Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação

WEBER DA SILVA MOTA

O Ensino de Limites de Funções por Atividades

Belém
2017

Weber da Silva Mota

Ensino de Limites de Funções por Atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade do Estado do Pará.
Linha: Formação de Professores
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém
2017

Weber da Silva Mota

Ensino de Limites de Funções por Atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade do Estado do Pará.

Linha: Formação de Professores

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Mota, Weber da Silva

Ensino de limites de funções por atividades / Weber da Silva Mota; orientação de Pedro Franco de Sá, 2017.

Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

1. Cálculo. 2. Limites 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Sá, Pedro Franco (orient.). II. Título.

21º ed. 515

Weber da Silva Mota

Ensino de Limites de Funções por Atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade do Estado do Pará.
Linha: Formação de Professores
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação: 17/03/2017

Banca Examinadora

_________________________________ - Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação
Universidade do Estado do Pará

_________________________________ - Membro Externo
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

_________________________________ - Membro Interno
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica
Universidade do Estado do Pará/ Universidade da Amazônia

_________________________________ - Membro Interno
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Doutor em Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Universidade do Estado do Pará

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, a Deus, por me permitir chegar até este momento.

À minha companheira **Eliane Albuquerque** que me incentivou nos momentos que queríamos fraquejar.

A coordenação e aos professores do **Programa de Pós-graduação em Educação** da Universidade do Estado do Pará.

A **Universidade do Estado do Pará (UEPA)** e ao **Centro de Ciências Sociais e Educação da UEPA** pela oportunidade.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. **Pedro Franco de Sá**, pelo apoio nos momentos complicados corroborando não ser um orientador, mas também um irmão.

Ao funcionário **Jorge Farias Figueiredo,** pelos auxílios administrativos.

A todos os meus colegas da Turma 10, que estiveram nas disciplinas que na **UEPA** participei, neste programa. Companheiros numa jornada que perdurou um ano. E a todos os **alunos** e **professores da** UEPA que participaram desta pesquisa.

E por fim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

RESUMO

MOTA, Weber da Silva. 2014. 166f. **O Ensino de Limite de Funções por atividade**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.

Esta pesquisa expõe os estudos iniciais e a coleta de dados sobre o Ensino de Limites de Funções, e tem como objetivo geral avaliar a potencialidade do ensino de limites de funções por meio de uma sequência didática de atividades estruturadas. A metodologia seguida foi baseada na Engenharia Didática. A análise prévia desta Dissertação é composta por: levantamento de estudos sobre o ensino de Limites de Funções; pesquisa de campo sobre o processo de ensino e aprendizagem de Limites de Funções conforme professores de matemática em ensino superior e uma pesquisa de campo sobre o processo de ensino e aprendizagem conforme discentes de Graduação da UEPA que tem um conhecimento prévio matemático deste objeto de pesquisa. Na etapa de concepção e análise *a priori ap*resentamos um conjunto de atividades para o ensino de Limites de Funções com uma concernente Análise. E na experimentação apresentamos a forma como desenvolveremos o cronograma das atividades. Trazendo um panorama, para que possamos analisar o ensino aprendizagem de limites de funções, finalizamos mostrando que a sequência didática pode ser um plausível instrumento para o ensino de limites de funções posteriormente comprovada esta potencialidade.

Palavras-chave: Educação. Educação Matemática. Ensino de Limites de Funções.

ABSTRACT

MOTA, Weber da Silva. 2014. 166f. **O Ensino de Limite de Funções por atividade**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.

This research exposes the initial studies and data collection on the Limits of Functions of Education, and has the general objective of evaluating the potential of education limits of functions through a didactic sequence of structured activities. The methodology was based on the Didactic Engineering. The preliminary analysis consists of: Lifting studies on teaching functions limits; field research on the process of teaching and learning functions limits as mathematics teachers in higher education and field research on the process of teaching and learning as UEPA of undergraduate students who have prior knowledge in this research object. At the design stage and prior analysis we present a set of activities for teaching functions Limits with a relative analysis. And at trial we present how we will develop the schedule of activities. Bringing an overview so that we can analyze the teaching and learning of limits of functions, we've closed showing the teaching sequence can be a plausible instrument for teaching limits functions later proven this capability.

Keywords: Education. Mathematics education. Limits of Functions of education.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação contemporânea vem se modificando, em função de uma diversidade de aspectos, em que novas competências são exigidas dos educadores, as modificações vão desde às atribuições ás avaliações, comportamento, sala de aula, etc. Esse reflexo deve ser analisado no ensino básico, mas também no nível superior. Tendo em vista que é o ponto de formação desses novos profissionais.

Para Freitas (1999, p. 17-18) A formação dos profissionais da educação tem se apresentado como "elemento impulsionador e realizador dessas reformas, ou como elemento que cria condições para a transformação da própria escola, da educação e da sociedade". Diante disso sentimos a necessidade de pesquisar, no curso de Matemática da os efeitos de uma sequencia didática para o Limite de Funções, por meio de uma sequencia didática estruturada na Engenharia Didática, o qual o assunto, Limites de Funções é a introdução para o ensino de Cálculo Diferencial, e sendo esta disciplina especifica para a formação do professor de matemática.

Veiga et al (2000, p.190), afirmam:

> Se a especificidade e identidade da profissão docente é o ensino, é inadmissível que professores universitários que detenham o domínio do conhecimento em um campo científico não recebam uma formação mais condizente com as reais necessidades dos alunos e do ser professor. (VEIGA et al,2000 p. 190)

Assim a importância de analisar o que se tem produzido como pesquisa no ensino superior, em especifico nos estudos de Limite, nos inquietou pela maneira como este conteúdo é ensinado em turmas de graduação e como os alunos percebem a construção do estudo de Limites.

Pois estudos mostram, como os levantados no referencial teórico desta pesquisa, que alunos e docentes, diante das aulas de matemáticas, a respeito de o estudo de Limites, têm mostrado que seu ensino é como aulas duras e com escassas aplicações. E baseado em nossa experiência nos deparamos com as afirmações dos alunos de graduação de que "***Limites é muito abstrato***", bem como os “*porquês*” de estudar o conteúdo e a relação que o mesmo tem sobre sua vida profissional e sua profissionalização.

Mais as frentes nos deparam com falas de professores tais como: “***Os alunos não tem base***”, além do mais, as resistências e o desinteresse, por parte dos alunos, em resolver questões sobre o estudo dos Limites são vistos, pelos professores de Matemática, como encargo pessoal dos alunos, o que disfarça a formação inicial do aluno de graduação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Ante deste fato, observados em nossa própria experiência na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, buscamos uma prática metodológica de influência mútua que pudesse agregar a pluralidade dos aspectos estabelecidos para o entendimento inicial na disciplina Cálculo.

E a partir deste sentimento de falta de interesse nossa, em parte e do aluno, na nossa práxis, encontramos na Engenharia Didática, uma proposta para atender nossa ansiedade, destacando o ensino de matemática por atividades, no qual o professor sugerindo casos que ocasionem pelo aluno a descoberta do conhecimento por meio da exploração de problemas dentro deste objeto. Neste elejo o Ensino por Atividades por ser baseado em um método de interação entre professor e aluno, e que coloca o professor, durante a aplicação das atividades, meramente como orientador do aluno, nos levou a perceber uma ferramenta para esta prática docente.

Todavia, sendo Cálculo diferencial e integral um vasto campo em Matemática Superior, balizamos como **objeto de estudo** desta pesquisa o Estudo de Limites de Função. Deste objeto formulamos a seguinte **questão norteadora**: “**Qual a potencialidade do ensino de limites funções por meio de atividades?**”.

Partindo desta questão, temos a seguinte *tese* de que: o ensino de Limites de Função por atividades estruturadas torna-se mais eficaz. Diante disto, a pesquisa traz como *objetivo* avaliar a potencialidade do ensino de Limites de Função por meio de uma sequência didática de atividades estruturadas. E como metodologia desta pesquisa para que se alcance o objetivo proposto usamos a *Engenharia Didática.*

A Engenharia Didática é uma situação de pesquisa que tem como objetivo investigar os processos de aprendizagem em sala de aula. Que se caracteriza por um esquema baseado em experimentações pedagógicas, e sobressai-se por ser usado diretamente em sala de aula, com registro neste sítio e os modos de legitimação que lhe são associados. Esta metodologia de pesquisa foi proposta por

Michelle Artigue, pesquisadora em Didática da Matemática, no ano de 1988 por meio do artigo *Ingénierie didatique* no periódico *Recherches en didactique des mathématiques*. Esta metodologia inclui sua origem na Escola Francesa de Didática da Matemática.

A Engenharia Didática, nesta perspectiva de metodologia de pesquisa, apresenta quatro fases ou etapas metodológicas: análises prévias; concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia; experimentação e análise *a posteriori* e validação, descritas a seguir.

A fase ou etapa metodológica das análises prévias, onde se têm a coleta de dados que serão estudados e analisados, traz um referencial teórico para fundamentar as categorias, identificando os problemas do ensino e aprendizagem do objeto de estudo, delineando de modo fundamentado as questões e as escolhas da sequência didática a ser desenvolvida na pesquisa.

Esta fase teve capacidade de incluir dimensões epistemológicas, tais como: a dos conteúdos (re)visados, do ensino habitual e de seus efeitos, das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam o seu progresso, do campo da compressões no qual decorrerá a realização didática e dos objetivos da investigação. Determinados autores ressaltam que esta fase pode ser retomada ao longo da investigação, estando sujeito ao objetivo da pesquisa, bem como, a necessidades que se mostre ao longo do processo.

A segunda fase desta metodologia é a concepção e análise a priori, também conhecida no Brasil como construção e análise a priori, período onde se constrói a sequência didática para o conteúdo em questão e se formula as hipóteses com base nos resultados obtidos nas análises prévias. A sequência didática se baseia em uma sequência de atividades que será desenvolvida e analisada, para que em seguida seja proposta no trabalho pedagógico a ser realizado. Sua construção objetiva a produção e seleção do material, em sua totalidade, que será utilizado durante a sua aplicação.

A sequência foi desenvolvida a partir do ponto inicial, no qual o docente possui um papel de orientador intermediário, dando um favorecimento para o desenvolvimento da sequência didática que temos sugerido nesta pesquisa. Com isto ser promovedor dos conceitos adquiridos em analogia com que será sugerido nas sequências. Na pesquisa de Artigue (1988) notam-se variáveis para o desenvolvimento da sequência didática, a saber: variáveis macro didáticas ou plenas (também designadas por globais) e as micro didáticas ou zonais, que comportam neste estudo seu desenvolvimento.

Nas variáveis macros didáticos se articulam a propósito numa organização global, envolvendo todas as etapas ou fase numa sequencia didática. Já na variável micro didática têm-se uma organização local da Engenharia Didática, propriamente dita, isto é, a organização de uma fase ou etapa dessas sequências. Estas variáveis se comportam conforme o conteúdo matemático pesquisado. E suas análises compreendem três dimensões: **a dimensão epistemológica, cognitiva e didática**. Assim sendo, na dimensão epistemológica incluem-se as características do saber, na dimensão cognitiva têm-se as particularidades cognitivas dos discentes em tese, e na dimensão didática têm-se as categorias do sistema de ensino ao qual envolve o discente.

Objetiva-se na análise a priori a maneira como as escolhas tomadas, no sentido das variáveis admitidas na pesquisa, possam intensificar a conduta dos discentes e apontar uma explicação neste comportamento atitudinal, no sentido da ocorrência. A análise a priori se compõe por duas fases de acontecimentos: a descritiva e a preditiva. Na fase descritiva, todos os instrumentos (ou recursos) são apresentados, e que estão preditos para serem utilizados na experimentação. Mais a frente nas escolhas das variáveis locais nas características das situações a-didáticas (não didáticas) abrangidas, é analisada em relação ao significado para o discente dessas situações, em função das probabilidades das ações e diante das proposições para a construção da estratégia, aceite de decisões, domínio e legitimação que o discente apresente na aplicação da pesquisa.

Por conseguinte o docente em sua ação mediador prepara a situação de aprendizagem favorecendo ao aluno a tarefa por adquirir o conhecimento. Com base em estudos sem nenhum caráter prático ou experiências registradas, no item testável, o qual versa em prever comportamentos aceitáveis procura mostrar como a análise feita possibilita compreender seu sentido, garantindo comportamentos esperados, e ou se nas interferências, dá-se o procedimento do incremento de conhecimento propendido na aprendizagem. Assim sendo, no decurso da análise *a priori* permanece certa apreensão nas expectativas, com tanta frequência em

Matemática como ciência peculiar como em sua relação com a didática na sua utilização experiencial docente.

Após a fase metodológica da Engenharia Didática tem-se a Experimentação, é a fase no qual são colocadas em funcionamento as atividades construídas, que compõem a Sequência Didática que foi considerada *a priori*. Igualmente corrigida, se preciso, se as análises locais do desenvolvimento experimental amoldar-se a essa necessidade, o que sugere em uma retroação para a análise *a priori*. Esta fase se dá inteiramente em sala de aula, principiado com aa aplicação da primeira atividade didática, ainda que venha se consistir de uma atividade diagnóstica.

Todos os momentos da Sequencia Didática que acontece no *lócus* da pesquisa é denominado por sessão, nela o pesquisador realiza a última atividade (ou seja, a sequência didática) com as turmas, ou seja, a sessão derradeira. Nesta fase, têm-se a aplicação da sequência com o registro, sem se deixar de fazer parte do que foi planejado na fase *a priori* da aplicação. Alguns autores consideram que na fase de experimentação há a inclusão dos objetivos e das classes para uma concretização da pesquisa para os discentes dela participante, com uma situação didática, durante a aplicação dos instrumentos da pesquisa, e finalmente o registro das observações ocorridas nesta fase.

A respeito dos registros realizados durante a fase de experimentação, estas devem ser coerentes com as variáveis priorizadas durante a análise a priori. Que é a preocupação, de alguns autores, logo o pesquisador (ou grupo de pesquisadores) não deve invadir o aspecto dos objetivos da pesquisa. Assim, os registros devem obedecer as variáveis escolhidas durante análise *a priori* em relação aos objetivos destacados na pesquisa. E as atividades devem ser aplicadas e registradas de acordo com o planejado *a priori*.

A seguinte fase, a análise *a posteriori* está condicionada à validação, nesta se tem o confronto das informações colhidas na fase de experimentação e com o que foi antevisto na análise *a priori*. Para Artigue existem momentos em que determinadas informações adicionais são colhidas com o emprego de questionários, conversas individuais ou em grupo no momento de aplicação da sequência. A finalidade desta confrontação comas informações conseguidas na aplicação da sequência de atividade e no relatório de registro da experimentação com os dados analisados e antecipados na análise *a priori* tem como objetivo gerar contextos que justifiquem e arrisque numa explicação para a ampliação do experimento, diante de uma conformidade ou inconformidade ao ocorrido, nesta seção.

Deste modo, o relatório na fase de experimentação é uma porta para a fase de análise, a qual deve conter maior minudência, dos resultados nela obtido. Finalmente, na análise *a posteriori* de uma sessão obtêm-se conjuntos de resultados resultantes da posse dos dados coletados previamente, dados que fornecem parâmetros no avanço do conhecimento didático que se apresentam na transferência do saber científico. O objetivo primordial da análise *a posteriori* esta em relacionar o que foi observado, com os relatórios dos registros realizados previamente e os outros empregados, durante a fase de experimentação consoante aos objetivos ampliados na análise *a priori* e o registrar a dos fenômenos didáticos que foram identificados. Por conseguinte, nesta fase há uma conexão dos instrumentos teóricos durante a coleta dos dados na fase da experimentação. A seção de validação se dá ao longo de todo o processo de elaboração da construção e emprego da pesquisa, no confrontamento dos dados coletados nas análises *a priori* e *a posteriori*, que permita uma verificação e confirmação das hipóteses que foram levantadas primeiramente na pesquisa.

Concluímos que a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que proporciona um constante retorno aos objetivos e a validação das conjecturas. Atendendo assim a intenção desta pesquisa. E ainda, podemos afirmar que esta metodologia de pesquisa pode ser utilizada por outras disciplinas, não se restringindo apenas a Educação Matemática. As seções de nosso estudo tomam como base as etapas da Engenharia Didática, descritas anteriormente, por este motivo na primeira seção apresentamos as análises prévias; na segunda seção a concepção e a análise *a priori*; na terceira seção descreveremos a experimentação; na quarta seção realizaremos a análise a posteriori e validação; por último, na quinta seção teceremos as considerações finais.

1. ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção apresentamos os resultados do estudo realizado sobre Ensino de Limites de Funções, bem como acerca do diagnóstico das dificuldades enfrentadas por professores de matemática e por alunos do 1º ano do Ensino Superior da Universidade do Estado do Pará, no que se refere ao tema da pesquisa.

A metodologia adotada nesse momento consistiu, primeiramente, no levantamento dos estudos acerca do ensino de Limites de Funções, com a intenção de obter informações sobre as pesquisas até então desenvolvidas, e, por conseguinte dar direcionamento na construção das atividades didáticas propostas.

O segundo momento consistiu na análise das informações obtidas na aplicação do questionário junto a 35 (trinta e cinco) professores de matemática do da Universidade do Estado do Pará, com o objetivo de obter informações sobre o perfil social, profissional e acadêmico.

No terceiro momento, apontamos os resultados da pesquisa realizada com alunos do 1ª ano do Curso de Ciências Naturais, com o objetivo de apresentar informações sobre o processo de ensino e aprendizagem desses alunos. No quarto momento, finalizamos com a síntese das análises prévias obtidas através do levantamento bibliográfico, pesquisa de campo com professores de matemática sobre o ensino de Limites de Funções, e pesquisa de campo com alunos do 1ª ano do Curso de Ciências Naturais da Universidade do estado do Pará.

1.1. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DE LIMITES DE FUNÇÕES

Segundo Bagni (1998, p 57), a evolução da noção de limite, em uma discussão sobre um possível paralelismo entre a história e o crescimento cognitivo exigiria uma teoria específica do conhecimento para que permita a comparação dos estudantes, em relação ao crescimento do conhecimento e do desenvolvimento histórico dos conceitos.

Historicamente, as noções de infinito real e potencial são antigas na Matemática, para Aristóteles de Stagira (384-322 a.C.) infinito real e potencial são distintos, mas infinito matemático, na opinião de Aristóteles, é simplesmente potencial, poias para evitar paradoxos, ele se recusou a aceitar a ideia de infinito real. No que diz respeito ao infinitesimal, de acordo com o conceito de linha de número, a concepção mais antiga é a de infinito potencial, embora ideias interessantes possam ser relacionadas com o argumento de exaustão (BAGNI, 1998, p 60).

A apatia matemática latente entre infinitesimal real e potencial tornou-se evidente após o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral, apresentadas nas obras de I. Newton (1642 -1727) e G. W. Leibniz (1646-1716), sendo que cada um deles foi sensível a sua própria intuição elementar, sendo que Newton era físico e Leibniz algebrista. A importância das noções de infinitesimal real e potencial era notável em muitas pesquisas sobre fundações Cálculo (BOS, 1975, p 45); F. Enriques (1871 – 1946) ressaltou a ambiguidade no conceito leibniziano de diferencial, onde afirmou que derivação é considerada por Leibniz como quociente de duas diferenças ou de dois diferenciais, do mesmo modo como designados por J. Bernoulli e por L. Euler.

Entanto, não é esclarecido nos escritos de Leibniz se estes incrementos deveriam ser interpretados apenas em forma potencial, como quantidades variáveis imaginadas, ou como infinitesimais reais (BOS 1975, p. 60). Em, McKinzie e Tuckey (2001, p. 348), tem-se que no século XX, os matemáticos reprisaram algumas ideias leibnizianas. Posto que, Leibniz mostrou por intuição que as teorias infinitesimais trazem para a introdução de números ideais do que podem ser considerado infinitamente pequeno se comparado aos números reais. Entretanto, nem Leibniz nem os seus alunos, nem seus sucessores deram quaisquer desenvolvimentos racionais a esta ideia (Robinson, 1974, p. 62).

Se Cada quantidade pode ser reduzida até que se torne zero e ela desaparece completamente, então, uma quantidade infinitamente pequena é uma quantidade temporária e, portanto, a própria coisa é igual a zero. Além disso, este está de acordo com a definição de infinitamente pequenas coisas em que nos dizem que eles são mais baixos do que qualquer quantidade indicada; Certamente, seria zero porque, se não for igual a zero, seria possível atribuir a si uma quantidade igual, e isto é contra a hipótese (Kline, 1972, p 132).

A ideia de quantidades temporária é importante mas, Euler infelizmente não pode ver a possibilidade de que uma quantidade temporária pode ser um tipo diferente de quantidade em se tratando de uma constante numérica. Euler ciente dos problemas com infinitesimais reais preferiu uma abordagem com base em hiper-real (McKinzie & Tuckey, 2001, p. 348).

As raízes históricas da noção de limite não são tão antiga como raízes históricas de métodos infinitesimais (CASTELNUOVO, 1938, p 143). J. Wallis (1616-1703), em sua obra *infinitorum Aritmética* de 1655, introduziu um conceito aritmético do limite de uma função, ou seja, em todo número real, a diferença da função pode ser menor do que qualquer quantidade dada.

Entretanto, M. Kline sublinha que tal formulação é vaga, mesmo sendo a ideia de J. Wallis correta (KLINE, 1972, p. 227).

O matemático P. Mengoli (1635-1686), no século XVII, trabalhou o limite, em *Elementum tertium de Geometria especiosa e elementa* (1659), este matemático mostrou ter uma ideia clara do conceito de limite (Loria, 1929 -1933 p. 226). Algumas citações em relação ao conceito de Limites estão em *Vera circuliet hipérboles quadratura* (1667) por J. Gregory (1638-1675) e na obra de Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687; citado por: Castelnuovo, 1938; Boyer, 1969; Menghini, 1982; Edwards, 1994).

As noções de limite foram, por vezes, tomadas em relação às sequências e séries, de números reais: F. Viète (1540-1603), em sua *Responsa Varia* (1593), calculou a soma de uma série geométrica; P. de Fermat (1601-1665), também, conhecia esse resultado; em 1655 A. Tacquet (1612-1660) e J. Wallis publicaram em *Arithmeticae eoria et práxis demonstrata* e em *Arithmetica infinitorum*, uma noção de limite.

Em particular, Tacquet sublinhou que a passagem de uma progressão finita para uma série infinita é imediata (LORIA, 1929-1933, p. 517). Em Gregório de St. Vincent (1584-1667) na sua obra *geometricum Opus* (1647) a qual se refere o paradoxo de Aquiles e a tartaruga a uma série geométrica e escreveu, A conclusão de uma progressão é o fim da série que a progressão considerada não atinge, embora seja indefinidamente alongado; ele pode se aproximar de um valor tão próximo quanto é possível (Kline, 1972, p. 96).

Considerando, a referência do Limite de Funções, no campo educacional tem-se em Gregory um grande equívoco em limites, no que se referem a uma sequência cujos termos são sempre diferentes do limite (Boyer, 1969 e 1982), este aponta que frequentemente, os alunos pensam que $Sn \rightarrow l$ significa que os valores da sequência Sn apenas se aproximam do limite de l, mas nunca o alcança, um exemplo conhecido é se 0.999... que é igual ou inferior a 1. Nesta situação, o limite de uma função é claramente considerado como um processo dinâmico (Tall & Vinner, 1981, p. 156-168.), assim considera-se no sentido do infinito potencial e infinitesimal.

Em G. Vitali (1875-1932) tem-se que a convergência não pode ser considerada antes da noção de limite (VITALI, 1979, p. 404) e o limite não tinha sido corretamente considerado em um conceito analítico fundamental, em particular, no século XVII e nos séculos XVIII, a questão da existência do limite da sequência de somas parciais não foi considerada, mas, podemos afirmar que o processo de limite foi concebido antes da formalização do conceito de limite.

Segundo Smith (1959), numa visão tradicional clássico, A. L. Cauchy (1789-1857) foi o primeiro matemático a fazer um estudo rigoroso do Cálculo Diferencial e Integral. No entanto no *Cours d'Analyse algébrique* de Cauchy (Paris, 1821), um livro escrito para os alunos da *École Polytechnique*, foi considerado um tratado fundamental do Cálculo do ponto de vista formal, e neste foram desenvolvido muitos teoremas analíticos básicos tão rigorosamente quanto possível, para esta fundamentação. A definição de Cauchy para Limite é assim enunciada: "***Quando os valores de uma abordagem variável indefinidamente tem um valor fixo, tão perto como nós queremos, este é o limite de todos esses valores***". Por exemplo, um número irracional é o limite das diferentes fracções que deram valores aproximados de que (...). Quando os valores de uma variável são (...) inferior a qualquer número dado, esta variável é um infinitesimal ou uma magnitude infinitesimal. O limite de tal variável é zero (apdu Bottazzini, 1990, p 327-328).

Cauchy introduziu a distinção fundamental entre constantes e quantidades variáveis, embora ele não tendo a descrição formal de números reais como corpos ordenados que satisfaçam a lista de axiomas de Peano. Como pode expressar a definição verbal de Cauchy por registros simbólicos? Não temos esta resposta, pois a matemática não é apenas texto; ele vive nas mentes das pessoas e pode, até certo ponto, ser divulgada ao interpretar os artefatos que produziram e esses artefatos, inscrições, instrumentos, livros e dispositivos técnicos, têm sido desenvolvidas em lugares particulares, por razões particulares (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 46).

Em Tall (1981), a formulação de Cauchy foi expressa no paradigma disponíveis no momento, e sua formulação pode levar ao uso de diferentes registros, pois há várias maneiras de visualizar infinitesimais como pontos de como a linha, que permitem ao leigo ver infinitesimais como pontos de variáveis que são arbitrariamente menores do que qualquer constante k positiva. Isso é análogo à noção prevalente no início do século XIX, quando Cauchy descreveu os infinitesimais como quantidades variáveis que tendem a zero (Tall, 2000, p. 155).

Assim, a moderna noção de limite, firmado desde o século XVII por Wallis, Mengoli e, finalmente, por Cauchy, foi expressa principalmente pelas representações verbais. Embora seja importante lembrar que tais registros verbais não podem ser isolados, mesmo que, a partir da percepção sensorial arbitrariamente de pequenas coisas.

Segundo Kline (1972, p. 262), K.T.W. Weierstrass (1815-1897) deu uma moderna definição de Limite e de Função Contínua ao afirmar que a ”função x tende para f(x) é contínuo em x = c se para qualquer número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real $\delta > 0$ tal que para cada x tal que $|x – c|< \delta$ tem que |f(x) – f©| < ε”. Os estudos de Weierstrass melhoraram trabalhos anteriores, como os de Bolzano, Abel e Cauchy, pois Weierstrass tentou evitar a intuição de limite, alterando a seguinte frase na construção matemática: “uma variável se aproxima de um limite”, e partir disto, sugeriu ideias de tempo e movimento, a estas definições.

Com relação à concepção e definição de limite em Weierstrass, a qual foi a que realmente permitiu uma representação simbólica moderna, a saber: “para todo $\varepsilon> 0$, existe $\delta> 0$ tal que para todo x é tal que $|x – c| <\delta$ sendo $x \neq c$, teremos $|f(x) – l| <\varepsilon$”, pode ser considerado bastante equivalente a definição do limite l Weierstrass (e ele pode ser expresso usando quantificadores, como por símbolos $\forall$, $\exists$, etc.).

Portanto, concluímos que a definição de limites em Weierstrass (a chamada definição ε-δ) leva ao uso de registros de representação simbólica. No entanto, existem diferentes registos simbólicos em diferentes comunidades de prática do Cálculo Diferencial e Integral. Posto que, Leibniz, Newton, Cauchy, Robinson tinham os seus próprios registos simbólicos que diferem um do outro e, claro, diferente, também, dos empregados por Weierstrass.

Atualmente, do ponto de vista educacional, a principal dificuldade para os alunos que lidam com a definição ε-δ é o caráter estático da teoria formal versus o caráter dinâmico da abordagem cognitiva: a consideração do desenvolvimento histórico do conceito de limite, principalmente com referência a utilização de diferentes registos semióticos, pode ser útil a fim de tornar possível a formulação correta da estática e dinâmica ideia de Limite de Funções.

Deste fato educacional, necessitamos verificar experimentos, pois muitos aspectos influenciam na aprendizagem dos conceitos de infinitesimais, já que, algumas disposições do contrato didático nessas influências podem ser apontadas em aulas, por meio de testes e diálogos. Em relação aos aspectos experimentais que pretendemos, é necessário identificar critérios de amostragem e, por intuições, exemplo e pré-curso (e para considerar o contrato experimental), vencer a dificuldade do entendimento dos conceitos de infinitesimais estudados em Limites de Funções.

Em Tall (2001, p 132), a noção limite ocorre num número de diferentes formas. (...) Todos estes têm em comum um processo de obtenção de arbitrariamente próximo de um valor fixo (o limite). Em todos os casos, a mesma simbologia é usada tanto para o processo de convergência e também para o conceito de limite. E o desenvolvimento histórico nos tem permitido considerar diferentes abordagens, relacionadas com potencial ou real infinitesimal e para diferentes registros de representação; No entanto, do ponto de vista educativo, é realmente difícil introduzir a noção de limite, sem fazer referência ao processo de construção de Limite (Gray & Tall, 1994, p. 132).

Assim, o problema da passagem do discreto para a continuidade é principalmente a cultural, e questões históricas são importantes, a fim de abordá-lo e superar muitas dificuldades. Futuras pesquisas podem ser destinadas a esclarecer o modo como o aluno do Cálculo Diferencial e Integral deve estar agindo em cima de seu raciocínio e de que maneira as observações sobre o conhecimento entre o uso de registros e desenvolvimento histórico são apontadas por estudantes, professores, educadores matemáticos e investigadores em educação matemática.

1.2. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE LIMITES DE FUNÇÕES

Esta seção será dedicada a apresentação dos resultados da revisão de estudos sobre o ensino de limites que realizamos.

Durante a fase ou etapa metodológica das Análises Prévias, foi possível encontrar, em bancos de dados On-line e bibliotecas, pesquisas relacionadas ao objeto de estudo, o ensino de Limites de Funções. Dentre estes selecionamos algumas que se mostraram maior relevante para este estudo.

A revisão dos estudos foi realizada por meio de um levantamento de trabalhos da seguinte natureza: dissertações, teses e artigos. Os trabalhos analisados foram distribuídos nas três categorias a seguir: **Estudos Diagnósticos, Estudos Epistemológicos** e **Estudos Metodológicos.**

A categoria dos **estudos diagnósticos** foi formada pelos estudos que realizaram diagnósticos sobre o ensino de limites.

A categoria dos **estudos Epistemológicos** foi desenvolvida nos estudo apresentados que pretenderam introduzir uma reflexão sobre as epistemologias que circulam sobre a introdução ao pensamento epistemológico sobre o estudo de limites.

A categoria dos **estudos metodológicos** foi formada pelos estudos que apresentaram resultados de pesquisa sobre alternativas metodológicas para o ensino de limites.

Os estudos Diagnósticos analisados, nesta perspectiva, buscaram identificar quais conceitos e ideias constituem a base para a aplicação e implementação de aprendizagens no Ensino de Limites de Funções, focando o trabalho com a Cálculo em turmas de Licenciatura nas áreas de graduação e Engenharia. Neste sentido, os Estudos Diagnósticos consideraram utilidade, para os alunos, dos conceitos e procedimentos que então desenvolvidos em suas áreas de atuação. Para estes autores, o trabalho com Limites de Funções, possibilitou a geração de situações de aprendizagem contextualizadas no Cálculo Diferencial e Integral.

Os estudos Epistemológicos das pesquisas analisadas, nas quais se apresentaram tanto qualitativas quanto quantitativas, fundamentam-se em pressupostos filosóficos que representam como o aluno pode apreender e o que ele irá aprender com o Estudo de Limites. Na extensão epistemológica destes estudos relacionou-se ao conhecimento de Limites e como ele pode ser obtido, se conhecimento no estudo de Limites é algo que pode ser adquirido procurando regularidades e relações causais. Além das abordagens positivistas e interpretativista, as pesquisas mostraram uma postura epistemológicas crítica.

Os estudos Metodológicos das pesquisas analisadas procuraram discutir as perspectivas e abordagens metodológicas que se encontram presente hoje nas pesquisas em Ensino de Cálculo, procurando discuti-las tomando por base reflexões teóricas sobre pesquisa na área de Educação e de Ensino de Matemática, neste sentido, a escolha destas pesquisas se deu por possibilitar uma amostragem próxima da produção científica atual da área, Cálculo Diferencial e Integral que compreende o estudo dos limites.

1.2.1. ESTUDOS DIAGNOSTICOS

Em Nascimento (2000) encontramos os resultados de um estudo que teve como objetivo identificar as correlações entre os desempenhos dos alunos e as suas causas na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, além de tentar analisar alternativas metodológicas para a melhoria dos seus aproveitamentos no ensino aprendizagem.

O estudo de Nascimento (2000) foi realizado em quatro turmas de licenciatura Matemática, que o autor considerou o ambiente ser propício para o tipo de investigação empregada, almejando uma expectativa de maior envolvimento do aluno no processo de ensino, com isso estabelecer um processo de investigação para melhor identificar as correlações entre os desempenhos dos alunos e as causas, além de tentar analisar alternativas metodológicas para a melhoria do aproveitamento na disciplina Cálculo.

Os experimentos adotados por Nascimento (2000, p. 6) consistiram numa reprogramação da disciplina, centradas na discussão da base conceitual e na aplicação de técnicas de ensino e aprendizado mais interativas e de construção coletiva. Contrapõe-se resultados de aprendizado e aprovação em relação aos métodos propostos.

Após, cinco períodos de experimentações adotados por Nascimento (2000), nos resultados obtidos, indicou-se que a questão metodológica, nesta reprogramação da disciplina Cálculo I, e a abordagem dos “Pré-conceitos do Cálculo Diferencial” se caracterizam como fatores importantes em todo o processo de ensino-aprendizagem.

Isto permitiu delimitar os principais pontos para propor uma metodológica que foi apresentada, partindo dos seguintes aspectos: forma de abordagem para os conceitos de cálculo composta de: motivação, baseada na utilidade dos conteúdos, desenvolvimento expositivo e interativo, tentando-se forçar uma maior participação, e consolidação dos conceitos e operacionalização.

Os métodos adotados, neste experimento, tinham como meta ensinar os conceitos de cálculo, juntos com os conteúdos básicos e com os pré-conceitos envolvidos, deixando para abordar os pontos de maior complexidade algébrica em um segundo momento. Dessa forma, o programa da disciplina deve ser flexível e dinâmico, procurando facilitar o aprendizado dos conceitos mais importantes e aprofundando-os à medida que os alunos vão correspondendo.

Do segundo diagnóstico adotado por Nascimento (2000), foram mudar os livros de referência para o ensino de Cálculo I, e introduzidas novas atividades cujo objetivo fora diagnosticar a retro aprendizagem. A forma geral de abordagem foi mantida, procurando-se melhorar os tópicos que, nas atividades anteriores, mostraram-se de maior dificuldade para o aprendizado. A necessidade do desenvolvimento dos pré-conceitos, juntamente com os pré-requisitos, foi se tornando mais clara, levando à incorporação dos mesmos no programa a partir do terceiro experimento.

A questão da predisposição para o aprendizado da disciplina Cálculo I , segundo Nascimento (2000) só ficou evidente após uso do último experimento, onde ocorreram diversas manifestações explícitas neste recurso didático aplicado. A metodologia de trabalho se mostrou surpreendente desde o início. Enquanto alguns alunos se revelaram bons matemáticos, outros mostraram que, com alguma ajuda, poderiam obter bons desempenhos. Assim, os resultados obtidos por Nascimento (2000), mostraram que a avaliação dos resultados da pesquisa feita pelos índices de aprovação talvez não seja a mais importante.

Segundo Nascimento (2000), a falta de trabalhos específicos com os conteúdos básicos e com os pré-conceitos, além da pouca relação dos trabalhos com o cálculo da média final podem não ter estimulado os alunos para a realização dos mesmos, reduzindo o aprendizado e dificultando a sua avaliação. Para os cursos em que foram aplicados os experimentos, ficou evidente que é possível melhorar os resultados na disciplina de Cálculo I, através da adoção de metodologia apropriada, que considere a heterogeneidade dos alunos, a falta de base de parte deles e as dificuldades próprias da disciplina.

Outra pesquisa é a de Amorim (2011) que discute o ensino de Cálculo e de Análise na perspectiva da Educação Matemática Superior e, cujo objetivo foi investigar o papel das imagens conceituais e definições conceituais para a aprendizagem de Limites de Funções Reais de uma Variável.

A pesquisa de Amorim (2011) justifica-se na existência de diversos trabalhos que evidenciam obstáculos epistemológicos em relação ao conceito de limite e ainda, a necessidade de se realizarem pesquisas que discutam a transição do Cálculo para a Análise. A questão de investigação da pesquisa fora: Como uma proposta de ensino, baseada nas imagens conceituais, relacionadas ao conceito de limite de uma função, (re)construídas por alunos do curso de Licenciatura em Matemática, após cursarem Análise Real, pode contribuir para a aprendizagem desses alunos?

O referencial teórico em Amorim (2011) foi baseado nos trabalhos de David Tall, Shlomo Vinner, Bernard Cornu, Márcia Pinto e Frederico Reis. As atividades desta pesquisa foram realizadas com, 9 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFOP, dentro da disciplina Análise Real. A pesquisa teórico-bibliográfica contemplou o ensino de Cálculo e de Análise e o Pensamento Matemático Avançado. Amorim (2011) apresentou a abordagem do conceito de limites em livros didáticos de Cálculo e Análise utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática de universidades mineiras e ainda elaboraram um conjunto de atividades didáticas realizadas com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, em uma disciplina de Fundamentos de Análise Real.

Os resultados em Amorim (2011) mostraram que o trabalho com as imagens conceituais dos alunos permite a nós, professores, entender e situar o momento em que os alunos se deparam com o ensino de limites agora em Análise e avaliar a bagagem trazida do Cálculo. Os dados evidenciaram que os alunos perpassam todo o curso de Matemática, manifestando dificuldades com as demonstrações e que resultam em Análise Matemática, ainda com dificuldades na leitura e interpretação da simbologia matemática.

Amorim (2011, p 127) o resultado da pesquisa mostrou que, a partir do trabalho com as imagens conceituais dos alunos, podemos perceber a importância de identificar eventuais imagens conceituais equivocadas que os alunos trazem, as quais podem gerar situações de conflitos, face uma nova possibilidade de aprendizagem. Os dados evidenciaram a necessidade de se ressignificar tais imagens relacionadas aos conceitos de limites, limites laterais, limites infinitos e no infinito.

Amorim (2011) em sua pesquisa aponta para uma proposta de ensino, baseada nas imagens conceituais dos alunos, que pode contribuir para que o Professor de Análise entenda e situe o momento e a aprendizagem de seus alunos; perceba a importância de identificar e desconstruir imagens conceituais equivocadas e/ou conflitantes; reconheça a necessidade de (re) construir imagens conceituais coerentes e que explorem elementos intuitivos.

A seguir apresentaremos os estudos realizados com o Limite aplicados a experimentos em informática.

1.2.2. USO DE INFORMÁTICA

O Uso de Informática está disposto nos estudos que usam o conceito de limite em aplicações na informática. Atrelando conceitos do Cálculo Diferencial nas ciências computacionais.

Barbosa e Malheiros (2012, p. 16) afirmam que as pesquisas em Educação Matemática que são direcionadas para o Ensino Superior, e em particular o ensino e aprendizagem de Limites por meio de TIC podem possibilitar a compreensão da noção intuitiva em ambientes virtuais, o que incluem softwares, jogos eletrônicos, páginas WWW, e-mails, salas de bate papo e comunicadores instantâneos, calculadoras gráficas, entre outros.

Estes também consideram como TIC a oralidade, o lápis, o papel, e todas as demais tecnologias que transformem a comunicação humana. Sendo que estas TIC's estão cada vez mais impregnadas na ação e reflexão humana, e cuja aplicação na educação é utilizada no processo de ensino e aprendizagem.

Esta pesquisa foi realizada com alunos da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), onde inicialmente analisaram-se algumas particularidades do currículo desta IFES, visto que a maior parte dos cursos oferecidos é de Engenharia, e que as teorias dos Limites são vista no primeiro semestre. No curso de matemática a disciplina cálculo é visto no segundo semestre. Com isto, a pesquisa foi realizada com alunos que tenham estudado limites anteriormente e com alunos repetentes da disciplina cálculo.

Seguindo uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi concebida como uma trajetória em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e exclusivamente com os princípios, leis e generalizações, mas focando nos elementos que se constituem significativos, a saber, as TIC's.

Deste modo, os pesquisadores buscaram entender as relações que acontecem com os "objetos" de estudo baseados numa perspectiva teórica que sustenta a forma que veem o mundo e buscar maneiras de caracterizar este objeto e adjetivar tais características.

Assim, os procedimentos de coleta dos dados, apropriados para o destaque das qualidades do objeto a fim de validade e consolidar a pesquisa foi o questionário, a fim de se obter informações durante a pesquisa, garantindo o anonimato dos sujeitos, para se medir atitudes, opiniões, comportamentos, circunstâncias da vida destes, onde se incluíram questões abertas, fechadas, de múltipla escolha, de resposta numérica ou do tipo sim e não.

Para se obtiver informações qualitativas os pesquisadores, também optaram por entrevistas dos sujeitos, para se verificar informações que não for identificada pela aplicação do questionário. Além disto, optaram pela Observação como método de coletas para se tiver informações sobre resultados, processos e conflitos.

A construção da coleta dos dados pela observação indireta por meio do Demo do software *Camtasia Studio*, desenvolvido pela *TechSmith* que permitirá ao pesquisadores analisar textos e falas dos sujeitos, com intuito de compreender como estes entendem o conceito formal de Limite e como passam a entendê-lo. O presente artigo informa que a pesquisa se encontrava em aberto, e para sua execução foram elaboradas atividades que acompanharão os grupos e a pesquisa, bem como a aplicação de atividades: questionários, entrevista e observações.

Em Junior (2006) a partir da integração oralidade-escrita-CAS/MAPLE, traz como objetivo investigar as compreensões emergentes sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, produzida por alunos ingressantes em um curso de Matemática oferecido por uma universidade pública do estado de São Paulo.

Em Junior (2006) o desenho metodológico da investigação, foi planejado de modo a gerar dados que integrassem elementos de escrita, informática e oralidade no propósito de contribuir para a construção de um *corpus* com maior nitidez e densidade de dados para a análise. Neste processo, à escrita coube um papel especial e que já lhe era assegurado desde a concepção do projeto de pesquisa: induzir as primeiras reflexões e representar as compreensões iniciais do(a)s estudantes sobre cada um dos conceitos em pauta, desencadeando-se, assim, o referido processo.

Para a implementação e desenvolvimento da pesquisa, Junior (2006, p. 68) selecionou quatro voluntários e quatro voluntárias, totalizando oito participantes, alunos e alunas regulares da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ingressantes no curso de Matemática da universidade pública do Estado de São Paulo, oferecido em período integral.

Os procedimentos conduzidos em Junior (2006) se deu segundo o conceito de *Experimento de Ensino* (STEFFE, THOMPSON, 2000), metodologia especialmente desenhada e dirigida para a investigação do raciocínio e das compreensões matemáticas produzidas por estudantes.

Em Junior (2006) os experimentos com cada dupla deveriam ser gravados em vídeo para que a interação estudantes-computador e a exploração do Sistema de Computação Algébrica pudessem ser analisadas. Implicava num planejamento prévio, tanto na definição do local das gravações como do *layout* do ambiente dos experimentos.

À medida que os conteúdos relacionados a cada conceito de Cálculo Diferencial e Integral em pauta na pesquisa eram concluídos no desenvolvimento regular da disciplina, os participantes eram convidados à, primeiramente, responderem individualmente ao questionário proposto e, posteriormente, a participarem, em dupla e horários específicos para cada uma, do experimento.

Em Junior (2006) o primeiro experimento tematizou a noção de *derivabilidade*, no segundo episódio sugeriram focalizar o conceito de limite, o terceiro experimento levou em conta a definição de derivada e, finalmente o quarto experimento ofereceu um conjunto de compreensões que puderam simultaneamente ilustrar a potência das interferências induzidas pelo Informática – CAS.

Em Junior (2006) As análises dos experimentos realizados sugerem que uma das maiores fontes de atrito nesta transição materializa-se no conceito de função. Uma visão predominante estática, povoada por exemplares de funções bem comportadas, mais ou menos familiares, parece embaraçar a necessária articulação e os movimentos que caracterizam a essência dos conceitos do Cálculo Diferencial: a dinâmica. É praticamente impossível exercitar a dinâmica do Cálculo no Ensino Superior, sem que seus conceitos-base _ função e limite _ sejam, também, “dinamizados”, exercitados e explorados em suas possibilidades.

1.2.3. ESTUDOS EPISTEMOLÓGICOS

Obstáculo Epistemológico está disposto nos estudos que usam o conceito de limite, e maneira como forma o pensamento matemático, limítrofe da estrutura do saber que lhe é trocado no processo da aprendizagem.

Cabral e Baldino (2008, p. 6), elaboram uma análise crítica do ensino de cálculo ministrado nos cursos de engenharia da UERGS, onde procuram mostrar que os infinitésimos comparecem nas concepções espontâneas dos alunos e que o ensino pela via exclusiva dos limites cria dificuldades e exclusões. Desse modo, no ensino de cálculo existe uma tentativa de imposição prematura ao aluno de ideias que constituem o coroamento da própria matéria que se quer ensinar. E para estes pressupostos, argumentam em que as propostas didáticas são baseadas no conceito de *diferencial* de Leibniz e como consequência, sobra pouco tempo para direcionar a matemática a aplicações que façam sentido ao engenheiro.

Segundo os autores, a problemática, dessa dificuldade e exclusões se dá em decorrência do desenvolvimento histórico-epistemológico, relacionadas ao ensino de matemática são muitas, que é a razão de fracassos alarmantes, o tema “ensino de matemática para engenharia” tem sido reconhecido nas comunidades científicas brasileiras. Os últimos COBENGE e CNMAC mostram trabalhos onde se busca compreender o que acontece no processo de aprendizagem de matemática.

Sob a ótica da *teoria da análise de erros* (CURY, 2004, 2003) e da *teoria das concepções (*ZUCHI; GONÇALVES, 2003).É estudada a *teoria da aprendizagem significativa* no âmbito da psicologia, a qual permite reorganizar relações entre professor e aluno (CAMARGO Jr; CUGNASCA; ALMEIDA Jr., 2003, p. 126), a partir daí se proporem novos paradigmas de tratamento, estratégias, metodologias e técnicas de trabalho.

Estes, também analisam a prática docente considerando ser responsável pela integração dos conteúdos específicos com os conteúdos para a formação profissional (MENESTRINA; GOUDARD, 2003). Sobre os motivos para haver altos índices de reprovação e desistência, especialmente nas disciplinas de cálculo, são apontadas causas como "as dificuldades intrínsecas da disciplina, a falta de base dos alunos e um grande distanciamento metodológico entre o 2º grau e o curso superior" (NASCIMENTO, 2001).

Apontam que para resolver o problema de aprendizagem têm sido fomentadas propostas como: dar preponderância à questão metodológica na consolidação da base conceitual dos alunos segundo Nascimento (2001), fazer uso de projetos temáticos, conforme (PEREIRA; CARVALHO, 2003), estabelecer cursos de nivelamento e apoio para alunos ingressantes (FRANCHI, 2003; DZIEDZIC et al., 2001), fazer uso da resolução de problemas como metodologia de ensino (CONCEIÇÃO; GONÇALVES, 2003) mudar a concepção epistemológica do professor sobre as disciplinas.

A análise, neste artigo traz propostas nos efeitos da reorganização da estrutura acadêmica; e dizem respeito às modificações no modo de o professor apresentar os objetos matemáticos. Essas modificações estão relacionadas muitas vezes com o uso de instrumentos mais atrativos, que, presume-se, possam motivar o aluno a aprender. Trazem para o debate os seguintes pontos: (1) o fato de as diretrizes que norteiam a prática científica matemática estarem refletidas na diretriz didática escolhida pelo profissional professor e; (2) os efeitos da organização da instituição em estrutura de departamentos.

No primeiro ponto, os autores apontam que os atuais livros de cálculo usados como textos, são frutos da necessidade de certeza que permeia a matemática, e não abrem mão da tentativa de tornar acessível aos iniciantes o rigor dominante da matemática do século 20, e para justificar os conteúdos, tal como são ministrados, chega-se a dar a definição rigorosa de limite para jamais usá-la.

Em suma, os textos de cálculo são organizados segundo os cânones do conhecimento matemático: quando as garantias da certeza do instrumento a ser usado não são providas por meio de demonstrações, o leitor é remetido a outras fontes de certeza. E por mais que o professor que ministram cálculo se esforce para ignorar as justificativas fundadas nos infinitesimais, elas terminam sobrevivendo.

E para isto, os autores afirmam que as pesquisas em educação matemática e educação matemática em engenharia têm mostrado que é preciso que professor e aluno admitam que a própria instituição de ensino devesse assumir outras posturas, em relação à postura pedagógica aplicada no curso. E corroboram a afirmação: “Ao tentar modificar a atual postura positivista e retransmissora (do professor) estaremos abrindo um novo caminho na formação de um engenheiro crítico e reflexivo perante novas tecnologias e suas implicações junto à sociedade”, Kuehn e Bazzo (2004).

Para o segundo ponto, se reportam as discussões da ação pedagógica, a legitimidade e a ação didática. No primeiro aponta que as ações pedagógicas do ‘ensino tradicional vigente’ (ETV) estão fundadas em ideias cujo traço de identificação simbólica é o mesmo: “o bom aluno”, e como fato, na sala de aula, o professor mostra-se surdo no que diz respeito ao aluno tido como “não bom”, e este, por seu lado, admite esse tipo de identificação tornando-se passivo, esperando que o professor formule o problema e também forneça o modelo de resposta a ser repetido.

E nesta perspectiva os autores afirmam que, nos cursos de engenharia ocorre algo um pouco diferente. O efeito causado pelo ensurdecimento do professor aos infinitésimos é o desprezo pelo cálculo que os alunos terminam expressando: “o cálculo não serve para nada, meu pai é engenheiro e ele nunca mais usou” (grifo dos autores, 2006).

Na questão da legitimidade pedagógica, para o tratamento dos infinitesimais, os autores sugerem que deve ser tratada para tocar o ponto crucial, pois consideram ser uma base para a prática didática em cursos de cálculo diferentemente da base de análise real que fundamenta a matemática do ETV, mas os infinitésimos perderam legitimidade no ensino na matemática, mas os infinitesimais permaneceram em disciplinas na engenharia e na física, especialmente em áreas como mecânica e eletricidade, onde sempre foram largamente usados.

Ambos os autores, reconhecem que a legitimidade dos infinitésimos como objeto de ensino em cursos de cálculo por instituições universitárias ainda está por ser feito. Entretanto, pela aceitação dos alunos, pela presença dos raciocínios infinitesimais nas disciplinas profissionais e pela legitimidade matemática, conforme assegurada por Robinson (1966), supõe que esse objeto não será declarado ilegítimo como objeto de ensino e que não seremos proibidos de continuar nossas experiências didáticas com os infinitésimos.

Na terceira questão pedagógica, os autores apontam que quando fizeram as primeiras tentativas de introduzir os infinitesimais para alunos de Física e de Engenharia Mecânica para os quais ministraram Cálculo Diferencial e Integral I quando ainda lecionavam na UNESP, puseram os alunos em situações de escolha para que eles pudessem ter suas justificativas legitimadas, sem prejuízo da abordagem tradicional do tópico limites, por limites e por infinitésimos, deixando à escolha dos alunos qual delas devolveria nas provas escritas. E concluíram que a maioria dos que preferiu os infinitésimos, os que tinham mais facilidade no curso todo, diferentemente dos que escolhiam limites, onde tiveram um índice de acerto bem inferiores.

Os autores encerram esta visão pedagógica, afirmando que, não se devia considerar que os raciocínios pela via dos infinitésimos devam excluir a noção de limite, mas as duas noções devem fazer parte da formação matemática do engenheiro, porque em muitos raciocínios dos livros das disciplinas profissionais, especialmente quando se trata de variáveis que tendem ao infinito, a via dos limites é mais compreensível, mas jamais os infinitésimos deveriam ter sido excluídos do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, como é o caso do ETV.

Os autores encerram este artigo, considerando propostas para o curso de engenharia em sistemas digitais, sendo o objetivo destas, construir e oferecer um leque de imagens para que o aluno possa efetuar sua própria escolha, e em situações de aprendizagem como as que descreveram, os objetos infinitésimos são uma forma de pensamento infinito, pensamento dialético, e cujo desafio é superar as próprias concepções formadas nos bancos escolares tradicionais.

Reis (2001, p. 18), apresenta uma análise de manuais didáticos e de entrevistas semiestruturadas com autores de livros de cálculo e de análise. Nesta apresenta uma revisão bibliográfica dos estudos sobre a problemática apresentada, o qual relaciona com o ensino de Cálculo e da Análise assim como o desenvolvimento histórico. Na revisão bibliográfica do autor sobre o ensino de cálculo e de análise encontramos dois aspectos, amplamente analisados: 1) o Modelo dos Campos Semânticos e; 2) os trabalhos do Professor Roberto Baldino.

O autor acrescenta duas características com base no pensamento diferencial que discorrem com os seus objetivos: o pensamento intuitivo e o pensamento rigoroso. Em relação às ideias do pensamento matemático avançado, o autor afirma que a maior relação que encontrou entre os trabalhos e a sua tese se deu na passagem do pensamento matemático elementar para o avançado não sendo necessariamente acompanhada de uma transição do pensamento intuitivo para o rigoroso. Pesquisadores dessa linha defendem, por exemplo, que atividades intuitivas devam preceder outras com definições e provas rigorosas.

Segundo o autor, nos trabalhos do Prof. Baldino nota-se uma posição contraria em se manter o limite como conceito central do ensino do cálculo e da análise e apontam os infinitésimos como uma alternativa mais lógica, e também discute os erros mais comuns apresentados pelos alunos no cálculo de integrais indefinidas; onde aponta que o resultado na maioria deles é cometido em função de dificuldades de manipulação algébrica elementar. Em Reis, a grande contribuição dos trabalhos de Baldino para a sua tese reside na crítica feita ao excesso de rigor com que são tratados conceitos de limite, continuidade, derivada e integral; à parca exploração da aplicabilidade.

Em sua tese Reis tratar da questão dos infinitésimos ao fazer um breve relato histórico dos fundamentos do Cálculo e do movimento de aritmetização da Análise, além das consequências para o ensino dessas disciplinas. E a importância dos limites e da influência da aritmetização da análise, a ordem com que os conceitos de integral, derivada, limites, números reais se desenvolveram na sua fundamentação, é invertida no ensino, além disso, a partir do movimento de aritmetização da Análise, tudo que pudesse ser provado, deveria ser provado. Assim, o autor acredita que tais ideias sintetizam muito bem como essas transformações repercutiram nas questões relativas ao rigor e intuição, especialmente no ensino.

Em sua tese Reis procura esclarecer duas questões, a saber: o que há de intuitivo no ensino de cálculo? E, o que há de rigoroso no ensino de análise? Na primeira aponta que a intuição é sempre presente no processo de produção do conhecimento matemático e que, numa fase consecutiva, é aperfeiçoado e mais rigoroso, assim sendo, deve estar presente no ensino tanto do cálculo como da análise, sempre que for preciso.

E para a segunda problemática, o autor, aponta que na maioria dos cursos, os professores que ministram as chamadas disciplinas específicas têm sua formação acadêmica em matemática, e o exercício do magistério requer um aprendizado específico da profissão que esses professores não têm. Então questiona se muitos dos problemas da educação universitária brasileira não teriam relação com essa falta de saber pedagógico por parte de seus docentes.

Nesta tese, o autor analisa alguns dos livros comumente adotados como bibliografia, para o ensino de Cálculo, e esta é arrolada nos conceitos de limite e continuidade. A propósito do livro de Leithold, escreve que os conceitos de limite e continuidade são primeiramente tratados de modo intuitivo e depois definidos em termos dos argumentos ε e δ, o qual é utilizado na demonstração de teoremas. Este enfatiza uma critica ao excesso de demonstrações deixadas como exercício e assim, o livro de Leithold mostra uma preocupação com o conhecimento mecanizado e que vem numa dissimulação de conhecimento conceitual.

Em relação ao livro de Swokowski, o autor aponta que este também aborda primeiramente o conceito de limites e continuidade sob uma visão intuitiva, porém, adverso do livro de Leithold, traz uma gama de exercícios mais coerente. Porém, discute duas situações nesta obra: se as preferências dos alunos por esse livro não seria decorrente da impressão que eles têm de terem aprendido o conteúdo ao conseguirem resolver os exercícios; e se essa visão não é também a dos professores e autores de livros, que acabam por valorizar o cálculo perante o conceitual.

No livro de Fleming e Gonçalves, o autor destaca a linguagem clara e inteligível, não diferente dos demais, empreende os conceitos de limites e continuidade inicialmente sob um ponto de vista intuitivo. Entretanto aponta que as autoras dão um tratamento amplo e completo a esses conceitos, com uma abordagem não muito rigorosa, nas preposições e propriedades iniciais. E como consequência, aponta que, os alunos passam a considerar o assunto “dificílimo para ser entendido” e empacam nos cálculos de limites.

O destaque dado por Reis ao livro de Edwards e Penney, que o diferencia dos demais, é o fato da obra apresentar a derivada antes do conceito de limite por meio de problemas de tangentes. Reis considera o livro inovador não só por isso, mas também por conta dos projetos complementares que apresenta, e da sua abordagem exploratória e problematizadora dos conteúdos apresentados, onde muitas vezes sugere o uso de novas tecnologias.

Nos livros de cálculo de Ávila possuem particularidades. O seu Cálculo I, ao contrário do demais já citados pelo autor, não define o conceito de limites através do par ε e δ a ideia aparece através de problemas com reta tangente e a exposição é concisa. Reis considera este tratamento comparativamente mais adequado. No livro, Introdução ao Cálculo tem-se uma versão simplificada do Cálculo I e assim como Edwards e Penney, apresenta uma exposição inicial de derivada antes de introduzir o conceito de limites e continuidade este é destinado a alunos que ingressam no ensino superior com deficiências em matemática. Finalmente, no livro Introdução às Funções e às Derivadas é um dos raros livros que se dedicam ao ensino de derivada para o ensino médio.

O livro de análise de Geraldo Ávila, apresenta limites e continuidade na sequência habitual, com a utilização de noções topológicas. Aqui, Reis destaca as notas complementares ao fim de cada capítulo. Apesar de ver isso como um avanço, reitera que essa posição de colocar os aspectos mais procedimentais (parte inicial) separados dos histórico-conceituais, em forma de notas, retrata certa concepção dicotômica. Já no livro de Análise de Rudin primeiro define limites e continuidade em termos de espaços métricos para depois reformulá-la em termos de sucessões, este livro é escasso em figuras e gráficos, não apresenta notas históricas e mostra uma preocupação em apresentar uma análise “aritmetizada”, e ainda, a apresentação dos conteúdos, de modo geral, é formal e rigorosa.

Da mesma maneira como em Rudin, o livro de Figueiredo possui escassez de gráficos ou figuras, entretanto, como no livro de Ávila, existe muitas notas históricas, dispostas ao longo do texto. Limites e continuidade são apresentados a partir de limites laterais que utilizam conceitos de convergência de sucessões numéricas.

Figueiredo justifica suas escolhas, o que mostra uma preocupação com a formação de um aluno reflexivo.

Em sua ultima apreciação de livros de cálculo, no livro de Caraça, Reis destaca, que este não é um livro didático de análise, entretanto, possui alguns elementos interessantes, tal como a abordagem do conceito de limites ligada à ideia dos infinitésimos, a preocupação em apresentar os contextos sócios históricos onde se têm: os conceitos e a exploração da dimensão geométrica intuitiva. Neste, a abordagem privilegia o conceitual ante o procedimental.

Em seu trabalho Reis traz as entrevistas com Roberto Baldino, Geraldo Ávila, Djairo de Figueiredo e Elon Lima foram agrupados em duas categorias: os saberes do professor de cálculo e de análise, subdivididos em específico, pedagógico e curricular; e a relação entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e de análise. Reis destaca dois tipos de saber específico que emergiram da fala dos professores entrevistados: o histórico (refere-se a acontecimentos históricos julgados pelos entrevistados como fundamentais em si e pelas suas relações com o ensino e currículo) e o epistemológico (relativo à natureza do pensamento diferencial e analítico). Baldino acredita que o saber histórico pode ser utilizado como uma espécie de advertência, visto que ao se conhecer a evolução de um dado conteúdo, podem-se evitar muitos problemas relacionados ao seu ensino.

Relativo ao saber epistemológico, Reis relata a dificuldade existente em se discutir e caracterizar o pensamento diferencial e analítico: o domínio conceitual dessas duas formas é pouco conhecido ou explorado. O pensamento diferencial é distinguido do algébrico por introduzir a questão da decomposição de grandezas. O pensamento analítico se resume em "se supor uma coisa, tomar aquilo como hipótese e fazer a análise daquilo".

Um fato que Reis assina sobre saberes epistemológico é a necessidade de não se corresponder o diferencial com a intuição e o analítico com o rigor. Deste modo, Baldino e Ávila (1998) afirmam que o pensamento analítico está presente na Matemática muito antes do Cálculo ter se tornado rigoroso, com isto, o rigor foi necessário para o seu desenvolvimento, mas a identificação desses dois não é completa.

O saber curricular é o saber científico transposto didaticamente. Dois saberes curriculares referentes ao ensino de cálculo e de análise emergiram das entrevistas:

um relativo aos programas e o outro aos materiais didáticos. Baldino destaca o conflito existente entre os currículos de cálculo e de análise, nítida nos cursos onde a abordagem formalista é preponderante, isto estaria ligada à maior valorização da dimensão procedimental; vista como a única capaz de garantir a validade das proposições nestes itens.

No que concerne ao conhecimento pedagógico, que é o que “diz respeito às diferentes formas de representar e explorar os conteúdos de modo a torná-los compreensíveis e significativos para os alunos”, o tema que se destacou nas entrevistas foi à abordagem didático-pedagógica dada às aplicações da matemática. Baldino, Djairo e Ávila destacaram o papel motivador das aplicações no cálculo, campo fértil para trabalhar com esses aspectos.

Reis procura levantar ainda uma visão geral sobre o ensino de cálculo e de análise de cada depoente. Para Baldino existe uma grande diferença entre o que se ensina e o que o aluno aprende: o real compromisso da universidade é com seu próprio funcionamento. Para Ávila, o professor de cálculo deve se comportar como um colega mais velho, entretanto, na prática a relação professor-aluno é completamente diferente e não deixa espaço para uma tentativa de crescimento conjunto. Elon e Djairo se assemelham por apresentarem uma preocupação ética na prática pedagógica.

Para Djairo, no cálculo e na análise, muitas vezes é necessário que se “despreze algumas etapas” para que se cheguem rapidamente nos tópicos considerados essenciais, mas, para isso, é necessária uma atitude honesta perante o aluno. Para Elon, o professor deve em ter uma atitude equilibrada de modo que em algum momento preferir por não dizer toda verdade, mas, nunca chegar a mentir.

A importância da disciplina de análise na formação do professor também é focada por Reis. A partir das entrevistas o autor observou que, essa disciplina é vista como fundamental para a formação de professores, porém, ainda, não há concordância com relação à maneira como deveria ser ensinada nos cursos de graduação de modo a contribuir para essa formação. Para o autor, um curso de análise deveria ser desenvolvido de acordo com as condições intelectuais dos alunos e de seus conhecimentos prévios e ressalta que a abordagem excessivamente rigorosa dessa disciplina deve ser superada.

Nas considerações finais, Reis retoma a questões já discutidas ao longo de sua pesquisa e levanta novas posições, a saber: 1) o rigor acadêmico dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalho não deve ser diretamente transposto para o ensino, deve-se dar ao rigor um tratamento compatível com o contexto de ensino; 2) intuição e rigor são dimensões interdependentes, um não existe sem o outro, assim sendo, não há ensino de cálculo sem rigor e nem de análise sem intuição; 3) o curso de análise desempenha o papel de desencadeador da autonomia intelectual do futuro professor devem ser desenvolvidos de acordo com as condições intelectuais dos alunos, seus conhecimentos prévios e suas imagens conceituais relacionadas ao conteúdo.

A pesquisa Vieira (2013) traz às ideias de Efraim Fischbein (1994) que este faz sobre a interação entre as componentes formal, algorítmica e intuitiva no desenvolvimento do pensamento matemático; sobretudo, é de especial importância um dos efeitos da interação entre as componentes intuitivas e formais, quando um sujeito está em atividade matemática, que pode provocar o surgimento do que chama de obstáculos epistemológicos.. A partir da discussão que Fischbein faz sobre a interação entreas componentes formal, algorítmica e intuitiva no desenvolvimento do pensamento matemático; os efeitos da interação entre as componentes intuitivas e formais, quando um docente em atividade matemática, podem provocar o surgimento do que Fischbein chama de obstáculos epistemológicos.

Desta forma, o autor coloca como objetivo deste trabalho investigar de que os professores com livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral constroem os conceitos de limite e convergência de sequências e séries, às ideias de Efraim Fischbein as interações entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas destacadas na maneira que se dá discussão e a superação de obstáculos epistemológicos, referentes a estes conceitos. Ao final desta investigação, pretende o autor apresentar uma abordagem de ensino, com uma nova proposta para o tratamento dos temas estudados, baseada nos estudos que desenvolveu com professores e livros didáticos.

Partindo da premissa que o livro didático é um dos instrumentos de auxílio para professores e estudantes nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, teve justificada sua preocupação em investigar como esses livros apresentam os assuntos sequências e séries. E afirma que, a constituição das obras nem sempre privilegia construções de um entendimento pleno de conceitos e ideias. Dessa forma sua pesquisa vem considerar vários aspectos do desenvolvimento do raciocínio matemático nos livros texto mais habitualmente utilizados. Nesse sentido, no modelo de Bachelard (apud VIEIRA, 2013, p. 38, "[...] as forças psíquicas que atuam no conhecimento científico são mais confusas, mais exauridas, mais hesitantes do que se imagina quando consideradas de fora, nos livros em que aguardam pelo leitor").

De fato, vemos a relevância deste trabalho do autor, em mostrar a possibilidade de entender como se articulam, nas aulas de Cálculo e nos livros didáticos, os conceitos básicos relacionados aos aspectos formais, os algoritmos e intuições correspondentes e procura, com isto, tirar proveito dessas articulações, a fim de mostrar que no processo de ensino a superação de obstáculos epistemológicos. Esta pesquisa foi desenvolvida em três etapas, trabalhando com métodos quantitativos e qualitativos. A fim de caracterizar, classificar e selecionar as obras que serão analisadas, faremos uma pesquisa exploratória quantitativa. Esse tratamento proporcionou melhor familiaridade com as obras mais relevantes para suas tarefas

Em Vieira (2013, p. 41),as ementas das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral das principais universidades brasileiras, ementas essas que podem ser obtidas nos sítios dessas universidades na internet. Pretendemos recolher entre 50 e 100 ementas, um tamanho de amostra que consideramos adequado para nossos propósitos, visto que há no Brasil 109 universidades públicas, entre federais, estaduais e municipais (transcrição do texto do INEP: 2013).

Organizou entrevistas semiestruturadas com os professores participantes da pesquisa, na qual as questões foram previamente elaboradas dentro de uma organização lógica, levando em consideração a sequência de pensamento do entrevistado e com o cuidado para que não fujam ao tema de interesse, pois o propósito foi o de comparar as diferenças entre os respondentes (professores) dentro de um mesmo grupo de perguntas.

Considerando a interação entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas, elaboraram atividades nas quais obstáculos epistemológicos, referentes ao estudo de sequências e séries já consagradas na literatura e aqueles levantados nas análises de livros didáticos e entrevistas, as quais foram consideradas e colocadas em discussão, para que estes obstáculos pudessem ser enfrentados e superados.

Após a elaboração das atividades, pretendemos aplicá-las para alunos que já estudaram os temas de sequências e séries a fim de analisar se esses obstáculos foram superados e quais eventualmente persistem, após o estudo destes temas.

Segundo Breunig e Nehring (2014, p. 4) na Teoria da Transposição Didática, proposta por Chevallard (1991) e, em uma abordagem histórica do conceito de limite, que fundamenta os conceitos do Cálculo. Ambos questionam de que forma ocorre a transição do saber científico para o saber a ensinar, no processo de ensino dos conceitos matemáticos. Estas questões contribuem para o desenvolvimento deste artigo que tem como foco o processo de transição do saber científico ao saber a ensinar, considerando, especificamente, o conceito de limite.

Para a realização da pesquisa, se empenharam na necessidade de compreender o processo de mediação do docente de Matemática nas aulas de Cálculo I, podendo estar relacionado com o processo de transição do saber científico ao saber a ensinar. Por este motivo, inicialmente neste trabalho, propomos uma discussão e compreensão da Teoria de Transposição Didática, que trata exatamente da transição do saber científico ao saber a ensinar, conceituando cada um destes saberes e a perspectiva histórica do conceito de limite.

Ambos afirmam que entender o conceito de limite como um saber científico transformado, posteriormente, em um saber para ensinar, produzido na, e a partir da intervenção docente. As abordagens, teórica e histórica possibilitaram a análise do conceito de limite no Livro de Cálculo (ANTON, 2000), que foi parte empírica da pesquisa, onde buscaram identificar como esse saber científico é apresentado na introdução do conceito de limite, levando em conta a necessidade, ou não, deste conceito no ensino de Cálculo para cursos de Engenharia.

Breunig e Nehring (1999) afirmam que a Transposição Didática surge a partir da interação entre Pedagogia e Didática, as quais se diferenciam pelo fato da primeira ter como foco as relações em sala de aula docente-discente, e a segunda tem como foco o objeto de ensino, o saber, ou seja, a relação saber-discente. Portanto, a Transposição Didática considera a relação constante entre saber/docente, saber/discente e discente/docente. Estas articulações remetem ao triângulo didático-pedagógico, enfatizado por eles em Gauthier e Martineau (2001).

Para de fato entender o processo de produção do saber o ensinar é necessário entender mais profundamente o conceito de Transposição Didática, que inicialmente pode ser definida como a transformação de um saber a ensinar em um saber ensinado, conforme em Chevallard (1991). Este conceito surgiu a partir da necessidade de adaptar o conhecimento para posteriormente ensiná-lo.

Nesse processo de produção do saber o ensinar, os autores afirmam que, o professor precisa se sentir parte dele, mas para isso, é necessário entender o que é a Transposição Didática, ou seja, que no processo de ensino, não se pode considerar como ator principal o discente, o docente ou o saber e, além disso, entender o docente como o gestor do currículo. Todos devem ser considerados como parte do processo de ensino, numa constante interação entre eles.

A transformação dos saberes proposta na pesquisa se dá: “saber científico” e “saber a ensinar” na construção da etapa inicial de transformação dos saberes. Apontado em Menezes (2006) pelas autoras, esta transformação é realizada com a interferência da Noosfera, constituída pela comunidade que estabelece o que deve ser ensinado na instituição educativa. Comunidade esta, constituída por autodidatas, docentes, pedagogos, entidades sindicais, autores de livros didáticos, “Enfim, pessoas [...] que vão elaborar programas, diretrizes curriculares, livros didáticos, etc. (MENEZES, 2006, p.75-76).”.

A partir deste histórico do conceito de Limite, pode-se perceber que este é resultado de uma longa evolução teórica de conceitos matemáticos. Essa evolução/desenvolvimento da Matemática ocorre graças aos problemas colocados aos matemáticos, ou seja, “[...], esta fonte indispensável nunca se esgotou desde que a teoria existe, quer se trate de problemas colocados pelas aplicações das matemáticas ou de uma evolução interna (DIEUDONNÉ, 1990)”.

A partir da discussão em Anton (2000) buscam sistematizar o conceito delimite, para tanto, relaciona as linguagens e definições informais a uma linguagem matemática, ou seja, busca atribuir significado matemático mais preciso às predefinições estabelecidas anteriormente. Para formalizar o conceito, é feito um diálogo, considerando a análise gráfica e algébrica, de uma função *f* qualquer, em um ponto no qual $x \rightarrow a$ (‘x’ *tende a* ‘a’). Retoma-se a necessidade de utilizar aproximações para *x* cada vez mais próximas de *a*, este processo possibilita que *f(x)* aproxime-se cada vez mais do limite.

Fica evidente neste trabalho que a definição de limite apresentado no saber ensinar foi construída (reconstruída) em uma linguagem distante do saber científico, mas não desconsiderou as principais características do conceito. Aqui fica claro o que é a Transposição Didática, e como ocorre o processo de saber científico → saber a ensinar. Este processo se caracteriza pela transformação e organização de novos textos que contextualizam a compreensão por parte do discente para a constituição do saber aprendido, no entanto, é de extrema importância, que nesse processo de transformação dos saberes, os conceitos não percamos sentido, pois desta forma o conceito pode perder seu significado no processo de aprendizagem.

Ao analisarem o Livro Didático de Cálculo (Anton, 2000), os possibilitou perceberem a importância do conhecimento científico por parte do docente. São as características do saber científico nos demais saberes, que dão sentindo e significado à aprendizagem conceitual do discente, não somente do conceito de limite, mas dos demais conceitos matemáticos.

Breunig e Nehring (1998) concluem que é necessária a transformação entre os saberes, o científico e o ensinar, para que se produza um saber aprendido com significado. Para tanto é preciso que o docente se aproprie do saber científico e do saber ensinar estabelecendo significado ao aprendizado. A partir desta perspectiva todo conceito a ensinar terá um significado no processo de ensino.

Em Tall (2001) têm-se duas abordagens para o ensino do conceito de limites proposta nesse curso. A primeira mostrou que em determinadas sequências, o computador se mostrava lento em realizar os cálculos, concluindo que o limite é um processo que não finda. A segunda em relação ao tópico da convergência de sequências, o objetivo do curso de Cálculo era gerar intuições, por meio de uma precisão fixada, com o intuito de desenvolvê-la para a definição formal do conceito. Apesar desse tipo de abordagem, comparando os resultados de um pré-teste para um pós-testes, a maioria dos alunos da pesquisa errou às questões formuladas. Um tópico foi dedicado à discussão de que um decimal infinito pode ser visto como um limite de sequência de aproximações decimais.

Em Tall (2000), o conceito de continuidade, utilizou elementos da Análise Não-Standard a fim de fornecer uma base formal adequada às intuições reconhecidas pelos alunos. Tall (2000) propôs uma abordagem intuitiva para o conceito de continuidade, utilizando o computador, considerando “[...] um gráfico desenhado "continuamente" nesse sentido intuitivo, simplesmente esticando-o horizontalmente, mantendo a escala vertical constante, retire essa imagem do gráfico em uma janela separada”.

Com relação ao conceito de derivada, no artigo (Tall, 1981), exibi uma indicação de abordagem de ensino, em que o conceito de derivada é definido no contexto da Análise Não-Standard. Utilizando a função, nomeada como, microscópio-δ centrado em (x, $f(x)$). Com auxílio do computador, construiu imagens que desenvolvessem motivações adequadas à noção de funções diferenciáveis, ampliando seu gráfico, e quando a representação gráfica de uma função é ampliada, a aparência dessa porção do gráfico é idêntica a um segmento de reta.

Em Tall (1991, 2000), o conceito integral definida, o pesquisador defende que numa abordagem em que a integração é reconhecida como o inverso da diferenciação, isto é, antiderivada, mostra que a continuidade da função integrável é menos evidente, quando é dado ao conceito de integração um significado independente por meio da soma.

Em Tall (2000), as noções materializadas de ‘área’ e ‘área até o momento’ (tradução da expressão ‘*area-so-far’* pode sustentar a Integração de Riemann e até a de Lesbegue). Tais noções são ampliadas com um computador e *softwares* desenvolvidos apropriadamente, pois podem ser utilizados para calcular a área numérica e relacionar a noção de continuidade com a noção de integração.

Em Moraes (2013) aponta que as dificuldades em Matemática no ensino superior têm sido muito discutidas em diversos estudos em Educação Matemática, e as pesquisas apontam para o fato de que o ensino e a aprendizagem das noções envolvidas apresentam muitas questões que merecem ser aprofundadas.

Moraes (2013) tem como questão problema nesta pesquisa: quais os obstáculos epistemológicos estão presentes no processo de construção do conceito de limite de função real a valores reais? A partir do exposto, propôs a identificar os obstáculos epistemológicos segundo BACHELARD, 1996; BROUSSEAU, 1986 no processo de construção do conceito de limite de função real de uma variável real a partir de obstáculos listados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

Para alcançar esse objetivo Moraes e Mendes (2013), utilizaram a observação das aulas da disciplina Cálculo I e questionários para a coleta de dados que permitiram analisar se os obstáculos identificados pelos autores supracitados também estão presentes e de que modo aparecem no alunado atual de nossa região.

A investigação de Moraes (2013) foi focada no contexto das Licenciaturas em Matemática das IES públicas de Belém, mais especificamente, com alunos que estavam cursando a disciplina Cálculo I da Universidade Federal do Pará (UFPA), Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Instituto Federal do Pará (IFPA).

Moraes (2013) pode inferir que a explicitação dos obstáculos epistemológicos e atos de entendimento relativos à noção de limite, têm algumas implicações didático-pedagógicas importantes para a construção do conceito de limite de função de uma variável, e essas implicações, nessa pesquisa, resultados das análises das respostas dos alunos de Graduação se configuraram em sugestões para o ensino de limite de função de uma variável.

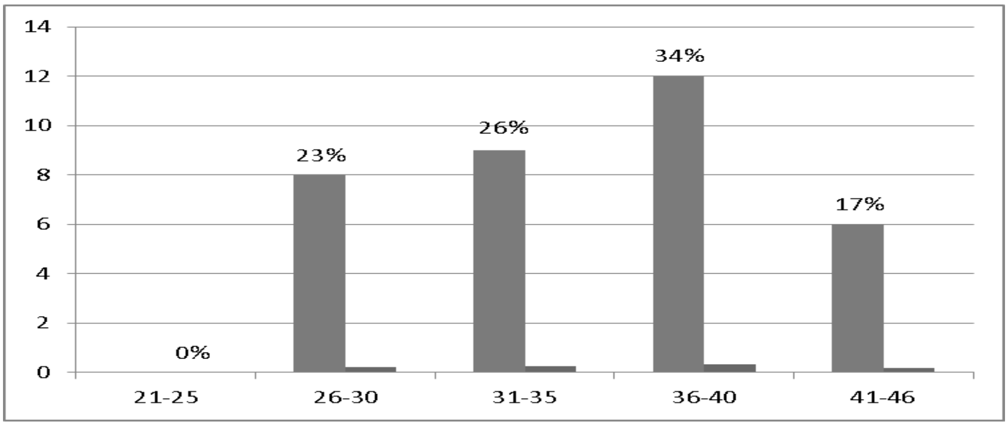
Segundo Moraes (2013) os apontamentos de Sad (1998) considera o ensino de limite a partir de "onde o aluno está", por via do diálogo dos estudantes entre os mesmos e com o professor, permitindo que as compreensões do aluno não se transformem em obstáculos para sua aprendizagem, mas sim, o propulsor para a construção de uma nova compreensão mais sólida mediada pelo professor.

1.3. O ENSINO-APRENDIZAGEM DE LIMITES DE FUNÇÕES SEGUNDO PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA UEPA

Nesta seção, objetivamos apresentar um diagnóstico a respeito da prática docente para o ensino de Limites de Funções, na qual pretendemos habituarmos em relação às dificuldades que os discentes expunham, e para isto, realizamos uma consulta aos docentes por meio de um questionário, contendo questões referentes a formação profissionais, práticas no ensino de limites de funções, além das dificuldades percebidas, nos discentes, quanto a aprendizagem do conteúdo. O instrumento de pesquisa foi aplicado a 35 professores efetivos e substitutos da Universidade do Estado do Pará, durante os meses de Abril a maio de 2015.

Em relação à faixa etária de idade dos professores, notamos que:

Gráfico 1 – Percentual dos professores em relação à faixa etária.

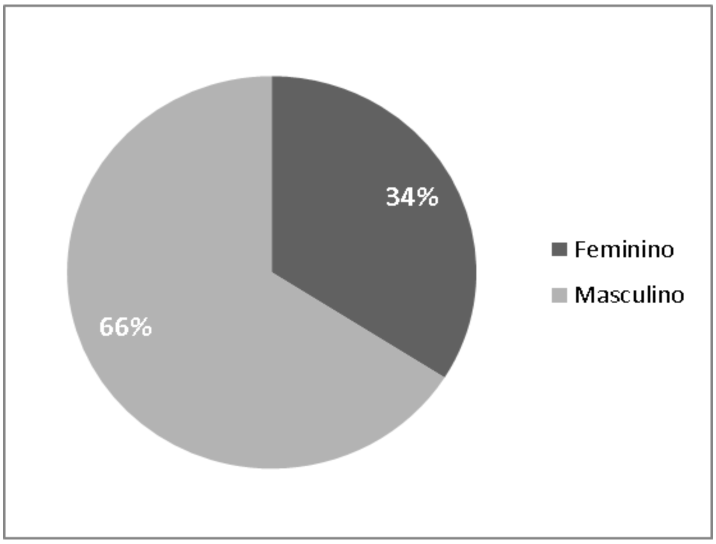


FONTE: Pesquisa de campo (Maio/2015)

Os dados observados indicaram que 34%, têm entre 36 e 40 anos, isto nos mostra que os professores atuantes na UEPA, tanto na capital quanto no interior, na maioria, nesta faixa apresentam-se numa idade adulta.

Quanto ao gênero:

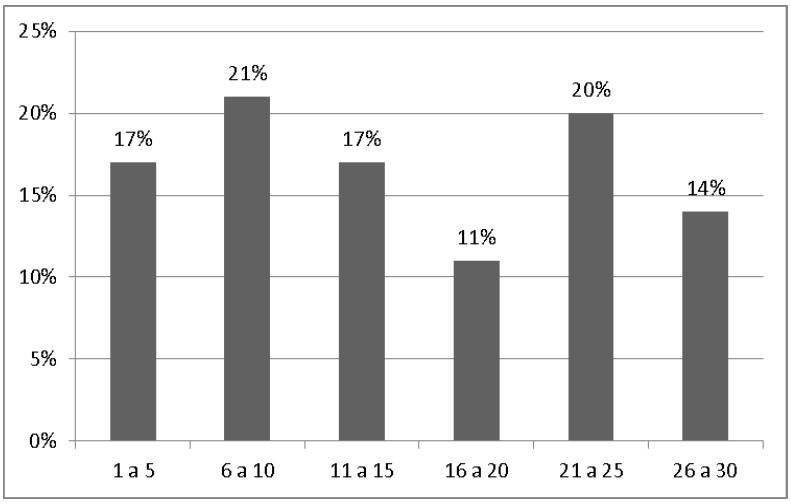
Gráfico 2 - percentual dos professores divididos em gênero.



FONTE: pesquisa de campo (Maio/2012).

Dos professores pesquisados, 34% são do sexo feminino e 66% do sexo masculino. Esses percentuais nos mostram que o número de homens atuando na UEPA, tanto na capital quanto no interior, em sua maioria é masculino.

Gráfico 3 - percentual dos professores em relação ao tempo de serviço no nível superior.

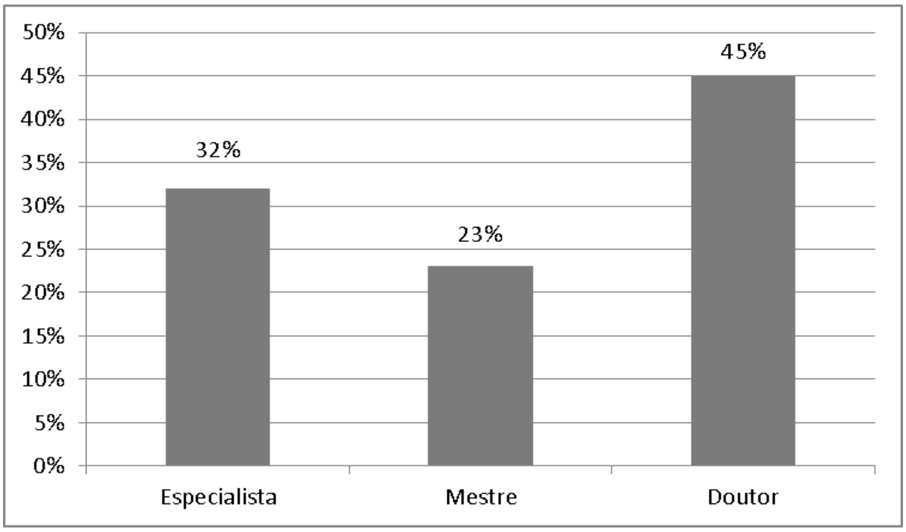


FONTE: pesquisa de campo (Maio/2015).

Sobre o tempo de serviço notamos que em docência superior, 17% entre 1 a 5 anos, 21%, têm entre 6 a 10 anos, e 17%, de 11 a 15 anos de exercício da docência, 11% tem entre 16 e 20 anos e, 20% possuem entre 21 e 25 anos, e 14% possui entre 26 e 30 anos de profissão. Disto, podemos observar que uma minoria dos entrevistados da pesquisa possui uma considerável experiência em sala de aula, na docência em ensino superior.

Com relação à formação de Nível Superior, apresentamos:

Gráfico 4 - percentual dos professores em relação a sua formação acadêmica.

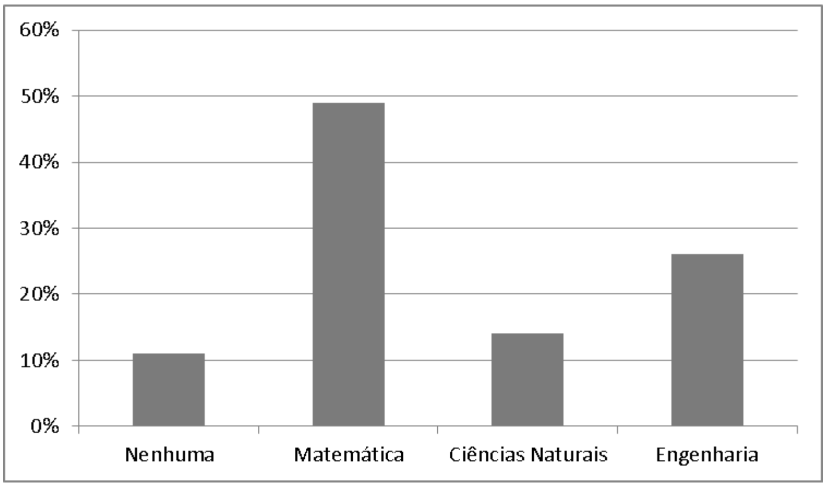


FONTE: pesquisa de campo (Maio/2015).

Portanto, os dados revelam que 32% dos professores pesquisados, na capital quanto no Interior, possuem apenas especialização, 23% com mestrado, e desses 45% são doutores.

Quanto a turmas que está lecionando atualmente.

Gráfico 5 - percentual das turmas que leciona atualmente.

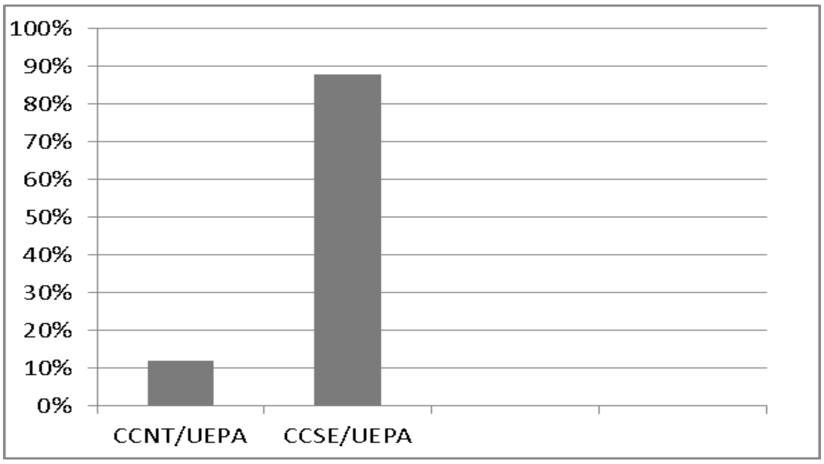


FONTE: pesquisa de campo (Maio/2015).

Os dados nos mostram que 11% dos professores não lecionam em turmas que usam o ensino de Limites, 49% lecionam em turmas de Matemática, 13% lecionam em turmas de ciências naturais e 25% lecionam em turmas de Engenharia.

Quanto o curso que o professor já lecionou Limite de Funções:

Gráfico 6 - percentual dos professores que já lecionou limites de funções.

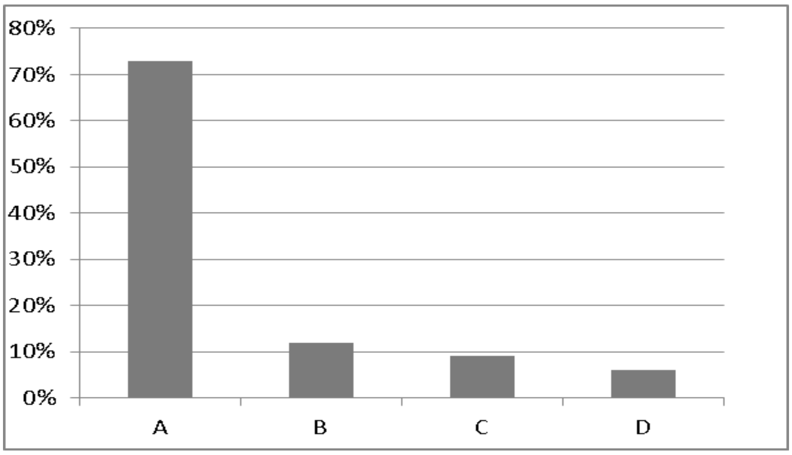


FONTE: pesquisa de campo (Maio/2015).

Os dados revelam que 88% dos professores, ou seja, em sua maioria já lecionou limites de funções no CCSE/UEPA e em média 11% desse lecionou limites de funções no CCNT/UEPA.

Quanto ao tipo de Instituição que leciona

Gráfico 7 – Tipo de instituição de ensino superior que trabalha atualmente.



A – Trabalham somente em instituição publicas estaduais; B – Trabalham em escolas públicas estaduais e federais; C – Trabalham em instituições públicas estaduais e privadas; e D – Trabalham em instituições federais e privadas;

FONTE: pesquisa de campo (Maio/2015).

Com estes dados, identificamos que 73% exercem atividade somente nas instituições públicas do campo estadual, 12%, além das estaduais, também nas federais, 9% trabalham em escolas estaduais e privadas, e 6% exercem atividade nas instituições federais e privadas.

Fora pesquisado, também, como o professor aprenderam limites de funções, e os dados incluem-se de.

Tabela 1 - Como os professores de matemática aprenderam os limites de funções.

(CONTINUA)

Alternativa escolhida	Percentual
(a) definição seguida de exemplos e exercícios;	47%
(b) situação problema para depois introduzir o assunto;	44%
(c) experimento para chegar ao conceito;	6,5%
(d) outra maneira.	2,5%

Fonte: Pesquisa de campo (Maio, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que a maioria dos professores, 47%, aprendeu o conteúdo limite de função por meio de uma definição seguida de exemplos e exercícios.

Tabela 2 - Como os professores de matemática ensinam o limite de função, a maioria das aulas começa.

Alternativa escolhida	Percentual
(a) pela definição seguida de exemplos e exercícios;	73%
(b) com uma situação problema para depois introduzir o assunto;	26%
(c) com um experimento para chegar ao conceito;	1,0%

Fonte: Pesquisa de campo (Maio, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que a maioria dos professores, 73%, ensina o conteúdo limite de função, começando pela definição seguida de exemplos e exercícios. O perfil destes professores não pode ser apresentado de maneira específica, pois na escolha da alternativa não há correlação com a sua titulação. Isso demonstra, que o ensino de limite de função que não desta maneira, é relativo a prática de sala de aula.

Pesquisamos, também de que maneira os professores perpetram a fixação do conteúdo, apresentando os dados na tabela a seguir:

Tabela 3 - Como os professores de matemática fixam o conteúdo de Limites de Funções.

(CONTINUA)

Alternativa Escolhida	Percentual
a) apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;	81%
c) solicitar que os alunos resolvam os exercícios do livro indicado para a disciplina Cálculo;	14%
d) não propõem questões de	-

fixação;	
e) solicita que os alunos procurem questões sobre o assunto para resolver em livros de Cálculos	5%

Fonte: Pesquisa de campo (Maio, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que a maioria dos professores, 81%, fixa o conteúdo limite de função, começando pela definição seguida de exemplos e exercícios. O perfil destes professores pode ser como um professor tradicionalista no seu fazer ensino. Isso demonstra, que o ensino de limite de função que não desta maneira, é relativo a forma como aprendeu na universidade.

A tabela seguinte vem mostrar, a opinião dos docentes pesquisados, quais os tópicos com maior dificuldade para os alunos aprenderem.

Tabela 4 - Tópicos com maior dificuldade para aprender Limites de Funções, segundo professores de matemática.

(CONTINUA)

Ordem	Tópicos	Porcentagem
1°	Idéia de Limite	45%
2°	Conceito de Limites	41%
3°	Cálculo de Limites	42%
4°	Unicidade de Limites	30%
5°	Limites Laterais	30%
6°	Limites de uma Sequencia	30%
7°	Limites de Função Contínua	28%
8°	Limite de Função Descontínua	28%
9°	Limites Infinitos	28%
10°	Limites no Infinito	22%
11°	Teorema da conservação do Sinal	22%
12°	Teorema do Confronto	20%
13°	Limites Trigonométricos	20%
14°	Limites Trigonométricos Fundamentais	20%
15°	Limites de Função Exponencial	17%
16°	Limites de Funções Logarítmicas	13%

17°	Limite Exponencial Fundamental	13%
18°	Formas Indeterminadas	13%
19°	Limite da Soma de Funções	10%
20°	Limite do Produto de Funções	16%
21°	Limite do Quociente de Funções	16%
22°	Limite da Raiz de Funções	21%
23°	Limite de Composição de Funções	21%
24°	Aplicações de Limites	21%

FONTE: Pesquisa de Campo (Maio, 2015).

Verificamos que a maior parte dos docentes, no processo de fixação do limite de funções, apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos. Isto se deve ao fato de que na graduação é o método de ensino é o tradicional, no qual o professor é o sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem, repassando seu conhecimento aos alunos, normalmente por meio de aula teórica. Deste modo, no conteúdo de Limites o uso do método tradicional, as aulas são centradas no professor, e que define quais serão os itens repassados aos alunos.

Com isto, os dados apresentados são correlatos, pois como percebemos, a partir do levantamento de estudos anteriores, os alunos que possuem certa dificuldade no conceito de função apresentam dificuldade no entendimento de Limite sendo que a representação gráfica é um dos problemas apresentados pelos alunos.

A seguir assinalamos as dificuldades dos alunos egressos do 1º ano da graduação em relação aos limites de funções.

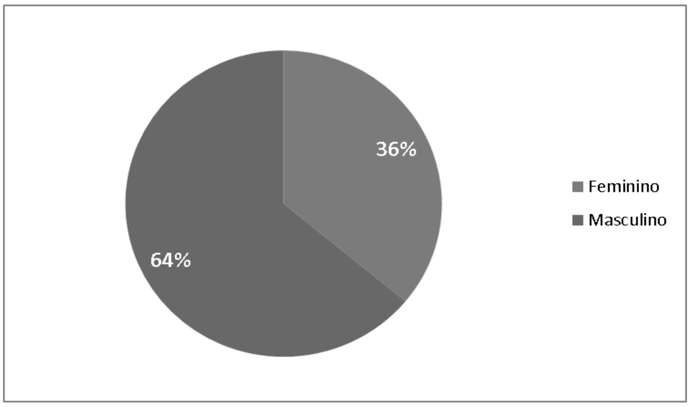
1.4. O ENSINO-APRENDIZAGEM DE LIMITES DE FUNÇÕES SEGUNDO OS ALUNOS DE GRADUAÇÃO

Com a finalidade de apresentar das dificuldades em relação ao ensino de Limites de Funções, concretizamos uma consulta aos alunos de graduação por meio de questionários, com perguntas referentes a informações socioculturais, e quatro questões envolvendo a temática de limite de função, sendo que a primeira contém quatorze itens, a segunda questão envolvendo continuidade de limite, a terceira e a quarta questão versam sobre aplicações de limites de funções em situações do cotidiano.

O instrumento da pesquisa foi aplicado a 100 alunos de Graduação em Matemática, Ciências Naturais e alunos dos cursos tecnológicos da UEPA, ou seja, que tem um conhecimento do conteúdo, objeto desta pesquisa Limite de Função.

Desse modo, com relação ao gênero dos alunos pesquisados, apresentamos:

GRÁFICO 8 - percentual dos alunos divididos em gênero.

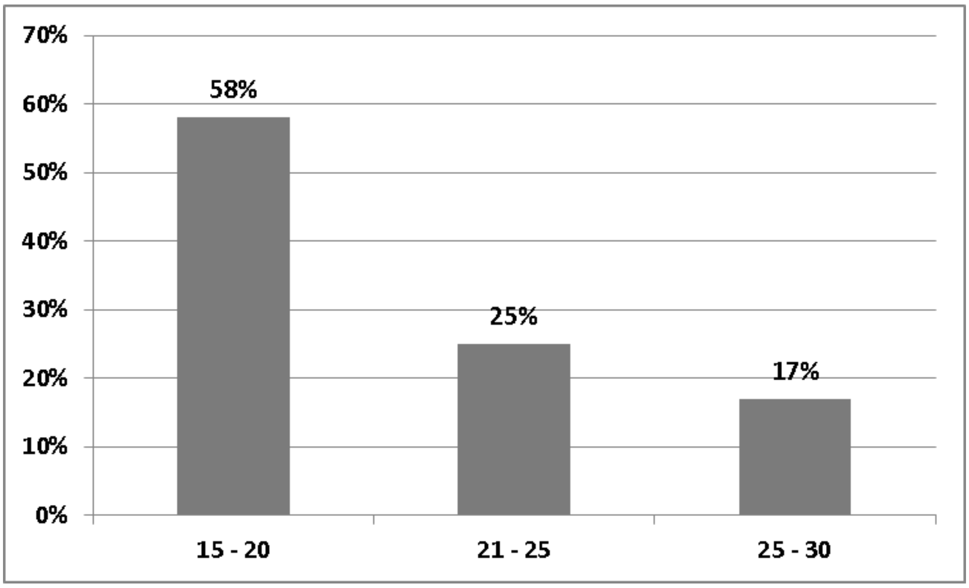


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

A maioria dos alunos, participantes desta etapa da pesquisa, era do sexo masculino, perfazendo 64% e o restante, 36% do gênero feminino. A respeito dos responsáveis, como descrito no gráfico a seguir:

Com relação à faixa etária dos alunos:

GRÁFICO 9 - percentual dos alunos divididos em faixas etárias:

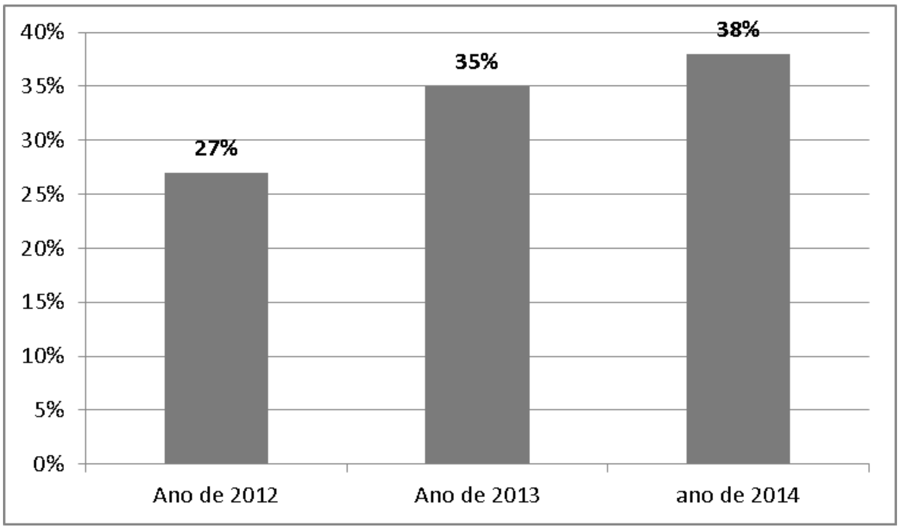


FONTE: pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Podemos notar que: 58% têm de 15 a 20 anos, 25%, de 21 a 25 anos, e somente 17% estão na faixa de 25 a 30 anos. Isto evidencia que o perfil do graduando da UEPA é em sua maioria de adolescente.

Com relação ao ano que entrou na UEPA.

GRÁFICO 10 - percentual do ano em que entrou na UEPA.

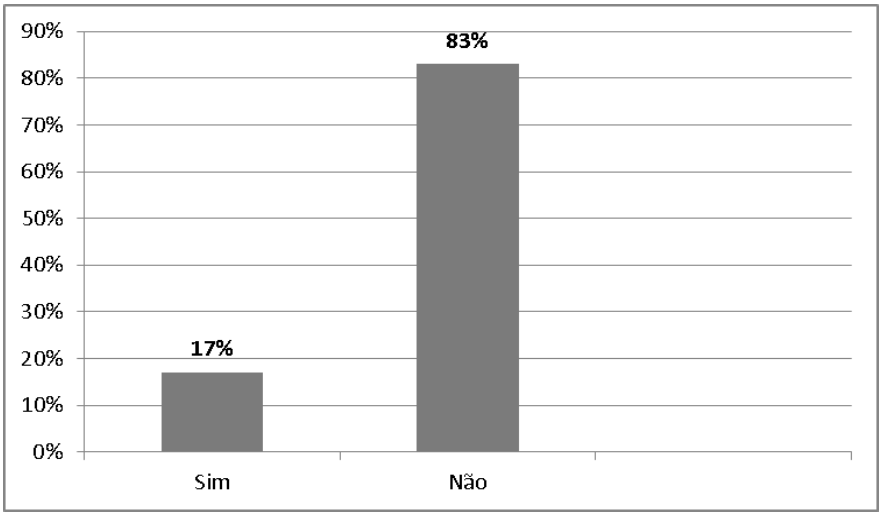


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

Podemos perceber que os alunos que entraram em 2012 correspondem a 27%, em 2013 são 35% e em 2014 representam 38%. Isto mostra que pelo percentual a quantidade alunos diminui de um ano em relação a outro.

Em relação se o aluno que ingressou na UEPA já tinha realizado outro curso superior, apresentamos:

GRÁFICO 11 - percentual o aluno que ingressou na UEPA e que já tinha realizado outro curso superior.

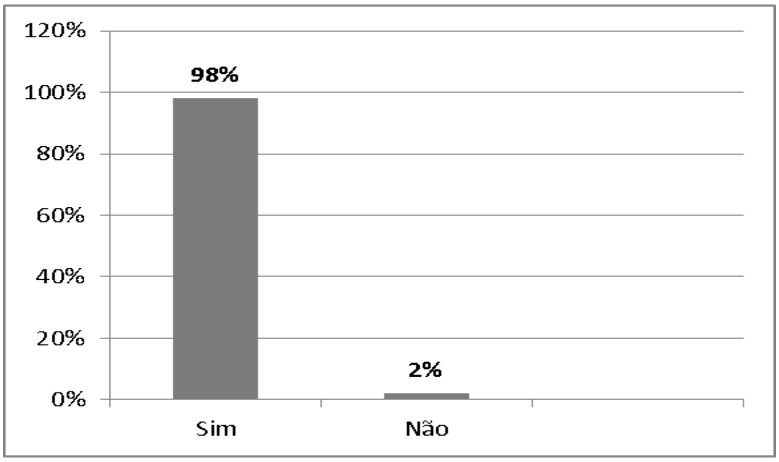


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

Dos alunos pesquisado, somente 17% já tinham realizado um curso superior antes do ingresso na UEPA e 83% Ingressaram somente com Ensino Médio Completo.

Quanto aos docentes que cursou Cálculo:

GRÁFICO 12 - percentual de docentes que cursou cálculo.

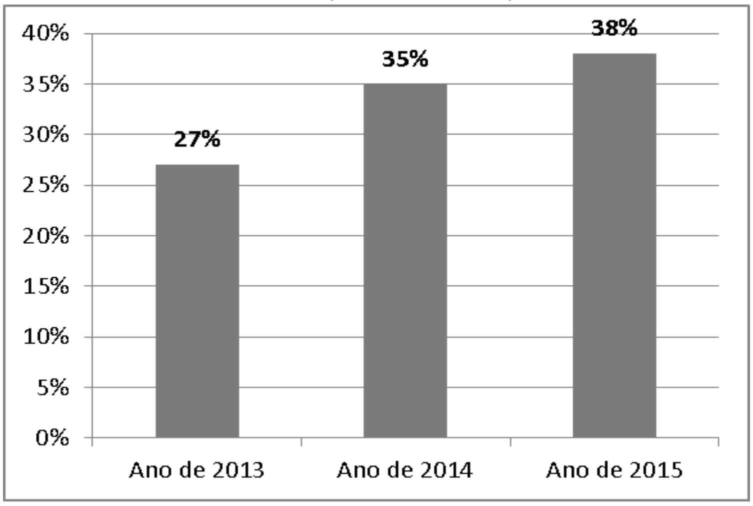


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2012).

Os dados revelaram que 98% dos alunos curso cálculo, enquanto que 2% já tinham um conhecimento prévio de cálculo, mas cursou cálculo na UEPA. Estes dados revelaram que se tem uma influência no conteúdo de Limites na disciplina Cálculo.

Quanto ao ano que o docente cursou Cálculo I, temos:

GRÁFICO 13 - Percentual quanto ao ano que o docente cursou Cálculo I.

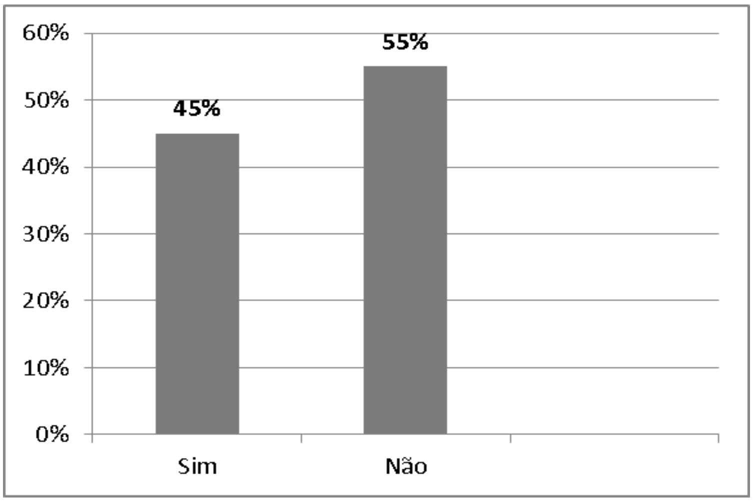


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

Esta tabulação mostra que os alunos cursaram cálculo no ano seguinte ao seu ingresso na UEPA.

Quanto à adoção de um livro texto de cálculo I, por parte do aluno:

GRÁFICO 14 - percentual os alunos que adotam um livro texto de Cálculo.

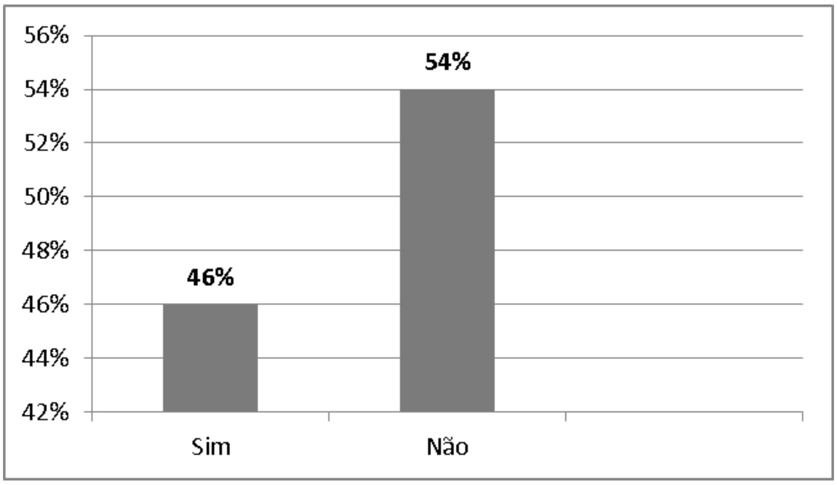


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

Notamos neste gráfico que a maioria dos alunos, ou seja, 55%, não tem hábito de adotar um livro texto para Cálculo I, o que contrasta com os 45% dos que adotam livro texto para estudar cálculo I.

Em relação aos alunos que ficou em dependência de Cálculo I, obtivemos:

GRÁFICO 15 - percentual dos alunos que ficou em dependência em Cálculo I.

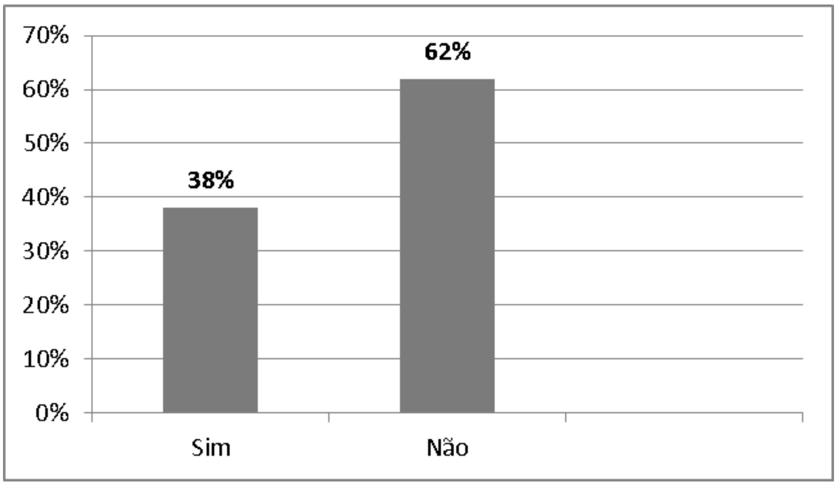


FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2015).

Notamos neste gráfico que a maioria dos alunos, ou seja, 54%, não ficaram em dependência no Cálculo I, e os 45% dos entrevistados ficaram em dependência cálculo I, e destes todos só ficaram uma vez nesta situação.

Em relação à relevância dos estudos de Limites, obtivemos:

GRÁFICO 16 - percentual da relevância para os estudos de limites de funções.



FONTE: pesquisa de campo (Agosto/2012).

Os dados revelaram que 62%, a maioria, dos alunos pesquisados não considera relevante os estudos de limites, posto que o considere como estratégia para resolver Derivadas. Mas apenas 38% tem opinião contrária a esta relevância, pois é importante em sua formação profissional. Fora pesquisado, também, o procedimento predominante das aulas de Limite que o docente teve:

TABELA 5 - o procedimento predominante das aulas de Limite.

Alternativa escolhida	Percentual
(a) definição seguida de exemplos e exercícios;	45%
(b) situação problema para depois introduzir o assunto;	34%
(c) atividades para chegar nos conceitos e propriedades;	11%
(d) experimento para chegar ao conceito.	10%

Fonte: Pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que os procedimentos dos professores, é que 45%, dos procedimentos predominantes nas aulas de limites, começam pela definição seguida de exemplos e exercícios.

Pesquisamos, também de que maneira os professores perpetram a fixação do conteúdo, apresentando os dados na tabela a seguir:

TABELA 6 - Como os professores de matemática fixam o conteúdo de Limites de Funções.

Alternativa Escolhida	Percentual
a) Apresentar uma lista de questões descontextualizadas para serem resolvidas;	46%
b) Apresentar uma lista de questões que caíram em vestibulares, concursos ou contextualizadas;	39%
c) Apresentar jogos envolvendo o assunto	0%
d) Solicitar que os alunos resolvessem exercícios do livro indicado;	5%
e) Não propõe questões de fixação	1%
f) Solicitar que os alunos procurassem questões de Limites para resolver.	9%

Fonte: Pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que para 46% dos alunos, o docente fixa o conteúdo limite de função, apresentar uma lista de questões descontextualizadas para serem resolvidas.

Pesquisamos também os recursos didáticos utilizados para o ensino de limites, apresentando os dados a seguir:

TABELA 7 – recursos didáticos utilizados para o ensino de Limites de Funções.

(CONTINUA)

Alternativa Escolhida	Percentual
a) pincel;	66%
b) Datashow;	4%

c) Livro texto;	0%
d) Apostilas e lista de questões;	30%
e) Roteiro de experimento.	0%

Fonte: Pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que para 66% dos alunos, o docente para ensinar o conteúdo limite de função, apenas pincel em quadro branco, e somente 34 % usam outros recursos conforme tabela anterior.

Pesquisamos também a maneira como os discentes agem durante seus estudos sobre limites, apresentando os dados na tabela a seguir:

TABELA 8 - como os discentes agem durante seus estudos sobre limites.

Alternativa Escolhida	Percentual
a) Os resultados e as propriedades foram apresentados com justificativas	58% não
b) Os resultados e as propriedades não foram apresentados com justificativas.	42% sim

Fonte: Pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que para 48% dos alunos, o docente apresenta os resultados e as propriedades dos limites de funções com justificativa, enquanto, 32% consideram que isto não se dá desta forma.

Pesquisamos, também de que maneira os discentes consideram que as aulas de Limites foram ministradas:

TABELA 9 - Como os discentes consideram que as aulas de Limites foram ministradas.

(CONTINUA)

Alternativa Escolhida	Percentual
a) Bem, de acordo com o plano de ensino e o domínio do(a) docente;	46%
b) Satisfatoriamente, de acordo	24%

com o plano de ensino e o domínio do(a) docente;	
c) Insuficientemente, de acordo com o plano de ensino e o domínio do(a) docente.	30%

Fonte: Pesquisa de campo (Agosto, 2015).

Na tabela anterior, verificamos que para 46% dos alunos consideram que as aulas de limites foram ministradas bem, de acordo com o plano de ensino e domínio do docente, 24% consideram satisfatório e os 30% restantes consideram as aulas insuficientes em relação ao plano de ensino e o domínio do conteúdo por parte do professor.

A tabela seguinte vem mostrar, a opinião dos discentes pesquisados, quais os tópicos com maior dificuldade para aprenderem:

TABELA 10 - Tópicos com maior dificuldade para aprender Limites de Funções, segundo alunos da UEPA.

(CANTINUA)

Ordem	Tópicos	Porcentagem
1°	Ideia de Limite	25%
2°	Conceito de Limites	21%
3°	Cálculo de Limites	22%
4°	Unicidade de Limites	20%
5°	Limites Laterais	20%
6°	Limites de uma Sequencia	30%
7°	Limites de Função Contínua	38%
8°	Limite de Função Descontínua	38%
9°	Limites Infinitos	38%
10°	Limites no Infinito	42%
11°	Teorema da conservação do Sinal	32%
12°	Teorema do Confronto	30%
13°	Limites Trigonométricos	30%
14°	Limites Trigonométricos Fundamentais	30%
15°	Limites de Função Exponencial	27%

16°	Limites de Funções Logarítmicas	23%
17°	Limite Exponencial Fundamental	23%
18°	Formas Indeterminadas	23%
19°	Limite da Soma de Funções	20%
20°	Limite do Produto de Funções	26%
21°	Limite do Quociente de Funções	26%
22°	Limite da Raiz de Funções	23%
23°	Limite de Composição de Funções	23%
24°	Aplicações de Limites	41%

FONTE: Pesquisa de Campo (Agosto/ 2015).

Verificamos que a maior parte dos discentes, inicia a disciplina de Cálculo I com falhas quanto ao conhecimento de matemática do ensino básico. Não demonstram familiaridade no tratamento dos números reais e das funções elementares; ou seja, não têm desenvolvidas estruturas cognitivas relacionadas à interpretação da linguagem matemática.

Com isto, os dados apresentados são correlatos, pois como percebemos, a partir do levantamento de estudos anteriores, os alunos que possuem certa dificuldade no conceito de função apresentam dificuldade no entendimento de Limite.

Em relação à resolução dos problemas propostos na entrevista aos alunos, os resultados estão dispostos a seguir.

Questão 1 letra (a)
01. Calcule os seguintes limites: a) $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 5x + 2)$

Dos alunos pesquisados, 89% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (b)
01. Calcule os seguintes limites: b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

Dos alunos pesquisados, 75% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (c)
01. Calcule os seguintes limites: c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$, definida em $R - \{1\}$

Dos alunos pesquisados, 72% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (d)
01. Calcule os seguintes limites: d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$, definida em $R - \{-1, 1\}$

Dos alunos pesquisados, 70% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (e)
01. Calcule os seguintes limites: e) $\lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x+2}$

Dos alunos pesquisados, 69% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (f)
01. Calcule os seguintes limites: f) $\lim_{x \to 0} \frac{sen 2x}{x}$

Dos alunos pesquisados, 65% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (g)
01. Calcule os seguintes limites: g) $\lim_{x \to 2} 3^x$

Dos alunos pesquisados, 71% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (h)
01. Calcule os seguintes limites: h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

Dos alunos pesquisados, 73% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (i)
01. Calcule os seguintes limites: i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}$

Dos alunos pesquisados, 75% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (j)
01. Calcule os seguintes limites: j) $\lim\limits_{x \to e^{x'}} (\ln x)$

Dos alunos pesquisados, 65% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (l)
01. Calcule os seguintes limites: l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)$

Dos alunos pesquisados, 55% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (m)
01. Calcule os seguintes limites: m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

Dos alunos pesquisados, 55% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 1 letra (n)
01. Calcule os seguintes limites: n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

Dos alunos pesquisados, 58% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 2
02. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ se, } x \geq 0 \\ 2 \text{ se, } x < 0 \end{cases}$ é contínua em x=0.

Dos alunos pesquisados, 52% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 3
03. No Bairro do Utinga, em Belém, descobriu-se que o principal reservatório de água esta contaminado pelo Tricloroetileno (composto altamente cancerígeno), motivado pela contaminação de um depósito de lixo químico desativado, as proximidades do reservatório. Uma proposta da SAEB/PA indica que o custo, em milhões de reais, de remoção de x por cento de poluente tóxico é definido por: $C(x) = \frac{0,5x}{100 - x} \quad (0 < x < 100)$ Calcule: $\lim_{x \to 100} C(x)$

Dos alunos pesquisados, 42% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Questão 4
04. A população de certa espécie de ratos no bairro da Pedreira, em Belém é dada por: $P(t) = \frac{72}{9 - t} \quad (0 \leq t < 9)$, onde t é medido em meses. Mostre que a população de ratos cresce ilimitadamente.

Dos alunos pesquisados, 52% acertaram. E, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica.

Analisando as questões e os resultados obtidos pelos alunos durante sua aplicação. Constatamos que dos acertos obtidos apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite. Em relação ao ultimo problema apresentado aos alunos, percebemos que a quantidade de alunos que deixou em branco foi considerável, em relação aos alunos que arriscaram resolve-lo. Mas, acreditamos que talvez isto possa ter ocorrido pela falta de terem trabalhado questões de aplicações de Limites de Funções.

Em relação a quantidade de acertos, erros e questões em branco para a quantidade de alunos pesquisados, temos:

TABELA 11 – resultado dos alunos egressos no teste geral.

Numero de alunos	Número de acertos	Numero de Erros	Alternativas em Branco
9	0	13	3
7	12	2	2
13	9	4	3
10	11	2	3
11	7	5	4

Fonte: pesquisa de campo (Agosto/ 2015).

Podemos perceber na tabela anterior, que nenhum aluno conseguiu ter uma totalidade de acertos, e poucos atingiram mais da metade. E que a maioria dos alunos apresentou a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite. Os dados mostram que os alunos que obtiveram entre sete e doze acertos foram os que informaram que as aulas de Limites foram ministradas Bem, de acordo com o plano de ensino e o domínio docente.

Na seção a seguir realizamos uma análise prévia a respeito do ensino e aprendizagem do objeto de pesquisa, limites de funções, além de algumas constatações que foram percebidas e que serviram de apoio para a construção das sequências didáticas propostas para o ensino de limites de funções. A seguir apresentamos esta síntese sobre as constatações na análise prévia.

1.5. SÍNTESE DAS ANÁLISES PRÉVIAS

No que diz respeito às práticas docentes apontadas, os resultados da análise do questionário dirigido aos professores e alunos vieram apenas confirmar o que já conhecemos de relatos de experiências realizadas, bem como apresentados na seção 1.2. desta pesquisa nos trabalhos de pesquisa Deste modo, na UEPA como na maior parte das instituições de ensino superior, a disciplina de cálculo mantêm o ensino centrado no professor. O contrato didático que é estabelecido com os alunos se baseia em aulas expositivas, onde o conteúdo a ser ensinado é passado aos estudantes que devem memorizá-lo, repetindo em geral modelos de exercícios fechados que serão posteriormente testados nas avaliações adotadas nestas instituições.

Diante disto, com o ensino de limites por atividades pretendemos buscar uma prática pedagógica significativa para a melhoria do ensino de cálculo, considerando que os tópicos a serem abordados permanecerão essencialmente os mesmos, devendo estar centrados em ênfases, enfoques e estratégias, em que a ênfase deve ser dada aos conceitos, os enfoques devendo estar centrados nas aplicações e nas propostas de tarefas que envolvam os alunos em investigações, leituras, explorações, uso da linguagem matemática e uso de tecnologias, posto que:

> O ensino de Matemática por meio de atividades pressupõe muita colaboração entre professores e alunos durante o ato de construção de saber, pois característica essencial desse tipo de abordagem metodológica de ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca, que é conduzido pelo professor até que seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz. (SÁ 2009, p.19)

Destes pressupostos, a metodologia do ensino por atividade tornar os conhecimentos em sala de aula mais dinâmica, promovendo o ensino global e construtor de um saber com sentido de aplicação.

Em nossa pesquisa sobre o ensino de limites de funções na concepção docente, constatamos que o professor universitário ter pleno domínio do conteúdo limite de funções que transmite para que os alunos aprendam, mas de uma forma tradicional. Entretanto, acreditamos que a aprendizagem teria mais chance de acontecer se houvesse uma relação de parceria entre professores e estudantes universitários rumo à construção do conhecimento que esta sendo trabalhado e, consequentemente, reflexões didáticas específicas a respeito do processo de ensino e de aprendizagem na UEPA, pode ser considerada necessária, para estas mudanças, em relação ao tradicionalismo possa entrar em cena. Um dos fatores para esse insucesso reside na postura didática assumida pela maioria dos professores de graduação que trabalham conteúdos de Matemática Pura, pois os docentes assinalaram na entrevista não trabalhar o conteúdo por meio de qualquer experimento.

E em relação à resolução das atividades propostas na análise prévia aos alunos egressos na UEPA em relação aos acertos, estes se mostraram inseguros mesmo tendo algum conhecimento de técnicas matemáticas para resolver estas atividades, pois durante seu curso superior, provavelmente, não se achavam no direito de questionar os procedimentos didáticos de seu professor.

Destacamos que a maioria dos docentes pesquisados vincula sua estratégia ao ensino tradicional, na qual se limita a ensinar a estrutura do limite de funções, pois pressupõe que é desta maneira que se dará a aprendizagem.

A partir destas perspectivas temos por hipótese que o ensino de limites de funções por meio de atividades estruturadas torna-se mais dinâmica para aprendizagem.

Constatamos que os alunos egressos da UEPA, em sua maioria, apresentaram a estratégia utilizada para a resolução, conforme recordavam da regra para resolver o limite de uma expressão algébrica e as questões de aplicações pela maioria dos alunos foram deixadas em branco. Pelo que foi verificado nas análises prévias, podemos deduzir que o aluno possui grande dificuldade para lembrar-se de regras matemáticas trabalhadas no conteúdo limites de funções, bem como uma carência na construção formal dos itens neste conteúdo Com isso, pretendemos responder a seguinte investigação: *o ensino por atividades de Limites de Funções é eficaz na aprendizagem?*

Na seção a seguir apresentamos um conjunto de atividades propostas para o ensino de limite de funções.

2. CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta seção, temos por finalidade apresentar um conjunto de atividades para o ensino de limites de funções e suas análises. Todas as situações propostas serão idealizadas para permitir que o aluno, por ação própria, possa resolvê-los para adquirir segurança dos conhecimentos já vistos.

Na sala de aula, assumiremos a função de mediador e orientador dessas atividades. Adotando como referência as aulas nas turmas de graduação da UEPA, nos cursos de Matemática e Ciências Naturais num tempo estimado para cada atividade de duas aulas.

A sequência didática contém atividades que foram divididas conforme quadro apresentado na entrevista do docente de caráter a facilitar o objetivo proposto, nestas atividades, e com base nas dificuldades observadas na fase da análise *a priori*.

As atividades estão organizadas conforme seção seguinte.

2.1. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE LIMITE DE FUNÇÕES

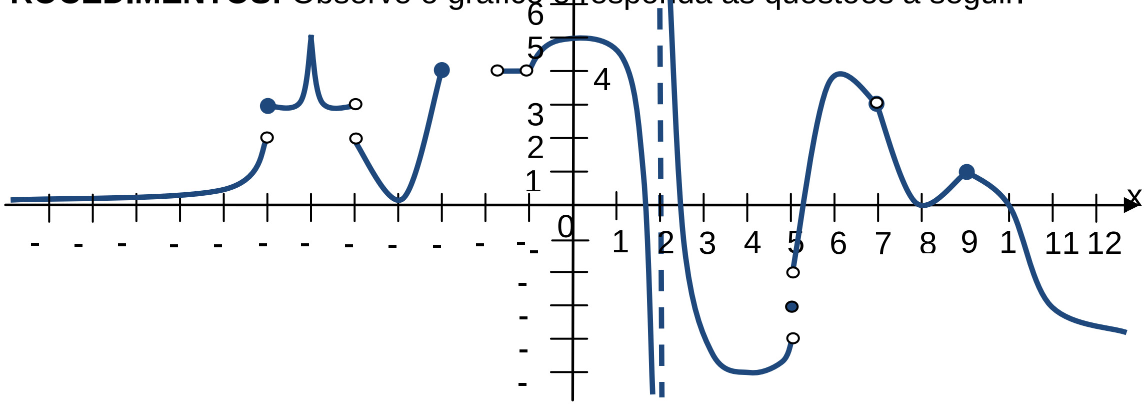
ATIVIDADE 1

TITULO: Limite de Função

OBJETIVO: Introduzir o conceito de limite

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS: Observe o gráfico e responda as questões a seguir.



Fonte: Livro de Cálculo I, UEPA/CCSE-2000

Questões:

01. Qual o valor da função quando x é igual a 8 ?
02. Qual o valor da função quando x é igual a 5?
03. Qual o valor da função quando x é igual a 9?

04. Qual o valor da função quando x é igual a -7?

05. Qual o valor da função quando x é igual a -5?

06. Qual o valor da função quando x é igual a -1?

07. Qual o valor da função quando x é igual a 7?

08. Qual o valor da função quando x é igual a -3?

09. Qual o valor da função quando x é igual a -2?

10. Qual o valor da função quando x é igual a -6?

11. Qual o valor da função quando x é igual a 2?

12. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 8 pela direita?

13. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 8 pela esquerda?

14. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 9 pela direita?

15. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 9 pela esquerda?

16. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela direita?

17. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela esquerda?

18. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de -3 pela direita?

19. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de -3 pela esquerda?

20. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 5 pela direita?

21. Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 5 pela esquerda?

Em Matemática a pergunta: Para que valor a função se aproxima quando x se aproxima muito de 7 pela esquerda? É equivalente a pergunta: Para que valor a função tende quando x tende a 7 pela esquerda?

22. Para que valor a função tende quando x tende a 7 pela direita?
23. Para que valor a função tende quando x tende a 8 pela direita?
24. Para que valor a função tende quando x tende a 5 pela esquerda?
25. Para que valor a função tende quando x tende a 5 pela direita?
26. Para que valor a função tende quando x tende a -3 pela direita?
27. Para que valor a função tende quando x tende a -3 pela esquerda?
28. Para que valor a função tende quando x tende a -6 pela esquerda?
29. Para que valor a função tende quando x tende a 9 pela direita?
30. Para que valor a função tende quando x tende a 9 pela esquerda?

Em Matemática a pergunta: Para que valor a função tende quando x tende a -6 pela esquerda? Equivale a pergunta: Qual é o limite da função quando x tende a -6 pela esquerda?

31. Qual é o limite da função quando x tende a -3 pela esquerda?
32. Qual é o limite da função quando x tende a -3 pela direita?
33. Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela esquerda?
34. Qual é o limite da função quando x tende a -1 pela direita?
35. Qual é o limite da função quando x tende a 7 pela esquerda?
36. Qual é o limite da função quando x tende a 7 pela direita?
37. Qual é o limite da função quando x tende a -5 pela esquerda?
38. Qual é o limite da função quando x tende a -5 pela direita?
39. Qual é o limite da função quando x tende a 9 pela esquerda?
40. Qual é o limite da função quando x tende a 9 pela direita?
41. Qual é o limite da função quando x tende a 5 pela direita?
42. Qual é o limite da função quando x tende a 5 pela esquerda?

Quando os limites laterais de uma função num ponto são iguais dizemos que o limite existe no ponto e o valor é o dos limites laterais.

43. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 9?
44. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 7?
45. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 5?
46. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 8?
47. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -3?
48. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -2?
49. Qual é o limite de f(x) quando x tende a 2?
50. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -1?
51. Qual é o limite de f(x) quando x tende a -6?
52. Qual é o limite de f(x) quando x tende a zero?

Em Matemática a pergunta: qual é o limite da função quando x tende a 6 pela esquerda? É representado por $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$. Qual é o limite da função quando x tende a 6 pela direita? É $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$

Calcule:

53. $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x)$
54. $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x)$
55. $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$
56. $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$
57. $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$
58. $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$
59. $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$
60. $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x)$
61. $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$

62. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

63. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

64. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

65. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

66. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

67. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

68. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

69. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ Quando limite de uma função num ponto existe e é igual a imagem da função no ponto dizemos que a função é continua no ponto.

70. A função f(x) é continua no ponto $x = 7$?Por quê?

71. A função f(x) é continua no ponto $x = 9$?Por quê?

72. A função f(x) é continua no ponto $x = 5$?Por quê?

73. A função f(x) é continua no ponto $x = -1$? Por quê?

74. A função f(x) é continua no ponto $x = -3$? Por quê?

75. A função f(x) é continua no ponto $x = -5$? Por quê?

76. A função f(x) é continua no ponto $x = -6$? Por quê?

77. A função f(x) é continua no ponto $x = -7$? Por quê?

78. A função f(x) é continua no ponto $x = 0$? Por quê?

79. A função f(x) é continua no ponto $x = 2$? Por que?

80. A função f(x) é continua no ponto $x = 4$? Por quê?

Conclusão

ATIVIDADE 2

TÍTULO: LIMITE DA SOMA DE FUNÇÕES

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite da soma de funções continua e a soma dos limites

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Resolva os itens a seguir conforme as funções na tabela abaixo e observando o gráfico correspondente de cada item.

(CONTINUA)

	Funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	f(x) é CONTÍNUA em x_0?		g(x) é CONTÍNUA em x_0?		$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
		Sim	Não	Sim	Não				
1.	$f(x) = 3x^3$ $g(x) = 5x - 2$ No ponto $x_0 = 1$								
2.	$f(x) = 4x - 3$ $g(x) = x^2 + 2$ No Ponto $x_0 = 1$								
3.	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = 0$								
4.	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = -1$								
5.	$f(x) = \frac{1}{2x^2}$								

	$g(x) = x + 7$ No ponto $x_0 = 3$								
6.	$f(x) = 2x^2 + 1$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$ No ponto $x_0 = -1$								
7.	$f(x) = 5x - 2$ $g(x) = x^3 + 1$ No ponto $x_0 = 1$								
8.	$f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ $g(x) = 6 - 4x$ No ponto $x_0 = 2$								
9.	$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ $g(x) = 2x + 1$ No ponto $x_0 = -1$								
10.	$f(x) = x^2 - 5x + 4$ $g(x) = x - 1$ No ponto $x_0 = -1$								

Observação

Conclusão

ATIVIDADE 3

TÍTULO: LIMITE DO PRODUTO DE FUNÇÕES

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite do produto de funções continua e o produto dos limites

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Resolva os itens a seguir.

Função f: R → R		f(x) é CONTÍNUA?		g(x) é CONTÍNUA?		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
		S	N	S	N				
1.	$f(x)=3x^3$ $g(x)=5x-2$ No ponto $x_0 = 1$								
2.	$f(x)=4x-3$ $g(x)=x^2+2$ No Ponto $x_0 = 1$								
3.	$f(x)=\frac{1}{x^3}$ $g(x)=x^2+x+1$ No ponto $x_0 = -1$								
4.	$f(x)=x^3$ $g(x)=x^2+x+1$ No ponto $x_0 = -1$								
5.	$f(x)=\frac{1}{2x^2}$ $g(x)=x+7$ No ponto $x_0 = 3$								
6.	$f(x)=2x^2+1$ $g(x)=\frac{1}{x+1}$ No ponto $x_0 = 2$								
7.	$f(x)=5x-2$ $g(x)=x^3+1$ No ponto $x_0 = 1$								
8.	$f(x)=2x^2+3x+2$ $g(x)=6-4x$ No ponto $x_0 = 2$								
9.	$f(x)=3x^2-5x+4$ $g(x)=2x+1$ No ponto $x_0 = -1$								
10.	$f(x)=x^2-5x+4$ $g(x)=x-1$ No ponto $x_0 = -1$								

Observação

Conclusão

ATIVIDADE 4

TÍTULO: LIMITE DO QUOCIENTE DE FUNÇÕES

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite do quociente de funções e o quociente dos limites

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Preencha o quadro dado observando os gráficos (ver Apêndice D) fornecidos.

(CONTINUA)

N	Função f: R →R	f(x) é CONTÍNUA?		g(x) é CONTÍNUA?		$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
		SIM	NÃO	SIM	NÃO				
1.	$f(x) = 3x^3$ $g(x) = 5x - 2$ No ponto $x_0 = 1$								
2.	$f(x) = 4$ $g(x) = x^2 - 2$ No Ponto $x_0 = 1$								
3.	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = -1$								
4.	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = -1$								
5.	$f(x) = \frac{1}{2x^2}$ $g(x) = x + 7$ No ponto $x_0 = 3$								
6.	$f(x) = 2x^2 + 1$ $g(x) = \frac{1}{x + 1}$ No ponto $x_0 = 2$								

7.	$f(x) = 5x - 2$ $g(x) = x^3 + 1$ No ponto $x_0 = 1$						
8.	$f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ $g(x) = 6 - 4x$ No ponto $x_0 = 2$						
9.	$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ $g(x) = 2x + 1$ No ponto $x_0 = -1$						
10.	$f(x) = x^2 - 5x + 4$ $g(x) = x - 1$ No ponto $x_0 = -1$						

Observação

Conclusão

ATIVIDADE 5

TÍTULO: LIMITE DA RAIZ

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite da raiz em um ponto é a raiz do limite nesse ponto.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Resolva os itens a seguir, do quadro dado.

N	Função f: R →R	$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}$	$\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$
1.	$f(x) = \sqrt{3x^2}$ Ponto $x_0 = 2$		
2.	$f(x) = \sqrt[3]{4x-3}$ No ponto $x_0 = 1$		
3.	$f(x) = \sqrt{x^2-7x+6}$ No ponto $x_0 = -1$		
4.	$f(x) = \sqrt{x^2+x-3}$ No ponto $x_0 = -1$		
5.	$f(x) = \sqrt[3]{2x^2}$ No ponto $x_0 = 2$		
6.	$f(x) = \sqrt{3x^2-7x+4}$ No ponto $x_0 = -1$		
7.	$f(x) = \sqrt[3]{-8x^2}$ No ponto $x_0 = 1$		
8.	$f(x) = \sqrt{2x+5}$ No ponto $x_0 = 2$		
9.	$f(x) = \sqrt{2x+1}$ No ponto $x_0 = 4$		
10.	$f(x) = \sqrt{2x^3-8}$ No ponto $x_0 = 2$		

Observações:

Conclusões

ATIVIDADE 6

TITULO: Limites Infinitos

OBJETIVO: Estudar o comportamento para uma função quando o valor de f(x) cresce/decresce indefinidamente

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTO:

- Usar propriedades algébricas apresentadas em aula e encontrar os limites nos itens.

	Função f(x): R→R	x→ a	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$
1.	$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	a = 1	
2.	$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$	a = 2	
3.	$f(x) = \frac{3x}{(x-2)^2}$	a = 2	
4.	$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	a = 1	
5.	$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	a = 1	
6.	$f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x^2}$	a = 0	
7.	$f(x) = \frac{1}{x-1}$	a = 1	
8.	$f(x) = \frac{1}{5-2x}$	$a = \frac{5}{2}$	
9.	$f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}$	a = 1	
10.	$f(x) = \frac{3}{(x-1)^3}$	a = 1	

Observações:

Conclusões

ATIVIDADE 7

TITULO: Limites no Infinito

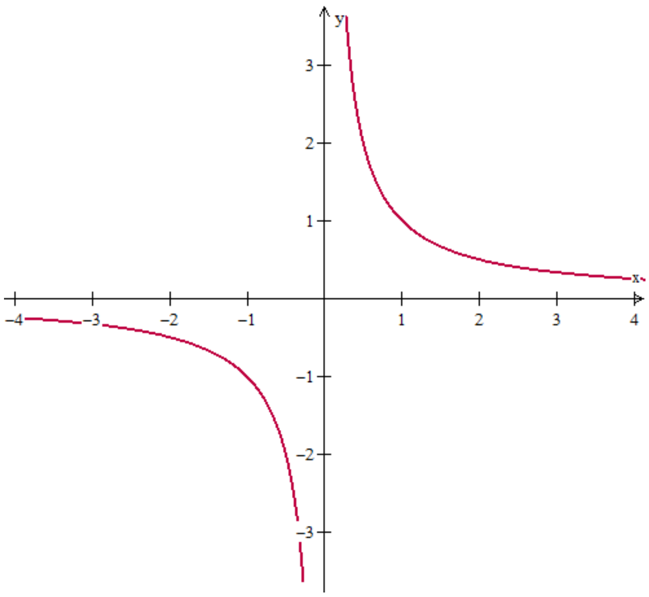
OBJETIVO: Estudar o comportamento para uma função quando a variável dependente cresce ou decresce indefinidamente.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTO:

- Para cada gráfico a seguir responda as questões solicitadas.

Seja a função $f(x) = \frac{1}{x}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



Questões

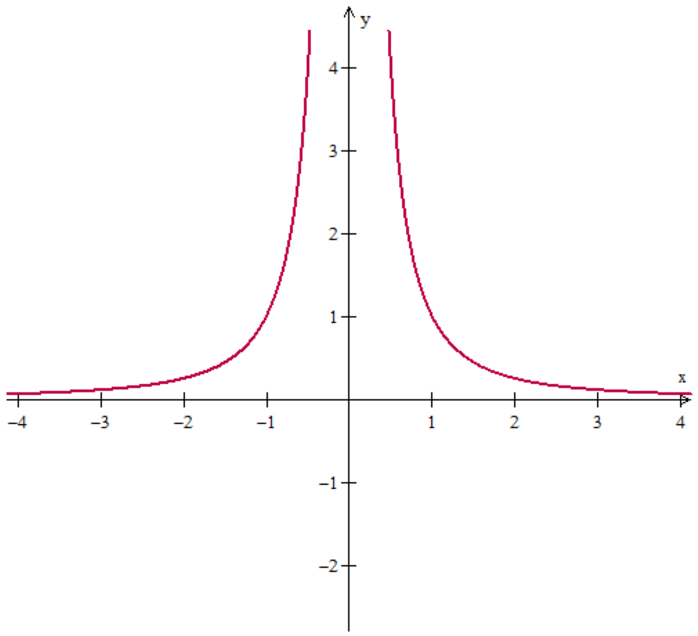
1) Determine o limite de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

Observações:

Conclusões

Seja a função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



Questões

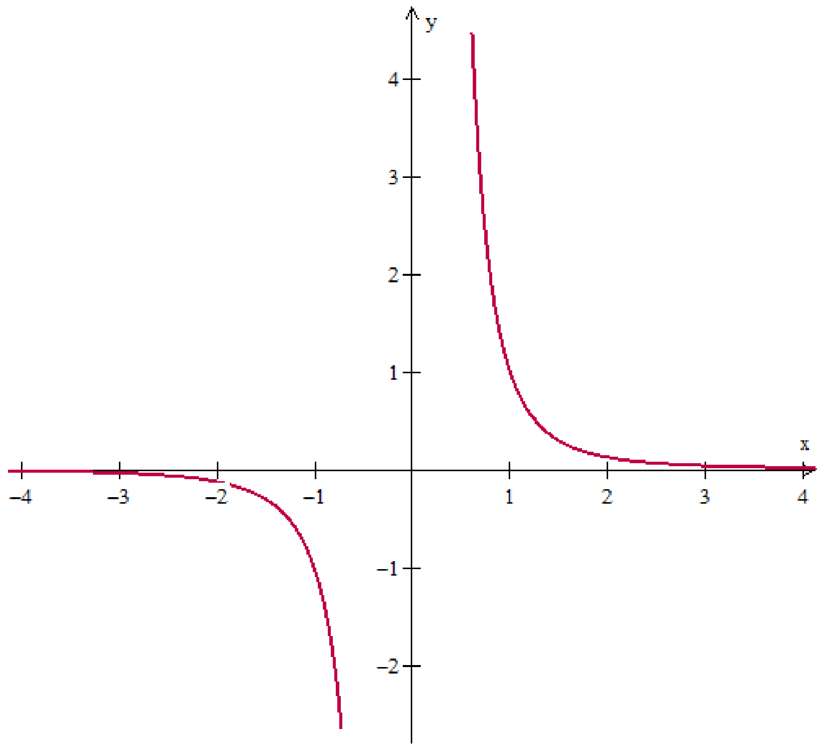
1) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

Observações:

Conclusões

Seja a função $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



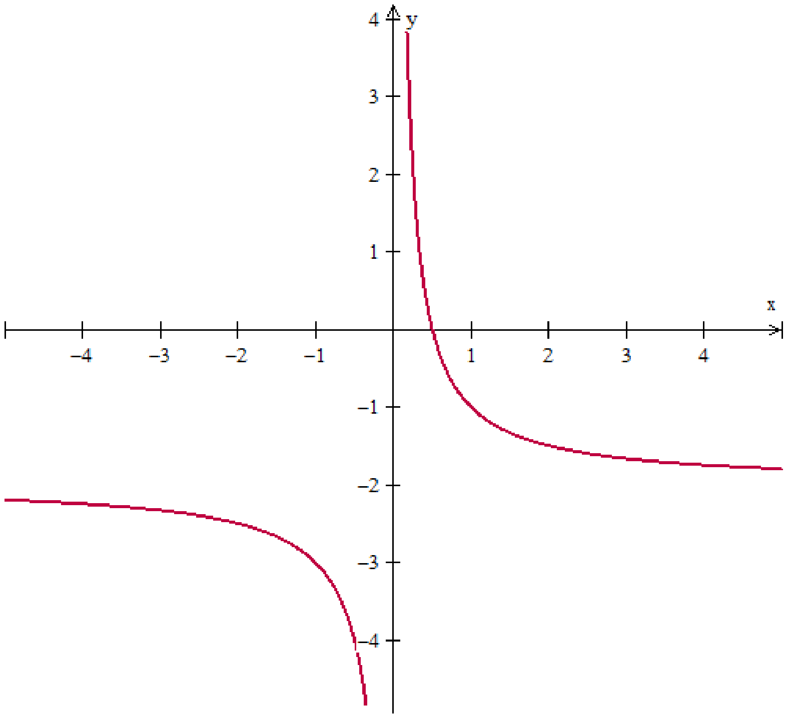
1) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

Observações:

Conclusões

Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



Questões

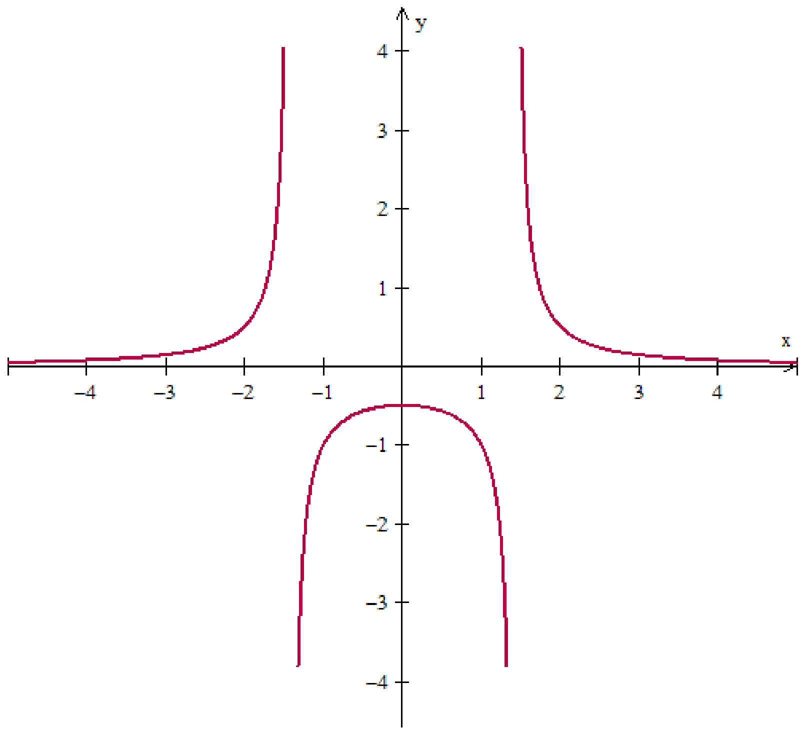
1) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela direita.

2) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela esquerda.

Observações:

Conclusões

Seja a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



1) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de 3/2 pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de 3/2 pela esquerda.

Observações:

Conclusões

ATIVIDADE 8

TITULO: LIMITES TRIGONOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS

OBJETIVO: Descobrir o Limite Trigonométrico Fundamental no qual se tem que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, calculadora científica.

PROCEDIMENTO

Descobrir os limites de funções trigonométricas com uso de calculadora pertinente a trigonometria.

Nº	LIMITE	VALOR COM USO DE CALCULADORA
01	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x}$	
02	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x}$	
03	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x}$	
04	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$	
05	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x}$	
06	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x^2}{x^2}$	
07	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x^3}{x^3}$	
08	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x^4}{x^4}$	
09	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{6x}$	
10	$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}$	

Observações:

Conclusões

<u>ATIVIDADE 9</u>

TÍTULO: LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

OBJETIVO: Descobrir o Limite Exponencial Fundamental que não envolve formas indeterminadas e devem ser calculados diretamente.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTO:

- Descobrir com uso da calculadora o Limite Fundamental $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, nos seguintes casos apresentados na tabela.

Nº	LIMITE	VALOR COM USO DE CALCULADORA
01	$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
02	$\lim_{x \to 10} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
03	$\lim_{x \to 100} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
04	$\lim_{x \to 1000} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
05	$\lim_{x \to 10^4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
06	$\lim_{x \to 10^5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
07	$\lim_{x \to 10^6} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
08	$\lim_{x \to 10^7} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
09	$\lim_{x \to 10^8} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
10	$\lim_{x \to 10^9} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	

Observações:

Conclusões

3. Experimentação

Esta seção tem por finalidade apresentar o planejamento da execução das atividades, bem como anotar as maneiras e observações feitas em sala de aula. As atividades e os testes expostos na seção anterior foram cogitados durante um período de 2 (dois) meses, Fevereiro e Março, no primeiro semestre de 2017 em uma turma do 1° ano do Curso de Ciências Naturais, com 35 (trinta e cinco) alunos, do turno da manhã na Universidade do Estado do Pará, localizada na cidade de Belém, capital do estado do Pará.

A pesquisa foi desenvolvida na Universidade do Estado do Pará, devido o pesquisador ser professor na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Naturais I, e por considerar que a sua realização procederá de forma tranquila. Nosso acesso até a aplicação da sequência didática foi conflituoso e com obstáculos, pois para conseguirmos validar nossa proposta de ensino, passamos por 3 (três) turmas, até defini-la na turma do 1° ano do Curso de Ciências Naturais.

Conversamos com a turma e ficou estabelecido que nossa pesquisa fosse desenvolvida contra turno dos horários de aula da turma, pois seguiria o decorrer da disciplina Matemática Aplicada às Ciências Naturais I, iniciamos com a aplicação do questionário, pré-teste geral, e as atividades, até que a sequência didática fosse finalizada. Com isso, deixamos aqui observado que qualquer pesquisa dessa parte do Cálculo, não terá sucesso caso o professor não seja professor da disciplina na turma, para que a maioria dos alunos se sinta motivados para a “atividade”, fora de seu horário de aula.

Os testes (pré-testes e pós-testes) e as atividades foram desenvolvidos como parte do conteúdo da disciplina Matemática Aplicada às Ciências Naturais I, trabalhado no primeiro semestre do ano letivo de 2017, conforme ementa do Curso de Ciências Naturais da UEPA do Estado do Pará. A aplicação dos testes e atividades foi desenvolvida num período de 08 (oito) aulas – denominadas aqui de Encontros, e que foi possível graças à dedicação e esforço dos alunos em participar das atividades e testes (pré-testes e pós-testes) desenvolvidos.

Para os registros das atividades, contamos com um caderno de anotações, onde fora registrado o tempo que os alunos gastaram ao desenvolverem as atividades, assim como os questionamentos e atitudes dos alunos. A sequência didática foi desenvolvida no âmbito da sala de aula, acontecendo sempre nos dias de segunda-feira, e quinta-feira, totalizando 4 (quatro) aulas por semana, com duração de 50 minutos cada, nos seguintes horários de 13h 30min até as 14h 20min.

O quadro a seguir apresenta os dias em relação às atividades que foram desenvolvidas.

Tabela 12: Atividades desenvolvidas. (CONTINUA)

Encontro	**Dias**	**Atividades**
01	16/02/17	Diagnóstico do perfil dos alunos e aplicação do pré-teste
02	20/02/17 e 23/02/17	Atividade para o Ensino de Limites: Conceito de limite lateral Conceito de limite no ponto Conceito de função continua Aplicação de exercícios.
03	02/03/17 e 06/03/17	Atividade 2: Limite da soma Atividade 3: Limite do produto Aplicação de exercícios.
04	09/03/17 e 13/03/17	Atividade 4: Limite do quociente Atividade 5: Limites da Raiz Aplicação de exercícios.
05	16/03/17 e 20/03/17	Atividade 6: Limites Infinitos Atividade 7: Limites no Infinito Aplicação de exercícios.
06	23/03/17	Atividade 8: Limite Trigonométrico Fundamental Aplicação de exercícios.
07	27/03/17	Atividade 9: Limite Exponencial Fundamental Aplicação de exercícios.
08	13/04/17	Aplicação do pós-testes

Fonte: pesquisa de campo (março/2017).

3.1. PRIMEIRA SESSÃO

O encontro inicial com a turma ocorreu no dia 16 de fevereiro de 2017 (segunda-feira) às 13h30min, com a turma evidenciando aos alunos que nossa pesquisa se tratava de um assunto presente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, mais precisamente o assunto Limites de Funções, que faz parte do conteúdo da disciplina Matemática Aplicada às Ciências Naturais I, trabalhado no primeiro semestre do ano letivo de 2017, conforme ementa do Curso de Ciências Naturais da UEPA. Vale ressaltar que destacamos a relevância da participação de todos, visto que seriam avaliados individualmente ao final da sequência didática, com a aplicação de um pós-teste.

Nesse primeiro encontro, expomos como seriam conduzidas as aulas nos encontros para a aplicação das atividades, além disso, foi acordado na turma que todo o processo de desenvolvimento das atividades em sala de aula seria parte das notas de avaliação na disciplina Matemática Aplicada I. Após esse breve diálogo com os alunos, propusemos que formassem filas verticais, pois aplicaríamos um questionário diagnóstico seguido de um pré-teste, para verificar como resolveriam questões sobre Limites de Funções.

As 13h 45min, iniciou a aplicação do questionário diagnóstico, nesse momento não observamos oposição dos alunos para resolverem o pré-teste. No entanto, os resultados foram importantes, pois 75% alunos pesquisados (incluindo os alunos em dependência), conseguiu resolver as 12 (doze) questões propostas por nós.

Durante a realização das questões no pré-teste, destacamos aqui algumas falas de alunos: Aluno A: *“Quase não lembro”* falou a aluna de dependência, ao se referir sobre as questões envolvendo cálculo de Limites; Aluno B: *“O professor já deu isso, mas não lembro bem, vou resolver assim!”*; Aluno C: *“Não me lembro de quase tudo!”*. Essas falas tonificam que o ensino de Matemática, em particular o ensino de Limites para o Cálculo, encontra-se com incoerências e que necessita, de métodos e modos que gerem motivação nossos alunos para cobiçarem cada vez o apreender matemática e que seja ensinada de forma simples e eficaz.

Sobre o perfil dos alunos participantes da pesquisa (item 1), verificados através do questionário diagnóstico (ver apêndice C), aplicado neste primeiro encontro, que a maioria, 70% é do sexo feminino, abrangendo uma média de 99% dos alunos e cuja na faixa-etária (item 2), está entre 15 e 20 anos de idade, o que apontando uma regularidade entre o nível de escolar e a idade. Em relação ao ingresso na UEPA (Item 3), 92% são alunos novos, oriundos do PRISE e PROCEL, apenas 8% são alunos do ano anterior (ou seja, estão pagando a disciplina fora de seu horário normal) e 100% estão cursando sua primeira graduação. No item 4 **- Quando você ingressou na UEPA já tinha realizado outro curso superior?** Observamos que 100% dos alunos não tinham realizado outro curso superior.

Em relação aos itens: **5 - Cursou Cálculo na UEPA?** e **6 - Em que ano você cursou Matemática Aplicada I?** Obtivemos os seguintes resultados: 92% dos alunos responderam “Não” e 8% responderam “Sim”, já que estes alunos são de dependência, e, esses resultados se repetiram no item 7- **Você ficou em Dependência em Matemática Aplicada I?**. E para o item 8 do questionário, observamos que, 99% acha relevante o estudo de Limites de Funções para curso que está matriculado.

No item 9 - **Quais os recursos didáticos para o ensino de Limites?** Todos assinalaram “Quadro e Pincel”. Para o item 10 – **Calcule** do questionário, e que faz parte do pré-teste, observamos que 98% dos alunos que tentaram calcular os limites propostos erram e 2% deixaram em branco, pois não sabiam como resolver e no caso dos dependentes, não lembravam os procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente.

Segundo os dados do pré-teste, observamos que a maioria dos alunos não estudou Limites e consideram regular sua aprendizagem. Concluímos aquilo que foi dito anteriormente, que com nossa sequência didática, pretendemos mostrar uma maneira de potencializar o ensino de Limites de Funções, para que os alunos de graduação sejam motivados em aprender essa parte do Cálculo Diferencial e Integral, que é tão necessária para a sua formação profissional.

3.2. SEGUNDA SESSÃO

O segundo encontro foi realizado, em dois dias, devido à quantidade de questões, que apresentamos à turma, que foram realizadas no contra turno, e aplicadas no dia 20 de fevereiro de 2017 e 23 de fevereiro de 2017 (segunda-feira e quinta-feira, respectivamente), das 13h 30min às 14h 50min, no período de 2 hora/aula, com a aplicação da Atividade 01.

Iniciamos a atividade no dia 20 de fevereiro de 2017, falando sobre a importância das questões na atividade desenvolvida com a turma, e da necessidade do empenho com a mesma, também solicitamos que abandonassem seus cadernos, colocando embaixo das cadeiras para não afetar a conclusão e as observações das atividades.

No primeiro dia, deste primeiro momento, pedimos que os alunos formassem filas e para cada, entregamos as folhas contendo as questões o contendo o gráfico, que os alunos deveriam interpretá-las a partir da folha do gráfico para resolvê-las, deixamos os alunos à vontade para encontrar a solução, diferentes das questões aplicadas anteriormente no pré-teste aplicado. E, pelo fato das primeiras questões envolverem conceitos de funções os alunos não encontraram dificuldade para obter a solução das questões.

A atividade 1, com três objetivos, a saber: (a) de descobrir uma relação entre a imagem de função e o cálculo de Limites; (b) descobrir e conceituar Limites Laterais e; (c) descobrir o conceito de continuidade partindo do cálculo de limite, manipulando gráfico. Dividimos a análise da atividade 1, neste primeiro dia 20 de fevereiro de 2017 (segunda-feira), em blocos de questões, do seguinte modo:

[1] questões de 01 a 11: neste bloco de questões observamos que 100% dos alunos conseguira realizar e responder corretamente as questões manipulando o gráfico. Notamos que a maioria conseguiu perceber que estavam diante determinar imagem de função a partir do ponto de abscissa.

[2] questões de 11 a 69: neste bloco de questões observamos que a 35% dos alunos conseguiu perceber a noção de aproximar pela direita e pela esquerda, 55% dos alunos teve dúvidas e 10% não conseguiram fazer as atividades deste bloco. Entretanto, conforme faziam a leitura no gráfico partindo do ponto de abscissa, e dessa forma obtiveram o mesmo valor do limite.

Durante estas questões na atividade 1, nossa intervenção, permitiu aos alunos entenderem o conceito de Limites Laterais, o que permitiu fixar este conceito em 98% dos alunos e reduzir em 2% a quantidade dos alunos que não conseguiram fazer este bloco de questões.

No dia 23 de fevereiro de 2017 (quinta-feira), das 13h 30min às 14h 50min, no período de 2 hora/aula, retornamos com a aplicação da Atividade 01, no bloco final das questões.

[3] questões de 70 a 80: neste bloco de questões observamos uma inquietação da turma diante, pois observamos alguns erros, e destacamos três mais recorrentes cometidos, tais como:

(1) "*Se o limite da função não existe então a função não existe*".
(2) " ...*apresenta interrupções na trajetória*".
(3) "... *não apresenta interrupção na trajetória*".

Notamos que nos erros cometidos, os alunos buscaram os termos "*apresenta Interrupções*" para "*descontinuidade*", e, "*não apresenta interrupção*" para "*continuidade*", por isso os resultados encontrados foram os esperados por nós, devido a maior parte da turma não ter tido aulas de limite. Dessa forma, marcamos na folha de atividades as respostas incorretas, e solicitamos que os alunos reorganizassem os resultados incorretos.

Para a fundamentação do conceito de Limites, percebemos que a grande maioria dos alunos pôde chegar ao resultado esperado, pois nas conclusões recorrentes, das quais selecionamos três, observamos que os alunos escreveram:

[1] "... *a definição de Limites consiste em encontrar um número mais próximo [..] se o valor da função se aproxima de tal ponto, o Limite existe*".
[2] "... *quando x se aproxima de muito de um valor no eixo x, então o valor de f(x) se aproxima de y, logo o Limite existe*".
[3] "...*se tomando valores pertos de um valor x_0, e obtemos um valor para f(x), existe limite*".

A partir dessas conclusões pudemos interver e ajuda-los a formular um conceito para Limite de Funções, do seguinte modo: "***se x tende a x_0 é igual ao número real de f(x) para valores próximos de x, sempre que x estiver muito próximo de x_0, e a função é contínua nesse ponto, então o Limite da função existe***".

Deste modo, podemos concluir que 98% alunos perceberam positivamente o conceito de Limites, especialmente no que diz respeito ao alcance do conteúdo, o que, possibilitou uma maneira simples na construção de suas habilidades e capacidades de aprendizagem do conhecimento matemático.

Avaliando o tempo que a turma gastou para realizar a Atividade 1, destacamos que foram necessárias 2 horas e 10 minutos, onde deste total, 5 min foram oferecidos para que os alunos escrevessem suas conclusões e 10 min para a fundamentação do conceito de Limites de Funções.

Chegamos ao final das duas aulas e os alunos conseguiram terminar a atividade, mesmo com a quantidade de perguntas. Agradecemos a participação de todos e saímos da sala.

3.3. TERCEIRA SESSÃO

O terceiro encontro ocorreu em 02 de março de 2017 (quinta-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula, nesse momento solicitamos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria dividido em duas aulas – atividade de Soma de Limites, cujo objetivo era descobrir uma relação entre o limite da soma de funções e a soma dos limites das funções e atividade de Produto de Limites, cujo objetivo era descobrir uma relação entre o limite dos produtos das funções e o produto dos limites das funções.

Igualmente à Atividade 1, os alunos deveriam observa que o preenchimento da Tabela seguiria na observação de dez gráficos de funções, a fim de encontrarem os resultados dos limites da funções e o limite da soma das funções, e rever os procedimentos aplicados no momento da execução da atividade.

Deste modo, cada aluno recebeu uma folha da atividade 2, respondendo inicialmente se as funções f(x) e g(x), no ponto x_0 indicado apresentava um comportamento contínuo e descontínuo, a seguir, de posse do gráfico, orientamos que todos as deveriam encontrar o valor dos limites de cada uma das funções e depois o valor do limite da soma das duas funções, manipulando os gráficos que acompanhara a tabela da atividade e apresentar suas conclusões ao terminar o preenchimento da tabela.

Quando todos os alunos acabaram a Atividade 2 – Soma de Limites de Funções, solicitamos que três alunos fossem até o quadro e escrevesse a sua conclusão. Ao observar três conclusões, recorrentes destacamos as seguintes, a saber:

[1] "***Se o limite da função f(x) existe e o da função g(x) não existe então o limite da soma não pode ser calculado***".
[2] "... ***calcula-se a o limite da soma das funções, se podemos calcular a soma do limites***".
[3] "... ***podemos calcular o limite da soma se as funções são contínuas***".

Como foi possível observar que a maioria dos alunos não chegou à conclusão que gostaríamos. Dessa forma, juntos estabelecemos um texto para a relação existente, observados por eles mesmos, ou seja, a definição da operação, denotado por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$$

E cuja intervenção se deu por uma pergunta: "*o que vocês puderam notar, observando o gráfico das funções em cada item*?" a maioria respondeu que: "***quando era possível encontrar o valor do limite de cada função, o valor do limite da soma das funções no mesmo ponto, tinha o mesmo valor se somando o valor de cada uma das funções, quando as funções são contínuas***". Disto, ficou evidente para turma que o Limite da Soma de funções ficaria seria assim enunciado: "***O Limite da Soma é a Soma dos limites***".

Para fixar e mostrar aos alunos a importância desta relação se passou uma lista de exercícios para a turma resolver. Como exemplo, um destes exercícios foi resolvido pelo aluno 22, e observamos que não foram encontradas dificuldades pelos outros, e que são comentados e indicadas às intervenções que se fez para tentar fixar esta atividade:

Exercício: Calcular o limite.

(1) Dado f(x) = 2x +1 e g(x) = 3x², encontrar $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to1} g(x)$ e $\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)]$:

$$\lim_{x\to1} f(x) = 2\cdot1+1 = 3$$
$$\lim_{x\to1} g(x) = 3\cdot1^2 = 3$$
$$\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)] = 3\cdot1^2+2\cdot1+1 = 6$$
$$\lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}[f(x)+g(x)] = 3+3 = 6$$

(2) Dado f(x) = 2x – 1 e g(x) = 1/x encontrar $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to1} g(x)$ e $\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)]$:

$$\lim_{x\to1} f(x) = 2\cdot0+1 = 1$$
$$\lim_{x\to1} g(x) = \frac{1}{0} = \nexists$$
$$\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)] = \frac{2\cdot0^2+2\cdot0+1}{0} = \nexists$$
$$\lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}[f(x)+g(x)] = \nexists$$

Observado essas resoluções, notamos que a checagem do resultado obtido, na atividade de Soma de Limites de Funções, reforçou o convencimento dos alunos, que às vezes ficam meio desconfiados e sem entenderem bem que a validade de uma operação uma vez comprovada se torna incontestável, e serve também para ajudá-los a “resguardar” melhor as ideias criando conexões mentais.

Encerrada a Atividade 2, nos primeiros 50 min da aula, partimos para a aplicação da Atividade 3 – Produto de Limites de Funções. Entregamos a cada um dos 35 alunos a folha, respondendo inicialmente se as funções f(x) e g(x), no ponto x_0 indicado apresentava um comportamento contínuo e descontínuo, a seguir, de posse do gráfico, orientamos que todos as deveriam encontrar o valor dos limites de cada uma das funções e depois o valor do limite do produto das duas funções, manipulando os gráficos correspondentes aos itens e apresentar suas conclusões ao fim do preenchimento da tabela.

A partir dessa atividade, notamos que os alunos se mostraram mais independentes se sentindo confiantes e seguros em relação as suas maneiras de resolver a atividade e conclusões, pois a cada descoberta feita por eles a sua autoconfiança aumenta, pois se avaliam adequados de aprender matemática. Em seguida mostraremos as conclusões apresentadas pelos alunos, ao fim da atividade.

Quando os alunos completaram a Atividade 3 – Produto de Limites de Funções, solicitamos que três alunos, falassem suas conclusões. Ao ouvir as conclusões no desenvolvimento da pesquisa, destacamos o seguinte das suas falas, como:

(1) "***Se pude encontrar o limite da função f(x) e da função g(x) não podemos calcular o limite do produto das funções f(x) e g(x)***".
(2) " ...***dá pra calcular o limite do produto se o produto do limites existe***".
(3) "... ***como na soma, podemos calcular o limite do produto se as funções são contínuas***".

Como foi possível perceber a maioria dos alunos não chegou à conclusão pretendida na atividade. Dessa forma, juntos estabelecemos um texto para a relação apresentada, observados por eles mesmos, ou seja, a definição da operação, onde apresentamos a seguinte notação:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$$

E cuja intervenção se deu com a mesma pergunta na atividade anterior, a saber: "*o que vocês puderam notar, observando o gráfico das funções em cada item*?" a maioria respondeu que: "***quando era possível encontrar o valor do limite de cada função, o valor do limite do produto das funções no mesmo ponto, tem o mesmo valor se multiplicando o valor de cada uma das funções, quando as funções forem contínuas***". Disto, ficou evidente para turma que o Limite do Produto de funções ficaria seria assim enunciado: "***O Limite do Produto é o produto dos limites***".

Seguindo a mesma, metodologia empregada na atividade 2, aplicamos exercícios de fixação para mostrar aos alunos a importância da relação na Atividade 3. Como exemplo, de um destes exercícios, que foi resolvido pelo aluno 35, observamos, também, que 95% não tiveram dificuldades e 5% tiveram êxito, posto que não tivesse que manipular um gráfico. Destas questões, apresentamos duas e a forma como resolveram:

Exercício: Calcular o limite.

(1) Dado f(x) = 2x +1 e g(x) = 3x², encontrar $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$ e $\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2\cdot 1+1 = 3$$
$$\lim_{x\to 1} g(x) = 3\cdot 1^2 = 3$$
$$\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)] = 6\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 = 9$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)] = 3\cdot 3 = 9 = 9$$

(2) Dado f(x) = 2x – 1 e g(x) = 1/x encontrar $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$ e $\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2\cdot 0 - 1 = -1$$
$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{0} = \nexists$$
$$\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{2\cdot 0 - 1}{0} = \nexists$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)] = \nexists$$

Observamos que essas resoluções estão organizadas, e a comparação do resultado obtido, na atividade anterior de Limites de Funções, mostrou que a capacidade dos alunos, estava cada vez mais aguçada e entenderem bem que a validade dessa operação, tal qual na Soma de Limites, apresentava mesma analogia, tornando a aula mais interativa e contribuindo para despertar no aluno o interesse pelo aprendizado de Limites.

Avaliando o tempo que a turma gastou para realizar a Atividade 2 e a atividade 3, no mesmo dia, ressaltamos que foram necessárias 2 horas e 10 minutos, onde deste total, 10 min foram oferecidos para que os alunos escrevessem suas conclusões e 20 min para a fundamentação do conceito da operação de Soma de Limites de Funções e Produto de Funções.

Da aplicação das três atividades propostas até este momento, percebemos que somente a Atividade 1 exigiu um tempo maior por parte dos alunos para resolvê-la, e que a partir desta, esse tempo foi diminuído consideravelmente. Então, acreditamos que na medida em que os alunos adaptavam-se com a metodologia proposta, tornava-se mais fácil trabalhar os cálculos, tendo em mãos o gráfico das funções envolvidas.

3.4. QUARTA SESSÃO

O quarto encontro ocorreu em 09 de março de 2017 (quinta-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula e no dia 13 de março de 2017 (terça-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula.

No dia 09 de março, solicitamos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria dividido em duas aulas – atividade de Quociente de Limites de Funções, neste dia e no próximo dia 13 de março a atividade de Raiz de Limite de Funções.

Após estas informações, pedimos que os alunos começassem a fazer a atividade 4 – Quociente de Limites de Funções, cujo objetivo era descobrir uma relação entre o limite do quociente de duas funções e o quociente dos limites dessas funções, igualmente as atividades de Soma e Produto, os alunos deveriam manipular os gráficos, conforme roteiro, em cada um dos itens apresentados na tabela.

Cada aluno recebeu uma folha da atividade 4, respondendo inicialmente se as funções f(x) e g(x), no ponto x_0 indicado apresentava um comportamento contínuo e descontínuo, a seguir, de posse do gráfico, orientamos que todos as deveriam encontrar o valor dos limites de cada uma das funções e depois o valor do limite do quociente das duas funções, manipulando os gráficos que acompanhara a tabela da atividade e apresentar suas conclusões ao terminar o preenchimento da tabela.

Quando todos os alunos acabaram a Atividade 4 – Quociente de Limites de Funções, solicitamos que três alunos fossem até o quadro e escrevesse a sua conclusão. Ao observar três conclusões, recorrentes destacamos as seguintes, a saber:

(1) “***Quando se pode encontrar o limite da função f(x) e da função g(x) podemos calcular o limite do quociente das funções f(x) e g(x)***”.

(2) “ ...***dá pra calcular o limite do quociente se o quociente do limites existir***”.
(3) “... ***podemos calcular o limite do quociente se as funções são contínuas***”.

Nesta atividade, percebemos que a maioria dos alunos não chegou à conclusão pretendida na atividade. Dessa forma, juntos estabelecemos um texto para a relação apresentada, observados por eles mesmos, ou seja, a definição da operação, com a seguinte notação:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

E cuja intervenção se deu com a mesma pergunta na atividade anterior, a saber: “*o que vocês puderam notar, observando o gráfico das funções em cada item*?” a maioria respondeu que: “***quando era possível encontrar o valor do limite de cada função, o valor do limite do quociente das funções no mesmo ponto, tem o mesmo valor se dividirmos o valor de cada uma das funções, quando as funções forem contínuas***”. Disto, ficou evidente para turma que o Limite do Quociente de funções ficaria seria assim enunciado: “***O Limite do Quociente é o quociente dos limites***”.

No dia 13 de março aplicamos a atividade 5 – Raiz de Limite de Funções, com o objetivo de descobrir uma relação entre o limite da raiz de uma função e a raiz do limite dessa função. Às 13 horas e 30 minutos, adentramos a sala, pedimos mais de uma vez, que os alunos se organizassem conforme a atividade anterior. Assim, aplicamos a com o objetivo de aprimorar as habilidades dos alunos para Raiz de Limite de Funções e fortalecer o processo de assimilação das mesmas, auxiliando deste modo, na aprendizagem deste conceito, que foi bem aceito e resolvida com eficiência.

Sendo a operação com radicais não muito trabalhadas no Ensino Médio. Notamos que a maioria dos alunos se apresentaram inseguros. Dificuldade esta, que tomou grande parte do tempo de aplicação. Solicitamos que três alunos fosse ao quadro explicar o seu ponto de vista apresentando um modelo para a resolução de algum item da tabela fornecida:

(1) “S*e podemos encontrar o limite da Raiz da função f(x), podemos encontrar a Raiz do limite da função f(x)*”.

(2) “*podemos calcular o limite da raiz se a raiz do limite existe*”.
(3) “*podemos calcular o limite da raiz se a função é contínua*”.

Notamos que os itens um índice de erro, igual a 40%, que estabeleça uma diferenciada forma de operacionalização que expresse a situação envolvendo raiz. Assim, verificamos que os alunos sentem dificuldade em manipular, algebricamente, as raízes, inclusive quando variamos o índice da raiz. Nesta atividade que chama atenção é dos itens em branco. Estes são por causa da manipulação algébrica e ausência do gráfico de cada item da tabela fornecida, os alunos alegaram que não lembravam como manipular os cálculos. Então, decidimos intervir apresentando a propriedade que envolve o Limite da Raiz de uma Função, onde se o índice da raiz pertence aos Naturais excluindo o zero, o valor do limite é positivo, e se o índice é ímpar o valor de limite da função é negativo.

Essas afirmações gerou uma discussão na turma. E a nossa intervenção por meio do debate com a turma constituía de uma ação expressiva. Solicitamos que os alunos terminassem a atividade 5 (cinco), e realizamos uma breve revisão de todos os itens apresentados, formalizamos a partir dessa discussão a seguinte definição de Raiz de Limite de uma Função, a saber: “***o limite da raiz da função, em um ponto é a raiz do limite da função, se a funções é contínua neste ponto***”.

3.5. QUINTA SESSÃO

O quinto encontro ocorreu em 16 de março de 2017 (quinta-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula e no dia 20 de março de 2017 (terça-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula.

No dia 16 de março, solicitamos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria dividido em duas aulas – atividade 6 – Limites Infinitos de Funções, neste dia e no próximo dia 20 de março a atividade 7 – Limites no Infinito de Funções.

Após estas informações, pedimos que os alunos começassem a fazer a atividade 6, onde deveriam resolver questões por manipulações algébricas em cada um dos itens apresentados na tabela. Mesmo que os alunos já estivessem familiarizados com o roteiro, e para a fixação do conceito de Limites Infinitos, foi fornecido para cada aluno um conjunto de 5 (cinco) gráficos, cada um deles contendo duas questões.

Aos poucos os alunos, olhando para o gráfico e para as questões esboçavam a resposta; mesmo que alguns se mostravam ainda inseguros, mesmo respondendo corretamente, contudo normalmente concluindo com uma pergunta: "***é isso***?". E para chegarmos ao nosso intuito e, para nos certificarmos de que estavam seguros na resposta, era devolver o questionamento: "Então o limite tende para?".

Percebemos, que maioria dos alunos, com um pouco mais de cuidado, conseguia perceber rapidamente e respondia corretamente. Mas, se novamente, questionados sobre o que significava sua descoberta, procurava motivá-los e perguntava o que estavam percebendo nesta atividade, dentre todas as mais recorrente que destacamos, denominamos de conclusão: "***Percebo que ao se aproximar o x de 0 (zero) pela direita o x tende ao infinito e ao se aproximar x de 0 pela esquerda o x tende ao menos infinito***".

Nesta atividade, o que nos chamou atenção foi o questionamento do símbolo de infinito (∞), Neste momento intervimos e insistimos em observar que este símbolo não representa nenhum número real, mas indica o comportamento da função quando x se aproxima do ponto x_0 pela direita ou pela esquerda.

Portanto da atividade 6, percebemos que os alunos compreenderam a ideia da definição de Limites Infinitos como uma relação quando x se aproxima do ponto x_0 para valores maiores que x_0, e podemos observar de maneira bem clara na atividade aplicada que a conclusão da maioria, tem um caráter generalista. Porém, ainda sentem problema para escrever, posto que até chegarem à universidade não tivessem o hábito de discutir, mas somente fazer cálculos.

No dia 20 de março, iniciamos a atividade 7 – Limites no Infinito de Funções, com objetivo de descobri uma relação que apresente o valor do limite de uma função quando o calor de x cresce ilimitadamente.

Novamente, o desempenho da turma foi bom, mas em comparação a atividade 6 (seis) foi baixa em relação ao tempo, pois confundiam com a atividade de Limites Infinitos, mesmos assim, os alunos não apresentaram dificuldades na execução da atividade 7 (sete). As dificuldades percebidas foram referentes à construção da conclusão para uma melhor compreensão dos Limites no Infinito de funções. Contudo, em função da experiência adquirida na atividade anterior, à evolução dos alunos para a construção das conclusões foi significativo, onde podemos destacar a seguinte conclusão construída por um aluno: “***se uma função é contínua, e x vai para o infinito, então o limite da função tende para um número real***”.

Mas com a nossa intervenção e para uma fixação da conclusão podemos concluir juntamente com os alunos que: “***quando uma função é contínua, e x cresce (decresce) ilimitadamente, então a função se aproxima de um valor real***”.

Acreditamos que, a partir das intervenções feitas, a aplicação da sequência didática causou discussões importantes entre os alunos que participaram da atividade, pois estas atividades os conduziram refletir sobre o conhecimento que desejávamos ensinar.

3.6. SEXTA SESSÃO

O sexto encontro ocorreu em 23 de março de 2017 (quinta-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula. Pedimos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria dividido em uma aula – atividade de Limite Trigonométrico Fundamental.

Após estas informações, pedimos que os alunos começassem a fazer a atividade 8, onde deveriam manipular questões algébricas em cada um dos itens apresentados na tabela.

Para encontrar uma relação para este limite trigonométrico fundamental, percebemos que os alunos buscaram, em sua maioria, uma troca de variável, em cada um dos itens apresentados, pois pelos cálculos, conforme apresentamos, como exemplo, na figura abaixo:

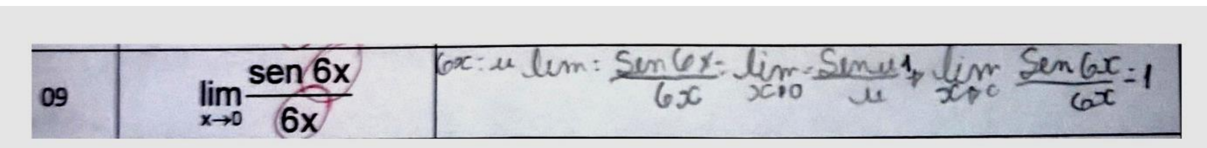


Figura 01 – resposta do aluno 26 para item 9 da atividade 8 – limite trigonométrico fundamental.

Conforme, resolviam foi possível perceber que a maioria tinha a seguinte conclusão: "***o limite sen(x) dividido por (x), se x 'vai' para zero, é 1***".

A formulação feita pelos alunos se aproxima da regra apresentadas nos livros de cálculo, mas acreditamos que essa atividade mereça um estudo melhor, para que o aluno possa ter um bom desempenho.

Percebemos durante o desenvolvimento da atividade os alunos tentaram explicar verbalmente a regra, mas sentiram dificuldade em expressar por escrito suas conclusões, apesar de terem conseguido realizar a atividade. Isso nos mostra que há uma lacuna entre a manipulação algébrica e a formalização dessa manipulação.

Assim, para uma compreensão, dos procedimentos que os alunos realizaram, procedemos a intervenção junto à turma, enunciando que o limite calculado, teria a seguinte conclusão: " ***O limite de sen(x) dividido por (x), quando (x) tende para zero, é sempre 1***", e tem a seguinte representação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Após os grupos terem feito a formalização da regra, resolvemos as questões e fizemos a institucionalização da regra tirando possíveis dúvidas dos alunos e, em seguida, a aplicação de exercícios.

3.7. SÉTIMA SESSÃO

O sétimo encontro ocorreu em 27 de março de 2017 (terça-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula.

Solicitamos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria uma aula – atividade de Limite Exponencial Fundamental e uma Breve história do 'e' (número neperiano).

Após estas informações, pedimos que os alunos começassem a fazer a atividade 9, onde deveriam manipular questões algébricas em cada um dos itens apresentados na tabela.

Observamos que os alunos tiveram dificuldade para perceber o valor deste limite nos itens sempre levava ao número '***e***', porque não dominavam o uso da calculadora, quando precisavam resolver a divisão. Ficavam perguntando se estavam realizando os cálculos corretos.

De forma geral, pudemos observar que na realização desta atividade com o uso da calculadora, os alunos mostraram dificuldades, principalmente, em armar o algoritmo na máquina, o que confirmou que na formulação da regra, as dificuldades foram, em especial, expressar a regra na forma escrita, deixando alguns itens incompletos.

Desse modo, no momento da formalização da relação, foi importante a nossa participação para conduzir e organizar as ideias dos alunos, pois os mesmos, posteriormente conseguiram entender as operações, explicaram verbalmente, mas não conseguiram, algumas vezes, sistematizar e escrever suas conclusões. Percebemos que eles tiveram entendimento da regra, pois aplicaram corretamente nos exercícios de sala, mas não foram capazes de especificar corretamente as mesmas.

3.8. OITAVA SESSÃO

O oitavo encontro ocorreu em 13 de abril de 2017 (quinta-feira) das 13h30min às 15h15min, com intervalo de 10 min, totalizando um período de 2 hora/aula.

Solicitamos que os alunos tomassem os mesmos lugares do encontro anterior, em seguida entregamos a cópia de atividade e explicamos que este momento seria a culminância de todas as atividades de Limite de Funções.

Após estas informações, pedimos que os alunos começassem a fazer as questões envolvendo o estudo de Limites de Funções, que foram apresentados nas atividades 1 até a atividade 9. Nesse dia, foi aplicado o pós-teste composto com as mesmas questões do pré-teste, cujo objetivo era obter informações que permitissem a comparação dos desempenhos dos alunos na resolução das questões nos pré-teste e pós-testes.

Nossas hipóteses se constituíram na construção de situações didáticas em sala de aula que possibilitassem ao aluno construir as ideias de Limites de Funções, sem a nossa prévia apresentação por sermos professor da turma na disciplina de

Cálculo. Pelas respostas dos alunos, percebemos que os mesmos conseguiram formular os conceitos envolvendo Limites de Funções Contínuas, observando os cálculos que fizeram com a manipulação de gráficos e manipulações algébricas e com a nossa orientação.

Percebemos durante o desenvolvimento das sequências didáticas, apresentadas nos encontros, os alunos aventuraram-se em explicar oralmente os conceitos trabalhados, sentiram dificuldade em expressar por escrito essas conclusões, apesar de terem conseguido realizar as atividades, e isso nos mostra que há uma lacuna entre o cálculo e a formalização desse cálculo. Nas formulações dos conceitos formulados, percebemos que os alunos, em algum momento, mostraram um rompimento no pensamento que estavam desenvolvendo, apresentando regras incompletas e sem sentido, e isso mostra que a construção do conhecimento pelo aluno não é um processo lineal, facilmente percebido.

A seguir apresentaremos a Análise a *Posteriori* e os procedimentos para a validação da sequência didática dessas atividades e do pré-teste, aplicados nesta turma.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção, temos por objetivo propor-se a socialização dos resultados encontrados através das análises *a posteriori* e a validação, ou seja, os dados obtidos com a aplicação do pré-teste e pós-teste, a sequência de ensino, e aplicação das atividades.

4.1. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

A análise dos resultados do pré-teste e pós-teste foi realizada levando em consideração a nossa análise *a priori* das questões, as dificuldades expostas pelos alunos do Curso de Ciências Naturais no questionário. Apresentamos os resultados comparativos dos acertos no gráfico 15, dos erros, no gráfico 16 e das questões não resolvidas, no gráfico 17.

Apresentamos as dificuldades e as limitações que os alunos encontraram no momento do desempenho das atividades, assim como realizaremos a comparação do desempenho dos alunos do pré-teste com o pós-teste, ao término da aplicação das 9 atividades propostas.

Mostraremos a seguir os dados do pré-teste em forma de tabela, com os números de acertos, onde chamamos de acertos aquelas que apresentaram uma resolução lógica ou procedimento de resolução mais próximo do correto, fazendo relação com o questionário.

Tabela 13: Percentual de alunos que acertaram as questões do pré-teste.

Questões apresentadas	**Alunos que acertaram (%)**	**Alunos que erraram (%)**	**Alunos que não fizeram (%)**
Item (a)	0	54	46
Item (b)	0	40	60
Item (c)	0	46	54
Item (d)	0	57	43
Item (e)	0	49	51
Item (f)	0	54	46
Item (g)	0	51	59
Item (h)	0	63	37
Item (i)	0	43	57
Item (j)	0	46	54
Item (l)	0	60	40

Item (m)	0	49	51
Item (n)	0	63	37

FONTE: Pré-teste realizado com os alunos (Fev/2017)

Esses dados revelam que por estarem vendo Limites pela primeira vez, os alunos não sabiam resolver questões envolvendo Limites de Funções, visto que afirmaram, no momento da aplicação do pré-teste, que ***não sabiam***, e ***não tinham ideia como resolvê-las***, confirmando as hipóteses levantadas na análise a priori desta pesquisa.

Em nossa análise foi possível notar que os alunos que tentaram resolver o item (a) da questão, possuíam algum conhecimento, posto que todos alunos erram, realizando apenas manipulação algébrica, 54% que tentaram erraram, não apresentando uma lógica no cálculo e os 46% deixaram em branco.

A partir do item (b) até o item (n) da questão 1, não tivemos acertos. Ressaltamos que em média 43% alunos erraram as questões e em média 57% dos alunos deixaram as questões em branco.

Disto, fica evidente que o ensino de matemática necessita urgentemente de novas maneiras de trabalhar a matemática em sala de aula, para que os alunos sintam-se envolvidos e aprendam essa disciplina tão necessária para o conhecimento adquirido, na vivencia em sociedade.

Mostraremos a seguir os dados do pré-teste em forma de tabela, com os números de acertos, onde chamamos de acertos aquelas que apresentaram uma resolução lógica ou procedimento de resolução mais próximo do correto, fazendo relação com o questionário.

Tabela 14: Percentual de alunos que acertaram as questões do pós-teste.

Questões apresentadas	**Alunos que acertaram (%)**	**Alunos que erraram (%)**	**Alunos que não fizeram (%)**
Item (a)	80	5	15
Item (b)	77	11	11
Item (c)	74	17	9
Item (d)	75	12	13
Item (e)	82	8	9
Item (f)	76	6	18
Item (g)	81	10	9
Item (h)	83	9	8
Item (i)	78	10	12

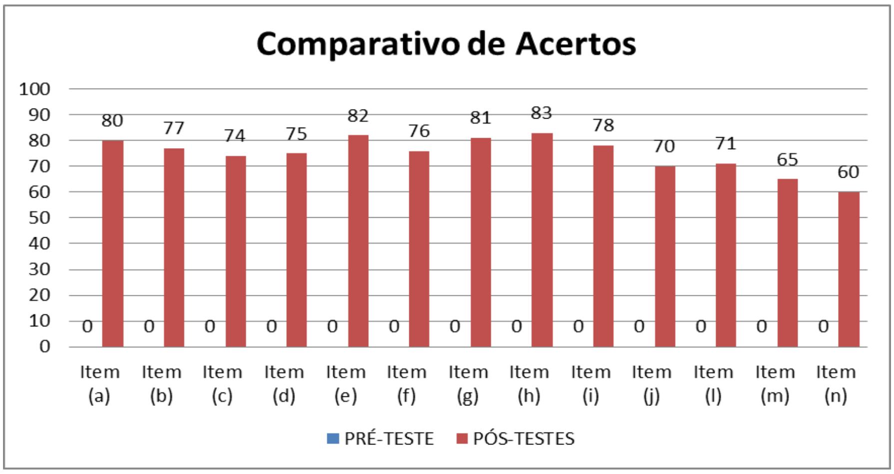
Item (j)	70	12	18
Item (l)	71	15	14
Item (m)	65	17	18
Item (n)	60	16	24

FONTE: Pré-teste realizado com os alunos (Fev/2017)

Esses dados revelam que pelo desenvolvimento das atividades durante a aplicação das sequencias didáticas, os alunos já sabiam resolver questões envolvendo Limites de Funções, visto que afirmaram, no momento da aplicação do pós-teste, que os itens estavam relacionados com as aulas vistas nos encontros.

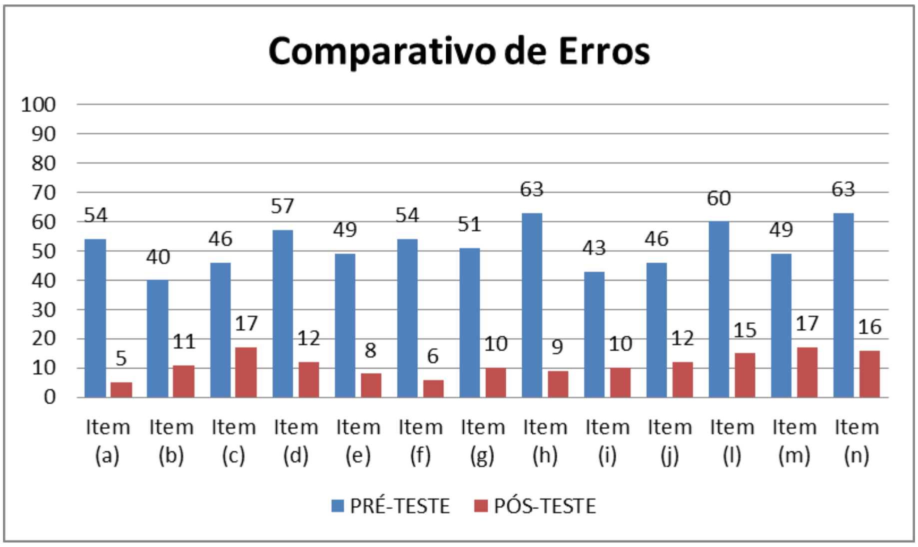
Os alunos obtiveram um aumento expressivo durante a resolução das questões, tal fato influenciado pela sequência de atividades e seriedade encarada no Pós-teste. Podemos perceber, de maneira nítida que o acerto em quase todas as questões é positiva, bem superior dos resultados do pré-teste, confirmando de tal modo nossa hipótese de que os alunos puderam construíram um conhecimento matemático relativo a Limites de Funções.

GRÁFICO 17 – percentual de alunos que acertaram as questões no pré-teste e pós-teste.



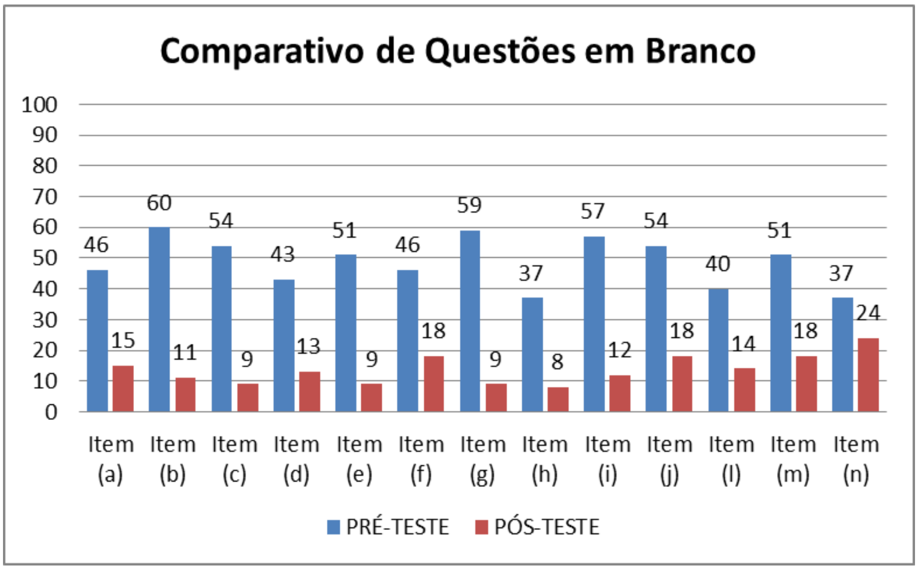
FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

GRÁFICO 18 – Quantidade de alunos que erraram as questões no pré-teste e pós-teste.



FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

GRÁFICO 19 – Quantidade de alunos que deixaram questões não resolvidas no pré-teste e pós-teste.



FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

Para registro, utilizamos um caderno, para as anotações das realizações apresentadas pelos alunos, durante o desenvolver-se da sequência didática estruturada, validando e comparando a nossa análise preditiva com o que ocorreu em nossa experimentação, conforme descrevemos.

TABELA 15 – Análise a priori e a posteriori das atividades

(CONTINUA)

Análise a priori – Atividade 1 Quando questionados sobre como calcular limites de funções:	**Análise a posteriori – Atividade 1** Confirmamos que:
• **-**Silêncio inicial, insegurança ao falar e calcular;	• -Relação das funções com seus gráficos;
• -Falas incoerentes sobre o conceito de função linear.	• -confusão do conceito de função com a simbologia de limites;
	• -Procuraram ligar o conceito de "tende" à palavra "aproximar".
Análise a priori – Atividade 2 Diante de diferentes funções e a repetição de algumas que eram:	**Análise a posteriori – Atividade 2** Confirmamos que:
• Identificação das regularidades, justificativa da continuidade (ou descontinuidade) dentro do ponto da abscissa;	• A regularidade da atividade permitiu encontrar a relação na operação de Soma de Limites das funções;
• Facilidade na leitura funções-gráfico.	• Sentimento de aquietação ao ter que desenvolver uma sequencia didático, sem explicação, pela contradição ao senso comum.
	• Facilidade em fazer a comparação dos símbolos e o gráfico; os contextos dos exercícios construídos estavam relacionados a matemática do ensino médio.

(CONTINUA)

Análise a priori – Atividade 3 Diante das funções apresentadas, percebemos que os alunos apresentaram:	**Análise a posteriori – Atividade 3** Confirmamos que:
• Identificação das regularidades, justificativa da continuidade (ou descontinuidade) dentro do ponto de abscissa;	• A regularidade da atividade permitiu encontrar a relação na operação de Produto de Limites das funções;
• Facilidade na leitura funções-gráfico	• Facilidade em fazer a comparação dos símbolos e o gráfico; os contextos dos exercícios construídos relacionados à matemática básica.
Análise a priori – Atividade 4 Diante das funções apresentadas, percebemos que os alunos apresentaram:	**Análise a posteriori – Atividade 4** Confirmamos que:
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar divisão de funções	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Quociente de Limites de Funções.
• Facilidade na leitura das funções observando os gráficos fornecidos	• Melhora no manuseio de gráficos.
• Dúvidas em como aplicar as operações algébricas envolventes.	• Melhora na habilidade com as ideias de funções contínuas e descontínuas no quociente de funções.

(CONTINUA)

Análise a priori – Atividade 5 Diante das funções apresentadas, percebemos que os alunos apresentaram:	**Análise a posteriori – Atividade 5** Confirmamos que:
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar RAIZ de funções	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Limites da Raiz de Funções.
• Dúvidas em como aplicar as operações algébricas envolvendo radicais.	• Melhora no manuseio de gráficos.
	• Melhora na habilidade com as ideias de funções contínuas e descontínuas no quociente de funções.
Análise a priori – Atividade 6 Diante de diferentes funções:	**Análise a posteriori – Atividade 6** Confirmamos que;
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar com as ideias de infinito em funções.	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Limites Infinitos.
• Facilidade na leitura das funções observando os gráficos fornecidos	• Melhora no manuseio de gráficos.
• Dúvidas em como aplicar as operações algébricas com as ideias de infinito.	• Melhora na habilidade com as ideias de funções contínuas e descontínuas.
Análise a priori – Atividade 7 Diante de diferentes funções:	**Análise a posteriori – Atividade 7** Confirmamos que:
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar com as ideias de infinito em funções.	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Limites no Infinito.

• Facilidade na leitura das funções observando os gráficos fornecidos	• Melhora no manuseio de gráficos.
• Dúvidas em como aplicar as operações algébricas com as ideias de infinito.	• Melhora na habilidade com as ideias de funções contínuas e descontínuas quando se aproximam do infinito pela direita e pela esquerda.
Análise a priori – Atividade 8 Diante de diferentes funções:	**Análise a posteriori – Atividade 8** Confirmamos que:
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar com relações trigonométricas, o que reflete uma dificuldade em trigonometria.	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Limites Trigonométrico Fundamental.
• Facilidade na leitura das funções observando os gráficos fornecidos	• Melhora no manuseio de calculadora.
• Dúvidas em como aplicar as operações trigonométricas.	• Melhora na habilidade com as ideias de funções trigonométricas do seno.
Análise a priori – Atividade 9 Diante de diferentes funções:	**Análise a posteriori – Atividade 9** Confirmamos que:
• Pouca ou nenhuma habilidade em trabalhar divisão de funções	• Pela regularidade da atividade apresentada, foi possível encontrar uma relação para Quociente de Limites de Funções.
• Facilidade na leitura das expressões algébricas com diferentes variações nos pontos de continuidade.	• Melhora no manuseio de substituições algébricas.

FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

A seguir, na tabela 13 apresentamos os tempos que foram gastos para o desenvolvimento de cada atividade trabalhada.

TABELA 16 - Relação das atividades e o tempo necessário para desenvolvê-la.

Atividades	Duração
PRÉ-TESTE	1h10 min
Atividade 01 – Conceito de limites de Funções	2h10 min
Atividade 02 – Soma de Limites de Funções	46 min
Atividade 03 – Produto de Limites de Funções	45 min
Atividade 04 – Quociente de Limites de Funções	44 min
Atividade 05 – Limites da Raiz de Funções	43 min
Atividade 06 – Limites Infinitos	44 min
Atividade 07 – Limites no Infinito	48 min
Atividade 08 – Limites Trigonométrico Fundamental	46 min
Atividade 09 – Limites Exponencial Fundamental	50 min
PÓS-TESTE	53 min

FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

Avaliando o tempo que a turma gastou para realizar a Atividade 1, destacamos que foram necessárias 2 horas e 10 minutos, onde deste total, 5 min foram oferecidos para que os alunos escrevessem suas conclusões e 10 min para a fundamentação do conceito de Limites de Funções., e que a partir da atividade 2, esse tempo foi reduzido. Então, acreditamos que na medida em que os alunos adaptavam-se com as atividades, ficava mais compreensível cada uma, tanto no desenvolvimento dos cálculos.

Nesta parte da pesquisa concluímos, que o conjunto das três atividades sobre o ensino de Limites de Funções por meio de atividades estruturadas, aplicadas se mostrou como uma ferramenta potencial na prática pedagógica da matemática para a aquisição do conhecimento dos alunos do 1° ano do curso de ciências naturais.

Basicamente, as observações colhidas a partir das atitudes dos alunos participantes da pesquisa e a análise desses dados conseguidos pela aplicação do questionário, nos forneceram soluções para verificar as possibilidades da proposta da sequência didática para o ensino de Limites de Funções e se estão adequadas aos objetivos propostas nesta pesquisa. E segundo a análise dos dados coletados no pré-teste, e também pelas observações em sala de aula, poderemos concluir nossas observações.

Em cada aula que aplicávamos a atividades fazíamos os registros e iniciávamos as discussões dos seus resultados, sempre os chamava para resolvermos junto ao quadro, e cada aluno poderia se expressar mostrando a turma a sua forma de resolução. Observamos que o comportamento, requerido na pesquisa, trouxe para a ação pedagógica um desafio para o aluno e uma ferramenta para que pudéssemos perceber suas construções iniciais sobre as conclusões pretendidas.

Contudo a partir da aula 1, percebemos que a autoconfiança na resoluções das questões das atividades propostas foi gradativamente aumentando, diferentemente de quando se trabalha na aula tradicional, onde primeiro dá-se o conteúdo e após isso se aplicam os exercícios, elencamos isto a frequência dos alunos, nas aulas da sequencia didática e na realização do pós-teste, conforme destacamos na tabela 16, que teve relação direta com a porcentagem de acertos, apresentados no gráfico 15.

TABELA 17 – Frequência dos alunos do 1° ano de Ciências Naturais – Biologia, nas aulas e desempenho no pós-teste.

(CONTINUA)

Aula / Aluno	**Aula 1 Aula 2**		**Aula 3 Aula 4**		**Aula 5 Aula 6**		**Aula 7**	**Aula 8**	**Aul a 9**	**% de questões certas no Pós-teste**
Aluno 01	P	P	P	P	P	P	F	P	P	85%
Aluno 02	P	P	P	P	P	P	F	P	F	88%
Aluno 03	P	P	F	P	P	P	F	P	P	82%
Aluno 04	P	P	P	P	P	P	F	F	P	83%
Aluno 05	P	P	P	F	P	P	F	P	P	80%
Aluno 06	P	P	P	P	P	P	F	P	P	86%
Aluno 07	P	P	P	P	P	P	F	P	P	81%
Aluno 08	P	P	P	P	P	P	F	P	P	80%
Aluno 09	P	P	P	F	P	P	F	P	P	84%
Aluno 10	P	P	P	P	P	P	F	P	P	84%
Aluno 11	P	P	P	P	P	P	F	P	P	87%
Aluno 12	P	F	P	P	P	P	F	P	P	87%
Aluno 13	P	P	P	P	P	P	F	P	P	68%
Aluno 14	P	P	P	P	P	P	F	P	P	89%
Aluno 15	P	P	P	P	P	P	F	P	P	86%
Aluno 16	P	P	P	P	P	P	F	P	P	85%
Aluno 17	P	P	P	P	P	F	P	P	P	83%
Aluno 18	P	P	P	P	P	P	F	P	P	83%
Aluno 19	P	P	P	P	P	P	F	P	P	82%
Aluno 20	P	P	F	P	P	P	F	P	P	84%
Aluno 21	P	F	P	F	P	P	F	P	P	88%
Aluno 22	P	F	P	F	P	P	F	P	P	85%
Aluno 23	P	P	P	P	P	P	F	P	P	83%
Aluno 24	P	P	P	P	P	P	F	P	P	82%
Aluno 25	P	P	P	F	P	F	F	P	P	82%

Aluno 26	P	P	P	F	P	F	F	P	P	85%
Aluno 27	P	P	P	F	P	F	F	P	P	81%
Aluno 28	P	P	P	P	P	P	F	P	P	80%
Aluno 29	P	P	P	P	P	P	F	P	P	80%
Aluno 30	P	F	P	F	P	P	F	P	P	80%
Aluno 31	P	F	P	F	P	P	F	P	P	85%
Aluno 32	P	F	P	F	P	P	F	P	P	87%
Aluno 33	P	P	P	P	P	P	F	P	P	87%
Aluno 34	P	P	P	P	P	P	F	P	P	89%
Aluno 35	P	P	P	P	P	P	F	P	P	89%

FONTE: Pesquisa de campo (Março, 2017).

Da tabela anterior, podemos observar que na participação doa alunos na sequencia didática, propiciou um acerto de até 85% em média no pós-teste, e que mesmo o aluno 13 tenha uma média de acerto igual a 68%, isto não foi um dado pertinente para influenciar o resultado geral do pós-teste.

Destacamos que a intervenção realizada durante o desenvolvimento das atividades aumentou positivamente a cognição de habilidades como concentração, trabalho em grupo, autonomia, desenvolvimento da escrita matemática e do dialogo entre os alunos. Deste modo consideramos que essa metodologia de ensino pode ser considerada como uma grande alternativa para o ensino de Limites de Funções, e que qualquer professor pode adequar esse conjunto inicial de atividades em sua práxis pedagógica de sala de aula. A seguir destacaremos as considerações finais da nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetiva avaliar a potencialidade do ensino de limites de funções pelo uso de uma sequência didática de atividades estruturadas. A metodologia escolhida foi a Engenharia didática, que é o direcionamento desta pesquisa que tem como objetivo investigar os processos de aprendizagem em sala de graduação da UEPA. Onde será caracterizada por um desenho de experimentos em ações pedagógicas, que se caracterizará pela experimentação, pelo registro em que se estabelecem as atividades e os modos de validação que lhe compete. Como a aplicação das atividades se pôde diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o ensino e a aprendizagem do limite de função, envolvendo este objeto de estudo. E com a confrontação das analises *a priori* e *a posteriori*, bem como os referenciais do aporte teórico , que nos permitiu levantar o seguinte questionamento de pesquisa: Qual a potencialidade do ensino de limites de funções por meio de atividades estruturadas?

Na perspectiva de recompor uma trajetória de pesquisa visando à contribuição da ação do pesquisador em nossas atuações pedagógicas em sala e nessa relação procurando entender os caminhos que potencializam a construção da noção de Limites de Funções nos alunos nos fazem considerar alguns aspectos relevantes no processo de ensino e aprendizagem.

A revisão de literatura levantada nos permitiu um olhar sobre outros aspectos antes desconsiderados enquanto professor, por exemplo: sobre os diferentes olhares na formação do conceito, sobre a importância da conversão entre registros de representação nos simbólicos para a construção dos conceitos, sobre a compreensão do conceito, sobre a relação entre o uso de gráficos para resolução de problemas e a formação do conceito, a influência das nossas concepções sobre o tempo didático disponibilizado nas aulas para desenvolvimento dos conceitos, a relevância do confronto de registros inicialmente desenvolvidos sobre o que esperamos dos alunos e o que alcançamos com os mesmos, sobre a necessidade do constante refazer na prática educativa.

Nosso olhar de professor sobre os objetivos de aprendizagem inicialmente previstos e sobre o desenvolvimento da construção de conceitos com os alunos, confrontando suas concepções *a priori* com *a posteriori*, pode ser o limite para que o aluno sujeito do aprender, aprender não apenas na perspectiva de saber fazer exercícios, ou seja, aquele que resolve operações algébricas sem o seu devido sentido, mas também a sua visão para as diferentes táticas de resolução, e de que maneira um conceito pode estar envolvido, sobre os diferentes contextos e interações, que podem levá-lo a uma verdadeira educação matemática no ensino superior.

REFERÊNCIAS

AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática**. Ouro Preto – MG, 2011. 133 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha. 6 edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ÁVILA, G. O **Ensino do Cálculo e a Análise. Matemática Universitária**, nº 33. Dezembro de 2002, p. 83 – 95.

BAGNI, G.T. **Dimostrare e convincere, *Bollettino dei Docenti di Matematica***, 53-60. 1998.

BAGNI, G.T., «Simple» rules and general rules in some High School students' mistakes, ***Journal fur Mathematik Didaktik***, 124-138. 2000.

BOS, H.J.M. Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, ***Archive for History of Exact Sciences***, 1-90. 1975.

BOTTAZZINI, U. *Il flauto di Hilbert.* ***Storia della matematica moderna e contemporanea***, UTET, Torino. 1990.

BOTTAZZINI, U.; FREGUGLIA, P. & TOTI RIGATELLI, L. ***Fonti per la storia della matematica***, Sansoni, Firenze. 1992.

BOYER, C. **The History of the Calculus**: Hallerberg et. Al. (1969), ***Historical Topics for the Mathematics Classroom***, National Council of Teachers of Mathematics, Washington. 1969.

BOYER, C.B. ***Storia della matematica***, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968). 1982.

BROUSSEAU, Guy. **Os diferentes papéis do professor**. In PARRA, Cecilia e SAIZ, Irma (orgs.). Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas: Porto Alegre. Artes Médicas, 1996.

BREUNIG, Raquel Taís & NEHRING, Cátia Maria. **O Conceito de Limite sob a perspectiva da transposição didática**. X ANPED SUL, Florianópolis, outubro de 2014.

CALINGER, R. (Ed.) Vita mathematica: historical research and integration with teaching, Mathematical Association of Amer**ica**. 1996.

CARAÇA, B. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Porto Editora.1989

CASTELNUOVO, G. ***Le origini del calcolo infinitesimale***, Zanichelli, Bologna (reprint: Feltrinelli, Milano 1962). 1938.

CHEVALLARD, Y. ***La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné***, La Penseé Sauvage, Grenoble. 1985.

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. Tese (Doutorado em Matemática). Universite Scientifique et Medicale de Grenoble. Grenoble, 1983.

DZIEDZIC, M. et al., **Nivelamento em matemática para os cursos de engenharia do UNICENP**. CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. Anais... Porto Alegre: PUCRS, 2001. CD-ROM.

ECHEVERRY, N. **La ensenãnza del concepto de limite: continuidad y rupturas entre los niveles médio y universitário** (tesis), Universidad Nacional de Rio Cuarto, Córdoba.2001

FIGUEIREDO, V. L. X. ; MELLO, M. P; SANTOS, S. A. **Cálculo com Aplicações: Atividades Computacionais e Projetos**. Coleção IMECC. 2015.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity**. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Dordrecht, 1994. 328-375.

FRANCHI, R. H. de O. **Enfrentando as falhas na formação básica dos alunos ingressantes**. In: COBENGE, XXXI. Anais... 2003. CD-ROM.

FREITAS, H. C. L. de. **A reforma no ensino superior no campo da formação dos profissionais da educação básica: as políticas educacionais e o movimento dos educadores**. Educação & Sociedade, Campinas, n. 68, número especial, dez. 1999.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um **Curso de Cálculo**. Vol. 3 e 4. Rio de Janeiro. LTC, 2001.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GRAY, E.M. & Tall, D.O. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, Journal of Research in Mathematics Educatio***n***, 115-141. 1994.

GRUGNETTI, L. & ROGERS, L. **Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues**. In Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), History in Mathematics Education*. The ICMI Study*, 39- 62, Dordrecht, Kluver. 2000.

KLINE, M. ***Mathematical thought from ancient to modern times***, Oxford University Press, New York. 1972.

LIMA, Elon Lages. **Analise real, volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

MCKINZIE & TUCKEY. **High trigonometry, hyperreal numbers and Euler's Analysis of Infinities**, Mathematics Magazi*ne*. 2001, p. 339-368.

MARTINS, Pura Lucia Oliver. **Didática Teórica, Didática Prática para além do confronto.** São Paulo: Loyola, 1989.

MORAES, Mônica Suelen Ferreira de. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém, 2013.

NASCIMENTO, J. L. **Uma Proposta Metodológica Para a Disciplina de Cálculo I**. In: VI Encontro de Educação em Engenharia, 2000, Petrópolis. VI Encontro de Educação em Engenharia, 2000. v. único. p. 1-15.

PEREIRA, V. M. L.; CARVALHO, L. M. P. **Uso de projetos no ensino de cálculo**. In: COBENGE, XXXI. Anais... 2003. CD-ROM.

REIS, F. S. A **Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **Uma análise histórica-epistêmica da operação limite**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1994.

SÁ, P. F. de. **Atividade para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, S. L. de S. **Um mapeamento do ensino de funções exponenciais e logarítmicas no ensino básico**. 2005. 52f. Monografia (Especialização em Matemática). Universidade Federal Fluminense, Niterói , RJ.

SAD, Lígia Arantes. Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese (Doutorado em Educação em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SIERPINSKA, Anka. **Obstacles Épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée SauvageÉditions, v.6.1, p.5-67, 1985

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics. N. 12, 151-169. 1981.

TALL, D. O. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer. 1991.

TALL, D. O. **Intuition and rigor: the role of visualization in the** calculus. MAA Notes. N. 19, 105-119. 1991

TALL, D. O. **Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning)**. In: Proceedings of Asian Technology Conference in Mathematics, 5, 2000, Chiang Mai. Blackwood: ATCM. 2000.

VEIGA, I.P. A. **Projeto político-pedagógico: continuidade ou transgressão para acertar?** In: CASTANHO, M.E.L.M.; CASTANHO, S. (Org.). O que há de novo na educação superior: do projeto pedagógico à prática transformadora. Campinas: Papirus, 2000.

VIEIRA, W. . Obstáculos epistemológicos e o desenvolvimento do conceito de limite de sequências e séries. 2013. XVII EBRAPEM.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário Docente

Caro (a) Professor (a), Este instrumento objetiva coletar informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de matemática, encontrados por professores e alunos durante atividades em sala de aula. Nesse sentido, sua colaboração em responder este questionário, será de grande importância para o bom êxito do estudo em questão. As informações obtidas terão um caráter confidencial e sua identidade será preservada. Desde já agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho!

QUESTÕES Data ___/___/____

1 - Sexo

( )Masculino ( ) Feminino ( ) Outros

2 - Faixa Etária

( ) 15-20 anos ( ) 21-25 anos ( ) 26-30 anos ( ) 31- 35 anos ( ) 36-40 anos ( ) 41 - 45 anos

( ) 46-50 anos ( ) 51-55 anos ( ) 56 –60 anos ( ) 61-65 anos ( ) 66-70 anos.

3 – Formação de nível superior

Curso: ___________________ ano de conclusão: ________ Instituição:_______

4 - Pós-Graduação: ( ) Não ( ) Sim , qual?

( ) Especialização. __________Ano da Conclusão: ________ Instituição:______

( ) Mestrado ._______________Ano da Conclusão: ________ Instituição:______

( ) Doutorado. ______________Ano da Conclusão: ________ Instituição:______

5 - Tempo de serviço como professor de matemática no nível superior?

( )Menos de um ano ( )De 1-5 anos ( )De 6-10 anos ( )De 11-15 anos( ) De 16- 20 anos

( ) De 21- 25 anos( ) De 26-30 anos ( ) De 31-35 ( ) Mais de 35 anos

6 - Turmas (s) em que está lecionando atualmente?

No CCSE/UEPA: ____

No CCNT/UEPA: ____

7 - Quais os cursos que você já lecionou Limites?

No CCSE/UEPA: ____

No CCNT/UEPA: ____

8 - Tipo de Universidade que trabalha atualmente:

( ) Pública Estadual ( ) Publica Federal ( ) Privada ( ) Outra. Qual?______________

9 - Durante sua formação de professor de matemática você fez alguma disciplina que abordou métodos para o ensino de Limites?

( ) Não ( ) Sim qual?____

10 - Durante sua atuação como professor de matemática você já fez algum curso ou participou de evento que abordou métodos para o ensino de Limites

( ) Não ( ) Sim qual?____

11 - Quando você aprendeu Limites foi por meio de:

( ) definição seguida de exemplos e exercícios

( ) situação problema para depois introduzir o assunto

( ) experimento para chegar ao conceito

12 - Quando você ensina Limites, a maioria das aulas começa:

( ) pela definição seguida de exemplos e exercícios

( ) com uma situação problema para depois introduzir o assunto

( ) com um experimento para chegar ao conceito

13- Para fixar o conteúdo de Limites você costuma:

( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos

( ) Solicitar que os alunos resolvam os exercícios de livro indicado para a disciplina Cálculo.

( ) Não propõe questões de fixação

( ) Solicita que os alunos procurem questões sobre o assunto para resolver em livros de Cálculo.

14- Preencha o quadro abaixo com base na sua experiência de professor (a)

Assunto	Costuma ter estudado?		Nível de dificuldades para aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
1. Ideia de Limite							
2. Conceito de Limite							
3. Limites Laterais							
4. Limite de Função Contínua							
5. Limite de Função Descontínua							
6. Limite da Soma de Funções							
7. Limite do Produto de Funções							
8. Limite do Quociente de Funções							
9. Limite da Raiz de Funções							
10. Limites Infinitos							
11. Limites no Infinito							
12. Limites Trigonométricos							
13. Limite Trigonométrico Fundamental							
14. Limite da Função Exponencial							
15. Limite da Função Logarítmica							
16. Limite Exponencial Fundamental							
17. Aplicações de Limites							

15- Você já realizou o ensino de Limites por meio de experimentos?

( ) Não ( ) Sim qual?____

APÊNDICE B – Questionário Discente aplicada na fase preliminar

Caro (a) Aluno (a),

Este instrumento objetiva coletar informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de matemática, encontrados por professores e alunos durante atividades em sala de aula. Nesse sentido, sua colaboração em responder este questionário, será de grande importância para o bom êxito do estudo em questão. As informações obtidas terão um caráter confidencial e sua identidade será preservada.

Desde já agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho!

QUESTÕES Data ___/___/____

1- Sexo

( )Masculino ( ) Feminino ( ) Outros

2- Faixa Etária

( ) 15-20 anos ( ) 21-25 anos ( ) 26-30 anos ( ) 31- 35 anos ( ) 36-40 anos ( ) 41 - 45 anos

( ) 46-50 anos ( ) 51-55 anos ( ) 56 –60 anos ( ) 61-65 anos ( ) 66-70 anos.

3 –Ano em que ingressou na UEPA?

4- Quando você ingressou na UEPA já tinha realizado outro curso superior?

( ) Não ( ) Sim. Qual?____

5- Cursou Cálculo na UEPA?

( ) Não ( ) Sim. Qual?____

6- Em que ano você cursou Cálculo I? ____

7- Você adota algum livro texto para Cálculo I?

( ) Não ( ) Sim. Qual?____

8- Você ficou em Dependência em Cálculo I?

( ) Não ( ) Sim. Quantas vezes?____

9- Você achou relevante ter estudo Limites?

( ) Não ( ) Sim. Por que?____

10- O Procedimento predominante das aulas de Limite que você teve foi:

( ) Definição seguida de exemplos e exercícios;

( ) Situação problema para depois introduzir o assunto;

( ) Atividade para chegar nos conceitos e propriedades;

( ) Aulas experimentais para chegar ao conceito.

11- Para fixar o conteúdo de Limites o(a) docente que ministrou a disciplina costumava:

( ) Apresentar uma lista de questões descontextualizadas para serem resolvidas;

( ) Apresentar uma lista de questões que caíram em vestibulares, concursos ou contextualizadas;

( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto;

( ) Solicitar que os alunos resolvessem exercícios do livro indicado;

( ) Não propor questões de fixação

( ) Solicitar que os alunos procurassem questões de Limites para resolver.

12- Os recursos didáticos para o ensino de Limites utilizados foram:

( ) Pincel;

( ) Datashow;

( ) Livro texto;

( ) Apostilas e lista de questões;

( ) Roteiro de experimento.

13- Durante seus estudos sobre limites:

( ) Os resultados e as propriedades foram apresentadas com justificativas. ( )Sim ( ) Não

( ) Os resultados e as propriedades não foram apresentadas com justificativas. ( )Sim ( ) Não

14- Você considera que as aulas de Limites foram ministradas:

( ) Bem, de acordo com o plano de ensino e o domínio do(a) docente;

( ) Satisfatoriamente, de acordo com o plano de ensino e o domínio do(a) docente;

( ) Insuficientemente, de acordo com o plano de ensino e o domínio do(a) docente;

15- Preencha o quadro abaixo com base na sua lembrança no ensino de Limites:

Assunto	Costuma ter estudado?		Nível de dificuldades para aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
1. Ideia de Limite							
2. Conceito de Limite							
3. Limites Laterais							
4. Limite de Função Contínua							
5. Limite de Função Descontínua							
6. Limite da Soma de Funções							
7. Limite do Produto de Funções							
8. Limite do Quociente de Funções							
9. Limite da Raiz de Funções							
10. Limites Infinitos							
11. Limites no Infinito							
12. Limites Trigonométricos							
13. Limite Trigonométrico Fundamental							
14. Limite da Função Exponencial							
15. Limite da Função Logarítmica							
16. Limite Exponencial Fundamental							
17. Aplicações de Limites							

16 - Resolva as questões a seguir com base em sua resposta no quadro anterior

01. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$, definida em $R - \{1\}$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$, definida em $R - \{-1, 1\}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 4}{x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} 3^x$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

j) $\lim\limits_{x \to e^{x^2}} (\ln x)$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

02. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ se, } x \geq 0 \\ 2 \text{ se, } x < 0 \end{cases}$ é contínua em x=0.

no ponto $x = 0$

03. No Bairro do Utinga, em Belém, descobriu-se que o principal reservatório de água esta contaminado pelo Tricloroetileno (composto altamente cancerígeno), motivado pela contaminação de um depósito de lixo químico desativado, as proximidades do reservatório. Uma proposta da SAEB/PA indica que o custo, em milhões de reais, de remoção de x por cento de poluente tóxico é definido por:

$$C(x) = \frac{0,5x}{100 - x} \qquad (0 < x < 100)$$

Calcule: $\lim\limits_{x \to 100} C(x)$

04. A população de certa espécie de ratos no bairro da Pedreira, em Belém é dada por:

$P(t) = \dfrac{72}{9 - t} \qquad (0 \leq t < 9)$, onde t é medido em meses. Mostre que a população de ratos cresce ilimitadamente.

APÊNDICE C – Questionário Discente Aplicado na Experimentação

Caro (a) Aluno (a),

Este instrumento objetiva coletar informações para um estudo que pretende contribuir para superação dos obstáculos de ensino e aprendizagem de matemática, encontrados por professores e alunos durante atividades em sala de aula. Nesse sentido, sua colaboração em responder este questionário, será de grande importância para o bom êxito do estudo em questão. As informações obtidas terão um caráter confidencial e sua identidade será preservada.

Desde já agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho!

QUESTÕES Data ___/___/____

1 - Sexo

( )Masculino ( ) Feminino ( ) Outros

2 - Faixa Etária

( ) 15-20 anos ( ) 21-25 anos ( ) 26-30 anos ( ) 31- 35 anos ( ) 36-40 anos ( ) 41 - 45 anos

( ) 46-50 anos ( ) 51-55 anos ( ) 56 –60 anos ( ) 61-65 anos ( ) 66-70 anos.

3 – Ano em que ingressou na UEPA?

4 - Quando você ingressou na UEPA já tinha realizado outro curso superior?

( ) Não ( ) Sim. Qual?____

5 - Cursou Cálculo na UEPA?

( ) Não ( ) Sim. Qual?____

6 - Em que ano você cursou Matemática Aplicada I? ___________________________

7 - Você ficou em Dependência em Matemática Aplicada I?

( ) Não ( ) Sim. Quantas vezes?____

8 - Você acha relevante o estudo Limites?

9 – Quais os recursos didáticos para o ensino de Limites?

( ) Pincel;

( ) Datashow;

( ) Livro texto;

( ) Apostilas e lista de questões;

( ) Roteiro de experimento.

10 – Calcule.

01) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

02) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

03) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$, definida em $R - \{1\}$

03) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ quando $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$, definida em $R - \{-1, 1\}$

04) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 4}{x + 2}$

05) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

06) $\lim\limits_{x \to 2} 3^x$

07) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

08) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

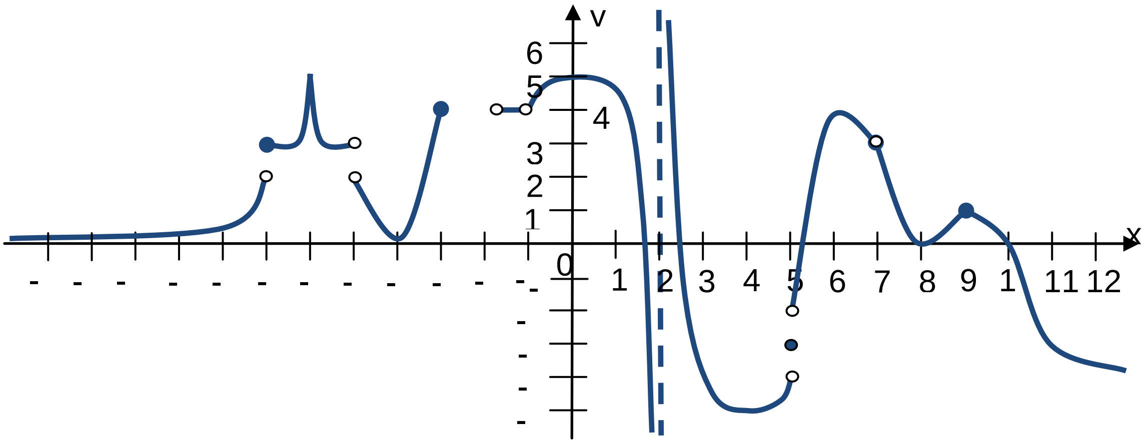
09j) $\lim\limits_{x \to e^{x^2}} (\ln x)$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)$

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

APÊNDICE D – Gráfico da Atividade 1



APENDICE E – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 2

Gráfico do item 1

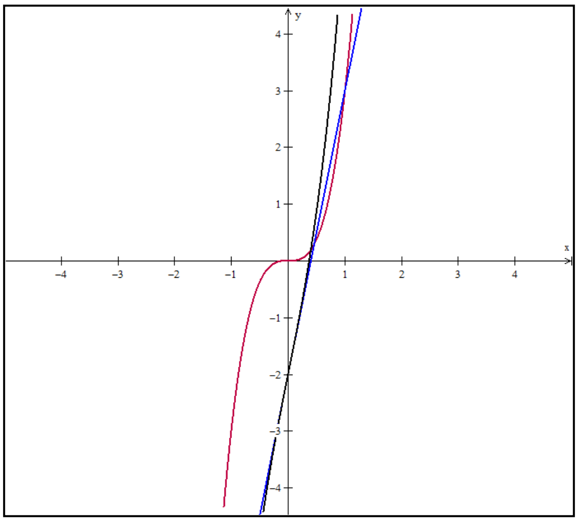


Gráfico do item 2

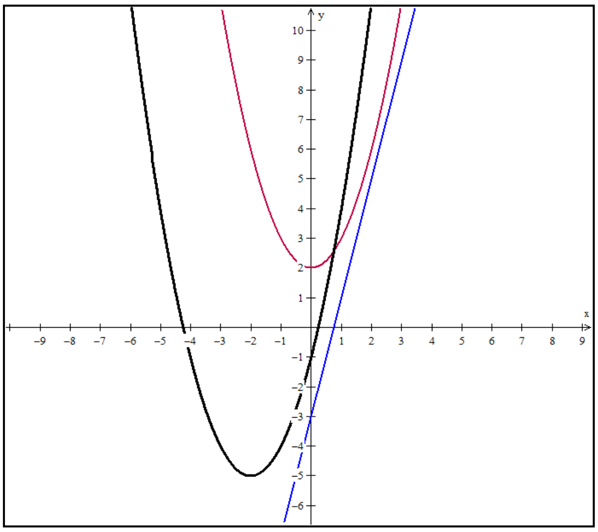


Gráfico do item 3

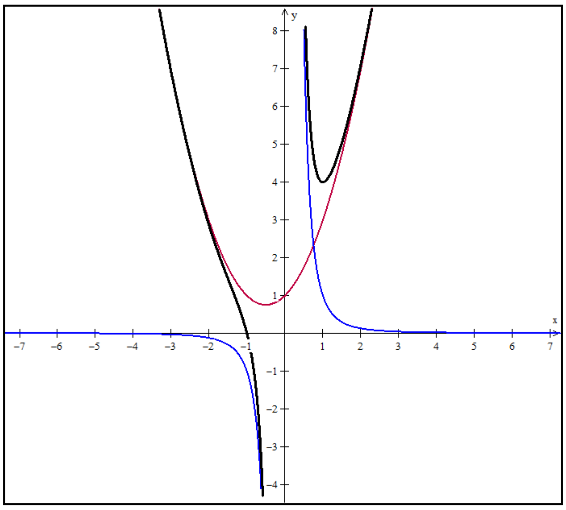
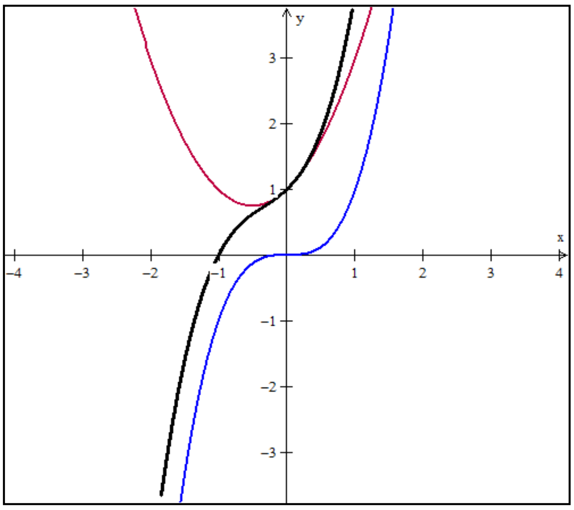


Gráfico do item 4



APENDICE F – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 2

Gráfico do item 5

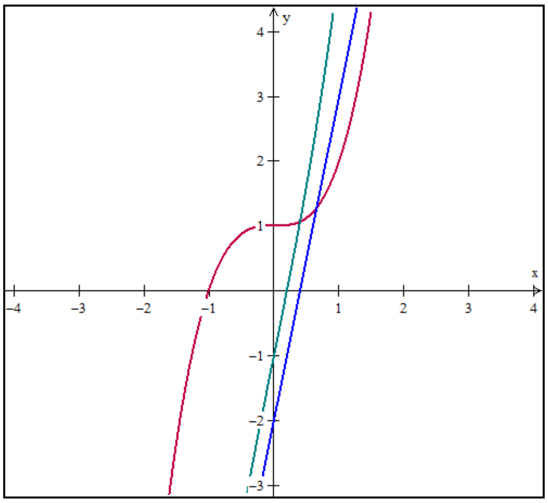


Gráfico do item 6

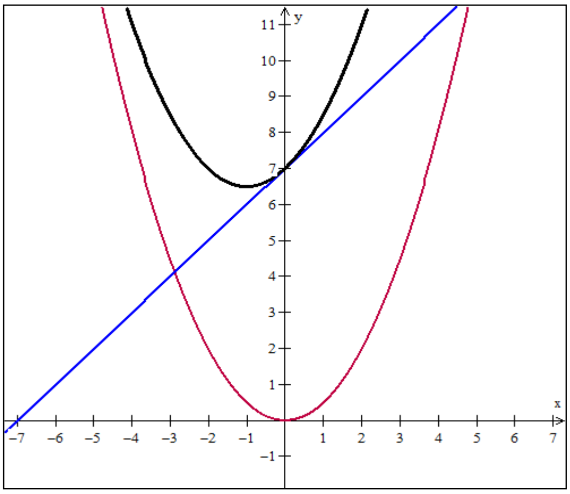


Gráfico do Item 7

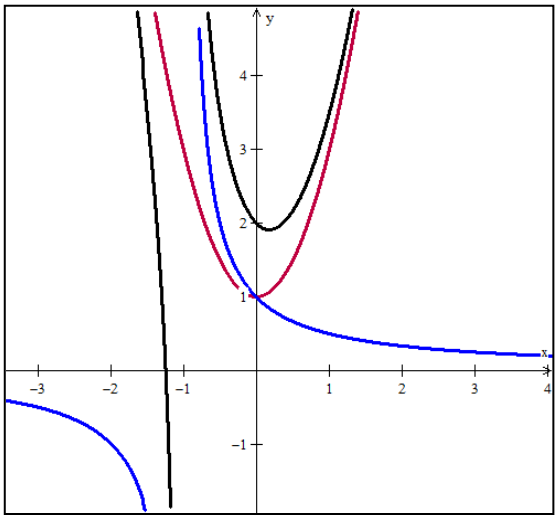
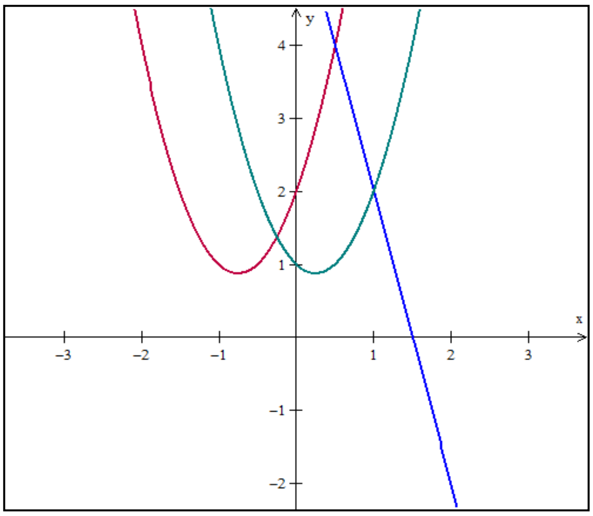


Gráfico do item 8



APENDICE G – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 2

Gráfico do item 9

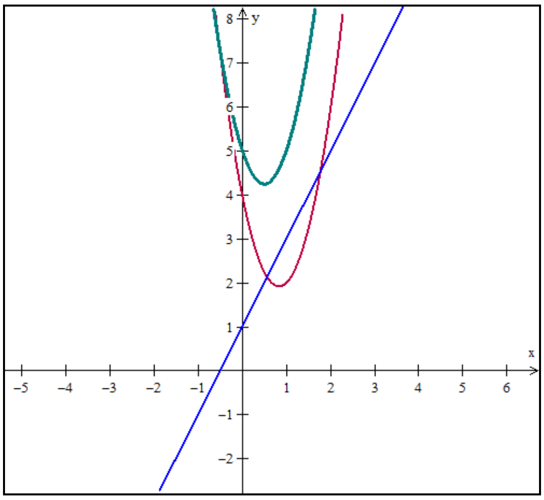
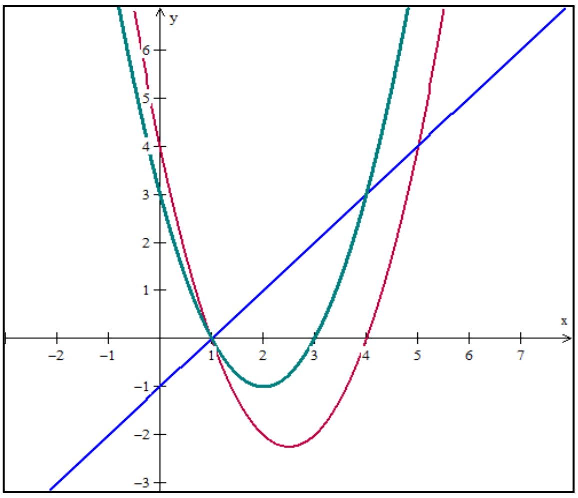


Gráfico item 10



APENDICE H – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 3

GRÁFICO DO ITEM 1

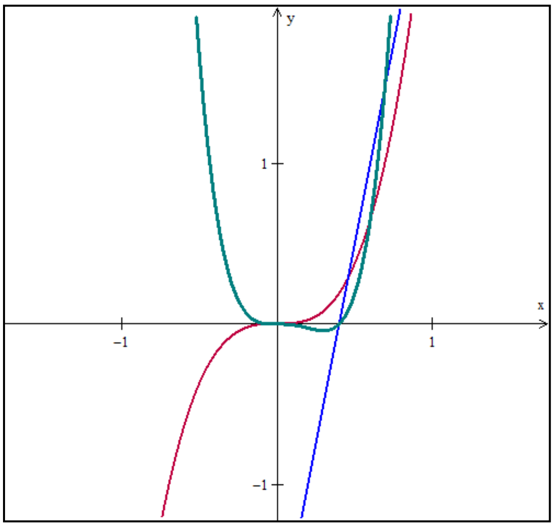


GRÁFICO DO ITEM 2

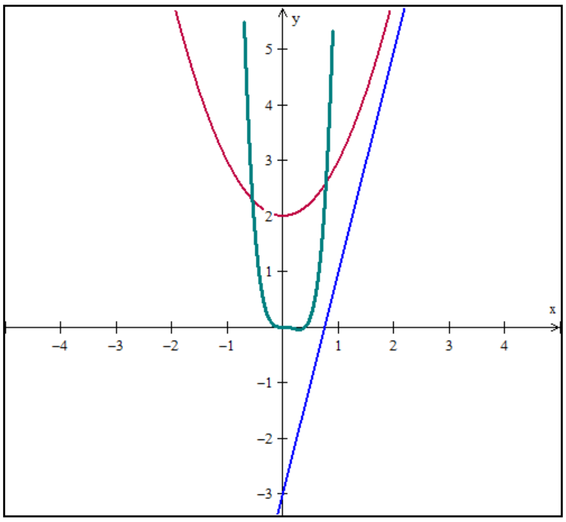


GRÁFICO DO ITEM 3

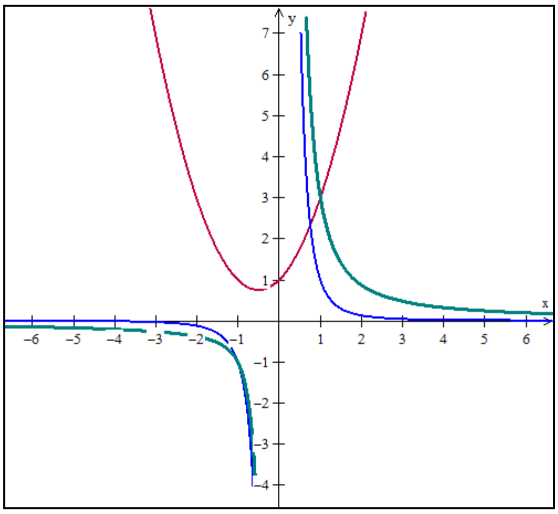
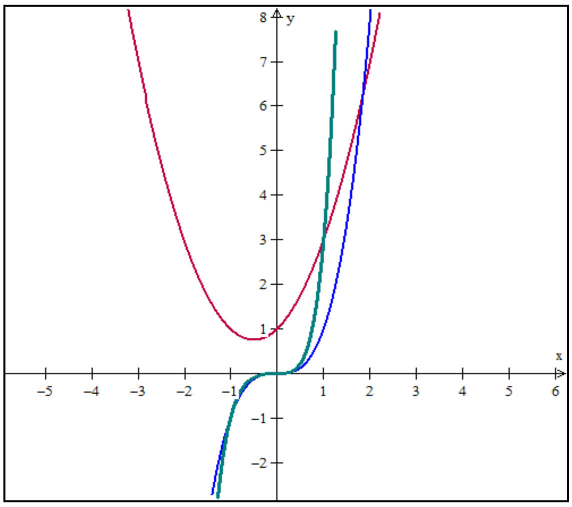


GRÁFICO DO ITEM 4



APENDICE I – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 3

GRÁFICO DO ITEM 5

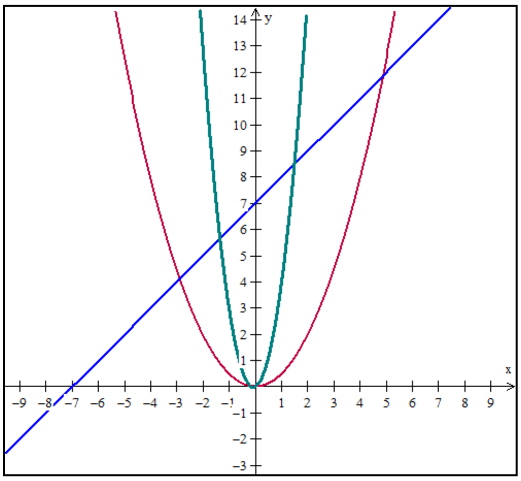


GRÁFICO DO ITEM 6

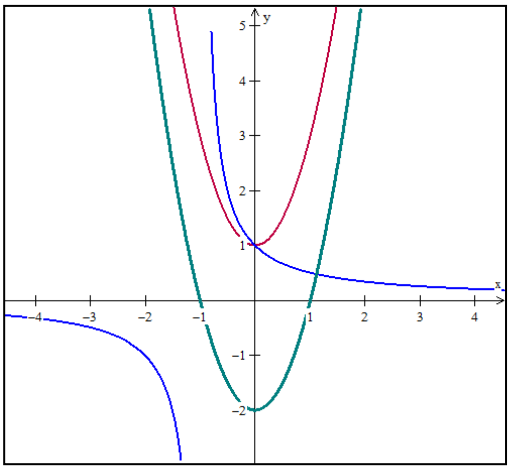


GRÁFICO DO ITEM 7

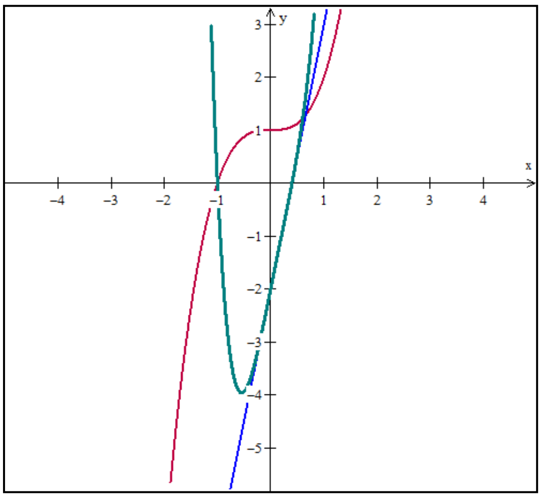
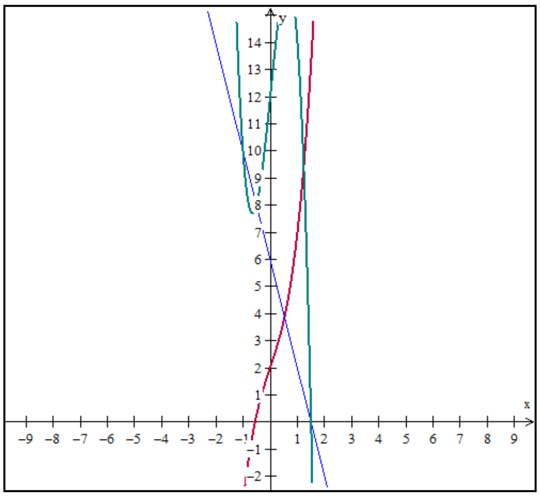


GRÁFICO DO ITEM 8



APENDICE J – GRÁFICOS DA ATIVIDADE 3

GRÁFICO DO ITEM 9

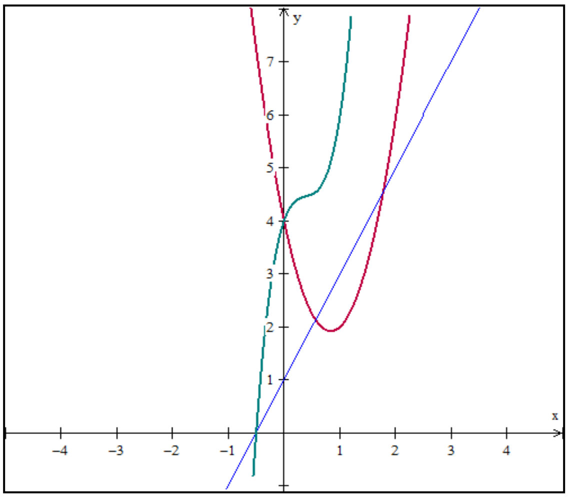
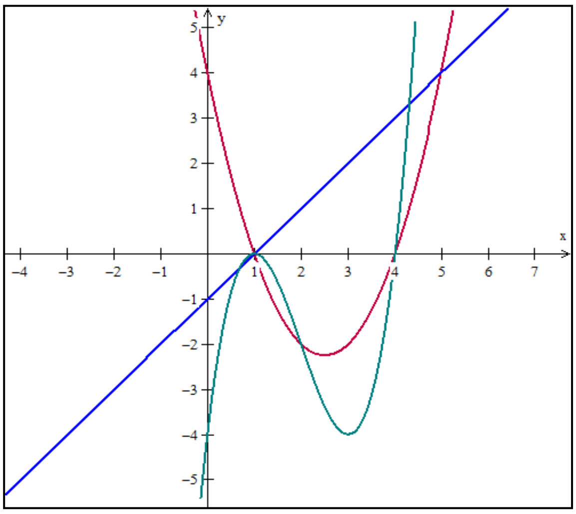


GRÁFICO DO ITEM 10



APENDICE K – ATIVIDADE 4

TÍTULO: LIMITE DO QUOCIENTE DE FUNÇÕES

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite do quociente de funções continua e o quociente dos limites

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Resolva os itens a seguir, do quadro dado.

N	Função f: R →R	f(x) é CONTÍNUA?	g(x) é CONTÍNUA?	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
		SIM	NÃO				
11.	$f(x) = 3x^3$ $g(x) = 5x - 2$ No ponto $x_0 = 1$						
12.	$f(x) = 4x - 3$ $g(x) = x^2 + 2$ No Ponto $x_0 = 1$						
13.	$f(x) = \frac{1}{x^3}$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = -1$						
14.	$f(x) = x^3$ $g(x) = x^2 + x + 1$ No ponto $x_0 = -1$						
15.	$f(x) = \frac{1}{2x^2}$ $g(x) = x + 7$ No ponto $x_0 = 3$						
16.	$f(x) = 2x^2 + 1$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$ No ponto $x_0 = 2$						
17.	$f(x) = 5x - 2$ $g(x) = x^3 + 1$ No ponto $x_0 = 1$						
18.	$f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ $g(x) = 6 - 4x$ No ponto $x_0 = 2$						
19.	$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ $g(x) = 2x + 1$ No ponto $x_0 = -1$						
20.	$f(x) = x^2 - 5x + 4$ $g(x) = x - 1$ No ponto $x_0 = -1$						

Observação

Conclusão

APENDICE L – ATIVIDADE 5

TÍTULO: LIMITE DA RAIZ

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o limite da raiz em um ponto é a raiz do limite nesse ponto.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTOS:

- Resolva os itens a seguir, do quadro dado.

N	Função f: R →R	$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)}$	$\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$
11.	$f(x) = \sqrt{3x^2}$ No ponto $x_0 = 2$		
12.	$f(x) = \sqrt[3]{4x-3}$ No ponto $x_0 = 1$		
13.	$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$ No ponto $x_0 = -1$		
14.	$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 3}$ No ponto $x_0 = -1$		
15.	$f(x) = \sqrt[3]{2x^2}$ No ponto $x_0 = 2$		
16.	$f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 4}$ No ponto $x_0 = -1$		
17.	$f(x) = \sqrt[3]{-8x^2}$ No ponto $x_0 = 1$		
18.	$f(x) = \sqrt{2x+5}$ No ponto $x_0 = 2$		
19.	$f(x) = \sqrt{2x+1}$ No ponto $x_0 = 4$		
20.	$f(x) = \sqrt{2x^3 - 8}$ No ponto $x_0 = 2$		

Observação

Conclusão

APENDICE M – ATIVIDADE 6

TITULO: **Limites Infinitos**

OBJETIVO: Estudar o comportamento para uma função quando o valor de f(x) cresce/decresce indefinidamente

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.

PROCEDIMENTO:

- Usar propriedades algébricas apresentadas em aula e encontrar os limites nos itens.

Função f(x): R→R		$x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$
11.	$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	a = 1	
12.	$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$	a = 2	
13.	$f(x) = \frac{3x}{(x-2)^2}$	a = 2	
14.	$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	a = 1	
15.	$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	a = 1	
16.	$f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x^2}$	a = 0	
17.	$f(x) = \frac{1}{x-1}$	a = 1	
18.	$f(x) = \frac{1}{5-2x}$	$a = \frac{5}{2}$	
19.	$f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}$	a = 1	
20.	$f(x) = \frac{3}{(x-1)^3}$	a = 1	

Observações

Conclusões

APENDICE N – ATIVIDADE DE FIXAÇÃO DA ATIVIDADE 7

EXERCÍCIOS

01. Calcule os limites

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3}$

(b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3}$

(c) $\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5}$

(d) $\lim_{x \to 5^-} \frac{6}{x-5}$

(c) $\lim_{x \to 2^+} \frac{6}{x^2-4}$

(e) $\lim_{x \to 2^-} \frac{6}{x^2-4}$

(d) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2-9}$

(f) $\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2-9}$

(g) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x-3}{x^2+3x}$

(h) $\lim_{x \to -3^-} \frac{x-3}{x^2+3x}$

APÊNDICE O – ATIVIDADE 7

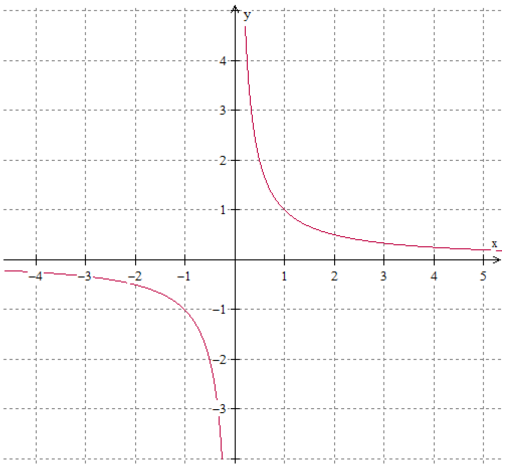
TITULO: Limites no Infinito

OBJETIVO: Estudar o comportamento para uma função quando a variável independente cresce ilimitadamente.

MATERIAL: Roteiro de atividade, lápis ou caneta.**PROCEDIMENTO:**

- Para cada gráfico a seguir responda as questões solicitadas.

Seja a função $f(x)=\frac{1}{x}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.

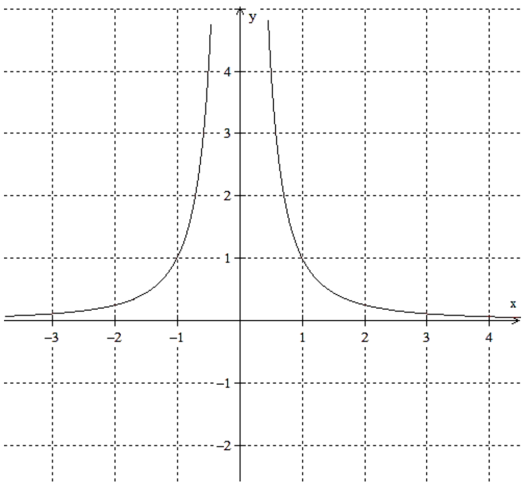


Questões

1) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

Seja a função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.

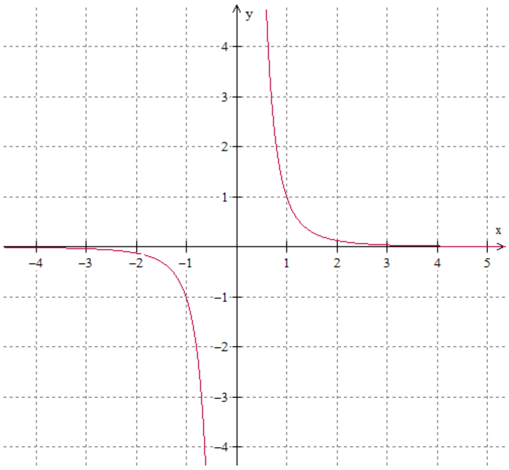


Questões

1) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

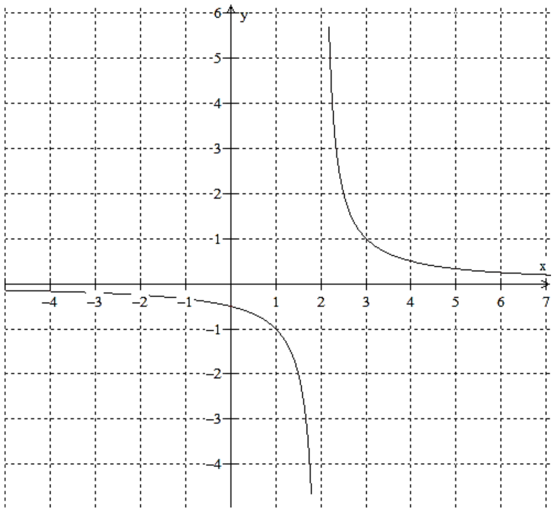
Seja a função $f(x)=\frac{1}{x^3}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



1) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^3}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela direita.

2) Determine o limite de $f(x)=\frac{1}{x^3}$ quando x se aproxima indefinidamente de zero pela esquerda.

Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.

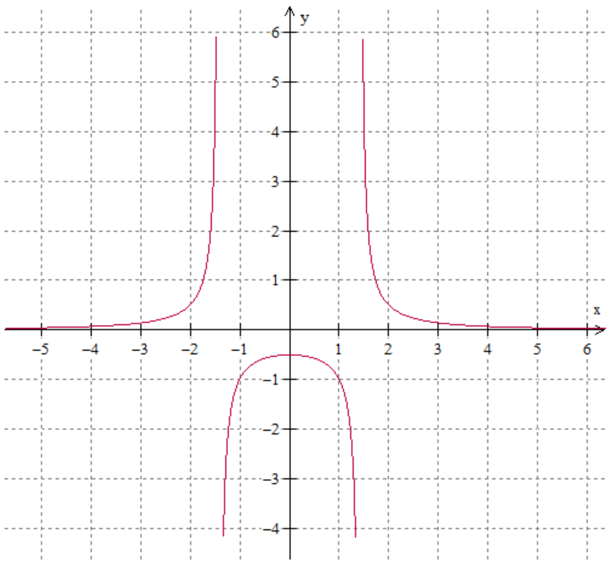


Questões

1) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela direita.

2) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ quando x se aproxima indefinidamente de dois pela esquerda.

Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, e vamos responder a questão a seguir com base no gráfico da função que esta ilustrada na figura a seguir.



Questões

1) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ quando x se aproxima indefinidamente de 3/2 pela direita.

2) Determine o limite de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ quando x se aproxima indefinidamente de 3/2 pela esquerda.

APÊNDICE P – EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO DA ATIVIDADE T

Exercícios

01. Calcule os limites

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 - 7x + 3)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2)$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x + 3}{5x^2 + x + 3}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 7}{x^5 - 2x + 9}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 + x}{3x^5 - 2x^4 + 9}$

(h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 + 3x}{5x^2 - x}$

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x - 7}{x^4 - 2x}$

(j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + x}{3x^5 - 9}$

02. Observe o quadro abaixo e calcule os limites no infinito a partir do estudo anterior:

Função	n é?		$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
	Par	Impar		
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				
$f(x) = x^4$				
$f(x) = x^5$				
$f(x) = x^6$				
$f(x) = x^7$				
$f(x) = x^8$				
$f(x) = x^9$				
$f(x) = x^{10}$				
$f(x) = x^{11}$				

Observação

Conclusão

APENDICE Q – APLICAÇÕES DE LIMITES NO INFINITO

Questão 01

A "Madeira Dura" fabrica uma linha de mesa para executivos. Estima-se que o custo total da fabricação de x mesas de certo modelo é de C(x) = 100x + 200000 reais por ano, de modo que o custo total de fabricação de x mesas é dado por: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ reais por mesa. O que acontece quando o custo total de fabricação de x mesa cresce ilimitadamente?

Questão 02

Em certa cidade, descobriu-se que o principal reservatório de água foi contaminado por um composto químico cancerígeno, em razão de um vazamento ocorrido em um depósito de lixo químico abandonado. Uma proposta submetida aos membros do conselho da cidade indica que o custo, medido em milhões de reais, de remoção de x por cento do poluente tóxico é dado por:

$$C(x) = \frac{0{,}5x}{100 - x} \qquad 0 < x < 100$$

O que acontece com o custo quando se remo x por cento de poluente tóxico ilimitadamente?

Questão 03

A concentração de um fármaco na corrente sanguínea de um paciente t horas após a injeção é: $C(t) = \frac{0{,}2t}{t^2 + 1}$, mg por cm cúbico. O que acontece quando a concentração cresce ilimitadamente?

Questão 04

A taxa de produção R na fotossíntese é ligada a intensidade **i** da luz pela função $R(I) = \frac{a \cdot i}{b + i^2}$, onde a e b são constantes positivas. O que acontece com a fotossíntese quando a taxa **i** de produção cresce ilimitadamente?

Questão 05

Se R$ 1 000,00 são investidos a juros de 9% de capitalizados n vezes por ano, o montante após 1 ano será 1 000(1 + 0,09)$^{1/x}$, onde x = 1/n é o período de capitalização. Assim, por exemplo, se n = 4, o período de capitalização é 1/4 do ano, ou seja, 3 meses. No caso da chamada capitalização contínua dos juros, o montante após 1 ano é dado pelo limite:

$$B = \lim_{x \to 0^+} 1000(1 + 0{,}09)^{1/x}$$

Estime o valor desse limite completando a tabela a seguir>

X	**1**	**0,1**	**0,01**	**0,001**	**0,0001**
$\lim_{x \to 0^+} 1000(1 + 0{,}09)^{1/x}$					

Questão 06

A arrecadação mundial total pela exibição de um filme de grande sucesso de bilheteria é aproximada pela função:

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

Onde T(x) é medido em milhões de dólares e x é o número de meses do filme em cartaz. Com base nos dados responda:

(a) Qual será a arrecadação do filme em longo prazo (quando x é muito grande)?

Questão 07

Uma grande corporação está construindo um complexo de casas, escritórios, lojas, escolas e igrejas em uma área de 4 325 acres numa comunidade rural. Os planejadores estimam que devido a este projeto, desta comunidade (em milhares) daqui a t anos será de:

$$P(t)=\frac{25t^2+125t+200}{t^2+5t+40}$$

Com base nas informações responda:

(a) Qual a população atual desta comunidade rural?

(b) Qual será a população desta comunidade em longo prazo?

Questão 08

Um estudo de despesas com automóveis baseados em carros populares (quatro cilindros) modelo 2000, revelou que o custo médio (prestações, combustível, seguro, manutenção e depreciação) medido em centavo por milha, é aproximado pela função: $C(x)=\frac{210}{x^{2,2}}+17,80$, onde x denota o número de milhas (em milhares) rodadas em 1 ano. O que acontece com o custo médio quando o numero de milhas rodadas cresce ilimitadamente?

Questão 09

Suponha que um peixe nadando a uma distancia de ***L*** metros, a uma velocidade de ***v*** metros por segundo contra uma corrente de ***u*** metros por segundos (u < v) tem um gasto total de energia de: $E(v)=\frac{aLv^3}{u-v}$, onde ***E*** é medida em metros-libra e ***a*** é uma constante. O que acontece com ***E*** quando ***v*** cresce ilimitadamente?

Questão 10

Quando lixo orgânico despejado em um lago, o processo de oxidação decorrente diminui a quantidade de oxigênio no lago. Entretanto, com o passar do tempo, a natureza restaurará a quantidade de oxigênio aos seus níveis originais. Supondo que a quantidade de oxigênio ***t*** dias após o despejo de lixo orgânico seja de: $f(t)=100\left(\frac{t^2+100t+100}{t^2+20t+100}\right)$, por cento do seu nível original. O que acontece com a quantidade de lixo orgânico quando o tempo cresce ilimitadamente?

APÊNDICE R – EXERCÍCIOS DA ATIVIDADE 7

01. Observe o quadro abaixo e calcule os limites no infinito a partir da aula anterior:

N	Limites	Resultado
1.	$\lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x+2}$	
2.	$\lim_{x \to 3} \frac{2x+1}{x-3}$	
3.	$\lim_{x \to \frac{5}{2}} \frac{3x+2}{5-2x}$	
4.	$\lim_{x \to -1} \frac{2x+3}{(x-1)^2}$	
5.	$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2-3x-5}{(x+2)^3}$	
6.	$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$	
7.	$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$	
8.	$\lim_{x \to -1} \frac{3x+4}{(x+1)^2}$	
9.	$\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2}$	
10.	$\lim_{x \to -2} \frac{x-4}{x+2}$	

APÊNDICE S – Breve História do *e*

O ***e*** fez intensas aparições no cálculo. Disto, o ***e*** foi descoberto pela primeira vez com a álgebra no século XVII. Os matemáticos indiretamente estiveram próximos muitas vezes de seu valor sem calcula-lo ou reconhecê-lo como algo fora do comum. O *e* foi quase descoberto quando os logaritmos foram inventados em 1618 por John Napier.

Os logaritmos ajudaram enormemente a computação em larga escala, permitindo que a multiplicação e a divisão fossem realizadas por adição e subtração. Estes logaritmos não eram os mesmos que a nossa concepção atual de um logaritmo. Eram números que auxiliavam a computação, e que ainda não eram considerados como funções que relacionavam os expoentes com suas bases.

Deste modo, os matemáticos confeccionaram tabelas de logaritmo natural, mas não sabia que o número *e* estava em qualquer lugar por trás dos valores obtidos na construção dessas tabelas. Os historiadores não têm certeza quem fora exatamente a primeira pessoa a calcular o valor do *e*, e também reconhecê-lo como um número especial. Muito provavelmente, não foi descoberto por um matemático, mas por alguém com grandes motivações. Quem efetivamente calculou o número *e* foi Leonhard Euler, e dizem que a designação decorre da inicial do seu sobrenome, mas também existe a versão do que o *e* se dava à inicial de "exponencial".

O número ***e*** encontra-se nas fundamentações de um dos processos de financiamento comercial: os juros compostos. O século XVII foi uma época de mudanças rápidas. Sendo a era da revolução científica, a proliferação do colonialismo, o surgimento da alfabetização em massa e uma explosão do comércio internacional. A era europeia de exploração (e exploração) trouxe culturas diferentes do mundo em contato, conflito e negócios entre países, de tal forma que nenhum dos grandes impérios de outrora se aproximou. O aumento da escala do comércio aumentou as demandas de capital. O empréstimo de dinheiro começou a desempenhar um papel cada vez maior na prosperidade dos indivíduos, empreendimentos empresariais e de nações.

Dada a crescente presença de finanças no século XVII, os historiadores acreditavam que a primeira pessoa para calcular o valor do *e*, seria mais provável um banqueiro ou comerciante que explorava as propriedades de juros compostos, nas transações financeiras. Sendo o Juro uma taxa cobrada por um credor sobre uma quantia de um mutuário para o serviço de fornecer um empréstimo.

As taxas de juros, tão somente, compensam o custo de propriedade para o credor por não ser capaz de fazer qualquer outra coisa com seus ativos enquanto eles são controlados pelo mutuário. Estas taxas de juros se acumulam ao longo do tempo, dependendo da taxa de juros. Aos mutuários pesam o interesse como o custo de ter dívida, enquanto aos credores pesa o retorno de juros como do seu empréstimo como um investimento.

Juro simples é onde o juro acumulado é sempre o que tem a mesma proporção do montante inicial emprestado ou investido (esse montante inicial é chamado de principal). Por exemplo, se você emprestar R$ 1,00 a 5% de juros por ano, após um ano, você deve R$ 1,05. Depois de dois anos você terá que pagar R$ 1,10, etc. Com efeito, o juro simples cria uma progressão aritmética, em que uma dívida ou investimento cresce no mesmo ritmo em todos os períodos de tempo.

O juro simples é raro e aparece geralmente somente em empréstimos em curto prazo. Juros compostos são onde o juro se acumula no principal e no juro prévio. Cada vez que a taxa de juros é aplicada ao total da dívida acumulada ou investimento, é referido como composição. Se você investir R$ 1,00 a 5% de juros composto anual, após o primeiro ano você teria R$ 1,05. Ao contrário do juro simples, no segundo ano ele aumentaria em 5% de R$ 1,05, renderá R$ 1,1025. A equação geral para juros compostos, composta uma vez por ano, é:

$$M = C(1+i)^n$$

Onde **M** é o total da dívida ou investimento acumulado, **C** é o principal, **i** é a taxa de juros, e **n** é o tempo decorrido nos últimos anos. Sob o interesse composto, dívidas e investimentos crescem por uma progressão geométrica. Os juros podem ser compostos várias vezes dentro de um determinado ano ou período de taxa de juros. Por exemplo, se você colocar um dólar em uma conta bancária que retorne 5% de juros composto por ano, bianualmente, sua conta crescerá 2,5% duas vezes em um determinado ano. Para intervalos de composição múltiplos dentro de cada período de taxa, a fórmula para juros compostos torna-se:

$$J = C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Onde **n** é o número de vezes que o interesse é agravado em um determinado ano e **t** é, portanto, o número total de vezes que é agravado.

$$J = C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n}$$

Acontece que compondo semanal rende mais dinheiro do que compondo mensal e em valores elevados de **n**, torna-se cada vez mais perto o que reconhecemos como o número *e* (ver tabela abaixo).

Tabela de juros compostos

n	$(1+1/n)^n$
1 (anualmente)	2
2 (duas vezes por ano)	2,25
4 (trimestralmente)	2,4414...
12 (por mês)	2,6130...
52 (semanalmente)	2,6925...
365 (diariamente)	2,7145...
8760 (de hora em hora)	2,7181...
525600 (de minuto a minuto)	2,7182...
31536000 (a cada segundo)	2,7182...

Fonte: Boyer, C. A História da Matemática, p. 35

Como você pode ver a composição com mais frequência não rende mais dinheiro até um ponto, mas rapidamente atinge um limite superior onde o crescimento com mais frequência não gerando um crescimento mais rápido. Os matemáticos (liderados por Jacob Bernoulli, em 1683) mais tarde viriam a definir ***e*** como o limite. Com **n** indo para o infinito, o crescimento ocorre de forma contínua, a cada instante possível, não importa quão pequeno o intervalo de tempo.

Desse modo, os juros simples reflete uma progressão aritmética de crescimento, juro composto reflete uma progressão geométrica de crescimento discreto, e os juros infinitamente composição reflete uma progressão de crescimento contínuo (crescimento exponencial). O número **J** é considerado como a base que representa o crescimento de processos ou quantidades que crescem continuamente na proporção da sua quantidade atual. É por isso que o ***e*** aparece tantas vezes na modelagem do crescimento exponencial ou decadência de tudo, desde bactérias a radioatividade.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
http://www2.uepa.br/mestradoeducacao