Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Belém – PA
2008

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará.

Linha de pesquisa: Formação de Professores

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Belém – PA
2008

Dados internacionais de catalogação-na-publicação (CIP).
Biblioteca do Centro de Ciências Sociais e Educação, UEPA, Belém – PA

Pinheiro, Carlos Alberto de Miranda.
O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema/ Carlos Alberto de Miranda Pinheiro; Orientador Pedro Franco de Sá. __ Belém: [s.n.], 2008.
164f.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

1. Formação de Professores de Matemática. 2. Educação Matemática. 3. Didática da Matemática. 4. Análise Combinatória. I. Pinheiro, Carlos Alberto de Miranda. II. Título.

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará.
Linha de pesquisa: Formação de Professores

Data: _____/______/______

Banca Examinadora

_________________________________ - Orientador
Prof. Pedro Franco de Sá
Dr. em Educação
Universidade do Estado do Pará

____
Prof. Emmanuel Ribeiro Cunha
Dr. em Educação
Universidade do Estado do Pará

____
Prof. Iran Abreu Mendes
Dr. em Educação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Belém
2008

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais João e Adélia, pela educação familiar que me proporcionaram.

A minha esposa Mônica e minhas filhas Viviane e Karla pelo amor, apoio e compreensão durante essa caminhada.

Ao meu orientador, professor doutor Pedro Franco de Sá, não só pela orientação firme e segura, mas também pela amizade, paciência e entusiasmo que proporcionaram a conquista de mais uma realização de vida.

A minha amiga, professora Rose Jucá, pelo seu apoio nos momentos de tristeza e alegria dessa caminhada.

A minha amiga, professora Sylvia Pinto, pelo auxílio na revisão textual.

A todos os professores, funcionários e colegas do programa de Pós-Graduação em Educação da UEPA, pelo incentivo e apoio oferecido de diversas maneiras.

À Direção do colégio Deodoro de Mendonça por autorizar o desenvolvimento de nosso experimento junto aos alunos da 2ª série do Ensino Médio.

Aos professores, Dr. Iran Abreu Mendes e Dr. Emmanuel Ribeiro Cunha, pelas sábias orientações apresentadas durante o processo de qualificação.

Ao professor Marcel Sampaio pela colaboração durante as filmagens das aulas.

Ao professor Dionísio Sá pelo apoio ofertado no período inicial dessa jornada.

RESUMO

PINHEIRO, C. A. M. **O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA.** 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade do Estado do Pará, Belém, 2000.

Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação sobre os conceitos básicos de Análise Combinatória. Para viabilizar esse estudo, foi aplicada uma seqüência didática com ênfase na resolução de problemas como ponto de partida junto aos alunos da segunda série do ensino médio. A opção metodológica de pesquisa fundamentou-se nos Princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996). Realizou-se um breve estudo sobre a resolução de problemas, o uso de jogos no Ensino da Matemática e das pesquisas acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. No que se refere à fundamentação teórica, utilizou-se a resolução de problema como ponto de partida, extraída de Sá (2005), e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986). Por meio dela, o aluno pode caminhar da ação à formalização do conceito que se almeja ensinar. Foram utilizados um pré-teste, um pós-teste, os registros dos alunos e uma câmera de vídeo como instrumentos de coleta de dados. Participaram da pesquisa 15 alunos, da segunda série do Ensino Médio, de uma escola pública em Belém do Pará. Os resultados indicam que a seqüência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem com o intuito dos alunos desenvolverem as habilidades básicas da Análise Combinatória.

Palavras-Chave: Engenharia Didática, Ensino de Análise Combinatória, Formação Continuada de Professores de Matemática, Resolução de Problema como ponto de partida.

ABSTRACT

PINHEIRO, C. A. M. **O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA**. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade do Estado do Pará, Belém, 2000.

This paper presents the results of research on the basic concepts of Combinatorial Analysis. To facilitate this study, we applied a sequence teaching with emphasis on solving problems as a starting point for students from the second grade of high school. The choice of research methodology was based on the Principles of Engineering Teaching of Artigue (1996). There was a brief study on the resolution of problems, the use of games in the Teaching of Mathematics and the research on teaching and learning of Combinatorial Analysis. As regards the theoretical basis, used the resolution of problems as a starting point, extracted from Sá (2005), and the Theory of Didactic Situations of Brousseau(1986). Through them, the student can move from the action to formalize the concept that teaching aims. We used a pre-test, a post-test, the records of students and a video camera and instruments for data collection. 15 students from the second grade of high school in a public school in Belém do Pará participated in the survey. The results indicate that the teaching sequence provides favorable conditions for learning in order to develop students' basic skills of Combinatorial Analysis.

Keywords: Engineering Teaching, Teaching Combinatorial Analysis, training of teachers of mathematics, problem solving as a starting point.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. DA TRAJETÓRIA PESSOAL AO OBJETIVO DA PESQUISA

No mundo de intensas transformações científicas e tecnológicas, o cidadão necessita de uma formação geral, sólida, capaz de ajudá-lo a pensar cientificamente, de colocar à luz da ciência os problemas humanos. Dessa forma, nossa sociedade determina que ele desenvolva habilidades que possibilitem uma maneira de processar e resolver problemas com mais rapidez e eficácia. Para isso, vários setores da sociedade são responsáveis pela formação desse cidadão, e a escola é um deles.

A escola tem um papel insubstituível quando se trata da formação das novas gerações para o enfrentamento das exigências postas pela sociedade contemporânea; o compromisso de reduzir a distância cada vez maior entre o formalismo da sala de aula e a cultura de base produzida no cotidiano deve ajudar os alunos a tornarem-se sujeitos pensantes, capazes de construir os elementos categoriais de compreensão e apropriação crítica da realidade.

No entanto, o modelo encontrado é o de uma escola que se preocupa com a burocratização do ensino, com os conteúdos impostos pelos interesses de uma classe dominante e produzidos por uma política educacional fragmentada, desarticulada, descontínua e compartimentada. Dessa forma, o que observamos é um crescimento do número de jovens despolitizados, subordinados de forma passiva ao neoliberalismo.

Para Moraes (2005), as coisas não mudam na escola, principalmente, pelas dificuldades enfrentadas por todos aqueles que nela exercem as suas atividades profissionais. Nesse cenário, encontramos o professor de Matemática, um personagem de suma importância que continua, ainda, privilegiando o velho modelo de ensino com o qual ele foi ensinado.

Moraes (2005) descreve o paradigma educacional emergente como sendo um novo modelo educacional capaz de gerar novos ambientes de aprendizagem; ambientes capazes não apenas de acompanhar e incorporar a evolução que ocorre no mundo da ciência, da técnica e da tecnologia, mas também de colaborar para restabelecer o equilíbrio necessário entre a formação humana e sua dimensão espiritual com a formação tecnológica, contribuindo para que ele possa sobreviver num mundo cada vez mais tecnológico e digital. Podemos, também, considerar que esse paradigma representa uma proposta educacional centrada na pessoa que compreende a importância do pensar crítico e criativo, que seja capaz de integrar as colaborações das inteligências humanas e da inteligência da máquina, evidenciando que só o ser humano é capaz de transcender e criar.

Por esses motivos, entendo que o professor precisa ter uma autonomia intelectual e outra autonomia que o torne capaz de construir seu próprio currículo, mediando o conhecimento historicamente construído e o que realmente fará parte dos conhecimentos que ele ajuda a construir dentro do espaço escolar. Mas, a busca pela construção de tais conhecimentos é um reflexo da formação que esse professor desenvolve ao longo de sua história de vida.

Coloco-me como exemplo para justificar tal afirmação, pois durante minha formação-base (Primeiro e Segundo Graus), apresentei acentuadas dificuldades de aprendizagem, por motivos que explicitarei a seguir, e isso reflete na minha formação acadêmica até os dias atuais. Sendo assim, tentarei apresentar parte de minha formação em duas etapas: a de aluno e a de professor.

Como aluno nos antigos Primeiro e Segundo Graus, vivenciei um período de intensas greves de professores e de um Brasil que estava abrindo as portas para as transformações políticas, era a década de 1980.

Quase não havia aulas e durante os três anos que passei no Segundo Grau o cenário foi sempre o mesmo. Essa situação, para um jovem de família pobre, sem a mínima condição de pagar um cursinho pré-vestibular, correspondia a uma perspectiva de não conseguir uma ascensão social por meio dos estudos. Isso foi um fato, concluí o último ano de minha formação-base sem a mínima condição de passar nos vestibulares das Universidades Públicas.

Com muita sorte, encontrei um curso popular que preparava alunos para as escolas militares. Durante um ano, estudei todo o conteúdo de Matemática dos Primeiro e Segundo Graus, incluindo limite, derivada e integral. Eram intensas tardes e noites resolvendo exercícios de matemática.

O primeiro ano foi muito difícil, pois não conseguia acompanhar as aulas, o nível dos alunos mais antigos era muito elevado e eles, por motivo de concorrência, não ensinavam aos mais novos.

Após dois anos de estudos, alcancei um desenvolvimento surpreendente nas resoluções das questões de Matemática, especificamente, as que eram cobradas nos concursos militares. Sentia-me preparado e passei a ensinar os colegas mais novos, mudando aquela concepção de não ajudar o concorrente. Por assumir essa postura, e pelo meu bom desempenho nas aulas de Matemática, fui nomeado monitor do professor da disciplina. Considero essa passagem de minha vida o início de minha formação como professor.

No ano de 1989, ingressei na Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante. Após três anos estudando em regime de internato, graduei-me em Bacharel em Ciência Náutica.

Nos primeiros anos da década de 1990, a Marinha Mercante Brasileira passou por uma forte crise financeira. Pude presenciar, numa viagem à Holanda, navios brasileiros presos por falta de pagamentos de tarifas portuárias. Essa e outras questões motivaram meu afastamento da Marinha Mercante.

Após alguns meses, desembarcado, fui a um curso preparatório para provas do supletivo, conhecidas como provas do DESU[1], realizar um teste para lecionar Matemática. Passei no teste e durante quatro anos ministrei aulas de matemática para alunos do supletivo.

No supletivo, desenvolvi a habilidade de olhar para os rostos dos alunos e perceber, por meio de suas expressões faciais, que eles tinham dificuldades de compreender o que estava sendo exposto. Nesse período, também percebi que me faltava mais fundamentação matemática, então, ingressei na Universidade do Estado do Pará para cursar Licenciatura em Matemática.

Após minha passagem pelo Supletivo, fui convidado para trabalhar com cursinhos pré-vestibulares. No início, foi muito difícil, pois eu estava entrando num segmento de ensino que já tinha em Belém um grupo forte e respeitado de professores de Matemática. Mas, a preparação que tive para ingressar nas escolas militares foi minha principal estratégia na conquista do espaço como professor nos cursinhos. Pois, nas aulas eu procurava resolver somente as questões que eram cobradas nas principais escolas militares, diferenciando-me, assim, dos outros professores que procuravam utilizar apenas as questões dos livros didáticos.

A partir daí, passei a receber vários convites para trabalhar em grandes escolas e cursos pré-vestibulares, da rede particular de ensino de Belém. Mas, existia dentro de mim uma intensa inquietação, por acreditar que o trabalho que eu estava desenvolvendo era muito pequeno em termo de conhecimentos no campo do Ensino da Matemática, precisava voltar à Universidade.

---

[1] Realizadas pelo Departamento de Supletivo da Secretária de Educação do Estado do Pará.

No final da década de 1990, tive a felicidade de ser aceito para fazer parte, como discente, do programa Pró-Ciências[2] desenvolvido na Universidade do Estado do Pará. O objetivo do programa era capacitar, em nível de aperfeiçoamento, os professores de Matemática ao trabalho docente no Ensino Médio. Nesse curso, consegui um bom desenvolvimento na minha formação matemática, voltada aos conteúdos do Ensino Médio. No que tange às discussões pedagógicas, não houve muito avanço, mas passei a ministrar os conteúdos que haviam sido abordados no curso com mais segurança.

Com o surgimento da necessidade de trabalhar a formação dos alunos do Ensino Básico, por meio de competências e habilidades, as principais universidades públicas do Estado do Pará promoveram fortes mudanças em suas propostas de conteúdos para as provas dos vestibulares. Esse fato motivou-me, no ano de 2003, a procurar novamente a universidade. Foi quando ingressei no Programa de Pós-Graduação *Lato Sensu*, em Educação Matemática, da Universidade do Estado do Pará.

O forte grupo de professores desse programa proporcionou-me um olhar, completamente desconhecido de minha parte, acerca do que vinha a ser Educação Matemática. A necessidade de aprender a gostar de ler, a importância que deve ser dada ao campo da psicologia educacional, da Filosofia da Matemática, das novas tecnologias educacionais, de estudar a História da Matemática e de realizar pesquisas, não eram questões que faziam parte das reflexões de um professor que foi construído em salas de aula dos cursinhos pré-vestibulares.

Como descrevi acima, eu não tinha dimensão nenhuma do que era fazer uma pesquisa acadêmica. Então, procurei juntamente com outro colega de turma, o professor Doutor Pedro Franco de Sá, para que nos aceitasse como seus orientandos do trabalho de conclusão do curso de especialização em Educação Matemática.

O professor Pedro Sá nos revelou sua intenção em desenvolver pesquisas sobre Análise Combinatória voltadas para as escolas, pois ele acreditava que havia poucos trabalhos no referido campo de investigação. De fato, isso foi confirmado em Sturm (1999). O autor foi, também, motivado a realizar um estudo acerca do ensino de Análise Combinatória após ter lido a tese e os artigos do

[2] . Programa de Melhorias do Ensino de Ciências e Matemática

Professor Dario Fiorentini, que apontavam a não existência, no Brasil, de nenhuma tese ou dissertação que tivesse como objeto de investigação o ensino de Análise Combinatória no nível escolar.

Nesse sentido, desenvolvemos uma pesquisa cujo tema foi “Ensino de Análise Combinatória: O que ficou?”. O relatório final da pesquisa serviu como exigência parcial para o nosso título de Especialista em Educação Matemática.

A partir daí, não mais com o colega de turma, continuei realizando estudos acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Passei a investigar, dentro de minhas possibilidades de acesso, os trabalhos que envolvem a referida temática. Encontrei pesquisas que investigaram *as estratégias e as dificuldades dos alunos quando resolvem problemas de Análise Combinatória* (Correia e Fernandes, 2007; Batanero et al. 1996; Piaget e Inhelder, 1951; Fiscbein et al., 1975; Pacheco, 2001) e às que investigaram *sequências de ensino de Análise Combinatória* (Esteves, 2001; Dornelas, 2004; Rocha, 2002; Sturm, 1999).

No que se refere às pesquisas que investigaram sequências de ensino de Análise Combinatória, pude considerar que foram desenvolvidas nas salas de aulas, de escolas do Ensino Fundamental e Médio; analisaram os fenômenos inerentes ao ensino-aprendizagem da Análise Combinatória dentro da realidade em que vivem professor e aluno, validando sequências de ensino desenvolvidas por meio de resoluções de problemas. Seus autores utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem como técnica essencial à resolução dos problemas de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação sem a prévia apresentação das fórmulas.

Os resultados apontaram a importância da realização de novas pesquisas no campo da Análise Combinatória com a intenção de potencializar o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia básica para a resolução dos problemas. Esse tipo de estratégia de ensino caminha no sentido inverso ao método tradicional de ensino (Definição, aplicação, exercícios), isto é, parte do problema e faz o aluno chegar às definições e às fórmulas. No entanto, mesmo considerando a importância das fórmulas, os autores não objetivaram, em suas Sequências Didáticas, estudar um caminho que conduzisse os alunos à possível construção das fórmulas e definições do Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples. Mas, será que isso é possível? Se for possível, como fazê-lo? Parece que faltam discussões sobre estes aspectos.

Entendo que seja necessário avançar nas discussões acerca das sequências didáticas para o ensino de análise combinatória. Pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 1999, p. 257).

É exatamente essa cuidadosa abordagem dos conteúdos, citada no documento oficial, que traz a questão da necessidade de mais desenvolvimento de pesquisas no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, bem como Estatística e Probabilidade.

Nesse sentido, levantei a seguinte questão de pesquisa: “Uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória?” e como questão derivada da primeira, “É possível a partir do ensino oferecido, que os alunos tenham desenvolvido habilidades básicas para resolverem os problemas de Análise Combinatória?

Em busca de respostas às questões de pesquisa, elaborei uma Sequência Didática e a experimentei junto aos alunos do ensino médio, turno da tarde, da Escola Estadual Deodoro de Mendonça, em Belém do Pará.

O objetivo da pesquisa foi investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas[3], utilizando a resolução de problemas como ponto de partida.

Para alcançar esse objetivo e as possíveis respostas às questões de pesquisa:

- Realizei um estudo sobre os trabalhos desenvolvidos no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, incluindo os livros

---

[3] Para Brousseau (1986 apud FREITA, 1999), uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor), com finalidades de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

técnicos que abordam o assunto em questão. Com esses estudos, procuramos conhecer melhor a temática e utilizar os resultados dos trabalhos na análise dos dados da pesquisa.

- Utilizei duas tendências de estudos no campo da Educação Matemática e uma fundamentação teórica voltada ao desenvolvimento de pesquisas que envolvam situações reais de ensino na sala de aula. No que tange às tendências, realizei um breve estudo sobre a resolução de problemas e o uso de jogos no Ensino da Matemática. Na primeira, evidenciei a resolução de problema como ponto de partida, por considerarmos mais adequada para o desenvolvimento de uma sequência de ensino que nos possibilite encontrar resposta as nossas questões de pesquisa; a segunda caberá na sequência de ensino como uma forma de fixar os conceitos que desenvolveremos nas aulas. Utilizamos como aporte teórico, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), que permite ao aluno caminhar da ação à formalização do conhecimento que se deseja ensinar; e as ideias extraídas de Sá (2005) acerca do uso da resolução de problemas como ponto de partida.
- Fiz a declaração da Engenharia Didática[4] como minha opção metodológica de pesquisa, porque pretendi desenvolver uma sequência didática baseada na concepção, na realização, na observação e na análise de sequência de ensino de Análise Combinatória.
- Descrevi minha experimentação e analisei os dados produzidos na pesquisa.

Sendo assim, nesta seção, apresento minha trajetória pessoal e os objetivos da pesquisa, juntamente com as questões que nortearam este trabalho.

A seção seguinte consta um estudo acerca dos trabalhos desenvolvidos no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Esses trabalhos são pesquisas desenvolvidas no âmbito nacional e internacional; apresento um estudo

[4] Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se antes de tudo por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequência de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 193-207)

dos trabalhos de Análise Combinatória, sob orientação do professor Doutor Pedro Franco de Sá, desenvolvidos no Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará. Finalmente, apresento um estudo dos conceitos básicos da Análise Combinatória para o Ensino Médio.

Na seção 3, apresento uma reflexão acerca de duas tendências em Educação Matemática, conhecidas como metodologia da resolução de problemas e o uso de jogos no ensino da Matemática. Evidencio as interpretações da expressão resolução de problemas como: objetivo, processo e ponto de partida. Nessa última interpretação, encontrei as sugestões metodológicas elaboradas por Sá (2005) direcionada aos professores que se propuserem a desenvolver sequências de ensino de algum conteúdo da Matemática, utilizando a referida abordagem metodológica. Apresento a Teoria das Situações Didática desenvolvida por Brousseau (1996), direcionada às pesquisas que se propõem a investigar a experimentação de sequências didáticas e os seus efeitos no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de determinado conteúdo matemático.

Na seção 4, apresento a Metodologia da pesquisa, bem como os seus procedimentos metodológicos. Por esse objeto de estudo ser uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória, compreendo que o aporte metodológico da pesquisa precisava estar voltado às pesquisas interessadas no complexo campo de investigações existentes nas salas de aula de uma escola do Ensino Base. Por essas razões, minha opção metodológica de pesquisa é conhecida no âmbito da Educação Matemática como Engenharia Didática.

Na seção 5, apresento um comentário geral acerca do pré-teste e das situações-problema da sequência de ensino.

Na seção 6, descrevo os sete encontros que tive com a turma 202, da segunda Série do Ensino Médio, turno da tarde, do colégio Deodoro de Mendonça situado no centro de Belém do Pará.

Na seção 7, apresento uma análise dos resultados obtidos no pré-teste, no pós-teste e nos extratos dos protocolos dos alunos. E, finalmente, apresento minhas considerações finais.

2. ESTUDOS SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Esta seção apresenta um estudo acerca dos trabalhos desenvolvidos no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, em nível nacional e internacional, e no Centro de Ciências Sociais e Educação (UEPA) sob a orientação do professor Doutor Pedro franco de Sá. O objetivo é o de apresentar um estudo dos conceitos básicos da Análise Combinatória para o Ensino Médio a partir de uma sequência didática.

2.1. UM ESTUDO DOS TRABALHOS DESENVOLVIDOS NO CAMPO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A intenção de realizar um estudo acerca dos trabalhos desenvolvidos no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória decorreu da necessidade de conhecer trabalhos relacionados com nosso objeto de pesquisa. Dessa forma, procuramos analisar até que ponto o trabalho que estávamos nos propondo a desenvolver se diferenciava dos que estavam sendo desenvolvidos ou já concluídos.

Encontramos uma boa quantidade de literaturas que tratam do tema. Em nossa análise, identificamos trabalhos que:

- Investigaram as estratégias e as dificuldades dos alunos quando resolvem problemas de Análise Combinatória;
- Investigaram sequências de ensino de Análise Combinatória.

A seguir, apresentamos os trabalhos que analisamos tendo como foco principal os resultados alcançados pelos mesmos.

2.1.1. Trabalhos que investigaram as estratégias e as dificuldades dos alunos quando resolvem problemas de Análise Combinatória

Batanero *et al.* (1997) estudaram as estratégias nas resoluções de problemas combinatórios por estudantes com preparação matemática avançada. Os autores apresentaram um estudo sobre os processos de resolução de problemas combinatórios simples e compostos; os sujeitos da pesquisa foram quatro estudantes do quinto ano do curso de licenciatura em Matemática; os estudantes foram selecionados entre os que obtiveram maiores e piores resultados na resolução de 13 problemas combinatórios elementares apresentados a 29 estudantes em um questionário escrito.

Os resultados apontaram que os estudantes mostraram dificuldades elevadas com os problemas, inclusive estudantes com uma sólida preparação matemática. Os bons resultados estão caracterizados pela identificação na resolução dos problemas, na compreensão da ordem, na repetição no enunciado dos problemas e na generalização e identificação da operação combinatória adequada. As causas de fracasso foram: a confusão sobre o tipo de elementos que se combinam; a falta de capacidade de enumeração sistemática e falhas na conclusão final, os conhecidos erros de cálculo.

Em outro trabalho, intitulado Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário, Batanero (1996) e seus colaboradores consideram o quanto é importante analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem ser consideradas essas variáveis no aprendizado.

Os autores descreveram e classificaram os problemas combinatórios simples segundo três modelos básicos: seleção, partição e colocação. Eles realizaram o trabalho com uma amostra de 720 alunos, com idade de 14 e 15 anos, de nove escolas de Granada e Córdoba, utilizando como instrumento de pesquisa um grupo de 13 questões de Análise Combinatória. Dos alunos que participaram da pesquisa, 352 haviam recebido instrução acerca das operações básicas de combinatória e os outros alunos (368) não haviam tido contato com o referido assunto.

Em relação às dificuldades dos alunos na resolução de problemas combinatórios, Batanero *et al.* (1996) referem as seguintes: enumeração não sistemática, que consiste numa estratégia de tentativa e erro, sem qualquer procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades; uso incorreto do diagrama de árvore; erro de ordem, em que é considerada a ordem em situações em que é irrelevante ou não é considerada em situações em que é pertinente; erro de repetição, em que não é considerada a repetição dos elementos quando tal é possível ou é considerada em situações de impossibilidade; confusão quanto ao tipo de objeto, isto é, os objetos idênticos são considerados distinguíveis ou os objetos distintos são considerados indistinguíveis; e confusão quanto ao tipo de subconjunto em modelos de partição ou de distribuição, que consiste em distinguir subconjuntos idênticos ou em não diferenciar subconjuntos distinguíveis.

Em Correia e Fernandes (2007), encontramos de forma sucinta uma descrição dos trabalhos que Piaget e Inhelder (1951), juntamente com o de Fischbein *et al.* (1975), desenvolveram sobre as dificuldades dos alunos em resolver problemas de Análise Combinatória.

Segundo Piaget e Inhelder (1951):

> Atingido o período das operações formais, os adolescentes descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória. A aquisição de estratégias gerais de contagem, envolvendo operações de segunda ordem, verifica-se a partir dos 11-12 anos, no caso das combinações e dos arranjos, e as permutações não se completam antes dos 15 anos. A descoberta mais tardia das permutações deve-se, sem dúvida, ao fato de serem muito mais numerosas e implicarem o estabelecimento de uma relação segundo uma espécie de sistema móvel e reversível, melhor dizendo, transformação da ordem a partir de elementos variáveis (PIAGET e INHELDER, apud CORREIA e FERNANDES, 2007, p. 1257).

Fischbein *et al.* (1970) contestam esses resultados ao afirmarem que:

> Nem todos os sujeitos do estágio das operações formais eram capazes de descobrir o método de construir as combinações, nem sequer eram capazes de tratar satisfatoriamente os arranjos até a idade dos 13 anos e as permutações até à idade dos 14-15 anos,(...) a capacidade requerida para as operações combinatórias desenvolve-se gradualmente, mas não fica completa durante este estágio (FISCHBEIN *et al.*, 1970 apud CORREIA E FERNANDES, 2007, p.1257).

As duas posturas apresentadas acima estão presentes em quase todos os trabalhos que nós revisamos e os resultados apontam que nem sempre os sujeitos no estágio das operações formais são capazes de descobrir métodos de construir as operações combinatórias, possibilitando a resolução de problemas de forma espontânea. Validando, assim, as investigações realizadas por Fischbein e seus colaboradores. Esses autores ainda defendem a instrução para que os alunos adquiram completamente as operações combinatórias. Enfatizando mais a questão da instrução (ensino), os autores a consideram uma necessidade, pois as crianças não desenvolvem técnicas combinatórias sozinhas, nem sequer no período das operações formais (11 ou 12 anos em diante). Porém, eles acreditam que nas operações concretas (7 a 11 ou 12 anos), algumas crianças podem desenvolver um raciocínio combinatório usando como recurso a árvore de possibilidades.

Tendo os estudos de Batanero *et.al.* (1996), Piaget e Inhelder (1951) e Fischbein *et al.* (1970), apresentados anteriormente, como aporte teórico, Fernandes *et al.* (2004) investigaram as intuições de alunos do 12º ano de escolaridade, ao resolverem problemas de Análise Combinatória. Do estudo, participaram 38 alunos que ainda não haviam passado por qualquer experiência de ensino formal de Combinatória. Os autores utilizaram um questionário, com cinco questões que envolviam as seguintes operações combinatórias: permutação simples e com repetição, arranjos simples e com repetição e combinação simples. Os resultados revelaram que os alunos têm intuições combinatórias muito limitadas em todas as operações estudadas, destacando-se apenas o caso em que está envolvido um pequeno número de elementos e onde a estratégia de enumeração (contagem direta) permitiu aos alunos chegar à resposta correta. Entre as operações combinatórias estudadas, em termos gerais, os alunos obtiveram resultados ligeiramente melhores nos arranjos com repetição e piores nas combinações simples.

Em outro trabalho, Correia e Fernandes (2007) procuraram investigar as estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. A pesquisa foi desenvolvida junto a 27 alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola secundária com 3º ciclo do ensino básico de uma cidade do distrito de Braga, em Portugal. Os autores empenharam-se em responder duas questões: Que estratégias utilizam os alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas combinatórios?, e, Qual a influência dos fatores operação combinatória, número de elementos envolvidos na operação combinatória e desempenho em Matemática na experiência de aprendizado dos alunos em combinatória?

Para Correia e Fernandes (2007), os alunos quando resolvem os problemas de combinatória utilizam com maior frequência a enumeração (contagem direta) como estratégia, seguida do uso da árvore de possibilidade. A fórmula foi utilizada por 18% dos alunos consultados. Os autores observaram, também, que, quando ocorre nos problemas um aumento no tamanho da amostra dos elementos, as estratégias mais utilizadas pelos alunos passam a ser a menos usada. Diminuindo, assim, a eficácia nas respostas corretas dos alunos. No geral, a pesquisa desenvolvida por eles revelou que o maior fracasso dos alunos foi na resolução dos problemas de combinação simples. Nesses problemas, a dificuldade dos alunos residiu no fato de considerarem a ordem, tal como tinham resolvido os problemas de arranjos.

Procurando investigar os erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais no campo da Análise Combinatória, Pacheco (2001) desenvolveu um trabalho dentro de uma abordagem qualitativa, com uma inspiração na análise cognitiva das produções escritas dos estudantes da terceira série do Ensino Médio, com idade entre 17 e 23 anos. Os alunos, sujeitos da pesquisa, ainda não haviam estudado Análise Combinatória. A pesquisadora desenvolveu aulas expositivas acerca do assunto e proporcionou aos mesmos que tivessem acesso a uma bibliografia diversificada do assunto. O desenvolvimento dessas aulas durou 6 semanas, com alunos de escolas públicas de diferentes cidades do Estado de Alagoas.

O objetivo do trabalho realizado por Pacheco (2001) foi confrontar as abordagens dos estudantes em diferentes tipos de problemas e buscar algumas explicações para possíveis performances nos diferentes casos e para os possíveis erros apresentados. Foram problemas do tipo simbólico “não-verbal”, “modelagem” e “verbais”, todos de Análise Combinatória.

A questão central da pesquisa que Pacheco (2001) se propôs a resolver foi: Em que tipo de problema, simbólico “não-verbal”, “modelagem” e “verbais”, e em que extensão, os estudantes apresentam performances mais adequadas?

Em suas conclusões, a pesquisadora aponta que existe uma relação direta entre o uso da fórmula e a inversão da natureza combinatória, isto é, todos os alunos que apresentaram essa inversão adotaram estratégia com o uso de fórmulas.

Ao comparar seu trabalho com o de Medeiros (1992), a autora nos diz que:

> Diferentemente dos resultados obtidos no estudo realizado por Medeiros onde os adolescentes utilizaram bem mais a estratégia da listagem, tabelas e busca de padrões, a estratégia mais adotada pelos sujeitos desta pesquisa foi a do uso de fórmulas, tanto nas abordagens bem sucedidas como insatisfatórias (MEDEIROS apud PACHECO, 2001, p.230)

A pesquisa apontou que os alunos apresentaram êxito nas abordagens dos problemas do tipo não-verbal. Entretanto, isso não implicou um desempenho mais adequado nos problemas do tipo verbal. A autora acredita que uma boa habilidade com o uso de fórmulas não é suficiente para a resolução de problemas verbais que relacionam os conceitos de arranjo e de combinação com situações do dia-a-dia. É necessário que o aluno tenha desenvolvido uma boa formação dos conceitos de arranjo e combinação para que saiba usar corretamente as fórmulas.

Os trabalhos acima apresentados estão centrados nas dificuldades e nas estratégias dos alunos ao resolverem problemas de Análise Combinatória. Observamos, de uma forma geral, que os alunos apresentam acentuadas dificuldades em resolver os problemas de combinatória, mas o fato de não saber em diferenciar os problemas de combinação dos problemas de arranjo é a principal de todas as dificuldades. Essa questão nos fez refletir o quanto é importante uma aula destinada somente a fazer o aluno perceber a diferença entre os conceitos de arranjo e combinação.

No que tange à questão das estratégias, entendemos, por meio dos resultados das pesquisas, que o uso da contagem direta dos agrupamentos e da árvore de possibilidades representa uma boa sugestão para iniciar uma aula de Análise Combinatória. Mas, mantendo a vigilância acerca do tamanho da amostra, como foi descrito anteriormente. Essa questão referente ao tamanho da amostra nos fez refletir que não podemos negligenciar o uso da fórmula. Pois, em casos em que a amostra é muito grande, o aluno vai precisar saber utilizar a fórmula, resolver problemas, principalmente, os de combinação. Sendo assim, passamos a acreditar na importância de desenvolver uma aula em que o aluno participasse intensamente da construção das fórmulas de arranjo e de combinação.

Esses trabalhos tiveram forte influência na fase de elaboração de nossa sequência didática e fase da análise dos dados produzidos na pesquisa. Nessa fase, tomamos emprestadas as categorias de análise utilizadas na pesquisa de Fernandes *et. al.(*2004) e, na fase de elaboração, construímos uma aula somente para diferenciar o arranjo da combinação, sem a apresentação das fórmulas usadas em cada uma das operações combinatórias. No desenvolvimento das aulas de arranjo e combinação, elaboramos um método de ensino que envolvesse os alunos completamente no processo de construção das fórmulas do arranjo e da combinação, diferenciando dos métodos que apresentam as fórmulas prontas.

Para conhecermos melhor outros métodos de ensino elaborados para a Análise Combinatória e verificarmos até que ponto nossa pesquisa diferenciava das que já haviam sido desenvolvidas, desenvolvemos a seguir outro estudo.

2.1.2. Trabalhos que investigaram sequências de ensino de Análise Combinatória

Sturm (1999) procurou investigar as possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa. O autor considera como “alternativa” uma abordagem de ensino que é desenvolvida diferentemente das abordagens tradicionais (valoriza a definição do conceito, seguido de exemplos, exercícios e o uso excessivo de fórmulas). Os objetivos descritos pelo autor foram:

- Analisar uma proposta de ensino de análise combinatória e sua experimentação em sala de aula;
- Identificar as possibilidades e limites com relação ao ensino-aprendizagem da proposta no sentido de colaborar em futuras investigações sobre análise combinatória;
- Contribuir para o trabalho de professores de matemática do Ensino Médio que busquem aprimorar sua formação em relação ao ensino-aprendizagem de análise combinatória.

A proposta elaborada por Sturm (1999) abordou os seguintes tópicos: arranjo, permutação e a combinação, sem repetição de elementos. Foi desenvolvida por meio de resolução de problemas, com 33 alunos de uma escola particular da rede privada de ensino da cidade de ITU-SP. As aulas aconteciam no turno da noite e foram divididas nas seguintes etapas:

- Formalização com problemas de contagem em geral (4 aulas)

Nesta etapa, o professor apresentou inicialmente quatro problemas, como o lançamento de uma moeda, o número de maneiras diferentes pelos quais uma pessoa vai de uma cidade A até uma cidade B e da composição de números a partir de alguns algarismos. Houve necessidade de intervenção do professor, porém o mesmo a realizou dialogando com a turma e resolvendo por definitivo o problema contando com a participação da fala dos alunos, isto é considerado pelo pesquisador como um processo de interação. Após a resolução dos problemas foi proposto outro grupo de quatro problemas retirados do chamado “cadernão da escola”.

- Estudo da anotação fatorial (pouco mais de uma aula)

O professor iniciou esta etapa esperando que os alunos tivessem percebido que a multiplicação tem um papel importante no estudo de Análise Combinatória. Dessa forma, propôs quatro problemas e o primeiro é para saber o número de anagramas da palavra “GRAU”, o segundo, para formar números com 5 (cinco) algarismos dado um conjunto com cinco números e os problemas seguintes são para calcular o fatorial de um determinado número e simplificações com fatorial. O autor considerou que esta etapa não foi produtiva, pois teve que apresentar o fatorial sem que os alunos tivessem observado as variantes necessárias à formação desse conceito.

- Levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução (3 aulas)

Para o professor, as características que determinam o modo de resolução dos problemas foram: ordenação dos elementos, aplicação direta do princípio multiplicativo, aplicabilidade do diagrama de árvore. Nessa fase, foi elaborada uma lista de exercícios- oito problemas - com o intuito de contemplar os diferentes temas, de modo que, a partir dela, fosse possível um levantamento das características e na fase seguinte, a classificação dos problemas de Arranjo, Permutação e Combinações. Os problemas foram resolvidos em duplas e o autor considera que foi possível levantar as características de cada um dos tipos de problemas. Os alunos demonstraram compreender, de maneira geral, a importância da ordenação dos elementos nos agrupamentos e a necessidade de saber se há ou não repetição de elementos. Vale ressaltar que nessa etapa o pesquisador desenvolveu o processo de ensino da mesma maneira que foi desenvolvido nas etapas anteriores.

- Relação das características (modo de resolver) com os temas em si e formalização dos conceitos: arranjo, permutação e combinação (8 aulas)

Nesta última etapa, o professor utilizou 20 problemas que envolvem respectivamente Arranjo, Permutação e Combinação. Ele afirma que neste momento os alunos estavam familiarizados com sua estratégia de ensino e com problemas de contagem. Dessa forma, tornou-se fácil apresentar à turma as particularidades de cada um daqueles métodos de contagem e a apresentação de suas fórmulas. O pesquisador ressalta que não apresentou a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$, pois o mesmo considera mais didático para este momento usar $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ deixando a outra fórmula para aplicação em Binômio de Newton.

As aulas se diferenciaram do método tradicional pelo fato de as definições não serem apresentadas inicialmente. No entanto, o professor apresentou e resolveu os problemas propondo uma estratégia didática concentrada na interação dos alunos com a resolução dos mesmos, que, a princípio, eram resolvidos pelo próprio professor.

> É verdade que os exercícios contidos na proposta podem ser considerados um tanto tradicionais. No entanto, a proposta se diferencia da maioria da prática vigente, no sentido de se experimentar uma mudança na relação do professor e dos alunos com a Análise Combinatória, mais precisamente no modo como aquele apresenta e discute cada tema (arranjo, permutação e combinação), primeiramente apresentando exercícios para depois chegar às sistematizações (STURM, 1999, p.81).

A metodologia de pesquisa empregada no trabalho de Sturm (1999) teve uma abordagem qualitativa e utilizou como instrumentos de coleta de dados: um caderno (diário) em que o pesquisador realizava anotações sobre o que tinha ocorrido durante as aulas; as avaliações dos alunos (duas provas escritas); um questionário para saber as concepções dos alunos quanto ao trabalho desenvolvido pelo professor-pesquisador.

Em suas conclusões, Sturm (1999) considerou que a proposta teve um efeito positivo e destacou alguns aspectos:

Os alunos trabalhavam durante todo o dia e mesmos assim participavam intensamente da pesquisa;

os alunos demonstraram ter compreendido a “potencialidade” do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas combinatórios;

os alunos passaram a ver as fórmulas de arranjo e permutação como apenas mais um auxílio na resolução dos problemas, pois os mesmos perceberam que as fórmulas decorrem do modo direto do Princípio Multiplicativo.

É importante ressaltarmos o valor do trabalho desenvolvido por Sturm (1999). Foi a primeira dissertação de mestrado no Brasil que teve como objeto de estudo o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Portanto, entendemos que os trabalhos que procuram investigar novos métodos para o ensino de Análise Combinatória representam um avanço nesse campo de investigação, que teve em Sturm (1999) sua fundação.

Avançando nesse sentido, Esteves (2001) construiu duas sequências de ensino centralizadas na formação do conceito ligado à operação de Análise Combinatória, como a intenção de estudar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes com 14 anos de idade, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental.

A primeira sequência, considerada tradicional, foi aplica a uma turma de alunos da segunda série do Ensino Médio que a autora define como grupo de referência. A turma foi formada por 28 alunos com idade de 16 anos.

A segunda foi elaborada por meio de situações-problema e desenvolvida junto a um grupo experimental de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, que nunca haviam tido contato com Análise Combinatória. Foram utilizados, em alguns casos, materiais concretos para resolver as atividades. Nessa etapa, a professora contou com 14 duplas de alunos. As situações-problema, inicialmente, envolveram apenas contagens diretas e depois o princípio fundamental da contagem até a institucionalização dos agrupamentos simples, sem suas respectivas fórmulas. Esteves (2001) afirmou que a intenção da pesquisa foi a de formalizar o conceito, logo, não ocorreu treinamento com os algoritmos utilizados no ensino de Análise Combinatória. O estudo foi desenvolvido com alunos de uma instituição da rede particular de ensino da cidade de Santos, em São Paulo. Ambos os grupos foram submetidos a dois testes individuais: o primeiro, antes de ser introduzido o ensino de Análise combinatória, continha 10 questões do assunto; o segundo, após o contato com conteúdo, também continha 10 questões que possuíam similaridades com as questões do pré-teste. É importante ressaltarmos que a sequência de ensino do grupo não experimental foi desenvolvida pela própria pesquisadora durante 12 horas/aulas e a do grupo experimental foi desenvolvida em horário extra-aula com uma hora de duração cada.

O quadro abaixo apresenta, de forma resumida, a sequência de ensino aplicada ao grupo de experiência.

Quadro 01: Sequência de ensino desenvolvida por Esteves (2001)

Encontro 1:	situações-problema que possibilitem o uso da contagem direta e induzam os alunos ao princípio multiplicativo.
Encontro 2:	situações-problema envolvendo o princípio fundamental da contagem.
Encontro 3:	continuação da resolução de problemas voltados para o princípio fundamental da contagem.
Encontro 4:	situações-problema onde o princípio multiplicativo não é aplicável e institucionalização da árvore de possibilidades com representação de contagem
Encontro 5 e 6:	classificação de problemas. Dado um problema reconhecer as características que permitem diferenciar arranjo de combinação.
Encontro 7:	institucionalização de arranjo, permutação e combinação

Fonte: Esteves (2001)

A pesquisadora procurou responder às seguintes questões de sua pesquisa: Em função do ensino oferecido, os sujeitos demonstram progresso verificável no que tange ao campo conceitual considerado? Como pergunta derivada da primeira: Tal evolução se diferencia daquela observada no grupo de referência?

O método misto (qualitativo-quantitativo) foi empregado na pesquisa durante a análise dos dados produzidos no pré-teste e no pós-teste. A abordagem metodológica utilizada foi qualitativa quando foram analisadas as aulas videogravadas e audiogravadas nas sequências de ensino.

Esteves (2001) relatou que, no início da realização da sequência de ensino com o grupo experimental, houve certa rejeição dos alunos. Esses anunciavam que não haviam compreendido os enunciados das situações-problema e esperavam pela intervenção da professora. Porém, no final, a autora observou uma aceitação maior do novo método de ensino.

Ao analisar as concepções apresentadas pelos alunos no pré-teste e na sequência de ensino, a pesquisadora pôde classificar algumas que dificultavam a aprendizagem dos tópicos da Análise Combinatória.

A falta de um procedimento recursivo que os levasse à formulação de todas as possibilidades. Isso acontecia quando os alunos resolviam problemas por enumeração, mediante tentativas e erros, principalmente, nos casos em que a formação de todas as possibilidades se tornava exaustivos.

A resposta injustificada e errônea. Algumas vezes, os alunos apresentavam uma solução numérica errônea, sem explicar de onde veio tal número ou ainda sem indicar o caminho percorrido para encontrá-lo.

O não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada, o que levava a uma interpretação errônea.

Nos problemas de permutação e arranjo, aparece a interpretação da palavra distribuir como dividir.

Nos problemas de combinação e arranjo, os alunos confundiam os critérios que deviam ser usados em cada situação e, algumas vezes, decidiam considerar a ordem importante quando esta não era ou vice-versa.

A pesquisa aponta que os alunos pouco usavam a árvore de possibilidades, mesmo quando esta estratégia é proposta como sugestão nos problemas. Contudo, considerou que a sequência de ensino desenvolvida com o grupo experimental foi bastante proveitosa, como podemos constatar na seguinte citação:

> Durante a sequência, pudemos observar que os alunos evoluíram passo a passo com as representações das resoluções e com as discussões relativas aos processos de resolução usados. Acreditamos que a mudança na forma de se trabalhar com o conteúdo seguindo uma abordagem que procurou envolver o aluno através de situações reais, além do trabalho desenvolvido em duplas criou um ambiente favorável para tal comportamento (ESTEVES, 2001, p. 184)

A autora, ao comparar as duas sequências de ensino, identificou que a que foi desenvolvida com o grupo experimental, mesmo sendo trabalhada fora do horário escolar, produzia mais interação entre o professor, o aluno e o saber matemático em jogo.

Em suas considerações finais, Esteves (2001) considera que o estudo de Análise Combinatória deveria ser iniciado no Ensino Fundamental de forma significativa, sem apresentação de fórmulas, e que no Ensino Médio, o aluno pudesse ter esse conceito institucionalizado, apresentando as fórmulas de forma significativa e não apenas como algoritmo que o leve a mecanizar e associar palavras-chave.

Como podemos observar, o trabalho desenvolvido por Esteves (2001) possui algumas características de pesquisas clínicas, pois, os alunos foram submetidos, inicialmente, a um pré-teste e, após a aplicação da sequência, ocorreu um pós-teste. O interessante é que tal abordagem metodológica conduziu os resultados da pesquisa a alguns resultados encontrados nos trabalhos de Batanero, Fischbein e Fernandes já comentados anteriormente.

A pesquisa de Esteves (2001) nos fez refletir sobre a importância da realização de um pré-teste e um pós-teste quando pretendemos investigar uma sequência didática de ensino. Pois, os dados coletados por esses instrumentos permitem perceber de forma clara se os alunos conseguem o não resolver os problemas. Mas, entendemos que a sequência didática precisa ser também analisada por dentro, da mesma forma que vimos em Sturm (1999).

Vale ressaltar que nossa intenção de pesquisa está centrada no Ensino Médio e, como descreveu a própria Esteves (2001), não houve por parte da pesquisa interesse nas fórmulas, uma vez que, para a autora, essa é uma questão para o Ensino Médio.

Sendo assim, seguimos procurando conhecer investigações que foram desenvolvidas para o Ensino Médio e encontramos o trabalho de Rocha (2002). A autora procurou investigar um processo de resolução de problemas de Análise Combinatória apoiando-se essencialmente na aplicação do princípio multiplicativo. Esse processo de resolução de problemas centrou-se na análise da evolução do aprendizado dos alunos em relação à resolução de problemas de Análise Combinatória, à luz de influências de um método de ensino desenvolvido segundo pressupostos construtivistas. A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa de estudo de casos, desenvolvida junto a alunos do Ensino Médio das redes públicas e particulares de ensino, onde a pesquisadora atuava como professora da turma.

O método de ensino de Combinatória proposto por Rocha (2002) seguiu as seguintes etapas:

> Primeira Etapa: apresentou aos alunos problemas básicos de contagem direcionados a fatos do cotidiano e que puderam ser resolvidos a partir do conhecimento prévio dos mesmos, sem formalização.
>
> Segunda Etapa: apresentou aos alunos problemas mais complexos que envolveram os conceitos de Análise Combinatória.
>
> Terceira Etapa: sugeriu aos alunos que criassem e resolvessem seus próprios problemas referentes à contagem.

Quarta Etapa: partiu do uso do princípio fundamental da contagem e resolveu problemas de permutação, arranjo ou combinação e depois deduziu as respectivas fórmulas.

Quinta Etapa: submeteu os alunos a uma avaliação formal. Essa teve que ser corrigida respeitando os diversos métodos de resolução apresentados pelos mesmos.

O trabalho de campo foi desenvolvido com alunos de duas escolas, uma pública, Escola Técnica Estadual, em turmas do curso de Eletrônica, em 1998 e 2000, e outra escola particular em turma do Ensino Médio, em 2001.

Quanto à caracterização dos sujeitos da escola pública, Rocha (2002, p.33) afirmou que:

> No que se refere ao conhecimento matemático, em geral todos apresentavam desenvolvidas ou em vias de desenvolver habilidades básicas de cálculo, assim como de aplicação de fórmula, pela ampla utilização destas ferramentas na resolução de problemas e exercícios propostos pelos professores da área técnica .

Sobre os sujeitos da escola particular Rocha (2002, p.35) afirmou que:

> A linha metodológica adotada pela escola não permite que mesmo o trabalho nas áreas de exatas, do Ensino Médio, seja desenvolvido de forma técnica, ou melhor, através de afirmações prévias seguidas de fórmulas de aplicação. O aluno já habituado a experimentar, levantar hipóteses, embasar-se no conhecimento para aceitar novo, observar para concluir, não aceita a introdução de um novo conhecimento por sua mera definição assim como a apresentação de fórmula sem o conhecimento de sua procedência .

A autora utilizou como material de apoio os livros didáticos adotados pelas escolas. Esse material foi utilizado pelos alunos a partir da segunda aula. Esse fato, juntamente com as condições intelectuais dos sujeitos apresentadas acima e o método que estava em desenvolvimento, permitiu que a maioria dos alunos completasse o aprendizado de Análise Combinatória por meio do livro didático.

Em seu trabalho, Rocha (2002) apresentou as fórmulas de arranjo e combinação aos alunos, após ter percebido que eles estavam em condições de acompanhá-la na construção da fórmula. A professora retomou os procedimentos de resolução de um problema resolvido pelo princípio multiplicativo e seguiu expondo aos alunos a forma como o fatorial pode surgir na resolução dada e depois apresentou a resolução toda na forma de fatorial. A última etapa foi a de substituição dos valores numéricos que estão na forma de fatorial pelas letras n e p. A letra n, para representar o número de elementos da amostra e p, para representar as etapas do problema. O mesmo aconteceu na apresentação da fórmula da combinação simples.

Segundo a autora, os resultados da aplicação do método, tendo como referências as interfaces aluno-conteúdo, interação professor-aluno e as contribuições do princípio multiplicativo na resolução de problemas de Análise Combinatória foram: (1) permitir aos alunos interagir com o conteúdo de forma integradora; (2) observar o professor como um mediador entre o aluno e os enunciados; (3) poder propor a implementação do ensino da Análise Combinatória de forma produtiva e satisfatória.

Comparando o trabalho desenvolvido por Rocha (2002) e Sturm (1999), observamos três pontos a destacar: primeiro, ambos potencializam o princípio multiplicativo como a principal ferramenta para resolver problemas de Análise Combinatória no Ensino Médio. Em segundo lugar, Rocha (2002) desenvolve seu método de ensino fazendo menos intervenções na aula do que Sturm (1999), que, de acordo com seu método, o professor deve resolver os problemas com alunos. O terceiro ponto está vinculado à forma como as fórmulas foram apresentadas. No método de Sturm (1999), as fórmulas foram apresentadas de maneira direta pelo professor, sem uma construção significativa, diferentemente do método desenvolvido por Rocha (2002). Esta autora propôs condições para que os alunos pudessem acompanhá-la na construção das fórmulas básicas da Análise Combinatória.

Apoiado na sugestão de Sturm (1999), de que o princípio multiplicativo é um importante recurso didático para o ensino de Análise Combinatória, Dornelas (2004) procurou: analisar as diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas de Análise Combinatória; identificar os principais tipos de erros cometidos por estudantes no tocante à resolução de problemas de Combinatória; categorizar os tipos de erros cometidos; mensurar os erros categorizados; analisar a influência que uma compreensão significativa do princípio multiplicativo pode trazer para o desenvolvimento de habilidades e competências na resolução de problemas de Análise Combinatória; avaliar os estudantes com relação à compreensão e interpretação de problemas, formulação de hipóteses, previsão de resultados, seleção e execução de estratégias e desenvolvimento da capacidade de realizar retrospecto de resultados obtidos na resolução dos problemas.

Dornelas (2004) propôs estabelecer uma categorização dos principais tipos de erros cometidos por alunos quando se deparam com o problema de contagem e sugerir uma metodologia adequada, em termos didáticos e pedagógicos, com a utilização do princípio multiplicativo. Segundo o autor, a intenção é capacitar os alunos a desenvolver habilidades e competências necessárias no trato de resolução de problemas envolvendo contagem, no âmbito da Análise Combinatória.

A pesquisa de Dornelas (2004) foi realizada em duas etapas, envolvendo alunos de três escolas - uma pública e duas privadas - da cidade do Recife. A primeira fase contou com a colaboração de 87 alunos, na qual se buscou analisar os diferentes processos heurísticos utilizados na resolução de problemas de contagem, por meio de questionários (perguntas abertas e outro com problemas, ambos, envolvendo Combinatória). Na segunda fase, além da aplicação dos questionários citados - pré e pós-teste – foi executada uma ação didática pedagógica voltada a um aprofundamento do conhecimento do princípio multiplicativo e sua consequente utilização na resolução de problemas de contagem, com 12 alunos da 2ª série do Ensino Médio de um dos colégios particulares.

O autor, em suas conclusões, nos diz que a estratégia de resoluções dos problemas utilizada pelos alunos durante a investigação revela que o conhecimento, a criatividade e uma boa orientação didática podem provocar no estudante estímulos no sentido de elaborar e manifestar possibilidades de resolução que vão além do simples emprego de fórmulas, que são necessárias, segundo o autor, mas não suficientes para consolidar um aprendizado significativo.

Ao contrário das outras pesquisas que investigaram sequências de ensino para a Análise Combinatória, Dornelas (2004) não elaborou a sequência de ensino desenvolvida em sua pesquisa. O autor utilizou as aulas do programa Telecurso 2000 – Ensino Médio, desenvolvido pela Universidade do Estado de São Paulo.

Como já afirmamos anteriormente, a aula de arranjo e a de combinação de nossa sequência didática procuram conduzir o aluno à construção das fórmulas utilizadas em cada operação combinatória. Vimos que no trabalho de Rocha (2002), a autora conseguiu fazer da apresentação da fórmula algo significativo, mas foi a própria professora que a construiu. Acreditamos que, elaborando as perguntas certas, podemos conduzir o aluno à construção da fórmula. Sendo assim, partindo do mesmo ponto que Rocha (2002) partiu, da resolução de um problema resolvido pelo princípio multiplicativo, faremos os alunos perceberem a presença do fatorial até que os mesmos alcancem a fórmula toda em função do fatorial. Outro ponto que queremos deixar claro em nossa sequência didática é que ela foi elaborada de modo que nossa intervenção seja a menor possível no processo de ensino, para que isso pudesse representar outro avanço nas pesquisas nesse campo de investigação.

A seguir apresentaremos os trabalhos desenvolvidos no Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará, que representam as sementes desta dissertação de Mestrado.

2.2. UM ESTUDO DOS TRABALHOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA, DESENVOLVIDOS NO CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO, DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ.

Os trabalhos que seguem foram todos desenvolvidos sob a orientação do professor doutor Pedro Franco de Sá.

Antunes e Do Vale (2005) e Pinheiro e Roza (2006) desenvolveram seus trabalhos em esferas diferentes de ensino. Os primeiros realizaram pesquisas junto aos alunos das escolas públicas, enquanto os segundos junto às escolas particulares. Tanto uns quanto outros utilizaram os mesmos instrumentos de pesquisa. Ambos os trabalhos procuraram identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos acerca dos tópicos estudados na Análise Combinatória e analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória.

Os autores utilizaram como instrumentos para coleta de dados um questionário fechado e um grupo de (10) problemas de Análise Combinatória. O questionário tinha questões acerca do perfil dos sujeitos e questões que procuravam saber dos alunos os tópicos de combinatória que eles sentiram maior dificuldade para aprender e, também, a forma como o assunto havia sido ministrado pelos professores. Os dez problemas forma elaborados com base nos problemas que aparecem com mais frequência nos livros didáticos.

Para Antunes e Do Vale (2005) e Pinheiro e Roza (2006), do ponto de vista metodológico, a pesquisa enquadrou-se numa investigação de caráter exploratório e com enfoque quantitativo.

No que tange aos sujeitos da pesquisa, Antunes e Do Vale (2005) consultaram 60 alunos concluintes da terceira série do Ensino Médio de três escolas Públicas, localizadas em de três municípios - Belém, Castanhal e Curuçá – do Estado do Pará e Pinheiro e Roza (2006) consultaram 482 alunos também concluintes do Ensino Médio de três escolas da rede privada de ensino de Belém.

Em relação à análise dos dados, os autores estudaram as respostas dos 10 problemas, dadas pelos alunos, categorizando-as em Acertou, Errou e Não Fez.

Acertou: quando houve uma resolução para a questão e o resultado obtido estava correto;

Errou: quando houve uma resolução para a questão e o resultado obtido estava incorreto;

Não fez: quando a questão não foi resolvida.

Havia uma pergunta no questionário que procurava saber se o aluno teve dificuldades para entender Análise Combinatória. Os resultados das pesquisas apontam que, nas escolas públicas, 82% dos alunos disseram que encontraram dificuldades para entender Análise Combinatória. Já nas escolas particulares, os resultados revelam que 60% disseram ter tido tais dificuldades. Outra questão procurou conhecer a prática pedagógica predominante nas aulas que os alunos tiveram de Análise Combinatória. Os resultados obtidos dos alunos das escolas públicas revelam que o método tradicional de ensino é o mais utilizado nas escolas. Quanto às escolas particulares, 36% dos alunos consultados confirmaram que o método tradicional era o mais usado. Outros 36% afirmaram que os professores iniciavam as aulas de combinatória usando situações-problema.

Em relação às dificuldades de aprendizagem durante as aulas de Análise Combinatória, 52% dos alunos das escolas públicas indicaram a falta de compreensão dos textos dos problemas, em segundo lugar, eles indicaram o uso da fórmula correta nos problemas de Combinatória. Enquanto que 60% os alunos das escolas particulares indicaram que a maior dificuldade era diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação e, em segundo lugar, 58% dos alunos indicaram a falta de compreensão dos textos.

Ao analisarem as resoluções dos 10 problemas, nas categorias citadas anteriormente, os autores responsáveis pelas duas pesquisas afirmaram que somente o problema *"Numa lanchonete há 5 tipos de salgado, 4 tipos de suco e 3 tipos de sorvetes. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto por 1 salgado, 1 suco e 1 sorvete?"* apresentou o maior percentual de acertos e,desses, a maioria usou o princípio fundamental da contagem. Ambas as pesquisas revelaram que o maior percentual de alunos consultados não fez os 10 problemas.

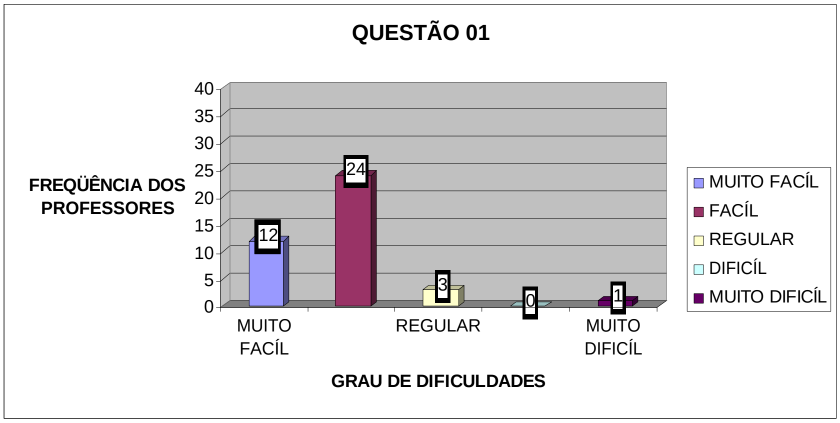
Procurando conhecer a concepção dos professores de Matemática, da rede pública de Ensino, quanto às dificuldades dos alunos acerca do ensino de análise combinatória, Pinheiro e Sá (2007) desenvolveram um trabalho junto a 40 docentes da rede pública de ensino da região metropolitana de Belém, estado do Pará. O instrumento usado para coletar os dados dessa pesquisa foi um grupo de 10 problemas de Análise Combinatória que os professores deveriam classificar em: "fácil", "muito fácil", "regular", "difícil" e "muito difícil", caso os problemas fossem sugeridos aos alunos do Ensino Médio para ser resolvidos. A abordagem metodológica de pesquisa enquadrou-se, novamente, numa investigação de caráter exploratório e com enfoque quantitativo.

O perfil dos sujeitos da pesquisa de Pinheiro e Sá (2007) indica que todos os professores consultados são licenciados plenos em Matemática, 32 do sexo masculino e 8 do feminino; 8 professores têm aperfeiçoamento em Educação Matemática, 26 são especialistas em curso na área da Educação e 6 são mestres em Educação Matemática.

A seguir, apresentaremos os 10 problemas acompanhados da análise realizada pelos autores.

1) Numa lanchonete há 5 tipos de salgado, 4 tipos de suco e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos formar um lanche composto por 1 salgado, 1 suco e 1 sorvete?

Gráfico 01: Grau de dificuldade dos alunos na questão 1.

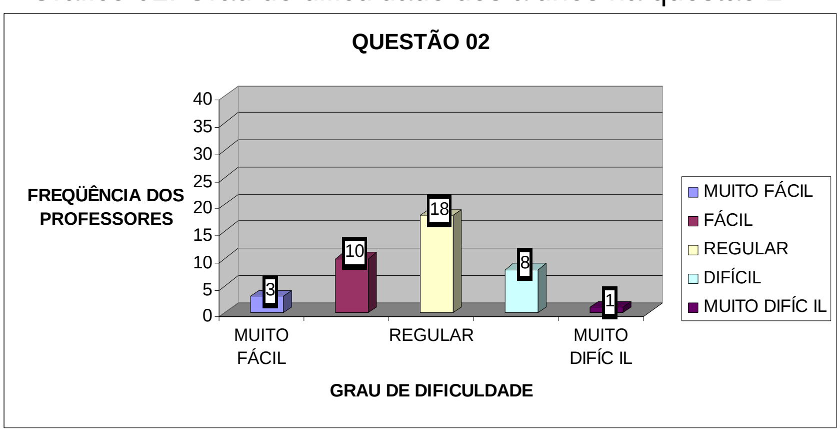


Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

Quase todos os professores indicaram a questão como muito fácil ou fácil.

2) Com os algarismos 1,2,3,4 e 5, quantos números de três algarismos distintos e maiores que 300 podemos formar?

Gráfico 02: Grau de dificuldade dos alunos na questão 2.



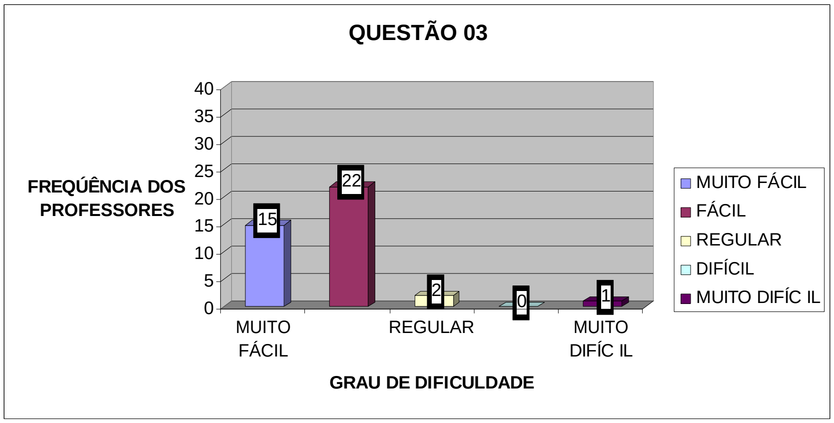
Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

18 professores admitiram que a situação-problema é considerada regular pelos alunos.

Alguns professores afirmaram que a dificuldade está no fato de os alunos precisarem ter cuidado em formar números maiores que 300.

3) Quantos são os anagramas da palavra PRISE?

Gráfico 03: Grau de dificuldade dos alunos na questão 3.



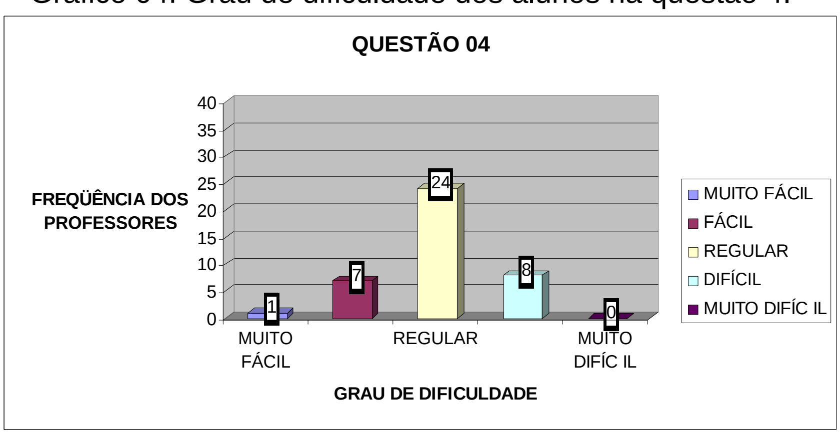
Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

37 professores afirmaram que os alunos consideram a situação-problema muito fácil ou fácil.

Alguns professores afirmaram que há um pouco de dificuldade, por parte dos alunos, quando a palavra não possui letras repetidas.

4) O Estado do Pará possui 8 clubes disponíveis para representá-lo em um campeonato nacional de futebol, porém, cada estado só poderá participar com 4 clubes e a escolha deverá ser realizada por meio de sorteio na sede da Confederação Paraense de Futebol. Determine o número de maneiras diferentes de se obter o resultado do sorteio?

Gráfico 04: Grau de dificuldade dos alunos na questão 4.

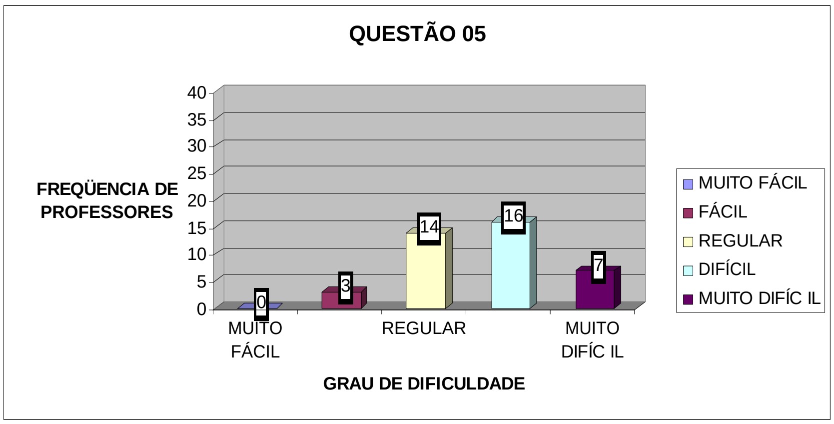


Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

Mais de 50% dos professores apontaram que a questão é considerada pelos alunos como regular.

5) Ao final de um expediente, na biblioteca da UEPA, a bibliotecária precisou ordenar em uma prateleira os seguintes livros: dois de Matemática, três de Química e quatro de Biologia. Sabendo que os livros não são de mesmos volumes, determine o número de maneiras diferentes em que a bibliotecária poderá ordená-los, de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos.

Gráfico 05: Grau de dificuldade dos alunos na questão 5.

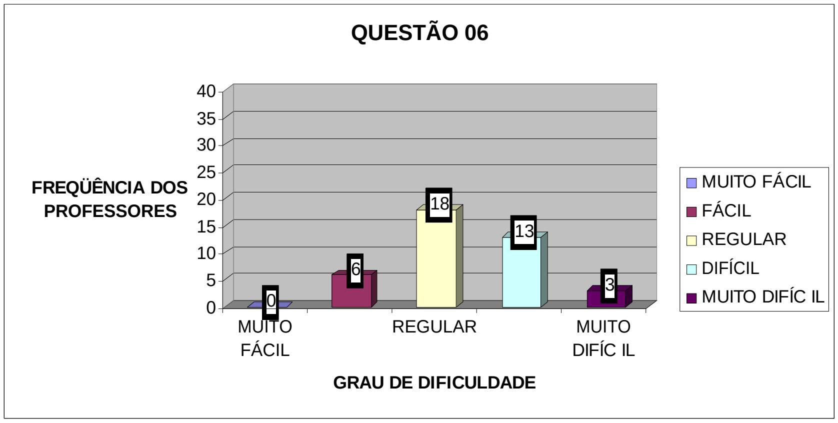


Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

30 professores consideraram a situação-problema regular ou difícil para os alunos. Alguns professores afirmaram que o problema está na compreensão do texto. Nenhum professor considerou a questão muito fácil.

6) O departamento de ciências naturais da UEPA tem disponível para cargos de pesquisadores 5 professores de Biologia e 4 professores de Física. Uma universidade cubana solicitou que o departamento enviasse 4 professores pesquisadores, sendo 2 de Biologia e 2 de Física para a realização de um curso de capacitação. De quantas maneiras diferentes a coordenação poderá fazer a escolha desses professores?

Gráfico 06: Grau de dificuldade dos alunos na questão 6.

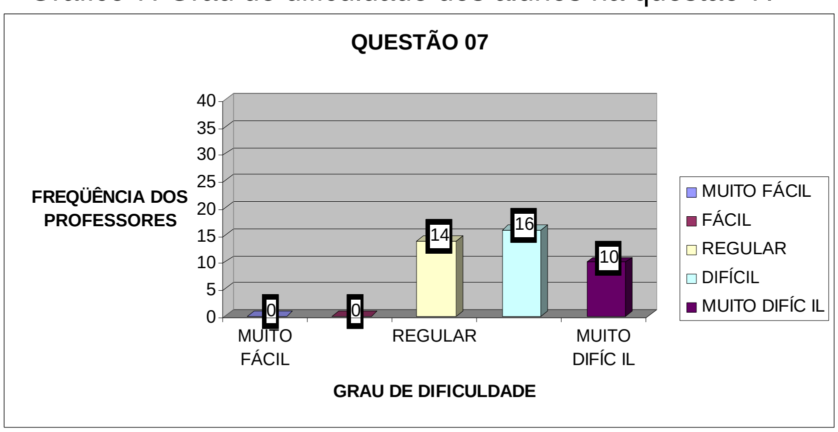


Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

31 professores afirmaram que os alunos consideram a situação-problema regular ou difícil. E nenhum professor afirmou que a situação-problema é muito fácil.

7) Rose vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Determine o número máximo de tentativas para acertar a senha.

Gráfico 7: Grau de dificuldade dos alunos na questão 7.



Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

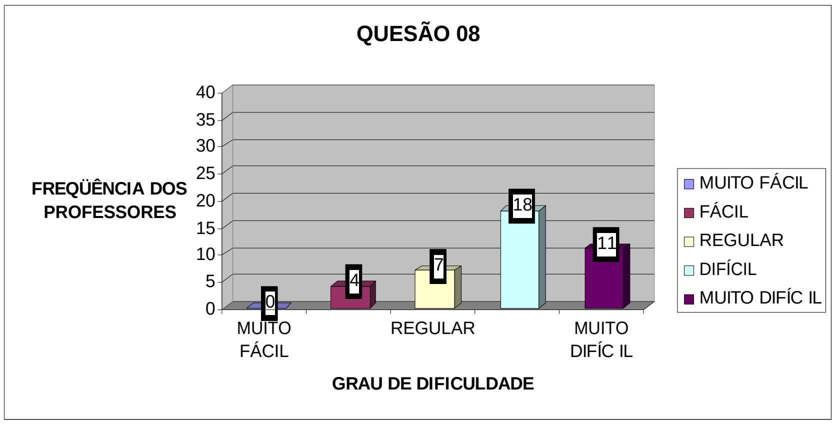
30 professores afirmaram que os alunos consideram a situação-problema regular ou difícil.

O número de professores que afirmaram que a situação-problema é muito difícil aumentou em relação às situações anteriores.

Nenhum professor afirmou que a situação-problema é muito fácil ou fácil.

8) Uma prova de atletismo será realizada durante a semana dos jogos universitários. Os participantes da primeira etapa são: quatro (4) alunos da UEPA e cinco (5) alunos da UFPA. De quantas maneiras diferentes pode-se ter entre os três primeiros lugares pelo menos um aluno da UEPA?

Gráfico 8: Grau de dificuldade dos alunos na questão 8.



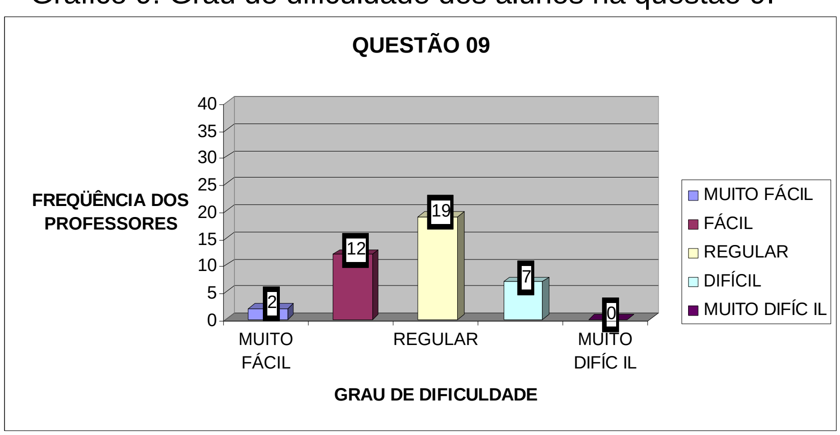
Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

36 professores classificaram a situação-problema de regular a muito difícil.

Alguns professores enfatizaram que o texto matemático em questão é considerado difícil de ser compreendido pelos alunos.

9) Quantos são os anagramas da palavra CÁLCULO que começam com a letra U?

Gráfico 9: Grau de dificuldade dos alunos na questão 9.



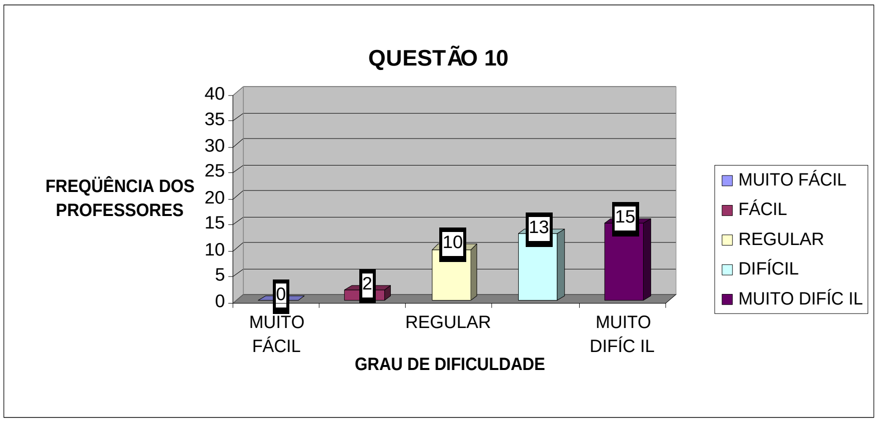
Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

Nenhum professor afirmou que a situação-problema é muito difícil

31 professores afirmaram que a situação-problema é fácil ou regular
19 professores afirmaram que a questão é considerada regular por ter uma palavra com letras repetidas.

10) Resolva a equação: $2 \cdot C_{n;(n-2)} + A_{n;2} = P_3 \cdot C_{n;(n-3)}$

Gráfico 10: Grau de dificuldade dos alunos na questão 10.



Fonte: Pinheiro e Sá, 2007

38 professores afirmaram que a situação-problema é considerada pelos alunos regular, difícil ou muito difícil.
Nenhum professor afirmou que a questão é muito fácil.

Pinheiro e Sá (2007) ressaltaram que os professores afirmaram que uma das maiores dificuldades de ensino e aprendizagem encontrada nas aulas de Análise Combinatória é a utilização de equações com fatoriais. Os autores acreditam que a causa desse problema deva estar na falta de habilidades algébricas que comumente são desenvolvidas nas últimas séries do Ensino Fundamental. Outra dificuldade está nos problemas de contagem que envolvem elementos repetidos.

Tal dificuldade, também, foi identificada em pesquisas anteriores já apresentadas nesta seção. É, também, importante evidenciarmos a falta de compreensão dos textos que outras pesquisas já apresentaram como dificuldades de ensino e aprendizagem de análise combinatória

O trabalho revelou que os professores afirmaram que quanto mais carregado de informação o texto se apresenta, maior é a dificuldade dos alunos para compreendê-lo e da mesma forma torna-se difícil para o professor explicar a situação-problema proposta.

Pardal e Rocha (2007) desenvolveram uma proposta de ensino diferente para as aulas de Análise Combinatória. O trabalho das autoras ficou restrito ao campo teórico, ou seja, não chegou a ser experimentado em sala de aula. Contudo, representou uma importante fonte para nosso trabalho. Pois, estudamos as ideias das autoras e o refinamento dessas ideias contribuiu para a construção de nossa sequência didática.

A seguir, apresentamos um estudo acerca dos conceitos básicos de Análise Combinatória. Nesse, assumimos nossa concepção acerca do referido conceito do objeto matemático em jogo, descrevemos as sugestões de Lima *et al*. (2004) aos professores que lecionam Análise Combinatória e finalmente apresentamos os conceitos básicos de Análise Combinatória que procuramos construir no desenvolvimento junto aos alunos do Ensino Médio.

2.3. UM ESTUDO DOS CONCEITOS BÁSICOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO.

Desenvolvemos um estudo acerca dos conceitos básicos do objeto matemático em jogo. Sendo assim, discorremos, inicialmente, acerca das concepções de alguns autores que selecionamos para estudar Análise Combinatória e, então, apresentamos os conceitos básicos de Análise Combinatória utilizados em nossa sequência didática.

Para Hazzan (1996), Análise Combinatória é a parte da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo esses elementos agrupamentos formados sob certas condições. Na leitura do autor, o assunto é visto como método.

Magalhães e Oliveira (2004) consideram a Análise Combinatória um conjunto de técnicas de contagem. A utilização dessas técnicas permite saber quantos são os resultados possíveis de uma experiência, de quantas formas diferentes uma experiência pode ser realizada.

Segundo Julianelli *et al*. (2007), a Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda, fundamentalmente, a formação de agrupamentos de elementos, numa abordagem quantitativa, a partir de um determinado conjunto, sendo esses elementos submetidos a condições previamente estabelecidas.

Já para Morgado *et al.* (1991), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. A visão desses autores é mais geral porque eles não limitam a Análise Combinatória aos estudos de arranjo simples, permutação e combinação simples. Para eles, esses conceitos permitem resolver somente problemas de combinatória que envolvem a contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Como nossa sequência didática foi elaborada para ser desenvolvida junto aos alunos do Ensino Médio, a nossa compreensão acerca do conceito de Análise Combinatória vai ao encontro das concepções que contemplam o uso de estratégias que são utilizadas para contar os agrupamentos que são formados a partir de um determinado conjunto.

A seguir, apresentamos algumas recomendações encontradas em Lima *et. al.* (2004) para os professores que se predispõem a ensinar Análise Combinatória e os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples, usados em nossa sequência didática. Para exemplificar tais conceitos, utilizamos questões retiradas de um pré-teste que serve de instrumento diagnóstico para esta pesquisa.

No que tange ao ensino de Análise Combinatória para o Ensino Médio, podemos ter como contribuição as recomendações de Lima *et al.* (2004):

> Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjo, permutação e combinações têm dificuldade de resolver até mesmo problemas simples;
>
> Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada;
>
> Você quer mostrar que é o bom ou prefere que seus alunos aprendam? Se você optar pela a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema; não devemos mostrar os truques sem antes apresentar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos;

> Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contudo indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos (LIMA *et al.* 2004, p.111**).**

No que se refere à primeira sugestão dos autores, compreendemos que é importante proporcionar condições aos alunos para que eles consigam encontrar uma solução para um problema de contagem sem o uso exagerado de fórmulas. Mas, consideramos relevante que os alunos saibam utilizar as fórmulas como importantes ferramentas para a resolução dos problemas de Análise Combinatória.

Para resolver problemas de Análise Combinatória Lima *et al.*(2004) sugerem que:

> Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que realizará a ação solicitada no problema e ver que decisões deverão ser tomadas;
> devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples;
> devemos perceber que dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se um das decisões a ser tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Nossa experiência ministrando aulas de Análise Combinatória aponta que uma boa maneira de fazer os alunos desenvolverem de formar mais eficaz o raciocínio combinatório é escrever as três sugestões dos autores na lousa e, a cada resolução de um problema combinatório na sala de aula, solicitar que eles apontem o momento que as mesmas se apresentam em suas resoluções.

2.3.1. Conceitos básicos do princípio fundamental da contagem, permutação simples, arranjo simples e combinação simples.

Um conceito para o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C)

Se um evento ocorre em etapas, E1, E2, E3,..., Em, sucessivas e independentes, sendo P1,P2,P3,...,Pn o número de possibilidades de cada etapa, então, o número de possibilidades de o evento ocorrer é P1.P2. P3...Pn.

Vejamos um exemplo:

Com os algarismos 1, 2 e 3 quantos números de dois algarismos distintos que podemos formar?

Solução:

A intenção é formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32. Obtemos assim, uma quantidade igual a seis números de dois algarismos distintos. Mas, para obter o mesmo resultado, poderíamos utilizar o P.F.C., como segue:

$$\frac{3\,\text{possibilidades}}{(1^{o}\,\text{algarismo})} \times \frac{2\,\text{possibilidades}}{(2^{o}\,\text{algarismo})} \times \frac{1\,\text{possibilidades}}{(3^{o}\,\text{algarismo})} = 6$$

Um conceito para Permutação Simples

Quando um agrupamento é composto por *n* elementos dispostos em *n* posições, dizemos que temos uma permutação dos *n* elementos.

Para calcular o número de permutações, usamos P_m = m. (m-1). (m-2). 3. 2.1 = m!

Lemos m! : fatorial de m

Exemplo:

Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de uma outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra AMOR?

Solução:

Como a palavra AMOR tem quatro letras, então, a quantidade de anagramas são todas as permutações formadas com as letras da referida palavras.

$P_4 = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$

Um conceito para o Arranjo Simples

*Dado um conjunto de **n** elementos, e sendo **p** um número inteiro e positivo, tal que **p≤n**, chama-se arranjo simples dos **n** elementos dados, agrupados **p** a **p**, qualquer sequência de **p** elementos distintos formada com elementos do conjunto.*

*A notação matemática do arranjo simples de **n** elementos agrupados **p** a **p**:* $A_{n\,;\,p}$

Observe:

$A_{n\,;\,1} = n$

$A_{n\,;\,2} = n . (n-1)$

$A_{n\,;\,p} = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-p+1)$ ou $A_{n\,;\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Vejamos um exemplo:

Entre 8 (oito) professores de uma escola, devem ser escolhidos três para os cargos de diretor, vice-diretor e supervisor pedagógico. De quantas maneiras a escolha pode ser feita?

Solução:

Como a ordem da escolha dos professores para ocupação dos cargos interfere na formação dos agrupamentos, dizemos que o problema é de Arranjo Simples.

$$A_{8\,;\,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 336$$

Um conceito para a Combinação Simples

*Dado um conjunto de **n** elementos e sendo **p** um número inteiro e positivo, tal que **p≤n**, chama-se combinação simples dos **n** elementos dados, agrupados **p** a **p**, qualquer subconjunto de **p** elementos distintos formada com elementos do conjunto.*

***OBS:** a mudança de ordem dos **p** elementos não altera o agrupamento.*

*A notação matemática da combinação simples de **n** elementos agrupados **p** a **p**: $C_{n\,;\,p}$*. Observe: $C_{n;p} = \dfrac{A_{n,p}}{P!}$ ou $C_{n;p} = \dfrac{n!}{P!(n-P)!}$

Exemplo:

De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Fortaleza entre os sete funcionários, de melhor desempenho no ano de 2007, de uma empresa?

Solução:

Como a ordem da escolha dos funcionários não interfere na formação dos agrupamentos, dizemos que o problema é de Combinação Simples.

$$C_{7;3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7.6.5.4!}{3.2.1.4!} = 35$$

Na seção que segue, apresentamos a fundamentação teórica deste trabalho. É importante ressaltar que nosso principal interesse é investigar uma Sequência Didática para ser desenvolvida em sala de aula dentro das condições reais dos fenômenos inerentes ao processo de ensino-aprendizagem que ocorre no interior de uma escola. Para isso, nos situamos de acordo com algumas tendências da Educação Matemática, apoiando-nos em teóricos que se preocupam em suas investigações com as problemáticas do Ensino da Matemática na realidade da sala de aula.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, apresentaremos uma reflexão acerca da tendência em Educação Matemática, conhecida como metodologia da resolução de problemas. Em seguida, apresentaremos a teoria das Situações Didática desenvolvida por Brousseau (1996). Por fim, descreveremos outra tendência em Educação Matemática, conhecida como o uso de jogos no ensino da Matemática que em nossa sequência didática tem a finalidade de ser utilizada como fixação de certo conceito institucionalizado.

3.1. METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em nossa concepção, metodologia de ensino é o estudo de processos de ensino para a aprendizagem. Nesse contexto, metodologia é percurso, meio, sistematização, abordagem, reconstrução do conhecimento.

Tanto a metodologia como as técnicas que a ela se relacionam encaminham processos de ensinar e aprender. A metodologia tem sentido amplo e alcance abrangente de estruturação do conhecimento que constitui os programas, ou unidades de estudo, no curso das disciplinas. As atividades complementam os processos de aprendizagem, auxiliando a aplicação, a transposição do conhecimento e sua reconstrução.

A aprendizagem implica a reconstrução crítica do conhecimento em níveis diversos, a exemplo de compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação. Essa reconstrução envolve uma teia de conhecimentos matemáticos, dedutivos e indutivos, tanto quanto os fatores do diálogo.

Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Dessa forma, consideramos importante as discussões em grupos de trabalho com os alunos. Quanto mais condições são dadas aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser correta e integrada numa rica teia de ideia e de compreensão relacional. Mas afinal, de onde derivam essas ideias?

A resposta para a indagação consiste em apresentar o que Van de Walle (2001) considera um problema. "*Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta*".

Para o autor, um problema é algo inesperado que precisa de uma solução e no encaminhamento traçado, seja ele certo ou errado, surgirão às ideias. Essas são na verdade o fluxo do conhecimento que vai emergindo durante o processo de resolução de problemas.

A Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, por intermédio do Departamento de Políticas do Ensino Médio, encaminhou, no ano de 2006, aos professores, o documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio,* com a intenção de apresentar um conjunto de reflexões que alimentem suas práticas pedagógicas. No que tange às orientações acerca do ensino da Matemática, encontramos no volume 2 - nomeado Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – as seguintes reflexões:

> Sobre o processo de ensino aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica o ensino como transmissão de conhecimento, e aprendizagem com mera recepção de conteúdos. Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor (BRASIL, 2006, p.86).

Observamos que o documento aponta a metodologia enraizada na transmissão de conhecimento como a mais frequente em nossas salas de aula. Para o referido documento, essa concepção dá origem à metodologia de ensino que propõe a definição do conceito de um determinado conteúdo matemático, seguido de exemplos e exercícios, ou seja, a introdução de um novo conceito dar-se-ia pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam como padrão, e com os quais os alunos iriam posteriormente reforçar o que fora apresentado pelo professor por meio de um grupo de exercícios chamados de "*exercícios de fixação*".

Entretanto, a referida proposta metodológica representa um modelo falido que não proporciona aos alunos uma participação digna dentro do processo de aprendizagem, posicionando-se apenas como agentes passivos. Partindo desse ponto de reflexão o documento aponta:

> Uma segunda corrente, ainda pouco explorada em nossos sistemas de ensino, transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo. As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas (BRASIL, 2006, p. 86).

Quando nos referimos à resolução de problemas, estamos considerando uma metodologia de ensino que, segundo Dante (2002), relaciona os seguintes objetivos:

- Fazer o aluno pensar produtivamente
- Desenvolver o raciocínio do aluno
- Ensina o aluno a enfrentar situações novas
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas
- Dar uma boa base matemática às pessoas

Essas ideias apresentam como premissa que o aluno seja construtor de seu próprio conhecimento, cabendo ao professor ser o mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. Nessa concepção, o caminho para aprendizagem apresenta-se em sentido contrário ao da metodologia enraizada na transmissão de conhecimento e a construção de um novo conceito dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema.

Para Meirieu (1998) uma situação-problema é:

> Uma situação didática na qual se propõe uma tarefa que ele (aluno) não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. E essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema, se

> dá ao vencer o obstáculo na realização da tarefa. Assim, a produção supõe a aquisição, uma e outra perdendo o seu objeto de avaliações distintas (MEIRIEU apud MACEDO, 2002, p.115).

O professor, quando escolhe o caminho metodológico das situações-problema para desenvolver sua prática pedagógica, precisa estar consciente de que não deve chegar à sala de aula propondo um problema e logo em seguida apresentar um novo conceito aos alunos. O uso de situações-problema exige que o aluno tenha total envolvimento com o conhecimento que ele pretende alcançar e, dessa forma, uma única situação-problema não possibilitaria a construção do referido conceito.

Outro ponto a ser posto em pauta está relacionado com o domínio do conteúdo pelo professor. Não basta que ele tenha um conhecimento superficial, ou rotineiro, do assunto que pretende ministrar, pois, ao propor as situações-problema, surgirão questionamentos dos alunos que nem ele próprio, o professor, havia pensado antes. A insegurança do professor, nesse momento, pode tornar-se uma imensa barreira e, assim, prejudicar o êxito da proposta metodológica. Por essas e outras razões, o professor, ao propor uma situação-problema em sala de aula, precisa ter a clareza do uso da metodologia da resolução de problema na sequência de ensino que ele elaborou. Pois, segundo Mendonça (apud Sá 2005), há três interpretações da expressão resolução de problemas, a saber, como um **objetivo**, um **processo** e um **ponto de partida.** Assim descritos:

> Como **objetivo,** a resolução de problemas significa que se ensina matemática para resolver problemas;
>
> Como **processo,** a resolução de problemas significa olhar para o desempenho/ transformação dos alunos como resolvedores de problemas; implica analisar as estratégias dos alunos;
>
> Como **ponto de partida**, os problemas são usados como recurso pedagógico, para iniciar o processo de construção de um determinado conhecimento específico.

Em nossa compreensão, a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, por meio da resolução de problemas, constitui-se num caminho metodológico para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas e não de ensinar a resolver problemas. Dessa forma, em nossa sequência didática optamos pela metodologia da resolução de problemas como **ponto de partida.** Nessa interpretação, o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de uma situação-problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem, culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor.

De acordo com Sá (2005), para utilizar a resolução de problemas como ponto de partida, o professor deve antes de tudo acreditar que é possível, dentro de certos limites, serem resolvidos problemas sem o domínio de certas operações e conceitos matemáticos.

O autor recomenda ao educador que:

> 1. Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
> 2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
> 3. Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
> 4. Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
> 5. Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
> 6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
> 7. Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
> 8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
> 9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
> 10. Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
> 11. Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado (SÁ, 2005, p.75).

Acreditamos que essas onze recomendações desenvolvidas por Sá (2005) nos ajudarão a produzir condições favoráveis de aprendizagem à institucionalização dos conceitos básicos de análise combinatória, por meio de situações didáticas, que enfatizem a resolução de problemas como ponto de partida, nossa hipótese de pesquisa.

No que tange à Teoria das Situações Didáticas, descrevemos a seguir uma breve reflexão acerca de seu campo teórico.

3.2. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.

A situação didática é um jogo pedagógico elaborado para dentro do contexto da sala de aula, pelas múltiplas relações existentes entre o professor, os alunos e o saber. Segundo Pais (2001), a finalidade de uma situação didática é desenvolver atividades voltadas para o ensino e aprendizagem de um conteúdo específico.

Para Brousseau (1996), numa concepção formal de ensino, o professor propõe ao aluno uma questão a ser resolvida, esperando do mesmo uma boa resposta. No entanto, ao perceber que essa resposta não foi alcançada ou apresentou-se de forma inadequada, o professor fundamenta-se na crença de que o aluno necessita de mais informações para resolver o problema, ou melhor, de mais aulas. Ao continuar descrevendo algumas bases epistemológicas de ensino, o autor nos apresenta outro dois métodos: o primeiro é o método Socrático, em que o papel do professor é de levantar uma série de perguntas permitindo que o aluno venha a retirar de seu próprio conhecimento as respostas à pergunta central. Esse método consiste na hipótese que o conhecimento é inato e vem se acumulando de outras vidas passadas. Precisando de alguém que o ajude a trazê-lo (reminiscência) à realidade.

O segundo método, Brousseau considera um aperfeiçoamento do primeiro, está inserido na teoria psicogenética de Piaget. Segundo Brousseau (1996), a evolução entre os métodos ocorre quando o aluno é posto numa interação com o meio social em que vive. Nesse método, o aluno aprende olhando o mundo ou formulando hipóteses, dentre as quais sua experiência lhe permite fazer escolhas, ou ainda, numa interação mais complexa feita de assimilação e de acomodação. Para o autor, a teoria piagetiana liberta o professor de toda e qualquer responsabilidade didática. Ele contesta dizendo que isso é um paradoxal regresso a uma espécie de empirismo, e diz ainda que um meio sem intenções didáticas é insuficiente para inculcar no aluno todos os conhecimentos culturais que se deseja que ele adquira.

Em sua base epistemológica, Brousseau (1996) defende que:

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque nos alunos as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos "problemas" que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio (BROUSSEAU, 1996, p. 49)

Nessa concepção, o professor deve efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema. A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar e anunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Caso o aluno venha a aceitar o desafio proposto na sala de aula, envolvendo-se completamente com o processo de construção do novo conhecimento e o mesmo consiga sucesso em sua tarefa, é quando ocorre a aprendizagem. Durante todo esse processo didático surge um conjunto de variáveis que se distanciam do controle direto do professor, para esse momento, é necessário termos o conhecimento da noção de situações a-didática.

Segundo Brousseau (1986):

> Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que está construindo, em situações não previstas de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a - didática (BROUSSEAU, 1986 apud PAIS, 2001, p. 68).

Uma situação a-didática se caracteriza essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem que o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor.

Cabe ao professor elaborar situações-problema que permitam que os alunos se encontrem em situações a-didáticas. O processo é evolutivo e ocorre da seguinte maneira: primeiro, o professor propõe uma situação-problema, se abstendo ao máximo de informar o caminho para o aluno superar esse obstáculo, depois, ocorre a socialização das respostas dos alunos da turma, em geral, os mesmos estão em duplas ou grupo. Espera-se que os alunos já tenham enxergado algumas variantes do conceito que se pretende elaborar. Outra situação-problema é proposta como uma evolução da primeira e o comportamento do professor se mantém.

A decisão do número de situações-problema necessárias durante a situação a-didática parte do professor e de seu planejamento.

Como a produção de conhecimento nessas situações a-didáticas é geralmente muito ampla, faz-se necessário uma fase de institucionalização do saber que deve ser conduzida pelo professor. Para Freitas (1996), esta fase visa dar o “acabamento” ao conhecimento elaborado pelo aluno ou mesmo trabalhado no sentido de descartar possíveis aspectos não valorizados na perspectiva do saber socialmente formalizado.

Gálvez (2001) considera que as situações didáticas representam o objeto de estudo da didática da matemática e que se tornou necessário desenvolver uma metodologia para analisá-las. Ao citar uma reflexão do trabalho de Brousseau, o autor nos diz:

> Para Brousseau, no entanto, um momento fundamental da investigação em didática se constitui na análise *a priori* da situação. O pesquisador em didática deve ser capaz de prever os efeitos da situação que elaborou, antes de colocá-la à prova em aula; só posteriormente poderá comprar suas previsões com os comportamentos observados (GÁLVEZ, 200, p.26).

Segundo o autor, para analisar as situações didáticas, Brousseau as modeliza, utilizando elementos da teoria dos jogos e da teoria da informação. As regras estabelecidas no jogo pedagógico estão presentes na noção de contrato didático.

A noção de contrato didático passa pela compreensão de que, na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a-didática, e a aprendizagem é uma adaptação a essa situação. Dessa forma, o contrato didático é um conjunto de ações que o professor espera do aluno e um conjunto de ações que o aluno espera do professor.

Em Gálvez (2001), encontramos a classificação das situações didáticas propostas por Brousseau.

Situações de Ação

São situações nas quais se gera uma interação entre os alunos e o meio físico. Os alunos devem tomar as decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução de problema formulado.

Situações de Formulação

São situações que objetivam a comunicação de informações entre alunos. Para isso, devem modificar a linguagem que utilizam habitualmente, precisando-a e adequando-a às informações que devem comunicar.

Situações de Validação

São situações nas quais se tenta convencer a um ou a vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Nesse caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Não basta a comprovação empírica do que dizem ser certo.

Situações de Institucionalização

As situações de institucionalização são destinadas a estabelecer convenções sociais. Nessas situações, busca-se que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber que foi elaborado por eles mesmos, em situações de ação, de formulação e de validação.

3.3. O USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso de jogos no ensino da Matemática é uma tendência pouco explorada no Ensino Médio. Talvez esse fato venha ocorrer por dois motivos: o primeiro está associado à forma como os conteúdos matemáticos são apresentados aos alunos, em geral, acompanhando as propostas dos livros didáticos; o segundo está vinculado à questão da faixa etária (entre 14 e 20 anos). Pois, nessa fase, os alunos trocam as brincadeiras, que até a última série do Ensino Fundamental existiam, pelas primeiras conquistas amorosas.

Mas, com todas essas suposições, acreditamos que o uso de jogos no ensino da Matemática, desenvolvido no Ensino Médio, pode tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem seja algo fascinante.

Procurando conhecer melhor essa tendência da Educação Matemática, encontramos no trabalho de Lara (2003) a seguinte classificação dos jogos como estratégia para o ensino de Matemática: jogos de construção, jogos de treinamento, jogos estratégicos e jogos de aprofundamento.

Os jogos de construção são os que trazem aos alunos assuntos desconhecidos. Esses tipos de jogos são geralmente utilizados para a introdução de um novo conceito aos alunos. Dessa forma, o jogo é a principal ferramenta do professor em sua proposta de ensino.

Os jogos de treinamento são utilizados para verificar se os alunos construíram ou não um determinado conhecimento proposto em uma situação de ensino. Segundo Lara (2003), o treinamento para o qual o jogo foi planejado pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido, pois é por meio de exercícios repetitivos que os alunos percebem a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido, aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção.

Os jogos estratégicos são utilizados no ensino da Matemática com a finalidade de os alunos criarem o hábito de desenvolverem novas estratégias de resolução para determinados problemas. Por isso que os jogos estratégicos são aqueles já conhecidos pelos alunos (Xadrez, Batalha Naval, Dama, Jogos de Computados e outros jogos).

Os jogos de aprofundamento são utilizados após a institucionalização de determinado conceito matemático. A aplicação desses tipos de jogos tem as mesmas características de um exercício de fixação. Para Lara (2003), a resolução de problemas é uma atividade muito conveniente para o aprofundamento e tais problemas podem ser representado na forma de jogos.

É nesse sentido que procuramos desenvolver uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória, no Ensino Médio, utilizando três jogos de aprofundamento.

A seguir, apresentamos a Metodologia da Engenharia Didática; descrevemos a importância dessa abordagem metodológica para nossa pesquisa, bem como o uso de seus princípios em nossos procedimentos metodológicos.

4. METODOLOGIA

O objetivo desta seção é apresentar a Metodologia da pesquisa bem como os seus procedimentos metodológicos. Nossa opção metodológica de pesquisa é conhecida no âmbito da Educação Matemática como Engenharia Didática.

4.1. ENGENHARIA DIDÁTICA

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências didáticas.

Para a autora, durante o processo da Engenharia Didática deve-se considerar um conteúdo do sistema de ensino, cujo funcionamento parece, por algum motivo, pouco satisfatório e procede-se a uma análise desse motivo com a intenção de propor mudanças, para um possível funcionamento mais satisfatório.

O termo Engenharia Didática pode ser entendido tanto como uma metodologia de pesquisa, quanto como o que Douady (1986) explicitou como:

> uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor – engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY apud HEY, 2001, p.49)

A metodologia da Engenharia Didática inclui quatro fases:

1. Estudos preliminares;
2. Construção da sequência didática e análise *a priori*;
3. Aplicação de uma sequência didática;
4. Análise *a posteriori* e a validação

De acordo com Pais (2001), na primeira fase da Engenharia Didática:

> o objeto é submetido a uma análise preliminar, através da qual se fazem as devidas inferências, tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da

> realidade sobre a qual a experiência será realizada. Por vez, devido à complexidade dessa realidade, as constatações iniciais não são claramente explicitadas por ocasião do planejamento da pesquisa, mas sua interferência não pode ser desconsiderada para a concepção da proposta da sequência didática (PAIS, 2001, p.11).

É nesta fase que o pesquisador procura conhecer trabalhos desenvolvidos ou em fase de desenvolvimento que envolvam o objeto matemático da pesquisa, aprofunda-se no campo teórico que serve de fundamentação ao estudo, realiza estudos procurando conhecer melhor as concepções dos sujeitos que, ele acredita, sejam importantes à realização e elaboração dos instrumentos de pesquisa e/ou análise dos dados gerados no trabalho. Tudo isso leva o pesquisador a desenvolver um trabalho na primeira fase da Engenharia Didática que seja considerado a pedra angular das outras fases.

Na fase da Construção da sequência didática e Análise *a priori***,** o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre as quais o ensino pode atuar, e essas são chamadas de variáveis de comando. Visando facilitar a análise da Engenharia, Artigue (1996) distingue as variáveis de comando, como:

Variáveis Macro-Didáticas ou Globais dizem respeito à organização global da Engenharia Didática;

Variáveis Micro-Didáticas ou Locais são concernentes à organização local da Engenharia Didática, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase.

Essas variáveis podem ser tanto de ordem geral, como específica, isto é, depende do conteúdo didático a ser ensinado. Por exemplo, caso a variável seja do tipo microdidática, tem-se as variáveis intrínsecas ao problema, que são de ordem geral, e as variáveis que dependem da situação, ligadas à organização e à gestão do meio, que são específicas. As escolhas de ordem geral, globais, precedem à descrição de cada fase da Engenharia, quando influem as escolhas locais.

O objetivo da análise *a priori* é, pois, determinar de que forma as situações-problema desenvolvidas na sequência didática poderão controlar o desenvolvimento das habilidades necessárias para os alunos resolverem os problemas. Para isso, fundamenta-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

A análise *a priori* é composta de uma parte descritiva e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação a-didática que, no geral, se pretende criar e aplicar aos alunos participantes da experimentação. Sendo assim, deve-se na análise *a priori*:

Descrever cada escolha local feita (eventualmente relacionando-a às escolhas globais) e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;

analisar qual o desafio da situação, para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação;

prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento de aprendizagem.

Após a realização da análise *a priori*, o pesquisador parte para a experimentação ou aplicação da sequência didática.

A aplicação da sequência didática é a fase da realização da Engenharia desenvolvida com certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato com o pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos que são parte da investigação. A experimentação supõe:

A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;

a aplicação dos instrumentos de pesquisa;

o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).

Nessa fase, geralmente, alguns atropelos, de ordem técnica, ocorrem quando o pesquisador desenvolve seu trabalho pela primeira vez. Daí recomenda-se que o experimento seja realizado em outros momentos antes de seguir para análise *a posteriori* e a validação da pesquisa

Para Artigue (1996), a análise *a posteriori* e a validação é a fase que se apoia no conjunto de dados produzidos durante a experimentação, que são obtidos por meio das observações realizadas nas sessões de ensino e também produções dos dados na sala de aula ou fora dela. Esses dados são frequentemente completados por outros obtidos por intermédio da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. Para a autora, é nessa fase que ocorre o confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori*, em que se funda essencialmente a validação das hipóteses ou objetivos da pesquisa.

É importante ressaltar que nossa escolha, pela Engenharia Didática, parte da concepção de que tal proposta metodológica se constitui em organizar pesquisas em Didática da Matemática a partir da criação de uma sequência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem de matemática, esclarecendo o fenômeno investigado, além de focar a sequência didática dentro do referido processo envolvendo teoria e prática. Sendo assim, usando os princípios da Engenharia Didática, descrevemos a seguir nossos procedimentos de metodológicos.

4.2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com a intenção de investigar uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos da Análise Combinatória, por meio de situações didáticas, que enfatizam a resolução de problemas como ponto de partida, junto a alunos da segunda série do Ensino Médio, esta pesquisa foi desenvolvida dentro das quatro fases da Engenharia Didática. Em cada fase é descrito o que foi desenvolvido no trabalho.

4.2.1. Estudos preliminares

Nesta fase da Engenharia foi:

Realizada uma busca nos principais bancos de teses e dissertações das Universidades do Brasil e de algumas do exterior, anais de congressos de Educação Matemática, revistas na área de Educação e livros didáticos e científicos, a fim de encontrarmos trabalhos voltados para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória;

desenvolvida uma consulta a 20 professores de Matemática com o objetivo de conhecer a prática pedagógica predominante no ensino de Análise Combinatória, bem como a concepção que eles têm do grau de dificuldades de alguns tipos de problemas do assunto em questão, comuns nos livros didáticos;

desenvolvido um estudo acerca da resolução de problema como ponto de partida e da teoria das situações didáticas, considerados aportes teóricos dessa pesquisa;

elaborado um pré-teste que foi aplicado aos alunos que participaram do experimento em sala de aula.

No Capítulo II, deste trabalho, constam os resultados da consulta aos docentes e os estudos que realizamos acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. A parte teórica que fundamenta a pesquisa consta do capítulo III. A análise dos resultados obtidos durante a fase experimental consta do capítulo VII.

4.2.2. Construção da sequência didática e análise *a priori*

Nesta fase da pesquisa, foi construída uma sequência didática de ensino para ser desenvolvida em 20 aulas, com 90 minutos por aula, em salas de aulas das escolas que tenham Ensino Médio, à luz de três campos teóricos: o primeiro referente às sugestões de Sá (2005), direcionadas aos professores que optarem por desenvolver sequências de ensino por meio da resolução de problemas como ponto de partida. O segundo é a teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1996), direcionada às pesquisas que se propõem a investigar a experimentação de sequências didáticas e os seus efeitos no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de determinado conteúdo matemático; e o terceiro refere-se à teoria dos jogos que nesta sequência didática tem a finalidade de ser utilizada como fixação do conceito institucionalizado.

O quadro a seguir apresenta: o tema por aula da sequência que elaboramos; a formação dos alunos na sala; o número de situações-problema para cada aula; os objetivos das aulas e o jogo a ser utilizado.

Quadro 02: Uma sequência de ensino de análise combinatória.

TEMA DA AULA	FORMAÇÃO DOS ALUNOS NA SALA	NÚMERO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	TEMPO ESTIMADO PARA A AULA	OBJETIVOS	JOGO UTILIZADO
Princípio Fundamental da Contagem	Grupos	3	90 minutos	Introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem	PIF-PAF da Análise Combinatória
Exercícios	Grupo	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas envolvendo o PFC	
Permutação	Grupos	3	90 minutos	Introduzir o conceito de permutação e a noção de fatorial	CARTAS da Permutação
Exercícios	Grupo	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas envolvendo a permutação simples	
Diferença entre Arranjo e Combinação	Grupos	2	90 minutos	Introduzir o conceito de arranjo e combinação; fazer o aluno perceber a diferença entre arranjo e combinação e apresentar a representação $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$	DOMINÖ COMBINATÓRIO
Exercícios	Grupo	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de identificar os problemas que envolvam arranjo e combinação	
Arranjo	Grupos	3	90 minutos	Fazer o aluno perceber que $A_{n;p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	
Exercícios	Grupo	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas de Arranjo simples	
Combinação	Grupos	3	90 minutos	Fazer o aluno perceber que $C_{n;p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	
Exercícios	Grupo	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a Combinação simples	

Fonte: Pinheiro, 2008

Os jogos utilizados em nossa Sequência Didática foram desenvolvidos com base no trabalho de Pardal e Rocha (2007). O quadro abaixo apresenta o nome e o objetivo de cada jogo utilizado na Sequência Didática.

Quadro 03: Jogos da sequência de ensino.

NOME DO JOGO	OBJETIVO
PIF-PAF da Combinatória	Aprofundar o conceito do princípio fundamental da contagem.
Cartas da Combinatória	Aprofundar o conceito de permutação e o cálculo com o fatorial.
Dominó Combinatório	Aprofundar o conceito de arranjo e combinação estabelecendo continuamente a diferença entre os conceitos.

Fonte: Pinheiro, 2008

Foi realizada uma análise *a priori* das situações-problema usadas na aula do P.F.C., Permutação, Diferença de Arranjo e Combinação, Arranjo e Combinação. Na análise, verificamos a forma de resolver corretamente cada situação-problema, realizamos uma previsão acerca das possíveis respostas dos alunos e levantamos as hipóteses de como alcançar os objetivos de cada aula.

4.2.3. Aplicação de uma sequência didática

A sequência didática foi desenvolvida, no mês de junho, ano de 2008, na Escola de Ensino Fundamental e Médio Deodoro de Mendonça, localizada na região central de Belém. Trata-se de uma escola que sofre com acentuados problemas de infraestrutura, como, por exemplo: banheiros quebrados, salas de aulas sem portas, ventiladores com defeitos e outros problemas, reflexos do descaso do poder público.

A escolha pelo referido *lócus* se deu por dois motivos: em primeiro lugar, nossa prioridade em realizar pesquisas que venham contribuir para a melhoria do ensino público no Estado do Pará e, em segundo lugar, o pesquisador não pertencia à rede pública de ensino e precisou contar com a boa vontade da professora Rose Jucá que, gentilmente, cedeu seus horários de aulas numa turma da segunda série do Ensino Médio, do turno da tarde. Sendo assim, desenvolvemos a sequência didática como parte do conteúdo do ano letivo, pois a Análise Combinatória, a Probabilidade, a Estatística e a Trigonometria são os conteúdos matemáticos da segunda série do Ensino Médio da Secretaria de Educação do Estado do Pará.

A escola retornava de um período de 40 dias de greve dos professores da rede pública. Tivemos apenas duas semanas para desenvolver o trabalho. Com o pouco tempo disponível, foi necessário rever o planejamento da sequência e solicitar aos alunos sua participação em alguns horários de aula que não fossem os da professora Rose Jucá. É importante ressaltarmos que os próprios alunos nos apontavam os horários que comumente apresentavam falta de professores. Utilizamos três desses horários, dois para a aula de Combinatória e um, para aplicação do pós-teste.

Quanto ao planejamento da sequência de ensino, tivemos que sacrificar as aulas destinadas aos exercícios, reduzindo o período previsto de 20 aulas pela metade. Levantamos a hipótese de que o curto tempo entre as aulas e o desenvolvimento dos jogos manteria os alunos envolvidos com o conteúdo em questão, ao ponto de os mesmos conseguirem desenvolver as habilidades que estavam previstas para cada exercício.

Sendo assim, nessa fase foi aplicado o pré-teste, desenvolvida a sequência didática e aplicado um pós-teste[5], nessa ordem, junto aos alunos da turma 202, no período de 17/06/2008 a 30/06/2008.

Não conseguimos desenvolver os jogos nas aulas para os quais os mesmos estavam previstos. Ficando, dessa forma, para aula sequencial. De certo modo, esse fato veio contribuir para que na aula seguinte nós retornássemos ao conceito desenvolvido no encontro anterior.

O quadro abaixo apresenta o que denominamos “Encontros da experimentação”, a data de cada encontro, a atividade do dia e a hora que iniciou e terminou a atividade.

[5] .O pós-teste apresenta os mesmos problemas de Análise Combinatória do pré-teste.

Quadro 04: Sequência de ensino de análise combinatória usada na pesquisa.

ENCONTRO DA EXPERIMENTAÇÃO	DATA	ATIVIDADE DO DIA	HORA
Primeiro encontro	17/06/2008	Aplicação do pré-teste	Início: 15:00h Fim: 15:30h
Segundo encontro	18/06/2008	Aula do P.F.C.	Início: 17:00h Fim: 18:30h
Terceiro encontro	19/06/2008	Aula da Permutação e o jogo PIF-PAF da combinatória	Início: 16:45h Fim: 18:15h
Quarto encontro	24/06/2008	Aula da diferença entre arranjo e combinação	Início: 14:15h Fim: 17:45h
Quinto encontro	25/06/2008	Aula do Arranjo e Dominó combinatório	Início: 15:15h Fim: 16:45h
Sexto encontro	26/06/2008	Aula de combinatória	Início: 15:45h Fim: 17:15h
Sétimo encontro	30/06/2008	Aplicação do pós-teste	Início: 15:00h Fim: 16:00h

Fonte: Pinheiro, 2008

Foram utilizados como instrumento de coleta de dados, nessa fase, os registros dos alunos referentes a cada aula, o pré-teste, o pós-teste e uma câmera de vídeo. Tivemos a colaboração de um professor de Matemática nos ajudando como controlador da câmera de vídeo. O uso da câmera e a transcrição dos dados se fundamentaram nas sugestões de Carvalho (2006), para pesquisas voltadas ao Ensino de Ciências. A autora destaca o fato de os pesquisadores poderem ver e rever as aulas quantas vezes forem necessárias, um aspecto importante da transformação das gravações de vídeos em dados para as pesquisas. Como podemos observar na seguinte citação.

> Esse ver e rever traz às pesquisas em ensino uma coleção de dados novos, que não seriam registrados pelo melhor observador na sala de aula. É ver aquilo que não foi possível observar durante a aplicação do experimento em sala de aula e, mesmo, descobrir fatos que só se revelam quando assistimos às fitas várias vezes (CARVALHO, 2006, p. 33).

Sendo assim, a escolha pelo uso da câmera se deu pela forma como esse instrumento alcança o fenômeno que está sendo investigado. Pois, acreditamos que para responder nossa questão central de pesquisa precisávamos ver e rever as falas do professor e as respostas dos alunos durante o processo de institucionalização de cada conceito desenvolvido na pesquisa. Isso tudo faz parte da análise *a posteriori*.

4.2.4. Análise *a posteriori* e a validação

Nossas análises se apoiaram na produção dos alunos, tendo como base os registros produzidos por eles em cada aula da sequência, os resultados do pré e pós-testes e a transcrição das gravações de vídeo.

Os dados, para essa fase da análise, produzidos pelas transcrições das gravações de vídeo, serão apresentados na forma de “episódios de ensino”. Esse termo tem sua origem em Carvalho (2006). Segundo a autora:

> Para transformar as gravações das aulas em dados para nossas pesquisas temos de selecionar o que denominamos de “episódios de ensino”, isto é, “momentos extraídos de uma aula, onde fica evidente uma situação que queremos investigar”. O episódio faz parte do ensino e é, pois um recorte feito na aula, uma sequência selecionada em que situações chaves são resgatadas (CARVALHO, 2006, p. 33).

Carvalho (2006) considera que uma característica importante das transcrições é a possibilidade de não se perder informações sobre entonação, pausa, grau de certeza nas afirmações, entre outros. Nesse mesmo contexto, a autora chama a atenção para a importância da conservação das informações nos registros, visando a uma análise detalhada dos mesmos. Esses registros, segundo a autora, devem seguir códigos próprios desenvolvidos para pesquisas nas áreas das Ciências que se utilizam de produção de dados por meio das transcrições das gravações de vídeos.

O quadro a seguir apresenta os códigos que utilizamos em nossas transcrições, seguindo as orientações de Carvalho (2003).

Quadro 05: Codificação utilizada na transcrição dos dados vídeo gravados.

SINAIS	QUANDO UTILIZAR
...	Para marcar qualquer pausa, deve-se empregar reticências no lugar dos sinais típicos da língua escrita, como ponto final, vírgula, ponto de exclamação, dois pontos e ponto-e-vírgula. O único sinal de pontuação a ser mantido é o ponto de interrogação
( )	Para hipótese do que se ouviu
(( ))	Para inserção de comentários do pesquisador
: :	Para indicar prolongamento de vogal ou consoante. Por exemplo, "éh::"
/	Para indicar truncamento de palavras. Por exemplo: "o pro/...o procedi
____	Para quebras de sequências temáticas com inserção de comentários
__ __	Para silabação. Por exemplo: "di-la-ta-ção"
	Letras maiúsculas para entonação enfática
([ ])	Para falas simultâneas
	Para representar a simultaneidade das diversas linguagens, por exemplo, oral e gestual, deve-se alterar a formatação da fonte utilizando letras em negrito, itálico ou sublinhado

Fonte: Carvalho, 2003

Uma questão importante a ser levantada, com relação às pesquisas que utilizam a câmera filmadora, como instrumento de coleta de dados, caminha pelo campo ético. É necessário que todos os participantes permitam o direito do pesquisador em fazer uso de suas imagens, mesmo que não ocorra interesse de divulgação das imagens. Dessa forma, elaboramos um instrumento de direito de imagem (ANEXO 01) e solicitamos aos alunos que levassem para casa e apresentassem aos seus pais. Estes foram responsáveis pelo preenchimento do documento.

A validação foi realizada em duas etapas: na primeira etapa, validamos nossa hipótese de pesquisa utilizando os resultados encontrados na análise *a posteriori*, e obtidos por meio das transcrições das gravações e dos registros dos alunos. Na segunda etapa, utilizamos os resultados encontrados na comparação do pré e pós-testes que proporcionaram uma possível solução à nossa segunda questão. Entendemos que, ao confirmar nossa hipótese de pesquisa, alcançamos uma possível solução para a nossa questão principal. Essa solução da resposta, juntamente com os resultados do pré e pós-teste, serviu para responder à questão derivada.

No capítulo seguinte, descrevemos os "Encontros da experimentação" de nossa Sequência Didática.

5. SOBRE O PRÉ-TESTE E AS SITUAÇÕES-PROBLEMA UTILIZADAS NA SEQUÊNCIA DE ENSINO

Nesta seção, apresentamos um comentário geral acerca do pré-teste e das situações-problema de nossa sequência de ensino.

5.1. SOBRE O PRÉ-TESTE

O pré-teste foi elaborado com o objetivo de sabermos se os alunos conseguiriam resolver problemas que envolvessem as habilidades básicas do ensino de Análise Combinatória.

Os resultados, obtidos na pesquisa de Pinheiro e Sá (2007), nos ajudaram a perceber que os problemas que deveríamos usar no pré-teste seriam aqueles apontados pelos professores como os mais fáceis. A quantidade de questões também poderia influenciar na vontade dos alunos. Sendo assim, optamos por elaborar cinco problemas que envolvessem as habilidades básicas de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples.

Questão 01: Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra AMOR?

Comentário

O objetivo dessa questão é saber se o aluno possui habilidade em resolver problemas de permutação simples.

A questão pode ser resolvida usando $P_4 = 4.\ 3.\ 2.\ 1$. Entretanto, esse tipo de resolução ocorre quando o aluno já teve contato com o ensino de Análise Combinatória. No caso do pré-teste, esse procedimento de resolução talvez não venha a ocorrer, mas, se no pós-teste uma boa parte dos alunos conseguirem resolver a questão usando o referido procedimento, podemos considerar que os alunos desenvolveram a habilidade de resolver problemas de permutação simples.

Outra forma de resolver a questão é por contagem direta.

AMOR	MARO	RAMO	OMAR
AMRO	MAOR	RAOM	OMRA
AROM	MORA	RMOA	ORMA
ARMO	MOAR	RMAO	ORAM
AOMR	MROA	ROMA	OAMR
AORM	MRAO	ROAM	OARM

Talvez os alunos consigam resolver a questão usando esse procedimento.

Questão 02: Com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de dois algarismos distintos podemos formar?

Comentário

O objetivo da questão é saber se os alunos desenvolveram a habilidade de resolver problemas de arranjo simples e/ou habilidade de resolver problemas usando o P.F.C.

Para resolver a questão o aluno pode usar o P.F.C, como segue:

$$\frac{3\,\text{possibilidades}}{(1^{\circ}\,\text{algarismo})} \times \frac{2\,\text{possibilidades}}{(2^{\circ}\,\text{algarismo})} \times \frac{1\,\text{possibilidades}}{(3^{\circ}\,\text{algarismo})} = 6$$

Entendemos que essa estratégia talvez não seja a mais utilizada no pré-teste. Contudo, no pós-teste isso poderá representar o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas envolvendo o P.F.C.

A intenção da questão é formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32 que representam o que chamamos de contagem direta. Essa, talvez, seja a estratégia mais utilizada pelos alunos nessa etapa.

Outra forma de resolver a questão recai no uso da fórmula do Arranjo Simples.

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3.2.1}{1!} = 6$$

Quando o aluno utiliza essa estratégia de resolução corretamente, isso implica que ele desenvolveu a habilidade de resolver problemas de arranjo e de conhecer corretamente o uso da fórmula.

Questão 03: Entre 8 (oito) professores de uma escola, devem ser escolhidos três para os cargos de diretor, vice-diretor e supervisor pedagógico. De quantas maneiras a escolha pode ser feita?

Comentário

O objetivo dessa questão é saber se o aluno possui habilidade para resolver problemas envolvendo arranjo simples.

Para resolver a questão, o aluno pode utilizar como estratégia o uso da fórmula do arranjo simples, mas para o pré-teste talvez esse não seja o caminho escolhido pela maioria dos alunos. No entanto, se ocorrer no pós-teste o uso correto da fórmula, podemos considerar que os alunos desenvolveram a habilidade de resolver os problemas de arranjo simples.

$$A_{8\,;\,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 336$$

Outro procedimento de resolução é o uso do P.F.C.

$$\frac{8}{\text{Diretor}} \times \frac{7}{\text{Vice}-\text{Diretor}} \times \frac{6}{\text{Supervisor}} = 336$$

Esse procedimento, talvez, seja encontrado na execução do problema por alguns alunos no pré-teste.

O procedimento mais improvável de ocorrer é a contagem direta, para alcançar o resultado esperado, pois o número de agrupamentos é muito grande. Talvez, isso venha a caracterizar um fracasso dos alunos nessa fase do pré-teste.

Questão 04: De quantas maneiras diferentes podem se sentar cinco pessoas em um banco com cinco lugares?

Comentário

Objetivo da questão é saber se os alunos possuem habilidades de resolver problemas envolvendo permutação simples.

Na resolução da questão, o aluno pode usar a seguinte estratégia:

P_5= 5.4.3.2.1 =120, mas, acreditamos que não seja a mais utilizada nessa fase do pré-teste.

Pode ocorrer o fracasso dos alunos, caso a maioria venha a tentar realizar a contagem direta como estratégia, pois o numero de maneiras de sentar as pessoas no banco é muito grande.

Questão 05: De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Fortaleza entre os sete funcionários de melhor desempenho, no ano de 2007, de uma empresa?

Comentário

O objetivo da questão é saber se os alunos possuem habilidades de resolver problemas envolvendo Combinação Simples.

Para resolver a questão, o aluno pode usar como estratégia a fórmula da Combinação.

$$C_{7;3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7.6.5.4!}{3.2.1.4!} = 35$$

Essa estratégia, também, não é esperada no pré-teste pela maioria dos alunos. Mas caso venha a ocorrer uma percentagem significativa de alunos que consiga resolver os problemas usando a fórmula no pós-teste, podemos considerar que houve desenvolvimento das habilidades para resolver problemas de Combinatória.

Apresentamos, a seguir, as situações-problemas utilizadas em nossa sequência de ensino de Análise Combinatória.

5.2. SOBRE AS SITUAÇÕES-PROBLEMA

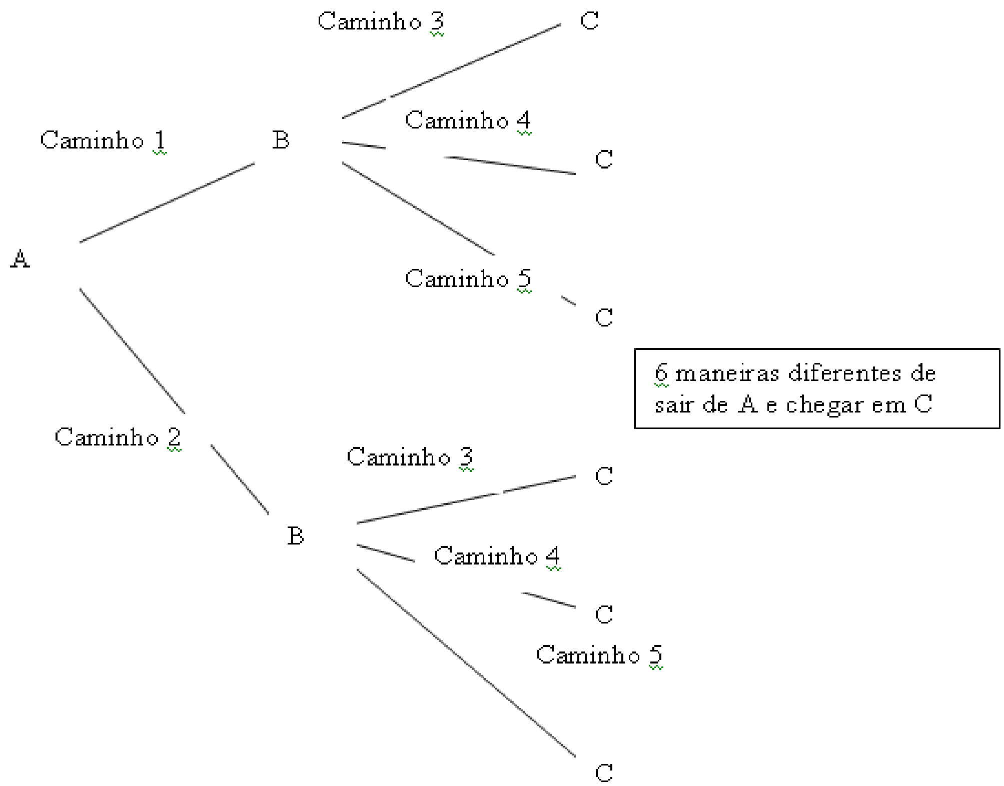
O objetivo das situações-problema 01, 02 e 03 é proporcionar condições a–didáticas que contribuam para a institucionalização do Princípio Fundamental da Contagem.

Sobre a situação-problema 01

Entre as cidades A e B, há 2 (duas) estradas, e entre as cidades B e C, há 3(três) estradas. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá ir da cidade A até a cidade C?

Possíveis estratégias de resolução para a situação-problema 01.

• Árvore de Possibilidades



• Princípio Fundamental da Contagem

$$A \xrightarrow{2\text{possibilidades}} B \xrightarrow{2\text{possibilidades}} C$$

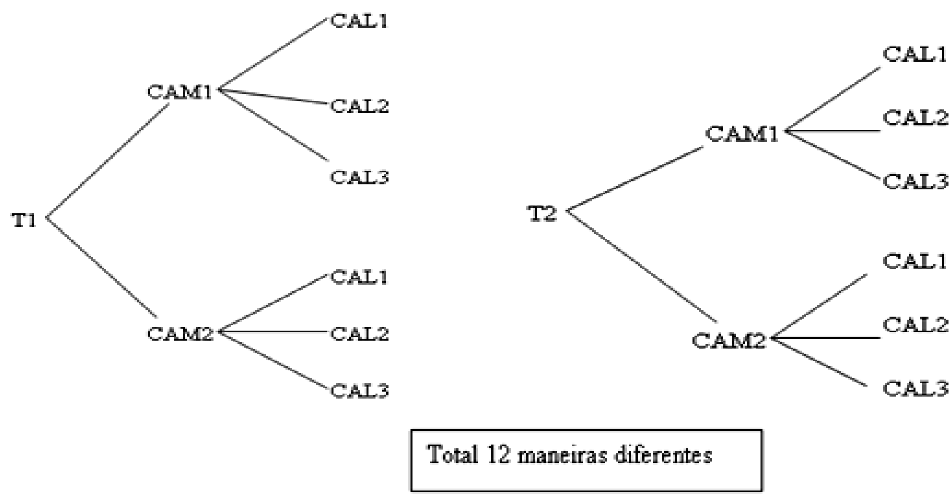
$$2 \times 3 = \boxed{6 \text{ maneiras}}$$

Sobre a situação-problema 02

Juquinha dispõe de 2 (dois) pares de tênis, 3 (três) camisas e 2 (duas) calças distintas entre si. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando 1 (um) par de tênis, 1 (uma) camisa e 1 (uma) calça?

Possíveis procedimentos de resolução

•. Árvores de possibilidade



•. Princípio Fundamental da Contagem

___________2________ X __________3_________ X _______2_____

Escolha dos tênis Escolha das camisas Escolha das calças

$\boxed{\text{12 MANEIRAS DIFERENTES}}$

Sobre a Situação-problema 03

Uma senha de banco é formada por 2 (duas) vogais e 2 (dois) algarismos distintos, escolhidos de 0 a 9. De quantas maneiras diferentes um cliente poderá cadastrar sua senha?

Possível procedimento de resolução

•. Princípio Fundamental da Contagem

_____5______ X _____5_______ X _______10_______ X ________9______

Primeira vogal Segunda vogal Primeiro algarismo Segundo algarismo

$\boxed{\text{2250 SENHAS DIFERENTES}}$

O objetivo das três situações-problema que seguem é proporcionar condições a–didáticas que contribuam para a institucionalização do conceito de Permutação e da noção do fatorial.

Sobre a situação-problema 04

De quantas maneiras diferentes Karla, Viviane e Mônica podem se sentar num banco com apenas 3 (três) lugares?

Possíveis procedimentos de resolução

- Contagem direta

(Karla, Viviane, Mônica)	(Viviane, Karla, Mônica)	(Mônica, Viviane, Karla)
(Karla, Mônica, Viviane)	(Viviane, Mônica, Karla)	(Mônica, Viviane, Karla)

- Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{3}{\text{PRIMEIRO LUGAR}} \times \frac{2}{\text{SEGUNDO LUGAR}} \times \frac{1}{\text{TERCEIRO LUGAR}}$$

Totalizando 6 maneiras diferentes

- Permutação

$P_3 = 3! = 3 . 2. 1 = 6$ maneiras diferentes

Sobre a situação-problema 05

De quantos modos diferentes podemos posicionar 4 (quatro) alunos em fila para a distribuição da merenda escolar?

Possíveis procedimentos de resolução

- . Contagem direta

Considerando que as iniciais dos nomes dos alunos são: A, B, C e D.

ABCD	ABDC	ADCB	ADBC	ACDB	ACBD
BCAD	BCDA	BDAC	BDCA	BACD	BADC
CBDA	CBAD	CDBA	CDAB	CADB	CABD
DABC	DACB	DCBA	DCAB	DBDC	DBCD

Temos 24 maneiras diferentes

- Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{4}{\text{PRIMEIRO LUGAR}} \times \frac{3}{\text{SEGUNDO LUGAR}} \times \frac{2}{\text{TERCEIRO LUGAR}} \times \frac{1}{\text{QUARTO LUGAR}}$$

Temos 24 maneiras diferentes

• Permutação

$$P_4 = 4! = 4. .3 . 2. 1 = 24 \text{ maneiras diferentes.}$$

Sobre a situação-problema 06

O professor Miranda comprou um CD de Brega, um de Pagode, um de Rock, um de Musica Popular Brasileira e um de Forró. De quantas maneiras diferentes ele poderá arrumar os CD'S num lugar reservado da estante de forma que os discos fiquem sempre juntos?

Possíveis procedimentos de resolução

• Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{5}{\text{Primeiro CD}} \text{ X } \frac{4}{\text{Segundo CD}} \text{ X } \frac{3}{\text{Terceiro CD}} \text{ X } \frac{2}{\text{Quarto CD}} \text{ X } \frac{1}{\text{Quinto CD}}$$

$$\boxed{\text{Totalizando 120 maneiras diferentes}}$$

• Permutação

$$P_5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$$

O objetivo das duas situações-problema que seguem é proporcionar condições a–didáticas que contribuam para a introdução do conceito de arranjo simples e de combinação simples, bem como fazer os alunos perceberem a diferença entre os dois tipos de problema.

Sobre a Situação-problema 07

Carlos, Karla, Viviane e Felipe concorrem num concurso que premia os dois primeiros lugares. Quantos são os resultados possíveis?

O objetivo dessa questão é fazer o aluno perceber que a ordem em que é feita a escolha das pessoas altera o resultado da premiação, logo, o problema é de arranjo simples.

Possíveis procedimentos de resolução

•. Utilizando apenas as primeiras letras de cada nome, apresentamos os possíveis resultados.

(C, K)	(C, F)	(C, V)
(K, C)	(K, F)	(K, V)
(V, F)	(V, F)	(V, C)
(F, C)	(F, V)	(F, K)

Totalizando 12 resultados diferentes

- Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{4}{\text{Primeiro lugar}} \times \frac{3}{\text{Segundo lugar}} = 12 \text{ resultados diferentes}$$

- Fórmula do Arranjo

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4.3 = 12$$

Sobre a situação-problema 08

Um gerente deve formar uma comissão de dois funcionários, escolhendo entre Carlos, Karla, Viviane e Felipe. Quantas comissões diferentes são possíveis de serem formadas?

Possíveis procedimentos de resolução

- Por contagem direta dos agrupamentos

(C, K)	(C, F)	(C, V)
(K, C)	(K, F)	(K, V)
(V, F)	(V, K)	(V, C)
(F, C)	(F, V)	(F, K)

Como a escolha dos funcionários não altera o resultado da comissão, dizemos que esse é um problema de Combinação simples, totalizando 6 resultados.

- Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{4}{\text{Primeira escolha}} \times \frac{3}{\text{Segunda escolha}} = 12 : 2 = \boxed{6 \text{ maneiras diferentes}}$$

- Fórmula da Combinação

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 6$$

O objetivo das três situações-problema que seguem é proporcionar condições a–didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula do Arranjo Simples.

Sobre a situação-problema 09

Uma escola tem 4 (quatro) professores, entre os quais serão escolhidos 2 (dois), que disputarão os cargos de diretor e vice-diretor . De quantas maneiras diferentes pode ser o resultado da eleição?

Possíveis procedimentos de resolução:

• Contagem direta

Suponhamos que os nomes dos professores iniciem com as letras: C, K, F e V.

(C, K)	(C, F)	(C, V)
(K, C)	(K, F)	(K, V)
(V, F)	(V, F)	(V, C)
(F, C)	(F, V)	(F, K)

Totalizando 12 maneiras diferentes

• Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{4}{\text{Diretor}} \text{ x } \frac{3}{\text{Vice}} = 12 \text{ maneiras diferentes}$$

• Fórmula do Arranjo

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 12$$

Sobre a situação-problema 10

É importante ressaltar que nessa situação-problema houve um aumento no tamanho da amostra e no número de etapas para a realização do evento.

Na final dos jogos estudantis, 6 (seis) escolas disputam os três primeiros lugares. Determine o número de maneiras diferentes de obtermos o resultado dos jogos?

Possíveis procedimentos de resolução

• Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{6}{\text{Primeiro lugar}} \times \frac{5}{\text{Segundo lugar}} \times \frac{4}{\text{Terceiro lugar}}$$

Totalizando 120 maneiras diferentes

• Fórmula do Arranjo

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

Sobre a situação-problema 11

Quantos números de 3 (três) algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4,5}.

Possíveis procedimentos de respostas

• Princípio Fundamental da Contagem

$$\frac{5}{\text{Primeiro algarismo}} \times \frac{4}{\text{Segundo algarismo}} \times \frac{3}{\text{Terceiro algarismo}}$$

Totalizando 60 resultados diferentes

• Fórmula do Arranjo

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

A seguir, apresentamos as situações-problema 12, 13 e 14, utilizadas na aula com o objetivo de proporcionar condições a-didáticas que contribuam para a institucionalização da fórmula da combinação simples.

Sobre a situação-problema 12

O professor Miranda deseja sortear 2 (dois) livros idênticos de Matemática entre 4(quatro) alunos da turma. Quantos são os possíveis resultados do sorteio?

• Princípio Fundamental da Contagem

______4________ x _____3_________ = 12 :2 = 6

• Fórmula da Combinação

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

A seguir, o protocolo de resolução dos alunos

Sobre a situação-problema 13

Quantas comissões de 3 (três) pessoas podem ser formadas com 4 (quatro) alunos de uma escola?

Procedimentos de resolução

• Princípio Fundamental da Contagem

$\underline{\quad 4 \quad} \times \underline{\quad 3 \quad} \times \underline{\quad 2 \quad} = 24 : 6 = 4$

• Fórmula da Combinação

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4.3!}{3!} = 4$$

Sobre a situação-problema 14

Uma organização dispõe de 6 (seis) economistas. De quantas maneiras diferentes os dirigentes podem escolher três economistas para desenvolver um projeto econômico para o governo?

Possíveis procedimentos de resolução

• Princípio Fundamental da Contagem

(6 . 5 . 4) = 120 : 6 = 20

• Fórmula da Combinação

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3!} = 20$$

No capítulo que segue, descrevemos a fase de aplicação de nossa sequência didática.

6. ENCONTROS DA EXPERIMENTAÇÃO

O objetivo desta seção é descrever os sete encontros que tivemos com a turma 202, da segunda Série do Ensino Médio, turno da tarde, do colégio Deodoro de Mendonça situado no centro de Belém do Pará. A turma possui 25 alunos matriculados, mas contamos apenas com 15 participaram (10 mulheres e 5 homens). Os outros 10 alunos ou não participaram das aulas ou não participaram do pré-teste. Com relação aos episódios de ensino, usamos a letra P para referirmos à fala do professor e a letra A, para referirmos à fala do aluno. Utilizamos as sugestões de Sá (2005), numeradas de 1 a 11, como no quadro abaixo e, em seguida, descrevemos os encontros.

Quadro 06: Sugestões de Sá (2005)

NÚMEROS	SUGESTÕES
1.	Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
2.	Determine qual é o problema mais simples e interessante para turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
3.	Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
4.	Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
5.	Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
6.	Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
7.	Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
8.	Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
9.	Sistematize o conceito o conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
10.	Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
11.	Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado.

Fonte: Sá, 2005

Vejamos um exemplo de nossas intenções, considerando a Questão 01 de nosso pré-teste.

Com os algarismos 1, 2 e 3 quantos números de dois algarismos distintos que podemos formar?

A questão poderia ser utilizada como situação-problema para institucionalizar o conceito do P.F.C., pois a mesma apresenta um enunciado bastante simples;

Deixaríamos a turma pensar numa proposta de resolução para o problema;

Os alunos podem resolver o problema por contagem direta (12, 13, 21, 23, 31, 32)

Até este momento temos (sugestões: 2, 4, 5)

6.1. PRIMEIRO ENCONTRO

Este encontro ocorreu no dia 17/06/2008, iniciou-se às 14 h e 45 minutos, com a professora Rose Jucá apresentando o pesquisador à turma e expondo aos alunos que se tratava de uma pesquisa em nível de mestrado, mas o assunto que seria abordado fazia parte do conteúdo que deveria ser ministrado no segundo semestre. A professora ressaltou a importância que eles deveriam conferir ao trabalho, pois ficaria a cargo do pesquisador uma avaliação qualitativa dos participantes da pesquisa. Assumimos a turma e explicamos aos alunos que as aulas seriam gravadas por uma câmera de vídeo, mas que eles deveriam ficar bem à vontade na sala.

Entregamos o documento de direito do uso da imagem para que eles levassem para casa e o trouxessem com a autorização dos pais. Sugerimos que eles se organizassem corretamente em fila para que fosse realizado um teste com o objetivo de procurar conhecer o raciocínio combinatório de cada um. Solicitamos que eles procurassem um caminho qualquer para resolver as cinco questões do teste. Esse momento iniciou-se às 15h. O clima na sala foi de muita seriedade e compromisso com o teste. Após 30 minutos, com o primeiro aluno entregando seu teste, os demais imediatamente passaram a entregar seus respectivos testes.

A seguir, descrevemos o segundo encontro cujo objetivo foi introduzir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem. É importante ressaltarmos que desse encontro até o sexto, pudemos contar com a colaboração de um professor de Matemática que manipulou a câmera de vídeo.

6.2. SEGUNDO ENCONTRO

Este encontro iniciou-se às 17h do dia 18/06/2008, e terminou às 18h30min. Logo nos primeiros momentos da aula, contamos com a presença da professora Rose Jucá, que nos ajudou na formação dos grupos de trabalho dos alunos. A professora separou um grupo com quatro alunos que estavam em dependência em Matemática, os quais já tinham estudado Análise Combinatória no ano anterior. O grupo é identificado neste trabalho como grupo 04.

No total, cinco grupos foram formados, cada um com uma média de três alunos. A partir dessa aula, os grupos passaram a ser reconhecidos como grupo 01, grupo 02, grupo 03, grupo 04 e grupo 05. Foi entregue a cada grupo um envelope, devidamente identificado com o número, contendo três folhas de papel, em cada folha constava uma situação-problema. Solicitamos aos alunos que tentassem resolver as situações-problema do envelope. Podemos considerar que nos quarenta e cinco minutos de atividade, os grupos apresentaram uma intensa interação.

Dividimos o quadro em três partes e reservamos cada uma das partes para uma situação-problema. Solicitamos que um integrante do grupo 01 viesse ao quadro e apresentasse a resolução encontrada pelo grupo para a situação-problema 01. E depois, em ordem, todos os grupos fizeram a socialização das suas respostas, sempre por intermédio de um integrante escolhido pelo próprio grupo.

Consideramos nessa etapa da aula, do P.F.C., as seguintes sugestões de Sá (2005): (Sugestões: 2, 3, 4,5).

O quadro abaixo apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 01.

Quadro 7: Resolução situação-problema 01

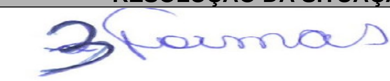
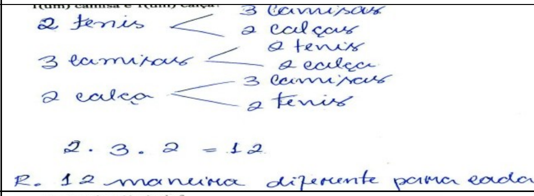
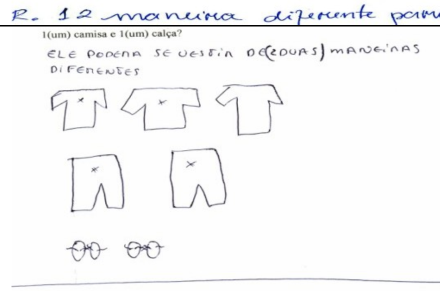
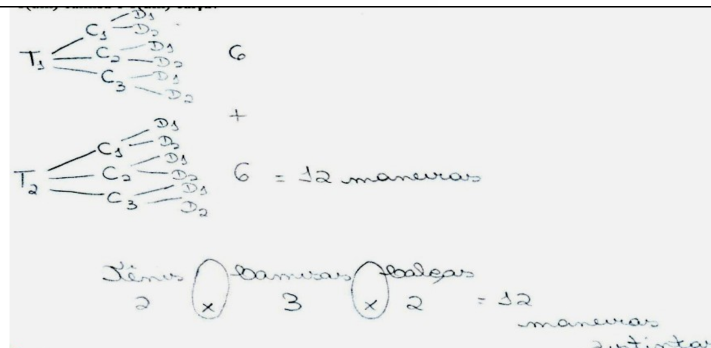
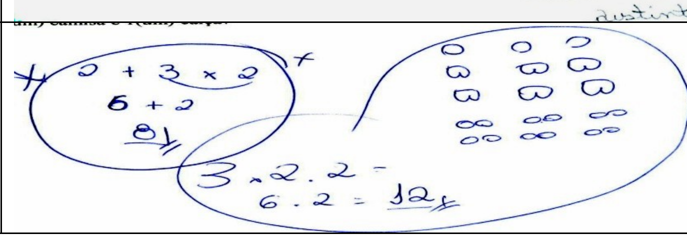
GRUPOS	RESOLUÇÃO SITUAÇÃO-PROBLEMA 01
01	5 maneira
02	Resolução A e B = 2 B e C = 3 A . C 2 . 3 = 6 R. Poderá ir 6 vezes de maneiras diferente
03	CONCLUSÃO A 1 2 B 1 2 3 C CHEGAMOS A CONCLUSÃO QUE PODERAM CHEGAR A CIDADE (C) PASSANDO PELA (B)
04	A B C 2 x 3 = 6 maneiras diferentes
05	A B C 2 x 3 = 6 maneiras distintas

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula do P.F.C.

Como já expusemos anteriormente, cada grupo apresentou sua resolução no quadro branco da sala de aula. No entanto, não paramos para discutir a solução correta da situação-problema. Pois, nosso interesse era formalizar o conceito do Princípio Fundamental da Contagem, para que depois os alunos fizessem uma revisão em suas respostas. Logo em seguida, solicitamos a resolução da situação-problema 02.

O quadro abaixo apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 02.

Quadro 8: Resolução situação-problema 02

GRUPOS	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 02
01	
02	
03	
04	
05	

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula do P.F.C.

Em seguida foi resolvida a situação-problema 03. É importante ressaltarmos que a ordem de apresentação correspondia ao número de cada grupo. Outra questão que devemos deixar clara é que os alunos de cada grupo procuravam se revezar a cada apresentação.

O quadro a seguir apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 03.

Quadro 9: Resolução situação-problema 03

Grupos	Resolução da situação-problema 03
1	4 maneiras
2	2 . Vogais 2 . algarismo 2 . 9 . 2 = 36 R- Poderão cadastrar de 36 maneiras diferente 4 etapas
3	PODE SER FORMADA DE (CINCO) MANEIRAS DIFERENTES A E I O U | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
4	Vogais x Algarismos 20 x 88 = 1760 maneiras diferentes
5	AO 01 23 45 67 89 AO 10 12 13 14 15 16 17 18 19 AO 20 21 23 24 25 26 27 28 29 AO 30 31 32 34 35 36 37 38 39 AO 40 41 42 43 45 46 47 48 49 AO 50 51 52 53 54 56 57 58 59 AO 60 61 62 63 64 65 67 68 69 AO 70 71 72 73 74 75 76 78 79 AO 80 81 82 83 84 85 86 87 89 AO 90 91 92 93 94 95 96 97 98 AO 02 03 04 05 06 07 08 09 2 x 10 x 9 = 180 5 x 5 x 10 x 9 25 x 90

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula do P.F.C.

Continuamos a aula procurando esclarecer aos alunos o significado de evento para a Análise Combinatória. Explicamos que, na situação-problema 01, o evento era formar um caminho para ir de A para C; na segunda, o evento era vestir uma pessoa com um par de tênis, uma camisa e uma calça; e na situação-problema 03, o evento era formar uma senha.

Seguindo com a aula, tivemos que expor à turma que a realização de um evento ocorre por meio de etapas. A nossa intenção foi fazer com que os alunos percebessem os invariantes das três situações-problema importantes à institucionalização do conceito do P.F.C.

A seguir, apresentamos alguns “episódios de ensino” que ocorreram nesta fase da aula, seguimos as seguintes sugestões de Sá: (Sugestões: 7, 8, 9, 10,11)

P: ((0')) me digam uma coisa... na primeira situação-problema... Quantas são as etapas?... não respondam verbalmente respondam primeiro no papel((neste momento o professor espera alguns segundos e inicia novamente)) Grupo número um... Quantas são as etapas para ir de da cidade A para cidade B?

A: duas etapas

P: DUAS ETAPAS.... grupo número dois.... Quantas são as etapas?

A: duas etapas.

P: Grupo três?

A: duas etapas

P: Grupo quatro?

A: duas etapas?

P: Grupo cinco?

A: duas etapas

P: Duas etapas....é um consenso geral do grupo... Não é isso aí?...então de A pra B é uma etapa.. e de B pra C tem outra etapa...então teu evento tem duas etapas...certo?...me diga uma coisa.... na segunda situação-problema...na segunda situação-problema...Quantas são as etapas para vestir uma pessoa?

Levamos esse diálogo com os grupos até a situação-problema 03, tendo o retorno esperado. Fizemos os alunos perceberem o número de etapas em cada situação-problema. O passo seguinte foi fazer os alunos perceberem que o produto das possibilidades de cada etapa do evento resulta no número de maneiras diferentes de o evento ocorrer. Como veremos no próximo "episódio de ensino".

P:((0')) me digam uma coisa...respondam aí pra mim..na aí..(referindo-se ao caderno dos alunos)...na primeira situação-problema...na primeira etapa...Qual é a primeira etapa?.. na primeira situação-problema.

A:([de A para B])

P: Quantos caminhos diferentes eu tenho pra ir de A pra B?

A: dois

P: respondam aí..(professor espera alguns segundos)... Quantos caminhos diferentes eu tenho pra ir de B pra C?

A: três

P: respondam aí...três...tá certo aí?

A: tá

P: tá... então pensem comigo agora...se eu escolher o primeiro caminho de A pra B...primeiro caminho...vamo lá comigo agora tá...escolhi o primeiro caminho... então eu...((professor virou para o quadro e escreveu a letra A afastou a mão escreveu a letra B afastou a mão escreveu a letra C))...se eu escolher o primeiro caminho para cada...eu tenho quantas possibilidades de escolha?

A: três ((alunos respondendo ao número de possibilidades, da segunda etapa, que formarão agrupamentos com o primeiro caminho escolhido))

P: então o primeiro caminho forma caminho com este... como este...com este...((professor procura apresentar a árvore de possibilidades))...Tá certo ou não... então só aqui eu vou ter quantos caminhos diferentes?

A: três

P: grupos respondam...quantos caminhos diferentes?

A: três

P: se eu escolher o segundo caminho aqui por favor... com este...com este...com este... só aí eu tenho quantos caminhos diferentes?

A: três

P: três...não é isso aí.. com este aqui quantos caminhos?

A: três

P: com este aqui quantos caminhos?

A: mais três

P: então... me diga grupos... na primeira situação-problema número um...quantos são os caminhos diferentes pra eu ir de A pra C?

A: seis

P: grupo número um responde...quantos são?...quantos caminhos diferentes eu vou de A pra C? na solução...

A: seis

P: SEIS...grupo número dois...

A: seis

P: grupo número três?

A: seis

P: grupo número quatro?

A: seis

P: grupo número cinco?

A: seis

P: Como é que eu poderia otimizar essa questão do seis...de que forma eu poderia chegar mais rápido no seis? Isto aqui é uma etapa? ...((professor olha para o lado da porta e observa a presença do professor do próximo horário de aula)) têm quantas possibilidades de escolha?

A: duas

P: esta aqui é uma etapa?.

A: éh::

P: têm quantas possibilidades de escolha?

A: três

P: três...quantos caminhos diferentes eu tenho?

A: seis

P: então como é que eu chego nesse seis...é isso que eu quero saber... como que eu chego nesse seis...((novamente o professor olha para a direção da porta))...como é que chego nesse número seis?

A: duas vezes três... é só multiplicar

P: multiplica duas vezes três...é isso consenso do grupo....

Ao observamos que os alunos haviam percebido que o resultado da situação-problema era obtido pela multiplicação do número dois pelo número três, continuamos as perguntas, mas para as outras situações-problema. E com isso, fomos proporcionando condições favoráveis para os alunos chegarem aos resultados das situações-problema. E, finalmente, institucionalizamos o conceito do Princípio Fundamental da contagem.

A seguir, apresentamos o terceiro encontro, que tem como objetivo a introdução do conceito de permutação simples e a noção do fatorial.

6.3. TERCEIRO ENCONTRO

Esse encontro foi realizado no dia 19/06/2008, iniciou-se às 16h 45min e terminou às 18h 15minutos. Foi mantida a mesma formação dos grupos da aula anterior. Iniciamos a aula, aplicando o jogo PIF-PAF da Análise Combinatória. A aceitação dos alunos foi acima dos que nós esperávamos. Pois, acreditávamos que nem todos gostariam de participar da brincadeira em função da idade e por estarem no Ensino Médio. Fizemos um constate trabalho de visita aos grupos para verificar se eles tinham compreendido as regras do jogo. Éramos chamados sempre que um aluno “batia” o jogo, para verificar se o procedimento de resolução e a solução final eram os mesmos da carta-problema. Essa atividade foi desenvolvida em 30 minutos de aula. Observamos que o grupo 04 foi o que mais se destacou. Pois, o grupo realizou mais partidas que os demais. Por fim, é importante ressaltar que essa fase, direcionada à fixação do P.F.C., foi conduzida pela sugestão 11 de Sá (2005).

Após recolhermos todos os jogos, fizemos a distribuição para cada grupo de um envelope contendo as situações-problema 04, 05 e 06. O procedimento foi o mesmo da aula anterior.

Todos os grupos tiveram um tempo, que correspondeu aproximadamente a 20 minutos, para a resolução das referidas situações-problema.

Dividimos o quadro branco da sala de aula em três partes, especificando as situações-problema. Em seguida, solicitamos que um aluno do grupo 01 resolvesse a situação-problema 04 e, na sequência, os alunos dos demais grupos.

Nessa fase da aula, nos apoiamos nas seguintes sugestões de Sá: 2,3,4,5,6.

O quadro a seguir apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 04.

QUADRO 10: Resolução situação-problema 04

GRUPOS	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 04
1	$3 \cdot 3 =$ 9 maneiras
2	Karla $3.3.3 = 27$ Viviane 27 maneiras diferentes mônica
3	$3 \cdot 3 = 9$ MANEINAS DIFENENTES
4	Karla Viviane Mônica Mônica Karla Viviane Viviane Mônica Karla Mônica Viviane Karla Karla Mônica Viviane Viviane Karla Mônica $P_n = n!$ $P_3 = 3!$ $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes
5	$K \leq 3$ $V \leq 3$ $M \leq 3$ $\{ 3.3.3 = 27$

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula de Permutação.

Em seguida, solicitamos a resolução da situação-problema 05 e, seguindo a ordem dos grupos, um integrante de cada grupo apresentou a resolução encontrada pelo grupo.

O quadro que segue apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 05.

QUATRO 11: Resolução situação-problema 05

GRUPOS	RESOLUÇÃO DOS ALUNOS
1	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
2	1º etapa 4 etapas $4 \cdot 4 = 16$ 2º etapa 3º etapa 4 etapa
3	$4 \cdot 4 = 16$ MANEIRAS DIFERENTES
4	$P_n = n!$ $P_4 = 4!$ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes
5	$4 \times 4 = 16$

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula de Permutação.

Logo em seguida, os alunos apresentaram a resolução da situação-problema 06. O quadro que segue apresenta o extrato de protocolo de cada grupo para a situação-problema 06.

QUADRO 12: Resolução situação-problema 06

GRUPOS	RESOLUÇÃO DOS ALUNOS
1	$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$
2	Brega comprou e arrumou Pagode Rock 2 etapa MPB Forró $5 \cdot 2 = 10$
3	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ MANEIRAS DIFERENTES
4	$P_n = n!$ $P_5 = 5!$ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras distintas
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula de Permutação.

Passamos para a segunda fase da aula de permutação. Essa foi conduzida pelas seguintes sugestões de Sá (2005): 6, 7, 8, 9 10.

Inicialmente, levantamos algumas perguntas acerca do número de etapas de cada situação-problema e depois sobre o número de possibilidades de ocorrência de cada etapa. O nosso objetivo foi fazer os alunos perceberem que o número de etapas é igual ao número de elementos do problema.

Após todos os grupos terem chegado a essa conclusão, solicitamos ao grupo número um que anunciasse a resolução da situação-problema 04 e depois os outros grupos. Vejamos o que foi exposto no seguinte “episódio de ensino”.

P: ((0’)) me diga uma coisa... o evento não é sentar as pessoas no banco? ((professor referindo-se à situação-problema quatro))

A: éh::

P: esse evento passa por quantas etapas?

A: Três

P: Três etapas.

A: isso

P: então respondam aí..é isso mesmo... não sei...quantas etapas são necessárias para concluir esse evento?

A: três

P: então coloquem aí... todo mundo concorda.. vamo lá...grupo número um.. concorda?

A: três

P: grupo número dois?

A: três

P: grupo número três?

A: sim

P: quatro?

A: sim

P: cinco?

A: três

P: legal...muito bem... agora nos sabemos que o agrupamento passa por três...((professor consegue fazer os alunos perceberem as etapas))

A: etapa

P: muito bem... nós vimos no trabalho de ontem.. que é importantíssimo identificar esse número de etapas...certo?...tá...a primeira etapa...A PRIMEIRA ETAPA...a segunda etapa...a terceira eta/..pra cada uma dessas etapas...há um número de possibilidades... não há?...certo ou não?

A: certo

P: tudo bem...então eu pergunto...presta atenção por favor...Quantas etapas são necessárias para a situação-problema número cinco?...Pra situação-problema cinco?

A: quatro

P: a situação-problema cinco...não é colocar as pessoas em fila...é isso aí..na fila né?...então... para formar uma fila eu preciso de quantas etapas?

A: quatro

P: quatro etapas não é isso aí?...Vocês concordam... ou não?

A: quatro

P: há algum grupo que ainda não conseguiu entender?...grupo dois vocês já conseguiram entender que é quatro etapas?

A: sim

P: então...na situação-problema cinco que é organizar os CD's...quantas etapas são necessárias?

A: cinco((apenas um grupo respondeu duas etapas. As alunas consideraram que os CD's o processo de compra dos discos, mas isso não fazia parte do contexto da situação-problema, mas logo depois com a manifestação dos outros alunos ela observou que eram quatro etapas))

P: Vamos agora retomar a situação-problema quatro...VAMOS RETOMAR A SITUAÇÃO PROBLEMA QUATRO...na situação-problema quatro são três etapas... sim ou não? Tá... a primeira etapa é a escolha de uma pessoa não é isso aí?...Quantas pessoas eu tenho para a primeira etapa?

A: três

P: Para segunda etapa?

A: três...duas...quatro...((momento de dúvidas na turma))

P: vamos repetir...é a situação-problema quatro...A situação-problema 04.. têm..três pessoas..Mônica..Viviane..e a Karla...pra primeira etapa é a escolha de quantas pessoas?

A: Três

P: pra segunda etapa?

A: duas..três

P: quero saber dos grupo...eu não sei..((professor permite que os alunos iniciem um processo de debate acerca do número de pessoa, não fazendo nenhuma intervenção))

A: duas..duas...uma saiu..UMA SAIU

P: e pra última etapa...quantas possibilidades?... o que vocês acham?... <u>o que esse grupo acha?</u>

A: uma

P: <u>e esse grupo aqui?</u>

A: uma também

P: então vamos repetir de novo...na situação-problema quatro.. eu tenho a Mônica...a Karal.. e a Viviane..pra montar um agrupamento é preciso de quantas etapas?

A: três

P: na segunda etapa...são quantas possibilidades?

A: duas

P: e na última etapa?

A: uma

P: então...por favor...registrem isso aí...o número de maneiras diferentes que você vai poder sentar essa pessoas..não é sentar no banco essa questão?

A: éh::

P: Dê quantas maneiras diferentes?...por favor...registrem isso aí agora...eu acho
Que vocês chegaram num resultado...Dê quantas maneiras diferentes?

A: seis

P: então registrem aí...procedimento...lembra do procedimento((professor faz referencias ao jogo PIF-PAF da Combinatória que utilizava procedimento e resultado para o aluno bater uma rodada do jogo))...e resultado..tá legal...entenderam...então olha lá...essa é a situação-problema número um...agora os grupos...vamos lá...grupo número um...GRUPO NÚMERO UM...situação-problema quatro...que vocês <u>apontaram isto como resposta</u> ...qual é a resposta agora pra vocês?

A: seis

P: grupo numero dois...qual é a resposta pra vocês?

A: seis

P: número três?

A: seis

P: número quatro?

A: seis

P: número cinco?

A: seis

P: perfeito

Conseguimos fazer os alunos perceberem que o número de elementos do conjunto é igual ao número de etapas. Com isso, estabelecemos condições favoráveis para a formalização do conceito de Permutação Simples.

No quadro branco da sala de aula foi escrito o conceito de permutação, em seguida, foi exposta a forma como representar matematicamente uma permutação (Escrevemos no quadro: P_3 e P_4)..

Solicitamos aos alunos que nos dissessem como calcular P_3. Eles responderam: “3 vezes 2vezes 1”. Logo depois, como calcular P_4 e a resposta foi “4 vezes 3vezes 2 vezes 1”. Observamos que estava tudo pronto para anunciarmos que 5. 4. 3. 2. 1 é igual a 5! (fatorial de cinco) e poderia ser escrito como P_5 = 5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120. Com isso, encerramos a aula.

A seguir apresentamos o quarto encontro que tem como objetivo introduzir o conceito de Arranjo simples e combinação simples; fazer os alunos perceberem a diferença entre os tipos de problemas que envolvem o Arranjo e a Combinação; e apresentar a representação $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$.

6.4. QUARTO ENCONTRO

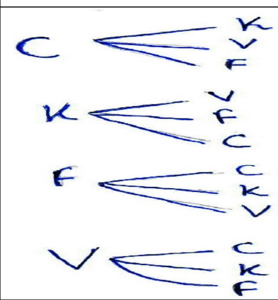
No dia 24/06/2008, realizamos o terceiro encontro. A aula iniciou às 14h15min e finalizou às 17h45min. A primeira fase desse encontro foi a aplicação do jogo “cartas da combinatória”. Esse jogo teve como objetivo aprofundar os conceitos da permutação e do cálculo com fatorial. Todos os grupos participaram intensamente da atividade. Esta fase da aula seguiu a seguinte sugestão de Sá (2005): 11.

Proporcionamos aos alunos um tempo de aproximadamente 30min para a realização do jogo. Entre as cartas-problema do jogo havia uma que se referia ao número de anagramas da palavra SOL. Escrevemos o enunciado da carta problema no quadro e convidamos os alunos a participarem da construção dos anagramas, utilizando as árvores de possibilidades. Nesse momento, observamos que a participação dos alunos foi muito boa. Dessa forma, partimos para a segunda fase da aula.

Entregamos um envelope para cada grupo, contendo a situação-problema 07, a situação-problema 08 e duas perguntas focadas na ordem dos agrupamentos em cada situação-problema. (sugestões: 1, 2, 3, 4, 5)

O quadro a seguir apresenta os extratos de protocolos da situação-problema 07.

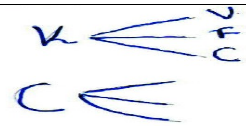
Quadro 13: Resolução situação-problema 07

GRUPOS	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 07
1	$2 \cdot 4 = 8$
2	$P_4 = 4!$ $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
3	$2 \cdot 1 = 2$ resultados possíveis
4	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 12$ resultados possíveis $\left.\begin{matrix}(K,C)(C,K)(V;K)(F,K)\\(K;V)(C;V)(V;C)(F;C)\\(K;F)(C;F)(V;F)(F;V)\end{matrix}\right\\}$ 12
5	

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo e Combinação

O quadro a seguir apresenta o protocolo de resolução da situação-problema 08

Quadro 14: Resolução situação-problema 08

GRUPOS	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 08
1	6 comissões
2	Não Fez
3	(K,C) (C,K) (V,K) (F,K) (K,V) (C,V) (V,C) (K,F) (C,F) (V,F)
4	(C;K) (F;K) (V;K) (F;C) (V;C) (F;V) 6 comissões distintas
5	

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo e Combinação.

Dividimos o quadro branco da sala de aula e escrevemos ambas as situações-problema. Em seguida, montamos todos os agrupamentos formados com as iniciais dos nomes que constam nas situações-problema. Vale ressaltar que nessa fase seguimos as seguintes sugestões de Sá (2005): 6, 7,8,9,10.

As perguntas que acompanham as situações-problema foram elaboradas com a finalidade de fazer os alunos perceberem a diferença existente nos problemas que envolvem o arranjo e a combinação.

Referindo-se à QUESTÃO 07, responda: os resultados Felipe e Karla (F, K) e Karla e Felipe (K, F) são iguais? Justifique.

A ideia foi fazer os alunos perceberem que os agrupamentos são diferentes. Vejamos um “episódio de ensino” que trata dessa fase da aula.

P:((o’)) Vamos lá para a terceira ficha de vocês....

A:((uma aluna faz a leitura da pergunta que se refere a situação-problema 07))

P: Os resultados Karla...Felipe....e....Felipe....e....Karla....São iguais ou diferentes?

A: iguais....

P: <u>pra está situação...são iguais ou diferentes</u>?

A: diferentes

P: por que vocês acham que são diferentes? ... justificaram o porque que são diferentes...coloquem no papel porque são diferentes.

A seguir, apresentamos os extratos de protocolos com as justificativas dos alunos.

Quadro 15: Justificativas a situação-problema 07

GRUPOS	JUSTIFICATIVA DOS ALUNOS NA QUESTÃO REFERENTE A SITUAÇÃO-PROBLEMA 07
1	não. Porque tem o 1º e 2º lugar
2	não, porque elas estão diferentes fazendo com que elas estejam diferentes que mesmo seja com letras iguais. ex: F, K = FK K, F = KF
3	(K,C) (C,K) (V,K) (F,K) (K,V) (C,V) (V,C) (K,F) (C,F) (V,F)
4	Pelos lugares diferentes de relação e situação
5	não, Porque tem que ter o primeiro e segundo lugar.

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo e Combinação.

P:((o')) vou perguntar uma coisa a vocês... a ordem do problema altera ou não o agrupamento?

A: altera

P: pessoal presta atenção... sempre que num problema a ordem dos elementos venha alterar o agrupamento...você passa a dizer que é um problema de arranjo simples((professor formaliza o conceito))..então neste caso aqui...<u>você tem...arranjo de quatro elementos..tomados..dois a dois</u> ((neste momento o professor apresenta a notação matemática $A_{4,2}$))... o que seria esse quatro aqui...o número de elementos do problema...dois a dois..porque vocês estão trabalhando com duas etapas...a escolha do primeiro lugar...e..a escolha do segundo lugar...então..<u>vem cá...este problema agora</u> ... que é a situação-problema número oito...leiam a situação-problema número oito...é importantíssimo...agora..leiam a situação-problema número oito...pensem comigo agora...Karla e Felipe...foi uma escolha...Felipe e Karla...foi outra escolha...agora eu pergunto...está escolha...e está escolha...para está situação-problema...é..a mesma comissão ou é outra comissão?..o que você acham...respondam aí na apostila de vocês.

Solicitamos que os alunos respondessem a interrogativa que segue: Referindo-se a Questão 08 responda: a comissão Felipe e Karla (F, K) é a mesma que a comissão que (K, F)?

A ideia foi fazer os alunos perceberem que a ordem dos elementos não altera os agrupamentos. Vejamos os extratos dos protocolos dos alunos.

QUADRO 16: Justificativas a situação-problema 08

GRUPOS	JUSTIFICATIVA DOS ALUNOS NA QUESTÃO REFERENTE A SITUAÇÃO-PROBLEMA 08
1	É a mesma. Porque o resultado naõ altera.
2	É a mesma, porque a posiçaõ.
3	Não, Porque Felipe Primeiro e Karla Segundo. Karlos Primeiro e Felipe Segundo.
4	Sim, É a mesma comissaõ, porque neste agrupamento as possições saõ iguais
5	Sim, Porque ele esta procurando 2 funcionários para o mesmo cargo.

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo e Combinação.

P:((o')) vocês acham que isso aqui é doze?.... o que que vocês acham?

A: não

P: o que é agora?

A: seis

P: então isso aqui...é um problema de combinação simples...aqui nos temos...uma combinação...de quatro..elementos..tomados..dois a dois.((o professor apresenta a notação matemática $C_{4,2}$))

Alcançados nossos objetivos e encerramos a aula, solicitando aos alunos que não esquecessem que quando a ordem for importante é um problema de arranjo e quando não for, é um problema de combinação.

6.5. QUINTO ENCONTRO

O encontro iniciou às 15h15min e finalizou às 16h45min do dia 25/06/2008. O objetivo foi fazer o alunos perceberem que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Iniciamos o experimento desse dia com a aplicação do Dominó Combinatório. Cada grupo recebeu um pacote contendo um Dominó; a atividade foi desenvolvida durante 30 minutos, aproximadamente. O objetivo do jogo foi aprofundar os conceitos de arranjo e combinação, estabelecendo continuamente a diferença entre tais conceitos. No início, os alunos ficaram um pouco atrapalhados com as regras do jogo e, também, com os problemas que foram construídos para ele estabelecerem a diferença entre o de Arranjo e o de Combinação. Essa fase seguiu a sugestão 11 de Sá (2005).

Após os 30 minutos de jogo, recolhemos os pacotes contendo os Dominós e iniciamos a fase de institucionalização da fórmula do Arranjo simples. Essa fase foi conduzida pelas sugestões 2,3,4,5,6 de Sá (2005).

Entregamos a cada grupo um envelope contendo as situações-problema 09, 10 e 11. Proporcionamos um tempo para a resolução das situações-problema.

Apresentamos as situações-problema, os possíveis procedimentos de resolução e os extratos dos protocolos dos alunos.

O quadro a seguir apresenta o extrato de protocolo dos grupos na situação-problema 09.

Quadro 17: Grupos na situação-problema 09

GRUPOS	RESOLUÇÃO DOS GRUPOS NA SITUAÇÃO-PROBLEMA 09
1	o resultado da eleição? $\{1, 2, 3, 4\}$ $4 \cdot 3 = 12$ Dir Vice
2	$4 \cdot 3 = 12$
3	A, B, C, D $\left(\frac{A}{\text{Diretor}}, \frac{B}{\text{Vice}}\right)$ $4 \cdot 3 =$ 12 MANEIRAS
4	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$ maneiras diferentes $A_{4,2} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \cdot 1} = \frac{4!}{2!}$
5	$\frac{4}{\text{Diretor}} \cdot \frac{3}{\text{Vice}} = 12$

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo

Em seguida, foi apresentada por cada grupo a situação-problema 10.

O quadro, que segue, apresenta o extrato de protocolo dos grupos na situação-problema 10.

Quadro 18: Grupos na situação-problema 10

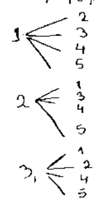
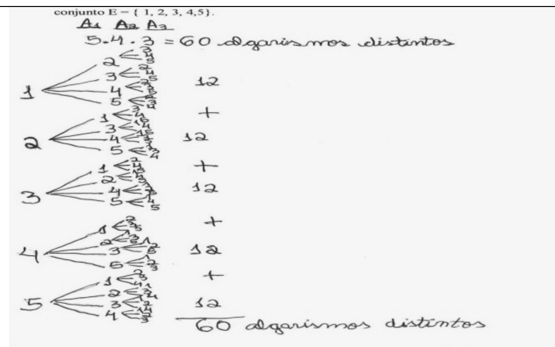
GRUPO	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 10
1	$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 3º 2º 1º
2	_ _ _ 3 etapas | | | | | | 6 pess. | | | | | | | | | $\underset{1^{\circ}}{6} \cdot \underset{2^{\circ}}{5} \cdot \underset{3^{\circ}}{4} = 48$
3	$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
4	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$
5	$\frac{6}{1^{\circ}\text{ lugar}} \cdot \frac{5}{2^{\circ}\text{ lugar}} \cdot \frac{4}{3^{\circ}\text{ lugar}} = 120$

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo.

E, por fim, os alunos apresentaram a situação-problema 11.

O quadro abaixo apresenta o extrato de protocolo dos grupos na situação-problema 11.

Quadro 19: Grupos na situação-problema 11

GRUPOS	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 11
1	$\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} = 60$
2	E= 1,2,3,4,5  5.4.3=60
3	(1,2,3,4,5)
4	
5	5.4.3 = 60 conjuntos

Fonte: protocolo de registro dos alunos na aula da diferença Arranjo.

Em seguida, iniciamos o processo de institucionalização da fórmula do Arranjo Simples. Esta fase foi conduzida pelas sugestões 6,7,8,9,10 de Sá (2005). Inicialmente, procuramos fazer com que os alunos percebessem que os problemas eram de Arranjo simples. Vejamos o seguinte "episódio de ensino".

P: ((0`)) Agora presta atenção...o que que nós vamos formar aqui? Você tem um conjunto um... dois... três... quatro e cinco... certo ou não? Agora, vem cá... um... dois... três tem na primeira etapa o um... na segunda etapa... quem pessoal? ([o dois])... e na terceira etapa o ([três])... Se eu fizer isto aqui? Trezentos e vinte e um... mudei ou não mudei a ordem dos elementos?

A: Mudou::

P: É o mesmo ou é outro?

A: É outro::

P: É outro, né outro?

A: É outro::

P: É cento e vinte e três?

A: É::

P: E aqui quanto é que vai?

A: Trezentos e vinte e um.

P: Tudo bem até aí? Tá...

P: Então eu pergunto... as três situações-problema que tão aqui... você considera que seja arranjo ou combinação?

A: ([Dois arranjos e uma combinação])

A: ([Arranjo])

P: Olha... todos arranjos?

A: E uma combinação...

P: Qual é que é a combinação pra ti?

A: A última

P: A última é combinação?

A: Isso.

P: Então... vamos lá... cento e vinte e três... é um agrupamento não é?

A: É

P: Trezentos e vinte e um... é o mesmo agrupamento ou é outro agrupamento?

A: É outro::

P: Pode ser combinação?

A: Se alterar... um número aí não vai mexer em nada.

A: Vai sim::

A: Trezentos e vinte e oito é diferente de cento e vinte e três.

P: Não... mas tá com outro número... vamos lá... vamos trabalhar... vá lá...vamos lá ao que está valendo... Afinal de contas tu perguntas... Ah:: mas tu falas assim... se colocar um outro número quatro aqui...

A: Isso...

P: Mas aí você tem que perceber que você tem que usar sempre... montar um agrupamento... tem que montar um AGRUPAMENTO... centro e vinte e três... e mudar a ordem desses mesmos números... não pode colocar outro... senão você não vai conseguir chegar naquilo que você tem em mente... Já te entendi onde tu quer chegar... mas eu sempre falei... não ponha outro número... coloque cento e vinte e três e com esse tente mudar... eu te pergunto... é o mesmo agrupamento ou é outro agrupamento?

A: É outro.

P: E aí... é arranjo ou combinação?

A: ([Arranjo])

Conseguimos fazer os alunos perceberem que os problemas eram de Arranjo Simples. O próximo passo foi fazer com que os alunos escrevessem a notação matemática do arranjo em cada problema, igualando com os procedimentos e respostas, apresentados nos quadros acima. Por exemplo: Na situação-problema 11, a notação do arranjo é $A_{5,\,3}$ e o grupo 01 apresentou a solução do problema como 5 . 4. 3 = 60. Então, nosso objetivo foi fazer os alunos escreverem $A_{5,\,3}$ = 5. 4. 3 = 60. Com isso, conseguimos os primeiros passos para a construção da fórmula do Arranjo Simples. Vejamos o "episódio de ensino" referente a essa fase.

P:((0'))Ei... pessoal... olha pra cá... isto aqui é um arranjo?

A: Éh::

P: É um ARRANJO ou não é?

A: Éh::

P: Quantos elementos tem aqui?

A: Quatro.

P: Quatro... como é que posso ESCREVER... vocês lembram da aula de ontem? Como é que eu escrevo um arranjo? Aquela notação matemática de ontem? Como é que fica? Na ordem... vamo lá... ARRANJO... de quanto? vai...

A: de quatro

P: De quatro

A: Tomada dois a dois

P: Tomada dois a dois... não seria isso?

A: Isso::

P: Então... presta atenção todo mundo... Seria ARRANJO... não é assim? Arranjo de quatro dois a dois...

P: Como é que eu faria a notação matemática desse problema?

A: Arranjo::

P: Arranjo... de quanto vai?

A: Arranjo de seis tomado três a três.

P: Não é assim?

A: Éh::

P: Como é que eu faria a notação matemática desse problema? Vamo lá... vai?

A: Arranjo::

P: De quanto?

A: De cinco...

P: Quanto é?

A: Tomado três a três

P: Então me faça um favor... aí na apostila... nesse papel que vocês estão aí... me digam... como calcular o arranjo de quatro dois a dois? Como é que se calcula o arranjo de quatro dois a dois?

A: Calcular?

P: Vocês já fizeram isso... já fizeram isso... coloquem lá...vou cobrar de vocês aí..vamo lá...lá naquela última apostila... como é que se calcula o arranjo de quatro dois a dois? Vocês já fizeram... tá feito no caderno de vocês... como é que vocês fizeram?

A: Fatorial de quatro...

P: Não... aqui... vamo lá devagar... bem aqui... com o que nós temos no quadro...com o que nós temos no quadro... como é que eu calculo o arranjo de quatro dois a dois? Tá no quadro... como é que faz? Como é que faz? Né? Como é que ficaria? Façam logo no papel de vocês... Como é que calcula o arran/... olha... vocês acabaram de dizer que esse problema é um problema de arranjo... não acabaram de dizer pra mim? certo ou não? Vocês já calcularam o problema não foi? Como foi que vocês calcularam o problema?

A: Multiplicando

P: Isso... aí vocês acabaram de fazer uma notação matemática pra mim... qual é a notação matemática? ARRANJO de quatro dois a dois... tá certo ou não?

A: Tá.

P: O que eu quero de vocês é... com esta notação matemática... como é que eu calculo esta notação matemática? Façam aí... vai...

Alcançamos os objetivos dessa fase e agora estávamos com o ambiente de aprendizado completamente aquecido. Nunca havíamos experimentado, em 16 anos ministrando aulas de Matemática, um momento igual. Esse fato nos proporcionou certo desequilíbrio emocional, mas não deixamos transparecer aos alunos. Sendo assim, caminhamos elaborando novas interrogativas para fazer os alunos construírem a fórmula do Arranjo Simples. Vejamos no seguinte “episódio de ensino”.

P:((0’)) Agora... presta atenção... agora eu vou querer assim... presta bem atenção todo mundo... é muito importante... vamo lá... vamo lá vamo lá... por favor é muito importante... eu sei que vocês estão cansadinhos... vamo lá que agora é muito importante... quanto dá essa resposta?

A: Doze::

P: Doze... Vamo fechar... Vamo fechar... vamo fechar... Vamo lá? E quanto dá esta resposta aqui?

A: Doze::

P: E quanto dá esta resposta aqui?

A: Cento e vinte::

P: Veja bem... vamos produzir algumas alterações aqui... mas no final o resultado tem que dar sempre o mesmo... qual é o final do mesmo? Doze... e aqui tem que ser quanto?

A: Cento e vinte::

P: Porque ninguém pode alterar isso... Entendeu como é que é? Como é que eu faço pra sair daqui e chegar no FATORIAL DE QUATRO? O que é que é preciso aqui pra chegar no fatorial de quatro? O quê que ta faltando aqui pra chegar no fatorial de quatro? O que é que vocês acham? Cadê o papel de vocês... Então vamo lá... coloquem lá... o que falta pra chegar no fatorial de quatro? Ponham aí no papel de vocês... o que falta pra chegar no fatorial de quatro? Nós já temos o quatro e já temos o três... o que falta pra chegar no fatorial de quatro lá... o quê que falta?

A: Dois e um

P: É isso aí? Ponha no papel...

P: O quê que falta? Multiplicar por dois e por um? Deixou de ser doze? Não deixou de ser doze?

A: Deixou::

P: Não deixou de ser doze? Mas eu não posso deixar de ser doze... não é a resposta? Tem que continuar sendo quem pessoal?

A: Doze::

P: Doze... o quê que vocês acham que eu preciso fazer aqui para a minha resposta continuar sendo doze? O quê que vocês acham que eu preciso fazer?

A: Cortar o dois e o um

P: Cortar o dois e o um? É isso? Vocês acham que seria isso? Vocês acham que é cortar o dois e o um? Porque o quê que foi que vocês acrescentaram aqui? Dois e um... não foi? Eu quero que volte a ser quatro e três... não é verdade? Como é que se corta na matemática? O quê que é o cortar na matemática? É cortar no papel é?

A: Não

P: Simplifica o...

A: Simplifica o quatro

P: Simplifica o quatro? Simplifica o dois? O quê que nós tínhamos antes? Não era o quatro e o três?

A: É

P: O quê que vocês colocaram?

A: Dois e um

P: Dois e um...não foi isso que vocês colocaram? Na mate/... Veja bem... vocês colocaram dois e um... como é que eu faço pra retirar esse dois e um sem alterar o quatro e o três? O quê que você faria? O que você faria?((professor pretende conduzir os alunos a perceberem que há uma necessidade de colocar no denominador o que foi acrescentado no denominado)) Tudo bem... pera aí... vamo lá... olha o que ela fez... com o que ela fez aqui... eu pergunto pra vocês... dá doze?

A: Não

P: Nossa resposta era doze... não era?

A: Era

P: Dá doze isso aqui?

A: Não

P: Dá quanto isso aqui?

A: Seis

P: Então... ela tava quase chegando lá... não tava? O quê que eu preciso fazer na... no... O quê que eu precisaria fazer... na sugestão da colega de vocês... pra realmente melhorar a sugestão dela... pra me/... realmente dar doze? O quê que precisaria fazer?

A: Pegar o resultado... cortá-lo e dividir por dois

P: Não... veja bem... vamos pegar a sugestão da colega de vocês... ta aqui a sugestão dela... certo? Vamo tentar melhorar isto aqui que ela fez pra dar realmente doze... o quê que vocês acham?

A: Divide o dois e o um

P: Vocês acham que precisa dividir de novo alguma coisa?

A: Não

P: Veja bem... vocês acham que precisa dividir de novo alguma coisa? O quê que vocês acham?

A: Precisa só tirar o número

P: Vamo lá... não... o que você fez... o que ela fez... o que a colega de voes fez foi importantíssimo... olha lá... ela pegou o quatro... três... ela percebeu que ela deve dividir por dois e um...

A: E se eu colocar três... três... três?

P: Só o quê?

A: Três... três... três...

P: Três... três... três... mas se eu colocar três... três... três pra dividir... vai voltar a ser doze?

A: Não... inverte o dois com o um

P: Mas se eu inverter o dois com o um... mudaria alguma coisa?

A: Não...professor... basta tirar aquele dois que tá embaixo do dois...

P: Então... venha aqui fazer o que você quer...

A: Tira tudo e bota só o dois.

P: Vá lá... ((Neste momento a aluna percebeu que não era necessária a presença de um segundo número dois no denominador)) Vocês acham que é necessário ter tudo isto de um no trabalho? Tudo isso de um é importante?

A: Não.

P: Não? O quê que vocês acham? **Vocês acham que esse um tem algum efeito no trabalho?**

A: Não::

P: Este aqui tem?

A: Não::

P: O que vocês acham que eu devo fazer?

A: Divide por dois

P: Vocês acham que só por dois? Tudo bem ou não? Vocês acham que esse bando de um aqui faz alguma importância? O quê que vocês acham? Então deixa eu fazer uma pergunta pra vocês agora... uma pergunta pra vocês... **quanto ficaria isto aqui?**

A: Seis::

P: Não... isto aqui tudinho?

A: Quatro::

P: Isto aqui não é um fatorial?

A: É::

P: É ou não é um fatorial?

A: É

P: Esse é o fatorial de quanto?

A: De quatro::

P: De quatro... não é o fatorial de quatro?

A: Isso

P: Então vá lá e coloque aqui... fatorial de quatro... FATORIAL DE QUATRO... ((Neste momento a aluna vai ao quadro e escreve a representação matemática do fatorial de quatro e o professor sugere que a mesma passe o traço de divisão abaixo do quatro fatorial)) quanto é que dá? Quatro fatorial... sobre... agora me diga comé/... **isto aqui que está aqui embaixo...** é o fatorial de dois?

A: Não:: ((o aluno percebeu que a quantidade de número um que estava sendo representada abaixo não subentendia o fatorial de dois)).

P: Tudo aquilo é o fatorial de dois? O quê que seria o fatorial de dois aí embaixo?

A: Duas vezes uma... duas vezes uma...

P: Vocês acham que duas vezes uma é o fatorial de dois? Todo mundo concorda?

A: Sim::

P: Fatorial de dois... **é preciso ter esse um e um aqui?**

A: Não::

P: Então vamos tirar esse um aqui?

A: Não precisa mais de nada::

P: Vou tirar... o quê que eu tenho agora aqui embaixo?

A: Fatorial de dois.

P: O quê que é na divisão?

A: Dois::

P: Agora eu pergunto... **isto aqui dá doze?**

A: Dá::

P: Dá? E aqui embaixo o quê que tem? Duas vezes uma... E o quê que é dois multiplicado por um?

A: Dois::

P: Em termos de fatorial o que seria isso?

A: Fatorial de dois

P: FATORIAL DE?

A: Dois

P: Coloque lá fatorial de dois... ((o professor solicita que a aluna vá ao quadro e escreva a representação matemática do fatorial de dois)) Vamos lá... estamos chegando lá... vocês estão chegando lá... muito bem... **então olha aonde nós chegamos...** nós chegamos numa representação matemática de que... o arranjo de quatro dois a dois é o fatorial de quanto?

A: De quatro::

P: Dividido pelo fatorial de quanto?

A: De dois::

P: Vamos tentar fazer essa construção aqui? Vamos ver se vai dar? Vamos lá... façam no caderno de vocês... eu quero que apareça um fatorial aqui em cima e quero que apareça um fatorial aqui embaixo... vamos lá... façam aí... como é que fica esse fatorial? ((o professor pede aos alunos que façam a representação do exemplo seguinte)) Eu estou muito feliz com vocês...

A: Pra alterar esses três números para que eu não possa alterar o número... o resultado do final que é cento e vinte... se vai fazer o fatorial dos números restantes embaixo e dividir um pelo outro que vai dar cento e vinte como resultado.

P: Vocês concordam com o colega de vocês?

A: ([Sim:: com certeza::])

P: Hein?...Mas aqui é fatorial... não é o fatorial? Tá legal? Vocês concordam com o colega de vocês?

A: Sim

P: Então vem cá... me diz uma coisa... deixa aqui por enquanto...quanto foi aquela outra? Arranjo de quanto? **A última ali? A última?**

A: De cinco::

P: Arranjo de quanto? De cinco... tomado de dois a dois ou tomado três a três?

A: Três a três::

P: Três a três? É ou não é pessoal? Então me diga...

A: Éh::

P: Então me diga... Arranjo de cinco três a três?

A: Éh::

P: Quanto é o arranjo de cinco três a três na forma de fatorial? Cinco três a três em forma de fatorial... ponha lá pra mim...não... vamo lá... deixa ela fazer... pense... olhe e me diga como é que fica em forma de fatorial... ((neste momento a aluna dirigiu-se ao quadro e escreveu como representação o fatorial de cinco sobre o fatorial de três para o arranjo de cinco três a três)) **então aí... o arranjo de cinco três a três fica o fatorial de cinco sobre o fatorial de quanto pessoal?**

A: De três

P: É isso aí? **Fatorial de cinco sobre o fatorial de três...** Tá certo ou não?

A: Tá::

P: Tá tudo bem? Tá certo isso aí?

A: Não... pra mim não tá

P: Eu também acho que está meio esquisito... não está? O quê que tu acha que está esquisito? Vamo lá verificar... ((o aluno se dirige ao quadro, apaga a parte do denominador que corresponde ao fatorial de três e coloca o dois multiplicado por um))

A: Se o três já apareceu... só precisa colocar o dois e o um... e fica fatorial de dois

P: Entenderam o colega de vocês? O arranjo de cinco três a três era quanto? Vai... o arranjo de cinco três a três...

A: ([Cinco... quatro...três...]) ((nesta fala, professor e alunos respondem juntos))

P: Aí faltou ela acrescentar o que pessoal?

A: Dois e um

P: Dois e um... foi o que ela acrescentou... O que faltou ser acrescentado... precisava ser o que aqui? Di-vi/...

A: ([Dido]) ((nesta fala, professor e alunos respondem juntos))

P: Então ficou cinco fatorial sobre dois fatorial... entendeu o que ele fez?

Após este momento, apontamos um aluno na sala de aula para fazer a representação fatorial do arranjo de sete três a três.

P: Foi assim que deu? Muito bom... Então vamos lá agora... presta atenção... agora sim... eu quero que vocês... agora vocês vão pensar bem... antes de responder... mas primeiro vão responder no papel... todo mundo pra cá... olha lá... todo mundo olhando pra cá que eu vou fazer uma pergunta... vocês fizeram conquistas maravilhosas... o que eu quero saber de vocês agora é o seguinte... veja bem... **você ta vendo esse três que surgiu aqui?** Ele não faz parte desses dois momentos... vocês estão vendo? Não é verdade?

A: Éh::

P: É verdade ele não faz parte... **eu gostaria de buscar uma expressão aqui embaixo ainda com fatorial...** quer dizer o fatorial tem que ficar... **eu gostaria de buscar uma expressão aqui embaixo que apareça o sete e o quatro...** lembrem que eu não posso alterar o que eu já tenho... **qual é o número que está aqui embaixo?**

A: Três::

P: Eu tenho que buscar uma expressão aqui embaixo que apareça o sete e o quatro... AQUI EMBAIXO... agora eu tenho que buscar uma expressão aqui embaixo que apareça o cinco e o três... ainda mantendo quem aqui pessoal? O

A: Dois

P: ... fatorial... fatorial... ta legal? Eu tenho que buscar aqui embaixo uma expressão que apareça o quatro e o dois... mas lembrando que aqui é... dois fatorial e aqui... é três fatorial... vocês estão entendendo o que eu estou tentando buscar? Tentem fazer essa expressão... é só embaixo... qual seria a expressão aqui embaixo usando os elementos sete e quatro? Essa é a etapa final do nosso trabalho...

P: Você... faça pra mim por favor o que você descobriu nessa sua expressão aqui? Como é que você vai usar o quatro e o dois no seu trabalho? Viu o que ela fez? Só tem um detalhe... deixa eu explicar aqui o detalhe... o detalhe... que este grupo conseguiu fazer...esse detalhezinho... aqui ta legal... foi a primeira ideia que ela teve... diminuir o quatro do dois... ta legal... só que esse grupo conseguiu uma coisa especial... ponha lá... vamos lá ver... ou seja... olha o que eles alcançaram de especial... **você percebendo esta realidade com esta realidade aqui... o quê que está acontecendo? Como ela faz aqui... olha... seis menos três... dá o três... não é verdade? Aqui o fatorial ta no dois ou o fatorial ta no quatro menos dois? O FATORIAL AQUI TA NO DOIS OU O FATORIAL TA NO QUATRO MENOS DOIS?**

A: Só no dois.

P: Só no dois... Aqui o fatorial ta só no dois... certo ou não? Aqui o fatorial ta só no dois... mas eu quero que o fatorial esteja onde pessoal? No quatro menos dois... não é isso aí? Como é que eu deveria fazer pra ficar no quatro menos dois o fatorial? ((o professor solicita ao aluno que vá ao quadro para responder esta pergunta)) Como é que seria pra colocar? Perceberam o que o colega fez vocês aí? Pessoal agora vamo lá comigo...arranjo de cinco três a três era cinco fatorial sobre dois fatorial... não é verdade? Que é a mesma coisa que quanto? Vamo lá vai? Cinco fatorial sobre... agora... vamo lá...

A: ([Cinco menos três fatorial])::

P: Agora eu estou usando os elementos do arranjo... então... eu quero agora que vocês venham comigo... e me digam agora... veja bem... olha lá... agora... agora pessoal... nós chegamos na nossa... descoberta... quanto é que dá o arranjo? Comigo agora... vai... de dez tomado três a três de acordo com a nossa descoberta? Vamo lá...

A: Dez...

P: Vamo lá... vamo lá...

A: ([Dez fatorial sobre::])

P: É isso aí gente?

A: Abre parêntese... dez menos três fatorial])::

P: Perceberam? E quanto é o arranjo de nove dois a dois... vá lá...

A: Nove fatorial::

P: Sobre quanto?

A: Abre parêntese... nove menos dois fatorial...

P: então..quanto é o arranjo de n tomado p a p?

A: n fatorial sobre... entre parêntese... n menos p fatorial...

P: Arranjo de n p a p... esta é a fórmula que nos dá o número de arranjo num determinado problema de combinação... n fatorial sobre n menos p fatorial...

Os alunos chegaram à fórmula do fatorial. Consideramos que esse fato, venha ser um diferencial no campo das investigações no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Contudo, nos faltava ainda verificar a possibilidade de ocorrer o mesmo na aula de Combinação Simples. Para isso, descrevemos, a seguir, o que aconteceu no sexto encontro.

6.6. SEXTO ENCONTRO

O encontro ocorreu no dia 26/06/2008, com início às 15h45min e término às 17h e 15min. Entregamos um envelope para cada grupo com três situações-problema, envolvendo Combinação Simples. Foi proporcionado um tempo de aproximadamente 40 minutos para o início das apresentações. Essa fase já não seguiu o mesmo percurso das outras aulas, pois, procuramos otimizar o nosso tempo, porque estávamos preocupados com a fase de institucionalização da fórmula da combinação.

Nossa intenção foi caminhar pela fórmula do arranjo para alcançar a da combinação. Sendo assim, avaliamos o tempo que levamos na aula do arranjo e percebemos que tínhamos que reservar um tempo maior para a combinação. Dessa forma, evitamos a etapa que todos os grupos deveriam socializar suas soluções. Nesta fase, seguimos as orientações de Sá: sugestões: 2,3,4,5,6.

O quadro abaixo apresenta o extrato de protocolo dos grupos na situação-problema 12.

Quadro 20: Grupos na situação-problema 12

GRUPO	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 12
1	Kiko Peteca Chaves Xiquinha ~~(K,P)~~ (P,K) (C,K) (X;K) ~~(K,C)~~ ~~(P,C)~~ (C;P) (X;P) ~~(K,X)~~ ~~(P,X)~~ ~~(C,X)~~ (X;C) 4 . 3 = 12 = 6 .
2	4(Quatro) alunos da turma. Quantos são os p... $C4,2 = \frac{4.3}{2} = \frac{2.1}{2} = \frac{2.4}{2} = 6$ C4,2 = 4. (A.S).(M.B) (S.A) . (B.M) (A.M). (A.B) (S.M). (S. B) (M.S).(M.A) (B.S).(B.A)
3	$\frac{4 \text{ alunos}}{1^{\circ} \text{ Livro}} \cdot \frac{3 \text{ alunos}}{2^{\circ} \text{ Livro}} = \frac{12}{2}$ resultados Possíveis = 6 resultados
4	(Carlos, Pedro) ~~(Pedro, Carlos)~~ ~~(Rafael, Carlos)~~ ~~(Marcos, Carlos)~~ (Carlos, Rafael) (Pedro, Rafael) ~~(Rafael, Pedro)~~ ~~(Marcos, Rafael)~~ (Carlos, Marcos) (Pedro, Marcos) (Rafael, Marcos) ~~(Marcos, Pedro)~~ R = 6 Possíveis resultados
5	= 6 resultados possíveis C4,2 = ~~(1,2)~~ (2,1) ~~(3,1)~~ ~~(4,1)~~ 6 possíveis resultados. (1,3) (2,3) ~~(3,2)~~ ~~(4,2)~~ (1,4) (2,4) (3,4) ~~(4,3)~~

Fonte: protocolo dos registros dos alunos na aula de Combinação

A seguir, apresentamos a situação-problema 13.

O quadro abaixo apresenta o extrato de protocolo dos grupos na situação-problema 13.

Quadro 21: Grupos na situação-problema 13

GRUPO	RESOLUÇÃO DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA 13
1	Quantas comissões de 3(três) pessoas podem ser formadas com 4 alunos de uma escola? Guga Julia Paula Diego V1º V2º V3 $4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{12}{2} = 6$
2	$C_{4,3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = \frac{12}{3}$ $C = 4_{,3} = \frac{4.3.2.1}{3} = \frac{24}{3} = 8$
3	MIKA, PAULA, LAINO, JOSÉ (M;P) ~~(P;M)~~ ~~(L;M)~~ ~~(J;M)~~ (M;L) (P;L) ~~(L;P)~~ ~~(J;P)~~ (M;J) (P;J) (L;J) ~~(J;L)~~ 6 resultados
4	(C,V,P) ~~(V,C,P)~~ ~~(P,C,V)~~ ~~(L,C,V)~~ (C,V,L) ~~(V,L,C)~~ (P,L,V) ~~(L,V,P)~~ (C,P,L) ~~(V,P,L)~~ ~~(P,C,L)~~ ~~(L,P,C)~~ 4 comissões foram formadas
5	$C_{4,3}$: (f,F,J) ~~(F,f,D)~~ (J,F,f) (D,F,f) ~~(f,F,D)~~ ~~(F,J,D)~~ ~~(J,F,D)~~ (D,F,J) ~~(f,J,D)~~ ~~(F,f,J)~~ ~~(J,f,D)~~ (D,f,J)

Fonte: protocolo dos registros dos alunos na aula de Combinação

Os grupos perceberam que resolveram a situação-problema 13 de forma errada. Sendo assim, não apresentaram resolução para a situação-problema 14. Com isso, partimos para a fase de institucionalização da fórmula da combinação.

A seguir, descrevemos os “episódios de ensino” que apresentam o referido processo de institucionalização. É importante ressaltar que nos apoiamos nas seguintes orientações de Sá (2005): sugestões: 7, 8, 9,10.

Escrevemos no quadro uma das situações-problema para inicializar o processo de institucionalização da combinação.

P: ((0`)) Vamo lá comigo agora... fazer um trabalho conjunto... tá legal? vamo lá comigo vai... presta atenção... presta atenção... ((a turma apresenta-se um pouco desconcentrada)) vamo nomear os alunos igual como vocês fizeram... vamo lá...

quem são nossos alunos? Lá vai... R... L... V... e K... ta bom? ((iniciais dos nomes que o professor está usando como exemplo no quadro)) são quatro alunos... ta legal até aí? Ta... então vamo fazer assim... vamos fazer com que ... pensar em todas as possibilidades de escolha sem levar em consideração ordem... sem levar em consideração or/... todas as possibilidades de escolha... como vocês fizeram... vamo fazer assim... vamo lá... ((Os alunos estão sincronizados com o professor, no momento em que ele escreve no quadro as contagens diretas envolvendo as iniciais dos nomes dados no exemplo)) agora.pera aí... vem cá... me diz uma coisa...presta atenção... **vamo olhar pra cá... o R e o L... e o L e o R... O R E O L... E O L E O R...**o quê que isso quer dizer? Imagine uma situação... imagine uma situação... em que um livro seja... um livro seja de análise combinatória e o outro livro seja de trigonometria... que assuntos que vocês estão estudando... não é verdade? Então o R ganhou livro de análise combinatória e o L de trigonometria... o L ganhou análise combinatória e o R trigonometria... gente... preciso muito da atenção de vocês... dentro dessas condições que eu estou expondo pra vocês em que os livros não são idênticos... são de tipos diferentes... você acha que esses dois agrupamentos são iguais ou diferentes?

A: (Iguais::)

P: Vamo lá de novo.

A: (Diferentes::)

P: Se eu disser que o R é de análise combinatória e o L é de Trigonometria... aqui é trigonometria e aqui é análise combinatória... aqui é análise combinatória... aqui é trigonometria... igual ou diferente?

A: Diferente

P: Aí... dentro dessa situação... dessas condições... nós estaríamos diante de um problema de arranjo ou de combinação?

A: Arranjo::

P: Então... considerando um problema sen/... pera aí... calma... considerando meu problema como de arranjo... **isto e isto são agrupamentos o quê pessoal?**

A: Diferentes...

P: Diferentes... não são diferentes? Quantos seriam esses agrupamentos? ((o professor, neste momento, juntamente com a turma refaz a contagem dos agrupamentos para enfatizar que o resultado é correspondente à quantidade de arranjos)) certo... seria então... de que forma pra você calcular isso aí? Seria como?

Seria exatamente... doze maneiras diferentes... verdade ou não? Sim ou não? Se fosse o quê? A ideia de? Arranjo... Não é verdade? E se fosse um arranjo como é que você calcularia esse arranjo?

A: Arranjo de quatro tomado a dois::

P: Como é que seria?

A: Arranjo::

P: De quanto pessoal?

A: De quatro::

P: tomado::

A: dois a dois::

Solicitamos aos alunos a última ficha para darmos continuidade aos trabalhos. Nessa ficha, havia uma pergunta que procurava saber dos alunos se as situações-problema eram de arranjo ou de combinação. A maioria respondeu combinação, mas não sabia calcular o número das maneiras solicitadas em cada problema.

P: Nesta última ficha... eu quero que você faça assim... veja bem... considerando que tudo isso aqui fosse agrupamento diferente... como calcularia isso como se fosse agrupamento diferente? Como é que eu calcularia? Como é que você calcularia isso considerando que fosse agrupamento diferente? Faça aí pra mim... como é que seria? Se fosse diferente... faça aí na última ficha pra mim...

A: Arranjo?

P: Vamo lá... Façam aí pra mim...

Após esse momento, pedimos aos alunos que comparassem o contexto que criamos com as informações da situação-problema que estava no quadro, objetivando a percepção, por parte dos alunos, de que o texto não constituía problema de arranjo.

P: Por que não são diferentes? Porque aqui ele diz que os livros são idênticos... então... se os livros são idênticos... fala pra mim... **vai sair um desse...** ((o professor, com a ajuda dos alunos, retira os agrupamentos idênticos expostos na contagem direta)) vamo lá... quantos agrupamentos sobraram por favor?

A: Seis:: ((logo depois da resposta dos alunos, o professor fez a contagem para enfatizar que a resposta dada por eles estava correta))

P: Então aí na ficha... me diga uma coisa... aí na ficha... pra vocês chegarem nesse resultado seis... o que vocês teriam que fazer com o que vocês acabaram de contar? O que vocês teriam que fazer... pra chegar nesse resultado seis... aí no que vocês acabaram de contar?... o que vocês teriam que fazer? Pra chegar nesse resultado seis... o que... vocês não montaram o modelo aí agora? O que vocês teriam que fazer?... vejam lá... o que vocês teriam que fazer?... conta pra mim o que tu tinhas feito anteriormente... isso aqui oh... conta pra mim lá... vai lá pra mim... **esse que você fez antes... ponha lá isso pra mim... ponha só essa parte... esta parte aqui...** prestem bem atenção no que ela vai fazer... ((neste momento, a aluna escreve no quadro a representação matemática do arranjo de quatro tomado dois a dois e o professor solicita que a aluna se mantenha próximo ao quadro)) Isto aqui valeria... se nós tivéssemos quantos aqui? ((o professor conta os agrupamentos totalizando doze)) o resultado desta operação aqui... vai ter que ser quanto... o resultado desta operação aqui vai ter que ser quanto... vamo lá...

A: Doze::

P: Desta operação aqui...

A: Doze

P: Desta aqui que eu estou apontando... Não é doze? Do arranjo quatro dois a dois?

A: Éh::

P: Um... dois... três... quatro... Não é doze?

A: Éh::

P: Ta... mas o resultado final... não é doze...

A: É seis

P: O resultado final é quanto?

A: Seis

P: Seis o resultado final... então o quê que você teria que fazer com isto... pra poder alcançar o seu resultado final?

A: Simplifica doze por dois

P: Tem que fazer o quê?

A: Simplifica doze por dois pra dar seis

P: Mas simplifica quanto?

A: DOZE POR DOIS::

P: O quê que vocês acham? Vocês concordam com ele?

A: Sim... ou divide... é faz a subtração... vai dar dois... vai dar fatorial de quatro sobre fatorial de dois... depois... multiplica... aí dá doze

P: Multiplica por... não... mas veja bem... eu não... o doze eu já sei... que isto aqui é doze... não é doze isto aqui?

A: É isso que eu tô falando.

P: Não é isso aqui? Agora eu quero chegar nesse resultado que eu tenho... de seis... o quê que eu tenho que fazer? Mostra lá pros teus colegas o que tem que fazer... ((O aluno apresenta no quadro a divisão doze por dois e o resultado seis)) Olha aí... vocês acham que seria isso aí gente?... ((Momento de distração entre alunos)) Vocês acham que... veja bem... basta dividir por dois... dá seis? O quê que vocês acham?

A: ([Não::]) ((esta resposta partiu de um aluno brincando com o colega que estava no quadro apresentando a resolução))

P: Mas não deu seis a resposta do colega de vocês?...

A: Deu::

P: Não deu seis?

A: Deu

P: Como é que ela che/... você chegaria no seis de outra forma?... ((Respostas por parte dos alunos, brincando com o colega que está no quadro)) Não... pera aí... espera aí... Eu quero saber... isso aqui eu já sei que é doze... Não é doze? Não é doze isso aqui? Então... se isto aqui é doze... e eu quero chegar no seis... há um outro caminho para eu sair daqui e chegar no seis sem dividir por dois?

A: Eu acho que sim

P: Então... qual seria? Vá lá... mostre lá... ((o aluno foi ao quadro apresentar um resultado que não correspondia com o que estava sendo perguntado e o professor interveio pedindo que apagasse o que o mesmo havia escrito)) Pegaste o quatro... somaste com o dois... deu seis... **a ideia é pegar exatamente o que tu tens... que é isto aqui... aonde nós sabemos que esse resultado todo vai dar quanto pessoal?**

A: Doze::

P: Doze... e eu quero chegar no seis... a proposta do colega de vocês é... pegar o doze e dividir por quanto?

A: Dois::

P: Vocês concordam com o seu colega? Sim ou não?

A: Sim::

P: Então... vamo fazer assim olha... venha cá agora... **então pegue tudo isto aqui e divida por dois como o colega fez... Divida tudo isso aqui por dois vai... passa um traço grandão e divide por dois... põe o dois embaixo... ta certo ou não isso aí? Ou seja quanto dá isto aqui?**

A: Doze::

P: Doze... dividido por dois vai dar quanto?

A: Seis::

P: Seis não é o resultado de vocês?

A: Éh::

P: é o resultado de vocês... agora me diga uma coisa... como é que eu faço com o dois... esse dois se tornar um fatorial? Como é que faz? Como é que eu saio do dois pra chegar no fatorial? Como é que faz? Pensem... como é que do dois eu posso transformar aqui em fatorial?

A: Dois vezes um::

P: Então faça aí pra gente... faça lá... ((o aluno escreveu no quadro dois multiplicado por um que equivale ao fatorial de dois, no entanto houve uma má colocação no sinal de igualdade, precisando da intervenção do professor para organizar a expressão)) Por que o fatorial de dois? Porque dois multiplicado por um dá o fatorial de quanto pessoal?... de dois... agora presta atenção... presta atenção... só que isto aqui é o teu arranjo... não é o teu arranjo isso aqui? Não é o teu arranjo? Poderia fazer isto? Vê se tá certo? Posso fazer isso? Vocês concordam comigo? Sim ou não? Então... quanto é o arranjo de quatro dois a dois?

A: Doze::

P: Doze... e quanto é o fatorial de dois?

A: Dois::

P: Dois... quanto é doze dividido por dois?

A: Seis::

P: Seis... então esta operação aqui todinha... dá quanto... por favor?

A: Seis::

P: Dá seis... agora me diga uma coisa... **quando vocês cortaram isto...** o teu problema deixou de ser um problema de arranjo... não deixou? Passou a ser um problema de quê pessoal?

A: Combinação::

P: De combinação... e como é que a gente escreve uma combinação desse problema... escreve aqui pra mim a combinação... como é que se escreve... **bem aqui pra mim...** como é que se escreve... vocês já aprenderam... o problema tem quantos elementos tomado quanto a quanto? Quantos são os elementos?

A: Quatro::

P: Que é igual::... a combinação de quatro dois a dois vocês acabaram de provar que é quanto pessoal?

A: Seis::

P: Seis... **e quanto é que dá isso aqui tudinho?** Tudo isso aqui?

A: Seis::

P: Então eu posso pegar... vejam bem... **eu posso pegar isto aqui e colocar bem aqui? Eu posso pegar isto aqui e colocar bem aqui?**

A: Pode::

P: Posso ou não posso? Eu pergunto pra vocês? Posso ou não posso?

A: Pode::

P: Então faça... percebam...o quê que a colega de vocês construiu com vocês... a combinação de quatro dois a dois... é igual a quem?... vamo lá...

A: O arranjo de quatro dois a dois::

P: Sobre quem pessoal?

A: Fatorial de dois::

P: A COMBINAÇÃO DE QUATRO DOIS A DOIS SOBRE O FATORIAL DE DOIS... A COMBINAÇÃO DE QUATRO DOIS A DOIS SOBRE O FATORIAL DE DOIS... eu quero que vocês façam pra mim agora... quanto seria a combinação... quanto seria a combinação de cinco tomado três a três... quanto é a combinação de cinco três a três... façam aí pra mim...vendo aquilo que você acabou de construir... quanto é a combinação de cinco três a três?... vocês acabaram de montar... vamo lá... alguém quer vir aqui no quadro... tenta vamos... combinação de cinco três a três... ((o aluno vai ao quadro e faz a representação correta do arranjo de cinco três a três sobre o fatorial de três)) tudo bem pessoal?

A: Tudo::

P: Tá legal? Ta... Então agora comigo de novo... vamo lá... de novo agora... quanto é a combinação de sete tomado quatro a quatro? Quem é que vem agora? Combinação de sete quatro a quatro... faz aí agora... combinação de sete quatro a quatro... ((agora uma aluna vai ao quadro e faz novamente a representação correta)) agora eu quero que vocês façam o quê? Vocês já sabem calcular o arranjo né? Faz aí pra mim... só o arranjo... ((no início, o aluno tenta responder o valor do arranjo, mas o professor solicita que o mesmo apresente a expressão na forma de fatorial)) ta faz... vai fazendo... só o arranjo... só o arranjo... não... eu quero que você faça em forma de fatorial... tá... vai fazendo... só o arranjo... ISSO::

Nesse momento, o aluno conseguiu fazer a representação da combinação de cinco três a três com todos os elementos em forma de fatorial. Isso implicava que a fórmula estava quase pronta.

P: Tá legal? Agora vem cá, gente? Isso aqui não é uma divisão de frações?
A: Éh::
P: A parte de cima é uma fração?
A: Éh::
P: A parte de baixo é uma fração?
A: Éh::
P: Como é que seria essa divisão de fração? Como é que tu farias essa divisão de fração? Sem mexer com o fatorial? ((Inicialmente, o aluno que foi convidado pelo professor para ir ao quadro faz a operação da divisão corretamente, mas se atrapalha no final. Com isso, a turma se mobiliza e outros alunos participam da construção final da fórmula)) Isso::... ((o professor retoma a expressão e anuncia, passo a passo, o que fora construído pelos alunos e solicita que uma aluna escreva a representação da combinação de sete tomado quatro a quatro em forma de fatorial)) vamo lá com o mesmo pensamento... **a combinação de n tomado dois a dois... como é que fica? Vocês já fizeram a última parte... eu quero o resultado final aqui... como é que eu posso agora... sair daqui e chegar direto aqui?** Como é que seria? Combinação de n dois a dois? Como é que fica?
A: Fatorial de n::
P: Isso... vá lá... pode fazer... ((a aluna vai ao quadro e escreve corretamente a combinação de n dois a dois em função do fatorial. Observa-se que a turma está

pronta para a institucionalização da fórmula)) E agora... por fim... eu quero que vocês agora... eu vou dar um minutinho pra vocês pensarem... combinação de n... p a p... ((uma aluna vai ao quadro, faz a representação da combinação e a turma institucionaliza a expressão, enquanto a aluna escreve no quadro))

A: n fatorial sobre p fatorial... n menos p fatorial::

P: Esta é a fórmula que resolve qualquer problema de combinação simples... pra encerrar... pra encerrar... peguem o último problema... o décimo terceiro... vai... e agora vocês já têm uma fórmula pra fazer o problema...

A seguir, apresentamos o extrato dos protocolos dos alunos.

Quadro 22: Resolução da situação-problema 13

GRUPO	RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 13
1	$C_{6;3} = \frac{6!}{6!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = \frac{120}{6} = 20$
2	$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{3!\,2!1!} = \frac{120}{6} = 20$
3	$C_{6;3} = \frac{6!}{3!(6-3)!}$ $\frac{6.5.4.\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{1}.3.2.1} = \frac{120}{6} = 20$
4	$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!}$ $C_{4,3} = \frac{4!}{3!.1!}$ $C_{4,3} = \frac{4!}{3!}$ $C = \frac{4.3!}{3!} = 4$ comissões
5	$C_{6;3}$ $\frac{6!}{3!(6-3)!} = \cancel{\frac{6.5.4.3}{3!}} = \frac{6.5.4.3}{6.6} = \frac{360}{36} =$ $\frac{6.5.4.3}{3!} =$

Fonte: protocolo dos registros dos alunos na aula de Combinação

Observando que os alunos haviam conseguido resolver o problema, escrevemos no quadro branco da sala $C_{n,n}$ e pedimos que eles apresentassem um resultado para a combinação de *n*, tomando *n* a *n*. O objetivo foi alcançar o 0! (fatorial de zero), que, geralmente, é dado pronto aos alunos, sem que eles compreendam o seu significado. Como resultado, os alunos conseguiram chegar ao valor correto.

6.7 SÉTIMO ENCONTRO

O sétimo encontro foi desenvolvido no dia 30/06/2008, com início às 15h e término às 16h. Nesse, aplicamos um pós-teste aos alunos da turma 202. Cada aluno realizou seu teste individualmente. O andamento do instrumento diagnóstico ocorreu em condições normais.

A seguir apresentamos uma análise dos resultados de nossa experimentação.

7. SOBRE OS RESULTADOS

Esta seção foi dividida em duas etapas: na primeira etapa, validamos nossa hipótese de pesquisa, utilizando as transcrições das gravações e os registros dos alunos. Na segunda etapa, utilizamos os resultados do pré-teste e do pós-teste com o intuito de encontrar solução às nossas questões de pesquisa. Entendemos que, ao confirmar nossa hipótese de pesquisa, alcançamos uma possível solução para a nossa questão principal. Essa solução da resposta, juntamente com os resultados do pré e pós-teste, serviu para responder à questão derivada.

Antes de realizarmos a análise e validação de nossa sequência didática, apresentamos novamente nossa hipótese de pesquisa, juntamente como as questões que nortearam este trabalho. Pois, acreditamos que isso proporciona uma melhor compreensão de nossas intenções neste capítulo.

Neste trabalho, levantamos a hipótese de que é possível produzir condições favoráveis de aprendizagem à institucionalização dos conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de situações didáticas que enfatizem a resolução de problemas como ponto de partida.

Sendo assim, encontramos possíveis respostas às seguintes questões de pesquisa: “Uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória?” e como questão derivada da primeira, “É possível, a partir do ensino oferecido, que os alunos tenham desenvolvido habilidades básicas para resolverem os problemas de Análise Combinatória?

7.1. PRIMEIRA ETAPA

Observamos que na aula do Princípio Fundamental da Contagem, o grupo 01, nas três situações-problema, não conseguiu alcançar nenhum raciocínio combinatório. O grupo 03 já apresentava alguns indícios de raciocínio combinatório por apresentar em algumas situações-problemas os desenhos que poderiam ajudá-los a montar os agrupamentos, utilizando assim o método da contagem direta. Os grupos 02 e 05 apresentaram, em alguns momentos, um desenvolvimento combinatório nas situações-problema. Mas, nenhum desses grupos conseguiu perceber, de forma geral, que na realização de um evento é necessária a identificação das etapas do evento e o número de possibilidades para cada etapa. Contudo, o grupo 04 (alunos que estão estudando combinatória pela segunda vez) apresentou, nas situações-problema, 01 e 02, uma boa linha de raciocínio combinatório. Mas, o referido grupo demonstrou a sua fragilidade na situação-problema 03. Dessa forma, acreditamos que o grupo ainda não tinha consolidado a questão das etapas do evento e o número de possibilidades para cada etapa.

Na aula de permutação, observamos que o grupo 04 foi o que teve melhor desempenho. Com relação às situações-problema dessa aula, observamos que os grupos já haviam percebido a necessidade do uso da operação multiplicação, mas não estavam ainda consolidadas as questões relacionadas com as etapas dos eventos e as possibilidades de cada etapa. Acreditamos que se tivessem ocorrido, durante a experimentação, as aulas de exercícios, cujo objetivo era desenvolver as habilidades de resolver os problemas dos assuntos que haviam sido institucionalizados, os alunos apresentariam melhor desempenho nas situações-problema da aula de permutação.

Observamos que, na aula de arranjo simples, os grupos já estavam conseguindo perceber as etapas de cada evento e o número de possibilidades de cada etapa. Fato esse considerado positivo à pesquisa, uma vez que, se compararmos o que apresentaram os “episódios de ensino” com os extratos dos protocolos da aula do arranjo, associado ao fato de não ter sido possível o desenvolvimentos das aulas dos exercícios, podemos dizer que a sequência de ensino produziu condições favoráveis de aprendizagem à institucionalização dos conceitos básicos de Análise Combinatória.

7.2. SEGUNDA ETAPA

7.2.1. O pré-teste

No dia da realização do pré-teste, solicitamos a cada aluno que criassem o seu apelido. Nossa preocupação era no sentido de haver, por parte de algum pai e/ou mãe de um dos alunos, proibição no direito do uso de imagem que solicitamos a eles. No entanto, isso não ocorreu.

A seguir, apresentamos o resultado do pré-teste por questão, categorizando as respostas como: (A) acertou, (E) errou e (N) não fez. E o quadro geral da quantidade de acertos, erros e não fez por questão

Acertou: quando houvesse uma resolução para questão e o resultado obtido estava correto.

Acertou: quando houvesse uma resolução para questão e o resultado obtido estava incorreto.

Não Fez: quando a questão não foi resolvida.

Quadro 23: Acertos(A), Erros(E) e Não Fez(N) do pré-teste

	QUESTÕES				
Apelidos	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**
Anjinhah	N	A	E	A	A
Isa	N	N	N	N	N
Ferreira	E	E	E	E	E
Tatá	N	N	N	N	N
Adri	N	N	N	N	N
Eli	N	N	N	N	N
2791	N	E	E	N	N
Drica	N	N	N	N	N
Tazz	N	E	E	E	N
MYKlove	N	E	N	N	N
Sndo	N	N	N	N	N
Sedeia	N	E	N	N	N
Juju	N	N	N	N	N
Brunilda	N	N	N	N	N
Peteca	N	N	N	N	N

Fonte: pesquisa de campo, 2008

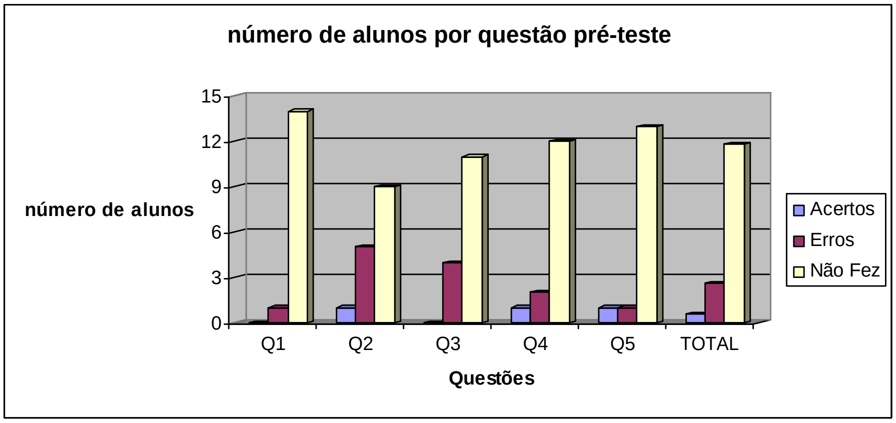
Quadro 24: Quantidade de Acertos, Erros e Não fez por questão do pré-teste

QUESTÕES	ACERTOS	ERROS	NÃO FEZ
Q1	0	1	14
Q2	1	5	9
Q3	0	4	11
Q4	1	2	12
Q5	1	1	13

Fonte: pesquisa de campo, 2008

A seguir, apresentamos o gráfico 11, que permite uma melhor visualização dos dados apresentados nos quadros 23 e 24.

Gráfico 11: Número de alunos por questões no pré-teste.



Fonte: pesquisa de campo, 2008

Observando o gráfico, podemos afirmar que a maioria dos sujeitos da pesquisa não fez as questões do pré-teste. A média de erros ficou aproximadamente em três alunos, ou seja, um quinto dos alunos procurou fazer as questões, mas errou.

Esses resultados vão além dos que foram encontrados em Fichbein e Gazit (1988 apud Batanero, 1996), em suas pesquisas. Segundo os autores, na realização do pré-teste, antes do ensino, os alunos apresentavam acentuados erros nos problemas que envolveram as operações de permutação e arranjos repetidos, seguidos dos erros de arranjo sem repetição e as combinações. Dizemos que os resultados que encontramos vão além porque a maioria dos alunos não apresentou erros nas questões e, antes, não fez as questões.

7.2.2. O pós-teste

Apresentamos o resultado do pós-teste por questão, categorizando as respostas como: (A) acertou, (E) errou e (N) não fez. E o quadro geral da quantidade de acertos, erros e não fez por questão

Quadro 25: Acertos(A), Erros(E) e Não Fez(N) do pós-teste

	QUESTÕES				
Apelidos	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**
Anjinhah	A	A	A	A	E
Isa	A	A	A	A	E
Ferreira	A	A	A	A	E
Tatá	E	N	E	E	E
Adri	E	E	E	A	E
Eli	E	E	E	N	N
2791	A	A	A	A	E
Drica	A	E	E	A	E
Tazz	A	E	A	A	A
MYKlove	A	A	A	A	A
Sndo	E	A	E	A	A
Sedeia	A	A	A	A	E
Juju	A	A	A	A	E
Brunilda	E	A	A	E	E
Peteca	A	A	E	A	E

Fonte: pesquisa de campo, 2008

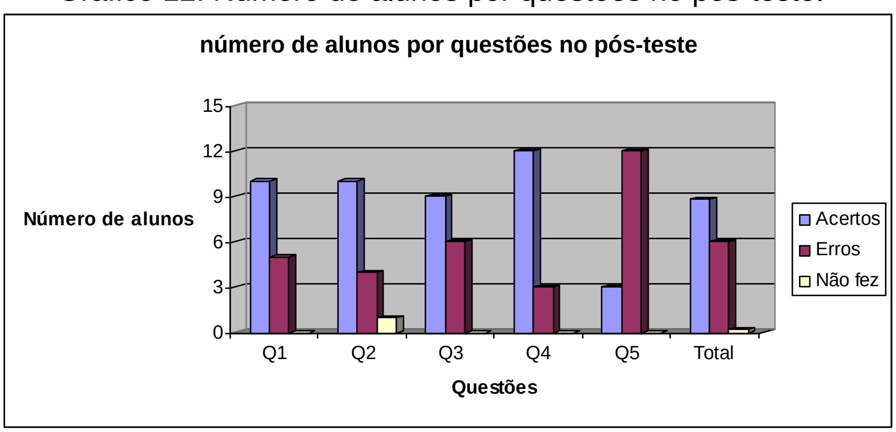
Quadro 26: Quantidade de Acertos, Erros e Não fez por questão do pós-teste

QUESTÕES	ACERTOS	ERROS	NÃO FEZ
Q1	10	5	0
Q2	10	4	1
Q3	9	6	0
Q4	12	3	0
Q5	3	12	0

Fonte: pesquisa de campo, 2008

Apresentamos o gráfico 12, que proporciona uma melhor visualização dos dados apresentados nos quadros 25 e 26.

Gráfico 12: Número de alunos por questões no pós-teste.



Fonte: Pesquisa de campo, 2008

No gráfico, podemos observar que o número de alunos que não fizeram as questões é muito pequeno, isso implica que houve mais intenção em acertar as questões por parte dos alunos. Comparando o número de acertos com o de erros, podemos observar que os alunos acertaram mais do que erraram.

A seguir, apresentamos um quadro geral comparando os resultados do pré e pós-teste.

Quadro 27: Acertos (A), Erros (E) e Não Fez(N) do Pré/Pós-testes

	Q1		Q2		Q3		Q4		Q5	
Apelidos	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
Anjinhah	N	**A**	A	**A**	E	**A**	A	**A**	A	**E**
Isa	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**E**
Ferreira	E	**A**	E	**A**	E	**A**	E	**A**	E	**E**
Tatá	N	**E**	N	**N**	N	**E**	N	**E**	N	**E**
Adri	N	**E**	N	**E**	N	**E**	N	**A**	N	**E**
Eli	N	**E**	N	**E**	N	**E**	N	**N**	N	**N**
2791	N	**A**	E	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**E**
Drica	N	**A**	N	**E**	N	**E**	N	**A**	N	**E**
Tazz	N	**A**	E	**E**	E	**A**	E	**A**	N	**A**
MYKlove	N	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**
Sndo	N	**E**	N	**A**	N	**E**	N	**A**	N	**A**
Sedeia	N	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**E**
Juju	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**E**
Brunilda	N	**E**	N	**A**	N	**A**	N	**E**	N	**E**
Peteca	N	**A**	N	**A**	N	**E**	N	**A**	N	**E**

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Podemos observar no quadro 28 que há uma forte predominância de alunos que não fizeram as questões no pré-teste. Mas, esse fato se reduz consideravelmente no pós-teste, pois apenas a Tatá, na questão 2, e o Eli, nas questões 4 e 5, apresentam a categoria “não fez”.

É perceptível a acentuada melhora dos alunos nas questões 1, 2, 3 e 4, pois a quantidade de acertos supera a de erros. Acreditamos que esses resultados poderiam ter sido melhores se tivéssemos realizado as aulas destinadas ao desenvolvimento das habilidades para resolver problemas de contagem.

No que se refere à questão 05, devemos ressaltar que entre os alunos que realizaram o pós-teste, houve aqueles que apresentaram corretamente o procedimento de resolução, mas erraram o resultado final. Podemos observar no quadro a seguir os extratos dos protocolos dos alunos que acertaram o procedimento e o valor final, juntamente com os alunos que acertaram o procedimento, mas erram o valor final.

Quadro 28: Alunos que acertaram o procedimento da questão 05.

Apelidos	Resposta dos alunos
Sedeia	$\frac{7.6.5}{1\ 2.3} = 210$ maneiras diferentes
Brunilda	$C_{7:3}: \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{4!} : 5064$
Snob	$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$ $C_{7,3} = \frac{7!}{3! \times (7-3)!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{6\times\cancel{4!}} = \frac{210}{6} = 35$
Tazz	1ª ETAPA 7 2ª ETAPA 6 3ª ETAPA 5 = 210 MANEIRAS DIFERENTES $7.6.5 = 210 = \frac{210}{3!}\ \frac{210}{3.2.1} = \frac{210}{6!} = 35$
Myklove	$R = C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3!\cancel{4!}} = \frac{210}{3!} =$ ~~35 maneiras diferentes~~ $\frac{210}{3.2.1} = \frac{210}{6} =$ 35 maneiras diferentes

Fonte: Pós-teste dos alunos, 2008

No quadro acima, podemos observar que a Sedeia e a Brunilda conseguiram perceber o procedimento correto de resolução da questão que envolve a combinação simples. Sendo assim, entendemos que mais dois alunos conseguiram alcançar o objetivo da questão. Com isso, o quadro que segue apresenta os resultados do pré/pós-teste com uma melhora no desempenho dos alunos, também, na questão 5.

Quadro 29: Acertos (A), Erros (E) e Não Fez(N) do Pré/Pós-testes relativo

	Q1		Q2		Q3		Q4		Q5	
Apelidos	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
Anjinhah	N	**A**	A	**A**	E	**A**	A	**A**	A	**E**
Isa	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**E**
Ferreira	E	**A**	E	**A**	E	**A**	E	**A**	E	**E**
Tatá	N	**E**	N	**N**	N	**E**	N	**E**	N	**E**
Adri	N	**E**	N	**E**	N	**E**	N	**A**	N	**E**
Eli	N	**E**	N	**E**	N	**E**	N	**N**	N	**N**
2791	N	**A**	E	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**E**
Drica	N	**A**	N	**E**	N	**E**	N	**A**	N	**E**
Tazz	N	**A**	E	**E**	E	**A**	E	**A**	N	**A**
MYKlove	N	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**
Sndo	N	**E**	N	**A**	N	**E**	N	**A**	N	**A**
Sedeia	N	**A**	E	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**
Juju	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**A**	N	**E**
Brunilda	N	**E**	N	**A**	N	**A**	N	**E**	N	**A**
Peteca	N	**A**	N	**A**	N	**E**	N	**A**	N	**E**

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Entre os alunos que erraram o procedimento e o resultado final da questão 5, destacamos os que apresentaram erro de ordem (Batanero *et al.* (1997); Correia e Fernandes (2007); Esteves (2001); Pacheco (2001)), ou seja, resolveram o problema como se fosse de arranjo quando a operação correta é de combinação (cf.quadro 30) .

Quadro 30: Alunos que trocaram o procedimento de resolução da questão 5.

Apelidos	Resolução dos alunos
Isa	$A_{7;3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4}}{\cancel{4}} = 210$ maneiras distintas
Anjinhah	$\underline{7} . \underline{6} . \underline{5} = 210$ maneiras
Juju	42 $\times$ 5 210 $\frac{7}{1^{\circ} pos.} . \frac{6}{2^{\circ} pos.} . \frac{5}{3^{\circ} pos.} = 210$
2791	$5 = \underline{7} \; \underline{6} \; \underline{5} = 280$ 3 56 . 5 280

Fonte: Pós-teste dos alunos, 2008

Acreditamos que por não ter havido a possibilidade de desenvolver as aulas destinadas aos exercícios de cada assunto ministrado, os resultados do quadro acima são bastante positivos, pois observamos que os referidos alunos apresentam condições favoráveis de um melhor desenvolvimento das habilidades para resolver os problemas de combinação simples. Esses resultados confirmam que houve um avanço considerável do pós-teste em relação ao pré-teste.

A seguir, procedemos a uma análise nos resultados do pré-teste e pós-teste por grupo.

O objetivo dessa análise é procurar conhecer a evolução dos grupos, uma vez que, durante a realização da análise, dos extratos dos protocolos, foi observado que o grupo 04 apresentava melhor desempenho nas resoluções das situações-problema. Esse grupo já tinha algumas habilidades desenvolvidas porque seus integrantes estavam em regime de dependência da disciplina Matemática. No entanto, se os demais grupos apresentassem desempenho igual ou melhor que o grupo 04, isso demonstraria que ocorreram, na sequência de ensino, condições favoráveis de aprendizagem, ocasionando, assim, um possível desenvolvimento das habilidades básicas da Análise Combinatória.

Quadro 31: Desempenho dos alunos do grupo01 no pré e pós-teste

Apelidos	**G1**	**Q1-pré**	**Q1-pós**	**Q2-pré**	**Q2-pós**	**Q3-pré**	**Q3-pós**	**Q4-pré**	**Q4-pós**	**Q5-pré**	**Q5-pós**
Eli	G1	N	E	N	E	N	E	N	N	N	N
2791	G1	N	A	E	A	E	A	N	A	N	E
Brunilda	G1	N	E	N	A	N	A	N	E	N	E
Peteca	G1	N	A	N	A	N	E	N	A	N	E

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Observando os resultados do pós-teste, foi-nos possível considerar que o grupo 01 apresentou:

Um resultado mediano nas questões 01, 03 e 04;

um bom resultado na questão 02

um resultado insuficiente na questão 05.

Esse grupo, como já foi descrito anteriormente, não conseguia apresentar nenhuma forma de raciocínio combinatório. Então, diante desses resultados, podemos afirmar que ocorreu um bom desenvolvimento das habilidades básicas da Análise Combinatória.

Quadro 32: Desempenho dos alunos do grupo02 no pré e pós-teste.

Apelidos	G2	Q1-pré	Q1-pós	Q2-pré	Q2-PÓS	Q3-pré	Q3-POS	Q4-pré	Q4-POS	Q5-pré	Q5-POS
Sedeia	G2	N	A	E	A	N	A	N	A	N	E
Drica	G2	N	A	N	E	N	E	N	A	N	E
Tatá	G2	N	E	N	N	N	E	N	E	N	E

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Podemos observar que no pós-teste:

O grupo obteve um resultado mediano nas questões 02 e 03;

o grupo obteve um resultado insuficiente na questão 05;

o grupo obteve um bom resultado na questão 01.

Os extratos dos protocolos desse grupo apresentavam algumas manifestações acerca do raciocínio Combinatório. No entanto, em alguns momentos, foi observado que o grupo não conseguia identificar as etapas dos eventos e as possibilidades para cada etapa. Entendemos que os resultados apontam que o grupo obteve um desenvolvimento regular das habilidades combinatórias.

Quadro 33: Desempenho dos alunos do grupo 03 no pré e pós-teste

Apelidos	G3	Q1-pré	Q1-pós	Q2-pré	Q2-PÓS	Q3-pré	Q3-POS	Q4-pré	Q4-POS	Q5-pré	Q5-POS
MYKLOVE	G3	N	A	E	A	N	A	N	A	N	A
TAZZ	G3	N	A	E	E	E	A	E	A	N	A

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Observando os resultados do pós-teste, podemos afirmar que o grupo obteve um bom desenvolvimento das habilidades básicas da Análise Combinatória.

Quadro 34: Desempenho dos alunos do grupo 04 no pré e pós-teste.

Apelidos	G4	Q1-pré	Q1-pós	Q2-Pré	Q2-PÓS	Q3-pré	Q3-POS	Q4-pré	Q4-POS	Q5-pré	Q5-POS
SNDO	G4	N	E	N	A	N	E	N	A	N	A
ANJINHA	G4	N	A	A	A	E	A	A	A	A	E

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Em se tratando do grupo 04, os resultados do pós-teste nos levam a considerar que o grupo apresentou:

Um resultado mediano nas questões 01, 03 e 04;

um bom resultado na questão 04

No geral, podemos considerar que o grupo 04 apresentou um bom resultado.

Quadro 35: Desempenho dos alunos do grupo05 no pré e pós-teste.

Apelidos	G5	Q1-pré	Q1-pós	Q2-pré	Q2-PÓS	Q3-pré	Q3-POS	Q4-pré	Q4-POS	Q5-pré	Q5-POS
ISA	G5	N	A	N	A	N	A	N	A	N	E
FERREIRA	G5	E	A	E	A	E	A	E	A	E	E
ADRI	G5	N	E	N	E	N	E	N	E	N	E
JUJU	G5	N	A	N	A	N	A	N	A	N	E

Fonte: Pré-teste e Pós-teste dos alunos, 2008

Podemos considerar que o grupo 05 apresentou um bom resultado no pós-teste e, também, afirmar que ocorreu um bom desenvolvimento das habilidades básicas da Análise Combinatória.

Como considerações gerais para essa análise, acreditamos que somente o grupo 02 não apresentou desenvolvimento de habilidades iguais ao do grupo 04.

Tal fato não ocorreu com relação aos demais grupos. Acreditamos que os grupos 01 e 05 apresentaram desenvolvimento de habilidades iguais ao do grupo 04. Esse, por sua vez, também evoluiu em sua habilidade. Mas, é no grupo 03 que identificamos um desenvolvimento das habilidades básicas da Análise Combinatória superior ao do grupo 04.

Para uma compreensão melhor acerca do desenvolvimento das habilidades básicas, apresentamos outra forma de análise dos dados obtidos no pós-teste.

Como uma das finalidades da sequência de ensino foi conduzir os alunos a perceber o uso do Princípio Fundamental da Contagem, o uso da fórmula da Permutação, o uso da fórmula do Arranjo e da Combinação. Acreditamos que, se a estratégia mais usada pelos alunos na resolução dos problemas foi uso de cálculo/ fórmulas, a sequência de ensino alcançou seus objetivos.

Sendo assim, utilizamos como categorias de análise as estratégias de diagrama de árvore, de contagem direta, baseadas em cálculo/fórmula e aquelas que são meras estimativas.

No caso das estratégias de contagem direta, consideramos os resultados que foram obtidos pela contagem direta dos agrupamentos.

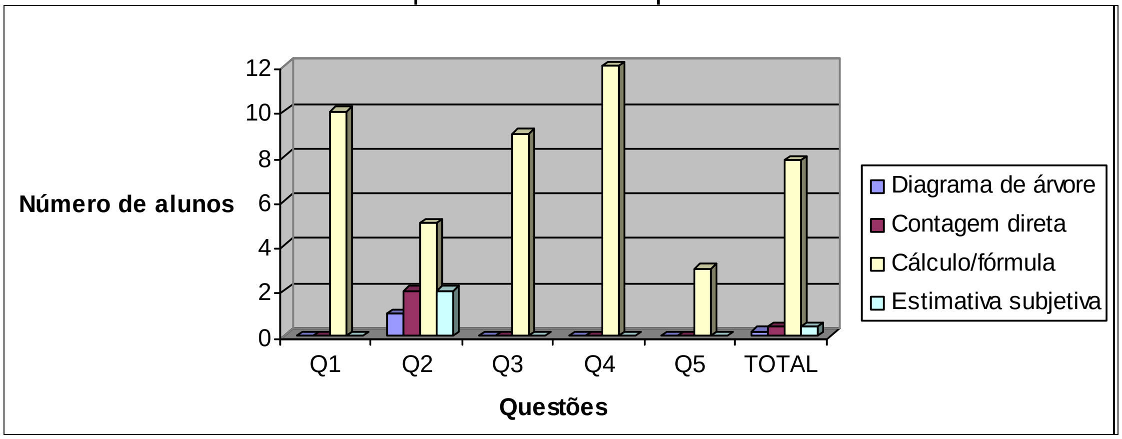
Para a estratégia do diagrama de árvores, consideramos os resultados que apresentaram alguma representação que se aproximassem do uso da árvore de possibilidades.

No caso das estratégias do cálculo/fórmula, consideramos os resultados que usaram o P.F.C, ou usaram a fórmula da Permutação, ou usaram a fórmula do arranjo ou a da combinação.

Por fim, no caso das estratégias estimativas, consideramos os resultados que não apresentaram qualquer procedimento de resolução.

A seguir, analisamos os resultados encontrados no pós-teste.

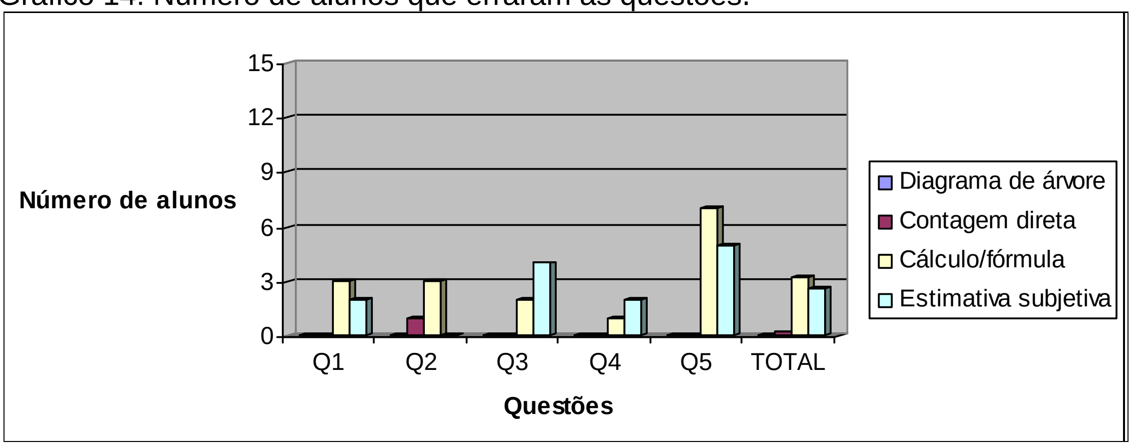
Gráfico 13: Número de alunos que acertaram as questões.



Fonte: Pesquisa de campo, 2008.

Podemos observar que a estratégia mais usa pelos alunos, que acertaram as questões, foi o cálculo/fórmula.

Gráfico 14: Número de alunos que erraram as questões.



Fonte: Pesquisa de campo, 2008.

Podemos observar que a estratégia mais usada pelos alunos que erraram as questões foi o cálculo/fórmula.

Na questão número 05 aproximadamente 67% dos alunos utilizaram como estratégia de resolução a fórmula do arranjo ou da combinação. Contudo, a maior parte desses alunos apresentou alguma forma de erro no resultado final. Acreditamos que essa situação poderia não ter ocorrido se tivéssemos realizado as aulas de exercícios em nossa sequência didática. Por fim, consideramos que os argumentos aqui expostos nos proporcionam condições de afirmar que uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou investigar a viabilidade de uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas que enfatizem a resolução de problemas como ponto de partida, junto aos alunos da segunda série do Ensino Médio.

A sequência de ensino teve como participantes 15 alunos da segunda série do Ensino Médio, da Escola de Ensino Fundamental e Médio Deodoro de Mendonça. Os alunos foram divididos em grupos, sendo respeitadas as suas preferências, exceto no caso de alguns alunos que estavam em regime de dependência. Esses formaram um único grupo e foram nomeados como grupo 04. No total, cinco grupos participaram da pesquisa e, entre eles, o grupo 02 foi o que menos apresentou desenvolvimento das habilidades básicas para o ensino de Análise Combinatória.

O planejamento inicial da sequência de ensino apresentava um total de 20 horas/aula para que fossem desenvolvidas e aprofundadas as habilidades básicas da Análise Combinatória. Entretanto, por ter ocorrido uma greve de professores que só teve seu fim três semanas antes de encerrar o semestre, fomos obrigados a reduzir o número de aulas à metade do que estava previsto. Dessa forma, foram sacrificadas as aulas de aprofundamento dos conceitos básicos.

Em nossas análises, observamos que as aulas de aprofundamento são muito importantes e devem ser planejadas com seus objetivos bem consolidados. Consideramos, também, que após a aula de aprofundamento deve ser realizado um pós-teste. Com isso, o professor pode avaliar o desenvolvimento das habilidades básicas da Combinatória.

No que tange ao campo teórico, vale ressaltar que este estudo conseguiu validar as sugestões de Sá (2005), pois, do planejamento até a realização da sequência de ensino, estivemos dialogando com suas 11 sugestões. Cabe, então, considerar a importância desse campo teórico para o desenvolvimento de aulas por meio da resolução de problema como ponto de partida.

Uma questão muito importante, intrínseca a este trabalho, refere-se à relação existente entre a Didática da Matemática e a formação inicial dos professores de Matemática. Para Varizo (2006), a necessidade de tornar o conhecimento matemático acessível às novas gerações faz com que os estudos referentes à Didática da Matemática sejam inseridos nos currículos dos cursos de licenciatura.

Segundo Costa (2004), a maioria dos professores de matemática estuda Análise Combinatória como pré-requisito para as aulas de probabilidade. Com isso, dois fatos são evidenciados na formação dos professores: o primeiro é que eles não adquirem domínio do conteúdo e o segundo é a falta de discussões acerca do ensino de Análise Combinatória desenvolvido nas escolas. Sendo assim, entendemos que nosso estudo e os trabalhos que foram descritos na seção 2 apresentam um vasto campo de discussão acerca do objeto matemático em questão e podem contribuir para a formação inicial de professores de Matemática.

No que se refere à formação do professor de Matemática, devemos considerar a imensa transformação que essa experiência nos trouxe. Descobrimos a riqueza existente numa aula bem planejada, apoiada num campo teórico e desenvolvida com a participação intensa dos alunos. Em alguns momentos nas aulas, deixávamos transparecer a alegria de ver os alunos alcançarem, por meio de nossas perguntas, os resultados que esperávamos. Podemos observar esse fato na seguinte fala:

> *"Foi assim que deu? Muito bom... Então vamos lá agora... presta atenção... agora sim... eu quero que vocês... agora vocês vão pensar bem... antes de responder... mas primeiro vão responder no papel... todo mundo pra cá... olha lá... todo mundo olhando pra cá que eu vou fazer uma pergunta... vocês fizeram conquistas maravilhosas... o que eu quero saber de vocês agora é o seguinte... veja bem...* ***você ta vendo esse três que surgiu aqui?*** *Ele não faz parte desses dois momentos... vocês estão vendo? Não é verdade?"*

No momento acima descrito, estávamos passando por um processo emocional que reunia felicidade, nervosismo, angústia e outros fatores que, durante todos esses anos ministrando aulas de Matemática, ainda não nos haviam ocorrido.

Quando optamos por utilizar a câmera de vídeo como instrumento de coleta de dados, não tínhamos dimensão do que iríamos encontrar na fase de transcrição dos dados. Nessa fase, pudemos observar uma série de fatos que ocorreram com nossas falas, durante as aulas, como por exemplo: *"Não... mas tá com outro número... vamos lá... vamos trabalhar... vá lá...vamos lá ao que está* *valendo... Afinal de contas tu perguntas... Ah:: mas tu falas assim... se colocar um outro número quatro aqui"*. Esse fato nos levou a levantar a seguinte interrogativa: "Será que a fala do professor influencia de forma negativa na aprendizagem de alguns alunos durante o processo de institucionalização dos conceitos de análise Combinatória?" Essa é uma questão para futuros trabalhos nesse campo de investigação. No que se refere ao campo de investigações no ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, entendemos que as transcrições dos dados da aula do arranjo simples e da combinação simples revelaram que conseguimos fazer com que os alunos participassem intensamente da construção das fórmulas.

Numa análise geral, observamos que os objetivos de cada aula da sequência de ensino foram alcançados com a maioria dos alunos que participaram da pesquisa e que a resolução de problemas como ponto de partida viabiliza condições favoráveis para introduzir os conceitos básicos de Análise combinatória.

Sendo assim, esperamos que nossos esforços venham contribuir com futuras pesquisas no campo de investigação do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ANTUNES, L. R; DO Vale, M. B.; **Análise Combinatória na Escola Pública**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Ciências Sociais e Educação. Belém, UEPA, 2005. p. 89.

BARALDI**,** I. M. **Matemática na escola: que ciência é esta?**. Bauru: EDUSC, 1999.

BATANERO, C.; GODINO, J.D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria**. Educación Matemática, México, V.8, p. 26-39, agosto,1996.

__________. **Estratégias Generales Y Estratégias Aritméticas Em La Resolucón de Problemas Combinatórios**. Educación Matemática, V. 15, p. 5-25, agosto, 2003.

BRASIL**,** Ministério da Educação, Secretária de Educação Médias e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Volume 2. Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Brasília, 2006.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática**. In: BRUN, Jean. Didáticas das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CALEFFE, L. G.; MOREIRA, H. **Metodologia da Pesquisa para Professores Pesquisadores**. Rio de Janeiro: DP&A, 2006.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José Antônio. **Estratégias Intuitivas de Alunos do 9.º Ano de Escolaridade na Resolução de Problemas de Combinatória**. In: BARCA, A.; PERALBO, M.; PORTO, A.; Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Org.). Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía. A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 2007, p. 1256-1267.

COSTA, C. A. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2003, 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CRESWELL, John. W.. **Projeto de pesquisa: Métodos qualitativos, quantitativos e mistos.** 2a ed.- Porto Alegre: Artemed, 2007.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2002.

DORNELAS. A.C.B. **O Princípio Multiplicativo como Recurso Didático Para a Resolução de Problemas de Contagem**. Recife, 2001, 127 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2000, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FREITAS, J. L. M. **Situações Didáticas**. In: Educação Matemática: uma introdução. Séries Trilhas, São Paulo: EDUC, 1999.

GÁLVEZ, Grécia. **A didática da Matemática**. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma(org.). Didáticas da Matemática: reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artemed, 2001. p. 26-35.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar: Combinatória e probabilidade.** 6ª Ed. São Paulo: Atual, 1993.

HEY, Amaury U. Borges. **Uma Proposta Metodológica para a Aprendizagem de Estatística – Contribuições da Engenharia Didática.** Florianópolis, 2001, Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Departamento de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; Lima, Mário Luiz Alves de. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidades**. Rio de Janeiro: Stamppa, 2007.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática**. 2ª Ed. São Paulo: Réspel, 2003.

MACEDO, Lino de. **Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar**. In: PERRENOUD, P.(org.); As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artemed, 2002.

MAGALHÃES, F; OLIVEIRA, C. **Introdução à Análise Combinatória: o problema da contagem**, Lisboa: ESCOLAR EDITORA, 2004.

MORAES, M. C. **O paradigma educacional emergente**. 11. ed. São Paulo: Papirus, 2005.

MOREIRA, M. A. **O ensino e aprendizagem: enfoque teórico**. 3. ed. São Paulo: Editora Moraes, 1981.

MORGADO, A.C. et al; **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 2004.

OLIVEIRA, Cristina; MAGANHÃES, Fernanda. **Introdução à Análise Combinatória: O problema da contagem.** Porto: Escolar, 2004.

PACHECO, A.B. **Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não-verbais no campo da Análise Combinatória**. Recife, 2001, 257 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência Francesa**. 2a ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky: a relevância do social**. 3a ed. São Paulo: Summus, 2001.

PARDAL, E. ; ROCHA, S. V. **Uma proposta diferente para aula de análise combinatória**. Belém, 2007, 134 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Centro de Ciências Sociais e Educação. Universidade Estadual do Pará.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar: convite à viagem**. Porto Alegre: Artemed, 2000.

PINHEIRO, C. A. M ; ROZA, I. S. **Dá análise combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio?**. Belém, 2006, 52 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Centro de Ciências Sociais e Educação. Universidade Estadual do Pará.

ROCHA, J. C. **O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas**. São Paulo, 2002, 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de educação, Universidade de São Paulo.

SANTOS, Flávia Maria Teixeira; Greca, Ileana Maria. **A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias.** Rio Grande do Sul: Unijuí, 2006.

SÁ, P. F. **A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática**. Traço: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

SILVA, J. A. M. **Educação Matemática e Exclusão Social: tratamento diferenciado para realidades desiguais**. Brasília: Plano Editora, 2002.

SCHLIEMANN**,** A. D. **Na vida dez, na escola zero**. Analúcia Dias Schliemann, David William Carraher, Terezinha Nunes Carraher. – 12ª. ed. – São Paulo, Cortez, 2001.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. Campinas, 1999, 94 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. **Os caminhos da didática e suas relações com a formação de professores de Matemática**. In: NACARATO, A. M.; PAIVA. M. A. V. (org.). A formação do professor que ensina Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ANEXO A – DIREITO DE IMAGEM

AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM (A título gratuito)

Nome completo da mãe: ....

Nacionalidade: ....

Profissão: ....

RG: .... CPF/MF ....

Endereço: .... Tel.: ....

Nome Completo do filho (a): ....

Nacionalidade: ....Idade: ....

Objeto: Imagens do filho(a) desenvolvendo atividades de aprendizagem em sala de aula.

Neste ato, a título gratuito, autorizo, por prazo indeterminado e sem limites de território, ao senhor Carlos Alberto de Miranda Pinheiro, professor, casado, portador da carteira de identidade N^{o} 462378 do Ministério da Defesa, com domicilio na travessa Enéas Pinheiro N^{0} 1043, Bairro da Pedreira, Cidade de Belém do Pará. O direito de reproduzir a imagem de meu filho (a), objeto desta autorização em trabalhos acadêmicos, na produção de livros voltados à área de Educação Matemática, nos periódicos impressos, em CD-ROM, em DVD, aulas teóricas de cursos de graduação, pós-graduação e aperfeiçoamento profissional e nos materiais impressos ou eletrônicos distribuídos aos alunos, em palestras, em trabalhos a serem apresentados em eventos científicos e para todos os fins científicos e educacionais aqui não expressamente mencionados. Somente não autorizo a inclusão da imagem do meu filho em qualquer circunstancia que não sejam as que acima foram citadas.

..................................., ...de ....de 2............. .

Assinatura: ....

Testemunhas:

1)Nome: ....Assinatura:...

RG: ....

2)Nome: ....Assinatura:...

RG: ....

ANEXO B – Dominó Combinatório

Este jogo consiste em 30 cartas. Algumas contêm um par de situações que representam COMBINAÇÃO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, que serão associadas às demais cartas nas quais estão os seguintes pares de palavras: COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/ARRANJO.

Participantes: no mínimo dois.

Objetivo: Livrar-se de todas as suas cartas, deitando-as na mesa, uma em cada rodada, associando uma situação de combinação (texto) à palavra COMBINAÇÃO; ou uma situação de arranjo (texto) à palavra ARRANJO.

Regras:

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho - um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma seqüência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.
- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.

Veja o exemplo a seguir:

Quantas diagonais tem o dodecágono?				
Arranjos	Alfredo, Arnaldo, Ricardo, Renato e Ernesto querem formar uma sigla com 5 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de cada nome. Qual é o nº total de siglas possíveis?	Numa reunião de congresso, em que cada professor cumprimenta todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. Qual é o número de professores presentes à reunião?	Combi-nação	Combi-nação

A seguir as peças do Dominó Combinado;

Um examinador dispõe de 6 questões de Álgebra e 4 de Geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de Álgebra e 2 de Geometria?	Combinação	Arranjos
Combinação	Arranjos	Arranjos
Entre quatro alunos de uma turma será escolhida a diretoria do grêmio, formada por presidente, secretário e tesoureiro. De quantas maneiras tal diretoria pode ser formada com esses elementos?	Combinação	Combinação
Combinação	Arranjos	Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas com 7 alunos de uma escola?
Numa reunião de congresso, em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. Qual o número de professores presentes à reunião?	Combinação	Uma empresa quer constituir uma comissão de empregados. Dentre os dez mais cotados e atuantes devem ser escolhidos três. De quantas maneiras essa comissão pode ser constituída?
Alfredo, Otavio, Ricardo, Sergio e Luiz querem formar uma sigla com 3 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de cada nome. Qual é o numero total se siglas possíveis?	Combinação	Combinação

Quantas palavras de três vogais não repetidas podemos formar com as vogais a, e, i, o, u?	Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?	Combinação
Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números três algarismos distintos podem ser formados?	Arranjos	Em um colégio, há três estudantes concorrendo à presidência ou vice-presidência do grêmio: Bia, Cláudia e David. De quantas formas esses dois cargos podem ser preenchidos?
Arranjos	Dispomos de 7 frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes podemos preparar a sala com apenas 5 frutas?	Combinação
Uma empresa possui 8 sócios, dos quais serão escolhidos 2 para os cargos de presidente e vice-presidente. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escolha?	Arranjos	Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?
Dez pessoas disputam uma corrida. Quantos são os possíveis resultados para as três primeiras colocações, sabendo que não pode haver empates?	Arranjos	Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listas, cada lista com um cor. De quantas formas isso pode ser feito?
Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele	Arranjos	Combinação

Combinação	Arranjos	Uma prova consta de 10 questões, dais quais o aluno deve resolver 5. De quantas formas diferente ele poderá escolher as 5 questões?
Arranjos	Combinação	Quantas palavras de três letras podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?
Arranjos	Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 10 pessoas?	Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?
Em um campeonato de boxe há doze inscritos. Quantas lutas podem ser realizadas?	Numa urna existem 100 cartelas numeradas de 1 a 100. São extraídas, ao acaso, três cartelas para serem distribuídos três prêmios diferentes. Quantas maneiras diferentes existem para distribuir os prêmios entre as 100 pessoas	Uma organização dispõe de 10 economistas. De quantas maneiras diferentes os dirigentes podem escolher três economistas para desenvolver um projeto econômico para o governo?
Num determinado setor de um hospital trabalha 10 enfermeiras. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três enfermeiras para um plantão extra no hospital?	Dispondo de 5 latas de tinta de cores diferentes e necessitando pintar três paredes de um quarto, cada uma com cor diferente, quantas escolhas são possíveis?	Com 15 jogadores, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que qualquer jogador poderá ocupar a posição do goleiro?
Arranjos	Combinação	Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é:

Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 de cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho?	Uma agência de publicidade necessita de 2 rapazes e 3 moças para fazer um comercial para a TV. Dispondo de 4 rapazes e 5 moças, quantas opções a agência tem para formar o grupo necessário?	Arranjos
Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?	Arranjos	Combinação

ANEXO C – PIF-PAF DA COMBINATÓRIA

Participantes: de dois a quatro participantes;

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;

Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 01:

Sabendo que um salão tem 5 portas, determine o número de maneiras distintas de entrar nele e sair dele sem usar a mesma porta?	**5 . 4**	**20**

Exemplo 02:

Uma moça possui 3 blusas e 2 saias. De quantas formas ela pode se vestir?	**3 . 2**	6

Eis as cartas:

CARTA PROBLEMA 01

Com os números 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números naturais de três algarismo distintos podem ser escritos ?	$\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$	$\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$	$\boxed{60}$

CARTA PROBLEMA 02

Miranda deseja formar um conjunto calça-blusa para vestir-se. se ele dispõe de 7 calças e 8 blusas para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto?	$\boxed{7 \cdot 8}$	$\boxed{7 \cdot 8}$	$\boxed{56}$

CARTA PROBLEMA 03

No campo do Combinatória Esporte Clube há 10 portas de entrada. Quantas maneiras diferentes existem de um torcedor entrar por uma porta e sair por outra diferente?	$\boxed{10 \cdot 9}$	$\boxed{10 \cdot 9}$	$\boxed{90}$

CARTA PROBLEMA 04

Dionísio vai a um restaurante disposto a comer um prato de carne e uma só sobremesa. o cardápio oferece dez pratos distintos de carne e seis diferentes Tipos de sobremesa. de quantas maneiras diferentes Dionísio pode fazer seu pedido?	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{60}$

CARTA PROBLEMA 05

Um "Shopping Center" possui 8 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 2 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{80}$

CARTA PROBLEMA 06

Uma fechadura de segredo possui 3 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados, para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo?	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{1000}$

CARTA PROBLEMA 07

Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate ou de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes, quantos são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura?	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{30}$

Carta problema 08

De quantas maneiras podemos classificar os 4 empregados de uma micro-empresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias?	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{81}$

Carta problema 09

Num concurso de 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras poderão ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios?	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{132}$

Carta problema 10

Dez atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1^0 , 2^0 e 3^0 lugares?	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{720}$

ANEXO D – Cartas da Combinatória

Participantes: de dois a quatro participantes;

Objetivo desse jogo é fixar o conceito de permutação e a noção de fatorial têm suas regras iguais ao do Pif-Paf da Combinatória, no entanto possui um número menor de cartas e como já foi citada objetivo diferente.

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado. Veja os exemplos a seguir:

De quantas maneiras diferentes cinco pessoas A, B, C, D e E, podem ser dispostas em fila indiana.	P_5	120
P_4	4 . 3. 2. 1	24
6!	6. 5 . 4. 3. 2. 1	720
(3 – 1)!	2. 1	2

Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de uma de outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra SOL?	P_3	3. 2. 1
(6 + 1)!	P_7	7.6.5.4.3.2.1
$\frac{5!}{6!}$	$\frac{5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1}$	$\frac{1}{6}$
$(n-1)! = 4.3.2.1$	$(n-1)! = 4!$	$n = 5$

De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, três livros de Matemática e Quatro de física, de modo que os de mesma matéria permaneçam juntos?	$P_3 . P_4 . P_2$	288
$\frac{n!}{(n-1)!} =$	$\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} =$	n

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br
www.uepa.br/mestradoeducacao