontuação obtida no pré e no pós-teste da seguinte forma: Aluno (nota pré-teste, nota no pós-teste).

Quadro 132 – Teste de Fischer – Escolaridade Responsável Masculino x Escolaridade do Responsável Feminino

Escolaridade do Responsável Masculino	**Escolaridade do Responsável Feminino**								**Total**
	Fundamental Incompleto		**Ensino Médio**		**Ensino Médio Incompleto**		**Ensino Superior**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Ensino Fundamental Incompleto	0	0,18	2	1,091	0	0,18	0	0,545	**2**
	-		A7(6,12), A8(6,17)		-		-		
Ensino Médio	1	0,45	3	2,72	0	0,45	1	1,364	**5**
	A1(9,18)		A5(8,13), A9(3,12), A10(7,15)		-		A3(8,12)		
Ensino Médio Incompleto	0	0,09	1	0,54	0	0,09	0	0,273	**1**
	-		A4(4,16)						
Ensino Superior	0	0,18	0	1,091	0	0,18	1	0,545	**2**
	-		-		A11(0,0)		A2(5,14)		
Pós-graduação	0	0,09	0	0,545	0	0,09	1	0,273	**1**
	-		-		-		A6(7,13)		
Totais	**1**	**-**	**6**	**-**	**1**	**-**	**3**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,526									
gl, V-*Cramer* = -									
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**									

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Portanto, não houve associação estatística entre as variáveis apresentadas; contudo, havia uma maior concentração de alunos com bom desempenho para responsáveis que possuem o Ensino Médio completo, acumulando uma média de 14 pontos e que tiveram melhor desempenho ao comparar as notas do pré e pós-teste.

O Quadro 133 apresenta o resultado da verificação de associação estatística entre as variáveis: “O aluno exerce atividade de forma remunerada” x “O aluno possui curso profissionalizante”.

Quadro 133 – Teste de Fischer – O aluno exerce atividade remunerada X O aluno possui curso profissionalizante

O aluno exerce atividade remunerada	**O aluno possui curso profissionalizante**				**Total**
	Sim		**Não**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	3	1,36	0	1,64	**3**
	A1(9,18), A10(7,15), A11(0,0)		-		
Não	2	3,64	6	4,36	**8**
	A7(6,12), A8(6,17)		A2(5,14), A3(8,12), A4(4,16), A5(8,13), A6(7,13), A9(3,12)		
Totais	**5**	**-**	**6**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,061					
gl, V-*Cramer* = -					
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**					

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Apesar da não haver associação estatística entre as variáveis, ainda assim, pode-se verificar que as maiores médias foram dos alunos que não exerciam atividade remunerada, em torno de 14,5 pontos; bem como, também, foram os que tiveram melhor desempenho ao calcular a média entre as diferenças das notas do pré e do pós-teste.

O Quadro 134 apresenta os resultados entre as variáveis: “Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio” x “O aluno possui curso profissionalizante”.

Quadro 134 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio X O aluno possui curso profissionalizante

Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	**O aluno possui curso profissionalizante**				**Totais**
	Sim		**Não**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Foram adequados ao mercado trabalho e profissão com aulas práticas, etc... proporcionaram cultura e conhecimento	4	1,82	0	2,18	**4**
	A1(9,18), A7(6,12) A10(7,15), A11(0,0)		-		
Proporcionaram cultura e conhecimento	1	3,18	6	3,82	**7**
	A8(6,17)		A2(5,14), A3(8,12), A4(4,16), A5(8,13), A6(7,13), A9(3,12)		

Totais	**5**		**6**		**11**
p-valor obtido = 0,015					
gl = 2**, V-*Cramer*** = 0,828; efeito grande					
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**					

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

O resultado indicou a existência de associação estatística significativa entre as variáveis elencadas, assim, pode-se dizer que, a maioria dos alunos, formada, principalmente, pelos que não possuíam curso profissionalizante, acreditavam que os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio proporcionaram cultura e conhecimento e tiveram uma média e desempenho superior em relação aos demais.

Ainda em relação a variável “Avaliação dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio” foi testada a associação entre esta e “O aluno exerce atividade remunerada”. O Quadro 135 apresenta os resultados.

Quadro 135 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio X O aluno exerce atividade remunerada

Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	**O aluno exerce atividade remunerada**				**Totais**
	Sim		**Não**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Foram adequados ao mercado trabalho e profissão com aulas práticas, etc.. proporcionaram cultura e conhecimento	3	1,09	1	2,91	**4**
	A1(9,18), A10(7,15), A11(0,0)		A7(6,12)		
Proporcionaram cultura e conhecimento	0	1,91	7	5,09	**7**
	-		A2(5,14), A3(8,12), A4(4,16), A5(8,13), A6(7,13), A8(6,17), A9(3,12)		
Totais	**3**	**-**	**8**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,024					
gl = 2**, V-*Cramer*** = 0,810; efeito grande					
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**					

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

As informações produzidas nos mostraram que havia associação estatística significativa entre as variáveis, apontado que os alunos que não exerciam atividade

remunerada acreditavam que os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio proporcionaram, apenas, cultura e conhecimento; contudo, foram os que concentram os melhores desempenho e médias.

Por fim, como uma última análise atrelada a variável “Avaliação dos Conhecimentos adquiridos no Ensino Médio”, foi verificada a existência de associação estatística entre esta e o “Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área da matemática”. O Quadro 136 apresenta os resultados.

Quadro 136 – Teste de Fischer – Avaliação dos Conhecimentos adquiridos no Ensino Médio x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática

Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	**Sentimento do aluno diante de uma avaliação de matemática**										**Totais**
	Tranquilo		**Preocupado**		**Nervoso**		**Tranquilo, nervoso, preocupado**		**Com medo, ansioso**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Foram adequados ao mercado trabalho e profissão com aulas práticas etc. proporcionaram cultura e conhecimento	0	1,09	0	1,09	3	1,09	0	0,364	1	0,364	**4**
	-				A1(9,18), A7(6,12), A10(7,15)		-		A11(0,0)		
Proporcionaram cultura e conhecimento	3	1,91	3	1,91	0	1,91	1	0,636	0	0,636	**7**
	A4(4,16), A5(7,13), A8(6,17)		A3(8,12), A6(7,13), A9(3,12),		-		A2(5,14)				
Totais	**3**	**-**	**3**	**-**	**3**	**-**	**1**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,018											
gl=2, V-*Cramer* = 1											
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito Perfeito de acordo com **V-Cramer**											

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Em geral, os alunos tinham sentimentos negativos diante de avaliações da área de matemática; contudo para alguns daqueles que acreditavam que os conhecimentos do Ensino Médio proporcionou, apenas, cultura e conhecimento, havia uma tranquilidade; para outros, preocupação e nervosismo.

Porém, para os que avaliaram o Ensino Médio de forma “mais ampla” os sentimentos são sempre de nervosismo e, até, mesmo, medo. Nesse último conjunto de alunos, também, estavam representados os que possuiam curso profissionalizante e exercem atividade remunerada.

O Quadro 137 apresenta os resultados da verificação de associação estatística entre as variáveis “Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática” e “O aluno já esteve em dependência em disciplinas do curso de Engenharia Elétrica”, lembrando que, ao menos uma das componentes curriculares citadas pelos alunos que precisaram repetir a disciplina são da área de matemática.

Quadro 137 – Teste de Fischer – O aluno já esteve em dependência x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática

O aluno já esteve em Dependência	**Sentimento do aluno diante de uma avalição de matemática**										**Totais**
	Tranquilo		**Preocupado**		**Nervoso**		**Tranquilo, nervoso, preocupado**		**Com medo, ansioso**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	1	2,455	3	2,455	3	2,455	1	0,818	1	0,818	**9**
	-		A3(8,12), A6(7,13), A9(3,12)		A1(9,18), A7(6,12), A10(7,15)		A2(5,14)		A11(0,0)		
Não	0	0,545	0	0,545	0	0,545	0	0,182	0	0,182	**2**
	A4(4,16), A5(7,13), A8(6,17)				-						
Total	**3**	**-**	**3**	**-**	**3**	**-**	**1**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,509											
gl, V-*Cramer* = -											
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**											

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

As informações produzidas pelo Teste de Fischer não apontaram associação estatística significativa entre as variáveis; no entanto, há de se ressaltar que todos os alunos que já estiveram em dependência tendiam a ter sentimentos negativos diante de uma avaliação da área de matemática. Ainda assim, apesar da média e desempenho em relação as notas do pré e pós-teste serem menores ao comparar

com os que não estiveram em dependência, deve-se destacar o excelente resultado pós aplicação da sequência didática, à exceção de A11.

Por fim, a última associação verificada com o “Sentimento diante da avaliação de matemática” foi com a variável “Hábito de estudo fora da escola em disciplinas de matemática”; o Quadro 138 traz o resultado.

Quadro 138 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Sentimento do aluno diante de uma avaliação da área de matemática

Hábito de estudo fora da escola	**Sentimento do aluno diante de uma avalição de matemática**										**Total**
	Tranquilo		**Preocupado**		**Nervoso**		**Tranquilo, nervoso, preocupado**		**Com medo, ansioso**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Somente no período de prova	0	1,364	2	1,364	3	1,364	0	0,454	0	0,454	**5**
	-		A6(7,13), A9(3,12)		A1(9,18), A7(6,12), A10(7,15)		-		-		
Somente nos fins de Semana	3	1,091	0	1,091	0	1,091	0	0,363	1	0,363	**4**
	A4(4,16), A5(7,13), A8(6,17)		-		-		-		A11(0,0)		
Somente na Véspera de Prova	0	0,273	1	0,273	0	0,273	0	0,09	**0**	**0,09**	**1**
	-		A3(8,12)								
Todos os dias	0	0,273	0	0,273	0	0,273	1	0,09	**0**	**0,09**	**1**
	-		-				A2(5,14)				
Total	**3**	**-**	**3**	**-**	**3**	**-**	**1**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,008											
gl=4, **V-*Cramer*** = 0,856											
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**											

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Do resultado pode-se observar a ocorrência de associação estatística significativa entre as variáveis testadas; nesse sentido, é possível afirmar que os que só estudavam no período de provas tinham sentimento de preocupação e nervosismo diante de avaliações da área de matemática. Em compensação, os que tinham certa

habitualidade de estudo, ao menos, nos finais de semana, sentiam-se, em sua maioria mais tranquilos.

Entretanto, apesar da pouca frequência de estudo fora da escola, a quantidade de acertos pós aplicação da sequência didática foi considerável, indicando, também, a melhoria de desempenho. Assim, foi verificada a existência de associação entre as variáveis “Hábito de estudo fora da escola” e “Ajuda em tarefas de matemática”, o Quadro 139 apresenta os resultados.

Quadro 139 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Ajuda em tarefas de matemática

Hábito de estudo fora da escola	**Ajuda em tarefas de matemática**												**Total**
	Pesquisa na internet		**Ninguém**		**Responsável**		**Responsável, amigo, pesquisa na internet**		**Pesquisa na internet. livros**		**Namorado, pesquisa na internet**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Somente no período de prova	1	1,364	1	0,909	2	0,909	1	0,909	0	0,454	0	0,454	**5**
	A10 (7,15)		A9(3,12)		A6(7,13), A7(6,12)		A1(9,18)		-		-		
Somente nos fins de Semana	2	1,09	0	0,727	0	0,727	0	0,727	1	0,363	1	0,363	**4**
	A4(4,16), A5(7,13)		-		-		-		A8(6,17)		A11(0,0)		
Somente na Véspera de Prova	0	0,273	1	0,182	0	0,182	0	0,727	0	0,09	0	0,09	**1**
	-		A3(8,12)		-		-		-		-		
Todos os dias	0	0,273	0	0,182	0	0,182	1	0,182	0	0,09	0	0,09	**1**
	-		-		-		A2(5,14)		-		-		
Totais	**3**	**-**	**2**	**-**	**2**	**-**	**2**	**-**	**1**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,555													
gl=4, **V-*Cramer*** = -													
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**													

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Do teste de Fischer foi verificado que não havia associação estatística significativa entre as variáveis; entretanto, é possível verificar que os que estudavam somente em véspera de prova consultavam diversos materiais para resolver as tarefas de matemática e foram os que tiveram melhores médias e desempenho no pós-teste.

A fim de observar alguma relação entre o hábito de estudo e o fato de ter ficado em dependência, o Quadro 140 apresenta os resultados do teste de Fischer entre essas variáveis (“Hábito de estudo fora da escola” x “O aluno já esteve em dependência”).

Quadro 140 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x O aluno já esteve em dependência

Hábito de estudo fora da escola	**O aluno já esteve em dependência**				
	Sim		**Não**		**Total**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Somente no período de prova	5	4,091	0	0,09	**5**
	A1(9,18), A6(7,13), A7(6,12), A9(3,12) A10(7,15)		-		
Somente nos fins de Semana	2	3,273	2	0,727	**4**
	A8(6,17), A11(0,0)		A4(4,16), A5(7,13)		
Somente na Véspera de Prova	1	0,818	0	0,182	1
	A3(8,12)				
Todos os dias	1	0,818	0	0,182	1
	A2(5,14)		-		
Total	**9**	**-**	**2**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,455					
gl, V-*Cramer* = -					
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**					

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

O teste de Fischer indicou que não havia associação estatística significativa entre as varáveis verificadas; contudo, para essa amostra, os estudantes que estudavam, apenas, no período de prova, eram a maioria dos que já estiveram em dependência. Porém, de forma, geral não foi observada habitualidade de estudo e a maioria já esteve em dependência, inclusive, o que diz estudar todos os dias. Ao relacionar com os acertos no pré e pós-teste, apesar do não hábito, os resultados foram satisfatórios.

Ainda sobre a habitualidade de estudo, foi verificado se existia associação estatística significativa entre essa variável e o “Gostar De matemática”. O Quadro 141 apresenta os resultados.

Quadro 141 – Teste de Fischer – Hábito de estudo fora da escola x Gostar de matemática

Hábito de estudo fora da escola	**Gostar de matemática**						
	Gosto bastante		**Gosto**		**Gosto um pouco**		**Total**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Somente no período de prova	2	2,727	2	1,818	1	0,454	**5**
	A9(3,12) A10(7,15)		A1(9,18), A7(6,12)		A6(7,13)		
Somente nos fins de Semana	3	2,182	1	1,455	0	0,363	**4**
	A4(4,16), A5(7,13), A8(6,17)		A11(0,0)		-		
Somente na Véspera de Prova	0	0,545	1	0,364	0	0,09	1
			A3(8,12)		-		
Todos os dias	1	0,545	0	0,364	0	0,09	1
	A2(5,14)		-				
Total	**6**	**-**	**4**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,922							
gl, V-*Cramer* = -							
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**							

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Da mesma forma como verificado em relação a dependência, não houve associação estatística entre as variáveis, ainda assim, é possível afirmar que, para essa amostra, o fato de gostar de matemática não proporciona habitualidade de estudo para a maioria. Em relação a média e desempenho, vale o que já foi observado anteriormente. Também, foi testada a possibilidade de associação entre as variáveis “O aluno já esteve em dependência” e “Gostar de matemática”, o Quadro 142 elucida as informações produzidas.

Quadro 142 – Teste de Fischer – O aluno já esteve em dependência x Gostar de matemática

O aluno já esteve em dependência	**Gostar de matemática**						
	Gosto bastante		**Gosto**		**Gosto um pouco**		**Total**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	4	4,91	4	3,273	1	0,818	**9**
	A2(5,14), A8(6,17), A9(3,12), A10(7,15)		A1(9,18), A3(8,12), A7(6,12), A11(0,0)		A6(7,13)		
Não	2	1,09	0	0,727	0	0,182	**2**
	A4(4,16), A5(7,13)		-		-		
Total	**6**	**-**	**4**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,564							
gl, V-*Cramer* = -							
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**							

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Não houve associação estatística entre as variáveis do Quadro 142, porém o fato de gostar de matemática não isentou a maioria dos alunos de estar em dependência em disciplinas de matemática, mas pode ter influenciado no resultado positivo do experimento. Por fim, o último teste realizado foi entre as variáveis “Ajuda nas tarefas de matemática” e “Gostar de matemática”, os resultados estão no Quadro 143.

Quadro 143 – Teste de Fischer – Ajuda nas tarefas de matemática x Gostar de matemática

Ajuda nas tarefas de matemática	**Gostar de matemática**						
	Gosto bastante		**Gosto**		**Gosto um pouco**		**Total**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Pesquisa na internet	3	1,636	0	1,091	0	0,272	**3**
	A4(4,16), A5(7,13), A10(7,15)		-		-		
Ninguém	1	1,091	1	0,727	0	0,181	**2**
	A9(3,12)		A3(8,12)		-		
Responsável	0	1,091	1	0,727	1	0,181	**2**
			A7(6,12)		A6(7,13)		
	1	1,091	1	0,727	0	0,181	**2**

Responsável, amigo, pesquisa na internet	A2(5,14)		A1(9,18)		-		
Pesquisa na internet. livros	1	0,545	0	0,364	0	0,09	**1**
	A8(6,17)		-		-		
Namorado, pesquisa na internet	0	0,545	1	0,364	0	0,09	**1**
	-		A11(0,0)				
Total	**6**	**-**	**4**	**-**	**1**	**-**	**11**
p-valor obtido = 0,377							
gl, V-*Cramer* = -							
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa, portanto, também, não há que se verificar **V-Cramer**							

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Não foram verificadas associações estatísticas significativas entre as variáveis; no entanto, os alunos que disseram gostar bastante de matemática e utilizavam a pesquisa na internet para resolver as tarefas de matemática foram os que tiveram as melhores médias e desempenho no pós-teste.

O Quadro 144 apresenta um resumo todos os testes realizados com os resultados encontrados com destaque em amarelo para os casos nos quais foram verificadas associações estatísticas significativas.

Quadro 144 – Quadro Resumo - Teste de Fischer

Variável 1	**Variável 2**	**Associação estatística significativa**	**p-valor**	**Valor V-Cramer**	**Efeito *V-Cramer***
Escolaridade do Responsável Masculino	Escolaridade do Responsável Feminino	Não	0,526	-	-
O aluno exerce atividade remunerada	O aluno possui curso profissionalizante	Não	0,061	-	-
Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	O aluno possui curso profissionalizante	Sim	0,015		Grande
Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	O aluno exerce atividade remunerada	Sim	0,024	0,810	Grande
Avaliação dos Conhecimentos do Ensino Médio	Sentimento do aluno diante de uma avalição de matemática	Sim	0,018	1	Perfeito
O aluno já esteve em Dependência	Sentimento do aluno diante de uma avalição de matemática	Não	0,509	-	-
Hábito de estudo fora da escola	Sentimento do aluno diante de uma avalição de matemática	Sim	0,008	0,856	Grande

Hábito de estudo fora da escola	Ajuda em tarefas de matemática	Não	0,555		-
Hábito de estudo fora da escola.	O aluno já esteve em dependência	Não	0,455		-
Hábito de estudo fora da escola	Gostar de matemática	Não	0,922		-
O aluno já esteve em dependência	Gostar de matemática	Não	0,564		-
Ajuda nas tarefas de matemática	Gostar de matemática	Não	0,377		-

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Os resultados do teste Exato de Fischer apontou algumas associações estatísticas significativas, em especial, em relação a “Avaliação dos Conhecimento do Ensino Médio” adequado ao mercado de trabalho e profissão, cultura e conhecimento são dos que tinham algum curso profissionalizante. Por outro lado, destes, os que exerciam atividade remunerada, à exceção de A8, sentiam-se nervosos diante de uma avaliação em matemática.

Os que acreditavam que o EM lhes proporcionou cultura e conhecimento e não exerciam atividade remunerada englobava a maioria dos que tiveram melhor desempenho. Além disso, os que avaliaram o EM dessa maneira também foram os que ora sentiam-se preocupados ou ora tranquilos, diante de uma avaliação.

Em relação ao “Hábito de estudo fora da escola” houve associação significativa com o “Sentimento do aluno diante de uma avaliação de matemática”; assim, os que estudavam somente no período de prova representavam a maioria dos que ficavam nervosos e preocupados e os que estudavam nos fins de semana ficavam, em sua maioria, tranquilos.

Apenas, há título de informação os melhores desempenhos, A4 e A8, não exerciam atividade remunerada, acreditavam que o EM lhes proporcionou cultura e conhecimento, ficavam tranquilos diante de uma avaliação e tinham hábitos de estudo semelhantes: somente nos fins de semana.

De forma contrária, os que tiveram os piores desempenhos, representavam as duas categorias: A11 disse ficar com medo e ansioso, exercia atividade remunerada, tinha curso profissionalizante, avaliou o EM como adequado ao mercado de trabalho, profissão e que lhe proporcionou cultura e conhecimento e estudava, apenas, no fim de semana ; e A3 ficava preocupado, mas não exercia atividade remunerada, não tinha curso profissionalizante, acreditava que o EM lhe proporcionou cultura e conhecimento e estudava somente na véspera de prova.

Apesar das associações estatísticas significativas encontradas não há evidências suficientes para indicar a influência da maioria das variáveis em termos de desempenho; portanto, há de se destacar o papel positivo da aplicação da sequência didática e da metodologia na aprendizagem de vetores geométricos. Tendo por base os resultados por Fischer, a seguir o teste de *Spearman* será realizado para fins de confirmação das evidências, até então, constatadas e observadas.

6.2.3.3. Resultado do Teste de Correlação de *Spearman*

O teste de Spearman, nesse estudo, foi utilizado para verificar alguma dependência entre as variáveis do tópico anterior, a variável frequência durante a experimentação e a variável Desempenho dos alunos, obtida a partir da diferença entre as notas do pré e do pós-teste.

Para tanto, devido as características das variáveis, o teste de correlação escolhido foi o de Spearman, pois nem todas tinham distribuição normal, o que exclui a possibilidade de uso da correlação de Pearson. O Quadro 145 apresenta o resultado do teste de normalidade *Shapiro-Wilk* usando o *software Jamovi*.

Quadro 145 - Teste de Normalidade para o Teste de Correlação

Teste de Normalidade	**Variáveis**					
	Escolaridade do responsável feminino	Escolaridade do responsável masculino	Exerce atividade remunerada	Possui curso profissionalizante	Avaliação dos conhecimentos do EM	Sentimento diante de uma avaliação de matemática
Shapiro-Wilk	0,797	0,668	0,572	0,649	0,625	0,486
p-valor de Shapiro-Wilk	0,009	<.001	0,001	<.001	<.001	<.001
Teste de Normalidade	**Variáveis**					
	Esteve em dependência	Hábito de estudo fora da escola	Ajuda em tarefas de matemática	Gostar de matemática	Frequência durante a experimentação	Desempenho
Shapiro-Wilk	0,749	0,793	0,951	0,898	0,766	0,967
p-valor de Shapiro-Wilk	0,002	0,008	0,652	0,175	0,003	0,852

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi.*

Assim, de acordo com o resultado do teste de normalidade, nem todas as variáveis tem distribuição normal, pois algumas possuem p-valor<0.05; dessa forma, o uso do teste de Spearman é justificado. Contudo, outra necessidade para o uso do

referido teste é que as variáveis sejam quantitativas, o Apêndice O apresenta a parametrização utilizada para cada uma.

No mais, a variável Desempenho foi "transformada" em quantitativa ordinal por meio de um rankeamento das notas (valores utilizados na parametrização), tal como mostra o Quadro 146.

Quadro 146 - Rankeamento da Variável Desempenho

Aluno	Acertos no pré-teste	Acertos no Pós-teste	Diferença	Rankeamento
A1	9	18	9	3
A2	5	14	9	3
A3	8	12	4	7
A4	4	16	12	1
A5	8	13	5	6
A6	7	13	6	5
A7	6	12	6	5
A8	6	17	11	2
A9	3	12	9	3
A10	7	15	8	4
A11	0	0	0	8

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi*.

Após a realização das devidas adaptações das variáveis o *Jamovi* foi utilizado para realizar o teste de *Spearman*, com nível de significância de 0,05. A avaliação foi feita em relação a possibilidade de correlação entre a variável Desempenho Rankeada e as demais já listadas. O Quadro 147 apresenta os resultados.

Quadro 147 – Resultado Correlação de Spearman com a variável Desempenho Rankeada

Correlação de Spearman	Variáveis					
	Escolaridade do responsável feminino	Escolaridade do responsável masculino	Exerce atividade remunerada	Possui curso profissionalizante	Avaliação dos conhecimentos do EM	Sentimento diante de uma avaliação de matemática
Rho de Spearman	-0,074	-0,429	0,196	0,029	-0,272	-0,345
p – valor	0,0530	0,188	0,564	0,932	0,418	0,298
Correlação de Spearman	**Variáveis**					
	Esteve em dependência	Hábito de estudo fora da escola	Ajuda em tarefas de matemática	Gostar de matemática	Frequência durante a experimentação	
Rho de Spearman	0,154	-0,302	0,042	-0,554	-0,276	
p – valor	0,658	0,367	0,902	0,077	0,411	

Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa e dos resultados do *Jamovi.*

Pela verificação do valor de probabilidade (p-valor) não havia nenhuma correlação com o nível de significância estabelecido. Assim, por hipótese de exclusão, pode-se considerar que o desempenho positivo dos alunos foi, principalmente, devido

a aplicação da sequência didática e da metodologia utilizada e que não houve interferência estatística significativa dos fatores socioeconômicos e educacionais e, dessa forma, confirma-se, também, as evidências encontradas nos testes estatísticos anteriores.

6.2.3.4. Síntese: Verificação de Desempenho no Pré e no Pós-teste

De forma global, as análises por questões nos indicaram um bom desempenho na maioria delas e, consequentemente, a validação da sequência didática. Porém, em alguns casos não foram verificadas alterações significativas em termos quantitativos, todavia as análises qualitativas puderam justificar, por meio da verificação de erros, os fatores determinantes que, na maioria das vezes, não tiveram por motivação problemas de procedimento.

Ou seja, no pós-teste, é possível perceber que os alunos sabiam o que deviam fazer, mas incutiram em erros operacionais, de interpretação e de falta de atenção, na maioria das vezes; fatores também observados durante o andamento das atividades.

Especificamente, dois itens das questões nos chamaram a atenção pelo desempenho aquém do esperado: 3.a e 5.a. Contudo, as análises nos revelaram problemas de interpretação de texto e de atenção, nos dois casos. Consequentemente, questões mais contextualizadas, com textos maiores e que necessitavam de uma visão mais interpretativa como a 02, 03 e 05 tiveram um desempenho inferior, em alguns itens, comparativamente, com as que apresentaram um contexto mais direto e/ou puramente matemático.

Por outro lado, o uso de vetores foi destacado como uma ferramenta para resolução de forma mais rápida e eficiente e, dessa forma, diferentes modos de resolução são possíveis para um mesmo problema e esse fato foi observado por alguns alunos, especialmente, nas questões 06 e 07.

No pré-teste, para a questão 06, foram verificadas tentativas de resolução como a projeção dos vetores no plano e utilizando recursos de geometria analítica, e, na 07, por relação trigonométrica. Entretanto, foi interessante observar, no pós-teste, o uso de vetores pelos alunos, nas duas questões, e, na maioria das vezes, de forma correta.

Em relação aos erros, a maioria destes, diferenciaram-se em relação ao Pré e Pós-teste, bem como, os estudantes que o cometeram, e a maioria foram

solucionados. Assim, apesar dos resultados positivos, algumas particularidades ainda precisam ser tratadas com mais atenção como a interpretação de texto e os erros operacionais que influenciaram consideravelmente no desempenho, por exemplo, no caso de direção e sentido e de operações para encontrar o determinante, respectivamente.

Em termos de desempenho individual, dentro das possibilidades e condições de ensino, tais como, tempo de aula, frequência nas aulas, números de aulas e horários disponibilizados, os resultados foram satisfatórios, bem como, o empenho e a características dos estudantes e da turma, de forma global.

No entanto, o estudante A11 nos chama atenção por não ter nenhuma questão 100% correta, tanto no Pré quanto no Pós-teste. Entretanto, há de se destacar, positivamente, que no Pós-teste houveram mais tentativas de resolução; além disso, diferente da maioria da turma, o aluno teve uma frequência aquém do esperado, além dos constantes atrasos. Ainda assim, em suas avaliações, a metodologia foi tida como positiva.

Estatisticamente, o teste t-pareado comprovou que houve melhoria no desempenho dos estudantes e os de associação, Exato de Fischer, e de correlação, de Spearman, nos impulsionam a afastar a influência dos fatores socioeconômicos e acadêmicos no desempenho positivo e nos aproximaram, por exclusão, da hipótese de que a melhoria se deu devido a aplicação da Sequência Didática e da metodologia utilizada.

As associações estatísticas significativas encontrada por Fischer revelaram fatos relevantes, porém não é possível garantir, por exemplo, que os melhores e/ou piores desempenhos estavam atreladas a avaliação do EM, exercício de atividade remunerada, sentimento diante de uma avaliação de matemática ou hábitos de estudos; contudo, alguns indícios puderem ser verificados e foram relatados.

No mais, para fins de validação da tese, ainda é necessário verificar se a experimentação influenciou no padrão emocional dos estudantes que será realizado na subseção a seguir.

6.3. ANÁLISE DO PERFIL EMOCIONAL DOS ESTUDANTES PÓS EXPERIMENTAÇÃO

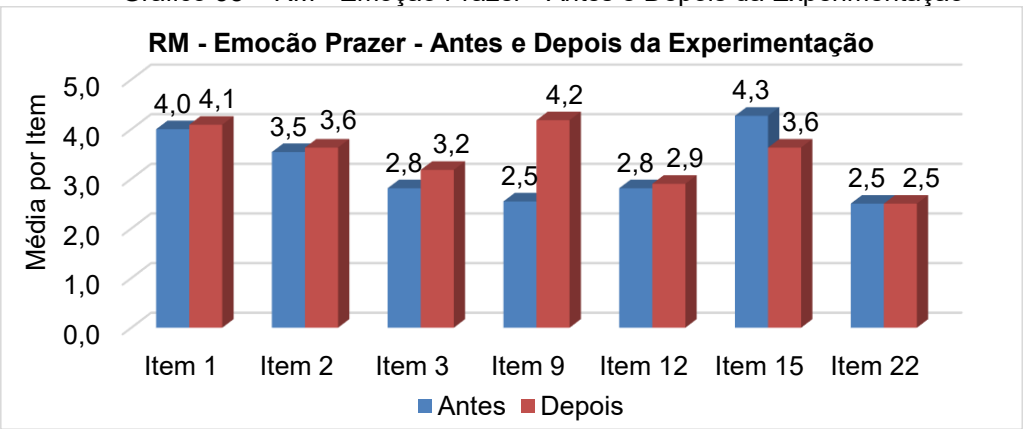
Cerca de três meses após o fim da experimentação, os alunos participantes da experimentação foram contactados para responder novamente ao questionário de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática, respondido, também no início da experimentação, a fim de permitir a comparação e verificar os efeitos antes e após a aplicação da Sequência Didática.

Inicialmente, os resultados foram submetidos a análise de confiabilidade, tal como realizado com os obtidos com a aplicação do início do experimento e já relatados na etapa da Experimentação. Os valores obtidos para α foram de 0,722 e 0,611, respectivamente, para cada uma das partes dos testes, individualmente, qual seja: de emoções e de autoconceito acadêmico; portanto, há uma consistência substancial e os dados podem ser considerados confiáveis.

As análises foram realizadas pelo método de RM, seguindo os mesmos parâmetros destacados na Experimentação, em relação, também, a inversão dos pesos e pela contagem das respostas de acordo com a escala.

Portanto, em relação ao teste de Emoções, a primeira emoção analisada foi o Prazer, de acordo com os resultados dos itens com as autoafirmações 01, 02, 03, 09, 12, 15 e 22 que o caracterizavam. O Gráfico 38 apresenta os resultados.

Gráfico 38 – RM - Emoção Prazer - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

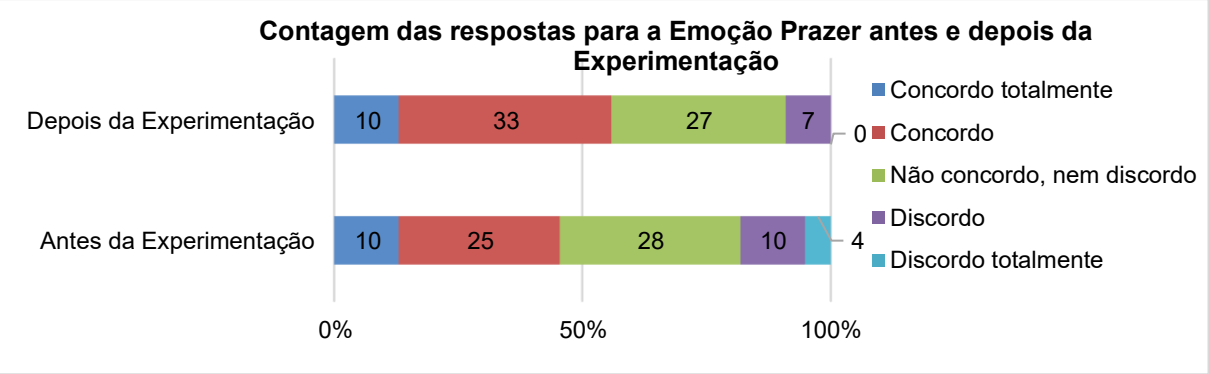
Para essa emoção, apenas, o item 15 – Eu adoro aprender um assunto novo em matemática teve uma média menor que no teste anterior e o item – 22 manteve-se estável; dessa forma, considerando os dados de antes da experimentação, além

da melhora geral, há de se destacar o aumento nas emoções relacionadas as instruções em sala de aula (itens 3 e 9) que estavam abaixo de 3, e do item 12.

A média geral aumentou de 3,2 para 3,4; assim, pode-se afirmar que essa emoção teve um ligeiro aumento, porém tende a indicar uma incerteza dos alunos em relação a essa emoção a depender do caso concreto. Lima (2012) cita que, em pesquisas recentes, essa emoção, em relação a matemática está relacionada a notas altas e não em ações e, também, traz evidências de situações que aconteceram anteriormente.

Para fins de complementação, o Gráfico 39 apresenta o comparativo da contagem das respostas antes e depois da experimentação para a emoção Prazer.

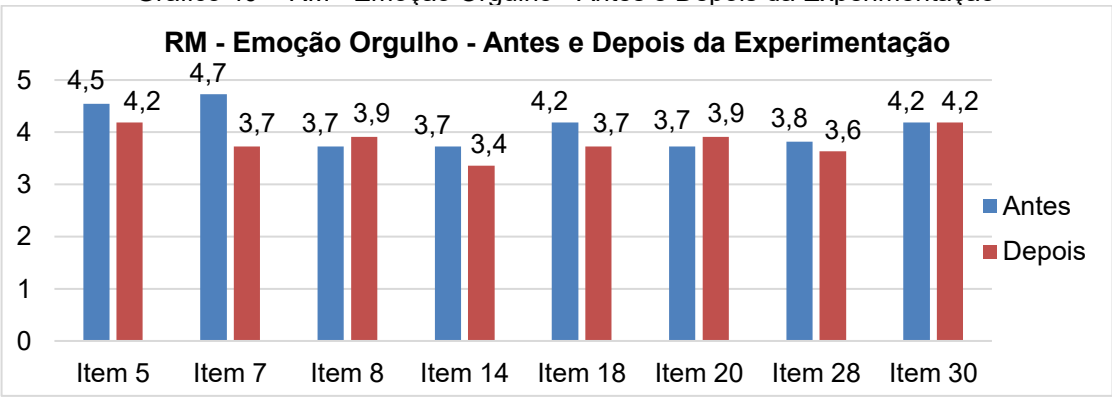
Gráfico 39 – Contagem das respostas para a emoção Prazer - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Portanto, a contagem confirmou os resultados verificados por meio de RM, ou seja, de fato essa emoção teve uma ligeira melhora pós-experimentação. Para a segunda emoção verificada, o Orgulho, as autoafirmações consideradas foram as dos itens: 05, 07, 08, 14, 18, 20, 28, 30. O Gráfico 40 apresenta os resultados.

Gráfico 40 – RM - Emoção Orgulho - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

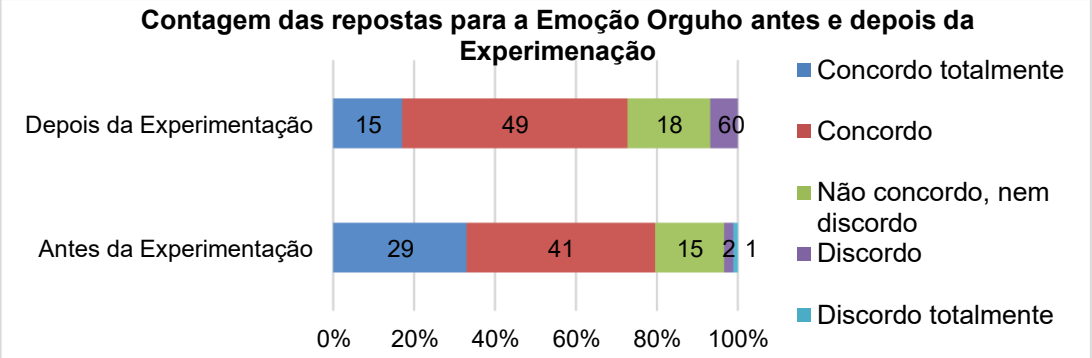
Como pode-se observar, foram poucos itens que tiveram melhora; na maioria dos casos, tiveram uma queda nos valores. Em especial, os itens 7 - Eu fico feliz quando faço uma prova em matemática e 18 – Eu fico orgulhoso de estar podendo entender as aulas de matemática, referentes a instruções em provas e salas de aulas, respectivamente; o que causa uma certa estranheza.

Por outro lado, os itens 8 – Eu sinto orgulho de mim mesmo ao estudar matemática sem precisar da ajuda de ninguém e 20 – Eu sinto orgulho quando o professor elogia meu bom desempenho em matemática foram os que tiveram um ligeiro aumento.

De forma geral, a partir de um olhar e experiência docente e profissional, esse sentimento, para os alunos, pareceu estar condicionado a ações de terceiros e de práticas autônomas, tal como realizar atividades sozinhos, porém desde que tenham a visibilidade e percepção de outras pessoas, principalmente, do professor.

Em relação a média geral, os valores foram próximos, sendo, 4,1 para antes da experimentação e 3,8 para após. Assim, não é possível afirmar que houve melhora nessa emoção, porém, como na anterior, indica uma tendência a estabilidade, tal como pode ser percebido, também pela contagem das respostas, vide Gráfico 41 .

Gráfico 41 – Contagem das respostas para a emoção Orgulho - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

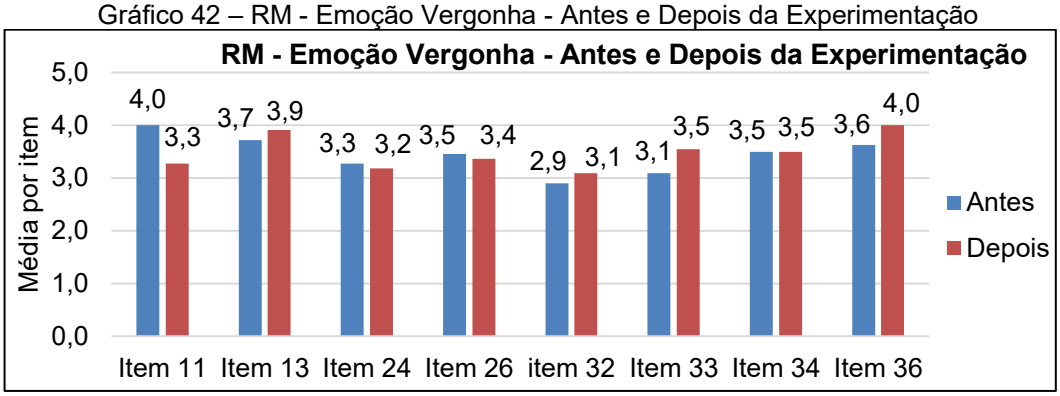
A contagem confirma o que foi observado no RM, a emoção Orgulho não sofreu alteração significativa; contudo, as mudanças observadas refletem uma necessidade da “aprovação”, “visibilidade” de outras pessoas. Assim, o orgulho não está, somente, atrelado, para esses alunos, à capacidade de realizar, aprender, fazer etc, mas no “elogio” vindo de outras pessoas.

Lima (2012) destaca, também, que essa emoção reflete a experiência dos alunos com a matemática. Portanto, não há como dizer que a aplicação da sequência

didática foi o único fator a interferir nas informações apresentadas, que podem ter sofrido influência significativa de resultados e de vivências anteriores em matemática.

As emoções seguintes, Vergonha, Ansiedade e Raiva, trazem consigo sentimentos negativos em relação a matemática, como já descrito anteriormente. O Gráfico 42 apresenta os resultados para a Vergonha, as autoafirmações dos itens 11, 13, 24, 26, 32, 33, 34 e 36 foram consideradas.

Gráfico 42 – RM - Emoção Vergonha - Antes e Depois da Experimentação

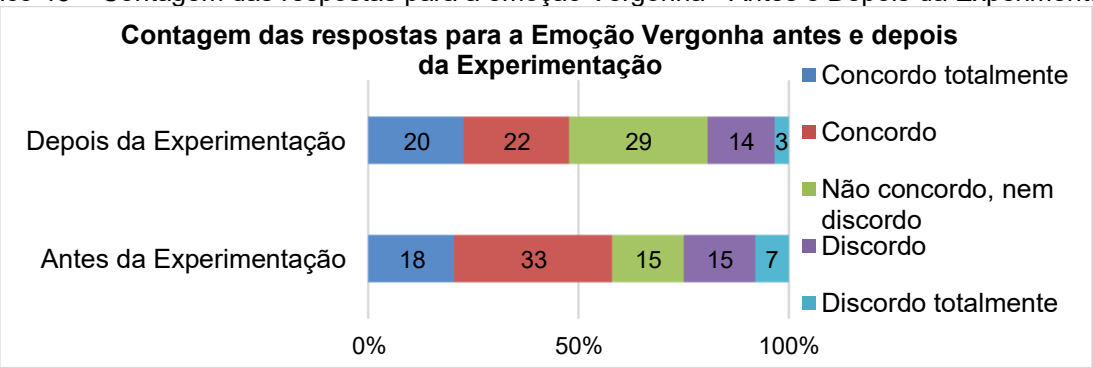


Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Para essa emoção, somente, os itens 11, e 24 e 26 não tiveram melhora e referem-se a estudos extraclasse e instruções em sala de aula que corroboram com os resultados do Orgulho: da mesma forma que sentem vergonha também não sentem orgulho de si próprio diante das situações apresentadas.

Alguns itens podem ser destacados: o 13 demonstrou, uma melhor relação professor-aluno, aluno-aluno e na sala de aula; e os 32, 33 e 36, uma melhora na relação com os erros e com a capacidade de admitir suas dificuldades. Contudo, a média geral foi a mesma: 3,5 antes e após a experimentação. O Gráfico 43 apresenta a contagem das respostas para emoção Vergonha.

Gráfico 43 – Contagem das respostas para a emoção Vergonha - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

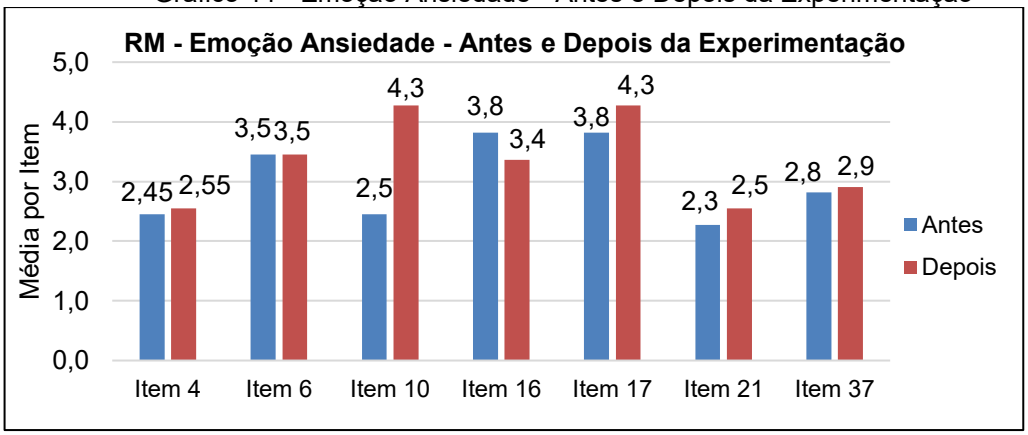
A contagem das respostas mostrou um aumento na opção “Não concordo, nem discordo” que indica incertezas ou reações diferentes a depender da situação, dessa forma, corrobora com o resultado da média do RM. De forma a justificar o resultado, Lima (2012) diz que essa emoção é considerada como social para muitos autores e exemplifica que se o aluno fracassar em matemática, se sentirá incompetente e com vergonha, pois o foco é no outro como referência de si mesmo e explica que

> [...] Mesmo uma realização de sucesso de um outra ação nem sempre leva a emoções positivas; isso pode engendrar uma experiência nitidamente negativa sinalizando que, enquanto o motivo principal é a preocupação, o sucesso obtido é psicologicamente uma derrota para personalidade. (Leontiev, 2014, p.108)

Portanto, há que se dizer que uma possível preocupação com os outros, com o seu desempenho baseado em notas do sistema escolar vigente, ou problemas econômicos, pessoais e, até mesmo, profissionais, tenham suscitado sentimentos negativos que provocaram esses resultados.

Para a Ansiedade as autoafirmações dos itens 04, 06, 10, 16, 17, 21 e 37 foram analisadas. O Gráfico 44 apresenta os resultados.

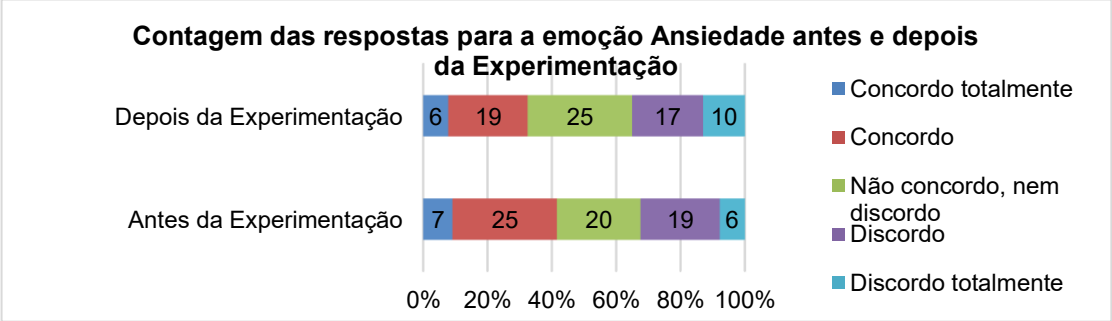
Gráfico 44 - Emoção Ansiedade - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Os alunos, pós-experimentação, mostraram-se, de forma geral, menos ansiosos, exceto, pelo item 16 relacionado a instruções em sala de aula; inclusive, é considerável a melhora em relação as situações de prova (itens 4, 6,10, 21 e 37). A média geral foi 2,9 para 3,1. O Gráfico 45 apresenta a contagem das repostas.

Gráfico 45 – Contagem das respostas para a Emoção Ansiedade antes e depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

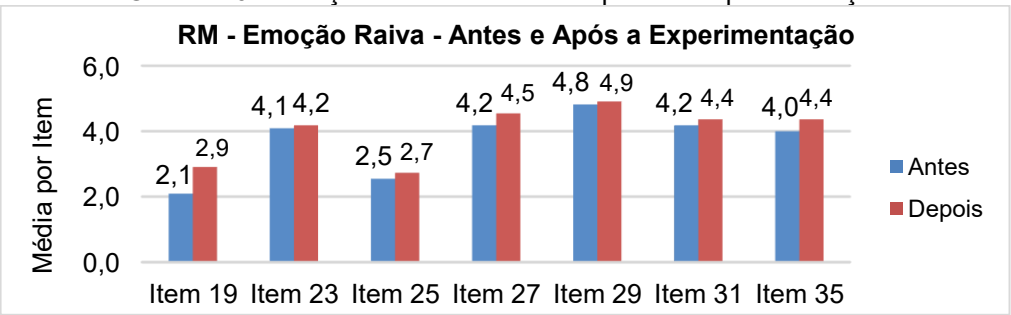
Pela contagem há de se perceber uma melhora na ansiedade pela diminuição da maioria da contagem das opções, em especial, das “Concordo” e “Não concordo, nem discordo” e aumento da “Discordo totalmente”; que eram os objetivos. Lima (2012) destaca que a ansiedade está ligada a expectativa de resultados, seja o fracasso ou o seu evitamento e que, em várias pesquisas, há evidência dessa emoção com o baixo desempenho dificultando e bloqueando a capacidade de raciocínio; porém, também pode ser utilizada como estímulo para aprendizagem.

Assim, esclarece que:

> [...] Com respeito ao possível efeito positivo da emoção de ansiedade, podemos cogitar: se nos reportamos à mediação cognitiva, logo podemos supor que, um (a) estudante que tem uma expectativa de sucesso de desempenho, um autoconceito acadêmico alto, poderá sentir-se levemente ansioso para aprender um assunto novo de matemática (Lima, 2012, p. 98)

Nesse sentido, considerando o desempenho positivo dos alunos na experimentação, o resultado dessa emoção pode estar relacionado a esse mister de efeitos positivos e negativos que envolvem o caso concreto vivenciado pelos estudantes durante a experimentação. Por fim, foi avaliada a emoção Raiva tendo como suporte as autoafirmações dos itens 19, 23, 25, 27, 29, 31 e 35. O Gráfico 46 apresenta os resultados.

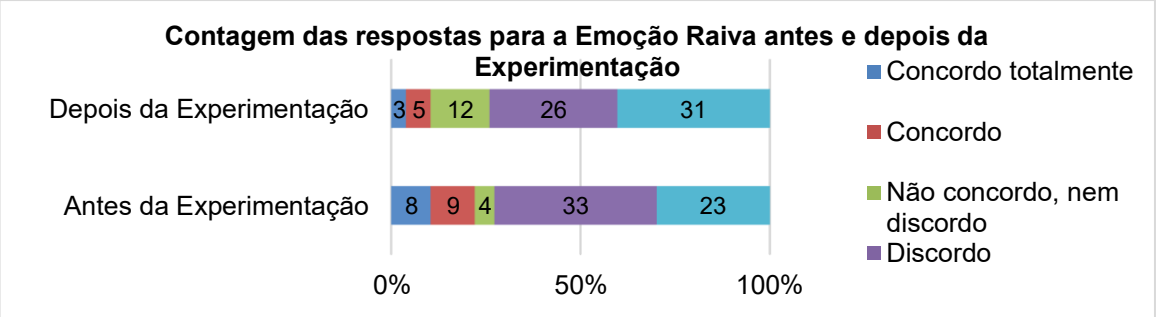
Gráfico 46 - Emoção Raiva - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Diferente das demais emoções, a Raiva teve um resultado positivo em, praticamente, todos os itens; a média aumentou de 3,7 para 4. Para confirmar o resultado, o Gráfico 47 apresenta a contagem das repostas por opção da escala.

Gráfico 47 - Contagem das respostas para a Emoção Raiva antes e depois da Experimentação



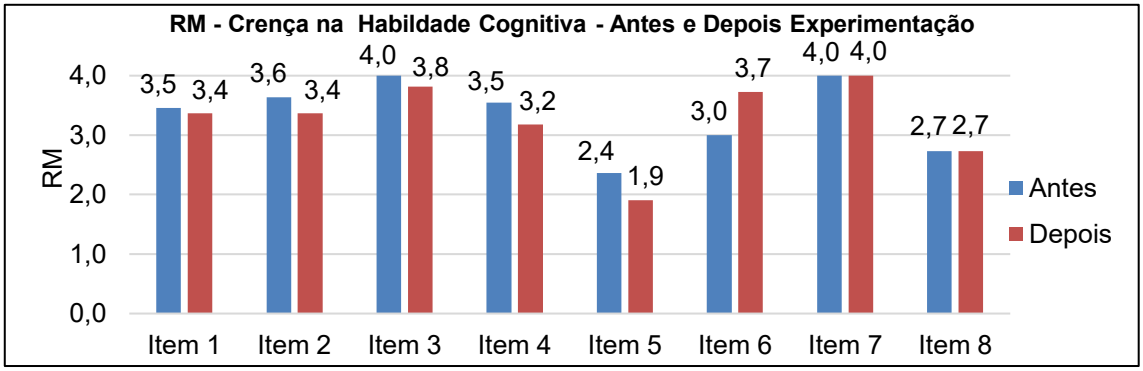
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

A contagem, também, enfatiza a melhoria dessa emoção. De acordo com Lima (2012) essa emoção em matemática está relacionada a tarefas com alto nível de controle subjetivo e, nesse caso, pode gerar frustação devido a importância de acertar dada pelo aluno.

As atividades da situação didática traziam aspectos relacionados a subjetivamente para a sua resolução e, de acordo com os resultados, podem ter proporcionado aos alunos uma diminuição da carga de Raiva relacionada a matemática por permitir melhoras em termos de análise, dedução, domínio e autonomia, como já discutido e demonstrado nas análises anteriores.

No outro teste aplicado, de Autoconceito Acadêmico, dois fatores foram analisados: crença na habilidade cognitiva em matemática – autoafirmações de 1 à 8; e crença na autoatribuição – autoafirmações de 9 à 12. O Gráfico 48 apresenta os resultados para o primeiro fator.

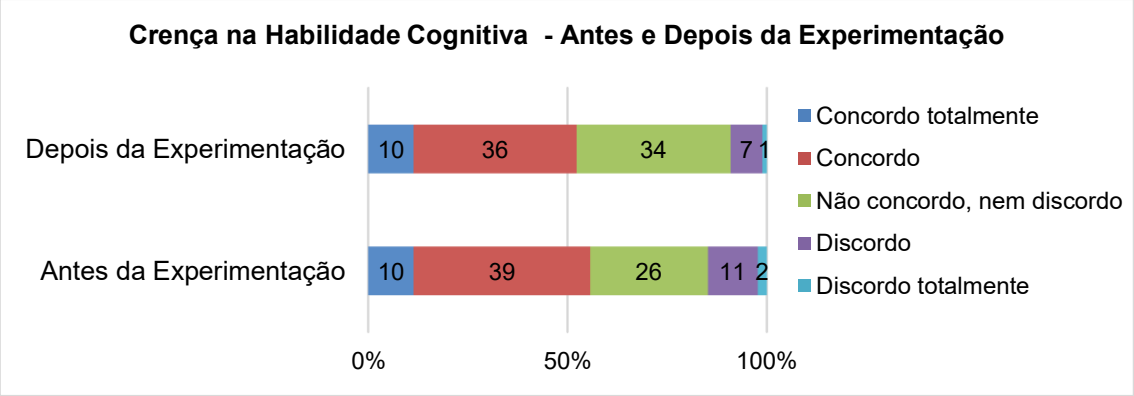
Gráfico 48 – Crença na habilidade cognitiva em matemática - Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Em relação ao resultado anterior, o item 6 teve um aumento significativa, indicando uma melhora na autoconfiança e autonomia dos alunos em resolver questões difíceis em uma prova de matemática; por outro lado, não acreditam que tem uma boa capacidade de raciocínio lógico (item 5). Os demais itens mantiveram-se estáveis e/ou com pouco diferença numérica; a média geral foi a mesma, antes e depois da experimentação, qual seja, 3,3. O Gráfico 49 apresenta os resultados para a contagem das respostas.

Gráfico 49 – Contagem das respostas para a Crença na Habilidade Cognitiva



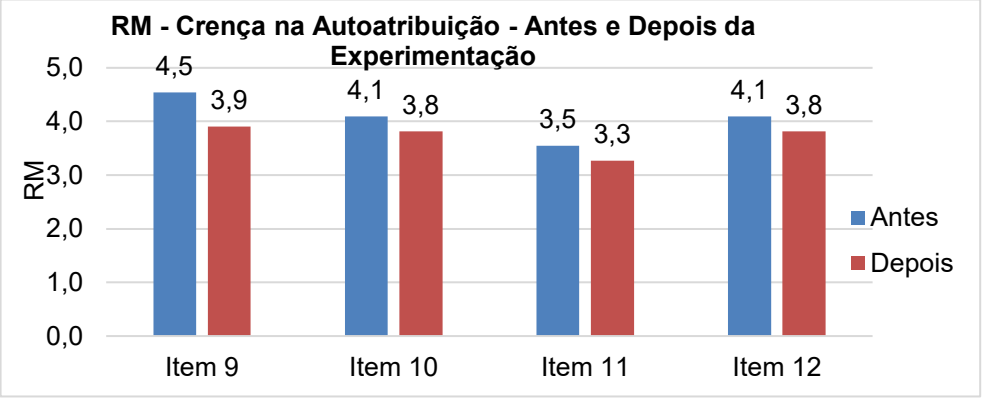
Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Tal como observado pela média geral do RM, a contagem das respostas confirmam uma “incerteza” em relação as habilidades cognitivas em matemática. Nesse caso, há de se ressaltar, novamente, que a coleta das informações da pesquisa depois da experimentação se deu em um período pós-avaliação dos alunos e, talvez, as notas e desempenhos nas disciplinas, como um todo, podem ter influenciado as respostas.

Por outro lado, não há que se considerar uma “não crença” nas habilidades cognitivas, mas uma estabilidade e incerteza há depender do caso concreto vivenciado. O segundo fator analisado estava relacionado a Crença Geral do Estudante, diferente da crença na habilidade cognitiva que traz em si a matemática de forma direta e específica.

A autoatribuição tende a indicar se o estudante atribui “apenas a si mesmo a causa do fracasso ou sucesso do que realiza” (Lima, 2012, p.72). As informações coletadas em relação ao segundo fator, são apresentadas no Gráfico 50.

Gráfico 50 – Crença na Autoatribuição - Antes e Depois da Experimentação

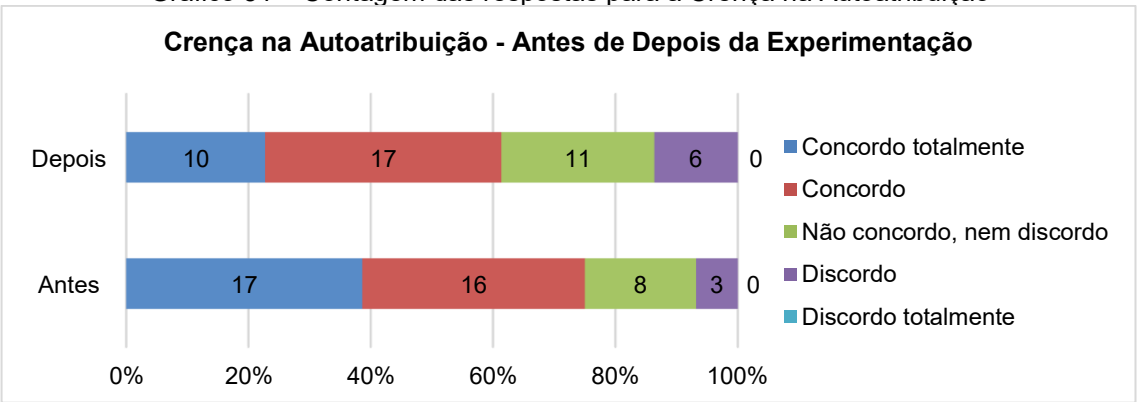


Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

A diminuição da média por autoafirmação refletiu, consequentemente, na geral que foi de 4,1 para 3,7. O

Gráfico 51 apresenta os resultados para a contagem das respostas a fim de confirmar as informações observadas.

Gráfico 51 – Contagem das respostas para a Crença na Autoatribuição



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

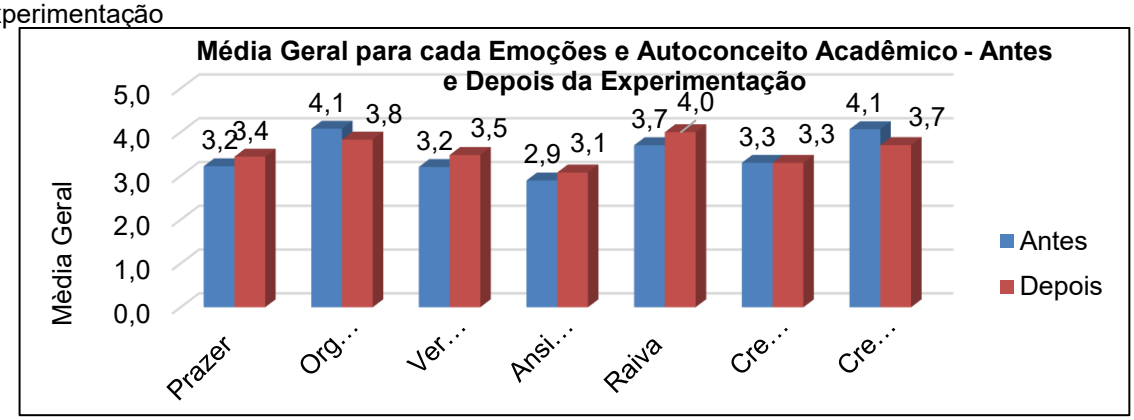
Tanto o RM quanto a contagem das respostas indicam, a grosso modo, a mesma conclusão: uma diminuição na crença da autoatribuição. Contudo, levando em consideração do que se trata essa crença, a depender do contexto, é importante que os alunos atribuam, somente, a si mesmos, as causas do seu sucesso ou fracasso.

Porém, em outros casos, é necessário que entenda a necessidade da cooperação como em um ambiente coletivo de trabalho e, até mesmo, na sala de aula, o que de forma alguma descaracteriza a sua autonomia e/ou poder de decisão.

Ainda assim, há de considerar que o uso da metodologia de ensino diferenciada pode ter indicado a eles possibilidades que independem de um único fator, principalmente, em relação ao desempenho matemático. De certa forma, a não

atribuição somente a si mesmo, pode ser favorável, ao diminuir as cargas emocionais negativas, tal como, as ligadas a ansiedade. Por fim, o Gráfico 52 apresenta, em resumo, a média geral para cada uma das emoções analisadas antes e depois da experimentação, bem como para o teste de autoconceito acadêmico.

Gráfico 52 – Média Geral para cada Emoção e Autoconceito Acadêmico – Antes e Depois da Experimentação



Fonte: elaborado a partir dos dados da pesquisa.

Ao observar as médias gerais, pode-se dizer que houve melhora em relação as emoções de desempenho na matemática, especialmente, à Raiva; por outro lado, pequenas diferenças numéricas são um indicativo de que o uso da sequência didática pode contribuir positivamente com o aspecto emocional dos estudantes no que diz respeito a matemática; sobretudo, acredita-se que avaliações mais condizentes devem ser realizadas a longo prazo.

Portanto, não há que se dizer que, apenas, o uso da metodologia experimentada levou ao resultado, mas um conjunto de variáveis que envolvem situações anteriormente vivenciadas; porém, há um indicativo que trabalhos posteriores devem aprofundar essas evidências.

Sobre o teste de autoconceito acadêmico, os resultados foram estáveis; no que diz respeito a autoatribuição, as considerações já foram realizadas anteriormente. Para fins de complementação, o Quadro 148 apresenta a média global para o teste de Emoções e de Autoconceito Acadêmico, antes e depois experimentação.

Quadro 148 - Média Global para cada teste antes e depois da experimentação

Teste	**Média Global**	
	Antes da Experimentação	**Depois da Experimentação**
Emoções de desempenho na matemática	3,5	3,6
Autoconceito Acadêmico	3,7	3,5

Fonte: elaborado a partir dos dados dos testes.

Assim, os valores das médias globais confirmam o que foi constatado anteriormente: leves alterações em termos de emoções que, provavelmente, com o uso de metodologias diferenciadas para o ensino, tendo por base a atividade de estudo, a longo prazo, podem trazer resultados ainda mais satisfatórios, assim como, para o autoconceito acadêmico.

No mais, cabe esclarece que o cerne da teoria da atividade é a mediação que influencia o desenvolvimento dos processos cognitivos do sujeito, Rodrigues e Campello (2013, p. 5) ressaltam que

> O homem analisado sob seu aspecto emocional pode ser compreendido com uma síntese das relações sociais, assim as emoções são construídas a partir das condições materiais de produção, ou seja, é a dinâmica social que faz dos objetos tradutores de seus princípios (Rodrigues e Campello, 2013, p.5)

Nesse contexto, é a partir dessa dinâmica social que o ensino por RPPP e por Atividades Experimentais atuam e trazem resultados expressivos, não só em termos de aprendizagem, quanto a nível emocional, pois apresentam aos alunos como aprender a aprender de uma forma que o estimule e induza a processos criativos e emocionais positivos m relação a matemática, especialmente.

Leontiev (2014, p. 108) destaca que as “Emoções não estão subordinadas à atividade, mas aparecem como resultado e o ‘mecanismo’ de seu movimento”. Davydov (1988) vincula as emoções a necessidade e ao desejo, portanto emoções positivas em relação a determinado objeto levam a decisões que impulsionam a sua solução ou a sua tentativa de resolução.

Nesse aspecto, há de se considerar que as emoções advindas das atividades experimentadas movimentaram os alunos a direções positivas em termos de autonomia, análise, dedução, domínio e desempenho, mais ainda, foram melhoradas em relação a matemática na maioria dos casos.

Por fim, apresentado uma síntese dos principais efeitos observados em cada uma das categorias elencadas na tese: análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções.

6.4. SÍNTESE DAS CATEGORIAS ELENCADAS NA TESE

Nessa subseção foram destacados os principais efeitos em relação as categorias elencadas na tese e observados a partir da experimentação, tendo por base as atividades, os testes (pré e pós-teste) e as análises realizadas.

Para tanto, fez-se uso da seguinte escala para cada item avaliado, de acordo com a legenda e o destaque por cor, quais sejam:

- Todos (T) – utilizado quando a característica foi observada em todos os participantes (11 alunos ou todos os grupos);

- Quase Todos –(QT) – utilizado quando a característica foi observada entre 7≤alunos/grupos≤10;

- Metade (M) - utilizado quando a característica foi observada em 06 alunos, devido o total ser ímpar optou-se pelo limite superior, ou metade dos grupos;

- Nenhum (N) - utilizado quando a característica não foi observada em nenhum participante/grupo;

- Poucos (P) - utilizado quando a característica foi observada entre 1≤alunos/grupos≤6;

Todos os quadros apresentados a seguir trazem as atividades de 01 à 13 e o pré e o pós-teste para fins de comparação e verificação do progresso dos alunos ao longo da experimentação. Vale ressaltar que as atividades de 10 à 13 eram de RPPP sem previsão de resolução pelos alunos.

O Quadro 149 apresenta as principais características observadas para cada categoria, sendo: a) Análise, b) Dedução, c) Domínio, d) Autonomia, e) Desempenho e f) Emoções.

Quadro 149 – Efeitos nas Categorias elencadas na Tese: a) Análise, b) Dedução, c) Domínio, d) Domínio, e) Desempenho, f) Emoções

a) Análise

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA ANÁLISE	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Mostraram entender o procedimento a ser realizado para a resolução da atividade/questão identificando as características relevantes da atividade e os passos a seguir	P	T	T	T	T	T	QT	T	T	QT	QT	P	QT	P	QT
Observaram o conteúdo da atividade/questão a fim de verificar uma relação geral do objeto dado	P	P	T	T	M	T	QT	QT	QT	QT	QT	P	N	P	QT
Mostraram compreensão do que realmente foi pedido na atividade/questão	P	P	T	T	QT	T	QT	T	T	QT	QT	T	QT	P	QT
Planejaram as ações de forma a executar a tarefa, com o objetivo de facilitar e atingir os objetivos propostos.	P	QT	T	T	M	T	QT	T	T	M	QT	M	M	P	QT
Mostraram a construção de generalizações e de abstrações substantivas	P	P	T	P	M	T	QT	T	QT	N	M	P	M	P	QT

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

b) Dedução

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA DEDUÇAO	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Conseguiram executar o procedimento solicitado na atividade/questão	P	T	T	QT	QT	T	QT	T	T	N	M	P	P	P	QT
Formularam um modelo (letras, gráficos) a fim de fixar a relação observada inicialmente de forma organizada	N	N	T	T	P	T	T	T	T	M	QT	QT	QT	P	T
Conseguiram transformar as relações particulares em relações gerais de acordo com o objeto	P	M	T	P	M	T	QT	T	QT	N	M	P	P	P	QT
Conseguiram fazer conexões com conhecimentos anteriores	T	T	QT	T	QT	T	QT	T	QT	QT	QT	QT	QT	P	T
Redigiram as observações/resoluções adequadamente	P	M	T	P	M	T	QT	QT	QT	N	M	P	P	P	QT
Fizeram comparações com estratégias utilizadas em sessões anteriores	-	QT	QT	QT	QT	T	T	T	QT	M	QT	QT	QT	-	T

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

c) Domínio

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA DOMÍNIO	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Estabeleceram uma observação final condizente com o procedimento executado e relacionado a relação geral do objeto dado de acordo com a atividade	P	QT	T	P	M	T	QT	QT	QT	N	M	P	P	P	QT
Mantiveram a coerência operacional das ações conforme as condições nas quais ela foi executada	QT	QT	T	M	M	T	QT	T	T	QT	QT	P	P	P	QT
Verificaram em que medida o objetivo final foi atingido e/ou ainda de que forma realizaram a tarefa durante a fase de institucionalização	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	-	-
Melhoraram a conversão entre as linguagens natural, aritmética e algébrica	-	QT	QT	P	M	T	T	T	T	T	T	T	T	P	T
Utilizaram representações matemáticas de forma adequada	QT	QT	QT	P	M	T	QT	T	T	QT	M	M	P	P	T
Mostraram utilização da linguagem Matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão	QT	P	QT	P	M	T	T	T	T	QT	QT	P	P	P	T
Mostraram valorização do uso da linguagem Matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão	QT	P	QT	P	M	T	T	T	T	QT	QT	P	P	P	T
Demonstraram ter desenvolvido o pensamento teórico	P	M	T	QT	QT	T	QT	T	T	M	M	M	QT	P	T
Demonstraram ter desenvolvido o pensamento sequencial e lógico	P	M	T	QT	M	T	QT	T	T	M	M	QT	QT	P	T
Realizaram as tarefas, enquadrando-se no tempo de forma eficaz	T	T	T	T	T	QT	T	T	T	N	QT	T	T	M	QT
Redigiram textos com clareza, observando os objetivos propostos.	M	QT	T	P	M	T	QT	QT	QT	-	-	-	-	P	QT
Foram claros ao expor as ideias.	P	P	T	P	M	T	QT	QT	QT	M	M	P	QT	P	QT
Apresentaram domínio de leitura interpretação de texto	P	M	T	QT	QT	T	QT	T	T	QT	T	-	-	P	QT
Apresentaram atenção na resolução das atividades/questões	P	M	QT	QT	QT	T	QT	T	QT	QT	T	QT	QT	M	QT

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

d) Autonomia

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA AUTONOMIA	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Conseguiram entender a atividade/questão sozinho	N	P	QT	T	T	QT	T	T	QT	T	T	QT	QT	P	T
Conseguiram resolver a atividade/questão sem intervenções	N	P	QT	T	QT	QT	T	T	QT	T	T	T	T	P	QT
Mostraram capacidade de tomar decisões de forma autônoma sobre o modo de resolver as atividades/questão	P	M	QT	T	T	T	T	T	QT	T	T	T	T	P	QT
Fizeram escolhas conscientes em relação ao modo de resolução da atividade/questão	QT	QT	T	T	M	T	QT	T	T	M	QT	T	T	M	QT
Mostraram predisposição para resolver questões envolvendo conhecimento de Matemática	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	P	T
Resolveram ou tentaram as atividades de RPPP que não eram previsíveis de serem solucionadas	-	-	-	-	-	-	-	-	-	QT	QT	QT	QT	-	-
Demonstraram interesse em apresentar suas soluções	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	M	T
Mostraram aceitação da possibilidade de existência de mais de uma solução para a atividade/questão	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	P	T
Utilizaram estratégias de outras atividades ou conhecimentos adquiridos	T	T	T	T	T	T	QT	T	T	T	T	QT	QT	-	T
Tiveram predisposição para realizar a tarefa/questão inerentes à metodologia proposta.	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Mostraram ser flexíveis para adaptar-se às exigências impostas pela tarefa/questão	P	M	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

e) Desempenho

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA DESEMPENHO	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Tentaram ou resolveram a atividade/questão com assertividade	-	QT	T	QT	QT	T	QT	T	QT	N	T	T	T	P	QT
Tentaram ou resolveram a atividade/questão evitando deixá-las em branco	T	T	T	T	T	T	T	T	T	QT	QT	T	T	P	T
Tentaram ou resolveram a atividade/questão mesmo com a possibilidade de cometer erros	T	T	T	T	T	T	T	T	T	QT	QT	T	T	P	T
Apresentaram a resolução da atividade/questão de forma organizada	QT	QT	T	QT	T	T	T	T	T	P	QT	T	T	P	QT
Utilizaram conhecimentos adquiridos nas atividades	-	T	T	T	T	T	T	T	T	QT	QT	T	T	-	T
Conseguiram aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente	-	QT	T	QT	QT	T	QT	T	QT	QT	QT	P	P	P	QT
Demonstraram ter habilidades matemáticas	-	T	T	QT	T	T	T	T	T	T	QT	QT	T	P	T
Mostraram ter aprendido os conceitos do objeto estudado	-	QT	T	QT	QT	T	QT	T	QT	T	T	T	T	-	QT

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

f) Emoções

CARACTERÍSTICA – CATEGORIA EMOÇÕES	ATIVIDADES													TESTES	
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	PRÉ	PÓS
Mostraram entusiasmo para participar da aula	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	QT	T
Demonstraram gostar das aulas	QT	QT	QT	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	QT	T
Mostraram prazer ao explicar como resolveu uma atividade	QT	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	-	-
Mostraram felicidade ao conseguir resolver a atividade/questão	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Mostraram felicidade ao entender um assunto	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	-	-
Sentiram-se orgulhosos em entender a aula	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	-	-
Sentiram-se orgulhosos ao tentar resolver uma atividade de RPPP	-	-	-	-	-	T	T	T	-	T	T	T	T	-	-
Mostraram-se motivados a perguntar durante as aulas	QT	QT	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	-	-
Mostraram-se motivados a tentar resolver um problema difícil	P	M	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	P	T
Mostraram-se calmos durante as aulas/testes	P	M	QT	QT	QT	T	T	T	QT	T	QT	T	T	M	T
Procuraram não faltar as aulas	-	-	QT	QT	QT	QT	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Mostraram-se calmos ao ter que resolver uma atividade/questão sozinhos	-	-	-	-	-	-	T	T	-	T	QT	T	T	M	T
Avaliaram positivamente as aulas	QT	QT	QT	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Fonte elaborado a partir dos dados da pesquisa

Portanto, as características apresentadas nos quadros confirmam a presença dos efeitos nas categorias elencadas na tese. No entanto, trata de um rol exemplificativo baseado nas principais evidências observadas e outras podem ser encontradas e comprovadas ao longo da leitura desse relatório de pesquisa.

6.5. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

A proposta de tese tinha por fundamento, a partir da aplicação de uma SD sobre Vetores Geométricos, tendo por método de ensino o uso de RPPP e de Atividades Experimentais, o favorecimento do processo de ensino e aprendizagem em relação a: 1) Análise, 2) Dedução, 3) Domínio, 4) Autonomia, 5) Desempenho e 6) Emoções.

Apesar dos objetivos ousados e amplos, as análises foram feitas e discutidas a partir dos teóricos e categorias propostas na metodologia da pesquisa tendo por base a abordagem mista enfatizando parâmetros qualitativos e quantitativos, com destaque para a variedade de técnicas estatísticas utilizadas.

Em termos de autonomia, análise, dedução e domínio, o estudo deteve-se em verificar de que forma as atividades da SD foram resolvidas pelos alunos tendo por foco principal a análise de erros por tipo de atividade. A verificação desse processo evolutivo de pensamento permitiu a visualização do surgimento da ZDP dos estudantes caracterizada pelo aprendizado devidamente organizado, diminuição de erros, apropriação de conceitos, desenvolvimento do pensamento teórico e, também, de autonomia ao tomar decisões sobre o modo de resolver de forma independente e a partir do pensamento teórico construído.

Além do mais, a verificação das atividades, evidenciou a possibilidade de reprodução da sequência didática em termos de tempo de aula e de execução das atividades, bem como, o confronto positivo entre a análise a *priori* e a *posteriori*.

Em termos de desempenho, aspectos qualitativos que compararam, em especial, os erros no pré e no pós-teste por questão e individual, amparados por técnicas estatísticas para comprovação da hipótese de melhoria de desempenho, associações e correlações que destacaram, por exclusão, o caráter, praticamente, unívoco da sequência didática e da metodologia para o favorecimento do ensino e aprendizagem aquém das características socioeconômicas e acadêmicas. Além de comprovar a hipótese de pesquisa: o desempenho melhorou após a aplicação da SD.

Em relação ao caráter emocional, as emoções de prazer, ansiedade e, em especial, a raiva tiveram melhores resultados; para o orgulho o resultado foi aquém do esperado, mas é justificável porque esta é caracteriza como uma emoção que depende do social; e a vergonha manteve-se estável, o mesmo aconteceu com as habilidades cognitivas de autoatribuição e cognitivas, respectivamente.

Contudo, tanto o orgulho quanto a vergonha estão atrelados a aspectos que independem de como o indivíduo se vê, mas de como o veem. No que diz respeito a crença na habilidade cognitiva aspectos positivos podem ser detectados a depender do caso concreto, tal como, na autoatribuição que, nem sempre, é suficiente agir de forma individual em detrimento da cooperação em um ambiente coletivo.

Além do mais, estar consciente de que nem todos os casos de sucesso e/ou, principalmente, de fracasso independem, exclusivamente, das ações individuais pode diminuir a sobrecarga emocional negativa ligadas, em especial, a ansiedade, raiva e vergonha.

Portanto, em relação ao aspecto emocional deve-se considerar um misto de emoções a depender do caso concreto que leva a um nível de possibilidades que tendenciam a um grau de incerteza confirmado pelas opções “Não concordo, nem discordo” ou pelo valor do RM em torno de 3 (três).

Nesse sentido, alterações emocionais significativamente positivas vão além da aplicação da sequência didática e de metodologias a partir de tendências em educação matemática, pois envolvem vivências pessoais, traumas, situações vivenciadas anteriormente, dentre outras coisas.

Porém, há de se considerar que a SD atendeu as necessidades e desejos que levaram a emoções que envolveram a tomada de decisões em realizar as atividades de forma autônoma e independente a partir das orientações iniciais dadas por mim, professora; de forma exemplificativa, traços marcantes de autonomia puderam ser percebidos nas tentativas de resolução das atividades de resolução de problema como ponto de partida.

No entanto acredita-se que estudos a longo prazo devem ser realizados dentro dessa perspectiva e com essas características e objetivos para uma análise mais robusta e eficiente em termos de emoções. Porém, há de se convir que a experimentação provocou movimentos positivos em relação a estas e a matemática.

Entretanto, apesar de todos os aspectos positivos relatados, algumas fragilidades em termos de aprendizagem de alguns assuntos devem ser estudados e

melhorados em pesquisas posteriores. No mais em alguns casos, as dificuldades fogem ao escopo e a proposta dessa tese como a conversão entre linguagem algébrica-aritmética, e vice-versa, bem como, dificuldades em realizar determinadas operações, por exemplo, cálculo de determinantes.

Por fim, a validação da tese se deu baseando-se não, apenas, em resultados, mas em processos e o modo como estes foram desenvolvidos e pensados pelos estudantes. Assim, ao final desse estudo, pode-se dizer que, de forma muito detalhada, consciente e discutida, a tese proposta foi confirmada.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve por objetivo analisar efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades experimentais em relação a análise, dedução, autonomia, domínio, desempenho e emoções; o lócus e participantes do experimento foram, respectivamente, 11 estudantes de uma turma do 4º período do curso de Engenharia Elétrica do IFPA, Campus Belém.

Ao chegar ao final pretendia-se responder ao seguinte questionamento: De que forma a utilização de metodologias de ensino baseada no protagonismo do ensino compartilhado entre docentes e discentes, tais como, a Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções?

Para tanto, foi proposta a tese de que o ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e Atividades Experimentais, favorecem o processo de ensino e aprendizagem em relação a análise, dedução, domínio, autonomia, desempenho e emoções.

Assim, apesar da ousadia em pensar que uma SD poderia abarcar tantos fatores positivos, nos detivemos nos teóricos da Teoria da Atividade e Atividade de estudos, apoiados pela Análise de Erros e de Emoções, para avaliar cada um dos efeitos propostos, com a intenção não, somente, de validá-los, tal como proposto na tese, mas de detectar as fragilidades e os resultados alcançados ou não de forma satisfatório, pois a tese não é um estudo com fim em si mesmo, mas a ser continuado.

Para tanto, fez-se uso da Engenharia Didática como Metodologia da Pesquisa devido a sua ampla utilização para validação e análise de experimentos realizados em sala de aula, além da sua definição por etapas muito bem definidas e planejadas que permeiam e encaminham a pesquisa, tal qual um engenheiro ao propor, definir, executar e finalizar um projeto.

Assim, a Etapa de Análises prévias teve por objetivo levantar todas as evidências acerca do objeto Vetores Geométricos, apoiando-se em estudos bibliográficos, pesquisas de campo, estado do conhecimento e teorias de análise. Revelou as dificuldades dos alunos, o método de ensino e avaliação docente, como, porque, para que e para quem os estudos de vetores vêm sendo feito, a relação entre

as teorias e os fatores a serem analisados, bem como, as alternativas metodológicas, tendências, em educação matemática.

Nesse sentido, essa fase, nos indicou que a história de vetores foi feita a partir de melhoramentos e correções com destaque para as aplicações em eletromagnetismo e física, em geral. Em relação ao ensino, foi detectado a sua utilização conforme a necessidade, envolto no uso da metodologia de teoria, seguida de exemplos e exercício.

Especialmente, para o Ensino Superior, as ementas do curso de engenharia, arquitetura, matemática, física, dentre outros, já têm o conteúdo de vetores em alguma componente curricular. Em relação as dificuldades dos alunos, há maior dificuldade em assuntos que envolvem plano tridimensional e aplicações.

Em relação as teorias de análise, foi constada que a Teoria da Atividade apoiada na Atividade de Estudo de Davydov, é adequada para avaliar os efeitos propostos na tese. Além disso, a análise de erros se mostrou adequada para avaliar a evolução dos alunos, em especial, em termos de análise, dedução, domínio e autonomia durante a resolução das atividades da Sequência Didática.

Portanto, todos os apontamentos realizados nessa etapa foram propícios para a definição e concretização da fase seguinte que teve por objetivo a Concepção e Análise a *priori* da SD. Foram definidas 13 atividades, entre RPPP e Atividades Experimentais, além dos demais instrumentos de pesquisa, tal como, pré/pós-teste e questionários. As atividades tiveram por alicerce a utilização de contextos da área de Engenharia e, em alguns casos, o matemático.

A etapa seguinte, de Experimentação, deu-se a partir da aplicação de todos os instrumentos elaboradas na etapa anterior para 11 alunos do 4º período de Engenharia Elétrica que estavam cursando a disciplina de Cálculo IV, que contém o assunto de Vetores Geométricos em sua ementa. A experimentação revelou, inicialmente, uma turma comprometida com o seu aprendizado e com maturidade para aceitar a metodologia proposta.

Por fim, a etapa de Validação e Análise a *posteriori,* permitiu verificar a influência da Sequência Didática aplicada nos fatores pré-determinados na tese. Em relação a análise, dedução e domínio foi possível perceber pela análise de erros uma melhoria nesses aspectos, pois não se trata, apenas, de alcançar resultados corretos, mas de verificar o como e o porquê o aluno assim o fez ou chegou àquele resultado.

Especificamente, a Análise pode ser confirmada pelo entendimento do procedimento a ser realizado, pela verificação de uma relação geral do objeto dado, pela compreensão do que foi pedido, pelo planejamento das ações e pela construção de generalizações e abstrações. Os efeitos na Dedução foram observados, pois os alunos conseguiram executar os procedimentos analisados e planejados, transformaram as relações particulares em relações gerais, fizeram conexões com conhecimentos anteriores, dentre outras coisas.

Os efeitos no Domínio foram ratificados ao verificar que os alunos estabeleceram observações condizentes, mantiveram coerência operacional, melhoraram a conversão entre as linguagens e representações matemáticas, bem como, demonstraram ter desenvolvido o pensamento teórico, sequencial e lógico etc.

Paralelo a isso, a autonomia enquanto ligada a capacidade de tomar decisões e a propor soluções de forma independente pode ser observada, em especial, quando da proposição das tarefas individuais de RPPP e/ou da resolução por meios diferentes dos previstos, apesar de, algumas vezes, não desejados; além da predisposição a resolver as tarefas, a apresentar suas soluções, a adaptação as exigências das atividades e vários outros aspectos destacados ao longo do texto.

Assim, há de se considerar que a SD promoveu uma necessidade de dirigir ações com o desejo de chegar ao resultado e essa sequência de atos traduz-se na sequência dos seis passos elencados por Davydov (1988), expostos anteriormente nessa pesquisa, para a resolução de uma atividade de estudo que envolvem análise, dedução, domínio e autonomia.

Em termos de desempenho, dados quantitativos e qualitativos, puderam comprová-los, seja por meio da comprovação da hipótese de melhoria de desempenho, ou por meio da busca de associações e correlações, cujos resultados nos induziram a concluir que os principais efeitos positivos vieram quase que, exclusivamente, da aplicação da Sequência Didática.

Também, foi observado ao longo da experimentação uma maior assertividade, menor números de atividades em branco ou com erro, apresentação das resoluções de forma organizada, aplicações de conhecimento anteriores e demonstrações da aquisição de habilidades matemáticas.

Por conseguinte, a SD promoveu algumas emoções positivas nos alunos, haja vista, o seu entrelaçamento com a necessidade e com o desejo. Contudo, há de se convir, que estudos mais aprofundados e específicos devem ser realizados nesse

sentido, porém os indícios de melhoria das emoções em relação a matemática foram devidamente expostos e discutidos e, de forma alguma, devem ser ignorados ou excluídos como fatores positivos advindos dessa tese; as emoções de ansiedade e raiva foram as que tiveram melhores resultados.

Assim, os alunos mostraram entusiasmo para participar das aulas, demonstraram gostar das aulas, prazer ao explicar como resolveram as atividades, felicidade ao entender o assunto, orgulho em entender a aula e resolver uma atividade, motivados a perguntar durantes as aulas e a resolver problemas difíceis, bem como, mantiveram-se calmos durante as aulas e testes e ao ter que resolver alguma atividade sozinhos, além de que procuraram não faltar as aulas e expuseram avaliações positivas sobre a mesma quando solicitado.

Por outro lado, o trabalho também revelou dificuldades e fragilidades, não só matemáticas em relação a linguagem algébrica, operações com determinantes, jogo de sinal etc., apesar de melhoradas com o andamento das atividades; e, também, de leitura e interpretação de texto.

Nesse aspecto, é necessário um olhar sobre essas questões que permeiam alguns estudantes; em termos de vetores geométricos, esses percalços, em especial de leitura e interpretação de texto, dificultaram a aprendizagem em alguns momentos específicos e pontuais levando a confusão de direção e sentido, troca de sinal e ao não entendimento de direcionamentos que pareciam óbvios.

No mais, aquém dos objetivos da tese, tendo por pressuposto o olhar docente e o exercício da função dupla, como professora e pesquisadora, permitiu-me identificar e refletir sobre o agir em sala de aula e a conduta a ser utilizada, os meios de aprendizagem e a possibilidade de um processo de ensino e aprendizagem com uma metodologia diferenciada que vai além de questões de desempenho ligados a nota, mas implicam em uma satisfação pessoal e profissional.

Muito mais que o acerto, vale o erro, desde que seja o erro experenciado, o erro corrigido, o erro pensado não como obstáculo ou barreira, mas como uma possibilidade de aprender e de estar consciente de que vale a pena investir em metodologias diferenciadas e de que sempre há o que aprender; pois, ao final, o aprendizado também é nosso.

Em relação ao olhar discente, foi nítida a satisfação e a necessidade que estes possuíam de aprender e de ser vistos pelo docente como pessoas especiais, com

particularidades e desafios a serem superados, tal como relatado nas avaliações das sessões escritas por eles ou por comentários durante as aulas.

A proposição de uma metodologia diferenciada os fez sentir-se vivos e importantes, em contraste, a uma educação que prioriza o acerto ao erro, a repetição à reflexão, o fracasso ao sucesso, o individualismo ao coletivo; aspectos que levam, na maioria das vezes, a um declínio emocional e cognitivo.

Por fim, há de se constatar que a tese proposta foi validada nos limites expostos nesse trabalho e a questão inicial respondida; no mais, é importante enfatizar que o ponto inicial para a aplicação de uma metodologia e métodos eficazes é o diagnóstico prévio, entender o aluno e suas necessidades, dar a este o protagonismo do aprendizado compartilhado, da construção do conhecimento.

Ao professor, cabe a capacidade e a habilidade de gerir a turma como mediador, o que será possível, apenas, pelo uso de técnicas que lhe permita assim fazer. Especificamente, no caso de Vetores Geométricos, foi comprovada que a Resolução de Problemas como Ponto de Partida e por Atividades Experimentais podem e devem ser utilizados como métodos de ensino.

Além disso, essa pesquisa apresenta como produto uma Sequência Didática a ser utilizada para o ensino de vetores geométricos; em relação aos métodos de análise dos resultados, várias ferramentas foram utilizadas e detalhadas, especialmente, as de análise de erros e as estatísticas, com destaque para o uso do CHIC, portanto há de se considerar e destacar a metodologias e os passos elucidados para a validação da tese.

Dentro desse aspecto, em termos quanti-qualitativos, sobressaiu-se o uso da análise de erros como meio de verificação da aprendizagem dos aspectos discutidos nessa tese, bem como, a ênfase no modo de resolução das atividades da Sequência Didatica, de forma a observar e constatar a evolução e desenvolvimento dos alunos com foco no processo e, não, apenas, no resultado. No mais, apresenta um método para verificação de emoções de aprendizagem simples e eficaz.

Portanto, diante das ferramentas e resultados apresentados espera-se que novos estudos possam ser realizados considerando outros aspectos, melhorias, assuntos, dentre outras coisas, com enfoque, principalmente, na verificação de emoções de aprendizagem a longo prazo.

REFERÊNCIAS

ALEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas. **Boletim do GEPEM**, v.33, n. 55, p. 1-19, 2009. Disponível em :< https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/issue/view/24/12. Acesso em : 10/03/2022

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Paraná: Editora UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: revista eletrônica de Educação Matemática,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2002. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22 . Acesso em: 10/02/2022.

ARTIGUE, Michèle. Didactical design in Mathematics education. In: Nordic Research in Mathematics Education; NORMA08, 2008, Copenhagen. **Anais** [...], Copenhagen, 2008. Acesso em: 10/02/2022.

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988. Disponível em: https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/ . Acesso em: 10/02/2022.

atual. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BACHELARD. Gaston. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução: Estela dos Santos Abreu, São Paulo: Contraponto, 1996, (Trabalho original publicado em 1934). Disponível em: < http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf >. Acesso: em 10/3/2021.

BASTOS, Antonio S. A. M.; ALLEVATO, Norma S. G.. Análise de erros matemáticos na Resolução de Problemas aplicados à Física Elétrica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 6, p. 39, 2018. DOI: 10.26843/rencima.v9i6.2067. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2067 . Acesso em: 1 Jun. 2024.

BATTISTI, Isabel K. **Mediações na significação do conceito vetor com tratamento da geometria analítica em aulas de matemática**. 2016. Tese (Doutorado Em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste

BOHRER, T. R. J. FARIAS, M. E. As Teorias Implícitas de Aprendizagem dos estudantes/bolsistas do curso de Ciências Biológicas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2013, Águas de Lindóia. **Atas do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências** – IX ENPEC, Águas de Lindóia, SP – 10 a 14 de Novembro de 2013. Disponível em: < https://abrapec.com/atas_enpec/ixenpec/atas/resumos/R1066-1.pdf >. Acesso em: 03/03/2024.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXKORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995, p.23-37.

BORASI, Rafaela. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics**, v. 7, p. 2-8, 1987. Disponível em: <https://flm-journal.org/Articles/1BC86AB890488329213E250241A63D.pdf>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora LTDA, 1987.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Brasília, 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=112681-rces002-19&Itemid=30192 >. Acesso em: 06/05/2021

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 06/05/2021

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Volume 2. Brasília, 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 02/05/2021.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: < https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm >. Acesso em: 06/05/2021

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, n. 4(2), p. 165, 1983. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

BRUM, Lauren Darold; CURY, Helena Noronha. Análise de Erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 45–62, 2013. DOI: 10.26843/rencima.v4i1.560. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/560 . Acesso em: 01 ago. 2024.

CAJORI, Florian. **A History of Matematical Notations: two Volumes bound as one**. Dover Publications : New York, 1929.

CARDOSO, Solange. **Ciclo de Carreira docente: o que dizem as pesquisas brasileiras?** In: IV Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade

e Educação, Curitiba, Brasil, 2017. Disponível em: < https://doi.org/10.38117/2675-181X.formov2020.v2i2n4.439-458 >. Acesso em: 10/3/2021.

COHEN, Jacob. **Statistical Power Analysis for the behavioral sciences**. 2 ed. Lawrence Erlbaum Associates: EUA, 1988

COLE, Michael; SCRIBNER, Sylvia. Introdução. In: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman Tradução: José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. **A formação social da mente – Vygotski, L. S**. Ed. Livraria Martins Fontes LTDA: Sâo Paulo, p. 7-15, 1991.

COOPER, M. The study of professionalism in teaching. In: **Conferência Anual da AERA** (American Educational ResearchAssociation), 1982, New York.

CROWE, Michael J. **A history of vector Analysis: the evolution of the idea of a vectorial system**. New York : Dove Publications, 1994.

CURY, Helena. Retrospectiva histórica e perspectiva atuais da análise de erros em Educação Matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 39–50, 1995. DOI: 10.20396/zet.v3i4.8646879. Disponível em: < https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646879/13781> . Acesso em: 01 Jun. 2024.

CURY, Helena. A análise de erros na construção do saber matemático. In: I Jornada Nacional de Educação Matemática, XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006. **Anais [...]**. Rio Grande do Sul: Universidade de Passo Fundo, 2006, Mesa Redonda. Disponível em: <http://docs.upf.br/download/jem/trabalhos-2006/mesas/MRED_CURY_.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2024.

CURY, Helena N. Análise de Erros e Formação de Professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em Cursos de Licenciatura em Matemática. **Revista Contexto & amp; Educação**, *[S. l.]*, v. 21, n. 76, p. 95–113, 2013. DOI: 10.21527/2179-1309.2006.76.95-113. Disponível em:< https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/1098>. Acesso em: 19 ago. 2024.

CURY, Helena; BISOGNIN , Eleni; BISOGNIN, Vanilde. A Análise de Erros como metodologia de investigação. In: **XXV ProfMAt**, Viana do Castelo, Lisboa, 2009. Disponível em: < https://silo.tips/queue/a-analise-de-erros-como-metodologia-de-investigaao?&queue_id=-1&v=1724079548&u=MjgwNDoxYjI6ZDE0MzpjZGY6MTk4ZDo3NWMwOjE1ZDM6YTY4YQ== >. Acesso em: 01 Jun. 2024.

D' AMORE, Buno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi, São Paulo: editora Livraria da Física , 2007

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano II, n. 02, p. 15-19, 1989. Disponível Em:< http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf > Acesso em: 10/02/2022.

DAVÝDOV, Vasily V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1981, 489p.

DAVYDOV, Vasily V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación teórica y experimental. Moscou: Editorial Progreso, 1988.

DAVYDOV, Vasily V. **Problemas do ensino desenvolvimental: a experiência da pesquisa teórica e experimenal na psicologia.** Tradução: José Carlos Libâneo e Raque A. Freitas. Moscou: Editorial Progresso, 1986.

DAVYDOV, Vasily V. Uma nova abordagem para a interpretação da estrutura e do conteúdo da atividade. IV Congresso da Sociedade Internacional de Pesquisa Cultural e Teoria da Atividade, 1999. Palestra. Tradução: José Carlos Libâneo. Título Original: A new approach to the interpretation of activity structure an content". In: Hedegard, Mariane e Jensen Uffe Juul. **Activity theory and social practice: cultural-historical approaches**. Aarhus (Dinamarca), Aarthus University Press, 1999.

DAVYDOV, Vasily V.; Márkova, A. La concepcion de la actividad de estudio de los escolares. In: Davidov, V.; Shuare, M. (Orgs.). **La psicología evolutiva y pedagogía en la URSS**: antología. p. 316-337. Moscou: Progreso, 1987.

DAVYDOV, Vasily V.; Slobódchikov, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. In: Múdrik A. B. (Org.), **La educación y la enseñanza: una mirada al futuro**, p. 118-144. Moscou: Ed. Progreso, 1991.

DIAS, Alexandre S. **A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no Ensino Médio.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

DOCA, Ricardo H.; BISCUOLA, Gualter J.; BÔAS, Newton Villa. **Tópicos de Física**. Vol 1. São Paulo: Saraiva, 2012.

DUGAS, R. (2011). **A History of Mechanics**. Routledge & Kegan Paul LTDA.

FOLADOR, Wendel V. da S. **Vetores no plano.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

FONSECA, Kleber N.; TOLENDINO, Renata. S. S.; ZIVIANI, Fabrício. Escala de atitudes dos colaboradores da área de TI em relação a inovação: EATI Inova. **Revista Tecnologia e Sociedade, Curitiba**, v. 19, n. 56, p.89-111, abr./jun., 2023. Disponível em:https://periodicos.utfpr.edu.br/rts/article/view/15447 . Acesso em: 01/08/2023.

FOSSA, John A. Algumas considerações teóricas sobre o ensino de matemática por atividades. **REMATEC**, ano 15, n. 35, p. 10-26, 2020.

FREITAS, Raquel A. M. M. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n. 2, p. 403-418, abr./jun. 2012. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/S1517-97022011005000011>. Acesso em: 03/03/2021.

GIBBS, Josiah W. **Elements of Vector Analysis : arranged for the use of students in physics**. New Haven, 1881.

GUIMARÃES, Joice S. M. **Concepções de professores sobre a resolução de problemas.** 2019. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2019, 180 f. Disponível em: < https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/28162 >. Acesso em: 03/03/2021.

GUIMARÃES, Joice S. M; OLIVEIRA, Guilherme. Perspectiva teórica e histórica da resolução de problemas no ensino de matemática nos anos iniciais. **Itinerarius Reflectionis**, Jataí-GO., v. 17, n. 2, p. 01–27, 2021. DOI: 10.5216/rir.v17i2.62890. Disponível em: < https://revistas.ufj.edu.br/rir/article/view/62890 >. Acesso em: 03/03/2021.

GUIMARÃES, Sueli É. R.; BORUCHOVITCH, Evely. O Estilo Motivacional do Professor e a Motivação Intrínseca dos Estudantes: Uma Perspectiva da Teoria da Autodeterminação. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v.12, n. 2, p. 143-150, 2004. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/S0102-79722004000200002 >. Acesso em: 10/03/2021.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 12 ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

In: IV Congresso Brasileiro de História da Educação. 2006. Eixo temático: 3. Cultura e práticas escolares.

JUCÁ, Rosineide de S. O estudo do erro em Matemática: o que pensam os professores dos anos iniciais?. **ReDiPE: Revista Diálogos e Perspectivas em Educação**, v. 3, n. 1, p. 51-65, 30 jun. 2021. Disponível em: < https://periodicos.unifesspa.edu.br/index.php/ReDiPE/article/view/1612/642>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

JUCÁ, Rosineide de S. O estudo do erro em Matemática: contributos para o trabalho docente do professor de matemática. **REVEMAT, Revista eletrônica de formação matemática**, Edição Especial: pesquisa em formação de professores que ensinam matemática, Florianópolis, Santa Catarina, p. 01-20, jan/dez 2022. Disponível em:< https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/82634/48515>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

JULIANELLI, José R. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2008

KASAHARA, Rita C. F. R.; ROCHA, Norma F. Utilização da pesquisa teórica como princípio educativo no ensino de eletromagnetismo no curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações do IFPA/Campus Belém. In: II Seminário Internacional de políticas públicas educacionais, cultura e formação de professores. **Anais** [...], v. 13, Belém, 2017., Belem.

KASAHARA, Rita C. F. R.; SÁ, Pedro F. O processo de ensino-aprendizagem e avaliação de cálculo vetorial segundo estudantes de Sistemas de Telecomunicações. In: SCEM 2019: Seminário de Educação e Cognição Matemática. **Anais [...]**, Belém, 2019. Disponível em: < https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/2021/02/ANAIS_DO_SCEM.pdf > Acesso em: 02/03/2021.

KASAHARA, Rita de C. F. R.; SÀ, Pedro F. de. De onde surgem os vetores? In: SCEM 2021: Seminário de Educação e Cognição Matemática. **Anais [...],** Belém, 2021. Disponível em: < https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/2023/08/ANAIS-SCEM_compressed.pdf > Acesso em: 20/03/2023.

KASAHARA, Rita de C. F. R.; SÀ, Pedro F. de. Estudos brasileiros sobre vetores com análise de livros didáticos durante o período de 2010 à 2021 In: XIX Seminário do Programa de Pós-Graduaçaõ em Educação, 2022. **Anais** [...], Belém, 2022a. Disponível em: < https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/2023/08/ANAIS-SCEM-FINAL_compressed-1.pdf > Acesso em: 20/03/2023.

KASAHARA, Rita C. F. R.; SÁ, Pedro F. Uma revisão de estudos sobre a utilização de tendências da educação matemática no ensino de vetores geométricos no Brasil. In: SCEM 2022b: Seminário de Educação e Cognição Matemática. **Anais [...],** Belém, 2022b. Disponível em: < https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/2023/08/ANAIS-SCEM-FINAL_compressed-1.pdf > Acesso em: 20/03/2023.

KASAHARA, Rita C. F. R.; SÁ, Pedro F.de. ESTUDOS BRASILEIROS SOBRE O ENSINO DE VETORES COM EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA NO PERÍODO DE 2010-2021. **Revista Exitus**, *[S. l.]*, v. 13, n. 1, p. e023013, 2023. DOI: 10.24065/2237-9460.2023v13n1ID1861. Disponível em: https://portaldeperiodicos.ufopa.edu.br/index.php/revistaexitus/article/view/1861. Acesso em: 12/11/2023.

KASAHARA, Rita de C. F.R.; SÁ, Pedro F. de. Engenharia Didática: overview. **Revista Cocar**, *[S. l.]*, v. 19, n. 37, 2023a. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/7542 >. Acesso em: 12 nov. 2024.

KASAHARA, Rita C. F. R.; SÁ, Pedro F. Perfil socioeconômico de estudantes de engenharia e sua relação com a matemática. In: SCEM 2024: Seminário de Educação e Cognição Matemática. **Anais [...],** Belém, 2024.

KASAHARA, Rita de C. F. R..; APOLUCENO, Ivanilde de O.; SÁ, Pedro F. de. A construção do conhecimento matemático vetorial à luz do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos de Bachelard. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 24, n. 2, p. 682–727, 2022. DOI: 10.23925/1983-3156.2022v24i2p682-727. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57361 >. Acesso em: 02 fev. 2023.

LANDIS, J. R.; KOCH, Gary G. The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. **Biometrics**, v. 33, n. 1, p. 159-74, mar/1977. Disponível em : <https://doi.org/10.2307/2529310>. Acesso em: 03/03/2021.

LARSON, Ron ; FARBER, Betsy. **Estatística Aplicada**. 6 ed. São Paulo : Pearson Education do Brasil, 2015.

LEONTIEV, Alexei N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VYGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. Tradução: Maria da Pena Villalobos. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 59-83.

LEONTIEV, Alexei N. **Actividade. Consciência. Personalidade**. Tradução : Marcelo José de Souza e Silva. Título original : Деятельность. Сознание. Личность Original em Inglês por Marxists Internet Archive, CC BY-SA, 2014.

LEVIN, Jack. **Estatística Aplicada a Ciências Humanas**. 2 ed. Harbra : São Paulo, 1987.

LIBÂNEO, José C. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LIBÂNEO, José C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 5-24, dez/2004. Disponível em: < https://www.scielo.br/j/rbedu/a/ZMN47bVm3XNDsJKyJvVqttx/?format=pdf&lang=pt >. Acesso em:10/03/2021.

LIBÂNEO, José C.; FREITAS, Raquel A. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. In: **IV Congresso Brasileiro de História da Educação.** 2006.

LIBÂNEO, José C.; FREITAS, Raquel A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa M.; PUENTES, Roberto V. (Org.). **Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LIMA, Maria da C. F. de. **Emoções de desempenho na matemática e suas relações com autoconceito acadêmico**. 2012. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

LIS, Osmarilda. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte I.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

LUCAS, César M. do Nascimento. **Elaboração de um Sequência de Ensino de Vetores por meio da Sequência Fedathi e exploração de suas representações com uso do Geogebra.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2017.

MARTINS, Antônio. **Geometria Analítica e Vetores: uma análise com estudantes do ensino superior.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

MASOLA, Wilson. de J.; ALLEVATO, Norma S. G. Dificuldade de Aprendizagem Matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, v. 2, n. 01, p. 64-74, jan/mar 2016. DOI: https://doi.org/10.18256/2447-3944/rebes.v2n1p64-74.

MENDES, Iran A.; FOSSA, John A. . Tendências atuais na Educação Matemática: Experiências e Perspectivas. In: XIII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, 1998, Natal. **Coleção EPEN - XIII Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste**. Natal, RN: Edurfrn, 1997. v. 19. p. 11-18.

MENDONÇA, Maria C. A formação de professores como uma atividade de formulação de problemas: educação matemática no centro das atenções. In:

MENDONÇA, Maria C. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P.; et al. (Org). **Investigações Matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. 226p.

MESQUITA, Rodrigo S.. **Relações de gênero e divisão sexual do trabalho na Engenharia: Interlocuções com o Programa Ciência sem fronteiras**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica), Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

MILLER, Stela. Atividade de estudo: especificidades e possibilidades educativas. In: PÜENTES, Robeto V.; MELLO, Suely A. (org.). **Teoria da Atividade de Estudo**: livro II, contribuições de pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Uberlândia: EDUFU, 2019, p. 73 -96

MOORE, Gregory. The Axiomatization of Linear Algebra:1875-1940. **Historia Mathematica**, v. 22, p. 262-303, 1995. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1025

NOGARO, Arnaldo; GRANELLA, Eliane. O erro no processo de ensino e aprendizagem. **Revista de Ciências Humanas**, Rio Grande do Sul, v. 5, n.5, 2004. Disponível em:< https://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/view/244/445>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

NÚÑEZ, Iván B.; PACHECO, O. G. **La formación de conceptos científicos**: uma perscpectiva desde la Teoria da Atividade. Natal: EDUFRN, 1997.

NUSSENZVEIG, Herch M. **Curso de Física Básica: Eletromagnetismo**. Vol 3. 1 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

NUSSENZVEIG, Herch M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. Vol 1. 5 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

OLIVEIRA, Luciel H.. Exemplo de cálculo de Ranking Médio para Likert. **Notas de Aula**. Metodologia Científica e Técnicas de Pesquisa em Administração. Mestrado em Adm. e Desenvolvimento Organizacional. PPGA CNEC/FACECA: Varginha, 2005. Disponível em: < https://www.feis.unesp.br/Home/DTADM/STDARH/EquipedeDesenvolvimento/educacaosaude/documentos/pesquisa/estatistica/media%20por%20Likert.doc >. Acesso em: 10/03/2024.

ONUCHIC, Lourdes R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218. Disponível em: < https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a09 >. Acesso em: 20/03/2023.

ONUCHIC, Lourdes R.; ALLEVATO, Norma S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: < https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625 >Acesso em: 20/03/2023.

PASSOS, C. G.; DEL PINO, J. C. Reformulações curriculares do Curso de Licenciatura em Química da UFRGS: influências, contextos e práticas. *Alexandria,* **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.1, p.209-234, maio 2014. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/38209/29113 > Acesso: em 03/02/2024.

PATRÍCIO, Rafael. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade/ Federal do Pará, Belém, 2011.

PIAZZA, Maria. **Uma proposta de sequências didáticas para o ensino de vetores na escola básica.** 2020. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de São João Del Rei, Minas Gerais, 2020.

PICCOLO, Gustavo M. Historicizando a teoria da atividade: do embate ao debate. **Psicologia & Sociedade**, 24 (2), p. 283-292, 2012.

POLYA, George. **How to solve it: A new aspect of mathematical method**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

POLYA, George. L'enseignement par les problemes. **L'Enseignement Mathématique**, n. 8, v. 3, p. 233-241, 1967.

POLYA, George. **A Arte de resolver Problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

PONTES, Lucas F. C. **Vetores no Ensino Médio: propostas de intervenção no ensino e novas perspectivas**.2023. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2023.

POZO, Juan I. **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998. 177p.

RADATZ, Hendrik. Error Analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education** , vol. 10, no. 3, 1979, p. 163–172. Disponível em:< https://doi.org/10.2307/748804>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

RADATZ, Hendrik. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. **For the Learning of Mathematics**, vol. 1, no. 1, 1980, p. 16–20. Disponível em:< http://www.jstor.org/stable/40247696>. Acesso em: 01 Jun. 2024.

RÉGNIER, Jean-Claude; ANDRADE, Vladimir L. V. X de (org.). **Análise Estatística Implicativa e análise de similaridade no quadro teórico e metodológico das pesquisas em ensino de ciências e matemática com a utilização do software CHIC**. EDUFRPE: Recife, 2020. 323 p.

REIS, A. Q.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 19, n. 2, 2017. DOI: 10.23925/1983-3156.2017v19i2p339-364. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31841 >. Acesso em: 10 mar.. 2022.

RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. **Álgebra para a formação do professor**. Belo Horizonte: Autêntica Editora. (Coleção Tendências em Educação Matemática), 2015.

ROCHA, Rita C. F.; PALHETA, Ana Paula; ROCHA, Norma F. Estudo de caso: avaliação da aprendizagem no ensino de eletromagnetismo no curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações do IFPA/Campus Belém. In: IX Fórum Internacional de Pedagogia III Seminário Nacional de Educação Básica Educação, Resistência e Liberdade: desafios pedagógicos de uma sociedade em transe, 2017, Abaetetuba, IX Fórum Internacional de Pedagogia III Seminário Nacional de Educação Básica Educação, Resistência e Liberdade: desafios pedagógicos de uma sociedade em transe. **Anais** [...], Abaetetuba-PA, 2017.

RODRIGUES, José. **Geometria Analítica com Enfoque Vetorial no Ensino Médio.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional), Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2015.

RODRIGUES, Laís; CAMPELLO, Silvio Barreto. 2014. A dimensão emocional na teoria da atividade. In: Coutinho, Solange G.; Moura, Monica; Campello, Silvio Barreto; Cadena, Renata A.; Almeida, Swanne (orgs.). **Proceedings of the 6th Information Design International Conference, 5th InfoDesign, 6th CONGIC,** n.2, v. 1. São Paulo: Blucher, 2014. ISSN 2318-6968, ISBN 978-85-212-0824-2 DOI http://dx.doi.org/10.5151/designpro-CIDI-39

SÁ, Pedro F. de. **Ensinando matemática através da redescoberta**. **Traços,** v. 2, n. 3., 1999.

SÁ, Pedro F. de . O Que é Resolução de Problemas, afinal? **Revista Trilhas** (UNAMA), Belém, v. 5, n.2, p. 11-17, 2004.

SÁ, Pedro F. de. A resolução de problemas como ponto de partida nas aulas de matemática. **Revista Trilhas (UNAMA)**, v. 11, p. 7-24, 2009.

SÁ, Pedro F de. **Momentos de uma aula por atividades**. 2018 (não publicado)

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019. Disponível em: < http://sinepem.sbempara.com.br/file/V7.pdf >Acesso em: 10/03/2021.

SÁ, Pedro F. de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC**, ano 15, n. 35, p. 143-162, 2020.

SÁ, Pedro F.; ALVES, Fábio J. C. A Engenharia Didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômeno didáticos. In: Maria Inês Marcondes; Ivanilde Apoluceno de Oliveira; Elizabeth Teixeira. (Org.). **Abordagens teóricas e construções**

metodológicas na pesquisa em educação. 1. Ed. Belém: EDUEPA, v.1, p. 145-160, 2011a.

SÁ, Pedro F. de; ALVES, Fábio J. da C. A pesquisa em Educação Matemática e os fenômenos da sala de aula. In: NASCIMENTO, Aristonildo C. A;MOURÂO, Arminda R. B. (orgs). **Educação, Culturas e diversidades.** Manaus: EDUA, 2011b, v. 2, 436 p; p. 355-374.

SADIKU, Mathew N. O. **Elementos de Eletromagnetismo**. 5 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SANTOS, Francisco N. C. **O Ensino de polígonos por atividades experimentais.** 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Universidade do Estado do Pará, Belém, Pará, 2020.

SANTOS, Gilson P. ; MAFRA, José R. . **O ensino de matemática por atividades:** uma interface entre recursos tecnológicos e o pensamento computacional. REMATEC , v. 15, p. 79-99, 2020. Disponível em: < https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/96 > Acesso em: 20/03/2021.

SANTOS, Marília A. dos; ASBAHR, Flávia da S. F. A teoria da atividade de A. N. Leontiev: uma síntese a partir de suas principais obras. **Revista Brasileira da Pesquisa Sócio-Histórico-Cultural e da Atividade**, v. 2, n. 2, p. 1-23, 2020. Disponível em: < https://www.academia.edu/111588847/A_Teoria_Da_Atividade_De_A_N_Leontiev > Acesso em: 20/03/2021.

SILVA, Cláudio L. da; SILVA, Ana Kelly. M. da; SÁ, Pedro F. de. Variação do tempo no ensino de matemática por atividades experimentais de conceituação e redescoberta: Variation of time in the teaching of mathematics through experimental activities of the conceptualization and rediscovery. **Revista Cocar**, *[S. l.]*, v. 21, n. 39, 2024. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/8426. Acesso em: 05 fev. 2025.

SILVA, Dejaci S. da; SÁ, Pedro F. de; ALVES, Fábio José da C. Variação de elementos da textualidade em conclusões elaboradas no ensino de matemática por atividades experimentais : Variation of textuality elements in conclusions elaborated in mathematics teaching through experimental activities. **Revista Cocar**, *[S. l.]*, v. 21, n. 39, 2024. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/9802. Acesso em: 20 fev. 2025.

SILVA, Hugo. **O Ensino de Matrizes a partir da resolução de problemas.** 2016. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

SILVA, Wellington. **Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio.** 2013. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

SILVA FILHO, Francisco. **Vetores: conceito e aplicações.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

SILVEIRA, Analice. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte III.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Reston: NCTM, 1989. p. 1-22.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

TAIT, P. G. **An Elementary Treatise on Quaternions.** 3 ed. Cambridge at the University Press : Cambridge, 1890.

TARDIF, Maurice**. Saberes Docentes e Formação Profissional**. 12 ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2012.

TELES, Andressa. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte II.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

TORRE, Saturnino de La. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007

VELOSO, Antônio. **Uma proposta para a utilização dos vetores como ferramenta de resolução de problemas de geometria.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Palmas, Tocantins, 2015.

VENTURI, Jacir J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 10 ed. Curitiba: UFPR, 2015.

VYGOTSKI, Lev S. **A formação social da mente**. Tradução: Grupo de Desenvolvimento e Ritmos Biológicos. 4ª ed. Martins Fontes Editora: São Paulo, 1991.

VYGOTSKI, Lev S. **Pensamento e Linguagem**. Tradução: Jefferson Luiz Camargo. 4 ed. Martins Fontes: São Paulo, 2008.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICES

LISTA DE APÊNDICE

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
QUESTIONÁRIO DOCENTE
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - QUESTIONÁRIO DISCENTE – ANÁLISES PRÉVIAS
APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - EXPERIMENTAÇÃO
APÊNDICE D - EXPLORAÇÃO DOS BANCO DE DADOS PARA A COMPOSIÇÃO DA REVISÃO DE ESTUDOS
APÊNDICE E - QUESTIONÁRIO DOCENTE - ANÁLISES PRÉVIAS
APÊNDICE F - QUESTIONÁRIO DISCENTE - ANÁLISES PRÉVIAS
APÊNDICE G – CATALOGAÇÃO ESTUDOS SOBRE VETORES
APÊNDICE H - RESULTADO TESTE DE FISCHER - CONSULTA AOS DOCENTES
APÊNDICE I - RESULTADO TESTE DE FISCHER - CONSULTA AOS DISCENTES
APÊNDICE J - QUESTIONÁRIO ACADÊMICO E SOCIOECONÔMICO - EXPERIMENTAÇÃO
APÊNDICE K - SEQUÊNCIA DIDÁTICA
APÊNDICE L - PRÉ / PÓS TESTE
APÊNDICE M - FICHA DE OBSERVAÇÃO
APÊNDICE N - DESCRIÇÃO DOS ERROS PELO MADE POR CATEGORIA
APÊNDICE O - PARAMETRIZAÇÃO – CORRELAÇÃO DE SPEARMAN

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
QUESTIONÁRIO DOCENTE

Você está sendo convidado como professor(a) para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Vetores Geométrico por meio de Atividades Experimentais e Resolução de Problemas como Ponto de Partida, sob a responsabilidade de Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, vinculados a Universidade do Estado do Pará, Matrícula 2021100656; nesta pesquisa nós estamos objetivando realizar um diagnóstico do processo de ensino e aprendizagem do ensino de vetores em sua instituição de ensino, bem como, analisar os efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como Ponto de Partida e o Ensino por Atividades Experimentais, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

O diferencial do trabalho proposto estar em propor alternativas metodológicas que tem por foco o ensino compartilhado entre o docente e o aluno, sendo, o professor o mediador do processo de construção do conhecimento e por utilizar tendências atuais em educação matemática de forma conjunta e complementar, como a resolução de problemas como ponto de partida e o ensino por atividades experimentais.

A sua colaboração à pesquisa será por meio do preenchimento de um formulário contendo questões sobre alguns dados pessoais e sobre o processo de ensino e aprendizagem do assunto de vetores. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. A sua participação não é obrigatória e, a qualquer momento, poderá desistir da participação. A recusa não trará prejuízos em sua relação com o pesquisador ou com a instituição.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos quando a divulgação de seus dados e repostas. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo sobre o ensino de vetores. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e a outra com você.

Tudo foi planejado para minimizar os riscos da sua participação, porém se você sentir desconforto com as perguntas poderá interromper a participação e, se houver interesse, conversar com o pesquisador sobre o assunto. Apesar disso se houver algum dano, comprovadamente decorrente da presente pesquisa, você terá direito à indenização, através das vias judiciais, como dispõem o Código Civil, o Código de Processo Civil e a Resolução nº 466/2012, do Conselho Nacional de Saúde (CNS). Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. O Comitê é formado por um grupo de pessoas que têm por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e assim, contribuir para que sejam seguidos padrões éticos na realização de pesquisas.

Para minimizar possíveis riscos, em todas as fases da pesquisa não haverá a identificação do(a) participante. A sua identidade será preservada. Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar dificuldades no ensino de vetores geométricos. A pesquisadora que estará acompanhando os procedimentos será a doutoranda Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados produzidos durante a pesquisa, tais dados serão usados para a produção de uma tese de doutorado e para outros fins científicos e de estudos, que decorrerem da pesquisa (livros, artigos, slides e transparências). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e a outra com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o Programa de Doutorado em Educação da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91)4009-9552.

Ressaltamos, também, que esse projeto de pesquisa foi submetido à apreciação e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP). O CEP é um órgão institucional constituído por profissionais de várias áreas, que deve existir nas instituições que realizam pesquisas envolvendo seres humanos no Brasil, criado para defender os interesses dos participantes das pesquisas de acordo com sua integridade e dignidade, este órgão tem como objetivo contribuir no desenvolvimento das pesquisas dentro dos padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa envolvendo Seres Humanos - Res. CNS nº 466/12). O Comitê de Ética é responsável pela avaliação e acompanhamento dos protocolos de pesquisa sobre normas éticas. Endereço do Comitê de Ética da UEPA: Tv.

Perebebuí, 2623, Biblioteca, 1º andar, sala 01. Bairro: Marco. Horário de Funcionamento: segunda a sexta-feira, das 8:00 às12:00 e 13:00 às 16:00h. Telefone: (91) 3131-1781. E-mail:cepccbs@uepa.br.

Nome do Pesquisador Responsável:
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Endereço: Av. Senador Lemos, 713, ap. 501, Umarizal, Belém-PA, CEP 66050-000.
Fone: (91) 98233-4496
E-mail: rita.rocha@ifpa.edu.br

_____
Assinatura do pesquisador - Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara

Eu, _____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_____
Participante da pesquisa

Eu, Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, RG 3271067, responsável pelo projeto de pesquisa intitulado “O Ensino de Vetores Geométricos”, declaro cumprir o compromisso ético exigido pela RESOLUÇÃO 466/12 do CNS e de confidencialidade e sigilo.

_____
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Pesquisador responsável

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
QUESTIONÁRIO DISCENTE – ANÁLISES PRÉVIAS

Você está sendo convidado para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Vetores Geométrico por meio de Atividades Experimentais e Resolução de Problemas como Ponto de Partida, sob a responsabilidade de Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, vinculados a Universidade do Estado do Pará, Matrícula 2021100656; nesta pesquisa nós estamos objetivando realizar um diagnóstico do processo de ensino e aprendizagem do ensino de vetores em sua instituição de ensino, bem como, analisar os efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como Ponto de Partida e o Ensino por Atividades Experimentais, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

O diferencial do trabalho proposto estar em propor alternativas metodológicas que tem por foco o ensino compartilhado entre o docente e o aluno, sendo, o professor o mediador do processo de construção do conhecimento e por utilizar tendências atuais em educação matemática de forma conjunta e complementar, como a resolução de problemas como ponto de partida e o ensino por atividades experimentais.

A sua colaboração à pesquisa será por meio do preenchimento de um formulário contendo questões sobre alguns dados pessoais e sobre o processo de ensino e aprendizagem do assunto de vetores. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. A sua participação não é obrigatória e, a qualquer momento, poderá desistir da participação. A recusa não trará prejuízos em sua relação com o pesquisador ou com a instituição em que estuda.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos quando a divulgação de seus dados e repostas. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo sobre o ensino de vetores. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e a outra com você.

Tudo foi planejado para minimizar os riscos da sua participação, porém se você sentir desconforto com as perguntas poderá interromper a participação e, se houver interesse, conversar com o pesquisador sobre o assunto. Apesar disso se houver algum dano, comprovadamente decorrente da presente pesquisa, você terá direito à indenização, através das vias judiciais, como dispõem o Código Civil, o Código de Processo Civil e a Resolução nº 466/2012, do Conselho Nacional de Saúde (CNS). Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. O Comitê é formado por um grupo de pessoas que têm por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e assim, contribuir para que sejam seguidos padrões éticos na realização de pesquisas.

Para minimizar possíveis riscos, em todas as fases da pesquisa não haverá a identificação do(a) participante. A sua identidade será preservada. Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar dificuldades no ensino de vetores geométricos. A pesquisadora que estará acompanhando os procedimentos será a doutoranda Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados produzidos durante a pesquisa, tais dados serão usados para a produção de uma tese de doutorado e para outros fins científicos e de estudos, que decorrerem da pesquisa (livros, artigos, slides e transparências). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e a outra com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o Programa de Doutorado em Educação da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91)4009-9552.

Ressaltamos, também, que esse projeto de pesquisa foi submetido à apreciação e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP). O CEP é um órgão institucional constituído por profissionais de várias áreas, que deve existir nas instituições que realizam pesquisas envolvendo seres humanos no Brasil, criado para defender os interesses dos participantes das pesquisas de acordo com sua integridade e dignidade, este órgão tem como objetivo contribuir no desenvolvimento das pesquisas dentro dos padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa envolvendo Seres Humanos - Res. CNS nº 466/12). O Comitê de Ética é responsável pela avaliação e acompanhamento dos protocolos de pesquisa sobre normas éticas. Endereço do Comitê de Ética da UEPA: Endereço do Comitê de Ética da UEPA: Tv. Perebebuí, 2623, Biblioteca, 1º andar, sala 01. Bairro: Marco. Horário de

Funcionamento: segunda a sexta-feira, das 8:00 às12:00 e 13:00 às 16:00h. Telefone: (91) 3131-1781. E-mail:cepccbs@uepa.br.

Nome do Pesquisador Responsável:
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Endereço: Av. Senador Lemos, 713, ap. 501, Umarizal, Belém-PA, CEP 66050-000.
Fone: (91) 98233-4496
E-mail: rita.rocha@ifpa.edu.br

_____
Assinatura do pesquisador - Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara

Eu, _____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_____
Participante da pesquisa

Eu, Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, RG 3271067, responsável pelo projeto de pesquisa intitulado “O Ensino de Vetores Geométricos”, declaro cumprir o compromisso ético exigido pela RESOLUÇÃO 466/12 do CNS e de confidencialidade e sigilo.

_____
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Pesquisador responsável

APÊNDICE C

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - EXPERIMENTAÇÃO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O Ensino de Vetores Geométricos, sob a responsabilidade do orientador Pedro Franco de Sá e da orientanda Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, vinculados a Universidade do Estado do Pará, Matrícula 2021100656. nesta pesquisa nós estamos objetivando realizar um diagnóstico do processo de ensino e aprendizagem do ensino de vetores em sua instituição de ensino, bem como, analisar os efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como Ponto de Partida e o Ensino por Atividades Experimentais, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

O diferencial do trabalho proposto estar em propor alternativas metodológicas que tem por foco o ensino compartilhado entre o docente e o aluno, sendo, o professor o mediador do processo de construção do conhecimento e por utilizar tendências atuais em educação matemática de forma conjunta e complementar, como a resolução de problemas como ponto de partida e o ensino por atividades experimentais.

Nesta pesquisa pretendemos aplicar uma sequência didática para verificar os efeitos desta no Ensino de Vetores geométricos a partir do desenvolvimento dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher 2 (dois) questionários, sendo um com informações acadêmicas e socioeconômicas e outro de Emoções de Aprendizagem e Desempenho na Matemática e participar dos testes e das atividades propostas. Ainda, durante os momentos de participação na pesquisa poderão ser realizadas capturas de imagens, gravações de áudio ou vídeo.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre O Ensino de Vetores Geométricos para propor alternativas metodológicas que melhorem o aprendizado dos alunos.

Tudo foi planejado para minimizar os riscos da sua participação, porém se sentir desconforto com as perguntas poderá interromper a participação e, se houver interesse, conversar com o pesquisador sobre o assunto. Apesar disso se houver algum dano, comprovadamente decorrente da presente pesquisa, você terá direito à indenização, através das vias judiciais, como dispõem o Código Civil, o Código de Processo Civil e a Resolução nº 466/2012, do Conselho Nacional de Saúde (CNS). Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. O Comitê é formado por um grupo de pessoas que têm por objetivo defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e assim, contribuir para que sejam seguidos padrões éticos na realização de pesquisas.

Para minimizar possíveis riscos, em todas as fases da pesquisa não haverá a identificação do(a) participante. A sua identidade será preservada. Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar dificuldades no ensino de vetores geométricos. A pesquisadora que estará acompanhando os procedimentos será a doutoranda Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara. Você não receberá remuneração pela participação.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados produzidos durante a pesquisa, tais dados serão usados para a produção de uma tese de doutorado e para outros fins científicos e de estudos, que decorrerem da pesquisa (livros, artigos, slides e transparências). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você poderá solicitar o não uso das imagens, áudio ou vídeo, coletados nos momentos de sua participação na pesquisa, sem qualquer tipo de constrangimento. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Este termo de assentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e a outra com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Pedro Franco de Sá e orientanda Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara por meio da Coordenação do Programa de Pós-graduação em Educação – PPGED da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra, Telégrafo. Belém- Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501.

O Conselho de Ética em Pesquisa (CEP), cuja função é defender os interesses dos sujeitos em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos e científicos, que esta pesquisa está registrada é da Universidade do Estado do Pará, localizada no endereço Tv. Djalma Dutra, S/N – Bloco 1, 1º andar – Telégrafo – CEP: 66.050-540, Fone (91) 4009-9520.

Nome do Pesquisador Responsável:
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Endereço: Av. Senador Lemos, 713, ap. 501, Umarizal, Belém-PA, CEP 66050-000.
Fone: (91) 98233-4496
E-mail: rita.rocha@ifpa.edu.br

_____
Assinatura do pesquisador - Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara

Eu, _____ ___ _____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido e ( ) Autorizo ( ) Não autorizo a gravação de voz e vídeo, desde que garantido o anonimato.

_____
Participante da pesquisa

Eu, Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara, RG 3271067, responsável pelo projeto de pesquisa intitulado “O Ensino de Vetores Geométricos”, declaro cumprir o compromisso ético exigido pela RESOLUÇÃO 466/12 do CNS e de confidencialidade e sigilo.

_____
Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Pesquisador responsável

APÊNDICE D

EXPLORAÇÃO DOS BANCO DE DADOS PARA A COMPOSIÇÃO DA REVISÃO DE ESTUDOS

Revisão de Estudos sobre Vetores Geométricos	
Data: março/2021 e Dezembro/2024	
Período de busca: 2014 à 2024	
Objetivo principal: encontrar dissertações e teses sobre Vetores Geométricos relacionadas ao Ensino, obrigatoriamente.	
A exploração do Banco Digital de Teses e Dissertações – BDTD (http://bdtd.ibict.br/vufind/)	
1ª Busca Inicial Tipo: simples Descritores: VETOR VETORES	Resultado: 146. 848 trabalhos
1º Refinamento Tipo: busca avançada Termo: ENSINO, referência TODOS OS TERMOS	Resultado: 442 trabalhos
2º Refinamento Tipo: busca avançada Termo adicionado: ENSINO, correspondência TODOS OS TERMOS; SAÚDE, correspondência NENHUM TERMO	Resultado: 361 trabalhos
3º Refinamento Tipo: busca avançada Termo adicionado: ENSINO, correspondência TODOS OS TERMOS; SAÚDE, correspondência NENHUM TERMO; QUÍMICA, correspondência NENHUM TERMO	Resultado: 347 trabalhos
4º Refinamento Tipo: busca avançada Adição - Período de Defesa: 2010 à 2021	Resultado: 197 trabalhos
5º Refinamento Tipo: busca avançada Modificação - Período de Defesa: 2014 à 2021	Resultado: 122 trabalhos
6º Refinamento Tipo: visual Leitura: títulos e resumos; Tabulação em planilhas	Resultado: 22 trabalhos
A exploração do banco de teses e dissertações da CAPES	
Busca Inicial Descritor: VETOR AND ENSINO NOT SÁUDE NOT QUÍMICA	Resultado: 158 trabalhos
1º Refinamento Período de defesa: 2014 à 2021	Resultado: 114 trabalhos
2º Refinamento Análise Visual: título, área do programa de pós-graduação, resumo	Resultado: 45 trabalhos
• **Busca em outros Banco de Dados : PROFMAT, PPGED/UEPA, PPGECM/UFPA, PPGDOC/UFPA e PGECEM-REAMEC**	
Busca Visual	Resultados: 5 trabalhos
Total geral: 23 (BDTD) + 45 (CAPES) + 5 (outros bancos de dados) = 73	
Nova busca no ano de 2024 considerando s parâmetros já utilizados	
Resultados: 04 novos trabalhos	
Total de trabalhos considerados na revisão de estudos: 77	

APÊNDICE E

QUESTIONÁRIO DOCENTE - ANÁLISES PRÉVIAS

1. Você aceita participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido ? ☐ Sim ☐ Não

2. Sexo:. ☐ Feminino ☐ Masculino

3. Qual a sua faixa etária? *Marcar apenas uma oval.

☐ Menos de 21 anos ☐ 21 - 25 anos ☐ 26- 30 anos ☐ 31- 35 anos ☐ 36 - 40 anos ☐ 41- 45 anos
☐ 46 - 50 anos ☐ 51 - 55 anos ☐ 56 - 60 anos ☐ 61 - 65 anos ☐ mais de 65 anos

4. Qual o seu Campus de Lotação no IFPA? *Marcar apenas uma oval.

☐ Abaetetuba ☐ Altamira ☐ Ananindeua ☐ Belém ☐ Bragança ☐ Breves ☐ Cametá
☐ Castanhal ☐ Conceição do Araguaia ☐ Itaituba ☐ Marabá Industrial ☐ Óbidos
☐ Paragominas ☐ Parauapebas ☐ Rural Marabá ☐ Santarém ☐ Tucuruí ☐ Vigia

5. Qual o seu curso do Ensino Superior? *Marque todas que se aplicam.

☐ Bacharelado em Física ☐ Bacharel em Matemática ☐ Engenharia Elétrica
☐ Engenharia Mecânica ☐ Engenharia de telecom ☐ Licenciatura em Física
☐ Licenciatura em Matemática ☐ Outro: _____

6. Em qual instituição você cursou o ensino superior? ☐ Privada ☐ Pública ☐ Outro: _____

7. Em qual ano você concluiu o ensino superior? _____

8. Você possui pós-graduação? ☐ Sim ☐ Não

9. Você possui especialização ? ☐ Sim. Qual? _____ ☐ Não

10. Você possui Mestrado ? ☐ Sim. Qual o seu título de Mestre ? _____ ☐ Não

11. Você possui doutorado? ☐ Sim.Qual o seu título de Doutor ? _____ ☐ Não

12. Qual o seu tempo de serviço como professor ?

☐ Menos de 01 ano ☐ 1 - 5 anos ☐ 6 - 10 anos ☐ 11 - 15 anos ☐ 16 - 20 anos
☐ 21 - 25 anos ☐ 26 - 30 anos ☐ 31 - 35 anos ☐ mais de 35 anos

13. Você trabalha em outra escola além do IFPA? ☐ Sim ☐ Não

14. Qual a esfera da outra Instituição que você trabalha? ☐ Estadual ☐ Municipal ☐ Federal ☐ Privada

15. Você já lecionou o conteúdo de Vetores ou Operações com Vetores no IFPA? ☐ Sim ☐ Não

16. Em quais destes curso do IFPA você já ministrou o assunto operação com vetores? *Marque todas que se aplicam.

☐ Integrado em Agrimensura ☐ Integrado em Agroecologia ☐ Integrado em Agropecuária
☐ Integrado em Aquicultura ☐ Integrado em Controle Ambiental
☐ Integrado em Desenvolvimento de Sistemas ☐ Integrado em Design de Interiores
☐ Integrado em Edificações ☐ Integrado em Eletrônica ☐ Integrado em Eletroeletrônica
☐ Integrado em Eletromecânica ☐ Integrado em Eletrotécnica ☐ Integrado em Estradas
☐ Integrado em Eventos ☐ Integrado em Hospedagem ☐ Integrado em Florestas
☐ Integrado em Informática ☐ Integrado em Manutenção de Máquinas Pesadas
☐ Integrado em Manutenção e Suporte em Informática ☐ Integrado em Mecânica
☐ Integrado em Meio Ambiente ☐ Integrado em Pesca ☐ Integrado em Química
☐ Integrado em Saneamento ☐ Integrado em Telecomunicações
☐ Subsequente em Edificações ☐ Subsequente em Mecânica ☐ Subsequente em Saneamento
☐ Subsequente em Telecomunicações
☐ Superior de Engenharia Civil ☐ Superior de Engenharia de Pesca
☐ Superior de Engenharia de Alimentos ☐ Superior de Engenharia de Controle e Automação
☐ Superior de Engenharia de Materiais ☐ Superior de Engenharia Sanitária e Ambiental
☐ Superior de Licenciatura em Matemática ☐ Superior de Licenciatura em Física
☐ Superior de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas
☐ Superior de Tecnologia em Eletrotécnica Industrial
☐ Superior de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações
☐ Superior de Tecnologia em Saneamento Ambiental

☐Superior de Tecnologia em Automação Industrial ☐Outros

Em relação ao ensino de VETORES para o Ensino INTEGRADO (responda caso você tenha ministrado o conteúdo de vetores para esse nível de ensino).

17. Qual o índice de REPROVAÇÃO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino Médio Integrado? *Marcar apenas uma oval.

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

18. Qual o índice de ABANDONO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino Médio Integrado? *Marcar apenas uma oval.

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

19. Em qua(is) disciplina(s) do INTEGRADO você já ensinou ou ensina VETORES e qual o número de aulas utilizados para ministrar esse assunto em cada disciplina(s)?
Exemplo: Disciplina - número de aulas ... matemática aplicada - 5 aulas ; física I - 6 aulas , etc ...

_____

20. Você considera a Carga Horária da(s) disciplina(s) do INTEGRADO adequada(s) para ensinar VETORES ? Justifique. *

_____

Em relação ao ensino de VETORES para os CURSOS SUBSEQUENTES ... (responda caso você tenha ministrado o conteúdo de vetores para esse nível de ensino).

21. Qual o índice de REPROVAÇÃO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino SUBSEQUENTE?

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

22. Qual o índice de ABANDONO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino SUBSEQUENTE? *Marcar apenas uma oval.

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

23. Em qua(is) disciplina(s) do SUBSEQUENTE você já ensinou ou ensina VETORES e qual o número de aulas utilizados para ministrar esse assunto em cada disciplina(s)?
Exemplo: Disciplina - número de aulas ... matemática aplicada - 5 aulas ; física I - 6 aulas , etc ...

_____

24. Você considera a Carga Horária da(s) disciplina(s) do SUBSEQUENTE adequada(s) para ensinar VETORES? Justifique. *

_____

25. Em relação ao ensino de Vetores no Ensino SUPERIOR (responda caso você tenha ministrado o conteúdo de vetores para esse nível de ensino)...

26. Qual o índice de REPROVAÇÃO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino Superior? *Marcar apenas uma oval.

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

27. Qual o índice de ABANDONO, aproximado, nas disciplinas que contêm o conteúdo de operação de com vetores no Ensino Superior?

☐0 - 10% ☐11 - 20% ☐21 - 30% ☐31 - 40% ☐41-50% ☐51 - 60%
☐61 - 70% ☐71 - 80% ☐81 - 90% ☐91 - 100%

28. Em qua(is) disciplina(s) do SUPERIOR você já ensinou ou ensina VETORES e qual o número de aulas utilizados para ministrar esse assunto em cada disciplina(s) ?
Exemplo: Disciplina - número de aulas ... matemática aplicada - 5 aulas ; física I - 6 aulas , etc ...

_____

29. Você considera a Carga Horária da(s) disciplina(s) do SUPERIOR adequada(s) para ensinar VETORES ? Justifique. *

_____

Em relação a sua formação e a metodologia de ensino ...

30. Durante sua formação de nível superior, você fez alguma disciplina sobre o ENSINO de vetores? Se sim, qual ? Comente a respeito . *

_____

31. Durante a sua formação de Nível Superior em qual(is) disciplinas(s) você estudou vetores? *
_____
32. Na época em que você estudou vetores a maioria das suas aulas iniciavam ... *Marcar apenas uma oval.
☐ pela definição seguida de exemplos e exercícios
☐ com uma situação problema depois de introduzir o assunto
☐ como um experimento para chegar ao conceito
☐ com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo
☐ com a história do assunto ☐ Outro: _____
33. Como você costuma lecionar vetores... *Marque todas que se aplicam.
☐ pela definição seguida de exemplos e exercícios
☐ com uma situação problema depois de introduzir o assunto
☐ como um experimento para chegar ao conceito
☐ com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo
☐ com a história do assunto ☐ Outro: _____
34. Você está satisfeito com a metodologia que você utiliza para ensinar vetores? Justifique. *
_____
35. Você utiliza exemplos contextualizados para ensinar vetores ? Justifique. *
_____
36. Como você classificaria o nível de aprendizado de seus alunos sobre o assunto vetores ? *Marcar apenas uma oval.
☐ Excelente ☐ Ótimo ☐ Regular ☐ Satisfatório ☐ Insatisfatório
37. Você acredita que mudanças na forma de ensinar vetores pode melhorar o processo de ensino aprendizagem dos alunos? Justifique *
_____
38. Para praticar os conteúdos de Vetores com os estudantes você costuma: *Marque todas que se aplicam.
☐ apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
☐ apresentar jogos envolvendo o assunto
☐ solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático
☐ não propor questões de fixação
☐ solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver
☐ utiliza questões de processos seletivos como ENEM ou similares
☐ do meu próprio banco de questões ☐ Outro:_____
39. Você utiliza questões contextualizadas com os alunos sobre vetores? Justifique.
_____
40. Você considera que os alunos conseguem ou conseguiriam resolver questões contextualizadas sobre vetores a partir dos assuntos ensinados em sala de aula? Justifique. *
_____
41. Como você classificaria o nível de interesse de seus alunos sobre o assunto vetores ? *Marcar apenas uma oval.
☐ Muito Interessado ☐ Interessado ☐ Pouco Interessado ☐ Sem interesse
42. Comente sobre a relação entre a motivação dos alunos e o processo de ensino aprendizagem de vetores. *
_____
43. Você indica algum livro texto para ensinar os conteúdos de vetores? Se sim, qual? *
_____
44. Para preparar suas aulas sobre vetores, em qual material você costuma se basear ... *Marque todas que se aplicam.
☐ Notas de Aula ☐ Livro Didático ☐ Apostila ☐ vídeos sobre o assunto
☐ Outro:_____
45. Para realizar a avaliação do assunto de vetores, você costuma utilizar ... *Marque todas que se aplicam.
☐ Prova escrita individual ☐ Prova Escrita em grupo ☐ Trabalho Individual
☐ Trabalhos em grupos ☐ Organização de questões resolvidas sobre o assunto

☐ Organização de questões contextualizadas sobre o assunto
☐ Outro:_____
46. Quando você aplica as avaliações por meio de provas/testes, vocês costuma retirar as questões ... *Marque todas que se aplicam.
☐ Do livro didático adotado/indicado ☐ De outro livro diferente do livro adotado/indicado
☐ Das notas de aula ☐ Das questões resolvidas em sala de aula
☐ Dos exercícios propostos ☐ De processos seletivos como ENEM ou similares
☐ Do meu próprio banco de questões ☐ Outro:_____
47. Você está satisfeito com o tipo de avaliação utilizado e a verificação do aprendizado do aluno? Justifique. *
_____
48. Quais dos conteúdo de vetores você costuma lecionar e qual o nível de dificuldade em relação a compreensão pelo alunos, de acordo com a sua experiência caso você costume lecionar o conteúdo? *

Conteúdo	Não lembro de ter estudado	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Ideia de Vetor						
Conceito de Vetor						
Vetor no plano						
Vetor no Espaço						
Componentes de um vetor no plano Bidimensional						
Componentes de um vetor no espaço Tridimensional						
Módulo de um vetor no plano bidimensional						
Módulo de um vetor no espaço tridimensional						
Direção de um vetor no plano bidimensional						
Direção de um vetor no espaço tridimensional						
Sentido de um vetor no plano Bidimensional						
Sentido de um vetor no espaço Tridimensional						
Adição geométrica de vetores no plano Bidimensional						
Adição geométrica de vetores no espaço tridimensional						
Adição algébrica de vetores no plano bidimensional						
Adição algébrica de vetores no espaço tridimensional						
vetor nulo						
vetor oposto						
Desigualdade triangular						
Subtração geométrica de vetores no plano bidimensional						
Subtração geométrica de vetores no espaço tridimensional						
subtração algébrica de vetores no plano bidimensional						
subtração algébrica de vetores no espaço tridimensional						
Propriedade comutativa da adição de vetores						

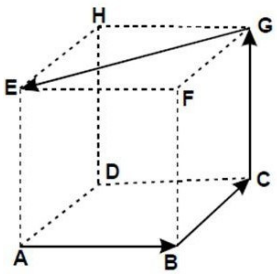
Propriedade Associativa da adição de vetores						
Multiplicação de vetor por um escalar						
Propriedades do módulo de um vetor						
Propriedades da multiplicação de vetor por um escalar						
Interpretação geométrica da multiplicação de um vetor por um escalar						
Interpretação geométrica da adição de vetores						
Interpretação geométrica da subtração de vetores						
Produto Escalar de vetores						
Interpretação geométrica do produto escalar de vetores						
Propriedades do produto escalar de vetores						
Produto Vetorial						
Interpretação Geométrica do Produto Vetorial						
Propriedades do Produto Vetorial						
Produto Misto de Vetores						
Interpretação geométrica do produto misto						
Propriedades do produto misto						
Resolução de questões envolvendo adição algébrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo adição geométrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo subtração algébrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo subtração geométrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo multiplicação de um vetor por um escalar						
Resolução de questões envolvendo produto escalar						
Resolução de questões envolvendo produto vetorial						
Resolução de questões envolvendo produto misto						
Resolução de questões envolvendo área do triângulo com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo área do triângulo quando os vértices necessitam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo área do paralelogramo com os vértices dados						

Resolução de questões envolvendo área do paralelogramo quando os vértices precisam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo área do volume do tetraedro com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro quando os vértices necessitam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo quando os vértices necessitam ser determinados						

Por favor, solicitamos que, com base em sua experiência docente com vetores, indique o grau de dificuldade de cada questão para os estudantes após o ensino do assunto

49. Encontre a origem do segmento A que representa o vetor V=(2,-3,1), sendo sua extremidade o ponto B=(2,-1,4). *Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

50. Com base na figura determine o vetor soma dos vetores AB, BC, CG e GE *Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil



51. Prove que u + v =w --> u= w - v (sendo u, v e w vetores) *Marcar apenas uma oval.
☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

52. Verifique se os pontos A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3) e C(-2, -7, -1) são colineares * Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

53. Dados u=2i , v=i+j+k e w=-2i+6j+6k, verifique se o vetor w é uma combinação linear dos vetores u e v (sendo u,i,v,j,k,w vetores) Marcar apenas uma oval.
☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

54. Determine a medida do menor ângulo do triângulo cujos vértices são: A(2,-1,1), B(1, -3,-5) e C(3,-4,-4). *Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

55. Determine a medida da área do triângulo cujos vértices são: A(1,-2,1), B(2,-1,4) e C(-1,-3,3) *Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

56. Determine o perímetro do triângulo com vértices A(2,4,0), B(0,2,4) e C(6,0,2) *Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

57. Sejam u=(3,1,-1) e v=(a,0,2). Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por u e v seja igual a 5 (sendo u e v vetores) *Marcar apenas uma oval.
☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

58. Determine o volume do tetraedro gerado pelos vetores da base canônica do R^3*Marcar apenas uma oval. ☐Muito Fácil ☐ Fácil ☐Difícil ☐Muito Difícil

APÊNDICE F

QUESTIONÁRIO DISCENTE - ANÁLISES PRÉVIAS

1. Você aceita participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido? ☐ Sim ☐ Não
2. Sexo: ☐ Feminino ☐ Masculino
3. Qual a sua idade? _____
4. Qual o seu ano de ingresso no IFPA (Curso Superior)? _____
5. Você já concluiu o curso de Tecnologia em Sistemas de Telecomunicações do IFPA?
☐ Sim ☐ Não
6. Qual o ano de conclusão? _____
7. Qual o nível de instrução do seu responsável?
☐ Ensino Fundamental ☐ Ensino Fundamental Incompleto ☐ Ensino Médio
☐ Ensino Médio Incompleto ☐ Nível Superior ☐ Pós-graduação ☐ Outro
8. Você estudou o ensino médio em que tipo de escola?
☐ Estadual ☐ Municipal ☐ Federal ☐ Particular
9. Você trabalha de forma remunerada? ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro
10. Você faz algum curso extracurricular?
☐ Não faço ☐ Informática ☐ Língua Estrangeira ☐ Outro: _____
11. Você gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores?
☐ Não gosto ☐ Gosto muito pouco ☐ Gosto pouco ☐ Gosto muito
12. Você está ou ficou retido? ☐ Sim ☐ Não
13. Em qual (is) disciplinas você estudou o assunto Vetores?_____
14. Você teve dificuldades para aprender Cálculo Vetorial?
☐ Não ☐ Muito pouco ☐ Um pouco ☐ Muito
15, Como você classificaria o seu nível de aprendizado sobre o assunto vetores?
☐ Excelente ☐ Ótimo ☐ Regular ☐ Satisfatório ☐ Insatisfatório
16. Como você classificaria o seu nível de interesse sobre o assunto vetores?
☐ Muito Interessado ☐ Interessado ☐ Pouco Interessado ☐ Sem Interesse
17. Você se distraia nas aulas de Cálculo Vetorial (sim/não)? Por quê?_____
18. Você costumava estudar Cálculo Vetorial fora da universidade?
☐ Só no período de prova ☐ Só na véspera da prova
☐ Só nos fins de semana ☐ Alguns dias da semana
☐ Todo dia ☐ Só estudava em sala de aula
19, Quem lhe ajudava, fora de sala, nas resoluções dos exercícios?
☐ Professor ☐ Amigo (a) ☐ Ninguém ☐ Outro:_____
20. Quando você estudou Cálculo Vetorial a maioria das aulas iniciava: ☐ pela definição seguida de exemplos e exercícios
☐ com uma situação problema depois de introduzir o assunto
☐ com um experimento para chegar ao conceito
☐ com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo
☐ com a história do assunto ☐ Outro:_____
21. Para exercitar os conteúdos de Cálculo Vetorial seu professor costumava:
☐ apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos
☐ apresentava jogos envolvendo o assunto
☐ solicitava que os alunos resolvessem questões do livro didático não
☐ propor questões de fixação
☐ solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver
☐ utilizava questões de processos seletivos como ENEM ou similares
☐ propor questões do seu próprio Banco de Dados
22. Para realizar a avaliação do assunto de vetores, seu professor costumava utilizar
☐ Prova Escrita Individual ☐ Prova Escrita em grupo ☐ Trabalho Individual
☐ Trabalho em grupos ☐ Organização de questões resolvidas sobre o assunto

☐ Organização de questões contextualizadas sobre o assunto ☐ Outros

23. Você esta satisfeito com a metodologia utilizada para o ensino de vetores? Justifique. *

_____

24. O seu professor utilizava questões contextualizadas para o ensino de Vetores? Justifique. *

_____

25. Você conseguiria resolver questões contextualizadas sobre vetores a partir dos assuntos ensinados em sala de aula? Justifique. *

_____

26. Base na sua experiência de estudo de Vetores, preencha o quadro a seguir, de acordo com o seu grau de dificuldade para aprender: * Marcar apenas uma opção por linha.

Conteúdo	Não lembro de ter estudado	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Ideia de Vetor						
Conceito de Vetor						
Vetor no plano						
Vetor no Espaço						
Componentes de um vetor no plano Bidimensional						
Componentes de um vetor no espaço Tridimensional						
Módulo de um vetor no plano bidimensional						
Módulo de um vetor no espaço tridimensional						
Direção de um vetor no plano bidimensional						
Direção de um vetor no espaço tridimensional						
Sentido de um vetor no plano Bidimensional						
Sentido de um vetor no espaço Tridimensional						
Adição geométrica de vetores no plano Bidimensional						
Adição geométrica de vetores no espaço tridimensional						
Adição algébrica de vetores no plano bidimensional						
Adição algébrica de vetores no espaço tridimensional						
vetor nulo						
vetor oposto						
Desigualdade triangular						
Subtração geométrica de vetores no plano bidimensional						
Subtração geométrica de vetores no espaço tridimensional						
subtração algébrica de vetores no plano bidimensional						
subtração algébrica de vetores no espaço tridimensional						
Propriedade comutativa da adição de vetores						
Propriedade Associativa da adição de vetores						
Multiplicação de vetor por um escalar						
Propriedades do módulo de um vetor						

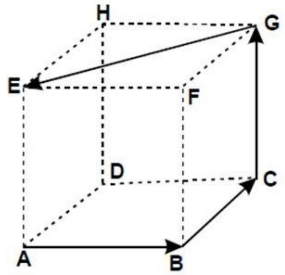
Propriedades da multiplicação de vetor por um escalar						
Interpretação geométrica da multiplicação de um vetor por um escalar						
Interpretação geométrica da adição de vetores						
Interpretação geométrica da subtração de vetores						
Produto Escalar de vetores						
Interpretação geométrica do produto escalar de vetores						
Propriedades do produto escalar de vetores						
Produto Vetorial						
Interpretação Geométrica do Produto Vetorial						
Propriedades do Produto Vetorial						
Produto Misto de Vetores						
Interpretação geométrica do produto misto						
Propriedades do produto misto						
Resolução de questões envolvendo adição algébrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo adição geométrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo subtração algébrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo subtração geométrica de vetores						
Resolução de questões envolvendo multiplicação de um vetor por um escalar						
Resolução de questões envolvendo produto escalar						
Resolução de questões envolvendo produto vetorial						
Resolução de questões envolvendo produto misto						
Resolução de questões envolvendo área do triângulo com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo área do triângulo quando os vértices necessitam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo área do paralelogramo com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo área do paralelogramo quando os vértices precisam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo área do volume do tetraedro com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo o volume do tetraedro quando os vértices necessitam ser determinados						
Resolução de questões envolvendo						

o volume do paralelepípedo com os vértices dados						
Resolução de questões envolvendo o volume do paralelepípedo quando os vértices necessitam ser determinados						

Por favor, indique se você seria capaz de resolver as questões abaixo, relativas à disciplina de Cálculo Vetorial (caso resolva indique o valor encontrado no campo "Outro..")

27. Encontre a origem do segmento A que representa o vetor V=(2,-3,1), sendo sua extremidade o ponto B=(2,-1,4). *Marcar apenas uma oval. ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

28. Com base na figura determine o vetor soma dos vetores AB, BC, CG e GE *Marcar apenas uma oval. ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____



29. Prove que u + v =w --> u= w - v (sendo u, v e w vetores) ☐ Sim ☐ Não

30. Verifique se os pontos A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3) e C(-2, -7, -1) são colineares *Marcar apenas uma oval. ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

31. Dados u=2i , v=i+j+k e w=-2i+6j+6k, verifique seo vetor w é uma combinação linear dos vetores u e v (sendo u,i,v,j,k,w vetores) ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

32. Determine a medida do menor ângulo do triângulo cujos vértices são: A(2,-1,1), B(1, -3,-5) e C(3,-4,-4). ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

33. Determine a medida da área do triângulo cujos vértices são: A(1,-2,1), B(2,-1,4) e C(-1,-3,3) *Marcar apenas uma oval. ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

34. Determine o perímetro do triângulo com vértices A(2,4,0), B(0,2,4) e C(6,0,2)
☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

35. Sejam u=(3,1,-1) e v=(a,0,2). Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por u e v seja igual a 5 (sendo u e v vetores) ☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:_____

36. Determine o volume do tetraedro gerado pelos vetores da base canônica do R^3
☐ Sim ☐ Não ☐ Outro:___

APÊNDICE G

CATALOGAÇÃO DOS ESTUDOS SOBRE VETORES

CATEGORA 1 - ESTUDOS COM PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA
a) Sem resultados de experimentação em sala de aula

AUTOR. **TÍTULO.** ANO	**OBJETIVO**	**CARACTERÍSTICAS**
SILVA, Wellington. **Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio.** 2013	Apresentar uma sequência didática inovadora, seguindo as Orientações Curriculares do e para o Ensino Médio, tanto conceitualmente quanto nos procedimentos didáticos com a inserção do uso de *software* livre de forma gradual, constante e sistêmica.	Proposição de uma SD para introduzir novas ferramentas matemáticas, procedimentos nas resoluções de problemas clássicos e a exploração das novas tecnologias de modo sistemático com foco no ensino de Geometria Analítica e no uso do Geogebra.
MARTINS, Roberto H. **Aplicação de vetores na Solução de Sistemas Lineares 2x2 e 3x3.** 2016.	Propor uma nova abordagem para a solução sistemas lineares 2x2 e 3x3 no Ensino Médio com o uso de vetores.	Apresenta uma sequência didática com abordagem com e sem o uso do Geogebra.
SILVA FILHO, Francisco. **Vetores: conceito e aplicações.** 2017.	Proposta de introdução do conteúdo no Ensino Médio a partir do 1º ano.	Buscou enfatizar o uso de vetores como alternativo e complementar aos métodos sintético e cartesiano
LUCAS, César M. do Nascimento. **Elaboração de um Sequência de Ensino de Vetores por meio da Sequência Fedathi e exploração de suas representações com uso do Geogebra.** 2017.	Elaborar uma sequência didática, explorando as representações semióticas com o auxílio do Geogebra como recurso pedagógico e metodologia de pesquisa a Engenharia Didática	Apresentou uma SD para o ensino de Vetores no 1º ano do EM tendo por fundamentação teórica a Teoria das Representações Semióticas e a Sequência de Fedathi como metodologia de ensino.
PIAZZA, Maria. **Uma proposta de sequências didáticas para o ensino de vetores na escola básica.** 2020.	Propor duas SD: uma para o 9º ano do Ensino Fundamental e outra para o 3º ano do Ensino Médio.	Na proposta para o Ensino Fundamental a SD abordou os conteúdos de Grandezas Vetoriais, definição de vetores e suas características e operação com vetores; para o EM os assuntos foram: vetor no plano, operações de soma, produto por um escalar, produto escalar, paralelismo de vetores, módulo e ângulo entre vetores. A metodologia de ensino foi aula expositiva e resolução de exercícios e problemas.
NAVECA, Kayo D. A. **Espaços Vetoriais do tipo gráfico e uma proposta didática para o ensino médio.** 2021	Apresentar uma SD para introduzir a ideia de Espaço Vetorial no EM, segundo a Engenharia Didática, e exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico.	A SD tinha por objetivo fazer uma introdução à álgebra linear para alunos do 3º ano do EM por meio vetores e aulas interativas com o uso do Geogebra.
FERREIRA, Kissia. **Vetores e Matrizes no Ensino Médio com o uso de Material Concreto.** 2023	Apresentar uma sequência didática para o ensino de matrizes no ensino médio com abordagem vetorial.	Proposição de atividades com o uso de materiais concretos confeccionados.

BRITO, Marcos F. de O. **Uma proposta para o ensino de vetores no Novo Ensino Médio usando Álgebra Linear: matrizes-linha e suas propriedades.** 2023.	Discutir a viabilidade e a pertinência da inserção do conteúdo de vetores no Novo Ensino Médio e apresentar uma proposta de SD para o ensino vetores integrados com a TDIC[18].	Aborda o conteúdo de segmentos equipolentes, conceito de vetor, operação com matrizes e com vetores e outras coisas, tendo por metodologia de ensino aulas expositivas com a utilização da plataforma TED-ED[19] e softwares como o PhET e o Geogebra
FACUNDO, Gilberto de O. **Alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio: uma abordagem vetorial baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiotica**.2023.	Apresentar uma proposta para o ensino de alguns conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio com Abordagem Vetorial.	As atividades da SD foram propostas a partir do plano cartesiano, por meio de figuras e gráficos, tendo por aporte a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

b) Com resultados de experimentação em sala de aula

SUB CATEGORIA	AUTOR. **TÍTULO**. ANO	**OBJETIVO**	**CONCLUSÕES**
Estudos no Ensino Médio aplicados à disciplina de Matemática	SOUZA, Patrício DO C. **UMA INVESTIGAÇÃO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO**. 2015.	Inserir vetores no currículo de Matemática por meio de uma sequência didática com o uso do GeoGebra e investigar se essa sequência contribui para que os alunos utilizem os vetores como ferramenta na resolução de problemas,	O uso de *software* contribuiu para a aprendizagem do conteúdo de forma dinâmica, resolução de problemas e dão suporte aos professores no ensino de vetores.
	REIS, Antônio F. **ENSINANDO OPERAÇÕES COM GRANDEZAS FÍSICAS VETORIAIS NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DE UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA**. 2016.	Desenvolver e Aplicar uma sequência didática, por meio de uma UEPS, para ensinar operações com vetores, comumente trabalhadas na Geometria Analítica.	Evidências de aprendizagem significativa observada na familiarização dos alunos com conceitos físicos aprendidos a partir de vetores e pela evolução da capacidade significativa.
	FURLANI, Celso. **O USO DE CONCEITOS VETORIAIS EM GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA**. 2016	Propor uma abordagem alternativa ao ensino de Geometria Analítica a partir de recursos computacionais e aplicação de uma sequência de atividades utilizando o conceito de vetores e o Geogebra como ferramenta de construção geométrica e dinâmica.	Sedimentação dos conceitos de geometria analítica e do conceito de Vetor, auxílio na interpretação das atividades e cálculos, comprometimento, envolvimento e participação dos alunos
	COUTO, Romênia. **PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE CÓDIGO DE BARRAS COMO**	Apresentar uma proposta de utilização dos códigos de barras como recurso didático para o ensino de	Boa aceitação pelos alunos; contribuiu significativamente para o aprendizado dos conceitos

[18] Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação.

[19] Plataforma que apresenta um conjunto de ferramentas para o professor elaborar aulas interativas.

	RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE ARITMÉTICA MODULAR E DE VETORES EM UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE PETROLINA-PE. 2017	Aritmética Modular e de Vetores e aplicar uma sequência didática envolvendo esses assuntos.	e o uso da contextualização facilitou a compreensão.
	DIAS, Alexandre S. **A UTILIZAÇÃO DE VETORES AUXILIANDO O APRENDIZADO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO**. 2018.	Mostrar que a utilização de conceitos simples de vetores aplicados de forma correta na resolução de exercícios de geometria analítica, pode trazer ao estudante rapidez e eficiência na obtenção da resposta final.	O estudo de vetores deve ser incluído no ensino médio como auxiliar ao estudo da geometria analítica no 3º ano do ensino médio. Os alunos se sentiram estimulados com o aprendizado, resultados e rapidez na resolução de problemas.
	SOUZA, Rogério L. **REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE VETORES**. 2019.	Analisar as contribuições dos registros de representação semiótica no estudo de vetores.	A compreensão dos objetos matemáticos possibilita diferentes formas de representação e conexões com novos e antigos conhecimentos.
	OLIVEIRA, Carlos. **GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES NO ENSINO MÉDIO**. 2020.	Apresentar uma abordagem vetorial no estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio e aplicar o material desenvolvido no 3º ano do Ensino Médio.	Motivação com o estudo de Geometria Analítica com abordagem vetorial no ensino médio e boa aceitação das aulas com uso do Geogebra.
Estudos no Ensino Médio e Fundamental aplicados à disciplina de Física	BISPO, Claudio. **UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM COMO FACILITADOR NO ENSINO DE VETORES**. 2017.	Fazer uma análise bibliográfica do que foi realizado no ensino de Física e em relação ao ensino de vetores e produzir uma sequência de ensino-aprendizagem para servir como suporte nas aulas de vetores do ensino médio.	Os alunos melhoraram o uso da noção de vetor em questões que tinham um contexto físico associado. É possível afirmar que o método funciona, porém é preciso um domínio de sala muito maior do que em uma aula tradicional.
	GONTIJO, Ivaldo. A. **A ELABORAÇÃO E USO DE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULATIVO PARA EXPLORAR CONCEITOS DE CINEMÁTICA VETORIAL**: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL. 2017.	Investigar evidências de aprendizagem significativa envolvendo conceitos da cinemática vetorial, em uma turma do 9º ano, usando materiais manipulativos.	Indícios de aprendizagem significativa durante as aulas. A Resolução de Problemas possibilitou a externalização das ideias dos alunos. Os materiais manipulativos foram essenciais para internalização dos conceitos e como facilitadores da aprendizagem.
	SILVA FILHO, Deodato P. DA S. **VETORES GEOMÉTRICOS**: CONTRIBUIÇÕES PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONTEÚDOS	Proposta de introdução deste conteúdo no Ensino Médio a partir do 1º ano.	O conhecimento de vetores facilita cálculos e torna mais clara a visualização geométrica e é de grande valia para a aprendizagem.

	MATEMÁTICOS NO ENSINO MÉDIO. 2017		
	SAIB, Eduardo **SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS 3D COMO FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DE FÍSICA**. 2018	Desenvolver atividades que permitam a integração simulações computacionais 3D na abordagem de conceitos de movimento dos corpos. Para melhora do desempenho.	Os Módulos Educacionais proporcionaram uma melhora no desempenho dos estudantes ao resolver questões que abordaram os conceitos estudados e tem potencial para serem utilizados como ferramenta de apoio ao professor em sala de aula.
Estudos aplicados a estudantes de Licenciatura	LUCAS, Rodrigo D. DE. **GEOGEBRA E MOODLE NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA**. 2010	Construir um AVA para o ensino significativo de Geometria Analítica, com a utilização de visualizadores 3D idealizados no Geogebra para o ensino à Distância.	Visualização dos objetos geométricos, construção do conhecimento mais significativo, motivação, dedicação aos estudos e melhora da participação e notas.
	ANDRADE, Juliana **VETORES**: INTERAÇÕES A DISTÂNCIA PARA A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR. 2010	Analisar os requisitos necessários ao desenvolvimento de *softwares* educativos que amparem a aprendizagem à distância de objetos de dependência linear e validação.	O recurso tecnológico viabiliza a aprendizagem, contudo não é suficiente para sanar dificuldades de conversão e de comunicação via chat.
	PATRICIO, Rafael S. **AS DIFICULDADES RELACIONADAS À APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VETOR À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**. 2010.	Identificar e Analisar as dificuldades na produção e no tratamento de representações dos vetores que caracterizam lacunas ao aprendizado do conceito desse objeto.	Dificuldades de conversão envolvendo registros figurais na representação geométrica e gráfica, de aplicação da regra do paralelogramo, de identificar vetores iguais e coordenadas de ponto e de vetor.
	PEREIRA, Ricardo A. A. **APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE ESPAÇO VETORIAL** = LEARNING OF THE CONCEPT OF VECTOR SPACE. 2017.	Analisar o processo de aprendizagem à luz dos referenciais teóricos da pesquisa, identificando contribuições e limitações do método adotado.	Foram confirmadas as hipóteses de percepção das vantagens do uso da Álgebra Linear, do reconhecimento da necessidade da composição de provas, da resolução de exercícios em contextos distintos e da utilização de procedimentos adequados.
	SANTOS, Francisco A. DOS. **APLICAÇÃO DE VETORES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA**: UM ESTUDO DE CASO. 2018.	Mostrar a aplicação de vetores geométricos na computação gráfica e analisar o desempenho e satisfação do aluno em uma oficina em que conceitos básicos sobre vetores e geometria analítica são trabalhados usando um *software* de computador, onde são simulados movimentos de objetos em	Os métodos de ensino em que o aluno atua como sujeito ativo, no processo ensino aprendizagem, colaboram positivamente com o aprendizado do mesmo (o aluno), a utilização de *softwares* gera entusiasmo e dinamismo as aulas; o ensino da matemática deve aliar teoria à prática e a

		ambientes virtuais por meio de operações com vetores.	contextualização para maior aproveitamento.
	LOPES, Leide M. L. **FORMAÇÃO E REELABORAÇÃO DE IMAGENS E DEFINIÇÕES DE CONCEITO RELACIONADAS AO ENSINO DE VETORES EM GEOMETRIA ANALÍTICA**. 2019	Investigar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceitos relacionados a vetores a partir de atividades de Geometria Analítica.	As atividades de Geometria Analítica contribuíram para a formação de imagens de conceitos dos participantes; para os participantes o processo algébrico é mais fácil de resolver ou de melhor compreensão.
	PONTES, LUCAS F. C. **VETORES NO ENSINO MÉDIO: PROPOSTAS DE INTERVENÇÃO NO ENSINO E NOVAS PERSPECTIVAS**. 2023.	Descreve a apropriação de um projeto metodológico de ensino, de caráter intervencionista que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática	Concluiu que através da intervenção de ensino realizada, os licenciandos possuem uma perspectiva positiva da abordagem vetorial, e que a utilização dessa abordagem auxiliou na compreensão, aprendizagem e na realização de tarefas ligadas ao Ensino Básico.
Estudos no curso de Engenharia e de Arquitetura	SOUZA, Luiz C. DE. **VETORRA - SOFTWARE PARA O CÁLCULO DE OPERAÇÕES VETORIAIS COM REALIDADE AUMENTADA**. 2014.	Desenvolver e aplicar o VetorRA para calcular as operações vetoriais utilizando a tecnologia de Realidade Aumentada.	Aplicações práticas com o uso do *software* incentivaram a aprendizagem ao favorecer à interatividade e visualização, também, é uma forma diferenciada e inovadora de ensinar o conteúdo de operações vetoriais.
	VIDIGAL, Érika D. **DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DOS PRODUTOS DE VETORES**. 2014.	Criar uma sequência didática de atividades e analisar sua contribuição para o ensino e a aprendizagem dos produtos de vetores, nos cursos de Engenharia.	Melhora na postura, segurança, autonomia e amadurecimento. As sequências didáticas seriam mais motivadoras se iniciadas com uma situação-problema; os estudos dos produtos de vetores com sequências didáticas possibilitam uma parceria entre professores e alunos na construção do conhecimento e contribuem para uma aprendizagem mais efetiva.
	GUARDA, Solange M. **OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA**. 2018.	Desenvolver e utilizar ferramentas que contribuam para a compreensão de conceitos e argumentações de forma significativa.	O uso dos OVA's contribuiu na aprendizagem referente a determinação da área do paralelogramo e do triângulo e na sistematização de conceitos e atividades da elipse e da hipérbole; houve maior dificuldade na sistematização dos conceitos e atividades relacionados a parábola.

CATEGORIA 2 - Estudos com proposta de material teórico			
SUBCATEGORIA	AUTOR. **TÍTULO**. ANO	**OBJETIVO**	**CARACTERÍSTICAS**
Interdisciplinar	MARTINS, Rosival L. **O Ensino de Vetores e a Interdisciplinaridade.** 2015.	Apresentar uma proposta de utilização dos vetores na Matemática e na Física, suas propriedades algébricas e geométricas, com o Geogebra para alunos do EM.	Em matemática, abordou aplicações de vetores como uma ferramenta auxiliar na compreensão das operações com números complexos e em física, abordou as propriedades vetoriais.
	SILVA, Erica C. da. **O ensino de tópicos de Física mediante representações táteis no multiplano**. 2017.	Trabalhar os vetores de forma prática e interdisciplinar entre a Matemática e a Física para o EM.	Abordou vetores aplicados à Mecânica e a Engenharia, especialmente, em sistemas estáticos
	SANTOS, Luís. **Vetores: um conceito matemático.** 2014	Aprimorar o estudo dos vetores no ensino regular, fazendo uma distinção entre sua abordagem matemática e Física com o uso do Geogebra.	Enfatizou a necessidade do ensino de vetores em Matemática e o seu uso como ferramenta para resolver problemas de Física.
	COSTA, Patrício T.. **Vetores: uma abordagem para o Ensino Médio.** 2015.	Introduzir o estudo de vetores geometricamente de modo construtivo e pela visualização do mesmo, dentro do espaço bi e tridimensional.	Apresentou, também, algumas aplicações na geometria plana e espacial e na área de física como o cálculo do trabalho e do campo magnético.
	SILVA, Walmor P. **Uma abordagem dos conteúdos de Matemática aplicados na 1ª série do Ensino Médio.** 2020	Abordar o conteúdo de vetores e aplicações à Física no 1º ano do Ensino Médio.	Apresentou o ensino de matemática e física enfatizando os conceitos matemáticos e a aplicações em física.
	OLIVEIRA, Fernando. **Vetores: uma abordagem para o ensino médio.** 2014.	Abordar sobre vetores buscando aplicabilidade para as aulas de Matemática do 3º ano do Ensino Médio com o uso do Geogebra	Apresenta um modelo conceitual postulado e fundamentado nos livros didáticos de cálculo vetorial e álgebra linear e expôs algumas aplicações práticas na Física.
	SILVA FILHO, Francisco. **Vetores: conceito e aplicações.** 2017.	Oferecer um embasamento teórico relativo aos vetores para o EM e aplicações na Mecânica e Engenharia.	O estudo abrange os conceitos matemáticos e aplicações em Física (Mecânica) e Engenharia (Equilíbrio do corpo rígido e estruturas).
Matemática	RESENDE, Adriana S. **Introdução Elementar às Álgebras de Clifford Cl_2 e Cl_3**. 2010.	Apresentar por intermédio de uma linguagem unificada alguns conceitos de cálculo vetorial, álgebra linear e grupos de rotações.	Utiliza como linguagem unificada a álgebra geométrica e Clifford para ser utilizada por alunos de Engenharia, Física e Matemática.
	LINDOSO, José. **Uma nova abordagem da geometria no Ensino Médio usando Vetores.** 2013	Propor uma nova proposta de abordagem das geometrias plana e analítica plana no ensino médio, tendo por base o uso de vetores.	Articulação entre a representação algébrica e gráfica das figuras de uma forma mais natural possível, além disso, fez o estudo da geometria analítica com o uso de vetores.
	SILVA, Robson. **Geometria Analítica no Ensino Médio: uma**	Produção de um material que traz como principal diferencial a	Elaborou um material para o ensino médio utilizando a geométrica analítica com

	proposta com tratamento vetorial. 2013.	introdução de vetores e sua aplicabilidade.	abordagem vetorial, conexão de vetores com outras áreas e a resolução de problemas.
	VIEIRA, Hálisson. **Álgebra linear: uma conexão do Ensino Médio ao Superior**. 2013	Apresentar os sistemas lineares sob a ótica da Álgebra Linear a professores e estudantes do EM.	O material produzido busca uma visão panorâmica e interconectada dos estudos de sistemas com matrizes, destas com vetores e destes com os elementos de Espaços Vetoriais.
	BRAZ, W. **Uma proposta de ensino de Geometria com Álgebra Vetorial.** 2014.	Apresentar uma proposta para o ensino de geometria plana, espacial e analítica para o ensino médio, usando a álgebra vetorial como principal instrumento para abordagem destes temas.	O trabalho foi desenvolvido partindo do estudo geométrico, axiomático e analítico dos vetores, objetivando especificamente sua aplicação em modelagem matemática.
	CABRAL, R. **Introdução do Estudo de Vetores no Ensino Médio: um ganho significativo para o estudo da Geometria Analítica.** 2014	Proposta de introdução do estudo de vetores no plano e no espaço, no 3º ano do Ensino Médio, com a perspectiva de um ganho para os estudos de geometria analítica.	A proposta aborda o uso de vetores no ensino de geometria analítica.
	CHAGAS, Alexandre S. das. **O Geogebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no Ensino Médio.** 2014	Propor o ensino de vetores no ensino médio em Matemática e apresentar um material que possa ser utilizado por professores, contendo um embasamento teórico do assunto e atividades a serem desenvolvidas com o software Geogebra.	Mostra a simplificação de cálculo ao utilizar vetores para resolver problemas e faz uso do Geogebra com o intuito de dinamizar e inovas às aulas.
	UCHÔA, Crispiano. **Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do Ensino Médio.** 2014	Proposta de abordagem de problemas de geometria plana, nas turmas olímpicas de matemática no ensino básico, tendo como base o uso de vetores para resolver esses problemas.	Articulação entre a representação geométrica e a algébrica de uma forma mais natural possível e o estudo da geometria plana com o uso de vetores como facilitador da aprendizagem, uma vez que conhecerá novas ferramentas para resolver problemas.
	SOUZA, Paulo. **Produto Interno e Espaços Vetoriais.** 2015	Apresentar os conceitos de produto interno e de espaços vetoriais expondo-os de forma didática, mostrando que de algum modo está associado aos conceitos estudados no ensino básico através de exercícios aplicados.	Apresenta aplicações do produto interno de vetores de um espaço vetorial com especiais aplicações no Ensino Médio através de conceitos como Matrizes, Sistemas Lineares e Operações com Vetores
	GOMES, Neades A. **Possibilidades do Uso da Realidade Aumentada na Visualização de Elementos matemáticos.** 2015	Propor o uso da tecnologia de realidade aumentada, para agregar a visualização de formas geométricas em 3 dimensões.	Apresenta possibilidades do uso da realidade aumentada em sala de aula para o ensino de vetores no espaço.
	NOVAES, André. **Geometria Analítica e Vetores: uma proposta**	Introduzir as definições e os conceitos básicos sobre vetores no R^2 e no R^3 no ensino	Mostrar, com vários exemplos e aplicações, como o ensino de vetores simplifica e facilita o

	para melhoria do ensino da Geometria Espacial. 2015.	básico, junto com as propriedades e operações	entendimento das atividades propostas.
	RODRIGUES, José. **Geometria Analítica com Enfoque Vetorial no Ensino Médio.** 2015.	Organizar o conteúdo Geometria Analítica, no Ensino Médio, com tratamento vetorial.	Apresenta contextualização histórica e aplicações de acordo com o conteúdo apresentado.
	SILVA, Daniel. **Introdução ao Ensino de Vetores: uma proposta para a matriz curricular de matemática do Ensino Médio.** 2015	Apresentar uma teoria formal de Vetores no Plano a ser aplicada no 1º ano do EM.	Apresenta a teoria inicial de vetores.
	VELOSO, Antônio. **Uma proposta para a utilização dos vetores como ferramenta de resolução de problemas de geometria.** 2015.	Mostrar os vetores pela perspectiva da matemática, com o intuito de resolver e demonstrar propriedades geométricas por meio dos vetores.	Mostrou um texto didático enfatizando a importância dos conteúdos de geometria Plana e Analítica serem abordados sob uma ótica vetorial.
	PINHEIRO, Márcio **A utilização de conceitos vetoriais no Ensino da Geometria Elementar.** 2016.	Mostrar conceitos e propriedades referentes à noção elementar de vetor, a fim de que sirvam como ferramentas e técnicas adicionais às estratégias de solução de problemas de Geometria.	Fomentou a discussão no meio educacional, de modo que, principalmente quando conclua a Educação Básica, o estudante tenha plena consciência da importância do tema, não apenas para embasar muito do que é objeto da Física, como para convencer-se da plena aplicabilidade das conceituações vetoriais à própria Matemática, em especial, à geometria.
	CORREIA, Carlos A. G.. **Geometria Analítica Vetorial para o Ensino Médio.** 2017.	Apresentar um roteiro para uma Geometria Analítica Vetorial para o Ensino Médio, utilizando os conceitos aprendidos com a disciplina de Álgebra Linear.	Apresenta um plano de Ensino para a Geometria Analítica Vetorial.
	RIGONATTO, Marcelo. **Introdução ao Estudo dos Vetores e aplicações no Ensino Médio.** 2018.	Proposta de introdução ao estudo dos vetores no Ensino Médio.	Apresenta algumas demonstrações da trigonometria, das geometrias analítica e plana de forma lúdica, vinculando o pensamento algébrico ao geométrico.
	FOLADOR, Wendel V. da S. **Vetores no plano.** 2018.	Falar do assunto Vetores no plano em uma linguagem adequada para uma turma de 1º ano do Ensino Médio	Além do material teórico sobre vetores, apresenta, ao final, demonstrações geométricas utilizando a abordagem vetorial.
	CHALEGA, Josimilson de F.. **Estudo de vetores no Ensino Médio para resolução de problemas**. 2018	Proposta de introdução do conceito de vetor tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico e fornece sugestões de abordagens condizentes com o currículo de	Apresenta além do material teórico, alguns exercícios para comparação da resolução de problemas sem e com o uso de vetores.

		Matemática para o Ensino Médio	
Física	MOREIRA, Luiz. **Cálculo Vetorial e Eletromagnetismo: as Equações de Maxwell.** 2020.	Montar uma fonte de consulta para a teoria eletromagnética com abordagem vetorial.	Apresentou a teoria eletromagnética segundo o viés vetorial, com ênfase no conceito e significado físico.
	NASCIMENTO, Weliton. **O Ensino de Vetores na primeira série do Ensino Médio com auxílio do Geoplano, da malha quadriculada e do Geogebra.** 2014.	Proposta para auxiliar os professores de Física no ensino de vetores com o uso do Geoplano, da malha quadriculada e do Geogebra	Utiliza elementos lúdicos como facilitador da aprendizagem que permitem manipulações que despertam o interesse do aluno.

CATEGORIA 3 - Estudos com aplicações de Vetores

AUTOR. **TÍTULO**. ANO	**Objetivo**	**APLICAÇÃO**	**CARACTERÍSTICAS**
ANDRADE, E. **Representação Vetorial e Grandezas Físicas nos livros de física adotados pelo PNLD para 2012: a necessária convergência para além da matemática.** 2012	Analisar os requisitos necessários a elaboração de softwares para suporte da aprendizagem à distância dos objetos de dependência e independência linear no $\mathbb{R}^2$.	Desenvolvimento de *Software*	O estudo apoia-se no levantamento das dificuldades dos alunos advindas do ensino não presencial para levantar os requisitos necessários para o desenvolvimento do protótipo Vetores.
SILVA, Humberto. **A álgebra de Clifford: uma aplicação no conceito de força magnética**. 2010.	Apresentar um estudo exploratório em que foi avaliada a viabilidade da Álgebra de Clifford como um formalismo adaptável para o estudo de Eletromagnetismo no EM.	Força Magnética	O estudo fez intervenções com alunos e professores, motivados pela Teoria Cognitivista de Ausubel e confecção de material didático; defende que a estrutura da Álgebra de Clifford é mais intuitiva, porém o formalismo de Gibbs tem predominância.
NOGUEIRA, Leonardo. **Transformações lineares no plano e aplicações**. 2013.	Apresentar transformações lineares e cônicas.	Transformações lineares no plano e aplicações	O estudo apresenta as aplicações tendo por fundamento a noção de espaço vetorial para o desenvolvimento da Álgebra Linear.
SILVA, Sidival. **Geometria Analítica: estudo da reta e da circunferência, uma abordagem vetorial como proposta de ensino para alunos do Ensino Médio.** 2015.	Apresentar o estudo da reta e da circunferência sob uma abordagem vetorial para o Ensino Médio.	Estudo da reta e da Circunferência	Define a equação da reta (usando a ideia de produto por escalar) e, a equação da circunferência usando a definição de norma).
SANTOS, Edson. **Uma aplicação de produto alternado em R³ usando vetores.** 2017	Trazer o conceito de produto vetorial e produto misto naturalmente através da definição de produto alternado e	Produto Alternado em $\mathbb{R}^3$	Relacionou o produto alternado de dois vetores com área do paralelogramo formado por eles, assim como, o

	apresentar uma aplicação de cada caso no $\mathbb{R}^3$ usando vetores.		produto alternado de três vetores com o volume do paralelepípedo. Mostrou ainda que o produto vetorial e o produto misto são casos especiais de produto alternado.
LIS, Osmarilda. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte I.** 2018.	Associar algumas propriedades algébricas com as propriedades geométricas, fazendo um resgate de conceitos que envolvem comprimento, área e volume na Educação Básica, relacionando-os com os conteúdos do curso de Licenciatura em Matemática.	Relações métricas no triângulo retângulo; Produto escalar	Dedução das relações métricas no triângulo retângulo baseada em propriedades de áreas equivalentes, aplicação nos produtos: escalar, vetorial e misto e demonstração geométrica por um exemplo de que toda transformação linear do espaço na reta é dada por um produto escalar. Fornecer embasamento para o professor sentir-se preparado em sua prática docente.
TELES, Andressa. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte II.** 2018.		Determinante e área do paralelogramo; Produto Vetorial	
SILVEIRA, Analice. **Bases intuitivas para a formação dos conceitos do produto escalar, do produto vetorial e do produto misto – Parte III.** 2018.		Produto Misto e o Volume; funções vetoriais	
SANTOS, Rafael. **Processos algébricos na resolução de problemas de Geometria Euclidiana Plana e Espacial.** 2020	Propor a utilização de processos Algébricos para resolver alguns problemas de geometria euclidiana plana e espacial que geralmente são assistidos por meio de processos geométricos.	Uso de processos algébricos para resolução de problemas pela abordagem vetorial.	Concluiu que a utilização de processos algébricos se mostrou uma ferramenta valiosa na resolução de problemas de geometria euclidiana plana e espacial
VALE, Marco A. **Vetores e Transformações Lineares no Plano**.2021.	Abordar algumas transformações no plano, especialmente algumas transformações lineares especiais, utilizando uma linguagem bastante elementar.	Transformações no plano	Intenção de apresentar aos professores, alunos e aos que vierem a ler este trabalho uma maneira de abordar as transformações geométricas no plano no Ensino Médio, a partir de funções, vetores e matrizes.

CATEGORIA 4 - Estudos que realizaram, somente, análise de livros didáticos

AUTOR. **TÍTULO**. ANO	**OBJETIVO**	**RESULTADOS**
ANDRADE, Edson V. de. **Representação Vetorial e Grandezas Físicas nos livros de física adotados pelo PNLD para 2012: a necessária convergência**	Avaliar como são tratados os conceitos de vetor e de grandeza física vetorial nos livros didáticos de Física aprovados no PNLD para 2012	Ausência de rigor na representação vetorial, falta de discussão ao relacionar operações vetoriais e a representação espacial, relação superficial de grandezas escalares, desvinculação do estudo das operações vetoriais de suas

para além da matemática. 2012.		representações, como nas aulas de física.
ANDREOTTI, Celso L. **Vetores e suas representações em livros didáticos em Engenharia.** 2017.	Investigar, em livros didáticos das disciplinas dos cursos de engenharia nas modalidades Mecânica e Produção, quais são as abordagens conceituais e as representações semióticas utilizadas para o objeto matemático vetor.	Observou que em livros de Álgebra Linear e Geometria analítica algumas representações utilizadas não o são em livros de Engenharia; a ênfase nas na transformação de conversão é dada em livros técnicas e não nos de matemática; diversidade de notações adotadas nos livros; possibilidades de representações semióticas e as variadas notações e simbologias não são convergentes.

CATEGORIA 5 - Estudos que investigaram conhecimento/dificuldades dos alunos

AUTOR. **TÍTULO**. ANO	**OBJETIVO**	**RESULTADOS**
PRADO, Eneias. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial.** 2010	Identificar a concepção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado de alunos que concluíram um curso de extensão em Álgebra Linear.	A partir da decomposição genética os estudantes desenvolveram a noção de base de um espaço vetorial baseada em concepção processo, objeto e ação; além disso, conseguiram correlacionar noções de combinação linear, dependência linear e dimensão vetorial.
MATOS, Silvana. **Licenciatura em Matemática a distância: compreensões a partir de um estudo sobre o Ensino de Vetores.** 2012.	Ampliar a compreensão sobre a Licenciatura em Matemática a distância a partir de um estudo sobre o ensino de Vetores.	Observou dificuldades no uso de tecnologias EAD e a pouco interação entre os participantes e tutores; e em questões operacionais, como escrever fórmulas, e didáticas e "transposição" do ensino presencial para à distância.
RONCAGLIO, Viviane. **Registros de Representação Semiótica – atividades de conversão e tratamento em vetores e suas operações a partir da argumentação de estudantes de engenharia.** 2015.	Analisar os registros produzidos por estudantes de Engenharia em atividades de tratamento e conversão através de conceitos trabalhados na disciplina de Geometria Analítica e Vetores.	Concluiu que os estudantes de engenharia apresentam dificuldades em realizar conversões quando um dos registros envolvidos é o figural, falta de entendimento em relação aos elementos de formação do, principalmente em relação ao sentido e direção do vetor, falta de compreensão em relação ao sentido da operação e dificuldade em aplicar o conceito de vetor em situações que exigem a mobilização das propriedades operatórias.
BATTISTI, Isabel K. **Mediações na significação do conceito vetor com tratamento da geometria analítica em aulas de matemática**. 2016.	Analisar, com e a partir de ações de uma disciplina de cursos de Engenharia, a estruturação/articulação/proposição da mediação na constituição de processos que visam à significação do conceito vetor e operações de vetores pelo acadêmico.	Observou que os elementos constitutivos da mediação, tais como, vetor e operações com vetores, que se estabelece em aulas de Matemática fazem-se a partir de ações intencionais do professor e mostram-se na organização do ensino à medida que o acadêmico se coloca em atividade de aprendizagem, além disso, defende a abordagem geométrica do conceito de vetor, o uso de software e a dialética entre os planos intermental e intramental, a organização e a intencionalidade do ensino.
MARTINS, Antônio. **Geometria Analítica e Vetores: uma análise com estudantes do ensino superior.** 2018	Analisar o conhecimento de estudantes do Ensino Superior sobre Geometria Analítica e Vetores.	Os alunos apresentaram definições próprias e ao mesmo tempo embasadas na teoria. Verificou-se que conceitos matemáticos vistos no Ensino Médio são suscitados com frequência para fundamentar conceitos de vetores.

APÊNDICE H

RESULTADO TESTE DE FISCHER - CONSULTA AOS DOCENTES – OBTIDOS VIA *JAMOVI*

/ Teste de Fischer – “Formação Acadêmica” X” Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA”

Formação Acadêmica	**Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA**				**Totais**
	Sim		**Não**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Licenciatura em Matemática	10	15	15	20	**25**
Licenciatura em Física	12	7,8	1	5,2	**13**
Outros	5	4,2	2	2,8	**7**
Totais	**27**	**-**	**18**	**-**	**45**
p-valor obtido = 0,003					
gl = 1, V-*Cramer* = 0,476; efeito médio					
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito médio de acordo com **V-Cramer**					

“

Teste de Fischer –“ Faixa Etária” x “Tempo de Serviço

Faixa Etária (anos)	**Tempo de Serviço (anos)**														
	1 - 5		**6 -10**		**11 – 15**		**16 - 20**		**21 - 25**		**26 – 30**		**31-35**		**Total**
	Val. Abs	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	
26-30	1	0,07	0	0,38	1	0,51	0	0,37	0	0,22	0	0,07	0	0,29	**2**
31-35	0	0,18	5	0,96	0	1,29	0	0,92	0	0,55	0	0,18	0	0,74	**5**
36-40	0	0,22	0	0,96	3	1,55	1	1,11	1	0,66	0	0,22	0	0,88	**6**
41-45	0	0,29	0	1,53	3	2,07	4	1,48	1	0,88	0	0,29	0	1,18	**8**
46-50	0	0,03	0	0,19	0	0,18	0	0,18	0	0,11	1	0,03	0	0,14	**1**
51-55	0	0,11	0	0,57	0	0,55	0	0,55	1	0,33	0	0,11	2	0,44	**3**
56-60	0	0,03	0	0,19	0	0,25	0	0,18	0	0,11	0	0,03	1	0,14	**1**
Mais de 65 anos	0	0,03	0	0,19	0	0,25	0	0,18	0	0,11	0	0,03	1	0,14	**1**
Totais	**1**	**-**	**6**	**-**	**7**	**-**	**5**	**-**	**3**	**-**	**1**	**-**	**4**	**-**	**27**
p-valor obtido = <.001															
gl = 5, V-*Cramer* = 0,740; efeito grande															
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito grande de acordo com **V-Cramer**															

Teste de Fischer – “Ano de Conclusão da Graduação” x ”Tempo de Serviço”

Ano Conclusão	Tempo de Serviço (anos)														
	1 - 5		6 -10		11 – 15		16 - 20		21 - 25		26 - 30		31-35		Totais
	Val Abs	Val Esp	Val Abs	Val Esp.	Val. Abs	Val Esp.	Val. Abs	Val Esp.	Val. Abs	Val Esp.	Val. Abs	Val Esp.	Val. Abs.	Val Esp.	
Anterior à 1990	0	0,11	0	0,66	0	0,77	0	0,55	0	0,33	0	0,03	3	0,44	**3**
1990-1999	0	0,14	0	0,88	0	1,03	0	0,74	2	0,44	1	0,14	1	0,59	**4**
2000-2010	0	0,51	2	3,11	6	3,63	5	2,59	1	1,55	1	0,19	2	2,07	**14**
2011-2019	1	0,22	4	1,33	1	1,55	0	1,11	0	0,66	0	0,69	0	0,88	**6**
Totais	**1**	**--**	**6**	**-**	**7**	**-**	**5**	**-**	**3**	**-**	**1**	**-**	**4**	**-**	**27**
p-valor obtido = <.001															
gl = 3, V-*Cramer* = 0,780; efeito grande															
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito grande de acordo com **V-Cramer**															

Teste de Fischer – “Campus de Lotação” x “Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA”

Campus de Lotação	Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA				Totais
	Sim		Não		
	Val. Abs.	Val.Esp.	Val. Abs.	Val.Esp.	
Abaetetuba	2	1,2	0	0,8	**2**
Altamira	0	1,2	2	0,8	**2**
Ananindeua	2	1,2	0	0,8	**2**
Belém	9	6	1	4	**10**
Bragança	2	1,2	0	0,8	**2**
Breves	1	1,2	1	0,8	**2**
Cametá	0	0,6	1	0,4	**1**
Castanhal	0	1,8	3	1,2	**3**
Conceição do Araguaia	0	0,6	1	0,4	**1**
Itaituba	1	0,6	0	0,4	**1**
Marabá Rural	1	1,2	1	0,8	**2**
Paragominas	1	2,4	3	1,6	**4**
Parauapebas	2	1,2	0	0,8	**2**
Óbidos	1	1,8	2	1,2	**3**
Santarém	2	2,4	2	1,6	**4**
Tucuruí	3	1,8	0	1,2	**3**
Vigia	0	0,6	1	‘0,4	**1**
Totais	**27**	**-**	**18**	**-**	**45**
p-valor obtido = 0,007					
gl = 1, V-*Cramer* = 0,775; efeito grande					
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito grande de acordo com **V-Cramer**					

Teste de Fischer – “Ensino de vetores por modalidade de Ensino” x “Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA”

Ensino de Vetores por modalidade de ensino	**Ministrou o conteúdo de vetores no IFPA**				**Totais**
	Sim		**Não**		
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Nunca ministrei o conteúdo de vetores no IFPA	0	10,8	18	7,2	**18**
Integrado	9	5,4	0	3,6	**9**
Integrado e Superior	9	5,4	0	3,6	**9**
Integrado e Subsequente	1	0,6	0	0,4	**1**
Superior	8	4,8	0	3,2	**8**
Totais	**27**	**-**	**18**	**-**	**45**
p-valor obtido = <.001					
gl = 1, V-*Cramer* = 1; efeito grande					
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**					

Teste de Fischer – “Nível de Interesse” x “Satisfação com o Nível de aprendizado” com o conteúdo de vetores

Nível de Interesse	**Satisfação com o Nível de Aprendizado**								
	Ótimo		**Satisfatório**		**Insatisfatório**		**Regular**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Interessado	9	6,29	4	5,03	0	0,62	4	5,03	**17**
Muito Interessado	1	0,37	0	0,29	0	003	0	0,29	**1**
Pouco Interessado	0	2,96	4	2,37	0	0,29	4	2,37	**8**
Sem Interesse	0	0,37	0	0,29	1	0,03	0	0,29	**1**
Totais	**10**	**-**	**8**	**-**	**1**	**-**	**8**	**-**	**27**
p-valor obtido = 0,006									
gl = 3, V-*Cramer* = 0,661; efeito grande									
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**									

Teste de Fischer – “Uso de exemplos contextualizados” x “Satisfação com o Nível de aprendizado” com o conteúdo de vetores

Utilização de exemplos contextualizados	**Satisfação com o Nível de Aprendizado**								
	Ótimo		**Satisfatório**		**Insatisfatório**		**Regular**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	10	7,78	5	6,22	0	0,778	2	1,78	**21**
Não	0	2,22	3	1,78	1	0,222	6	6,22	**6**
Totais	**10**	**-**	**8**	**-**	**1**	**-**	**8**	**-**	**27**
p-valor obtido = 0,028									
gl = 1, V-*Cramer* = 0,526; efeito grande									
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com efeito grande de acordo com **V-Cramer**									

APÊNDICE I

RESULTADO TESTE DE FISCHER - CONSULTA AOS DISCENTES – OBTIDOS VIA *JAMOVI*

Resultado do Teste de Fischer entre as variáveis “Gostar de Cálculo Vetorial ou assunto com Vetores” e “Dificuldades para aprender Cálculo Vetorial”

Dificuldades para aprender Cálculo Vetorial	**Gostar de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores**								
	Gosto Muito		**Gosto Muito Pouco**		**Gosto Pouco**		**Não Gosto**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Muito	0	0,8	1	0,8	3	3,8	2	0,6	**6**
Muito Pouco	1	0,4	0	0,4	2	1,9	0	0,3	**3**
Um Pouco	2	2,13	3	2,13	11	2,13	0	1,6	**16**
Não	1	0,66	0	0,66	3	0,66	1	0,5	**5**
Totais	**4**		**4**		**19**		**3**		**30**
p-valor obtido = 0,334									
gl = 3, V-*Cramer* = -									
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa entre as variáveis.									

Resultado do Teste de Fischer entre as variáveis “Nível de Aprendizado” e “Nível de Interesse” sobre o assunto Vetores

Nível de aprendizado sobre o assunto vetores	**Nível de interesse sobre o assunto vetores**						
	Interessado		**Pouco interessado**		**Sem interesse**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Ótimo	2	0,93	0	0,86	0	0,2	**2**
Satisfatório	4	4,66	5	4,33	1	1	**10**
Regular	6	6,06	5	5,63	2	1,3	**13**
Insatisfatório	2	2,33	3	2,16	0	0,5	**5**
Totais	**14**	**-**	**13**	**-**	**3**	**-**	**30**
p-valor obtido = 0,440							
gl = 4, **V-*Cramer*** = -							
Conclusão: não há associação estatisticamente significativa entre as variáveis.							

Resultado do Teste de Fischer entre as variáveis “Nível de Interesse no assunto vetores” x “Gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores”

Nível de Interesse no assunto vetores	**Gosta de Cálculo Vetorial ou assunto com vetores**								
	Gosta muito		**Gosta pouco**		**Gosta muito pouco**		**Não gosta**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Interessado	4	1,86	10	8,87	0	1,86	0	1,4	**14**
Pouco Interessado	0	1,73	9	8,23	3	1,73	1	1,3	**13**
Sem Interesse	0	0,4	0	1,9	1	0,4	2	0,3	**3**
Totais	**4**	**-**	**19**	**-**	**4**	**-**	**3**	**-**	**30**
p-valor obtido = <.001									
gl = 2, V-*Cramer* = 0,598; efeito grande									
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**									

Resultado do Teste de Fischer entre as variáveis “Professor usava questões contextualizadas para o ensino de vetores” x “Conseguiria resolver questões contextualizadas”

Professor usava questões contextualizadas	**Conseguiria resolver questões contextualizadas**						
	Sim		**Não**		**Talvez**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	10	5,87	1	5,87	5	4,27	**10**
Não	1	3,67	8	3,67	1	2,67	**16**
Às vezes	0	1,47	2	1,47	2	1,07	**4**
Totais	**11**		**11**		**4**		**30**
p-valor obtido = <.001							
gl = 2, V-*Cramer* = 0,542; efeito grande							
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**							

Resultado do Teste de Fischer entre as variáveis “Professor Utilizava questões contextualizadas para o ensino de vetores” x “Satisfação com a metodologia utilizada”

Professor usava questões contextualizadas	**Satisfação com a metodologia utilizada**						
	Sim		**Não**		**Em parte**		**Totais**
	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	Valor Absoluto	Valor Esperado	
Sim	13	8,5	2	5,87	1	1,6	**16**
Não	2	5,53	6	3,67	2	1	**10**
Às vezes	1	2,13	3	1,47	0	0,4	**4**
Totais	**16**	**-**	**11**	**-**	**3**	**-**	**30**
p-valor obtido = 0,006							
gl = 2, V-*Cramer* = 0,452; efeito grande							
Conclusão: há associação estatisticamente significativa com grande efeito de acordo com **V-Cramer**							

APÊNDICE J

QUESTIONÁRIO ACADÊMICO E SOCIOECONÔMICO - EXPERIMENTAÇÃO

Prezado(a) estudante(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1.Número na chamada: _____

2. Idade: _____ anos 1. Série: _____

3. Sexo: ☐Masculino ☐Feminino

4. Você se considera: ☐branco(a) ☐Pardo(a) ☐Preto(a) ☐Amarelo(a) ☐Indígena

5. Qual o seu estado civil: ☐Solteiro ☐Casado/mora com companheiro

☐separado/divorciado ☐Viúvo

6. Onde e como você mora atualmente?

☐Em casa ou apartamento, com minha família. ☐Em casa ou apartamento, sozinho(a).

☐Em quarto ou cômodo alugado, sozinho(a).

☐Em habitação coletiva: hotel, hospedaria, quartel, pensionato, república etc. ☐Outra situação

7. Quem mora com você?

☐ Moro sozinho(a) ☐Pai ☐Mãe ☐Esposa / marido / companheiro(a)

☐Filhos ☐Irmãos ☐Outros parentes ☐Amigos ou colegas

8. Quantas pessoas moram em sua casa? _____

9. Você tem filhos? ☐Sim. Quantos? _____ ☐Não

10. Somando a sua renda com a das pessoas que moram com você, quanto é, aproximadamente, a renda familiar? (Considere a renda de todos que moram na sua casa.)

☐Até 1 salário mínimo (até R$ 1320,00 inclusive).

☐De 1 a 2 salários mínimos (de R$ 1.320,00 até R$ 2.640,00 inclusive).

☐De 2 a 5 salários mínimos (de R$ 2.640,00 até R$ 6.6000,00 inclusive).

☐De 5 a 10 salários mínimos (de R$ 6.600,00 até R$ 13.200,00 inclusive).

☐De 10 a 30 salários mínimos (de R$ 13.200,00 até R$ 39.600,00 inclusive).

☐De 30 a 50 salários mínimos (de R$ 39.600,00 até R$ 66.000,00 inclusive).

☐Mais de 50 salários mínimos (mais de R$ 66.000,00).

☐Nenhuma renda.

11. Qual a escolaridade de seu Responsável Masculino (Até que nível estudou)?

☐Nenhum ☐Fundamental incompleto ☐Fundamental completo ☐Ensino Médio incompleto

☐Ensino Médio completo ☐Ensino Superior completo ☐Pós-Graduação completo

12. Qual a escolaridade de seu Responsável Feminino (Até que nível estudou)? (Marque apenas uma opção)

☐Nenhum ☐Fundamental incompleto ☐Fundamental completo ☐Ensino Médio incompleto

☐Ensino Médio completo ☐Ensino Superior completo ☐Pós-Graduação completo

13.Qual a profissão ou ocupação de seu responsável masculino? _____

14.Qual a profissão ou ocupação de seu responsável feminino? _____

15. Você trabalha atualmente ? Qual profissão? _____

16. Qual o seu nível de escolaridade? _____

17. Em qual escola concluiu o Ensino Médio?

☐Municipal ☐Estadual ☐Federal ☐Particular

18. Você tem formação em algum curso técnico ou profissionalizante? Qual? _____

19. Você considera que seus conhecimentos adquiridos no ensino médio:

☐Foram adequados ao que o mercado de trabalho solicita

☐Tiveram relação com a profissão que você escolheu / que você exerce?

☐Foram bem desenvolvidos, com aulas práticas, laboratórios, etc.

☐Proporcionaram cultura e conhecimento?

20. Que nota você daria para a formação que você obteve no ensino médio? (Atenção: 0 é a pior nota e 10 é a melhor nota.) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Não sei

21. Você já fez algum curso superior anteriormente? Qual? _____
22. Porque você escolheu cursar Engenharia? _____
23. O que ajudou você a tomar essa decisão sobre sua profissão?
a)Meus pais: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
b) A escola: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
c)Meus(Minhas) amigos(as): ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
d) Informações gerais, revistas, jornais, TV: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
e) Meu trabalho: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
f) Estímulo financeiro: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
g) Facilidade de obter emprego: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
h) Eu me identifico com essa profissão: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
i) Quero ajudar minha comunidade indígena: ☐Ajudou muito ☐Ajudou pouco ☐Não ajudou
24. Você já esteve em dependência em Matemática? ☐Sim. Quantas vezes?_____ ☐Não
25. Com que frequência você costuma estudar Matemática fora da escola?
☐Todos os dias ☐Somente nos finais de semana
☐Somente no período de prova ☐Somente na véspera da prova. ☐Nunca
26. Você gosta de Matemática? ☐Não gosto ☐Um Pouco ☐Sim. Gosto ☐Sm. Gosto bastante
27. Quem mais lhe ajuda ou ajudava nas tarefas de Matemática? (Marque mais de uma opção, se necessário)
☐Professor particular ☐Responsável Masculino ☐Responsável Feminino ☐Pessoa da família
☐Amigo ☐Colega de escola ☐Namorado (a) ☐Ninguém ☐Outro:_____
28. Você consegue compreender as explicações dadas nas aulas de Matemática?
☐Sempre ☐Quase sempre ☐Poucas vezes ☐Nunca compreendo
29. Quais as principais formas de avaliação o (a) professor (a) de Matemática costuma solicitar a você? (Marque mais de uma opção, se necessário)
☐Prova oral ☐Prova escrita ☐Pesquisa ☐Apresentação de seminário
☐Trabalho extraclasse. ☐Prova escrita em grupo. ☐Produções no caderno
30. Como você costuma se sentir quando está diante de uma avaliação em Matemática?
☐Entusiasmado ☐Tranquilo ☐Nervoso ☐Com Medo ☐Preocupado
☐Com Raiva ☐Sinto Calafrios ☐Outros:_____
31. A maioria das aulas de Matemática no Ensino fundamental começaram:
☐pela definição seguida de exemplos e exercícios.
☐com uma situação problema para depois introduzir o assunto.
☐com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
☐com jogos para depois sistematizar os conceitos.
☐utilizando ferramentas tecnológicas para resolver problemas.
☐Outra metodologia:_____
32. Para fixar o conteúdo estudado de Matemática, o seu professor (a):
☐Apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos
☐Apresentava jogos envolvendo o assunto
☐Mandava resolver os exercícios do livro didático
☐Não propunha questões de fixação
☐Mandava que você procurasse questões sobre o assunto para resolver.
☐Propunha a resolução de questões por meio de softwares
33. O que o motivou a participar desse minicurso?
☐Aprendizado ☐Certificado ☐Participar da pesquisa
☐Proposta do curso ☐Curiosidade ☐Influência de colegas
☐Aproveitar o tempo livre ☐Interesse em vetores geométricos
☐Interesse em Matemática ☐Outro:_____
34. Em uma escala de 0 a 10, qual sua expectativa em relação a esse minicurso? (Atenção: 0 é a pior nota e 10 é a melhor nota.) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Não sei

APÊNDICE K

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 01
Questões para casa – Atividade 01
ATIVDADE 02
Questões para casa – Atividade 02
ATIVIDADE 03
ATIVIDADE 04
Questões de Aprofundamento – Atividades de 02 à 04
Questões para casa – Atividades de 02 à 04
ATIVIDADE 05
Questões de Aprofundamento – Atividade 05
Questões para casa – Atividade 05
ATIVIDADE 06
ATIVIDADE 07
Questões para casa – Atividade 06 e 07
Questões de Aprofundamento – Atividades 06 e 07
ATIVIDADE 08
ATIVIDADE 09
ATIVIDADE 10
Questões para casa – Atividades de 08 à 10
Questões de Aprofundamento – Atividades de 08 à 10
ATIVIDADE 11
Questões de Aprofundamento – Atividade 11
Questões para casa – Atividade 11
ATIVIDADE 12
Questões de Aprofundamento – Atividade 12
Questões para casa – Atividade 12
ATIVIDADE 13
Questões de Aprofundamento – Atividade 13
Questões para casa – Atividade 13
Questões de Revisão
Quiz

ATIVIDADE 01

TÍTULO: Tipos de Grandezas
OBJETIVO: diferenciar e caracterizar grandezas
MATERIAL: caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO: Leia atentamente o texto “Minha rotina diária” e o preencha a tabela com as informações solicitadas

Minha Rotina Diária

O alarme toca estridente; são 6 horas da manhã. O **tempo** é mesmo implacável, mas começou um novo dia e é hora de estudar. Em um gesto decidido, deixo a cama, dirijo-me ao banheiro e acendo a luz. Uma lâmpada de **potência** de 110 Watts brilha forte no teto chegando quase a ofuscar. Ora, isso não está de acordo com a proposta da família, que é de economizar **energia** já que uma lâmpada com essa potência consome em torno de 16500 Joules se ficar acessa durante 5 horas/dia em 30 dias. Todos estão dizendo que o valor cobrado na conta de luz tem andado pelas alturas…

Então, abro a torneira da pia para iniciar minha higiene matinal e começo a escovar os dentes. Noto então que a água jorra em grande **vazão** de 15 litros/minuto, o que exige uma consciente intervenção. Afinal, há também que se economizar água! Em razão da **força** de 1500 Newtons de uma rajada de vento em direção ao espelho do banheiro no sentindo oposto ao de entrada do quarto, uma porta bate violentamente, quebrando o silêncio próprio da hora. Vejo-me refletido no espelho de **área** de 1500 cm² embaçado pelo vapor ascendente vindo da água quente do chuveiro já aberto…

No rápido café da manhã, a minha primeira refeição, como um bom pedaço de pão com o leite escurecido por 100 gramas de **massa** de chocolate em pó. Desço pelo elevador do prédio em direção ao térreo e leio aquela pequena placa que adverte sobre o **peso** máximo suportado pelo equipamento, 2900 Newtons ...

Já na calçada, noto que o dia será quente, o que é confirmado pela **temperatura** indicada em um painel eletrônico: 24 Celsius. E eis que chega o esperado ônibus de sempre. O tráfego está intenso, o que impõe ao veículo um lento **deslocamento** de 10 quilômetros até a escola, pelas ruas do bairro no sentido Ananindeua/Belém. Visando realizar o percurso com a **velocidade** prevista de 40 Km/h o motorista aproveita para arrancar com grande **aceleração**, em torno de 10 m/s² nos trechos livres…

No ônibus, estou sentado e tenho sobre as pernas uma mochila cheia de livros, cadernos e outros objetos, o que incomoda um pouco por exercer nas superfícies de apoio uma intensa **pressão** em torno de 100 Pascal. Ligeiramente atrasado, finalmente chego ao colégio e percorro apressadamente os 10 metros de **comprimento** do grande corredor principal até a sala de aula.

Essa rotina fictícia destaca algumas grandezas físicas muito ligadas ao nosso dia a dia. Marque com um “X”, as características observadas em cada uma das grandezas destacadas no texto:

Grandeza	Unidade de medida	Medida (Valor)	Direção	Sentido
Tempo				
Potência				
Energia				
Vazão				
Força				
Área				
Massa				
Peso				
Temperatura				
Deslocamento				
Velocidade				
Aceleração				
Pressão				
Comprimento				

OBSERVAÇÕES:

Questões para casa da Atividade 01

1. De acordo com situação apresentada, identifique e classifique (escalar ou vetorial) a grandeza.

SITUAÇÕES	GRANDEZA	CLASSIFICAÇÃO
a) O carro do seu amigo está indo com uma velocidade de 50km/h em direção ao shopping Castanheira sentido Ananindeua/Belém.		
b) O menino aplicou uma força de 1N na caixa que se movimentou em direção a cadeira no sentido de quem entra na sala.		
c) O atleta de salto em distância deslocou-se 3m em direção ao ponto pré-determinado sentido pista/ponto para iniciar o salto.		
d) Um campo elétrico de 0,5V/m foi aplicado as cargas positivas e fez com que elas se movimentam-se em direção as cargas negativas, sentido positivo/negativo.		
e) O rapaz precisa estar no local marcado às 16hs.		
f) A temperatura da criança está 37,3ºC.		
g) Segundo o Censo de 2010, a cidade de Belém possui 1.393.399 de habitantes.		
h) A cidade em linha reta entre a cidade de Belém e a cidade de Ananindeua é 17,48 km.		

2. Julgue as Alternativas abaixo como verdadeira (V) ou falsa (F), justificando as falsas.

a) ( ) As grandezas escalares ficam perfeitamente definidas, mediante um valor numérico acompanhado da respectiva unidade de medida.

b) ( ) As vetoriais, além de exigirem na sua definição um valor numérico, denominado módulo ou intensidade, acompanhado da respectiva unidade de medida, requerem, ainda, uma direção e um sentido.

c) ( ) Comprimento, área, volume, tempo e massa são grandezas escalares.

d) ( ) Deslocamento, velocidade, aceleração e força são grandezas vetoriais.

3. (SADIKU, 2004 – Adaptada) Qual das situações a seguir não representaria uma grandeza escalar? Justifique sua resposta.

a) Deslocamento de um mosquito no espaço.

b) A luminosidade de uma sala de estar c)

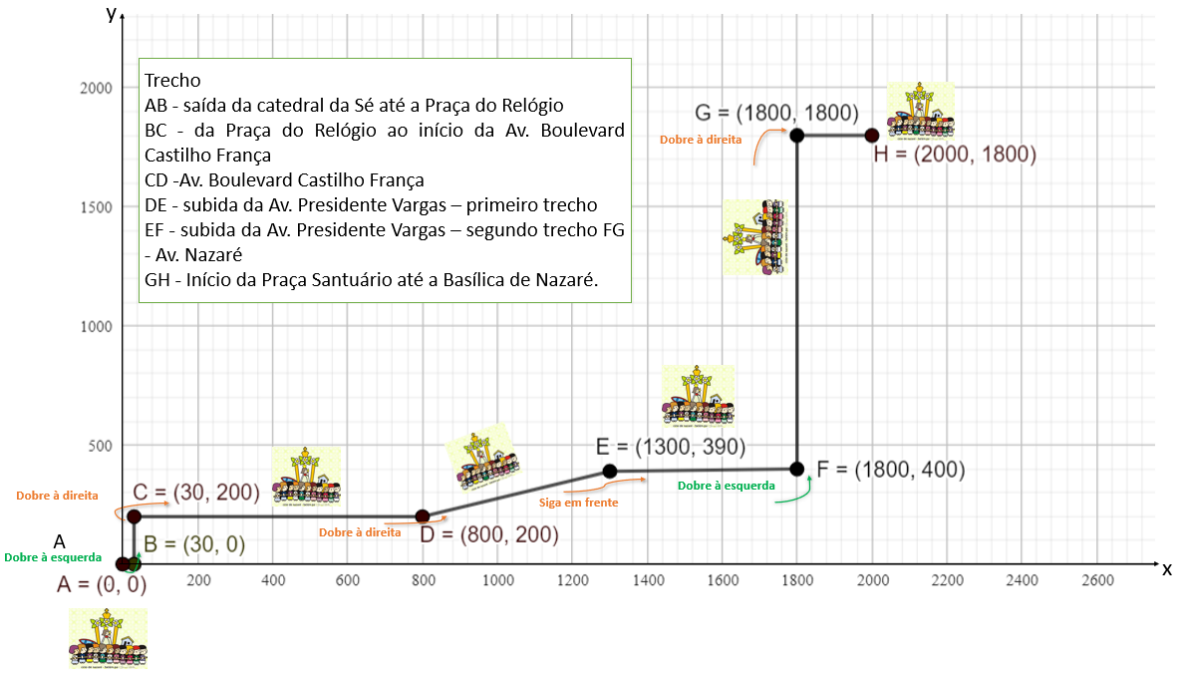
c) A distribuição de temperatura de uma sala de aula

d) A pressão atmosférica em uma dada região

e) A umidade do ar em uma cidade

ATIVIDADE 02

TÍTULO: Deslocamento
OBJETIVO: conceituar deslocamento
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis, calculadora.
PROCEDIMENTO:
Leia o texto abaixo.
No Círio de Nazaré o percurso da trasladação é realizado em direção à Catedral Metropolitana da Sé, sentido Basílica/Sé; no Círio o percurso é feito de forma inversa. Para facilitar a visualização, o percurso foi ilustrado no plano cartesiano x-y por trechos conforme a figura. O ponto A representa a Catedral da Sé e o H, a Basílica de Nazaré, conversões à esquerda são as variações ao longo do eixo y, e à direita do eixo x, os demais trechos são especificados na legenda.

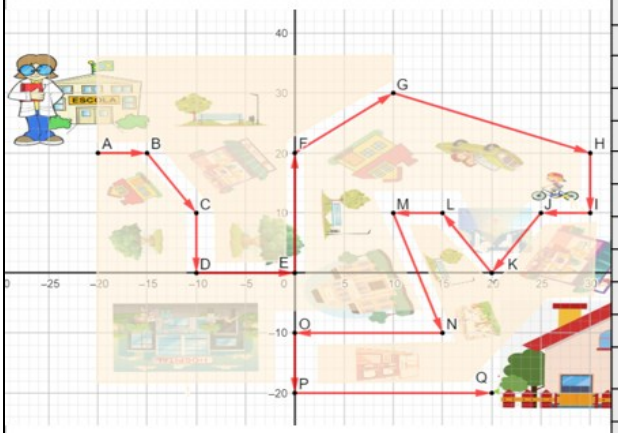


Preencha o quadro abaixo para obter as componentes do deslocamento da berlinda em cada trecho e percurso da trasladação e do círio.

PERCURSO TRASLADAÇÃO				PERCURSO CÍRIO			
Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)	Trecho	Deslocamento Horizontal (eixo x)	Deslocamento Vertical (eixo y)	COMPONENTES DOS DESLOCAMENTOS (eixo x, eixo y)
AB	+ 30	Não possui	(30, 0)	BA	- 30	Não possui	(-30,0)
BC				CB			
CD				DC			
DE				ED			
EF				FE			
FG				GF			
GH				HG			

OBSERVAÇÕES:

Questões para cada da Atividade 02

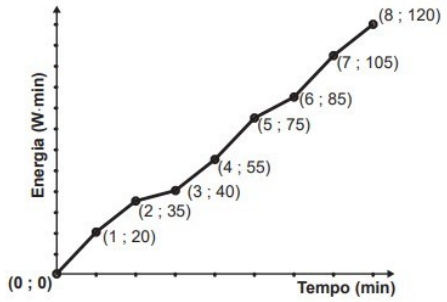


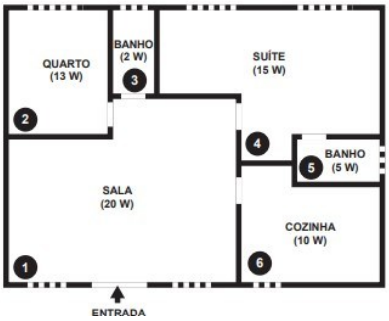
TRECHO	DESLOCAMENTO
$\overrightarrow{AB}$	
$\overrightarrow{BC}$	
$\overrightarrow{CD}$	
$\overrightarrow{DE}$	
$\overrightarrow{EF}$	
$\overrightarrow{FG}$	
$\overrightarrow{GH}$	
$\overrightarrow{HI}$	
$\overrightarrow{IJ}$	
$\overrightarrow{JK}$	
$\overrightarrow{KL}$	
$\overrightarrow{LM}$	
$\overrightarrow{MN}$	
$\overrightarrow{NO}$	
$\overrightarrow{OP}$	
$\overrightarrow{PQ}$	

01. Faça o que se pede, de acordo com a figura.
Complete a tabela com o deslocamento realizado em cada trecho por João da Escola Ponto A) até a sua casa (Ponto Q).

Qual o deslocamento total de João do ponto A até o ponto Q ?

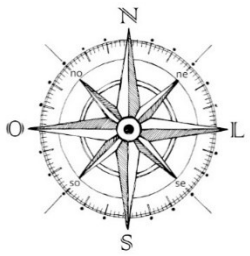
02. Nos seis cômodos de uma casa há sensores de presença posicionados de forma que a luz de cada cômodo acende assim que uma pessoa nele adentra, e apaga assim que a pessoa se retira desse cômodo. Suponha que o acendimento e o desligamento sejam instantâneos. O morador dessa casa visitou alguns desses cômodos, ficando exatamente um minuto em cada um deles. O gráfico descreve o consumo acumulado de energia, em watt × minuto, em função do tempo t, em minuto, das lâmpadas de LED dessa casa, enquanto a figura apresenta a planta baixa da casa, na qual os cômodos estão numerados de 1 a 6, com as potências das respectivas lâmpadas indicadas.





Qual a sequência de deslocamentos pelos cômodos conforme o consumo de energia apresentado no gráfico?

03. Uma pessoa sai para dar um passeio pela cidade, fazendo o seguinte percurso: sai de casa e anda 2 quarteirões para o Norte; dobra à esquerda andando mais 2 quarteirões para Oeste, virando, a seguir, novamente à esquerda e andando mais dois quarteirões para o Sul. Sabendo que cada quarteirão mede 100m, determine o deslocamento da pessoa. Dica: utilize a rosa dos ventos ao lado como guia.



ATIVIDADE 03

TÍTULO: Vetor
OBJETIVO: definir vetor
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis, régua.
PROCEDIMENTO:

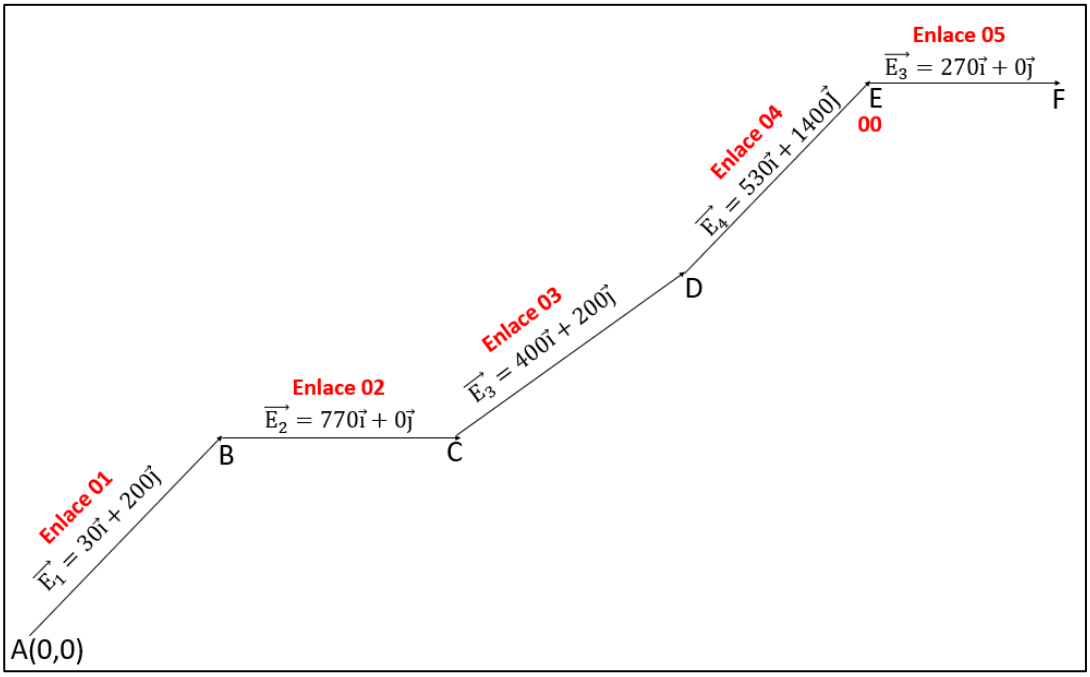
1. O gráfico representa grupos de pares de pontos distintos por quadrante e com cores distintas por quadrante. Determine as componentes dos seguintes deslocamentos: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{IJ}$, $\overline{KL}$, $\overline{MN}$, $\overline{OP}$, $\overline{QR}$, $\overline{ST}$, $\overline{UV}$, $\overline{WZ}$.

2. A partir do que foi observado no gráfico, responda a seguinte questão: É possível que pares de pontos distintos do plano representem o mesmo deslocamento?

ATIVIDADE 04

TÍTULO: Coordenadas de um ponto
OBJETIVO: encontrar as coordenadas de um ponto terminal a partir de um vetor
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

1. Leia o texto abaixo
Uma das formas de fazer uma transmissão de telecomunicações é por meio de enlaces (links) de comunicação ponto-a-ponto utilizando antenas. Assim, para definir a disposição das antenas, você recebeu um mapa com a disposição dos enlaces e com o vetor correspondente para cada enlace; o Enlace 01 tem a origem como ponto de partida. A figura mostra a disposição dos enlaces e os pontos associados.



Determine as componentes do ponto terminal de cada um dos enlaces, quais sejam, ponto: B, C, D, E, F.

2. Generalize uma fórmula para obtenção do ponto terminal, $B(x_f, y_f)$, dado o vetor $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e ponto $A(x_i, y_i)$.

Questões de Aprofundamento – Atividades de 02 à 04

1. Duas cargas idênticas e de sinais contrários estão situadas nos pontos P_1 e P_2, determine para cada uma das questões abaixo o vetor distância $\overrightarrow{P_1P_2}$ entre as cargas. Faça o esboço da localização das cargas e do vetor distância no plano cartesiano.
a) P1(3,5); P2(4,8) b) P1(0,0); P2(-5,3) c) P1(7,3); P2(9,5)
d) P1(4,1,-3); P2(9,1,5) e) P1(5,10,15); P2(7,12,8)

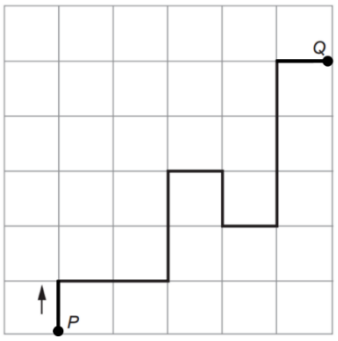
2. Qual a direção e o sentido do vetor distância $\overrightarrow{P_1P_2}$ em cada um dos casos da questão anterior?
a) P1(3,5); P2(4,8) b) P1(0,0); P2(-5,3) c) P1(7,3); P2(9,5)
d) P1(4,1,-3); P2(9,1,5) e) P1(5,10,15); P2(7,12,8)

3. O que aconteceria com os vetores da questão anterior se o deslocamento fosse de P_2 a P_1?

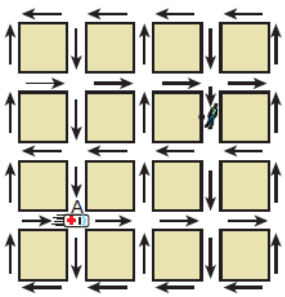
4. Uma carga Q_1 está posicionada em $P_{Q1}(1, -2)$ sendo que $\overrightarrow{d_{12}}\ (3, -2)$ representa o vetor distância entre Q_1 e Q_2. Determine a posição de Q_2.

5. Uma carga Q_1 está posicionada em P_{Q1} e outra carga idêntica, Q_2, está localizada em $P_{Q2}(5, 0, -1)$, sendo $\overrightarrow{d_{12}}\ (3, 1, 2)$ o vetor distância entre Q_1 e Q_2. Determine a posição de Q_1.

Questões para casa - Atividades de 02 à 04



1. (Enem – 2022 - Adaptada) Uma pessoa precisa se deslocar de automóvel do ponto P para o ponto Q, indicados na figura, na qual as linhas verticais e horizontais simbolizam ruas.
Por causa do sentido de tráfego nessas ruas, o caminho poligonal destacado é a possibilidade mais curta de efetuar esse deslocamento. Para descrevê-lo, deve-se especificar qual o sentido a ser tomado em cada cruzamento de ruas, em relação à direção de deslocamento do automóvel, que se movimentará continuamente. Para isso, empregam-se as letras E, F e D para indicar "vire à esquerda", "siga em frente" e "vire à direita", respectivamente.
a) Qual a sequência de letras que descreve o caminho poligonal destacado?
b) Considerando que cada quadrado tem 10 m de lado e que a horizontal representa o eixo-x e a vertical o eixo-y, qual o vetor que representa o deslocamento realizado pelo automóvel?



2. (DOCA, Ricardo Helou; BISCUOLA, Gualter José; BÔAS, Newton Villas. 2012 – Adaptada) A figura abaixo representa um mapa da cidade de Vectorial que indica o sentido das mãos do tráfego. Cada quadra dessa cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro da outra rua). Uma ambulância localizada em A precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra em B, sem andar na contramão.
Determine o vetor deslocamento $\overrightarrow{\Delta S}$ entre os pontos A e B.

3. Determine o valor de x e y, para que os pares ordenados sejam iguais:
a) (x, 3-y) = (4,7) b) (2+x, y-3) = (-4,7) c) (2x+y,3x-y) = (2,8)

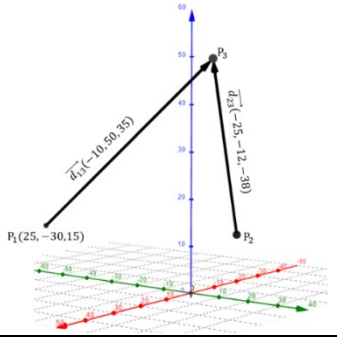
4. Dados pontos A(-1,3), B(2,5) e C(3,-1), calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$.

5. Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto A(-1,3).

6. Determine o ponto inicial P_1 de $\vec{v}_{P_{12}}$, dado o ponto terminal P_2. Faça o esboço no plano cartesiano.
a) $P_2(5, 1, -6)$ de $\vec{v}_{P_{12}}$(3,4,-10) b) $P_2(0, 2, -4)$ de $\vec{v}_{P_{12}}$(3, -6, 9)

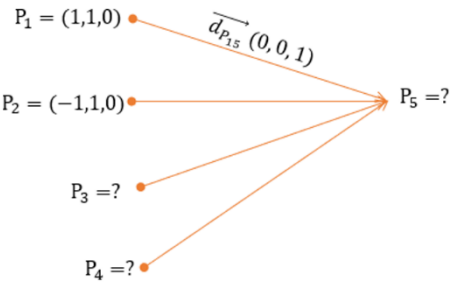
7. Determine o ponto terminal P_2 de $\vec{v}_{P_{12}}$, dado o ponto inicial P_1. Faça o esboço no plano cartesiano.
a) $P_1(2, 4, 1)$ de $\vec{v}_{P_{12}}$(3, 1, 3) b) $P_1(3, 2, 0)$ de $\vec{v}_{P_{12}}$(2, 1, -2)

8. Uma carga de -0,3μC está localizada em P_1 e uma segunda carga de 5μC está localizada em P_2 e provocam um campo Elétrico em P_3, confome ilustrado no plano cartesiano.Encontre as coordenadas dos pontos P_2 e P_3, vetor distância entre as cargas $\vec{d}_{P_{13}}$ e $\vec{d}_{P_{23}}$, respectivamente.



dado o

9. Quatro cargas idênticas localizadas em P_1, P_2, P_3 e P_4 de 3nC causam um campo elétrico em P_5. Dado $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$ e o vetor distância $\vec{d}_{P_{15}}(0,0,1)$ entre P_1 e P_5, $\vec{d}_{P_{35}}(-2,-2,-1)$ entre P_3 e P_5 e $\vec{d}_{P_{45}}(0,-2,-1)$ entre P_4 e P_5; encontre as coordenadas dos pontos P_5, P_3 e P_4 e o vetor distância $\vec{d}_{P_{25}}$ entre P_1 e P_5. Esboce a localização das cargas e do campo (pontos e vetores).

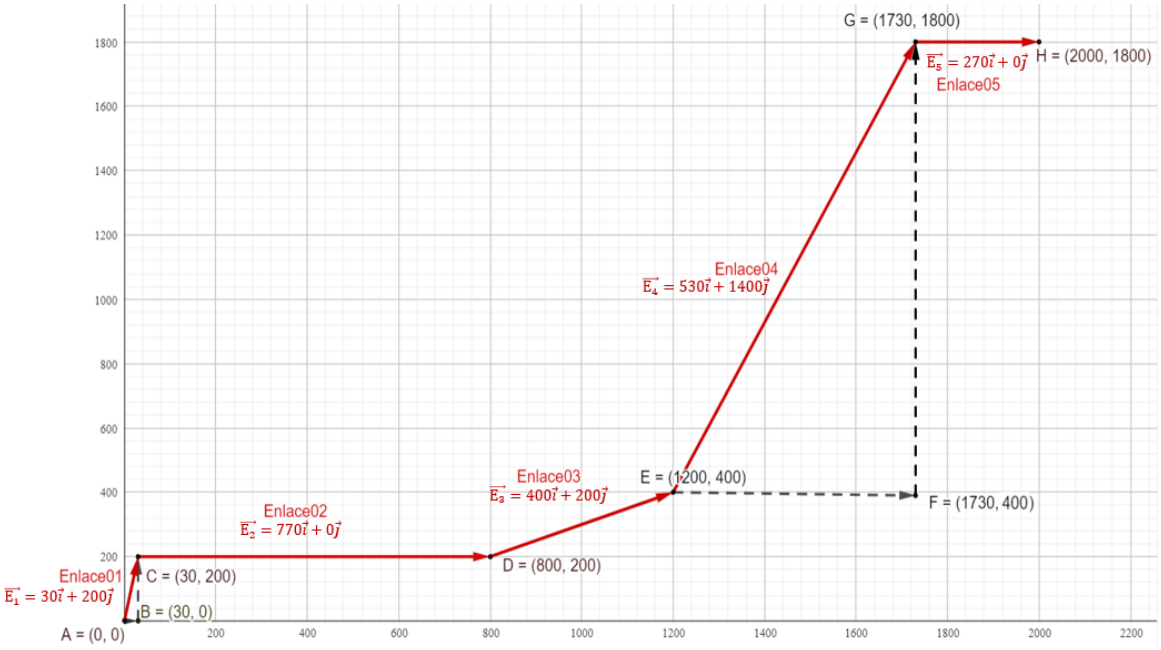


ATIVIDADE 05

TÍTULO: Módulo/Norma do vetor
OBJETIVO: definir módulo/norma do vetor
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis, calculadora.
PROCEDIMENTO:

Leia o texto abaixo:

Um dos parâmetros primordiais para definir a potência de transmissão das antenas que serão utilizadas nos enlaces e a distância entre elas. Tendo conhecimento dos pontos e vetores correspondentes de cada enlace obtidos na atividade 04, encontre a distância entre as antenas para cada um deles. A figura a seguir mostra a disposição dos enlaces com os pontos e vetores correspondentes.



1. Preencha o quadro com as distâncias que as antenas devem estar dispostas para cada enlace

Enlace	Disposição das antenas de transmissão e recepção	Cálculo da distância entre as antenas
01	Pontos A(0,0) e C(30,200) Vetor $\overrightarrow{E_1} = 30\vec{i} + 200\vec{j}$	
02	Pontos C(30,200) e D(800,200) Vetor $\overrightarrow{E_2} = 770\vec{i} + 0\vec{j}$	
03	Pontos D(800,200) e E(1200,400) Vetor $\overrightarrow{E_3} = 400\vec{i} + 200\vec{j}$	
04	Pontos E(1200,400) e G(1730,1800) Vetor $\overrightarrow{E_4} = 530\vec{i} + 1400\vec{j}$	
05	Pontos G(1730,1800) e H(2000,1800) Vetor $\overrightarrow{E_5} = 270\vec{i} + 0\vec{j}$	

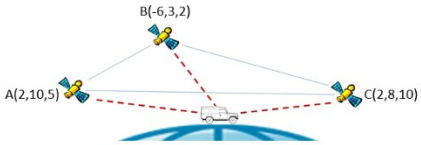
2. Generalize uma fórmula para o cálculo da distância entre as antenas, dado o vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Questões de Aprofundamento – Atividade 05

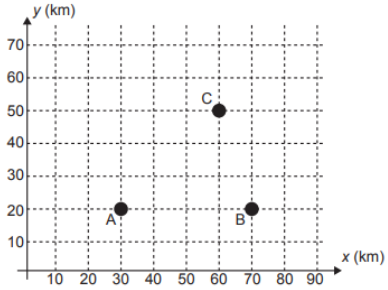
1. A ilustração apresenta a disposição entre as três satélites no espaço:

a) determine a distância entre eles;

b) Identifique a natureza do triângulo formado entre eles e o seu perímetro.



2. (Enem 2013 – Adaptada) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. Determine, em coordenadas, o local adequado para a construção dessa torre.

Questões para casa - Atividade 05

1. Dados os pontos A(4,-2) e B(7,2), calcule a distância entre A e B.

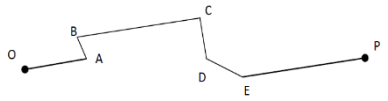
2. Sendo P um ponto do eixo das abscissas, quais são as coordenadas do ponto P, sabendo que sua distância ao ponto Q(9, 8) é igual a 10 unidades?

3. Uma partícula foi lançada no ponto inicial A(4,-3,6) no espaço e tem como ponto final B(6,8,5). Encontre o vetor que representa o deslocamento da partícula e determine seu módulo.

4. Calcule os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo igual a 3.

5. Verifique se o triângulo de vértices A(1, 1), B(2, 3) e C(5, -1) é retângulo. Em caso afirmativo, calcule o seu perímetro.

6.Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são A(-2,1), B(2,4) e C(8,-4).



7. A figura abaixo representa uma simulação do trajeto normal da corrida do Círio de Nazaré. Considerando o ponto Inicial da procissão (ponto O), como a origem dos eixos cartesianos, e o ponto final como P (18, 24), qual a distância vetorial, em unidades de comprimento?

8. Um automóvel desloca-se 120m no sentido oeste-leste, e em seguida, 50m no sentido norte-sul, de acordo com a orientação da rosa dos ventos.

a) Represente esquematicamente esses deslocamentos.

b) Determine o módulo do deslocamento resultante

9. (UFAL-AL) A localização de um lago, em relação a uma caverna pré-histórica, exigia que se caminhasse 200 m numa certa direção e, a seguir, 480 m numa direção perpendicular à primeira. Determine a distância em linha reta da caverna ao lago.

10. Um escoteiro, ao fazer um exercício de marcha com seu pelotão, parte de um ponto P e sofre a seguinte sequência de deslocamentos: I. 800 m para o Norte; II. 300 m para o Oeste; III. 400 m para o Sul. Sabendo que a duração da marcha é de 8 min 20s e que o escoteiro atinge um ponto Q, determine:

a) o módulo do seu deslocamento vetorial de P a Q;

b) o módulo da velocidade vetorial média e da velocidade escalar média de P a Q. (Dê sua resposta em m/s.)

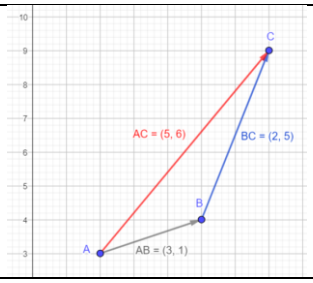
11. Um vetor velocidade é decomposto em dois outros, perpendiculares entre si. Sabendo que o módulo do vetor é 10m/s e que um dos componentes tem módulo igual a 8m/s, determine o módulo do vetor correspondente ao outro componente.

ATIVIDADE 06

TÍTULO: Adição de Vetores
OBJETIVO: conceituar a adição de vetores.
MATERIAL: roteiro de atividades, folha quadriculada, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:
01. De acordo com a situação apresentada responda a questão:
Suponha que uma ave desloca-se de um ninho localizado em A(3,5) até o outro localizado em B(4,7) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{AB}} = (1,2)$.Uma segunda ave parte do ninho localizado em B(4,7) em direção ao ninho em C(10,11) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{BC}} = (6,4)$. Qual o vetor que representaria o deslocamento direto de A até C.

02. Preencha o quadro abaixo de acordo com o que se pede.

Tendo por base o triângulo ao lado, disponha-o no plano cartesiano e preencha os campos com o vetor correspondente e o campo Observação com a relação verificada.

Pontos		Disposição no plano	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
01	A(2,3) B(5,4) C(7,9)		(3,1)	(2, 5)	(5, 6)
02	A(8,5) B(11,7) C(14,15)				
03	A(10,5) B(20,30) C(22,35)				
04	A(9,10) B(19,15) C(20,18)				
05	A(15,20) B(30,40) C(40,55)				
06	A(7,10) B(8,13) C(14,15)				
07	A(6,8) B(10,16) C(18,56)				
08	A(11,20) B(15,22) C(16,30)				
09	A(60,13) B(65,16) C(80,20)				
10	A(4,7) B(9,10) C(18,12)				

Observações:

ATIVIDADE 07

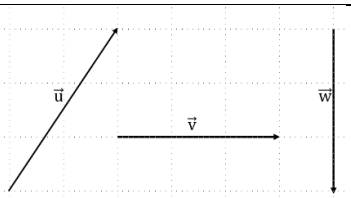
TÍTULO: vetor oposto
OBJETIVO: definir vetor oposto
MATERIAL: roteiro de atividades, calculadora, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:

Considerando a questão anterior, qual o vetor que desloca a ave de A até C e de C até A? Qual o resultado da adição entre esses vetores?

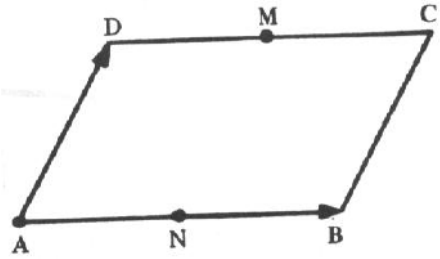
Questão anterior:
Suponha que uma ave desloca-se de um ninho localizado em A(3,5) até o outro localizado em B(4,7) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{AB}} = (1,2)$.Uma segunda ave parte do ninho localizado em B(4,7) em direção ao ninho em C(10,11) com um deslocamento $\overrightarrow{d_{BC}} = (6,4)$. Qual o vetor que representaria o deslocamento direto de A até C ?
Resposta = $\overrightarrow{d_{AC}} = (7,6)$

Questões de Aprofundamento – Atividade 06 e 07

1.Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, efetue as operações:
a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $2\vec{u}$
d) $-3\vec{v}$ e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ f) $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

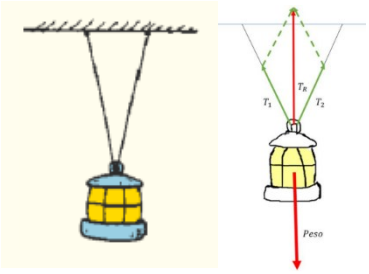


2. O paralelogramo ABCD é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Efetue as operações:
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$ f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

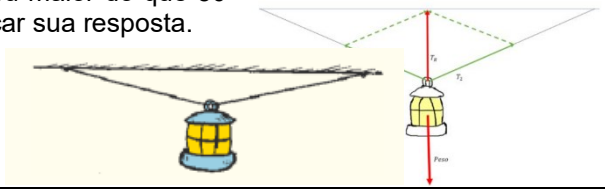


3. Em um plano, temos dois vetores a e b de mesma origem formando um ângulo q. Se os módulos de a e de b são, respectivamente, iguais a 3 u e 4 u, determine o módulo do vetor soma em cada um dos casos seguintes:
a) q = 0°; b) q = 90°; c) q = 180°; d) q = 60° e) q=30º f) q=45º

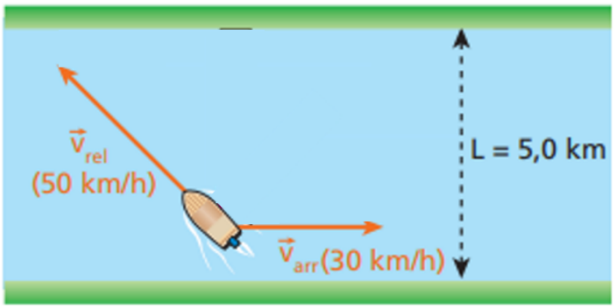
4. Uma corda suporta um lampião que pesa 50 N. A tensão na corda é menor, igual ou maior do que 50 N? Use a regra do paralelogramo para justificar sua resposta.



5. A corda do anterior foi reposicionada como mostrado na figura abaixo e ainda sustenta o lampião de 50 N. A tensão na corda é menor, igual ou maior do que 50 N? Use a regra do paralelogramo para justificar sua resposta.



6. Um rio de margens retilíneas e largura constante igual a 5km tem águas que correm paralelamente às margens, com velocidade de intensidade 30km/h. Um barco, cujo motor lhe imprime velocidade de intensidade sempre igual a 50km/h em relação às águas, faz a travessia do rio.
a) Qual a velocidade resultante sabendo que entre os vetores velocidade é formado um ângulo de 110º ?
b) Qual o intervalo de tempo necessário para que o barco atravesse o rio percorrendo a menor distância possível?



Questões para casa – Atividade 06 e 07

1. Determine as somas que se pedem:

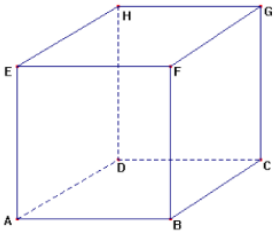
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$

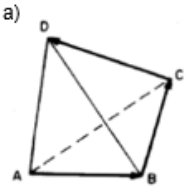
c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BC}$

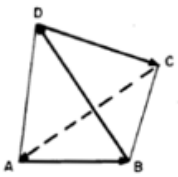
d) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BH}$

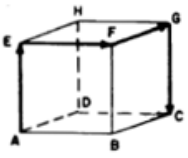
e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}$

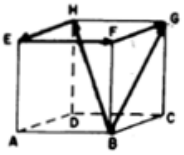


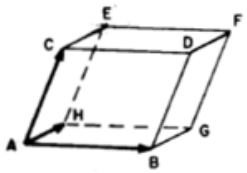
2. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos.

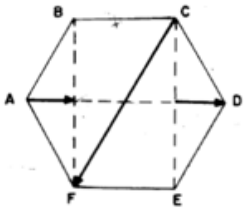
a)


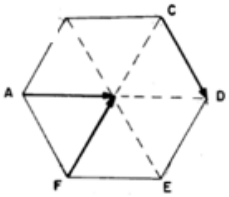
b)


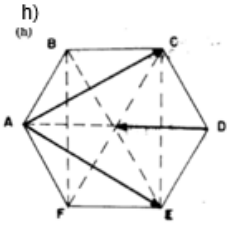
c)


d)


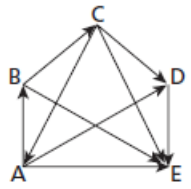
e)


f)


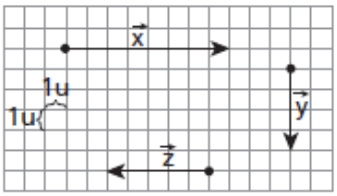
g)


h)


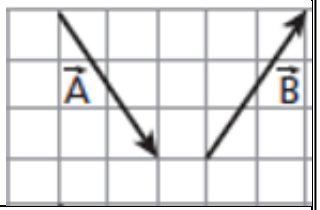
3. Qual o vetor resultante da soma de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{CA}$, de acordo com a figura.



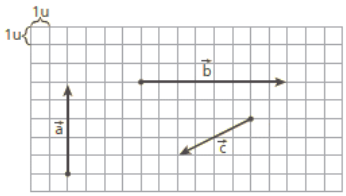
4. No plano quadriculado abaixo, estão representados três vetores: **x**, **y** e **z**. Determine o módulo do vetor soma **s** = **x** + **y** + **z**.



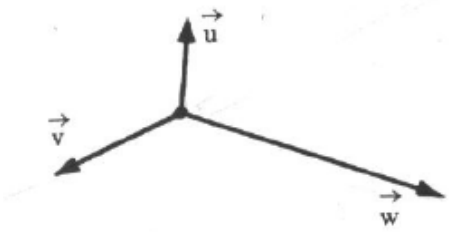
5. Dados os vetores **A** e **B**, qual a melhor representação para o vetor **A** + **B?**

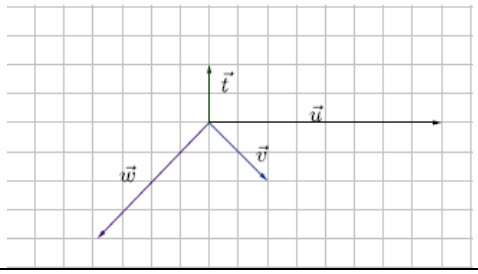


6. No plano quadriculado a seguir, temos três vetores, **a**, **b** e **c**: Qual é o módulo do vetor resultante da soma desses vetores?



7. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, de acordo com a figura, construir o vetor $2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{s}$.





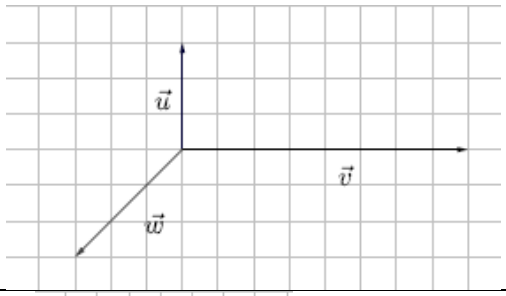
8. Dado os vetores na figura, esboce os vetores resultantes, em cada caso.

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{t}$

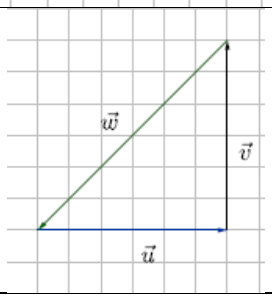
b) $\vec{u} - \vec{t} + \vec{w}$

b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

d) $\vec{u} - \vec{w} + \vec{t}$



9. Dados os vetores na figura, construa o vetor $\vec{t} = 3\vec{u} - 2\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$



10. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, construa os vetores

a) $\vec{x} = 2\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u}$

b) $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} + \frac{2}{3}\vec{u}$

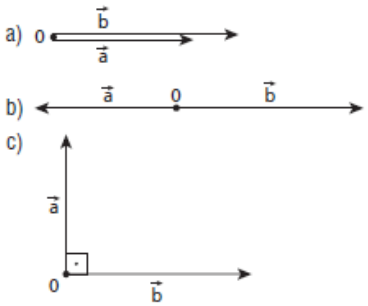
11. Num paralelogramo ABCD sabe-se que A(1,3,-2) e que as diagonais são $\overrightarrow{AC} = (4,2-3)$ e $\overrightarrow{BD} = (-2,0,1)$. Calcule as coordenadas dos outros três vértices.

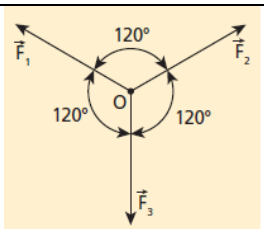
12. SendoB(8,3), determine as coordenadas do ponto A, sabendo que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é igual a $\vec{v} = (-5,4)$.

13. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo A(x, 1), B(4, x+3), C(x, x+2) e D(2x, x+6).

14. Dois vetores **a** e **b**, de mesma origem, formam entre si um ângulo q = 60°. Se os módulos desses vetores são a= 7 u e b = 8 u, qual o módulo do vetor soma?

15. Determine o módulo do vetor soma de **a** (a = 60 u) com **b** (b = 80 u) em cada caso:

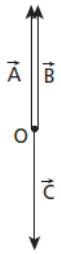




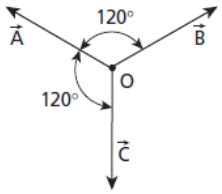
16. Três forças **F1**, **F2** e **F3**, contidas em um mesmo plano, estão aplicadas em uma partícula **O**, conforme ilustra a figura. **F1** e **F2** têm módulos iguais a 10 N. Qual deve ser o módulo de **F3** para que a soma **F1** + **F2** + **F3**:
a) tenha módulo nulo?
b) tenha módulo 5,0 N estando dirigida para baixo?

17. Considere três vetores coplanares **A**, **B** e **C**, de módulos iguais a **x** e com origens coincidentes num ponto **O**. Calcule o módulo do vetor resultante da soma **A** + **B** + **C** nos dois casos esquematizados abaixo: **Dado**: cos 120° = -1/2

a)



b)



18. Considere um rio cujas águas correm com velocidade de intensidade 3,0 km/h em relação às margens. Um barco desce esse rio, deslocando-se de um porto **A** até um porto **B** em 1,2 h. Em seguida, esse mesmo barco sobe o rio, deslocando-se do porto **B** até o porto **A** em 1,8 h. Sendo Vb a intensidade da velocidade do barco em relação às águas e **D** a distância entre os portos **A** e **B**, calcule Vb e **D**.

19. Um artista de cinema, ao gravar uma das cenas de um filme de aventura, vai de um extremo ao outro de um vagão de um trem, que se move em trilhos retilíneos com velocidade constante de 36 km/h, gastando 20 s. Sabendo que o vagão tem comprimento de 30 m e que o artista se move no mesmo sentido do movimento do trem, calcule:
a) a intensidade da velocidade do artista em relação ao trem;
b) o intervalo de tempo necessário para que o artista percorra 230 m em relação ao solo.

20. Ao fazer um voo entre duas cidades, um ultraleve é posicionado por seu piloto de Sul para Norte. O motor impulsiona a aeronave com velocidade constante de módulo igual a 100 km/h. Durante o trajeto, passa a soprar um vento de velocidade 100 km/h, de Oeste para Leste. Se o piloto não mudar as condições iniciais do movimento do ultraleve, qual será a nova velocidade desse aparelho em relação à Terra, em módulo, direção e sentido?

21. Um barco a remo se move com uma rapidez de 3 m/s e aponta exatamente na direção transversal a um rio; se o rio fluir a 4 m/s, qual velocidade do barco com relação à margem do rio?

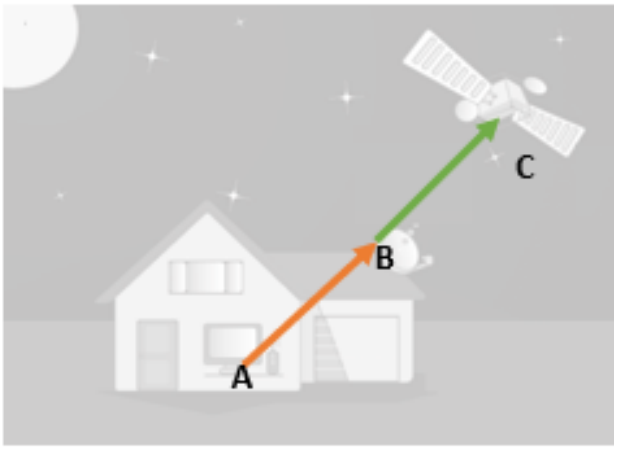
22. Se as gotas de chuva caem verticalmente a 3 m/s e se você estiver correndo horizontalmente a 4 m/s, com qual velocidade as gotas atingirão a sua face?

23. Um aeroplano com uma velocidade em relação ao ar de 120 km/h depara-se com um vento transversal de 90 km/h. Qual a velocidade do aeroplano com relação ao solo?

ATIVIDADE 08

TÍTULO: Multiplicação por um Escalar
OBJETIVO: investigar o efeito da multiplicação de um vetor por um escalar.
MATERIAL: roteiro de atividades, calculadora, folha quadriculada, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:
De acordo com a situação apresentada responda a questão abaixo.

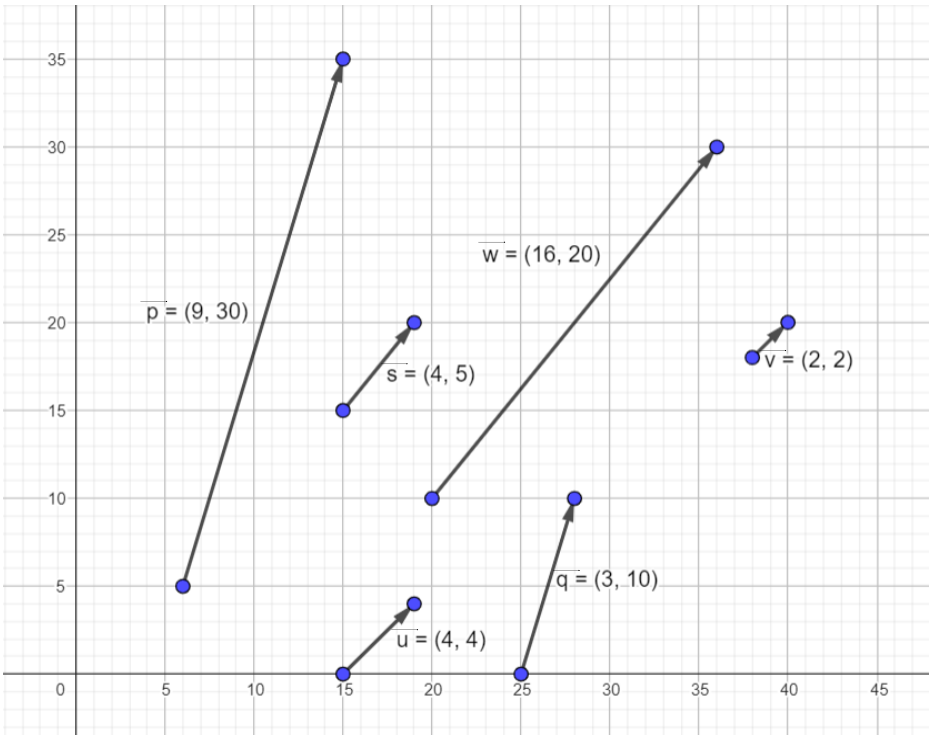
Imagine que para determinar o deslocamento vetorial do sinal que é captado pela antena da residência foi aplicado um vetor $\vec{u} = (2,3)$ no ponto A(1,4) chegando a B(3,7); o vetor $\vec{u}$ foi aplicado novamente em B chegando a C(5,10), onde o satélite está localizado. Quais as componentes do vetor que levaria A diretamente a C, de acordo com a figura a seguir?



ATIVIDADE 09

TÍTULO: definição de vetor paralelo
OBJETIVO: investigar a condição de paralelismo
MATERIAL: roteiro de atividades, calculadora, régua, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:

Considere o eixo contendo os vetores $\vec{p}, \vec{q}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{s}$ e faça o que se pede.



Considerando os pares de vetores identificados, preencha o quadro de registros a seguir com as informações solicitadas.

Pares	Vetores	Os vetores são paralelos? SIM	Os vetores são paralelos? NÃO	Componentes dos vetores: Vetor 1	Componentes dos vetores: Vetor 2
Par 01	Vetor 1: $\vec{v}$				
	Vetor 2: $\vec{u}$				
Par 02	Vetor 1: $\vec{q}$				
	Vetor 2: $\vec{p}$				
Par 03	Vetor 1: $\vec{s}$				
	Vetor 2: $\vec{w}$				
Par 04	Vetor 1: $\vec{p}$				
	Vetor 2: $\vec{v}$				
Par 05	Vetor 1: $\vec{q}$				
	Vetor 2: $\vec{s}$				
Par 06	Vetor 1: $\vec{u}$				
	Vetor 2: $\vec{w}$				
Observação:					
Conclusão:					

ATIVIDADE 10

TÍTULO: Vetor Unitário
OBJETIVO: definir vetor unitário
MATERIAL: caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:

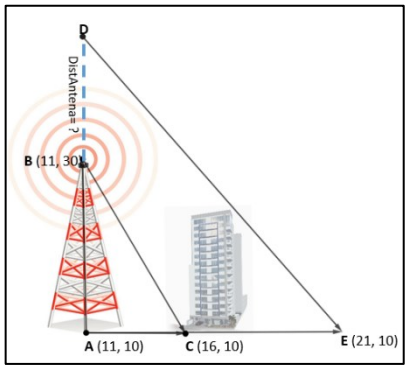
Dado um vetor $\vec{u}$, como obter um vetor paralelo a ele com magnitude 1.

Questões de Aprofundamento – Atividade 08, 09 e 10

1. Dados os pontos A(0,1,-1) e B(1,2,-1) e os vetores $\vec{u} = (-2,-1,1)$ e $\vec{v} = (3,0,-1)$ e $\vec{w} = (-2,2,2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\vec{u} + a_3\vec{v}$.

2. Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m+1,3,1)$ e $\vec{v} = (4,2,2n-1)$.

3. Sendo A(1,-1,3) e B(3,1,5) os pontos onde estão posicionadas os satélites de geolocalização, para permitir que a localização seja realizada com maior precisão, um novo satélite será lançado ao espaço. Qual o vetor posição do novo satélite, considerando que ela deve estar a uma distância de quatro vezes $\overrightarrow{AB}$?



4. O governo do Estado do Pará solicitou a uma Empresa Operadora de Telefonia Móvel a instalação de uma nova antena que permitisse o acesso com qualidade no prédio em que funcionará uma das secretarias governamentais. A antena em funcionamento tem 20m de altura. O Engenheiro Eletricista responsável observou que o raio de cobertura da antiga antena era de 5m, dessa forma, para atender ao prédio com qualidade seria necessário alterar a altura da antena para atingir o dobro de cobertura, ou seja, 10m de raio. Assim, definiu o posicionamento da antena, altura e raio de cobertura, por meio de pontos e vetores, tal como em um plano cartesiano, e indicou por DistAntena a variável que iria indicar o valor a ser incrementado na altura.

Qual será o valor de DistAntena, sabendo que $\overrightarrow{BD} = 2 * \overrightarrow{AB}$?

Obtenha um vetor paralelo a $\overrightarrow{BC}$ com magnitude igual a 40.

Demonstre, matematicamente, que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$ pertencem a mesma reta.

Para que pertençam a mesma reta (colineares), basta verificar se são paralelos.

Questões para casa – Atividade 08, 09 e 10

1. Dados os pontos A(-1,3), B(1,0), C(2,-1), determinar D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

2. Dados os pontos A(2,-3,1) e B(4,5,-2) determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

3. Dados os pontos A(-1, 2, 3) e B(4,-2,0) determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$.

4. Dados os pontos A(-1,2), B(3,-1) e C(2,4) determinar D(x,y) de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

5. Determine o vetor $\vec{v}$ sabendo que (3, 7, 1) + 2$\vec{v}$=(6, 10, 4) - $\vec{v}$

6. Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (-1,2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que:
a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$ b) $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

7. Determine o vetor $\vec{w}$ na igualdade $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$, sendo dados $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (-2,4)$.

8. No sistema a seguir, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são vetores. Calcule o vetor de $\vec{x}$.
$$\begin{cases} 3\vec{x} + 2\vec{y} = (1,7) \\ 2\vec{x} + 3\vec{y} = (-1,8) \end{cases}$$

9. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-4)$, $\vec{v} = (-5,1)$ e $\vec{w} = (-12,6)$, determine k_1 e k_2 tal que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

10. Encontre os npumeros a_1 e a_2, tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (4,-2)$ e $\vec{w} = (-1,8)$.

11. Encontre os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$, sendo $\vec{v_1} = (1,-2,1)$, $\vec{v_2} = (2,0,-4)$ e $\vec{w} = (-4,-4,14)$.

12. Dados A(2,7), B(-1,4) e C(1,-3), determine x e y reais tais que x*$\overrightarrow{AB}$ + y*$\overrightarrow{AC}$ = $\overrightarrow{BC}$

13. Dados os pontos A(1,2,3), B(-6,-2,3) e C(1,2,0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

14. Considere P(x,y) de modo que $\overrightarrow{PQ} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{PR}$, onde Q(1,3) e R(1,3). Determine a relação que x e y deve satisfazer.

15. Dados os pontos A(3,m - 1, -4), B(8,2m-1,m) e C(1,2,0), determinar m de modo que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$

16. Efetue as operações indicadas sobre os vetores $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 1\vec{k}$, $\vec{v} = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{\jmath}$
a) $\vec{a} = \vec{w} - \vec{v}$ b) $\vec{b} = -\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{c} = 6\vec{u} + 4\vec{w}$ d) $\vec{d} = 3\vec{w} - (\vec{v} - \vec{w})$ e) $\vec{e} = 4(3\vec{u} + \vec{v})$

17. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -4)$, $\vec{v} = \left(-\frac{9}{4}, 3\right)$, verificar se existem números a e b tais que $\vec{u} = a\vec{v}$ e $\vec{v} = b\vec{u}$

18. Um automóvel desloca-se 120m no sentido oeste-leste, e em seguida, 50m no sentido norte-sul, de acordo com a orientação da rosa dos ventos.
a) O que aconteceria com o módulo do deslocamento resultante se o automóvel fizesse o caminho inverso?
b) Se o automóvel fizer o caminho 3 vezes mais longo que o inicial, quanto terá se movimentado ao final?

19. Considere o vetor $\vec{u} = (2, -1)$, calcule:
$a)$ $|\vec{u}|$ b) As coordenadas do vetor $3\vec{u}$ e $-3\vec{u}$ c) Calcule os módulos dos vetores $3\vec{u}$ e $-3\vec{u}$

20. Dados os pares ordenados A(3,-1), B(-7,2) e C(1-4), calcular
a) As componentes do vetor $\overrightarrow{AB}$ b) As componentes do vetor $\overrightarrow{BA}$ c) $2\overrightarrow{AC}$ - $3\overrightarrow{BC}$ + $\overrightarrow{BA}$

21. Mostre que os pontos (4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3) são vértices de um paralelogramo.

22. Determine α e β de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

23. Verifique se os vetores $\vec{u} = (4, -3)$ e $\vec{v} = (-8,6)$ são paralelos.

24. Determine o valor de x para que os vetores $\vec{u} = (x, 3)$ e $\vec{v} = (2, -7)$ sejam paralelos.

25. Determine o valor de x para que os vetores $\vec{u} = (x - 3, -x)$ e $\vec{v} = (5,4)$ sejam paralelos.

26. Determine um vetor unitário que seja paralelo ao vetor $\vec{u} = (-6,8)$.

27. Os pontos A(31), B(4,-2) e C(x,7) são colineares. Determine o valor de x.

28. Dados os pontos A(x,2), B(-3,4) e C(1,-2), determine o valor de x para que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ sejam paralelos.

29. Verifique se os vetores $\vec{u} = (2,4)$ e $\vec{v} = (3,6)$ são paralelos.

30. Verifique se os ponts A(-1,1), B(3,7) e C(0,1) estão alinhados.

31. Verifique se os ponts A(2,3), B(1,7) e C(0,-5) estão alinhados.

32. Determine o valor de k para que os pontos A(k,1), B(2,-1) e C(4,2) estejam alinhados.

33. Para que valores de k para que os pontos A(k,3), B(8,6) e C(-1,-3) estejam alinhados?

34. Determinar x para que os pontos A(x,-3), B(2,4) e C(5,1) sejam colineares.

35. Considere três cargas elétricas situadas nos pontos A, B, C podem definir dipolos elétricos caso estejam situadas na mesma reta. Para cada caso, verifique se as cargas podem formar dipolos (os dipolos são fomados por cargas que pertencem a mesma reta):
a) A(-1,5,0); B(2,1,3); C(-2,-7-1) b) A(2,1,-1); B(3,-1,0); C(1,0,4) c) A(-1,0, 2); B(-4,1,1); C(0,1,3)

36. As cargas elétricas Q1, Q2 e Q3 estão posicionadas de forma colinear nos pontos A(3,1,-2) e B(1,5,1) e C(a, b, 7). Calcule a e b.

37. Calcule valor de x para que os vetores $\vec{u} = (4, x + 3)$ e $\vec{v} = (-5,2)$ sejam paralelos.

38. Determine um vetor paralelo ao vetor $\vec{u} = (3, -1)$, que tenha módulo 5.

39. Dados dos pares ordenados A(1,5) e B(4,9), determine:
a) As componentes do vetor $\overrightarrow{AB}$ b) O módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$
c) O valor real de k para que o módulo do vetor k. $\overrightarrow{AB}$ seja igual a 20. d) O versor do vetor $\overrightarrow{AB}$

40. Determine o valor de m, sabendo que o vetor $\vec{u} = (\frac{2}{3}, m)$ é unitário.

41. Um vetor unitário que tenha sentido oposto ao do vetor $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

42. Dados os vetores $\vec{A} = (10, -4, 6)$ e $\vec{B} = (2, 1, 0)$, determine:
a) A magnitude de $3\vec{A} - \vec{B}$ b) Um vetor unitário ao longo de $\vec{A} + 2\vec{B}$

43. Dados os vetores $\vec{A} = (1, 0, 3)$ e $\vec{B} = (5, 2, -6)$, determine: a) $|\vec{A} + \vec{B}|$ b) $5\vec{A} - \vec{B}$
c) Um vetor unitário paralelo a $3\vec{A} + \vec{B}$?

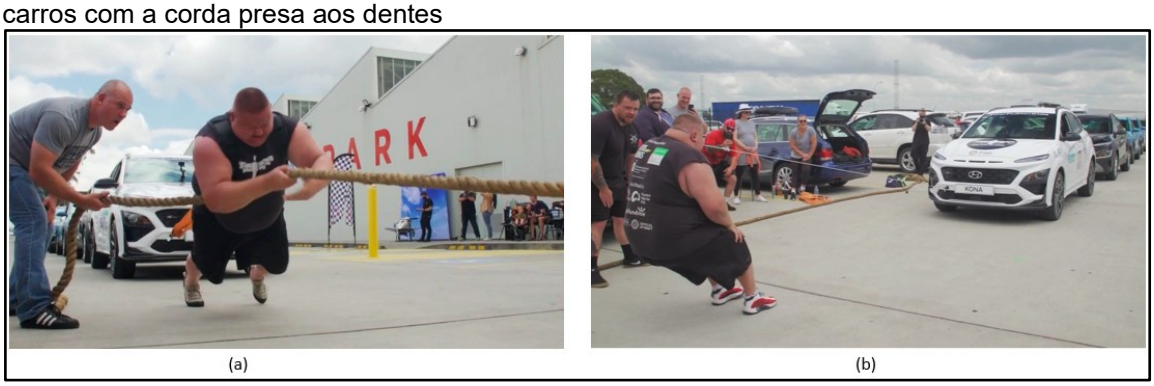
ATIVIDADE 11

TÍTULO: Produto Escalar
OBJETIVO: determinar o ângulo entre dois vetores.
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:

De acordo com a situação apresentada faça o que se pede.

Em 17 de Novembro de 2021, no evento *Hyundai Help for Kids,* um atleta australiano conseguiu vencer o desafio proposto pela instituição de caridade da *Hyundai* de deslocar 16 carros por 5 metros, com uma corda presa ao tronco e depois com a corda presa aos dentes, Figura 1. O feito possibilitou arrecadar mais de 60 mil dólares australianos que foram doados a referida instituição[20].

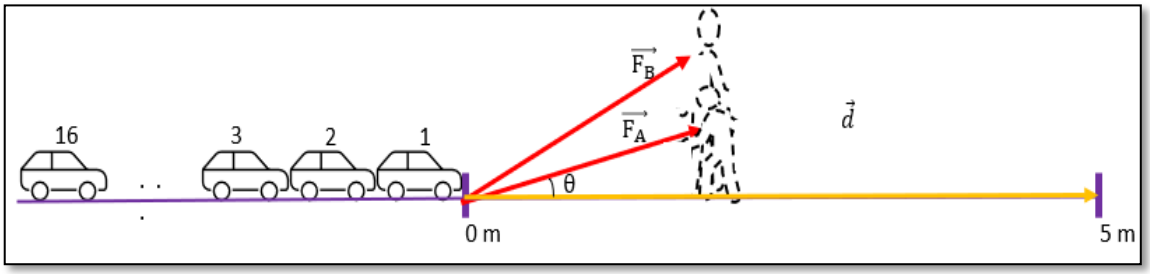
Figura 1 - a) atleta deslocando os carros com uma corda presa ao tronco; b) atleta deslocando os carros com a corda presa aos dentes



Fonte: adaptado de https://autoesporte.globo.com/curiosidades/noticia/2021/12/video-homem-quebra-dois-recordes-mundiais-ao-puxar-16-carros-e-movimentar-5-veiculos-com-os-dentes.ghtml, acesso em 21/04/2023.

Ao observar as figuras é perceptível a diferença no posicionamento do homem que implicando na composição de diferentes ângulos em relação ao solo; a inclinação da corda ao puxar com os dentes foi maior pois a força aplicada é menor; tal como representado na Figura 2.

Figura 2- Ilustração do problema da atividade 05; sendo $\overrightarrow{F_A}$ força aplicada na situação A e $\overrightarrow{F_B}$, na situação B



Fonte: elaborado a partir da Figura 5

Determine o ângulo θ formado entre $\overrightarrow{F_A} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{d} = (x_2, y_2, z_2)$.

[20] Fonte: adaptado de https://autoesporte.globo.com/curiosidades/noticia/2021/12/video-homem-quebra-dois-recordes-mundiais-ao-puxar-16-carros-e-movimentar-5-veiculos-com-os-dentes.ghtml, acesso em 21/04/2023

Questões de Aprofundamento – Atividade 11

1. Dados os vetores $\vec{u} = (3,-5,8)$ e $\vec{v} = (4,-2,1)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,1,4)$ e $\vec{u} = (-1,2,2)$

3. Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\overrightarrow{v1} = (1,-1,0)$ e $\overrightarrow{v2} = (1,0,1)$.

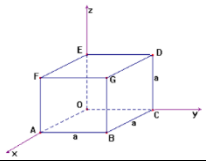
4. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2,-3,-12)$ e colineares ao vetor $\vec{w}$=(-6,4,-2).

5. Encontre:

a) $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}$ b) $\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}$ c) $\vec{k} \cdot \vec{k}$ d) $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}$ e) $\vec{\jmath} \cdot \vec{k}$ f) $\vec{k} \cdot \vec{\imath}$ g) $\vec{\imath} \cdot \vec{k}$ h) $\vec{k} \cdot \vec{\jmath}$ i) $\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath}$

Questões para casa – Atividade 11

1. Seja o cubo de aresta a representado na figura, determine:



a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ $b)$ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ $c)$ $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$

$d)$ $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$ e) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$

f) $(\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{OG}$

g) O ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta

h) O ângulo formado por duas diagonais do cubo ‘

2. Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2,1,-1)$ forma um ângulo de 60º com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(3,1,-2) e B(4,0,m), calcular m.

3. Determinar o ângulos internos ao triângulo ABC, sendo A(3,-3,3), B(2,-1,2) e C(1,0,2).

4. Provar que o triângulo de vértices A(2,3,1), B(2,1,-1) e C(2,2,-2) é um triângulo retângulo.

5. Provar que os pontos A(5,1,5), B(4,3,2) e C(-,-2,1) são vértices de um triângulo retângulo.

6. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a-2a, -1)$, $\vec{v} = (a, a-1, a)$ e , $\vec{w}$ =(a, -1,1), determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

7. Seja o triângulo de vértices A(-1,-2,4) e B(-4,-2,0) e C(3,-2,1). Determinar o ângulo interno ao vértice B.

8. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10cm.
Calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

9. Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5,12 e 13.
Calcular $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

10. Determinar os ângulos do triângulo de vértices A(2,1,3), B(1,0,-1) e C(-1,2,1).

11.Dados os vetores $\vec{v} = (2,1,a)$, $\vec{u} = (a+2,-5,2)$ e $\vec{w} = (2a,8,a)$, determinar o valor de a para que o vetor $\vec{v} + \vec{u}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{w} - \vec{v}$

12. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (1,-1,2)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$

13. Determinar o vetor $\vec{v}$ colinear ao vetor $\vec{u} = (-4,2,6)$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{w} = -12$, sendo $\vec{w} = (-1,4,2)$.

14. Ache x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares:

a) $\vec{u} = (x,0,3)$ e $\vec{v} = (1,x,3)$ c) $\vec{u} = (x+1,1,2)$ e $\vec{v} = (x-1,-1,-2)$

b) $\vec{u} = (x,x,4)$ e $\vec{v} = (4,x,1)$ d) $\vec{u} = (x,-1,4)$ e $\vec{v} = (x,-3,1)$a)

15. Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2,-1,1)$

16. Sendo $\vec{a}$ = (2, –1, 1), $\vec{b}$ = (1, –2, –2) e $\vec{c}$= (1, 1, –1). Calcular um vetor $\vec{v}$=(x, y, z), tal que: $\vec{v}$. $\vec{a}$= 4, $\vec{v}$. $\vec{b}$= –9 e $\vec{v}$. $\vec{c}$= 5.

17. Sejam os vetores $\vec{a}$ = (1, –m, –3), $\vec{b}$=(m+3,4–m,1) e $\vec{c}$=(m,–2,7). Determinar m para que $\vec{a}$. $\vec{b}$=($\vec{a}$+$\vec{b}$)

18. Determinar a, de modo que o ângulo Â do triângulo ABC, seja 60^0. Dados: A(1,0,2), B(3,1,3) e +1,–2,3).

19. Determinar o valor de x para que os vetores $\overrightarrow{v1}$= x$\vec{\imath}$–2$\vec{\jmath}$+3$\vec{k}$ e $\overrightarrow{v2}$=2$\vec{\imath}$–$\vec{\jmath}$+2$\vec{k}$, sejam Ortogonais.

20. Um engenheiro determinou que as antenas em uma praça ficariam localizadas nos seguinte pontos A(4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3). Determine:

a) Qual figura geométrica representa o formato da praça. R= paralelogramo

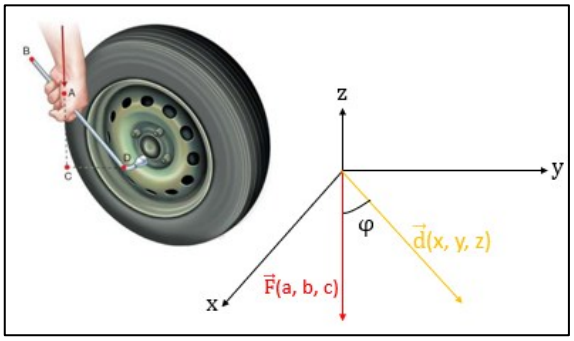
b) Qual o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, caso sejam paralelos?

21. Na física é comum utilizar um operador Del para cálculos de campo definido por $\nabla = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$, este quando aplicado a um campo vetorial $(\vec{A})$ utilizando o produto escalar resulta em uma operação chamada divergente $(\nabla . \vec{A})$ em um dado ponto P. Encontre $\nabla . \vec{A}$, sabendo que $\vec{A} = (x,y,z)$ no ponto P.

ATIVIDADE 12

TÍTULO: Produto Vetorial
OBJETIVO: definir produto Vetorial.
MATERIAL: roteiro de atividades, caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO: De acordo com a situação apresentada responda à questão:

Para medir o efeito de rotação de uma força os físicos definiram uma grandeza chamada momento ou torque da força ($\vec{\tau}$) em relação a um eixo que passa pelo ponto O e é ortogonal a força aplicada ($\vec{F}$) e a distância $(\vec{d})$, simultaneamente.



Imagine que você quer remover o parafuso sextavado da roda do automóvel aplicando uma força vertical $\vec{F} = (a, b, c)$ a uma distância $\vec{d} = (x, y, z)$. Encontre o vetor $\vec{\tau} = (\alpha, \beta, \theta)$.

Questões de Aprofundamento – Atividade 12

1. Encontre o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = (3,2,-4)$ e $\vec{v} = (2,-2,1)$.

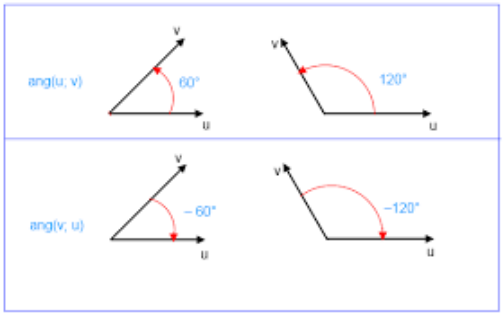
2. Determine um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2,-6,3)$ e $\vec{v} = (4,3,1)$.

3. Dados dois vetores unitários e não nulos, qual o resultado e orientação do produto vetorial entre eles, se:

a) $\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$ b) $\vec{\jmath} \times \vec{k}$ c) $\vec{k} \times \vec{\imath}$ d) $\vec{\imath} \times \vec{\imath}$ e) $\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}$ f) $\vec{k} \times \vec{k}$ g) $\vec{\imath} \times \vec{k}$

h) $\vec{k} \times \vec{\jmath}$ i) $\vec{\jmath} \times \vec{\imath}$ j) $-\vec{\jmath} \times \vec{\imath}$ k) $-\vec{k} \times \vec{\jmath}$ l) $-\vec{\imath} \times \vec{k}$

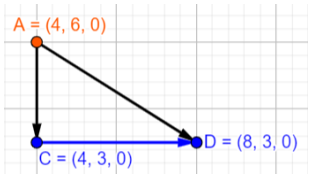
4. Determine a orientação do produto vetorial em cada caso.



5. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3,1,2)$ e $\vec{v} = (4,-1,0)$.

6. Calcular a área do triângulo de vértices A (-1,0,2), B (-4,1,1) e C (0,1,3)

7. Ricardo quer remover o parafuso sextavado da roda do automóvel aplicando uma força vertical $\vec{F} = -40\vec{j}$N no ponto A da chave, conforme representado a seguir. Dados: AC = 0,3 m e AD = 0,5 m



Verifique se Ricardo conseguirá realizar essa tarefa, sabendo-se que é necessário um torque inicial de 18 N · m em relação ao eixo para desapertar o parafuso. Dados: Torque $(|\vec{\tau}|) = |\vec{F} \times \vec{d}|$

Em qual sentido Ricardo deve girar a chave para remover o parafuso.

Questões para casa – Atividade 12

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$ e $\vec{w} = (-1,2,2)$, calcular:

a) $\vec{w} \times \vec{v}$ b) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ d) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$ e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ g) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ h) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

2. Dados os vetores $\vec{u}$=(–1,3,2), $\vec{v}$=(1,5,–2) e $\vec{w}$=(-7,3,1). Calcule as coordenadas dos vetores:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{v} \times \vec{w}$ c) $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w})$ d) $(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{w}$ e) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{w})$ f) $(\vec{u} - \vec{w}) \times \vec{w}$

3. Mostrar num gráfico um representante de cada um dos seguintes vetores: a) $\vec{\jmath} \times 2\vec{\imath}$ b) $3\vec{\imath} \times 2\vec{k}$

4. Dados os pontos A(2,-1,2), B(1,2,-1) e C(3,2,1), determinar o vetor $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$

5. Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,0,-3)$.

6. Dados os vetores $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (3,4,-2)$ e $\vec{c} = (-5,1-4)$, mostrar que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

7. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v_1} = (1,1,0)$ e $\vec{v_2} = (2,-1,3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

8. Sabendo que $|\vec{a}| = 3$ e $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45º é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

9. Se $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{3}$ e $|\vec{u}| = 3$ e 60º é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $|\vec{v}|$

10. Sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45^0 é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$

11.Calcular a área do triângulo de vértices
a) A(1,0,1),B(4,2,1) e C(1,2,0) b) A(2,3,-1),B(3,1,-2) e C(-1,0,2)
c) A(-1,2,-2),B(2,3,-1) e C(0,1,1)

12. Dado o triângulo de vértices A(0,1,-1), B(-2,0,1)e C(1-2,0), calcular a medida da altura relativa ao lado BC 45º

13. Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores:
a) $\vec{u} = (2,3,8)$ e $\vec{v} = (-5,8,2)$. b) $\vec{u} = (3,1,2)$ e $\vec{v} = (4,-1,0)$
$\vec{u} = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = (2,-3,4)$ d) $\vec{u} = (2,1,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,3)$

14. Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A(3,2,1) e uma diagonal de extremidades B(1,1,-1) e C(0,1,2).

15. Calcular x, sabendo que A(x, 1, 1), B(1, -1 , 0) e C(2, 1, -1) são vértices de triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$

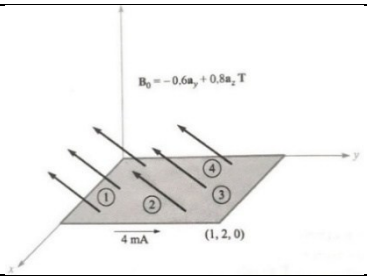
16 Sejam os vetores $\vec{u} = (3,1,-1)$ e $\vec{v} = (a,0,2)$. Calcular o valor de a para q.ue a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

17. Mostre que o quadrilátero cujos vértices são os pontos A(1,-2,3), B(4,3-1), C(5,7,-3) e D(2,2,1) é um paralelogramo e calcule sua área.

18. Dados os vetores $\vec{u} = (0,1,-1)$, $\vec{v} = (2,-2,-2)$ e $\vec{w} = (1,-1,2)$, determinar o vetor $\vec{x}$, paralelo a $\vec{w}$, que satisfaz à condição $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$

19. Dados os vetores $\vec{u} = (2,1,0)$ e $\vec{v} = (3,-6,9)$, determinar o vetor $\vec{x}$ que satisfaz a relação $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{x}$ e que seja ortogonal ao vetor $\vec{w} = (1,-2,3)$.

20. Considere a espira retangular mostrada na figura, calcule o torque utilizando $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$, sendo $\vec{m} = (0,0,8x10^{-3})$A/m² e $\vec{B} = \overrightarrow{B_o} = (0;-0,6;0,8)$, sendo $\vec{B}$ o campo magnético.



21. Calcule o torque da bobina, cujo $\vec{m} = (1,5;4,-2)$A.m² e está imersa em um campo uniforme $\vec{B} = (0,6;0,4;0,5)$Wb/m²

22. A força total sobre uma carga em movimento na presença de um campo elétrico e de um campo magnético é dada pela equação de força de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{u}x\vec{B})$. Determine $\vec{F}$, sendo Q=1C, $\vec{E} = (0,20,0)$V/m; $\vec{u} = (4,0,0)$m/s e $\vec{B} = (0,-20,0)$Wb/m².

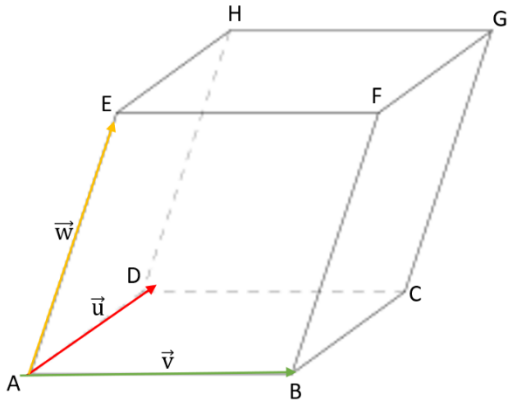
23. Uma partícula carregada de 1C parte da origem com velocidade $\vec{u} = (3,1,0)$ m/s e atravessa uma região com campo magnético uniforme $\vec{B} = (0,0,10)$Wb/m². Calcule a força magnética sobre a partícula, sendo $\vec{F} = Q\vec{u}x\vec{B}$.

24. Na física é comum utilizar um operador Del para cálculos de campo definido por $\nabla = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$, este quando aplicado a um campo vetorial ($\vec{A}$) utilizando o produto vetorial resulta em uma operação chamada rotacional ($\nabla x\vec{A}$) em um dado ponto P. Encontre $\nabla x\vec{A}$, sabendo que $\vec{A} = (x,y,z)$ no ponto P.

ATIVIDADE 13

TÍTULO: Produto Misto
OBJETIVO: definir produto misto
MATERIAL: caneta ou lápis.
PROCEDIMENTO:

Qual é o volume de um paralelepípedo gerado por três vetores não coplanares, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.



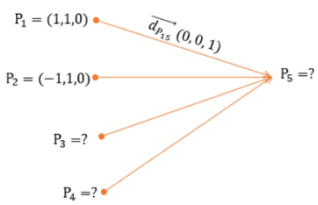
Questões de Aprofundamento – Atividade 13

1. Verifique se os pontos A(1,2,4), B(-1,0,-2), C(0,2,2) e D(-2,1,-3) estão no mesmo plano.
2 Calcule o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores **u** = (2,-2,0), **v** = (0,1,0), **w** = (-2,-1,-1).
3. Calcule o volume do tetraedro cujos vértices são: A(1,2,1), B(7,4,3), C(4,6,2) e D(3,3,3).

Questões para casa – Atividade 13

4. Verificar se são coplanares os seguintes vetores: $a)$ $\vec{u} = (3,-1,2)$, $\vec{v} = (1,2,1)$ e $\vec{w} = (-2,3,4)$ $b)$ $\vec{u} = (2,-1,0)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (7,-1,2)$
$c)$ $\vec{u} = (2,-1,0)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (7,-1,2)$
3. Verifique se os pontos A(1, 2, 3), B(-1, 0, 1), C(0,-2, 1) e D(0, 0, - 2) pertencem a um mesmo plano (são coplanares).
4. Determine o valor de k para que os pontos A(1, 0, 3), B(-1, 2, 1), C(4, 0, -2) e D(k, 1, 1) sejam coplanares.
5. Para que valor de m os pontos A(m, 1,2), B(2, -2,-3), C(5,-1,1) e D(3,-2,-2) são coplanares?
6. Calcule o volume do paralelepípedo de arestas AB, AC e AD, sendo A(0, 0, 4), B(2, 1, 8) e os vetores $\overrightarrow{BC}$= (10,10,1) e $\overrightarrow{DA}$= (2, 5, 3).
7. Calcule o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$= (2,-2,0), $\vec{v}$= (0,1,0), $\vec{w}$=(-2,-1,-1).
8. Sejam os vetores $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (2,0,1)$, $\overrightarrow{w1} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\overrightarrow{w2} = \vec{u} + 3\vec{v}$ e $\overrightarrow{w3} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\overrightarrow{w1} = 3\vec{u} - 2\vec{k}$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por $\overrightarrow{w1}$, $\overrightarrow{w2}$ e $\overrightarrow{w3}$.
9. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{v1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{v2} = 6\vec{\imath} + m\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{v3} = -4\vec{\imath} + \vec{k}$ seja igual a 10.
10. Os vetores $\vec{a} = (2-1,-3)$, $\vec{b} = (-1,-1,-4)$ e $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m.
11. Dados os pontos A(1,-2,3), B(2,-1,-4),C(0,2,0) e D(-1, m, 1), determinar o valor de m para que seja de 20 unidades e volume o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.
12. Calcular o volume do tetraedro ABCD, sendo dados: a) A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) e D(4,2,7) b) A(-1,3,2), B(0,1,-1), C(-2,0,1) e D(1,-2,0).
13; Calcule o volume do tetraedro definido pelos vetores $\vec{v}$ = (-1, 5, 3), $\vec{u}$ = (2, 4, 1) e $\vec{w}$= (1, 8, 4).
14. Calcule o volume do tetraedro ABCD dados $\overrightarrow{AB}$= (1,1,0), $\overrightarrow{AC}$ = (0,1,1), $\overrightarrow{AD}$ = (-4,0,0).
15. Determine os valores de m para que os pontos A(m, 1,0), B(1, 1,-1), C(0,0,3) e D(-1,0,0) sejam vértices de um tetraedro de volume 6.
16. Qual é o valor de x para que os vetores $\vec{a}$=(3,–x,–2), $\vec{b}$=(3,2,x) e $\vec{c}$=(1,–3,1) sejam coplanares?
17. São dados no espaço os pontos A(2,–1,0), B(1,–2,1) e C(1,0,2), determine o ponto D, tal que $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ sejam coplanares, $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$= –28 e que o volume do tetraedro OABD seja igual a 14 .

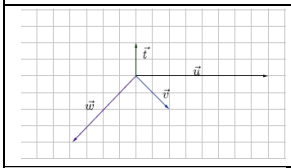
Questões de Revisão[21]



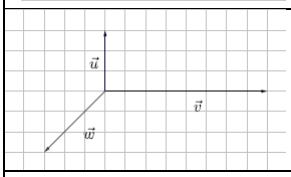
01. Quatro cargas idênticas localizadas em P_1, P_2, P_3 e P_4 de 3nC causam um campo elétrico em P_5, como ilustrado na figura. Dado $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,\ 1,\ 0)$ e o vetor distância $\vec{d}_{P_{15}}(0,0,1)$ entre P_1 e P_5, $\vec{d}_{P_{35}}(-2,-2,-1)$ entre P_3 e P_5 e $\vec{d}_{P_{45}}(0,-2,-1)$ entre P_4 e P_5; encontre as coordenadas dos pontos P_5, P_3 e P_4 e o vetor distância $\vec{d}_{P_{25}}$ entre P_1 e P_5. Esboce a localização das cargas e do campo (pontos e vetores).

02. Um vetor velocidade é decomposto em dois outros, perpendiculares entre si. Sabendo que o módulo do vetor é 10m/s e que um dos componentes tem módulo igual a 8m/s, determine o módulo do vetor correspondente ao outro componente.

03. Um automóvel desloca-se 120m no sentido oeste-leste, e em seguida, 50m no sentido norte-sul, de acordo com a orientação da rosa dos ventos.
O que aconteceria com o módulo do deslocamento resultante se o automóvel fizesse o caminho inverso?
b) Se o automóvel fizer o caminho 3 vezes mais longo que o inicial, quanto terá se movimentado ao final?



04. Dado os vetores na figura, esboce os vetores resultantes, em cada caso.
a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{t}$
b) $\vec{u}-\vec{t}+\vec{w}$
c) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
d) $\vec{u}-\vec{w}+\vec{t}$



05. Dados os vetores na figura, construa o vetor $\vec{t}=3\vec{u}-2\vec{w}+\frac{1}{2}\vec{v}$

06. Um engenheiro determinou que as antenas em uma praça ficariam localizadas nos seguinte pontos A(4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3). Determine:
Qual figura geométrica representa o formato da praça?
b) Qual o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$?

07. A força total sobre uma carga em movimento na presença de um campo elétrico e de um campo magnético é dada pela equação de força de Lorentz: $\vec{F}=Q(\vec{E}+\vec{u}x\vec{B})$. Determine $\vec{F}$, sendo Q=1C, $\vec{E}=(0{,}20{,}0)$V/m; $\vec{u}=(4{,}0{,}0)$m/s e $\vec{B}=(0,-20{,}0)$Wb/m².

08. Dados os pontos A(1,-2,3), B(2,-1,-4),C(0,2,0) e D(-1, m, 1), determinar o valor de m para que seja de 20 unidades e volume o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

09. A lei de Coulomb é uma lei experimental que trata da força que uma carga pontual exerce sobre outra carga pontual, sendo dada por:$\overrightarrow{F_{21}}=\frac{kQ_1Q_2}{|R|}\overrightarrow{a_{21}}$

Onde:
$\overrightarrow{F_{21}}$ = a força elétrica que a carga Q_2 exerce em Q_1 em Newton (N)
$k=9*10^9$ m/F
Q_1 e Q_2 = as cargas pontuais em Coulomb (C)
R a distância entre Q_1 e Q_2 em metros (m)
$\overrightarrow{a_{21}}$ = vetor unitário de $\vec{R}$ (vetor distância entre as cargas)
Considere que uma carga Q_1= 25*10^{-9}C localizada em (3, 2, 4) e uma carga Q_2= 2C localizada em (3, -2, 1) que exerce uma força elétrica Q_1, $\overrightarrow{F_{21}}$.
a) Faça o desenho esquemático representado as cargas e sua localização e o vetor distância de Q_2 em Q_1, $\overrightarrow{R_{21}}$.
b) Encontre o vetor força elétrica $\overrightarrow{F_{12}}$.
d) Encontre a intensidade de $\overrightarrow{F_{12}}$ e $\overrightarrow{F_{21}}$.
e) O que aconteceria com a intensidade da força elétrica se o vetor $\overrightarrow{F_{12}}$ fosse duplicado?
F

[21] Algumas questões foram retiradas das Questões para Casa

f) Uma terceira carga Q_3 é adicionada, determine a localização da carga Q_3 sabendo que o vetor distância entre Q_3 e Q_1 é dada por $\overrightarrow{R_{31}} = (0{,}4{,}1)$. Verifique se $\overrightarrow{R_{31}}$ é paralela a $\overrightarrow{R_{21}}$.
g) Adicione a nova carga Q_3 ao desenho esquemático da letra a), incluindo $\overrightarrow{R_{31}}$.
h) Dado $\overrightarrow{F_{31}} = (13,\ 53,\ 13)$, encontre a força elétrica resultante em Q_1, $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}}$ e sua intensidade.

Quiz

1. As grandezas escalares possuem somente magnitude, enquanto as vetoriais possuem direção, sentido e magnitude.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

2. O deslocamento de um ponto A até um ponto B é dado por A – B.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

3. Dado um deslocamento de A até B, o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é o conjunto de deslocamentos de A até B.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

4. Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ seu módulo é obtido por $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

5. Dois vetores são paralelos se suas componentes são proporcionais.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

6. O vetor unitário é um vetor paralelo a um dado vetor $\vec{t}$ com a magnitude igual a de $\vec{t}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

7. Ao multiplicarmos um vetor por um escalar, seu módulo também é multiplicado por esse mesmo escalar.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

8. O módulo do produto escalar é dado por $|\vec{u}x\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

9. Para calcular o menor ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é necessário encontrar o $\arccos\frac{|\vec{u}x\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

10. A adição de um vetor com o seu oposto resulta em um vetor nulo.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

11. A multiplicação de um vetor por um escalar a, sendo a<0, resulta em um vetor de mesma direção, porém de sentido oposto.

12. Podemos afirmar que três vetores são coplanares se o produto misto entre estes for igual a 0 (zero).
( ) Verdadeiro ( ) Falso

13. O volume de um tetraedro definido por três vetores é igual ao módulo produto vetorial entre estes.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

14. O resultado do produto misto é um vetor.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

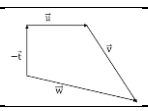
15. O produto vetorial de dois vetores resulta em vetor perpendicular a estes, simultaneamente.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

16. A área de um paralelogramo definido por dois vetores é dada pelo módulo do produto escalar entre estes.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

17. O produto escalar entre dois vetores perpendiculares é igual a 0 (zero).
( ) Verdadeiro ( ) Falso

18. O resultado do produto escalar é uma grandeza vetorial.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

19. Dada a figura: O vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{t}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso



20. Dado o vetor $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; os versores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ indicam o sentido de $\vec{u}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

APÊNDICE L

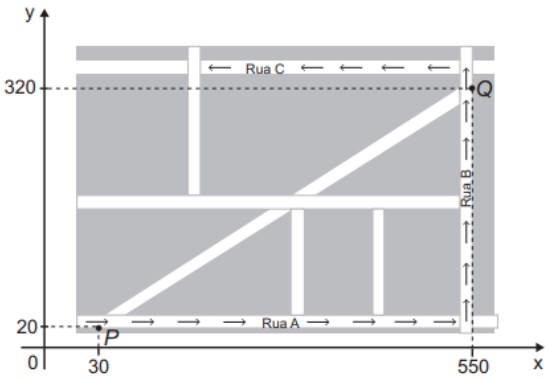
PRÉ / PÓS TESTE

ALUNO: _____MAT: _____

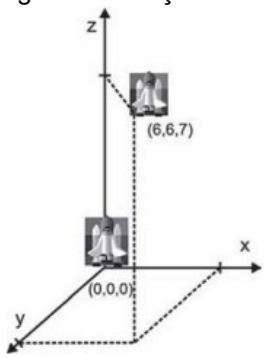
1. Dada as grandezas: distância, deslocamento, área, velocidade, temperatura e força. Complete o quadro abaixo, classificando-as em vetoriais ou escalares. No campo justificativa diferencie grandeza escalar de grandeza vetorial.

Grandeza Escalar:	Grandeza Vetorial:
Justificativa:	

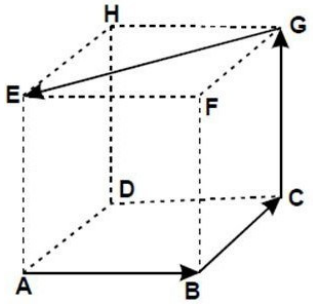
2. Devido ao aumento de usuários em uma determinada localidade, uma empresa de telefonia celular está realizando estudos para a implantação de uma nova antena para transmissão. A figura mostra a localização de duas de suas atuais antenas representadas por P e Q; a nova antena, localizada em um ponto T, deve estar entre P e Q. Os estudos indicam que o percurso de T até Q pode ser representado por $\overrightarrow{TQ} = (100,300)$. Determine $\overrightarrow{PT}$ e caracterize-o em relação a direção a sentido.



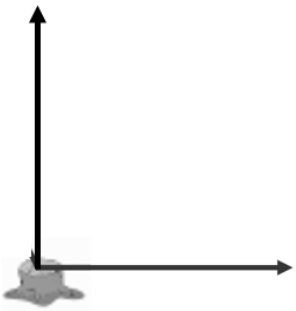
3. Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros. Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z; ao final, do deslocamento. Determine a posição final do foguete e distância percorrida em relação a sua posição inicial (marco zero).



4. Com base na figura represente o vetor soma dos vetores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{GE}$.



5. Visto de cima, um toco firme é puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 200 N. Esboce a força resultante sobre o toco e responda:



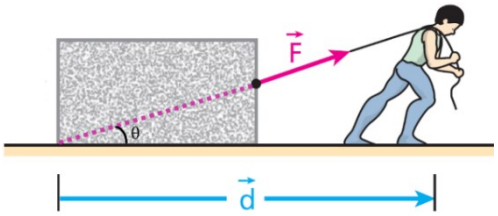
d) qual a intensidade da força resultante?

e) o que aconteceria com a intensidade do vetor resultante ($\vec{F}$), caso as forças fossem aplicadas na mesma direção, mas em sentido contrário.

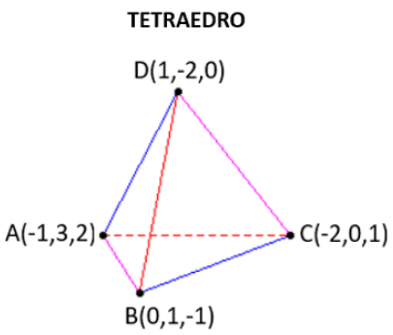
f) o que aconteceria com a intensidade da força resultante, caso o toco fosse puxado por um par de cordas, cada qual com uma força de 400N?

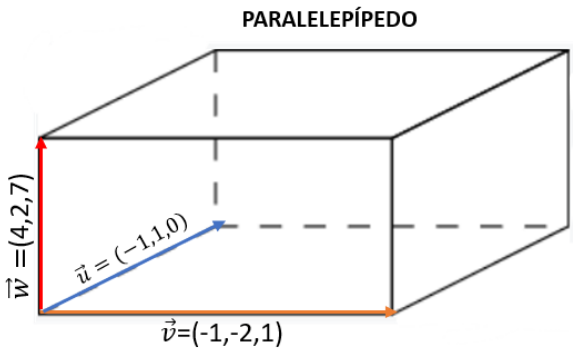
6. Um engenheiro foi contratado para projetar uma placa solar para ser adaptada ao telhado de uma casa; utilizando um papel quadriculado, fez um esboço interligando os seguintes pontos de forma sequencial: A(4,0,1), B(5,1,3), C(3,2,5) e D(2,1,3). Determine qual a área ocupada pela placa solar.

7. O esquema a seguir ilustra um homem que puxa um caixote por uma distância de 3 m ao imprimir uma força constante $\vec{F}$= (3,4). Calcule o valor do ângulo (θ) entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

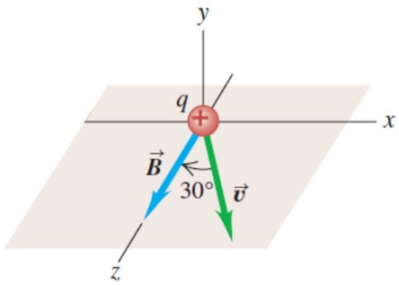


8. Uma estrutura metálica em forma de paralelepípedo foi construída para guardar alguns objetos no formato de tetraedro, tal como mostrados na figura. Determine a quantidade de objetos em forma de tetraedro que podem ser guardados no paralelepípedo.





9. A equação da força magnética em uma partícula carregada em movimento é $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Considerando a equação dada represente no plano a seguir a orientação da força magnética resultante.



10. Dado os vetores $\vec{P} = (2,0,-1)$, $\vec{Q} = (2,-1,2)$ e $\vec{R} = (2,-3,1)$. Determine:

a) $\vec{P} \cdot \vec{R}$ b) $(\vec{P} + \vec{Q}) \times (\vec{P} - \vec{Q})$ c) $|(\vec{P} + \vec{Q}) \times (\vec{P} - \vec{Q})|$ d) $\vec{Q} \cdot (\vec{R} \times \vec{P})$

APÊNDICE M

FICHA DE OBSERVAÇÃO

Data: ____/____/2023.Turma: _____Local: _____
Horário Início: _____ Término: _____
Nº de estudantes presentes: _____
Atividade trabalhada:_____
Objetivo da atividade:_____
Recurso(s) didático(s)
utilizado(s):_____
Tipo de atividade: ( ) Individual( ) Grupo

MOMENTOS	DOCENTE	DISCENTES
Organização	- Organiza o espaço adequadamente para a atividade? ( ) Sim ( ) Não - Organiza os materiais necessários adequadamente? ( ) Sim ( ) Não	- Se organizam adequadamente à atividade? ( ) Sim ( ) Não
Apresentação	- Demonstra segurança na apresentação da atividade? ( ) Sim ( ) Não - Apresenta a atividade de maneira clara e objetiva? ( ) Sim ( ) Não	- Demonstram interesse na atividade? ( ) Sim ( ) Não - Demonstram compreensão das orientações dadas? ( ) Sim ( ) Não
Execução	- Estabelece uma boa comunicação? ( ) Sim ( ) Não - Detecta os problemas e as necessidades dos estudantes para devida adequação? ( ) Sim ( ) Não - Elogia os estudantes, evidenciando seus saberes a habilidades? ( ) Sim ( ) Não - Responde às perguntas dos estudantes de maneira adequada e completa? ( ) Sim ( ) Não	- Interagem/Colaboram com colegas? ( ) Não ( ) Pouco ( ) Muito - Apresentam dificuldade na execução da atividade? ( ) Não ( ) Uso da calculadora ( ) Leitura/Interpretação ( ) Outra: - Solicitam ajuda? ( ) do Professor ( ) Com frequência ( ) Poucas vezes ( ) de Colegas ( ) Com frequência ( ) Poucas vezes
Sistematização	- Faz perguntas provocativas/sugestivas? ( ) Sim ( ) Não - Valoriza as ideias apresentadas pelos estudantes? ( ) Sim ( ) Não	- Têm iniciativa? ( ) Não ( ) Pouca ( ) Muita
Análise	- Estimula a independência intelectual dos estudantes? ( ) Sim ( ) Não	- Demonstram organização de ideias? ( ) Não ( ) Pouca ( ) Muita
Institucionalização	- Corrige a atividade? ( ) Sim ( ) Não	- Concluem a atividade adequadamente? ( ) Não ( ) Parcialmente ( ) Totalmente
Outras observações		

APÊNDICE N

DESCRIÇÃO DOS ERROS PELO MADE POR CATEGORIA[22]

Categoria 1 (Atividades de Ensino Experimental padrão) – Atividades 01, 02, 6.2 (parte 2) e 09.

Verificação dos erros pelo MADE - Categoria 1: a) Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; b) Erros de Organização da Informação e de Execução

Atividade	I. Erros de Entrada ou de Desequilíbrio de Informação						
	Erro no plano das Intenções			**Erro no plano das percepções da informação**			**Erros de Compreensão**
	Indefinição de Metas	Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção	Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas	Omissão de informação suficiente	Relação de redundância e de omissão	Distorção	
A3/A9Atv01Cat01S01	NA	A tarefa despertou mais objetivos do que os desejáveis	Trouxe informações além das exigida na questão em relação as unidades de algumas grandezas	NA	NA	NA	NA
A2/A4/A6Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
A5/A11Atv01Cat01S01	Não soube relacionar o procedimento da tabela com a observação	O texto do campo observação não está coerente com o objetivo da tarefa	NA	Não conseguiu perceber o que deveria conter o campo observação	Não souberam relacionar o conhecimento que já tinham com o observado na atividade	Supôs que a sua interpretação do problema estava correta	Não colocou uma observação coerente com o observado
A1/A10Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
A7/A8Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
A5/A11Atv02Cat01S01	NA	NA	Utilizou os conceitos de direção e sentido ainda não visto incorretamente	NA	NA	NA	NA

a) Erros de Entrada ou desequilíbrio da Informação

[22] Equipes/Alunos sem erros em determinado categoria foram ocultados.

Atividade	II. Erros de Organização da Informação			III. Erros de Execução		
	Erro de Análise e Síntese	Erro de ordenação	Erro de Conexão e Interferências	Erros mecânicos ou lapsos	Erros operacionais e de distração	Erros estratégicos
A3/A9Atv01Cat01S01	NA	NA	Considerou as unidades das grandezas deslocamento (Km) e comprimento (m) iguais	NA	Não classificou a grandeza aceleração de forma correta	NA
A2/A4/A6Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	Não classificou a grandeza aceleração de forma correta	NA
A5/A11Atv01Cat01S01	Observação incorreta sem relação com o objetivo da atividade e sem a percepção das características relevantes relacionadas na tabela.			Classificação incorreta das grandezas: aceleração, pressão, tempo.		
A1/A10Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	Não classificou a grandeza aceleração de forma correta.	NA
A7/A8Atv01Cat01S01	NA	NA	NA	NA	NA	Resolução incompleta da tabela
A5/A11Atv02Cat01S01	NA	NA	Confusão entre direção e sentido	NA	NA	NA
A1/A10Atv02Cat01S01	NA	NA	NA	NA	Indicou em um dos casos a componente incorreta	NA
A7/A8Atv02Cat01S01	NA	Relação inadequada entre o percurso e a distância	NA	NA	NA	NA
A3/A9Atv06.2Cat01S02	NA	NA	NA	Troca de um número por outro em um dos casos	NA	NA
A8/A10Atv06.2Cat01S02	NA	NA	Utilização do termo distância ao invés de deslocamento	NA	NA	NA
A1/A6Atv06.2Cat01S02	NA	NA	Representação incorreta de vetor no campo observação	NA	NA	NA

A3/A5/A09Atv09Cat01S04	NA	NA	NA	NA	Classificação incorreta de um par de vetores	NA
A2/A4Atv09Cat01S04	Conclusão incorreta, não relação entre o que foi realizado e as evidências descritas	Relação incorreta entre vetores paralelos e a divisão por seus módulos.	Utilização o conceito de módulo de forma inadequada	NA	NA	NA

b) Erros de Organização da Informação e Erros de Execução

Categoria 2 (Atividades de Ensino Experimental com questão problema ao final) – Atividades 03, 04 e 05.

Verificação dos erros pelo MADE - Categoria 2: a) Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; b) Erros de Organização da Informação e de Execução

Atividade	**I. Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação**						
	Erro no plano das Intenções			**Erro no plano das percepções da informação**			**Erros de Compreensão**
	Indefinição de Metas	Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção	Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas	Omissão de informação suficiente	Relação de redundância e de omissão	Distorção	
A2/A4Atv04Cat02S02	Não compreendeu o que a atividade solicitou		NA	Problemas de leitura e interpretação e incompreensão do significado de palavras e conceitos já estabelecidos.			
A3/A9Atv05Cat02S02	Não compreensão dos objetivos da atividade		NA	Problemas de leitura e interpretação e incompreensão do significado de palavras e conceitos já estabelecidos.			

a) Erros de Entrada ou desequilíbrio da Informação

Atividade	**II. Erros de Organização da Informação**			**III. Erros de Execução**		
	Erro de Análise e Síntese	Erro de ordenação	Erro de Conexão e Interferências	Erros mecânicos ou lapsos	Erros operacionais e de distração	Erros estratégicos
A2/A4Atv03Cat02S02	NA	NA	NA	Representação do deslocamento por setas	NA	NA
A5/A11Atv03Cat02S02	NA	NA	NA	Representação do deslocamento por setas	NA	NA
A8/A10Atv03Cat02S02	NA	NA	NA	NA	Realização de operação incorreta da	NA

					diferença para obter os deslocamentos de um quadrante	
A1/A6Atv03Cat02S02	NA	NA	NA	Representação do deslocamento por setas	NA	NA
A3/A9Atv04Cat02S02	Fórmula incorreta	Relação inadequada entre os dados da questão	Não conseguiu transferir para a linguagem algébrica (fórmula) a estratégia utilizada para resolver a atividade	NA	Realização de operação de forma incorreta para obter o ponto terminal, em alguns casos.	NA
A2/A4Atv04Cat02S02	Fórmula incorreta	Relação inadequada entre os dados da questão	Não conseguiu transferir para a linguagem algébrica (fórmula) a estratégia utilizada para resolver a atividade	NA	NA	Utilização do método incorreto para resolução
A5/A11Atv04Cat02S02	Fórmula incorreta	Relação inadequada entre os dados da questão	Não conseguiu transferir para a linguagem algébrica (fórmula) a estratégia utilizada para resolver a atividade	Utilizou a representação de vetores para o deslocamento	NA	NA
A8/A10Atv04Cat02S02	NA	NA	NA	Representação inadequada na fórmula	NA	NA
A1/A6Atv04Cat02S02	NA	NA	NA	Representação inadequada na fórmula	NA	NA
A3/A9Atv05Cat02S02	Fórmula incorreta			NA	NA	Realizou o cálculo do deslocamento
A2/A4Atv05Cat02S02	NA	NA	NA	Representação inadequada do vetor no cálculo da distância	NA	NA
A5/A11Atv05Cat02S02	NA	NA	NA	NA	Execução de alguns cálculos de forma incorreta: não calculou raiz,	NA

					parâmetros incorretos	
A8/A10Atv05Cat02S02	NA	NA	Representação inadequada de versores na fórmula.	Um valor de distância incorreto.	NA	NA
A1/A6Atv05Cat02S02	NA	NA	NA	Representação inadequada do vetor no cálculo da distância	NA	NA

b) Erros de Organização da Informação e Erros de Execução

Categoria 3 (Atividades de RPPP com previsão de resolução pelos alunos) – Atividades 06.1, 07 e 08.

Verificação dos erros pelo MADE - Categoria 3: a) Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; b) Erros de Organização da Informação e de Execução

Atividade	**I. Erros de Entrada ou Desequilíbrio da Informação**						
	Erro no plano das Intenções			**Erro no plano das percepções da informação**			**Erros de Compreensão**
	Indefinição de Metas	Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção	Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas	Omissão de informação suficiente	Relação de redundância e de omissão	Distorção	
A1Atv07Cat03S03	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
A2Atv07Cat03S03	NA	Falta de compreensão do que se pede	NA	Não percepção da exigência da tarefa	NA	Interpretação incorreta dos objetivos da atividade	Má interpretação do problema

a) Erros de Entrada ou desequilíbrio da Informação

Atividade	**II. Erros de Organização da Informação**			**III. Erros de Execução**		
	Erro de Análise e Síntese	**Erro de ordenação**	**Erro de Conexão e Interferências**	**Erros mecânicos ou lapsos**	**Erros operacionais e de distração**	**Erros estratégicos**
A1Atv07Cat03S03	NA	NA	NA	Representação inadequada do vetor mesmo sendo dado na questão	NA	NA
A2Atv07Cat03S03	Não respondeu o problema de acordo com a questão			NA	NA	Procedimento incorreto
A7Atv07Cat03S03	NA	NA	NA	Representação incorreta da operação	NA	NA

A8Atv08Cat03S04	NA	NA	NA	Representação incorreta de vetores	NA	NA
A10Atv08Cat03S04	NA	Ordem da operação incorreta	NA	Alteração de um sinal por outro	NA	NA

b) Erros de Organização da Informação e Erros de Execução

Categoria 4 (Atividades de RPPP sem previsão de resolução pelos alunos) – Atividades 10, 11, 12 e 13

Quadro 150 – Verificação dos erros pelo MADE - Categoria 4: a) Erros de Entrada ou Desequilíbrio de Informação; b) Erros de Organização da Informação e de Execução

Atividade	**I. Erros de Entrada ou Desequilíbrio da Informação**						
	Erro no plano das Intenções			**Erro no plano das percepções da informação**			**Erros de Compreensão**
	Indefinição de Metas	Incompreensão ou confusão do objetivo ou da intenção	Conflito de objetivos ou desvio de metas fixadas	Omissão de informação suficiente	Relação de redundância e de omissão	Distorção	
A1Atv10Cat04S04	NA	NA	NA	NA	NA	NA	Não sabia que magnitude e módulo eram sinônimos
A5Atv10Cat04S04	NA	NA	NA	NA	NA	NA	Não sabia que magnitude e módulo eram sinônimos

a) Erros de Entrada ou desequilíbrio da Informação

Atividade	**I. Erros de Organização da Informação**			**II. Erros de Execução**		
	Erro de Análise e Síntese	**Erro de ordenação**	**Erro de Conexão e Interferências**	**Erros mecânicos ou lapsos**	**Erros operacionais e de distração**	**Erros estratégicos**
A1Atv10Cat04S04	Não demonstrou que o vetor tinha magnitude 1	NA	Relação inadequada entre vetor paralelo e com magnitude 1	NA	NA	Não demonstrou como obter o vetor paralelo solicitado
A2Atv10Cat04S04	Não demonstrou que o vetor era paralelo	NA	Relação inadequada entre vetor paralelo e com magnitude 1	NA	NA	Não demonstrou como obter o vetor paralelo solicitado
A3Atv10Cat04S04	Não demonst	NA	Relação inadequada da	NA	NA	Não desenvolveu

	rou matemática como obter o vetor solicitado e nem a validade de seus argumentos teóricos		informação ao utilizar o conceito de proporção			matematicamente a questão
A4Atv10Cat04S04	Não desenvolver a questão matematicamente	NA	Não fez a conexão entre vetor paralelo e vetor unitário	NA	NA	Não demonstrou matematicamente como obter o vetor solicitado
A5Atv10Cat04S04	Não desenvolver a questão matematicamente	NA	Não fez a conexão entre vetor paralelo e vetor unitário	NA	NA	Não demonstrou como obter o vetor solicitado
A6Atv10Cat04S04	Não desenvolver a questão matematicamente	NA	Não fez a conexão entre vetor paralelo e vetor unitário	NA	NA	Não demonstrou como obter o vetor solicitado
A7Atv010Cat04S04	Não demonstrou o resultado matematicamente	NA	NA	NA	NA	Não demonstrou matematicamente como obter o vetor
A8Atv010Cat04S04	Não demonstrou o resultado matematicamente	NA	Não fez a conexão entre vetor paralelo e com magnitude 1	NA	NA	Não demonstrou matematicamente como obter o vetor
A1Atv11Cat04S05	NA	NA	Utilização de relação trigonométrica inadequada	NA	NA	Não destacou a equação em função das variáveis da questão
A3Atv11Cat04S05	NA	NA	Utilização de relação trigonométrica	NA	NA	NA

			inadequada pelo seno			
A4Atv11Cat04S05	NA	NA	Não definiu todos os parâmetros da relação trigonométrica	NA	NA	NA
A5Atv11Cat04S05	NA	NA	NA	Não especificou a operação no denominador	NA	NA
A9Atv11Cat04S05	NA	NA	Utilização de relação trigonométrica inadequada por tangente	NA	NA	NA
A1Atv12Cat04S05	Não identificou as propriedades do produto escalar para serem utilizadas	NA	Utilização inadequada do produto escalar	NA	NA	Não desenvolveu matematicamente a questão de forma correta
A2Atv12Cat04S05	Não identificou as propriedades do produto escalar para serem utilizadas	NA	Utilização inadequada do produto escalar e da lei dos cossenos	NA	NA	Procedimento incorreto ao utilizar lei dos cossenos
A3Atv12Cat04S05	Indicou a lei dos senos para resolver a questão	NA	NA	NA	NA	NS
A4Atv12Cat04S05	Não conseguiu desenvolver a questão algebricamente	NA	NA	NA	NA	NA
A6Atv12Cat04S05	NA	NA	Não conseguiu fazer a conexão entre	NA	NA	Inversão na ordem dos vetores ao

			conhecimentos anteriores			fazer o produto vetorial
A10Atv12Cat04S05	Não conseguiu desenvolver a questão algebricamente	NA	NA	NA	NA	NA
A11Atv12Cat04S05	Não identificou as propriedades do produto escalar para serem utilizadas	NA	Utilização inadequada do produto escalar	NA	NA	Não desenvolveu matematicamente a questão de forma correta
A1Atv13Cat04S05	Não conseguiu obter a altura	Não conseguiu desenvolver a equação de forma correta	Utilização incorreta no teorema de Pitágoras e Representação do produto vetorial com considerando o módulo da área	NA	NA	Definição incorreta da dimensão de um dos catetos
A2Atv13Cat04S05	Relação incorreta para obter a altura	NA	Utilização incorreta do produto vetorial para obter a altura	NA	Utilização incorreta do módulo para o produto vetorial	Escolha incorreta da operação vetorial para obter a altura
A3Atv13Cat04S05	Relação incorreta de volume	NA	Confusão entre base e altura na fórmula	NA	Utilização incorreta do módulo na fórmula de volume	Procedimento incorreto
A4Atv13Cat04S05	Relação incorreta de volume	NA	NA	NA	Utilização incorreta do módulo na fórmula de volume	Não definiu fórmula de volume de forma correta
A5Atv13Cat04S05	NA	NA	NA	NA	Utilização incorreta do módulo	Não definiu o sen θ
A6Atv13Cat04S05	NA	NA	NA	NA	Faltou utilizar o módulo na fórmula do volume	NA
A9Atv13Cat04S05	Não desenvolveu a questão		NA	NA	NA	Não definiu a estratégia para resolução
A10Atv13Cat04S05	NA	NA	Representação do produto vetorial com	NA	NA	NA

			considerando o módulo da área			
A11Atv13Cat 04S05	NA	NA	Representação do produto vetorial com considerando o módulo da área	NA	Utilização incorreta do módulo	NA

b) Erros de Organização da Informação e Erros de Execução

APÊNDICE O

PARAMETRIZAÇÃO – CORRELAÇÃO DE SPEARMAN

Variável	Opções	Parametrização
Escolaridade do Responsável Feminino	Fundamental Incompleto	1
	Ensino Médio	2
	Ensino Médio Incompleto	3
	Ensino Superior	4
Escolaridade do Responsável Masculino	Ensino Médio	1
	Ensino Médio Incompleto	2
	Ensino Superior	3
	Pós-graduação	4
Exerce Atividade Remunerada	Sim	1
	Não	2
Possui Curso Profissionalizante	Sim	1
	Não	2
Avaliação dos conhecimentos do EM	Foram adequados ao mercado de trabalho e profissão com aulas práticas, etc ... e proporcionaram cultura e conhecimento	1
	Proporcionaram cultura e conhecimento	2
Sentimento diante de uma avaliação de Matemática	Tranquilo	1
	Preocupado	2
	Nervoso	3
	Tranquilo, nervoso, preocupado	4
	Com medo, ansioso	5
Esteve em dependência	Sim	1
	Não	2
Hábito de estudo fora da escola	Todos os dias	1
	Somente nos fins de semana	2
	Somente no período de prova	3
	Somente na véspera de prova	4
Gostar de Matemática	Gosto bastante	1
	Gosto	2
	Gosto um pouco	3
Frequência durante a experimentação	100%	1
	90%	2
	80%	3
	70%	4

ANEXOS

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A - QUESTIONÁRIO DE EMOÇÕES DE APRENDIZAGEM E DESEMPENHO NA MATEMÁTICA (LIMA, 2012)
ANEXO B – PARECER CEP

ANEXO A

QUESTIONÁRIO DE EMOÇÕES DE APRENDIZAGEM E DESEMPENHO NA MATEMÁTICA (LIMA, 2012)

Este questionário tem como objetivo investigar as emoções desencadeadas na aprendizagem da matemática, contém um conjunto de testes elaborados com autoafirmações onde você poderá marcar seu grau de concordância em relação às mesmas através de numerações dispostas em escalas. Esta pesquisa tem o compromisso ético de garantir o caráter confidencial de sua participação, e sua identidade será preservada.

Número da chamada: _____

TESTE DE EMOÇÕES ACADÊMICAS

O questionário a seguir contém frases com os tipos de emoções que você pode vivenciar em situações e
atividades escolares ligadas à matemática tais como instruções em sala de aula, exercícios de classe, deveres
de casa/estudo e provas. A escala avalia o quanto você concorda que sente cada emoção descrita em cada
frase.
Por favor, leia as frases abaixo e utilize a escala de 1 a 5 para avaliá-las.

1	DISCORDO TOTALMENTE
2	DISCORDO
3	NEM DISCORDO NEM CONCORDO
4	CONCORDO
5	CONCORDO TOTALMENTE

1.Eu adoro as aulas de matemática. ☐
2.Eu me divirto estudando matemática. ☐
3.Eu me alegro só em saber que é dia de aula de matemática. ☐
4.Eu fico nervoso (a) antes de fazer uma prova de matemática. ☐
5.Eu sinto orgulho quando tiro a nota máxima em matemática. ☐
6.Durante uma prova de matemática me dá “um branco” e eu não consigo resolver as questões. ☐
7. Eu fico feliz quando faço uma boa prova de matemática ☐
8. Eu sinto orgulho de mim mesmo (a) ao estudar matemática sem precisar da ajuda a ninguém. ☐
9. Não sinto prazer em explicar como resolvi um problema de matemática ao professor. ☐
10. Depois de fazer uma prova de matemática, eu me preocupo com a possibilidade de tirar uma nota baixa. ☐
11. Quando não consigo resolver um dever de casa de matemática eu não procuro o professor para tirar
dúvidas porque sinto vergonha. ☐
12. Para mim, é um prazer passar a tarde estudando matemática. ☐
13. Geralmente, quando o professor está explicando um assunto de matemática e pergunta para toda a
turma se entendeu, eu digo que sim só porque tenho vergonha de dizer que não entendi nada. ☐
14. Depois de resolver meu dever de casa de matemática, sinto orgulho de mim. ☐
15. Eu adoro aprender um assunto novo de matemática. ☐
16. Durante a aula de matemática, ao ter que resolver um exercício sozinho, eu fico ansioso (a). ☐
17. Eu suo frio antes de entregar um dever de casa de matemática. ☐
18. Eu fico orgulhoso (a) de estar podendo entender as aulas de matemática. ☐
19. Às vezes eu me irrito ao folhear um livro de matemática que eu não compreendo. ☐
20. Eu sinto orgulho quando o professor elogia meu bom desempenho em matemática ☐
21. Fico ansioso (a) depois de fazer uma prova de matemática que eu achei difícil. ☐

22. Eu fico triste depois de uma aula de matemática que eu não entendi direito. ☐
23. Eu me irrito durante as aulas de matemática. ☐
24. Em geral, eu me envergonho quando não respondo direito as perguntas de matemática que professor me faz. ☐
25. Eu fico com raiva quando, mesmo estudando, não tiro uma nota alta em matemática. ☐
26. Geralmente eu sinto vergonha se, na aula de matemática, resolvo errado um problema de matemática no quadro. ☐
27. Eu sinto raiva quando não consigo resolver um problema e tenho vontade de desistir de aprender matemática. ☐
28. Eu me empolgo quando resolvo um problema de matemática. ☐
29. Eu tenho raiva de matemática e, sempre que posso, gazeio a aula. ☐
30. Eu me orgulho sempre que consigo resolver um problema difícil de matemática. ☐
31. Eu fico com raiva quando tenho que fazer um trabalho de matemática que vale nota. ☐
32. Geralmente, eu sinto vergonha quando participo de um trabalho de matemática em equipe e não sei
de nada do assunto. ☐
33. Eu me acanho quando, às vezes, tiro nota baixa em matemática. ☐
34. Pode acontecer de ficar encabulado (a) quando eu erro um problema de matemática que os meus colegas acertaram. ☐
35. Às vezes eu me aborreço quando tenho que ficar em casa estudando para a prova de matemática. ☐
36. Geralmente, não sei fazer certos cálculos de matemática direito e tenho vergonha disso. ☐
37. Ao fazer uma prova de matemática, pode acontecer de ficar nervoso. ☐

TESTE DE AUTOCONCEITO ACADÊMICO

O teste seguinte avalia o autoconceito acadêmico. Entende-se por autoconceito acadêmico as crenças do estudante de ter ou não ter as competências e habilidades que são necessárias para exercer controle sobre sua própria aprendizagem e desempenho.
Por favor, leia as frases abaixo e utilize a escala de 1 a 5 para avaliá-las.

1	DISCORDO TOTALMENTE
2	DISCORDO
3	NEM DISCORDO NEM CONCORDO
4	CONCORDO
5	CONCORDO TOTALMENTE

1. Eu tiro boas notas em matemática. ☐
2. Eu uso meu potencial criativo para resolver problemas de matemática. ☐
3. Mesmo que o assunto de matemática seja difícil, tenho plena certeza que sou hábil o suficiente para entendê-lo. ☐
4. Sou uma pessoa inteligente e por isso, dou conta dos estudos de matemática. ☐
5. Não tenho boa capacidade de raciocínio lógico, por isso, pra mim, é difícil resolver problemas de matemática. ☐
6. Sei que posso resolver bem uma prova de matemática mesmo que as questões sejam muito difíceis. ☐
7. Quando tiro uma nota baixa em matemática sei que posso recuperar porque, sou capaz de estudar melhor o assunto e tirar uma nota alta. ☐
8. Não preciso de muitas horas de estudo, pois aprendo rápido matemática. ☐
9. Sou uma pessoa capaz de enfrentar dificuldades. ☐
10. Busco atingir minhas metas com determinação. ☐
11.Dou o melhor de mim como estudante. ☐
12. Sou uma pessoa objetiva para resolver problemas em geral. ☐

ANEXO B

PARECER CEP

UEPA - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ- CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA SAÚDE - CAMPUS II

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O ENSINO DE VETORES GEOMÉTRICOS
Pesquisador: Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara
Área Temática:
Versão: 3
CAAE: 75173023.2.0000.5174
Instituição Proponente: Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE)
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.733.182

Apresentação do Projeto:
Essa pesquisa, de cunho experimental, tem por objetivo principal analisar os efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de
Problemas como ponto de partida e por Atividade Experimentais em uma turma de um curso de Engenharia do Instituto Federal de Educação
Ciência e Tecnologia, Campus Belém, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática a fim de responder ao seguinte questionamento:
De que forma a utilização de metodologias de ensino baseadas no protagonismo do ensino compartilhado entre docentes e discentes, tais como, a
Resolução de Problemas como ponto de partida e o Ensino por atividades Experimentais, favorecem a aprendizagem e a melhora do desempenho e
emoções em relação a matemática, além de estimular a autonomia, análise, dedução, domínio e o pensar reflexivo dos estudantes? Para tanto, a
partir das etapas da Engenharia Didática é previsto um estudo de diagnóstico considerando a construção histórica do objeto matemático vetores
geométricos, análise curricular, pesquisas brasileiras sobre o ensino de vetores, aplicação de questionários a docentes e discentes, aspectos da teoria da atividade e o uso de tendências metodológicas para a educação matemática, bem como, a aplicação de uma Sequência Didática com 13 atividades elaboradas a partir do uso da Resolução de Problemas como Ponto

Endereço: Trav. Perebebui, 2623 (1º andar da biblioteca do Campus II da UEPA, Sala 01)
Bairro: Marco **CEP:** 66.087-670
UF: PA **Município:** BELEM
Telefone: (91)3131-1781 **E-mail:** cepccbs@uepa.br

de Partida e de atividades experimentais. Por fim, para validação e
verificação dos resultados propõe-se a avaliação quanti e qualitativa dos dados coletados por meio da abordagem mista. Ao final da pesquisa espera -se que o uso de tendências matemáticas como a Resolução de Problemas como Ponto de Partida e o ensino por atividades experimentais favoreçam o processo de ensino aprendizagem e melhora do desempenho dos discentes em relação ao conteúdo de Vetores Geométricos.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Analisar os efeitos do ensino de Vetores Geométricos por meio da Resolução de Problemas como ponto de partida e o ensino por atividade experimentais, tendo por metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

Objetivo Secundário:

- Diagnosticar dificuldades de aprendizagem do assunto vetores geométricos a partir de relatos dos docentes e discentes e do estudo de teses e dissertações brasileiras;- Elaborar e aplicar uma Sequência Didática para o Ensino de Vetores Geométricos por meio de Resolução de Problemas e Ensino por Atividade Experimentais;- Verificar a aprendizagem e os efeitos do experimento a partir da aplicação da sequência didática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Conforme RESOLUÇÃO Nº 466, DE 12 DE DEZEMBRO DE 2012/CNS no seu inciso II-22 que define risco da pesquisa como a ¿possibilidade de danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual do ser humano, em qualquer fase de uma pesquisa e dela
recorrente¿, (CNS, 2012).

As pesquisas via questionário e a Intervenção por meio da Experimentação em sala de aula podem provocar, em menor escala, riscos como:
cansaço ou aborrecimento ao responder o questionário e/ou questões, alterações na autoestima provocadas pela evocação de memórias, medo de
não saber responder ou de ser identificado, estresse.

Para prevenção, todos os sujeitos da pesquisa serão esclarecidos das condições para a participação via TCLE, ressaltando, o caráter voluntário, a

garantia da privacidade e sigilo e o anonimato.

Benefícios:

Aos docentes, o estudo provocará uma reflexão da sua forma de ensinar, da abordagem metodológica e do método utilizado; além disso, a pesquisa, de certa forma, analisa e investiga um método de ensino que poderá ser avaliado e utilizado, posteriormente, pelos mesmos.

Aos alunos participantes da pesquisa via questionário, de imediato, haverá uma reflexão do conteúdo aprendido, quais ensinamentos ainda são persistentes e a relevância dos mesmos para a sua vida profissional.

Aos alunos que participarão da fase de experimentação, a oportunidade de vislumbrar uma nova metodologia de ensino e o favorecimento do processo de ensino aprendizagem, autoestima, autonomia, capacidade de superar desafios e promoção do pensar ativo, criativo e colaborativo do aluno em sala de aula e na resolução de problemas, dentre outras coisas.

De forma geral, o estudo pode servir como aporte teórico para o desenvolvimento de atividades de ensino e método de ensino em qualquer área.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A Pesquisa é relevante

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Presente

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem Pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

Após a avaliação pelos referees que compõem o Comitê de Ética em Pesquisa do CCBS/UEPA e aprovação, em reunião de Colegiado, do dia 22/03/2024, a proposta atendeu as exigências das Resoluções em vigor.

Conforme as Resoluções 466/12 e 510/2016, é atribuição do CEP acompanhar o desenvolvimento dos projetos, por meio de relatórios semestrais dos pesquisadores e de outras estratégias de monitoramento, de acordo com o risco inerente a pesquisa. Ressaltamos as seguintes atribuições do pesquisador: Desenvolver o projeto conforme delineado; Elaborar e apresentar os relatórios parcial (is) e final até 60 dias após o seu término (como notificação); Apresentar dados solicitados pelo CEP ou pela CONEP a qualquer momento; Manter os dados

da pesquisa em arquivo, físico ou digital, sob sua guarda responsabilidade, por um período de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa; Encaminhar os resultados da pesquisa para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico integrante do projeto. Justificar fundamentadamente, perante o CEP, qualquer modificação (emenda) ou interrupção do projeto e identificar nas Informações Básicas tais mudanças.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2207005.pdf	11/03/2024 12:31:18		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo_assentimento_experimentacao_Apendicel.pdf	11/03/2024 12:29:25	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_experimentacao_menor_idade_novo_ApendiceH.pdf	11/03/2024 12:29:00	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_experimentacao_novo_ApendiceG.pdf	11/03/2024 12:28:49	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_questionario_discente_analises_previas_MENOR_IDADE_novo_ApendiceE.pdf	11/03/2024 12:28:26	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo_assentimento_questionario_analises_previas_novo_apendice_F.pdf	11/03/2024 12:27:48	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_questionario_discente_analises_previas_novo_ApendiceD.pdf	11/03/2024 12:27:20	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_questionario_docente_novo_ApendiceC.pdf	11/03/2024 12:27:07	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura	PROJETO_RITA_KASAHARA.pdf	11/03/2024 12:26:47	Rita de Cássia Florêncio Rocha	Aceito

Investigador	PROJETO_RITA_KASAHARA.pdf	11/03/2024 12:26:47	Kasahara	Aceito
Cronograma	cronograma_NOVO.pdf	11/12/2023 10:58:09	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Cronograma	cronograma_NOVO.pdf	06/12/2023 11:22:00	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	termo_anuencia_novo_assinado.pdf	05/12/2023 18:31:08	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	ACEITE_ORIENTADOR_assinado.pdf	29/11/2023 17:16:30	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	17/10/2023 16:21:30	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termo_confidencialidade_sigilo.pdf	17/10/2023 16:21:19	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	sequencia_didatica_13_atividades.pdf	17/10/2023 16:19:04	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	questionario_emocoes_desempenho.pdf	17/10/2023 16:17:46	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	questionario_docente.pdf	17/10/2023 16:17:11	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	questionario_academico_socioeconomico.pdf	17/10/2023 16:16:34	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	questionario_discente_analises_previas.pdf	17/10/2023 16:15:19	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	ficha_acompanhamento_observacao.pdf	17/10/2023 16:13:25	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Outros	declaracao_assistencia_participante.pdf	17/10/2023 16:13:01	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito
Declaração de Pesquisadores	declaracao_pesquisador_responsavel.pdf	17/10/2023 16:12:04	Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara	Aceito

UEPA - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ- CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS E DA SAÚDE - CAMPUS II

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

BELEM, 29 de Março de 2024

Assinado por:
REGINA GABRIELA CALDAS DE MORAES
(Coordenador(a))

Endereço: Trav. Perebebui, 2623 (1º andar da biblioteca do Campus II da UEPA, Sala 01)
Bairro: Marco **CEP:** 66.087-670
UF: PA **Município:** BELEM
Telefone: (91)3131-1781 **E-mail:** cepccbs@uepa.br

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
TV. DJALMA DUTRA, S/N. – TELÉGRAFO
Email:ppged@uepa.br – Fone: (91)4009-9552