

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação-PPGED



Cira Naiá Campos Barbosa

**O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por
atividades experimentais**

Belém-PA
2021

Cira Naiá Campos Barbosa

**O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por
atividades experimentais**

Trabalho apresentado ao programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Educação.

Linha: Formação de Professores e Práticas Pedagógicas.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém-PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Barbosa, Cira Naiá Campos

O ensino do princípio fundamental da contagem por atividades experimentais / Cira Naiá Campos Barbosa; orientador Pedro Franco de Sá. Belém, 2021.

Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

1. Ensino por atividades experimentais. 2. Ensino fundamental.
3. Princípio fundamental da contagem. I. Mota Neto, João Colares da, orient. II. Título.

CDD. 23 ed. 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

Cira Naiá Campos Barbosa

O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por atividades experimentais

Trabalho apresentado ao programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de Mestre em Educação.
Linha Formação de professores
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da Avaliação: 28/09/2021

Banca Examinadora:

_____ Orientador
Prof. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação - Universidade do Estado do Pará

_____ Membro externo
Prof.^a Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Doutora em Educação - Universidade Federal de Pernambuco.

_____ Membro interno
Prof.^a Rosineide Souza Jucá
Doutora em Educação, Ciências e Matemática - Universidade do Estado do Pará.

Às mulheres da minha vida: Helena (*in memoriam*) e Leonor (*in memoriam*), pelos ensinamentos em minha existência, pelo referênciã de força e caráter. “Se ensina mais pelo exemplo do que pelas palavras”. Às minhas irmãs: Nayara, Soraya, Tayana e a minha filha Ana Paula, por me ensinarem que as dificuldades do caminho são a matéria-prima da tua força.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor que face às dificuldades não me permitiu fraquejar em cada viagem que fiz, tampouco que os meus problemas fossem maiores que eu.

Aos meus familiares, especialmente meu pai e minhas irmãs, pelo companheirismo de uma vida. Aos meus filhos, por compreenderem a minha ausência para estudar, e ao Naldo pelo apoio incondicional em vários momentos deste caminho.

À Margareth e Nilton Assis por acreditarem no projeto do mestrado e pelos cuidados primorosos com meus filhos.

À Universidade do Estado do Pará e todo corpo de funcionários do PPGED, por disporem do seu tempo para um atendimento sempre solícito e eficiente, especialmente ao Jorge Farias Figueiredo e Carlos Alberto dos Santos.

Ao meu orientador Pedro Franco de Sá, pela paciência em responder às minhas perguntas, suas orientações claras e objetivas contribuíram muito com este trabalho. Obrigado, especialmente, pelos conselhos para minha vida, estes alcançam além do que posso mensurar neste texto, seu compromisso com a educação e profissionalismo exemplar ensina sem palavras, espero que exista algo de Pedro Sá dentro de mim.

À professora Ivanilde Apoluceno e ao professor João Colares, pelo privilégio de escutar suas contribuições e aprender de uma forma tão prazerosa quanto foi a disciplina de epistemologia do saber.

Ao professor Sérgio, pelas suas provocações e perguntas, certamente o conhecimento está nas perguntas, nas coisas que ainda precisamos responder. À professora Lucélia Bassalo pelos esclarecimentos pontuais.

Às professoras Ana Paula e Tânia Lobato por deixarem claro que cada ato na educação é fruto de um caminho longo, cheio de acordos, de intenções que se tecem nas políticas públicas educacionais.

À professora Maria Betânia e a Jane pela disciplina, encantei-me com esta nova história, contada de uma forma fluída e divertida, muitos conhecimentos em uma aula muito bem construída.

Às professoras Marta Genú, Socorro França e Lúcia Melo, pelos recortes e contribuições na minha pesquisa que foram essência para a finalização do meu projeto.

Aos professores Fábio José e Ruth Borba, que contribuíram com apontamentos no meu texto de qualificação.

A todo o conjunto de profissionais do PPGED, pelo seu compromisso de oferecer uma formação de qualidade e acessível no Estado do Pará.

Aos meus colegas das linhas de Formação de Professores e Saberes Culturais por todo o conhecimento compartilhado, pelas conversas e debates enriquecedores e por todas as comidas, as lágrimas e os risos que dividimos.

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

(Paulo Freire)

BARBOSA, Cira Naiá Campos. **O ensino do Princípio Fundamental da Contagem por atividades experimentais. Dissertação de Mestrado** (Mestrado em Educação). PPGED. Universidade do Estado do Pará, Pará, 2021.

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa, cujo objetivo fora analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino fundamental, na resolução de questões envolvendo o princípio fundamental da contagem. Ademais, a pesquisa também se propõe a responder algumas questões: Quais os efeitos de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de questões envolvendo o princípio fundamental da contagem? Seu aporte teórico foi a teoria dos campos conceituais e o ensino por atividades experimentais. O caminho escolhido para este trabalho guarda os pressupostos da engenharia didática como metodologia de pesquisa. Consequentemente ele foi seccionado em 4 etapas: nas análises prévias, apresenta-se a fundamentação teórica e os trabalhos que abordam o campo conceitual multiplicativo; a combinatória e o princípio fundamental da contagem. Na segunda seção, denominada de concepção e análise *a priori*, explana-se o embasamento teórico do ensino por atividades e a descrição dos instrumentos de coleta de dados: o questionário sócio educacional, os testes e uma sequência didática para o ensino do princípio fundamental da contagem. Na terceira seção, descreve-se a experimentação, a coleta de informações, obtidas com os estudantes do 5º ano de uma escola estadual do distrito de Icoaraci em Belém (PA). Na última seção, denominada análise *a posteriori* e validação, estão dispostos os resultados alcançados das comparações percentuais entre os resultados dos testes, também utilizou-se a correlação linear de Pearson para constatar que as questões socioeducativas não tiveram influência significativa nos resultados dos testes desta pesquisa. Além do teste de hipótese, que apontou um aumento expressivo no desempenho entre os testes, o aumento dos acertos dos estudantes entre o pré-teste e pós-teste foi resultante da sequência didática utilizada no trabalho.

Palavras-chave: Campo Multiplicativo; Princípio Fundamental da Contagem, Ensino por Atividades Experimentais.

BARBOSA, Cira Naiá Campos. Teaching the Fundamental Principle of Counting through experimental activities. Tese (Master in Education) PPGED. Pará State University, Pará, 2021.

ABSTRACT

This work presents the results of a research, whose objective was to analyze the effects of the application of a didactic sequence based on the teaching of mathematics Teaching by Experimental Activities have on the performance of students of the 5th year of elementary school, in solving issues involving the Fundamental Principle of Counting. In addition, the research also proposes to answer some questions: What are the effects of a didactic sequence based on the teaching of mathematics by experimental activities have on the performance of students of the 5th year of elementary school in solving questions involving the Fundamental Principle of Counting? The theoretical contribution taken as a reference was Conceptual Field Theory and Teaching by Activities. The path chosen for this work keeps the assumptions of Didactic Engineering as a research methodology, consequently it was divided into 4 stages: Previous Analysis presented the theoretical foundation and the works that approach the Multiplicative Conceptual Field, the Combinatorial and the Fundamental Principle of Counting. In the second section called a priori conception and analysis, we present the theoretical basis of teaching by activities and the description of the instruments: the tests and a didactic sequence for teaching the Fundamental Principle of Counting. The third section describes the experimentation, the collection of information, which was obtained with the 5th year students of a state school in the District of Icoaraci in Belém. In the last section, called a posteriori analysis and validation, we present the results, obtained from percentage comparisons between test results, we also used Pearson's linear correlation to ascertain that socio-educational issues had no significant influence on the results of the tests in this research. In addition to the Hypothesis Test, which showed a significant increase in performance between tests, which corroborates that the positive increase in student performance between the pre-test and post-test was the result of the didactic sequence used at work.

Keywords: Multiplicative Field: Fundamental Principle of Counting, Teaching by Experimental Activities .

LISTA DE FIGURAS E IMAGENS

Imagem 1 – Resposta do E2 no pré-teste.....	120
Imagem 2– Resolução da questão 01.....	143
Imagem 3 – Resolução da questão 02.....	143
Imagem 4 – Resolução da questão 03.....	144
Imagem 5 – Árvores de possibilidades no pós-teste.....	158
Figura 1: Representação gráfica do conceito de Campo Conceitual.....	24
Figura 2: Representação gráfica do conceito de situação diante de um conhecimento operatório.....	25
Figura 3: Representação gráfica do conceito de situação diante de um conhecimento não-operatório.....	25
Figura 4: Representação gráfica do conceito de Invariantes Operatórios.....	26
Figura 5: Representação gráfica do conceito de Invariantes Operatórios.....	26
Figura 6: Mapa do campo conceitual das Estruturas Multiplicativas.....	27
Figura 7: Mapa Conceitual da TCC de Vergnaud.....	28
Figura 8: Esquema do campo conceitual.....	30
Figura 9: Questões utilizadas para análise.....	32

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Idade.....	110
Gráfico 2: Gênero.....	110
Gráfico 3: Reprovação.....	111
Gráfico 4: Gosto por estudar matemática.....	111
Gráfico 5: Ajuda nas tarefas de casa de matemática.....	112
Gráfico 6: Frequência de estudo fora da escola.....	112
Gráfico 7: Notas de matemática.....	113
Gráfico 8: Dificuldade para aprender matemática.....	1143
Gráfico 9: Distração nas aulas de matemática.....	1144
Gráfico 10: Trabalho remunerado.....	1154
Gráfico 11: Hábito de fazer compras.....	1155
Gráfico 12: Escolaridade do responsável masculino.....	1166
Gráfico 13: Escolaridade do responsável feminino.....	1177
Gráfico 14: Como as aulas de matemática acontecem.....	1188
Gráfico 15: Resolução de problemas durante as aulas.....	1199
Gráfico 16 - Distribuição da validade das atividades.....	142
Gráfico 17: Acerto por aluno.....	15353
Gráfico 18: Acerto por questão.....	155
Gráfico 19 - Gráfico do teste de hipótese.....	16969
Gráfico 20 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a afinidade com a matemática.....	17373
Gráfico 21 -Dispersão: diferença das notas nos testes aditivos e o auxílio nas tarefas de casa d matemática.....	175
Gráfico 22 - Dispersão: diferença das notas nos testes e os hábitos de estudos em matemática.....	17777
Gráfico 23 - Dispersão: diferença das notas nos testes e as notas em matemática.....	179
Gráfico 24 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a dificuldade em aprender matemática.....	181
Gráfico 25- Dispersão: diferença das notas nos testes e distração nas aulas de matemática.....	183
Gráfico 26 – Dispersão: Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercício de trabalho remunerado.....	185
Gráfico 27 - Dispersão: diferença das notas nos testes e o hábito de realizar compras.....	187
Gráfico 28- Escolaridade do responsável masculino.....	189
Gráfico 29 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino.....	191

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Trabalhos sobre o Campo multiplicativo.....	22
Quadro 2: As atividades do trabalho	34
Quadro 3: Desempenho por questão no pré e pós-teste	36
Quadro 4: Trabalhos sobre Combinatória	41
Quadro 5: Questões que utilizam o PFC	49
Quadro 6: problemas do PFC.....	51
Quadro 7: Percentual de tipos de problemas por séries e no manual do professor ..	62
Quadro 8: Questões dos diagnósticos.....	86
Quadro 9 - Roteiro da atividade 01	899
Quadro 10 - Categorização das conclusões.....	90
Quadro 11 - Categorização das conclusões da atividade da adição.....	91
Quadro 12 - Roteiro da Atividade 02	91
Quadro 13 - Categorização das conclusões da atividade da subtração.....	93
Quadro 14 - Roteiro da Atividade 03	933
Quadro 15 - Roteiro da Atividade 04	955
Quadro 16 - Categorização das conclusões da atividade da multiplicação.....	96
Quadro 17- Roteiro da Atividade 05	966
Quadro 18 - Categorização das conclusões da atividade da divisão.....	96
Quadro 19 - Roteiro da Atividade 06	999
Quadro 20 - Roteiro da Atividade 07	999
Quadro 21 - Lista de Questões da Atividade 07	100
Quadro 22 - Categorização das conclusões da atividade da redescoberta.....	104
Quadro 23 – Atividade de descoberta- preenchimento esperado	1055
Quadro 24- Roteiro da Atividade 08	1068
Quadro 25- Cronograma da experimentação	108
Quadro 26– Tipos de conclusões dos grupos nas atividades.....	124
Quadro 17 - Transcrição das conclusões da atividade de adição.....	124
Quadro 28 – Distribuição da validade das conclusões da atividade de adição.....	125
Quadro 29 - Transcrição das conclusões da atividade subtração.....	127
Quadro 30 – Distribuição da validade das conclusões da atividade subtração.....	127
Quadro 31 - Transcrição das conclusões da atividade multiplicação.....	129
Quadro 32 – Distribuição da validade das conclusões da atividade de multiplicação.....	130
Quadro 33 - Transcrição das conclusões da atividade da divisão.....	131
Quadro 34 – Distribuição da validade das conclusões da atividade da divisão.....	132
Quadro 35 – Respostas da equipe 01.....	135
Quadro 36 - Respostas da equipe 02.....	135
Quadro 37 - Respostas da equipe 03.....	136
Quadro 38 - Respostas da equipe 04.....	1377
Quadro 39 - Respostas da equipe 05.....	1388
Quadro 40 - Respostas da equipe 06.....	1399
QUADRO 41 – Conclusões da atividade do PFC.....	140
Quadro 42 – Distribuição da validade das conclusões da atividade do PFC.....	141
Quadro 43 .Síntese da distribuição da validade das atividades.....	141
Quadro 44 - Transcrição da atividade de fixação	145
Quadro 45 – Comparação do pré-teste e pós-teste	1499

Quadro 46- comparação de acertos e erros e brancos por questão	154
Quadro 47 -Tipos de erros dos estudantes no pré-teste.....	156
Quadro 48-Tipos de erros dos estudantes no pós-teste	1599
Quadro 49 – Validade das conclusões na análise a posteriori.....	160
Quadro 50 – Confronto da análise a priori e análise a posteriori.....	162
Quadro 51 - Acertos no pré-teste e pós-teste	167
Quadro 52- Classificação da Correlação Linear	171
Quadro 53 - Parametrização dos dados – afinidade com a matemática	172
Quadro 54 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a afinidade com a matemática.....	172
Quadro 55 - Parametrização- auxílio nas tarefas de casa de matemática	173
Quadro 56 - Correlação entre diferença das notas nos testes e o auxílio nas tarefas de casa de matemática	17474
Quadro 57 -Parametrização dos dados – hábitos de estudos em matemática.....	175
Quadro 58 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e os hábitos de estudos em matemática.....	175
Quadro 59 - Parametrização dos dados – notas em matemática.....	177
Quadro 60 - Correlação entre a diferença das notas nos testes s e as notas em matemática.....	179
Quadro 61 - Parametrização dos dados – dificuldade em aprender matemática	17979
Quadro 62 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a dificuldade em aprender matemática.....	17981
Quadro 63- Parametrização dos dados – distração nas aulas de matemática....	18181
Quadro 64 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e distração nas aulas de matemática.....	181
Quadro 65 – Parametrização - trabalha de forma remunerada	183
Quadro 66- Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercício de trabalho remunerado.....	183
Quadro 67 – Parametrização - hábito de realizar compras	185
Quadro 68- Correlação entre a diferença das notas nos testes e o hábito de realizar compras.....	185
Quadro 69 – Parametrização – escolaridade do responsável masculino	187
Quadro 70- Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino.....	187
Quadro 71 –Parametrização - escolaridade do responsável feminino	18989
Quadro 72 -Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino.....	18989
Quadro 73 – Correlações entre os testes e as questões sócio educacionais	19191

Sumário

1 INTRODUÇÃO	16
2 ANÁLISES PRÉVIAS	19
2.1 O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO	19
2.2 ESTUDOS SOBRE O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO	21
2.3 ESTUDOS SOBRE PROBLEMAS DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS...22	
2.4 ESTUDOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM	39
2.5 SÍNTESES DAS ANÁLISES PRÉVIAS	67
3.1 AS TENDÊNCIAS DE ENSINO DA MATEMÁTICA	73
3.2 O ENSINO POR ATIVIDADES.....	74
3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	78
3.3.1 Classificação dos problemas	81
3.4 O TESTE.....	85
3.5 AS ATIVIDADES	88
4 EXPERIMENTAÇÃO	108
4.1 PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO	109
4.1.1 Perfil sócio educacional	109
4.2 SEGUNDA SESSÃO.....	119
4.2.1 Pré-teste	120
4.3 TERCEIRA SESSÃO	122
4.3.1 Atividades do Campo Aditivo	123
4.7 SÉTIMA SESSÃO.....	133
4.7.1 Atividade de redescoberta	134
5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	148
5.1 ANÁLISE DOS TESTES DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM148	
5.2 ANÁLISE DAS OBSERVAÇÕES DAS EQUIPES	161
5.3 CONFRONTOS ENTRE A ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DAS ATIVIDADES.....	162
5.4 TESTE DE HIPÓTESE	166
5.5 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON	170
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	193
REFERÊNCIAS.....	197
Apêndice A – Material da questão 1 da atividade 7	201
Apêndice B– Material da questão 2 da atividade 7	202
Apêndice C - Material da questão 3 da atividade 7	203

Apêndice D –Material da questão 4 da atividade 7	204
APÊNDICE E - Lista de Questões do pré-teste e pós-teste	205
APÊNDICE F – Quadro síntese da atividade de descoberta.....	206
APÊNDICE G - ATIVIDADE DE FIXAÇÃO.....	207
ANEXO A	209
ANEXO B	210
ANEXO C	212
ANEXO D - FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA POR ATIVIDADES	213

1 INTRODUÇÃO

Durante o percurso como aluna na educação básica, não se estudou o princípio fundamental da contagem, em decorrência de diversos fatores externos, só se teve contato com a combinatória na universidade, todavia erroneamente acreditava-se que este assunto era restrito ao ensino médio. Quando professora das séries finais do ensino fundamental, abordou-se este tipo de questão somente na preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), onde este tópico é comumente explorado.

O primeiro obstáculo com o princípio fundamental da contagem surgiu quando se estava realizando um experimento sobre as questões do campo multiplicativo, na produção do trabalho de especialização em educação matemática. Utilizara-se uma aproximação da sequência didática de uma dissertação que guardava semelhanças com a referida proposta, entretanto os resultados foram muito diferentes. Enquanto o trabalho no qual se embasara, obteve excelentes resultados na questão que envolvia o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), este foi um fracasso nesta questão, mesmo tendo os menores valores numéricos de todo pós-teste, os discentes não reconheceram a questão como pertencente ao campo conceitual multiplicativo e a verificação teve os piores índices de acerto, não se possuíam explicações para tal resultado.

Este fato foi desconsiderado no projeto para o mestrado, buscava-se pesquisar novamente o campo multiplicativo, mas não existia um recorte específico para PFC, isto só apareceu na delimitação do objeto. A revisão de estudos respondeu várias das indagações propostas, considerando que as questões pertencentes à combinatória como parte do campo multiplicativo são de resolução mais difícil, por vários motivos que serão elencados no texto.

A recomendação do ensino da combinatória aparece em vários documentos oficiais, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, e já existia uma orientação da importância do seu ensino em toda a educação básica, contudo este documento não era normativo e muitas vezes não era efetivado no ensino fundamental. Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) possui força normativa e, como tal, determinou o que deve ser ensinado em cada ciclo ou série, indicando

que as noções da combinatória sejam iniciadas desde o 1º ano e que perpassassem todo o ensino fundamental de maneira contínua e interligada.

O âmago do trabalho está em responder à seguinte indagação: Quais os efeitos de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de questões envolvendo o princípio fundamental da contagem?

Esta indagação instigou a definição do objetivo: analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino Fundamental na resolução de questões envolvendo o princípio fundamental da contagem.

O caminho escolhido para a realização da pesquisa, resguarda os pressupostos da engenharia didática como metodologia de pesquisa, já que tal metodologia se ocupa de questões da prática docente e problemas inerentes à sala de aula. Em seu trabalho, Artigué (1996 apud SADDO & SILVA, 2012) concebe a engenharia didática em quatro fases: análises prévias; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori* e validação. Essas quatro fases se constituíram em 4 seções deste trabalho.

A primeira seção denominada de análises prévias apresenta considerações acerca do campo conceitual multiplicativo, do ensino do princípio fundamental da contagem e da combinatória como produto de medidas, uma das classes do campo conceitual multiplicativo. Nesta etapa, foram revisados 20 trabalhos entre, teses, dissertações, artigos científicos, anais de congressos e livros, divididos em produções experimentais, documentais e teóricas.

Na segunda seção, denominada concepção e análise *a priori*, utilizou-se as informações e os achados na revisão de estudos para demarcar um número de variáveis nas quais o ensino pode atuar. A sequência didática utiliza o ensino por atividades e resolução de problemas que têm como autores de base: Sá (2003, 2009 e 2018) Fossa e Sá (2005), Brasil (1997), Pinheiro (2008), Silva (2015), Santos (2017) e Rosas (2018).

Na terceira seção, descreveu-se a experimentação, os instrumentos selecionados na etapa anterior: pré-teste e pós-teste; questionário socioeducacional; sequência didática com as atividades estruturadas; registro das observações feitas durante a experimentação, os comportamentos e as respostas dos grupos.

A quarta seção aborda a validação dos dados obtidos na experimentação, que se deu com a sistematização e organização dos mesmos em gráficos e tabelas, por meio da comparação percentual dos resultados dos testes. Também utilizara-se o teste de hipótese que assegurou que houve uma significativa melhora do desempenho em relação aos resultados iniciais, além da correlação linear de Pearson para averiguar que as questões socioeducacionais não estavam relacionadas de maneira significativa com os resultados dos testes.

2 ANÁLISES PRÉVIAS

Esta seção apresenta uma breve explanação sobre a teoria dos campos conceituais, com ênfase no campo conceitual multiplicativo, particularmente os casos de relações ternárias, dentro do produto de medidas, abordando a combinatória e, especificamente, o princípio fundamental da contagem.

2.1 O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

A teoria dos campos conceituais foi apresentada ao mundo por Gerard Vergnaud, um dos mais conceituados pesquisadores no campo do ensino da matemática, francês, formado em psicologia e doutor em educação matemática, aluno e orientando de Jean Piaget, professor emérito do Centro Nacional de Pesquisa Científica.

Com gênese abrigada na observação de crianças e professores em sala de aula, Vergnaud, em uma entrevista para a revista Nova Escola (2008), afirmou que a teoria é fruto de muitas pesquisas na busca da compreensão de como se constroem os conhecimentos, sua importância está calcada na possibilidade de prever formas de trabalhar os conteúdos.

Gerard Vergnaud enfatiza que ela “*é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo aquelas relacionadas com as ciências e as técnicas*” (VERGNAUD, 1993, p. 1), para compreender as ramificações e rupturas entre conhecimentos nas crianças e adolescentes. O autor ainda explica que:

Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, uma conceitualização do real. Que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista e seu conteúdo conceitual. Ela também possibilita analisar a relação entre os conceitos enquanto conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias implícitas nos comportamentos dos sujeitos em determinadas situações, bem como aprofundar a análise das relações entre os significados e significantes. (VERGNAUD, 1993, p.1)

Moreira (2002) reporta a Vergnaud que reconhece a relevância da teoria de Piaget, destacando as ideias de adaptação, desequilíbrio e reequilíbrio como marcos da investigação em didática das ciências e da matemática. Entretanto, o

grande destaque de Piaget dentro da referida teoria é o conceito fundamental de esquema.

Moreira (2002) assegura que Vergnaud que utilizou em sua teoria também o legado de Vygotsky. Isto fica evidente na importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização no progressivo domínio de um campo conceitual pelos alunos.

Para Vergnaud (2014), o conhecimento está organizado em campos conceituais nos quais, para que o sujeito possa dominá-los, necessita: de um grande período de tempo; utilizar a experiência, a maturidade e a aprendizagem. Para o autor, o campo conceitual é um arcabouço informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento que se ligam uns aos outros, para formar um campo conceitual.

O domínio de um campo conceitual não acontece de forma instantânea, ao contrário, são necessários meses ou anos, exigindo uma gama de novos e variados problemas, novas propriedades e significados, que precisam ser analisados para que os discentes os dominem de forma progressiva. Vergnaud (2014) novamente destaca a inutilidade de contornar as dificuldades conceituais, pois elas são superadas à medida que são descobertas e enfrentadas, não de forma estanque e sim de maneira contínua.

Vergnaud (1993) afirma que uma das vantagens dessa abordagem “(...) é *permitir a produção de uma classificação baseada na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada um deles*”. Ou seja, classificar as tarefas, os problemas, os níveis de dificuldade esperado. A palavra-chave desta teoria é conceito.

Para Fossa e Sá (2005, p.2) “*existe uma série de fatores que interferem no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro das situações problemas*”, isto é, o conceito não pode ser analisado como um fator único, mas um conjunto de conceitos menores, que devem ser adquiridos para efetuar um conceito maior.

Vergnaud (1993) define:

Conceito (C) como uma combinação de três conjuntos: 1) conjunto de situações (S) que dão sentido ao conceito (referência); 2) conjunto de invariantes operatórios (I) que são utilizadas para analisar e dominar as situações (o significado); e 3) conjunto de representações simbólicas (R) que são utilizadas para representar os invariantes, o significante. (VERGNAUD, 1993, p. 8).

O autor diz que conceito é igual a combinação das situações, dos invariantes operatórios e das representações simbólicas, $C = (S, I, R)$. Esta teoria é muito extensa e profunda, então apresentamos apenas alguns apontamentos gerais, dentre os trabalhos que abordam a TCC, muitos deles tratam do campo aditivo e do Campo Multiplicativo, em conjunto ou separadamente, entretanto, os trabalhos que foram analisados são aqueles que tratam do campo multiplicativo, em virtude do interesse da pesquisa.

2.2 ESTUDOS SOBRE O CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

Neste tópico apresenta-se um cenário das investigações em educação matemática sobre o processo de ensino-aprendizagem na resolução de problemas envolvendo as operações na ótica da Teoria dos Campos Conceituais e os estudos de combinatória.

A revisão de estudos foi realizada com base nos artigos publicados nos anais do Encontro Nacional de educação matemática e demais artigos do Congresso Nacional de Educação, em teses e dissertações dispostas no portal de periódicos da Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior, em artigos de revistas e livros.

O enfoque deste trabalho é experimental, abordando o princípio fundamental da contagem no 5º ano do ensino fundamental. A Teoria dos Campos Conceituais delimitada ao campo multiplicativo, com ênfase na parte combinatória do produto de medidas, contudo, não existe uma quantidade significativa de trabalhos que apresentam esta intercessão: campo multiplicativo, ensino do princípio fundamental da contagem e ensino por atividades.

Por este motivo, foram seccionados em duas categorias: **Estudos sobre Problemas de Estruturas Multiplicativas** que são os que apresentam o Campo Conceitual Multiplicativo como objeto de investigação, no entanto, sem enfatizar o Princípio fundamental da contagem, que podem ou não se ater a alguns aspectos dele.

Seguidos dos **Estudos sobre Combinatória**, que são trabalhos onde a combinatória é o objeto de estudo, precipuamente, aqueles que o associam ao Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Nesta etapa, o trabalho de Santos (2017) encontrava-se bastante relevante, por este motivo tomou-se emprestada a categoria de análise para agrupar os trabalhos lidos, classificações estas, que se apresenta a seguir.

Os **estudos teóricos** são aqueles que os conceitos e/ou ideias sobre resolução de problemas envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo.

Os **estudos diagnósticos** são os trabalhos que analisaram e identificaram as dificuldades dos alunos e/ou dos professores nas questões do Campo Conceitual Multiplicativo.

Os **estudos experimentais** apresentam aqueles que realizaram atividades experimentais de ensino em sala de aula com atividades baseadas nos campos conceituais.

Os **estudos documentais** abordam os textos de referência sobre o ensino de matemática, documentos oficiais da educação sobre o campo multiplicativo.

Conforme a categorização acima, os textos lidos, foram organizados no quadro 1.

Quadro 3: Trabalhos sobre o Campo Multiplicativo

CATEGORIAS	ESTUDOS SOBRE PROBLEMAS DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS
TEÓRICOS	Jenske (2011)
DIAGNÓSTICO	Carvalho e Et al. (2016); Magina, Merlini e Santos (2010); Cardoso, Schio e Oliveira (2018).
EXPERIMENTAIS	Silva (2015); Santos (2017).
DOCUMENTAIS	Brasil (1997).

Fonte: Autora (2020).

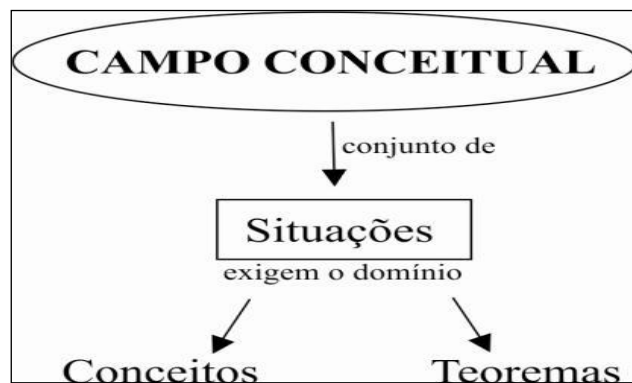
Os trabalhos apontados no quadro acima serão esmiuçados para obter uma compreensão mais adequada da Teoria dos Campos Conceituais.

2.3 ESTUDOS SOBRE PROBLEMAS DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais foram abordados de forma extensa no trabalho de Jenske (2011).

Jenske (2011) apresenta de forma bem esclarecedora a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud em sua dissertação, ao ressaltar que a conceitualização seria o alicerce estrutural do desenvolvimento cognitivo, por isso a importância do estudo da teoria e que existência a proposição de situações de ensino que possibilite a análise conceitual dos esquemas utilizados pelos estudantes. A autora apresentou representação gráfica do conceito de campo conceitual.

Figura 10: Representação gráfica do conceito de campo conceitual



Fonte: Jenske (2011).

A título exemplo, as estruturas multiplicativas, cujo conjunto das situações pode necessitar de uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações.

Fica evidente que o domínio do conhecimento de um campo conceitual necessita de: tempo, experiência, maturidade e aprendizagem. Os obstáculos conceituais são superados durante o caminho, isso acontece quando o aluno encontra e o enfrenta de forma contínua. A teoria de Vergnaud amplia em duas direções o foco piagetiano no desenvolvimento cognitivo que:

- 1) tem como referência o próprio conteúdo matemático;
- 2) desloca o interesse das estruturas cognitivas gerais do pensamento para o sujeito em situação.

Jenske (2011) aborda os conceitos da teoria através das três palavras chaves: conceito, situações e esquemas.

Conceito (C) é uma interligação de três conjuntos: 1) conjunto de situações (S) que atribuem sentido ao conceito (referência); 2) conjunto de invariantes

operatórios (I) que são empregadas para analisar e dominar as situações (o significado); e 3) conjunto de representações simbólicas (R) que são utilizadas para representar os invariantes, o significante.

Os invariantes operatórios são os conhecimentos-em-ação que os estudantes irão utilizar para dar sentido ao conceito de soma em cada situação. A representação simbólica seria o sinal + para indicar, respectivamente, para as situações 1 e a 2, a operação soma e os números $3+1 = 4$ e $200+500 = 700$. (VERGNAUD, 1993, p. 8 apud JENSKE, 2011).

Para examinar o desenvolvimento de um conceito, ou sua utilização, é imprescindível esses três conjuntos. Não é aceitável reduzir essa definição aos significantes nem às situações. Segundo Vergnaud (1993, p. 1), “(...) é *através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança (...)*”.

O conceito de **situação**, adotado por Vergnaud, faz referência aos processos cognitivos e às respostas do sujeito que podem variar de acordo com as situações em que ele é confrontado. Disso, sobressaem-se:

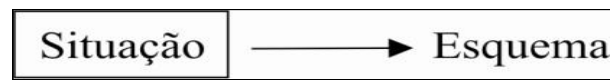
- 1) Variedade: um campo conceitual apresenta várias situações;
- 2) História: os conhecimentos dos alunos são construídos por situações que enfrentaram e dominaram (o que se chama de conhecimento prévio).

As situações são atribuem sentido ao conceito, pois é através de uma variedade de situações que um conceito se torna significativo. Porém, o sentido não está somente nas palavras e nos símbolos, mas nas relações que se faz com a história.

O sujeito não se desenvolve aprendendo uma solução para cada situação, mas pela formação de conceitos operatórios que lhe permitem tratar diversas situações.

Esquemas, para Vergnaud (1993, p. 2), “(...) é a *organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada*.” Para ele, é onde deve focar as pesquisas dos conhecimentos-em-ação do sujeito, o que ele denomina também de invariantes operatórios. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e até simultaneamente em uma nova situação para o sujeito e seria a forma estrutural, à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas. Vergnaud divide o conhecimento racional em duas classes: conhecimento operatório e o não operatório.

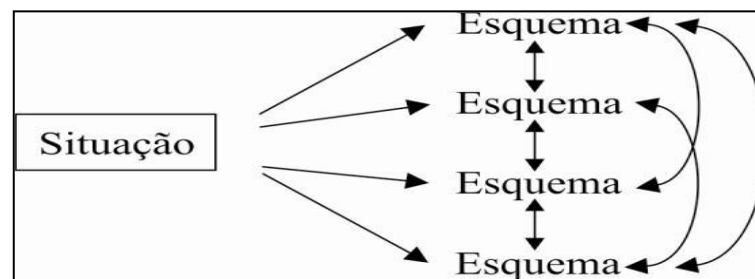
Figura 11: Representação gráfica do conceito de situação diante de um conhecimento operatório



Fonte: Jenske (2011).

Nesta classe de conhecimento racional operatório, tem que existir competências ao tratamento imediato da situação, amplamente automatizado, dirigido por apenas um esquema.

Figura 12: Representação gráfica do conceito de situação diante de um conhecimento não-operatório



Fonte: Jenske (2011).

Na classe do conhecimento não operatório, o aluno não dispõe das competências para tratar a situação imediatamente, sendo necessário um processo de reflexão e exploração, erros e acertos para, então, levá-lo ao sucesso ou fracasso. Para tal fim, fazem-se necessários diversos esquemas, que podem ser combinados, descombinados e recombinados para ocorrer a descoberta.

Os esquemas podem ser algoritmos ou um procedimento heurístico, este último pode não ser efetivo e nem sempre eficaz. Na aprendizagem da matemática existem diversos exemplos de esquemas, como o algoritmo da adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros.

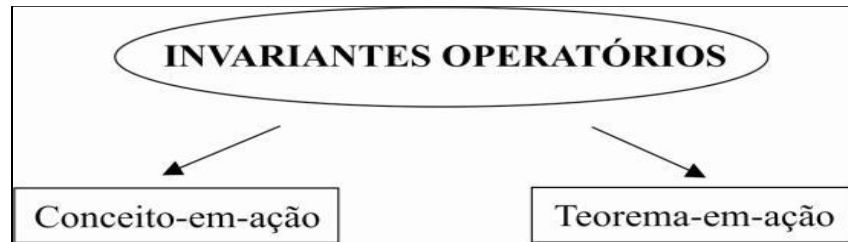
Os esquemas são formados por invariantes operatórios que constituem a base conceitual, obtendo informações conexas e, a partir delas e da meta a atingir, inferir as regras de ação mais pertinentes para abordar numa determinada situação.

Os invariantes operatórios designam-se pelas expressões: conceito-em-ação e teorema-em-ação. O reconhecimento dos invariantes operatórios é a chave que permite ao sujeito generalizar o esquema, pois são estes que determinam as diferenças entre um esquema e outro, conforme Jenske

Eles representam as atitudes, as escolhas estratégicas que o sujeito utiliza diante de uma situação e variam de acordo com os conhecimentos prévios que o sujeito possui. Desta forma, as expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação são componentes dos invariantes operatórios e constituem os conhecimentos que fazem parte dos esquemas. (JENSKE, 2011, p. 39)

A autora apresenta outra representação dos invariantes operatórios.

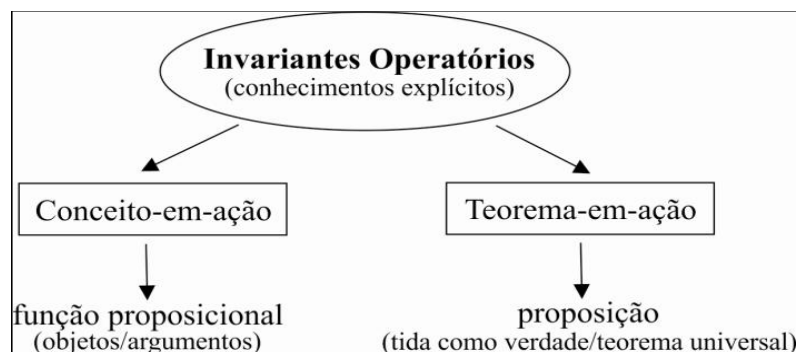
Figura 13: Representação gráfica do conceito de Invariantes Operatórios



Fonte: Jenske (2011).

O que necessita explicitar os conceitos de teorema-em-ação que seria uma conjectura tida como verdadeira sobre o real. Já o conceito-em-ação é um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento tida como pertinente que possuem validade em várias situações, são eles que formam os teoremas-em-ação, porém dificilmente consegue ser explicitada pelo aprendiz, a representação a seguir sintetiza os invariantes:

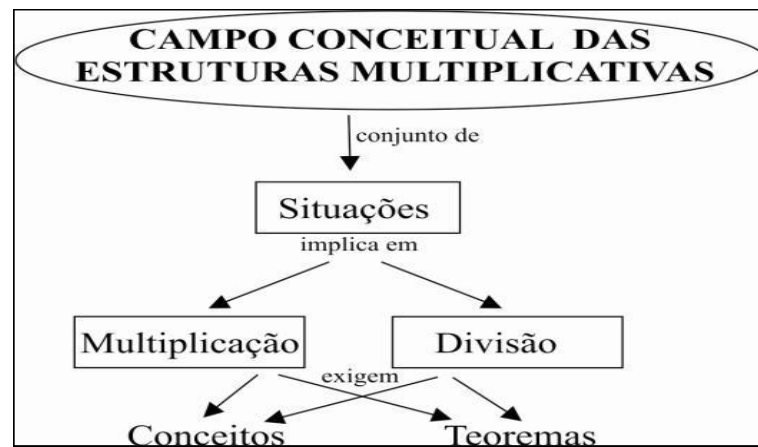
Figura 14: Representação gráfica do conceito de Invariantes Operatórios



Fonte: Jenske (2011).

O Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) abrange o conjunto de situações que essencialmente precisam para sua resolução, uma ou mais multiplicações, divisões ou uma combinação dessas operações, bem como o conjunto de conceitos e teoremas que possibilitam a análise matemática de tais situações. Jenske (2011) apresenta uma representação para o Campo multiplicativo.

Figura 15: Mapa do campo conceitual das Estruturas Multiplicativas



Fonte: Jenske (2011).

O campo multiplicativo abarca conceitos variados, como: proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, relação escalar, produto e quociente de dimensões, combinação e aplicação linear, entre outros. Vergnaud (2009) distingue os problemas que envolvem multiplicação e divisão em duas grandes categorias: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

Isomorfismo de medida: É uma relação quaternária entre quatro quantidades, onde duas são de certo tipo e as outras duas de outro. Em síntese, consiste em proporção direta entre duas grandezas (como trabalhadores e horas de serviço) cuja categoria é dividida em três classes, de acordo com as operações solicitadas.

Primeira Classe: Multiplicação que são situações que apresentam quatro termos, esta classe subdivide-se em subclasses que evidenciam os níveis de dificuldade (números naturais ou inteiros, pequenos ou grandes, decimais, etc.).

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \longrightarrow & b \\
 c & \longrightarrow & x
 \end{array}$$

Fonte: Jenske (2011).

Segunda Classe: Divisão - determinar o valor unitário. A ilustração explica a classe.

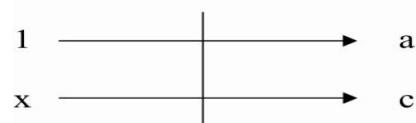
Divisão: busca do valor unitário



Fonte: Jenske (2011).

Terceira Classe: Divisão - Encontrar a quantidade de unidades

Divisão: busca da quantidade de unidades



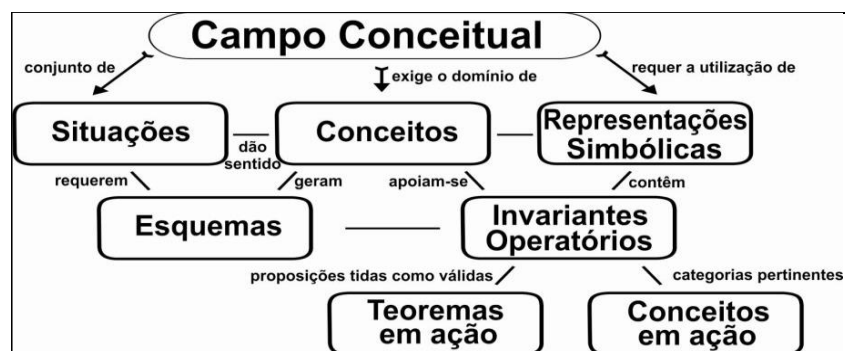
Fonte: Jenske (2011).

Produto de medida: Esta classe engloba a composição cartesiana de duas grandezas para encontrar uma terceira. Fazem parte dela os conceitos os conceitos relativos à área, volume, superfície, produto cartesiano, conceitos físicos etc. Esta categoria divide-se em duas classes de problemas:

Primeira Classe: Multiplicação – encontrar o produto da medida, conhecendo-se as medidas elementares.

Segunda Classe: Divisão – encontrar as medidas elementares, dado o valor do produto de grandezas e o valor da outra grandeza elementar. Jenske (2011) apresenta um mapa conceitual sobre a TCC.

Figura 16: Mapa Conceitual da TCC de Vergnaud



Fonte: Jenske (2011).

Com este último mapa conceitual, autora deixa bem claro a estrutura do campo conceitual como um conjunto de situações que exigem o domínio de conceitos e requer a utilização de representações simbólicas, e ainda as situações requerem esquemas e dão sentido aos conceitos que geram os esquemas e se apoiam nos invariantes operatórios, que estão contidos nas representações simbólicas, e que os invariantes geram as proposições válidas e categorias pertinentes.

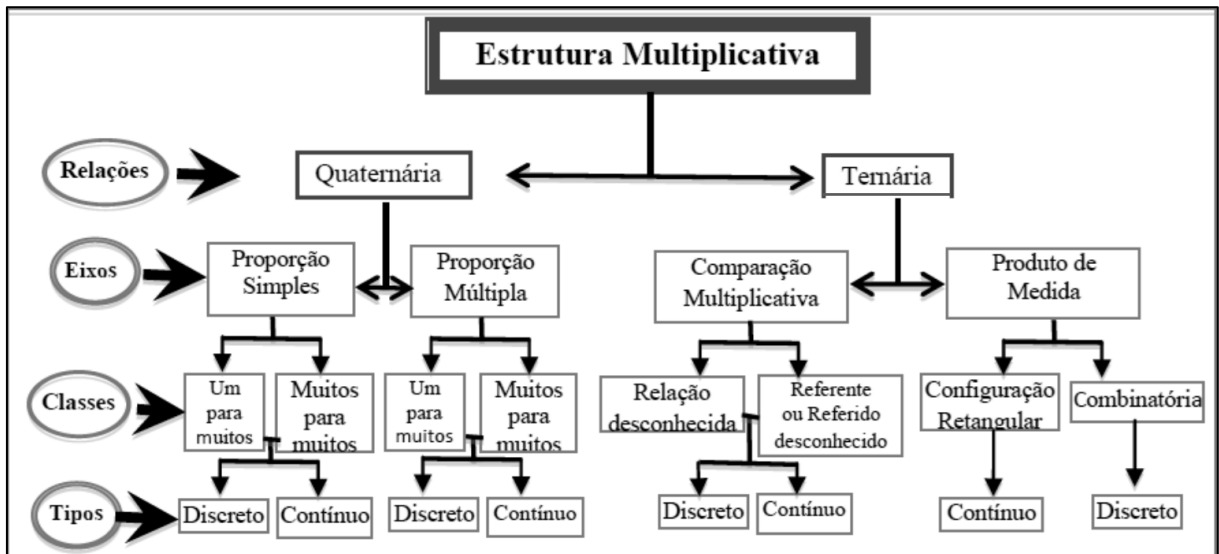
Agora, é necessário falar dos trabalhos diagnósticos, que são focados naqueles que levantaram dificuldades e particularidades no ensino e aprendizagem do campo conceitual Multiplicativo.

Magina, Merlini e Santos (2010) referem-se apenas ao Campo Conceitual Multiplicativo (CCM), propõem-se a analisar o desempenho dos estudantes da 4ª série (atual 5º ano do ensino fundamental) na resolução de situações que envolvem estrutura multiplicativa. É um estudo descritivo diagnóstico que utilizou como aporte teórico o trabalho de Vergnaud (1990; 1994).

A pesquisa se constituiu em duas etapas, a primeira etapa foi com a aplicação de um teste com 349 estudantes, o lócus, uma escola pública de São Paulo, com seguinte distribuição: 80 estudantes da 1ª série, 86 da 2ª, 94 da 3ª e 89 da 4ª série. O teste tinha 13 questões, entretanto as autoras utilizaram apenas sete, os resultados revelam um desempenho aquém do esperado, os resultados foram muito baixos em algumas classes de problemas, o que levou as autoras a acreditarem que estas classes não estavam sendo trabalhadas na escola.

As autoras apresentam as relações ternárias e quaternárias. As relações quaternárias ocorrem quando se tem uma dupla relação entre duas grandezas, enquanto que as relações ternárias são uma relação entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza, que se juntam para formar um terceiro elemento. O exemplo dado foi o cálculo de área que se transformam em m^2 , meninos dançarinos x meninas dançarinas produzindo pares de dançarinos e as informações foram sistematizadas abaixo.

Figura 17: Esquema do campo conceitual



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2013).

Para compreender o Campo multiplicativo é imprescindível discutir os eixos e classes que compõem o esquema acima Magina, Merlini e Santos (2010) descrevem as classes e os eixos da seguinte forma:

As relações quaternárias são aquelas que relacionam quatro quantidades em dois pares, isto é, duas de um tipo e duas de outro tipo.

EIXO 1 – PROPORÇÃO SIMPLES: Pertencem a esta classe, uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo, ou seja, uma simples proporção direta entre duas grandezas como, por exemplo: pessoas e objetos. Ela se encontra subdividida em duas subclasses de situações: a correspondência um para muitos e a de muitos para muitos, que por sua vez podem ser do tipo discreto ou contínuo .

Exemplo 1: Correspondência um para muitos - *Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas têm cinco carros?*

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – *A cada cinco bombons comprados, a loja Boa Compra dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons quantos caramelos ela ganhará?*

EIXO 2 – PROPORÇÃO MÚLTIPLA: Pertence a esta classe a relação quaternária envolvendo mais de duas grandezas relacionadas duas a duas que se ramificam em duas classes a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos que foi exemplificada da seguinte maneira.

Exemplo 1: Correspondência um para muitos - *Uma floricultura vende uma caixa de jarros com flores. Cada caixa contém 6 jarros. Por sua vez, cada jarro vem com 2 flores. Sandra comprou 3 caixas, quantas flores ela levou?*

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – *Um grupo de seis amigos decidiram passar 15 dias de férias em um hotel fazenda. O custo de duas diárias é de R\$90,00 por pessoa. Quanto gastou o grupo?*

As relações ternárias se caracterizam por relacionar dois elementos de uma mesma natureza para formar um terceiro, isto é, o problema anuncia dois elementos e pergunta um terceiro.

EIXO 3 – COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA: Esta classe engloba as situações que envolvem a comparação entre duas grandezas de mesma natureza:

Exemplo 1: Referido desconhecido - *A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?*

Exemplo 2: Relação desconhecida - *Comprei uma boneca por R\$21,00 e uma bola por R\$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?*


EIXO 4 – PRODUTO DE MEDIDAS: Essa classe é constituída por duas subclasses: (a) situações envolvendo a ideia de configuração retangular em quantidades contínuas e discretas e (b) situações envolvendo a ideia de combinatória.

Exemplo1: Configuração retangular (discreto/contínuo) – (a) *Num cinema há cinco fileiras com 10 cadeiras cada uma. Quantas cadeiras há no cinema?* (b) *Qual a área de um retângulo que possui 6m de comprimento e 3m de largura?*

Exemplo 2: Combinatória – *Numa festa há quatro meninas e três meninos. Cada menino quer dançar com cada uma das meninas e cada menina também quer dançar com cada um dos meninos. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis de serem formados?*

As autoras fizeram uma lista de 7 questões como mostra a figura abaixo:

Figura 18: Questões utilizadas para análise

<p>QUESTÃO 1. MARIA UTILIZA 4 COLHERES DE CHOCOLATE PARA FAZER UMA RECEITA DE BRIGADEIRO. SE ELA FIZER 3 RECEITAS DE BRIGADEIRO, QUANTAS COLHERES DE CHOCOLATE ELA USARÁ? (PROPORÇÃO SIMPLES – 1 PARA MUITOS)</p>	<p>QUESTÃO 5. A RECEITA DE PASTEL DO SEU MANOEL É ASSIM: PARA CADA 1 COPO DE LEITE VÃO 3 OVOS E PARA CADA 1 OVO ELE PRECISA DE 2 XÍCARAS DE FARINHA. DE QUANTAS XÍCARAS DE FARINHA ELE VAI PRECISAR PARA FAZER ESSA RECEITA? (PROPORÇÃO MULTIPLA – 1 PARA MUITOS)</p>
<p>QUESTÃO 3. O PARQUE DE DIVERSÃO TEM 2 ENTRADAS (A E B) E 4 SAÍDAS (1, 2, 3 E 4)</p>	
<p>PENSE EM TODAS AS DIFERENTES MANEIRAS QUE VOCÊ PODERIA ENTRAR E SAIR DESSE PARQUE. QUANTAS SÃO ESSAS MANEIRAS? (PRODUTO DE MEDIDAS – COMBINATÓRIA)</p>	
<p>QUESTÃO 4. NA LOJA UM CARRINHO CUSTA R\$ 5,00 E O JOGO DE MEMÓRIA CUSTA 4 VEZES MAIS QUE O CARRINHO. QUANTO CUSTA O JOGO DE MEMÓRIA? (COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA – REFERIDO DESCONHECIDO)</p>	<p>QUESTÃO 12. DONA BENTA USA 12 OVOS PARA FAZER 3 BOLOS. QUANTOS OVOS ELA VAI PRECISAR PARA FAZER 5 BOLOS? (PROPORÇÃO SIMPLES – MUITOS PARA MUITOS)</p>
<p>QUESTÃO 7. EM UM PACOTE DE FIGURINHAS VÊM 3 FIGURINHAS. QUANTAS FIGURINHAS VÊM EM 4 PACOTES? (PROPORÇÃO SIMPLES – 1 PARA MUITOS)</p>	

Fonte: Magina, Merlini e Santos (2010).

Os resultados foram os seguintes, nos problemas da primeira classe de proporção simples, quando a relação era de um para muitos, a questão obteve o melhor resultado e a de muitos para muitos resultou em apenas 26% de acertos. Para as autoras, isso indica indícios de que temáticas desse tipo precisam ser mais trabalhadas na sala de aula.

A classe de comparação multiplicativa comportou um desempenho razoável, apresentou um nível de acerto de 65%, por causa da utilização da expressão *a mais*, muitos alunos utilizaram a adição.

A classe do produto de medidas é a mais relevante para o presente trabalho, também ofereceu dois extremos: a Q3 (combinatória), atingindo 28%, enquanto que a Q13 (configuração retangular) obteve 72% de acertos.

As autoras apontam que:

Os registros dos estudantes na Q3 nos deixavam ver que a maioria deles havia entendido a situação; alguns até desenhavam todas as possibilidades, porém não conseguiam resumir a resposta numa única operação matemática (duas vezes quatro). (MAGINA, MERLINI & SANTOS, 2010, p.11)

Elas também destacam que os baixos índices em alguns tipos de questão, implicam que ainda existem lacunas nestas classes, isto corrobora com Vergnaud, quando este assegura que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base

em uma gama variada de situações que, normalmente, devem ser analisados com a ajuda de vários conceitos, não pode haver apropriação a partir da vivência de uma única situação.

Cardoso, Schio e Oliveira (2018) apresentaram um trabalho sobre o Campo multiplicativo, cujo objetivo consistiu em investigar diferentes estratégias adotadas por estudantes da terceira e da quinta etapa das séries iniciais e por professores do primeiro ao quinto das referidas séries ao resolverem três problemas envolvendo a operação de multiplicação. Este artigo teve origem em uma pesquisa realizada com professores e alunos dos anos iniciais do ensino fundamental intitulada *Representações de conceitos matemáticos no ensino fundamental*.

Os dados coletados foram obtidos a partir de instrumentos diagnósticos aplicados durante a realização de um programa nacional de formação de professores, o Pró-Letramento, contendo problemas de matemática. Solicitaram que os professores participantes do programa resolvessem os problemas e, também, que os aplicassem com seus alunos nas escolas onde atuavam.

O artigo traz uma discussão das estratégias utilizadas por 40 professores de uma cidade do estado de São Paulo, tal cidade foi escolhida por apresentar o maior número de instrumentos respondidos, 20 alunos do terceiro ano e 20 alunos do quinto ano de uma das escolas da mesma cidade, na resolução de três problemas multiplicativos. A análise foi baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) para adotar uma abordagem cognitivista sobre a construção de conhecimentos matemáticos.

Os autores, apoiados em Bell, Fischbein e Greer (1984, p. 129) e Gitirana e et al. (2014), salientaram que os erros em situações envolvendo as operações de multiplicação ou divisão são normalmente favorecidos pela existência de concepções equivocadas, tais como: “a multiplicação sempre aumenta”, “a divisão sempre envolve um número maior que é dividido por um número menor”, “divisão sempre diminui”.

Para os autores, Vergnaud (1990) investiga como os estudantes se organizam cognitivamente a partir de suas ações na resolução de situações-problema. Ademais, a TCC busca abarcar as relações entre as rupturas que ocorrem na construção do conhecimento, na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo. Por este foco, um conceito contrai sentido para o sujeito, à medida que é adaptado para diversas situações-problemas teóricas ou práticas.

A adaptação às novas situações é que aponta os caminhos para a aprendizagem, que se dá com a utilização de distintos conhecimentos, com o objetivo de se adequar às novas situações. Esses conhecimentos são classificados por Vergnaud (1990) como operatórios ou não operatórios.

O operatório é um tipo de conhecimento que propicia ao sujeito mecanismos para tratar imediatamente uma situação. Enquanto que o não operatório é aquele no qual o sujeito não consegue tratar imediatamente uma situação, em função de os esquemas serem desorganizados, incompletos ou ineficientes no contexto em que estão utilizando.

Outro fator relevante é que a aprendizagem conceitual não ocorre da mesma forma para as crianças e para os adultos. Nas crianças e adolescentes, a aprendizagem depende do desenvolvimento do aparato psíquico cognitivo e das situações por meio das quais precisam se adaptar para chegar ao objetivo pretendido.

Por isso que a teoria se torna tão importante no planejamento das ações: a identificação dos invariantes operatórios possibilita ao professor detectar esquemas ineficazes. Os erros e as dúvidas decorrem da aplicação de esquemas, disponíveis no aparelho cognitivo dos estudantes, em situações que eles consideram semelhantes, quando, na verdade, tais compatibilidades são apenas ilusórias ou parciais. Essa nova situação pode pertencer a uma classe mais ampla de situações do que aquelas em que o esquema aplicado era eficaz.

A pesquisa foi de cunho qualitativo, e se ocupa das representações do campo conceitual das estruturas multiplicativas de alunos do terceiro e quinto ano do ensino fundamental, acrescido dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental, as três questões propostas foram às seguintes.

Quadro 4: As atividades do trabalho

Atividades que serão discutidas neste trabalho problema	Nome atribuído ao problema
Oito vezes qual número dá dois?	Multiplicação que reduz
Paguei R\$ 12,00 por três garrafas de refrigerantes. Quanto custa cada garrafa?	Refrigerantes
Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?	Iogurtes

Fonte: Cardoso, Schio e Oliveira (2018).

A multiplicação que diminui foi a que teve uma quantidade de erros maior, principalmente entre os alunos do 3º ano, nenhum aluno acertou. Nos alunos do 5º ano, seis conseguiram acertar, mas a maioria errou ou deixou em branco.

Os professores não apresentaram dificuldades na resolução dos problemas propostos, contudo muitos utilizaram a linguagem simbólica ou apenas a solução. Os alunos do terceiro ano apresentaram muitas dificuldades, pois nenhum dos problemas era de aplicação direta da multiplicação.

Os de quinto ano tiveram mais sucesso do que os de terceiro ano, todavia existem indícios de que o campo das estruturas multiplicativas não foi desenvolvido o suficiente para produzir esquemas eficazes de soluções de problemas. Isto pode implicar que o Campo Conceitual Multiplicativo não está sendo trabalhado de maneira extensa, o que dificulta o seu domínio, pois quando o aluno se depara sempre com as mesmas questões e procedimentos não ocorre uma ampliação e o sentido e significado da multiplicação fica empobrecido.

Agora, é importante abordar os trabalhos experimentais que se orientam pela engenharia didática e pelo ensino por atividades, como os trabalhos de dissertação de Silva (2015) e de Santos (2017), que englobam a Teoria dos Campos Conceituais no que se refere aos aditivos e multiplicativos.

Santos (2017) verificou quais efeitos que uma sequência didática, diferente da tradicional, provoca sobre a participação em aulas de matemática e seu desempenho de resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais em uma turma de 6º ano do ensino fundamental? Por conseguinte, o objetivo desta pesquisa foi avaliar os efeitos que tem uma sequência didática, diferente da tradicional, sobre a participação nas aulas de matemática e no desempenho de resolução de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais em uma turma do 6º ano do ensino fundamental.

É um trabalho extenso e bem fundamentado, que se preocupa com os campos aditivos e multiplicativos, contudo, analisam-se apenas a parte multiplicativa. A priori, ele aplicou um pré-teste para levantar os conhecimentos prévios sobre o campo multiplicativo, seus resultados apontam melhor desempenho nos problemas de estruturas multiplicativas do tipo proporção simples, os quais envolviam as ideias de multiplicação, divisão por partes, por quotas e quarta proporcional, com um percentual médio de acertos de 48% e o menor desempenho nos problemas do tipo

produto de medidas, com uma média de acertos de 22,75%. Santos concorda com os achados de Sá (2005), quando este afirma que

As dificuldades relacionadas a esse tipo de situação-problema, residem no fato de que não são problemas da operação de multiplicação, mas sim usam a referida operação na resolução da questão, necessitando de outros conhecimentos da matemática, como de área de um retângulo ou Princípio Fundamental da Contagem, para fazer a escolha adequada da operação. (SÁ, 2005, p. 69).

O interessante deste trabalho é que, em face dos resultados, Santos (2017) criou uma atividade estruturada de aprofundamento e um jogo para o Princípio Fundamental da Contagem. Os resultados da sequência foram exitosos, na questão que envolvia o Princípio Fundamental da Contagem de maneira aritmética, ou seja, quando usa a multiplicação direta do tipo $A \times B = ?$, entretanto a questão que perguntava sobre um dos fatores do tipo $A \times ? = 28$, uma questão algébrica, teve o pior rendimento de toda a sequência deixando claro que são necessários mais estudos que se apropriem e trabalhem neste aspecto.

Silva (2015) avalia os efeitos de uma sequência didática para o ensino de questões envolvendo as quatro operações com números naturais, no sentido de elaborar a sentença natural correspondente ao enunciado da questão e conseqüentemente a escolha correta da operação e do desempenho na resolução de questões envolvendo es estudo específico com números naturais.

O estudo foi realizado no município de Abaetetuba com 23 alunos do 5º ano das séries iniciais de uma escola pública. A opção metodológica foi a engenharia didática, e teve as etapas de: revisão de literatura; aplicação de questionário socioeconômico; pré-teste; elaboração da sequência didática; aplicação da sequência; pós-teste; e análise dos resultados.

Os testes constituíam-se de 12 questões multiplicativas divididas entre aritméticas e algébricas, como proposto por Sá (2005), e a sequência didática esteve formada por 07 atividades aplicadas em sessões de 2h, tendo o ensino por atividades como sua metodologia de ensino. A pesquisadora usou o campo conceitual aditivo e multiplicativo, entretanto pelo interesse do trabalho compreendeu apenas os dados multiplicativos dispostos na tabela abaixo.

Quadro 5: Desempenho por questão no pré e pós-teste

			ACERTO (%)	ERRO (%)	EM BRANCO(%)
--	--	--	------------	----------	--------------

QUESTÃO	TIPO	SENTENÇA						
			PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
1	Aritmética	$3 \times 689 = ?$	43,48	82,61	56,52	17,39	0	0
2	Algébrica	$4x ? = 88$	13,04	78,26	86,96	21,74	0	0
3	Aritmética	$6 \times 4 = ?$	43,48	91,30	56,52	8,70	0	0
4	Aritmética	$896 \div 8 = ?$	0	82,61	73,91	8,70	26,09	8,70
5	Algébrica	$? \times 7 = 28$	8,69	78,26	86,96	21,74	4,35	0
6	Aritmética	$540 \div 45 = ?$	0	82,61	82,61	8,70	17,38	8,70
7	Algébrica	$? \div 3 = 6$	21,74	82,61	60,87	4,35	17,38	13,04
8	Algébrica	$32 \times ? = 256$	0	65,22	73,91	21,74	26,09	13,04
9	Aritmética	$1250 \times 7 = ?$	26,09	82,61	30,43	13,04	43,48	4,35
10	Aritmética	$3 \times 2 = ?$	17,38	91,30	39,13	8,70	43,48	0
11	Algébrica	$2 \times ? = 288$	0	82,61	52,17	17,39	47,83	0
12	Aritmética	$3 \times 6 = ?$	26,09	86,96	47,83	13,04	26,09	0

Fonte: Silva (2015).

A autora pode inferir que a escolha da sentença natural trouxe uma significativa melhora na resolução de problemas do campo multiplicativo, a questão 10 com o seguinte enunciado “*Lílian foi comprar um sorvete. A sorveteria oferecia 3 opções de sabores: chocolate, tapioca e cupuaçu. Como seu sorvete era formado por 2 bolas, de quantas formas diferentes ela pode escolher seu sorvete sem repetir o mesmo sabor nas duas bolas?*”

Claramente, essa questão se inscreve em um raciocínio combinatório, este item foi onde os alunos obtiveram os maiores índices de acerto, entretanto é possível verificar que não houve nenhuma atividade voltada apenas para este tipo de questão, a explicação pode considerar que o fato de utilizar apenas questões do campo multiplicativo facilitou a resolução.

Os trabalhos documentais abordam os aspectos em que os documentos oficiais tem intercessão com a Teoria dos Campos Conceituais.

Brasil (1997), documento conhecido como Parâmetros Curriculares Nacionais, foi durante muito tempo, o que norteou a educação brasileira. As diretrizes como um todo são de caráter orientador, entretanto, quando apresenta o tópico denominado “MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: SIGNIFICADOS” é possível relacionar os apontamentos presentes na TCC, que embasaram este trecho das orientações mencionadas.

Os PCNs destacam que a multiplicação é ensinada como um caso particular da adição, essa abordagem é insuficiente para a compreensão de outras situações relacionadas à multiplicação, quando estas não estiverem restritas às situações aditivas. O documento divide a multiplicação em 4 grupos:

No grupo 1, as situações associadas à multiplicação comparativa. Os exemplos utilizados foram:

— Pedro tem R\$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia?

— Marta tem 4 selos e João tem 5 vezes mais selos que ela. Quantos selos tem João?

As instruções curriculares afirmam que a partir deste grupo é possível formular situações que envolvem a divisão. Tal como a do exemplo abaixo:

— Lia tem R\$ 10,00. Sabendo que ela tem o dobro da quantia de Pedro, quanto tem Pedro?

No grupo 2 estão as situações pertinentes à comparação entre razões, isto é, englobam a noção de proporcionalidade. Assim, como as situações do exemplo encontrado em Brasil (1997, p. 72)

— Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R\$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? (A ideia de proporcionalidade está presente: 1 está para 8, assim como 3 está para 24.)

— Dois abacaxis custam R\$ 2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis? (Situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de abacaxis e deverá pagar — se não houver desconto — o dobro, R\$ 5,00, não sendo necessário achar o preço de um abacaxi para depois calcular o de 4.)

Dessas situações de proporcionalidade surgem outras ocorrências que significam a divisão, ligadas às ações de “repartir (igualmente)” e “determinar quanto cabe”. Desta forma, expõem-se exemplos associados ao primeiro problema:

— Marta pagou R\$ 24,00 por 3 pacotes de chocolate. Quanto custou cada pacote? (A quantia em dinheiro será repartida igualmente em 3 partes e o que se procura é o valor de uma parte.)

— Marta gastou R\$ 24,00 na compra de pacotes de chocolate que custavam R\$ 3,00 cada um. Quantos pacotes de chocolate ela comprou? (Procura-se verificar quantas vezes 3 cabe em 24, ou seja, identifica-se a quantidade de partes.)

O grupo 3 trata das situações associadas à configuração retangular:

— Num pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas cadeiras há no auditório?

Já o grupo 4 aborda as situações associadas à ideia de combinatória:

— Tendo duas saias: Uma preta (P) e uma branca (B) e três blusas: Uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C), de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Analisando-se esses problemas, vê-se que a resposta à questão formulada depende das combinações possíveis; no segundo, por exemplo, os alunos podem obter a resposta, num primeiro momento, fazendo desenhos, diagramas de árvore, até esgotar as possibilidades: (P, R), (P, A), (P, C), (B, R), (B, A), (B, C): Esse resultado que se traduz pelo número de combinações possíveis entre os termos iniciais evidencia um conceito matemático importante, que é o de produto cartesiano. (BRASIL, 1997, p.73)

Não se diferenciam os termos iniciais, sendo compatível a interpretação da operação com sua representação escrita. Combinar saias com blusas é o mesmo que combinar blusas com saias e isso pode ser expresso por $2 \times 3 = 3 \times 2$. Na combinação também existe situações relacionadas com a divisão:

— Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes? O documento ressaltou que usualmente os alunos resolvem por tentativas que utilizam a multiplicação.

Um aspecto muito evidente no PCN de matemática é a recomendação que a multiplicação e divisão são operações complementares, que os problemas podem ser resolvidos com diversas operações, bem como que para ter sentido para os alunos é necessário apresentar uma gama variada de situações que envolvam a multiplicação e a divisão, para que esta criança possa dispor de esquemas eficazes na hora da resolução de problemas, isto conversa com Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais.

Os trabalhos analisados apontam que a Teoria dos Campos Conceituais pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem em matemática, porque possibilita prever formas de trabalhar os conteúdos. Como conceitualização é alicerce estrutural do desenvolvimento cognitivo. É importante o estudo da teoria, para que o professor proponha situações de ensino que possibilite a análise conceitual dos esquemas utilizados pelos estudantes visto que Vergnaud considera um campo conceitual como um conjunto de situações, problemas, relações, estruturas, conceitos e teoremas que necessita do domínio da teoria pelo professor.

2.4 ESTUDOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) está inserido dentro da combinatória, uma classe dos campos conceituais, por isto escolhem-se trabalhos que abordem a combinatória, nem sempre aqueles que abordam apenas o PFC.

O conceito do Princípio Fundamental da Contagem encontra-se em Pinheiro (2008, p.47), que o define assim: “*Se um evento ocorre em etapas, $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, sucessivas e independentes, sendo $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ o número de possibilidades de cada etapa, então, o número de possibilidades de o evento ocorrer é $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_n$ ”.*

O raciocínio combinatório para Borba (2015) pode ser conceituado como um modo de pensar, que aparece ao analisarmos situações em que, dados determinados conjuntos, é necessário agrupar seus elementos de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se, direta ou indiretamente, o número total de agrupamentos possíveis.

Para a autora, este tipo de raciocínio é necessário em situações cotidianas (organização de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc.) e existem várias aplicações em áreas diversificadas, tais como: biologia, química, estatística, ciências da computação e outras, por isso o desenvolvimento deste raciocínio deveria começar ainda na infância.

Os trabalhos sobre combinatória foram separados em categorias análogas aos trabalho do Campo Conceitual Multiplicativo: estudos teóricos, estudos diagnósticos, estudos experimentais e estudos documentais.

Os estudos teóricos são aqueles que tratam de conceitos e/ou ideias sobre resolução de problemas que envolvem a combinatória e o Princípio Fundamental da Contagem. Os estudos diagnósticos são os trabalhos que analisaram e identificaram as dificuldades dos alunos e/ou dos professores em combinatória e no Princípio Fundamental da Contagem.

Os estudos experimentais são aqueles que realizaram atividades experimentais de ensino em sala de aula envolvendo a combinatória.

Os estudos documentais são aqueles que analisaram textos de referência sobre o ensino de matemática, documentos oficiais no que tange a combinatória. Eles estão descritos no quadro abaixo.

Quadro 6: Trabalhos sobre Combinatória

CATEGORIAS	ESTUDOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE COMBINATÓRIA
TEÓRICOS	Borba, Rocha e Azevedo (2015); Borba (2016); Borba, Souza e Carvalho (2018).
DIAGNÓSTICO	Lima e Borba (2015); Pessoa e Borba (2010).
EXPERIMENTAIS	Pinheiro (2008); Rosa (2018).
DOCUMENTAIS	Moura, Santos e Rêgo (2017). Martins (2016); Barreto e Borba (2010); Silva e Rocha (2013); Oliveira e Coutinho (2013); Pessoa e Borba (2010); Brasil (2018).

Fonte: Autora (2019).

Os trabalhos descritos na tabela serão abordados nas páginas seguintes, a começar com os trabalhos teóricos que apresentam ou propõem conceitos de combinatória.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) apresentam um panorama das pesquisas, realizadas nos últimos cinco anos pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – Geração. As autoras acreditam que o conjunto de dados obtidos possibilita reflexões sobre como o raciocínio combinatório se desenvolve, quais as dificuldades a serem superadas e quais práticas podem ser mais eficientes no ensino de combinatória.

O raciocínio combinatório é definido por elas como *um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis* (BORBA, 2010).

O Geração tem cinco linhas de pesquisa que, são apresentados em conjunto com seus objetivos, estas têm focos diferentes, entretanto em conjunto formam um trabalho que permite um conhecimento e reflexão sobre a combinatória em vários níveis de ensino, sobre várias fontes, diversos olhares e metodologias.

- Análise e produção de recursos – Levantar abordagens de ensino de problemas de combinatória em propostas curriculares, em livros-texto e em meios digitais; e produzir atividades, em meio impresso e/ou digital, para a educação básica.
- Avaliação de conhecimentos – Analisar como tem se dado a avaliação dos problemas multiplicativos, em particular os da combinatória, em instrumentos de larga escala e em outros processos avaliativos ocorridos dentro da escola; e propor processos avaliativos de desenvolvimento do raciocínio combinatório.
- Desenvolvimento cognitivo – Observar o desenvolvimento da compreensão de problemas combinatórios de alunos da educação infantil, do ensino fundamental (anos iniciais e finais), da educação de jovens e adultos e do ensino médio.
- Formação de professores - Identificar concepções de professores sobre as naturezas de problemas combinatórios, sobre dificuldades de alunos e formas de intervenção para superação de dificuldades; e observar salas de aula quando do ensino de problemas de combinatória.
- Intervenções pedagógicas - Realizar estudos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças, adolescentes, jovens e adultos.

Os pressupostos teóricos das autoras ressaltam que combinatória estuda técnicas de contagem, sejam elas diretas ou implícitas de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados que se enquadra em determinadas condições.

Os problemas combinatórios são mais que uma mera enumeração de objetos expostos e sim todas as maneiras possíveis de combinar dados elementos, de modo que todas as combinações, que atendem certos critérios, sejam consideradas.

Morgado et al.(2006, apud BORBA, ROCHA & AZEVEDO, 2015) afirmam que a análise combinatória estuda estruturas e relações discretas, chegando a afirmar que estes seriam os problemas mais frequentes e os mais usualmente trabalhados na educação básica, que seria a contagem de subconjuntos de um conjunto finito que atendam certas condições dadas.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) embasadas em Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) distinguem cinco tipos de problemas combinatórios: a) *existência*, observação da possibilidade, ou não, de solução diante dos elementos dados e condições determinadas; b) *enumeração*, listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas; c) *contagem*, determinação do número total de soluções, sem necessariamente listar todas; d) *classificação*,

sistematização dos casos segundo critérios apropriados; e) *otimização*, busca da melhor condição para a obtenção de determinadas soluções para um problema.

As autoras ainda asseguram que na educação básica são tratados, em geral, problemas de *enumeração* e de *contagem* que se limitam a certos tipos de situações, além de sua abordagem está atrelada a específicos níveis de ensino.

Apoiadas em Vergnaud (1991), Nunes e Bryant (1997) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), salientam que dentre os problemas multiplicativos, como um caso particular, envolve pensamento combinatório, denominado pelos autores e documento acima citado de, respectivamente, *produto de medidas*, *produto cartesiano* e *situações associadas à ideia de combinatória*. Esta é uma informação crucial, pois permite relacionar que termos diferentes estão associados ao mesmo objeto de estudo.

Esta situação ocorre quando envolve dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados, a partir da seleção de um elemento de cada um dos conjuntos independentes, gerando um novo conjunto de elementos de natureza distinta da dos conjuntos disjuntos dados.

A combinatória no ensino médio, geralmente aborda os problemas do tipo: *arranjos* (de um conjunto maior são escolhidos elementos onde a ordenação gera possibilidades diferentes), *combinações* (de um conjunto maior são escolhidos com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas) e *permutações* (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia).

Devido à variedade se faz necessário que haja uma análise do problema para estabelecer estratégias, utilizando o julgamento do que seja provável improvável ou impossível, levantando possibilidades.

As autoras concordam com Inhelder e Piaget (1976), quando afirmam que o *raciocínio combinatório* se constitui em parte do estágio avançado de pensamento denominado de *operacional formal*, que tem como propriedade geral a distinção entre o *real* e o *possível*. Como na combinatória é feito o levantamento de todas as possíveis relações de uma situação e a análise utilizando um conjunto de procedimentos de experimentação e de análise lógica, para validar as possibilidades. Então como o *raciocínio combinatório* é essencialmente hipotético-dedutivo, é, portanto, base de raciocínio científico.

Por isso, as autoras observam que esse modo de pensar é atingindo mais plenamente em estágios avançados de desenvolvimento cognitivo, todavia é necessário considerar que a gênese do *raciocínio combinatório* pode começar antes do período de pensamento operacional formal e que pode desenvolver-se por meio de interações entre maturação cognitiva e experiências sociais. Esta conclusão adveio de estudos empíricos em que o uso de árvores de possibilidades permitiu avanços no desenvolvimento desse modo de pensar, auxiliando estudantes em sua falta de capacidade de enumeração sistemática.

Mais um aspecto levantado pelas autoras, é que as situações combinatórias possuem características e relações que as diferenciam entre si, mas que se unem por aspectos em comum, constituintes, portanto de um mesmo campo conceitual, o das estruturas multiplicativas..

Borba, Rocha e Azevedo (2015), a partir das inferências dos autores com a Teoria dos Campos Conceituais, defendem que os distintos tipos de problemas combinatórios podem ser desenvolvidos desde os anos iniciais de escolarização e, amparados por resultados de investigação empírica, afirmam ser possível trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação.

E justificam que existem relações básicas de combinatória contidas nesses quatro tipos de problemas. Por isto, os estudantes precisam ter contato com esta variedade de situações para obter um desenvolvimento mais amplo do raciocínio combinatório.

Borba (2016) em artigo informado defende que a combinatória pode ser trabalhada desde os anos iniciais do ensino fundamental, tal afirmativa tem embasamento: nas situações vivenciadas pelas crianças que necessitam do raciocínio combinatório; em recomendações curriculares; na análise de materiais didáticos; em referenciais que citam o longo processo de desenvolvimento de conceitos; e em estudos anteriores que constatam que as crianças novas possui noções combinatórias. Além de pesquisas que apresentam recursos de aprendizagem.

Para Borba, as crianças estão em mundo repleto de informações que por vezes são imbuídos de conhecimentos matemáticos, estes se fazem presentes nas conversas, jogos e brincadeiras e ressalta particularmente as ideias combinatórias que embasam as escolhas rotineiras, tais como: escolhas de lanches, escolha de roupas, organização de equipes e brinquedos e demais.

A recomendação pelo enfretamento das demandas atuais sejam iniciadas mais cedo para que as crianças tenham estímulos para desenvolver o raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico. Posto que são formas mais complexas de pensamento e, como Vergnaud ressaltou, o domínio conceitual necessita de um tempo extenso e ter contato com situações problemas rotineiros para que este conhecimento faça parte do repertório de conhecimentos infantis. O início precoce do ensino destes aspectos da matemática pode oferecer oportunidade para a criança refletir, pensar e repensar as ideias intuitivas que mais tarde a ajudarão a desenvolver modos mais complexos.

Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, conceitos matemáticos mais elaborados são trabalhados de modo mais formal, mas desde o início da escolarização, inclusive na Educação Infantil, é possível abordar noções e subconstrutos mais simples de alguns conceitos, a partir de situações práticas e lúdicas. Assim, as crianças, desde novas, podem ser estimuladas a pensarem em questões interessantes de investigação e como informações podem ser levantadas, organizadas, classificadas e interpretadas, bem como podem ser incentivadas a refletirem sobre como eventos ocorrem – de modo aleatório, previsível ou determinístico. Também, desde cedo, podem ser incentivadas a levantarem possibilidades de eventos ocorrerem e a enumerarem modos de elementos constituintes de uma situação de serem combinados entre si (BORBA, 2016, p.2).

Borba apresentou vários estudos que corroboram com esta linha como o de Pessoa e Borba (2009) que observaram que crianças de anos iniciais do ensino fundamental são competentes para resolver alguns problemas combinatórios, em períodos que antecedem o estudo da combinatória na escola, isto pode estar ligado às experiências extra-escolares, de escolha e combinação de objetos, outras vivências não necessariamente relacionadas a combinatória também podem ajudar.

A autora também descreveu alguns resultados do trabalho de Vega e Borba (2014), e apontou que uma das dificuldades das crianças pode ser em não interpretar a necessidade de as possíveis combinações de elementos e não apenas algumas das possibilidades. Além de apresentarem evidências de que problemas de produtos cartesianos têm melhores resultados e as situações que envolvem as permutações têm resultados mais baixos, que isto pode se relacionar com o número de etapas de escolha dos problemas.

O estudo de Pessoa e Borba (2012 apud BORBA, 2016) observou que a utilização de material manipulativo permite que crianças desde a Educação Infantil sejam levadas a pensar sobre como é possível combinar elementos de distintas maneiras. Braz, Braz e Borba (2014) também utilizaram material manipulativo, mas

numa perspectiva da educação inclusiva, no caso de uma criança era deficiente visual, eles criaram materiais que se apoiavam em outros sentidos, obtendo bons resultados.

Já o trabalho de Azevedo e Borba (2013), analisado pela autora, utilizava a construção de árvores de possibilidades – com e sem uso de um software educativo Diagramas de Árbol (AGUIRRE, 2005). A construção de árvores de possibilidades virtuais, ou árvores de possibilidades em lápis e papel teve, um nível de eficácia muito bom, as crianças que tiveram tal experiência aprenderam a organizar melhor as suas soluções e superar as dificuldade em listar todas as possibilidades.

Borba questiona o que falta para que o estudo de conceitos mais complexos, como os da combinatória, inicie-se logo nas primeiras etapas da escolarização e como estimular esse trabalho desde cedo para que mais tarde se tenha sólida base para o maior aprofundamento na compreensão de situações combinatórias mais elaboradas.

Ela aponta a necessidade de que as recomendações curriculares venham acompanhadas da indicação de recursos: livros didáticos, materiais manipulativos e materiais tecnológicos. Ademais, é essencial preparar o professor, na formação inicial e continuada, para que se sinta seguro em tratar conceitos mais complexos.

Borba, Souza e Carvalho (2018) elencam razões para que o aprendizado da combinatória, estatística e probabilidade, sejam iniciados desde o início da escolarização básica. Os autores levantaram tal discussão tomando como base: referenciais teóricos, resultados de estudos empíricos, análise dos desafios específicos de cada uma dessas áreas com o objetivo de estimular o debate de situações combinatórias, estatísticas e probabilísticas em salas de aula

É importante o desenvolvimento cognitivo, conceitual, social e político dos estudantes para que estes possam desenvolver robustos modos de raciocínio. Igualmente, é preciso refletir a formação de professores para o ensino destas áreas.

Os autores ratificam que os conteúdos desse eixo estão imbuídos na rotina dos estudantes da educação básica, para que o desenvolvimento cognitivo seja efetivo. Salientam que as noções intuitivas são autônomas da instrução escolar, então elas podem subsidiar o aprendizado, no entanto, existem aspectos diversificados que precisam de ensino específico para o seu desenvolvimento.

Por consequência, no estudo da combinatória, estatística e probabilidade, existem conceitos complexos que se baseiam em formas elaboradas de pensamento

analítico e hipotético-dedutivo. Tal raciocínio é essencial no letramento matemático e também para tomar decisões.

Borba, Souza e Carvalho (2018) abordam os desafios dos três eixos citados, mas elencam-se apenas aqueles inerentes à combinatória. Uma das maiores dificuldades da educação matemática é desenvolver nos estudantes da educação básica modos de raciocínio (aritmético, geométrico, algébrico e combinatório, entre outros).

Isto implica que os estudantes da educação básica precisam de mais do que apenas conhecimento específico, e sim, que desenvolvam formas de pensamento que ajude na sua compreensão de mundo e nas atuações na sociedade. Em virtude disso, Borba, Souza e Carvalho (2018) defendem que primeiro desafio a ser superado é o da abordagem da combinatória desde o início da escolarização. Não deve ser aceitável que esta forma de pensar se desenvolva apenas no ensino médio.

Os autores e a esclarece necessidade do raciocínio combinatório seja tratado em todos os níveis de ensino da educação básica, inclusive na educação infantil. Estas afirmativas se apoiam em várias pesquisas citadas neste trabalho.

A de Pessoa e Borba (2010) apresentou diversas situações combinatórias para crianças da educação infantil, apenas uma pequena parte destas levantou todas as possibilidades, entre algumas das situações.

O exemplo mencionado descreveu que para a escolha de três dentre quatro animais (cachorro, gato, papagaio e tartaruga), selecionavam apenas três animais, ou seja, entendiam a relação de escolha, da questão, uma combinação de quatro elementos, três a três.

As outras relações combinatórias foram mais difíceis para as crianças. A *relação de ordenação*, que escolhiam corretamente apenas três animais, todavia não observavam a existências de possibilidades repetidas nas que representaram. O estudo era de sondagem, não existia um objetivo de ensino, mas os autores afirmam que, se questionadas, as crianças perceberiam as repetições. Já a *relação de esgotamento de possibilidades*, pelo levantamento de todas as possibilidades da situação combinatória, foi a mais difícil para a compreensão da turma.

Pessoa e Borba (2010 apud BORBA, SOUZA E CARVALHO, 2018) acreditam ser possível trabalhar situações combinatórias com crianças na faixa etária de 5 e 6 anos de idade, desde que sejam situações simples com poucas possibilidades a serem levantadas e a partir da manipulação de material.

O segundo desafio, elencado por Borba, Pessoa e Carvalho (2018), é o de utilizar representações simbólicas variadas para o trabalho com o mesmo conteúdo, podendo apresentar novas formas de registro ao longo da escolarização. Citando Vergnaud (1986) que atribui a importância às representações simbólicas na conceitualização, pois estão em conjunto com as situações significando os conceitos.

O segundo desafio se relaciona com o primeiro, pois o início mais precoce do estudo da combinatória permite que diferentes formas de representação simbólica sejam utilizadas ao longo da escolarização.

De modo que formas adequadas de registros poderão ser empregadas nos diversos níveis de ensino, ademais os estudantes terão a possibilidade de perceber aspectos comuns e diferenciadores entre estes, permitindo uma compreensão mais amplificada das situações combinatórias e nos seus modos de representação.

Alguns desafios que também precisam serem enfrentados no ensino e na aprendizagem da combinatória são:

Articular conceitos envolvidos em situações combinatórias com outros conceitos matemáticos; articular formação inicial e continuada de professores de distintos níveis de ensino, de modo que atuem como uma equipe corresponsável, que se valoriza mutuamente e que busca o desenvolvimento de formas de raciocínio dos estudantes; e lutar por políticas públicas que tenham como prioridade o desenvolvimento de modos de pensamento (BORBA, PESSOA & CARVALHO, p.7)

Os autores abalizam que as compreensões de conceitos da combinatória, da estatística e da probabilidade não são inteiramente desenvolvidas sem instrução formal. Existem noções intuitivas apreendidas fora do contexto escolar, conseqüentemente até adultos escolarizados apresentam muitos equívocos no que tange ao levantamento de possibilidades, à interpretação de informações e ao julgamento de determinismo de eventos. De tal modo que é importante o estudo dessas áreas nas aulas de matemática, desde o início da escolarização.

Em seguida, se procederá com a análise dos trabalhos diagnósticos, que são aqueles que se preocupam em: levantar, diagnosticar os problemas, as particularidades do processo de ensino e aprendizagem da combinatória, junto aos professores e os alunos.

Lima e Borba (2015) apresentam a investigação em que os professores de matemática reconhecem o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) em situações combinatórias, Borba (2010 apud LIMA & BORBA, 2015) ressalta que o ensino da combinatória deve ser gradativo, podendo ser iniciado nos anos iniciais do ensino

fundamental até o ensino médio, todavia é necessário que o professor considere as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas combinatórios: operações aritméticas, desenhos, listagens, diagramas e gradualmente construindo procedimentos mais formais para resolução deste tipo de problema.

As autoras asseguram que, utilizando estratégias mais simples e intuitivas, constroem PFC e, a partir deste, a construção das fórmulas da combinatória. O quadro a seguir apresenta uma serie de aplicações do PFC.

Quadro 7: Questões que utilizam o PFC

TIPO	PROBLEMAS	REPRESENTAÇÃO USANDO O PFC
CARTESIANO	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos X QMP de lápis X QMP de borracha X QMP de caneta
ARRANJO	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar
PERMUTAÇÃO	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição

COMBINAÇÃO	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ <p>Quantidade de escolhas para o 1º atleta X quantidade de escolhas para o 2º atleta X quantidade de escolhas para o 3º atleta X quantidade de escolhas para o 4º atleta X quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atleta.</p>
ARRANJO CONDICIONAL	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ <p>1º lugar ocupado por Júlia X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.</p>
COMBINAÇÃO CONDICIONAL	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos.	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ <p>1º lugar ocupado por Jéssica X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.</p>

Fonte: Lima e Borba (2015).

Os participantes deste estudo se constituíram em 13 professores dos anos finais do ensino fundamental, denominado Grupo 1 e 11 professores do ensino médio denominado Grupo 2, todos licenciados em matemática.

O instrumento utilizado para coleta de dados fora constituído por oito questões, apresentado duas de cada tipo (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação). Nestes testes foram manipuladas as etapas de escolha (quatro ou cinco etapas) e também, os contextos (os mesmos para quatro e para cinco etapas: refeições, esportes, competições, fotos de artistas).

Para análise dos dados houve auxílio do software estatístico *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) e o teste utilizado para comparação entre os grupos foram o de análise de variância - ANOVA. Os problemas do instrumento de

coleta de dados tiveram as perguntas descritas no quadro a seguir.

Quadro 8: problemas do PFC

TIPO	Problemas com 4 etapas de escolha	Problemas com 5 etapas de escolha
PRODUTO CARTESIANO	<p>No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$</p> <p>c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$</p> <p>e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>	<p>Na Lanchonete “Que Delícia” José quer comprar um sanduíche. Ele pode escolher entre 4 tipos diferentes de pão, 3 tipos diferentes de carne, 5 tipos diferentes de queijo, 2 tipos diferentes de molho e 3 tipos diferentes de salada. Sabendo que ele precisa escolher um tipo de cada opção: pão, carne, queijo, molho e salada, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ b) $\frac{4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$</p> <p>c) $4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$ d) $4 + 3 + 5 + 2 + 3$</p> <p>e) $4 \times 3 \times 5 \times 2$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>
ARRANJO	<p>Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) 7×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$</p> <p>c) $7 + 4$ d) $7 \times 6 \times 5 \times 4$</p> <p>e) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>	<p>Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) $7 + 5$ b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$</p> <p>c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ d) 7×5</p> <p>e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>

COMBINAÇÃO	<p>Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8×4 c) $8 + 4$ d) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e) $8 \times 7 \times 6 \times 5$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>	<p>Na seleção Brasileira de Basquete, o técnico convocou 12 atletas. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 5 desses jogadores que irão compor a equipe titular, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) 12×5 b) $12 + 5$ c) d) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ d) $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>
PERMUTAÇÃO	<p>A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) 4×4 b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$ d) $4 + 3 + 2 + 1$ e) $4 + 4$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>	<p>Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?</p> <p>a) 5×5 b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$ c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ d) $5 + 5$ e) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ f) NDRA</p> <p>Justifique:</p>

Fonte: Lima e Borba (2015)

A frequência de acertos totais foi baixa, entre o Grupo 1, composto por professores dos anos finais do ensino fundamental e também no Grupo 2, dos professores do ensino médio, pois nos dois casos menos da metade dos participantes reconheceu o PFC nos diferentes tipos de problemas apresentados no teste. O grupo 2 teve um desempenho melhor provavelmente devido à prática de ensinar este conteúdo. Semelhantes resultados foram encontrados por Rocha (2011):

Acredita-se que a dificuldade em reconhecer o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) presente nas opções corretas, nos problemas de arranjo e combinação, pelos professores de Matemática do Grupo 1, dê-se pelo fato dos mesmos não terem experiência com o ensino de Análise Combinatória neste nível de escolaridade. A dificuldade enfrentada pelos professores do Grupo 1, em decorrência de sua falta de experiência no ensino de Análise Combinatória, se reflete na dificuldade em diferenciar problemas de arranjos de combinações. Para casos de combinações, é preciso reconhecer que o PFC será aplicado duas vezes, uma para fazer todas as combinações

possíveis e, logo após, dividir, este resultado, pela permutação dos elementos repetidos, para, então, encontrar a resposta correta para o problema apresentado (LIMA e BORBA, 2015, p. 10)

Esses dados consolidam com os achados de Rocha (2011), levantando a possibilidade da dificuldade dos professores em diferenciar problemas de arranjo e combinação, está ligado a um desconhecimento das situações nas quais os invariantes do conceito referentes à ordenação irão implicar, ou não, em novas possibilidades.

Vale a pena ressaltar que os participantes do Grupo 1, apresentam um melhor reconhecimento do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) nos problemas do tipo produto cartesiano. Isso denota um reconhecimento do PFC na resolução nestes problemas, bem como a mobilização do conhecimento comum da combinatória.

As autoras concluíram que apesar de reconhecer o PFC nas alternativas corretas do teste, mais da metade dos professores deste estudo não aceitaram a aplicação deste princípio nas diferentes situações combinatórias. Nas justificativas apresentadas pelos participantes do Grupo 2, professores do ensino médio, é possível observar o uso dominante de fórmulas para resolver problemas.

Todos os professores integrantes tem a mesma formação inicial, licenciatura em matemática, todavia o desempenho dos docentes do ensino médio foi melhor, é provável que a prática de ensinar o conteúdo de combinatória pode possibilitar um maior reconhecimento da aplicação do PFC em variadas situações combinatórias.

As autoras concluíram que o desempenho dos mestres dos anos finais do ensino fundamental no reconhecimento do PFC em situações combinatórias foi muito aquém do esperado, isto é inquietante e deve ser alvo de discussões em formações iniciais e continuadas, além da necessidade de mais estudos.

Pessoa e Borba (2010) surgiu de uma pesquisa de doutorado, com a questão de pesquisa: como alunos dos anos iniciais do ensino fundamental aos anos finais do ensino médio lidam com problemas combinatórios? Os dados foram coletados com um instrumento que continha oito problemas com os quatro significados da combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), dois de cada tipo, resolvidos por 568 alunos, de quatro escolas de Pernambuco. O aporte teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

A combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, escolhidos a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de fórmulas é possível saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

As autoras tomaram como base Merayo (2001) e classificações anteriores (NUNES & BRYANT, 1997; VERGNAUD, 1991 e BRASIL, 1997), para dispor os problemas que envolvem raciocínio combinatório em uma nova organização, pois alguns autores se remetem exclusivamente ao produto cartesiano quando falam de problemas combinatórios e outros referem-se exclusivamente a arranjos, combinações e permutações. Abaixo estão expostos os significados presentes na combinatória, com seus exemplos e invariantes.

Produto Cartesiano. Ex.: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? Invariantes: (1) dado dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

Arranjo. Ex.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados? Invariantes: (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Permutação. Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR. Invariantes: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Combinação. Ex.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? Invariantes: (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

O estudo tinha como objetivo geral analisar a compreensão de alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio sobre problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Além de observar o desempenho de alunos lidando com os quatro significados de combinatória dos problemas (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano); além de comparar desempenhos ao longo dos níveis de escolaridade; e também identificar quais invariantes das situações investigadas são mais facilmente reconhecidas pelos alunos e quais estratégias e representações simbólicas nelas envolvidas são mais usualmente utilizadas.

Para alcançar tal fim, foram analisadas as resoluções de 568 alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio de quatro escolas, duas escolas públicas e duas particulares de Pernambuco. Cada aluno resolvia uma ficha contendo oito problemas envolvendo o raciocínio combinatório (dois de cada tipo: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação).

A orientação dada aos alunos fora que os problemas poderiam ser solucionados da forma que eles quisessem, seja por desenhos, tabelas, gráficos, operações numéricas ou quaisquer outras formas.

Elas ressaltaram que nas análises fora considerada como acertos a finalização total do problema com a resposta correta. Entretanto, houve a ocorrência de acertos parciais, o que também é importante, pois os alunos utilizam interessantes estratégias de resolução e diferentes níveis de compreensão em relação aos problemas, não conseguindo na maioria das vezes chegar ao número total de possibilidades, mas listam um bom número de casos possíveis.

Um dos aspectos mais importantes é a quantidade de alunos, em três níveis da educação básica, envolvendo distintos significados combinatórios e no qual se tem um panorama de como alunos de níveis, idades e escolas distintas estão pensando sobre este conhecimento.

Para as autoras os resultados embasam a tese de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre em um longo período de tempo, que sofre influência de aspectos extraescolares, e vivências escolares relacionadas direta ou indiretamente às situações combinatórias.

Este desenvolvimento começa desde os anos iniciais do processo de escolarização com a utilização de estratégias que demonstram níveis de conceitualizações que vão sendo adaptados face às diversas experiências escolares

no sentido da sistematização e formalização na compreensão dos significados distintos da combinatória.

Para Pessoa e Borba (2010), mediante os resultados, é necessário o reconhecimento por parte da escola acerca desse desenvolvimento para que isto possa servir de subsídio que aproveite as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder os problemas combinatórios como uma forma de auxílio nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à combinatória.

Os trabalhos diagnósticos apontam que existe um longo caminho a ser percorrido no ensino da combinatória e que o conhecimento dos professores está fragilizado, decorrendo do livro didático. Não tratar a combinatória de forma mais ampla e com significados variados, pois esta ainda é um dos recursos mais utilizados, além de apontarem a necessidade desta forma de pensar a ser trabalhada na formação inicial e continuada dos professores da educação básica.

No que diz respeito aos discentes, é possível verificar a existência de traços e evidências do raciocínio combinatório em vários níveis de ensino, entretanto, é necessária a formalização de alguns aspectos, o desenvolvimento de esquemas mais eficazes, do esgotamento de possibilidades, entre outros aspectos que também carecem de atenção.

Os trabalhos experimentais são aqueles que apresentam intervenções pedagógicas, ou práticas inovadoras para o ensino da combinatória com os trabalhos de Pinheiro (2008) e Rosa (2018).

PINHEIRO (2008) é um trabalho sobre análise combinatória, que se originou da seguinte indagação: “Uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise combinatória?” que teve como desdobramento a questão secundária: “É possível a partir do ensino oferecido, que os alunos tenham desenvolvido habilidades básicas para resolverem os problemas de Análise combinatória?” para respondê-las o objetivo foi “Investigar a viabilidade da sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise combinatória, por meio de Situações Didáticas, utilizando a resolução de problemas como ponto de partida”.

A metodologia escolhida foi a engenharia didática e teve as seguintes etapas um estudo sobre os trabalhos no campo do ensino-aprendizagem de Análise

combinatória. Na segunda etapa, o autor utilizou duas tendências de ensino da matemática à resolução de problemas como ponto de partida utilizado, o ensino com atividades, o uso de jogos e dialogou com a teoria das situações didáticas como fundamentação teórica, aporte de pesquisas que envolvam situações reais de ensino na sala de aula.

Nas etapas seguintes, Pinheiro apresenta um comentário geral a respeito do pré-teste e das situações-problema da sequência de ensino, descreve os sete encontros que teve com a turma do 2º ano de um colégio em Belém, em seguida faz uma análise dos resultados obtidos no pré-teste, no pós-teste e nos extratos dos protocolos dos alunos.

O trabalho de Pinheiro teve como sujeito alunos do ensino médio, todavia a metodologia, o objeto de pesquisa e as tendências utilizadas o fazem relevante, a priori na sua revisão de estudos elencou duas categorias os trabalhos que: Investigaram as estratégias e as dificuldades dos alunos quando resolvem problemas de Análise combinatória: investigaram sequências de ensino de análise combinatória.

Sobre as que arguíram sequência de ensino de análise combinatória, ele apresenta três trabalhos de Batanero e colaboradores, que pesquisou com vários sujeitos e enfoques. Alguns achados relevantes apontam que os bons resultados aparecem na identificação da resolução dos problemas, compreensão da ordem, repetição no enunciado dos problemas e generalização e identificação da operação combinatória adequada. Os resultados ruins ocorrem quando existe confusão sobre o tipo de elementos que se combinam; a falha na enumeração sistemática; e falta de habilidade para concluir. Também existe um interesse em analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, salientando que estas devem ser consideradas.

Em relações às dificuldades dos alunos nos problemas combinatórios, Batanero *et al.* (1996) discriminam algumas causas: enumeração não sistemática, que é uma estratégia de tentativa e erro sem o aporte de recursos que levem à formação de todas as possibilidades; diagrama de árvore utilizada de maneira errada; erro de ordem; erro de repetição em que não é considerada a repetição dos elementos e confusão quanto ao tipo de objeto.

Na linha dos trabalhos que investigaram sequência de ensino de análise combinatória na comparação dos dois trabalhos analisados, Rocha (2002) e Sturm

(1999) potencializam o princípio multiplicativo como a principal ferramenta para resolver problemas de análise combinatória no ensino médio.

No trabalho de Pinheiro, a atividade 2 da sequência didática aborda o Princípio Fundamental da Contagem, as características, forma e o procedimento utilizado.

A priori, a turma foi dividida em 5 grupos, cada grupo recebia um envelope com três folhas e cada folha continha uma questão que tinham a seguinte estrutura 01, o evento era formar um caminho para ir de A para C; na segunda, o evento era vestir uma pessoa com um par de tênis, uma camisa e uma calça; e na situação-problema 03, o evento era formar uma senha.

Posteriormente, foi exposto à turma que a realização de um evento ocorre por meio de etapas. A intenção era que os alunos percebessem os invariantes das três situações-problema essenciais à institucionalização do conceito do PFC, isto foi perguntando sobre as etapas de cada questão.

Ficou claro que depois das perguntas e da atividade que os alunos perceberam que o resultado da situação-problema era obtido pela multiplicação do número dois pelo número três, continuamos as perguntas, mas para as outras situações-problema.

O que proporcionou condições adequadas para os alunos chegarem aos resultados das situações-problema, e enfim turma e professor institucionalizaram o conceito do Princípio Fundamental da Contagem foi a descrição das atividades de forma detalhada, pois permite refazer o caminho no sentido de utilizar esta atividade para sala de aula.

Rosas (2018) apresenta os resultados de uma pesquisa de mestrado que teve como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho dos alunos na resolução de questões de análise combinatória.

Norteadas pelas seguintes indagações: A sequência didática proposta propicia uma participação efetiva e um bom desempenho dos alunos na resolução de questões de análise combinatória? A sequência oferecida aos alunos desenvolve competências e habilidades para resolverem problemas de análise combinatória? O aporte teórico fora o da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), o ensino de matemática por Atividades segundo Sá (2009) e o uso de jogos como contributo pedagógico.

Como metodologia de Pesquisa Rosas (2018) optou pela engenharia didática. Este trabalho está voltado para o ensino médio apresentando vários tópicos como: arranjo, combinação, fatorial, permutação e o Princípio Fundamental da Contagem, no entanto serão demonstrados apenas os resultados sobre o PFC.

A fase da experimentação ocorreu no período de maio a junho de 2017, com uma turma do 1ª série do ensino médio, turno matutino, situada no município de Vigia de Nazaré, no nordeste paraense, e a atividade do PFC foi a primeira da sequência didática. O autor elencou alguns pontos que são relevantes, tais como:

- Primeira atividade, levou mais tempo e houve muitas dúvidas;
- Resolução das questões: como resolver as questões;
- Preenchimento do quadro da atividade: os alunos queriam saber o que significava as palavras evento, etapa e a expressão evento independente.
- A elaboração da conclusão: os alunos solicitaram informações de como elaborar a conclusão. Rosa (2018) solicitou que os discentes escrevessem o que eles tinham observado para resolver as questões apresentadas na atividade.

Rosa (2018) ainda ressalta a importância do preenchimento da tabela. É essencial para que todos os grupos percebam a regularidade ao se multiplicar o número de possibilidades em cada etapa, é possível encontrar o resultado, bem como apontou a necessidade de um tempo para discussão das conclusões e formalização dessas conclusões.

Estes trabalhos têm uma abordagem semelhante e questões que certamente vão contribuir para o presente estudo, o aparecimento de questionamentos sobre o que são etapas independentes e sucessivas; o que são eventos. Que os alunos tiveram dúvidas no preenchimento das tabelas e para escrever uma conclusão, baseada nas observações.

A seguir serão abordados os trabalhos documentais, que apresentam como a combinatória inserida nas fontes documentais que norteiam a educação no Brasil.

A combinatória nas séries iniciais é recomendada nos descritores da Prova Brasil, o de n. 20 tem a seguinte redação “**D20** - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória” (Brasil, 2008).

Este descritor discorre sobre as bases do campo multiplicativo e, apesar de não estar citado explicitamente, é observável a sua influência entre estes e outros documentos oficiais. Esta recomendação deveria estar refletida nos livros didáticos de forma mais expressiva, por isso analisam-se alguns trabalhos que ponderam sobre a presença da combinatória nos livros didáticos.

Moura, Santos e Rêgo (2017) discutem as considerações que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) faz sobre a combinatória e suas interligações com o PCN, por suposição ressaltam que o PCN de matemática foi pioneiro em apresentar o bloco Tratamento da Informação, além de salientar sua importância no preparo dos estudantes para viver em uma sociedade que necessita destes conhecimentos para entendê-la.

O PCN não tinha força normativa, visto que é uma recomendação, por isto muitas vezes ele acabara não implantado, porquanto houve a necessidade de um texto normativo que cristalice a necessidade do ensino probabilístico. A referida Base defende que é imperativo a promoção da compreensão dos fenômenos determinísticos, definindo que:

[...] o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (BRASIL, 2017, p.230).

Os autores enfocam que estatística e a probabilidade adquiriram status de conteúdo obrigatório no ensino fundamental como já ocorria no ensino médio. Para os estudiosos, campo conceitual das estruturas multiplicativas se constrói a partir de um vasto contexto de problemas que dão sentidos aos conceitos e que se conectam entre si com conteúdo a ser trabalhado em toda a educação básica, respeitando a idade, o ano ou ciclo.

Martins (2016) pesquisou 8 livros da coleção aprovadas pelo PNLD (2016) escolhidos de forma aleatória, apontou que os selecionados continham 55

questões que tratavam da combinatória, nos quatro significados que o autor tomou emprestado de Borba (2010).

O autor ressaltou que a maioria dos problemas analisados não solicita nenhum tipo de representação simbólica na sua resolução, bem como poucas vezes utilizam formas diferentes da representação na resolução das situações problema. Também observou que nas obras analisadas não ficou claro o contato do aluno com diversas formas de resolução de problemas.

Quanto aos professores, a explicitação dos invariantes de cada tipo de problema combinatório não apareceu em nenhuma das obras analisadas. A saber, não apresentou orientações aos docentes, apenas algumas atividades solicitavam que os professores convidem os alunos a exporem suas soluções para possíveis discussões.

O livro didático apresenta avanços a cada programa, segundo Martins (2016). Porém, salienta que na área de matemática, existe um interesse nos aspectos conceituais, didáticos e gráficos, visando o processo de aprendizagem dos alunos. Os dados obtidos na pesquisa indicaram que apesar dos livros trabalharem diversos aspectos do raciocínio combinatório, precisa de maior variabilidade de significados abordados de formas de representação utilizadas e também orientações metodológicas para o professor trabalhar com as propriedades invariantes da combinatória.

Barreto e Borba (2010) observam como são tratados problemas de raciocínio combinatório em livros e manuais do professor de 1ª a 4ª série de escolarização básica.

Em Brasil (1997 apud BARRETO & BORBA, 2010), a combinatória se apresenta em situações que consistem basicamente em escolher e agrupar elementos de um conjunto. Elas advogam que as dificuldades apresentadas pelos alunos nas questões que tratam da combinatória, podem estar relacionadas à forma com que este tópico é tratado nos livros didáticos, que em muitos casos são o recurso mais utilizado pelo professor, por isso é necessária uma análise de como e de que forma o livro didático trata o assunto em questão.

A análise foi embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que orienta a necessidade de articular os conceitos, os significados, com as propriedades e representações simbólicas, que os diversos significados da

multiplicação precisam ser trabalhados com os estudantes, entre eles o da combinatória.

Para a pesquisa foram escolhidas 5 coleções aleatórias dentre as aprovadas pelo Programa Nacional do Livros Didático (PNLD, 2007), com intuito de verificar os livros do aluno e no manual do professor, os tipos de problemas e se estão abordados na tríade: conceito, significado e representações.

Os achados foram os seguintes, as autoras procuraram quatro significados da combinatória: produto cartesiano; permutações; arranjo e combinatória. Nesta classificação. O significado que apresentou o maior percentual total de problemas foi o da combinação seguido do produto.

Quadro 9: Percentual de tipos de problemas por séries e no manual do professor

SÉRIES	PRODUTO CARTESIANO	PERMUTAÇÃO	ARRANJO	COMBINAÇÃO
1ª série	5,96 % (14)	2,13 %(5)	0,43 %(1)	10,64 %(25)
2ª série	10,64 %(25)	3,40 %(8)	0 %(0)	8,94 %(21)
3ª série	10,21 %(24)	5,11 %(12)	1,70 %(4)	11,06 %(26)
4ª série	6,38 %(15)	7,66 %(18)	0,85 %(2)	9,36 %(22)
Manual do professor	2,13 %(5)	1,30 %(3)	0 %(0)	2,13 %(5)
Total	35,32 %(83)	19,57 %(46)	2,98 %(7)	42,13 %(99)

Fonte: Barreto e Borba (2010).

A explicação levantada foi que a combinação está presente nos capítulos que tratam das estruturas aditivas e deu como exemplo, quando solicitam listagens de números com certo número de algarismos. Além do fato da *combinação* dar vezes ao estudo do sistema monetário, nas questões de formar um valor com cédulas e/ou moedas.

O tipo arranjo é o menos frequente, as autoras elencam alguns motivos, significado de maior complexidade, pois além de escolher elementos de um dado conjunto para formar os possíveis subconjuntos, tem que ordenar esses elementos. Tanto que este tipo de situações não aparecem em duas coleções, as categorias apresentadas aparecem nas coleções.

No que tange aos tipos de representação simbólica apresentada nos livros estão: desenhos; apenas enunciado, algoritmo, oral e mental; manipulativos, mais de uma; tabela e árvores de possibilidades.

Os dados apontam que as representações que tiveram as maiores frequências foram: *desenho*, *apenas enunciado* e *tabela*. As autoras apontam que a maioria dos livros não propõe o uso de uma representação específica para a resolução dos problemas, transferindo a escolha para o aluno, o manual do professor que poderia conter orientações mais explícitas não tem esta perspectiva.

Nos quatro significados que envolvem raciocínio combinatório (*Produto cartesiano*, *Permutação*, *Arranjo* e *Combinação*) as coleções não apresentaram orientações para o professor nem sobre os significados, logo também não foi tratada nenhuma das propriedades invariantes do conceito. Isto implica que poucos acréscimos foram feitos no manual do professor em relação ao livro do aluno.

Silva e Rocha (2013) identificaram como a combinatória está inserida nos livros didáticos e manuais do professor dos anos finais do ensino fundamental e quais orientações os mesmos livros didáticos fornecem ao professor de matemática.

O aporte teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud o que permitiu um diálogo com os trabalhos de Pessoa e Borba (2009) bem como Barreto e Borba (2010) que também utilizam a teoria no ensino de combinatória. Para este trabalho, foram escolhidas apenas duas coleções a mais adotada e a de menor teor no país segundo o Programa nacional do Livro Didático (2014).

Os autores apresentam as três dimensões do conhecimento (S, I, R) da teoria dos Campos Conceituais que são atrelados.

[...] um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009, p.29)

Para Vergnaud (2009, p. 24), existem distintos significados para o termo representação, entre eles: fluxo da consciência em que cada indivíduo testemunha por seu próprio pensamento; categorias de pensamento com os quais um indivíduo capta e integra as informações presentes em uma situação; Relações significantes/significados na linguagem natural e outros sistemas simbólicos desenvolvidos pelas sociedades humanas.

As representações simbólicas no livro didático pertencem ao terceiro significado descrito pelo autor. Vergnaud (2009) amiúda que as relações entre significantes/significados são usadas “para representar os conhecimentos tidos como verdadeiros, comunicar suas intenções e sustentar seus processos de pensamento”.

Ainda que eles sejam utilizados e visualizados sua interpretação e compreensão são intrínsecas aos invariantes operatórios dos indivíduos a que se destinam.

As autoras ainda salientam que os estudos apontam à utilização de basicamente duas propriedades invariantes: ORDEM E ESCOLHA, se existem vários conjuntos e escolheu-se apenas um elemento de cada um destes conjuntos originando seqüências, a ordem gera um novo elemento, tem-se um produto cartesiano.

Quando o problema necessita a escolha de todos os elementos e a ordem gera novos elementos, tem-se uma permutação. Se no problema a escolha recai em parte dos elementos e a ordem gera novos elementos, um arranjo. Finalmente, se a escolha cabe em parte dos elementos e a ordem não gera novos elementos, um problema de combinação (PESSOA & BORBA, 2010).

As representações simbólicas possíveis nas questões de combinatória em livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental foram as utilizadas por Barreto e Borba (2010) que estão no artigo anterior.

As autoras utilizaram a coleção com maior e menor circulação segundo dados do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), disponibilizadas através do documento, coleções mais distribuídas por componente curricular (BRASIL, 2013).

O caminho escolhido para a pesquisa possuía duas abordagens a verificação quantitativa para levantar a quantidade de questões e a análise qualitativa das orientações dadas aos professores, por meio dos respectivos manuais dos professores, buscando orientações sobre as representações simbólicas existentes, o processamento de todos os dados quantitativos foi feito com programa *IBM SPSS Statistics*.

A princípio, foi necessário mapear as questões gerais e aquelas que utilizavam o raciocínio combinatório por volume e coleção, onde foi possível observar que existem problemas de combinatória em todos os volumes das coleções analisadas, embora o quantitativo de problemas encontrados seja considerado pequeno, variando de 0,5% a 3,7% das questões.

A combinatória é tratada como pertencente ao bloco Tratamento da Informação, conforme orientação do PCN. A disposição das questões ao longo das coleções acontece em capítulos específicos, mas estão presentes também em capítulos reservados ao estudo de números e operações.

No que tange as orientações aos professores tratam apenas do uso de algumas representações simbólicas, não houve nenhuma referência das situações e/ou propriedades invariantes, deixando evidente a necessidade de um complemento do manual do professor que oriente cada situação.

Silva e Rocha (2013) ressaltam que a existência das questões não garante sua utilização em sala de aula, assim se faz necessário pesquisa para entender como estas questões são utilizadas e relacionar com os conhecimentos dos professores e alunos que utilizam estes livros didáticos.

Oliveira e Queiroz (2013) trabalharam com o objetivo de discutir como o conteúdo de combinatória é abordado nos livros didáticos de anos iniciais do ensino fundamental. A análise foi feita em cima dos livros de alfabetização matemática e matemática, a partir dos sumários e das resenhas de cada coleção aprovada no Programa Nacional do Livro Didático de 2013 (PNLD- 2013).

As orientações presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, que conversaram com pesquisas na área de educação matemática, juntamente com pressupostos da teoria da transposição didática. Como as autoras queriam averiguar quais elementos da combinatória são apresentados nos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental e como tais elementos são abordados, segundo o sumário e as resenhas presentes no guia PNLD (2013).

Pessoa e Borba (2010) apontam que a combinatória, se trabalhada desde os anos iniciais, desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo, para as autoras este é um ramo da matemática que aborda de forma incisiva conceitos aplicáveis ao cotidiano, além de trabalhar um dos princípios mais importantes em matemática: a contagem.

Pessoa (2009), em sua pesquisa de doutorado, identificou que a maior parte dos problemas de raciocínio combinatório (arranjo, combinação e permutação) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do ensino médio e que, nos anos iniciais do ensino fundamental, são trabalhados apenas problemas do tipo produto cartesiano. O que contraria vários estudos e o PCN de matemática que recomendam que se utilize uma variedade de problemas com noções de combinatória desde as séries iniciais.

Na revisão de estudos, as pesquisas apontavam que a parte que trata do conteúdo combinatório não faz uma distinção entre os diversos tipos de problemas como essencial para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Não há um trabalho sistemático antes do 2º ano do ensino médio, como indicam Amaral, Barreto

e Borba (2007), nas coleções aprovados pelo PNLD de 2007. Assis e Magalhães (2012) analisaram como os livros didáticos de matemática do 2º ao 5º ano do ensino fundamental, aprovados pelo PNLD de 2010, trabalham o raciocínio combinatório, comparando-os com os resultados observados por Barreto, Amaral e Borba (2007).

Eles constataram uma diminuição do número de problemas que envolvem tal raciocínio, considerando-se as coleções aprovadas pelo PNLD de 2007 e o de 2010: foi de 124 para 99 o número total de problemas combinatório identificados. Para eles, os números ressaltam a perda de espaço deste campo nos livros didáticos.

O guia do PNLD (2013) afirma uma das funções do livro didático, a de introduzir sala de aula as modificações didáticas e pedagógicas propostas em documentos oficiais, assim como resultados de pesquisas sobre a aprendizagem da matemática.

Nas coleções aprovadas no PNLD (2013), os dados levantados apontam que a combinatória é tratada de forma espiralada, fragmentada. E que também não foi possível identificar, pela leitura do guia, uma sequência contínua de abordagens nas coleções. Infelizmente, muitas coleções didáticas nem mencionam o tema. Isso, além de dificultar a construção de conceitos, diverge do proposto pelos Parâmetros e de muitas pesquisas que tratam desse tema, que indicam a abordagem desde os primeiros anos e de forma contínua durante todo o fundamental menor.

Em seis, das vinte e quatro coleções aprovadas, o estudo do guia não identificou a menção aos conteúdos de combinatória em nenhum dos volumes. Foi possível inferir a partir das análises dos sumários dessas coleções, mesmo nos anos mais avançados (4º e 5º anos), que o tratamento a este conceito não é prioritário.

Em relação à abordagem dos conteúdos, grande parte dos autores trata a combinatória no contexto do raciocínio multiplicativo, conforme se observa no espaço do guia reservado à apresentação da forma de abordagem de cada bloco da matemática escolar.

Tais análises sobre como os conteúdos são abordados ao longo das coleções são importantes, pois subsidiam o processo de escolha do livro didático. Como o conteúdo de combinatória não é contemplado em todas as coleções aprovadas, cabe ao professor fazer tal complementação, neste momento a boa formação matemática do professor é essencial. Merece destaque que, condicionado pela escolha de livros feita, o educando pode não ter contato com as noções da combinatória.

Brasil (2018) – A BNCC (Base Nacional Curricular Comum) é um documento normativo da educação brasileira, por isto é essencial que se observe as recomendações para o ensino da combinatória.

Na unidade temática números, o objeto de conhecimento de problemas de contagem que apresenta a seguinte escrita: “*Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?*” (BRASIL, 2018, p.294). Claramente está inscrito dentro do Princípio Fundamental da Contagem.

A habilidade (EF05MA09) que tem a seguinte redação

”Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (BRASIL, 2018, p.294)

Este trecho corrobora e sintetiza boa parte deste trabalho, o uso do PFC é muito importante no desenvolvimento do raciocínio lógico, por isso deve ser abordado de forma mais simplificada, desde as séries iniciais do ensino fundamental.

2.5 SÍNTESES DAS ANÁLISES PRÉVIAS

Dos trabalhos revisados, foi possível elencar alguns tópicos mais relevantes:

A teoria dos campos conceituais se apresenta compatível com os problemas que se depara em sala de aula durante o exercício da docência. Vergnaud evidencia a necessidade de oferecer variedade de situações, conceitos, relações, estruturas, operações que se constitui e uma coletânea variada de problemas que se emaranham para formar um campo conceitual, que por sua vez não é formado em pouco tempo, ao contrário é um processo parcimonioso que precisa estar em sintonia com as necessidades da turma e do indivíduo.

Para isso é necessário que as crianças sempre tenham contato com novos problemas e propriedades que os alunos vão dominar com o tempo e que não adianta tentar contornar estas dificuldades conceituais elas vão ser superadas na medida em que se apresentam.

O Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) abrange o conjunto de situações que necessitam para sua resolução uma ou mais multiplicações ou divisões ou uma combinação dessas operações, bem como o conjunto de conceitos e teoremas que possibilitam a análise matemática de tais situações.

Isto está declarado em palavras similares no descritor 20 da Prova Brasil (5º ano) com a seguinte redação: “*Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração e combinatória.*” (BRASIL, 2019, p. 1).

Nos trabalhos analisados a luz da TCC, pode-se verificar que das diversas classes em que se subdivide o Campo Conceitual Multiplicativo, estas apresentam desempenhos variáveis, o que aponta a existência dentro do CCM de problemas e temas que são mais sensíveis que outros.

No trabalho de Merlini, Magina e Santos (2010), a questão que envolvia combinatória alcançou um dos piores índices na pesquisa, somente atingindo 28%. E descreveram um fato observado que a maioria deles compreendia a situação, alguns até esboçavam possibilidades, mas não conseguia expressar isso como uma multiplicação.

O trabalho de Cardoso, Schio e Oliveira (2018) investigou as estratégias que os alunos e professores do terceiro e quinto ano das séries iniciais na resolução de 3 problemas pertencentes ao Campo multiplicativo, eles apontam algumas situações interessantes, a multiplicação que diminui teve mais erros, entre os alunos do 3º ano nenhum aluno acertou, nos alunos do 5º ano, seis alunos acertaram, o restante errou ou deixou em branco.

Os professores acertaram as 3 questões propostas, entretanto muitos utilizaram a linguagem simbólica ou apenas a solução. Os problemas não apresentavam a aplicação direta da multiplicação, o que dificultou a resolução dos alunos do terceiro ano.

Os alunos do quinto ano tiveram mais sucesso do que os do terceiro ano, isso já era esperado, mas as estratégias utilizadas indicam que o Campo das Estruturas Multiplicativas não foi desenvolvido o suficiente para produzir esquemas eficazes de soluções de problemas.

É possível concluir que os alunos têm muita dificuldade com a forma não usual de multiplicação com o equívoco de que esta operação sempre aumenta,

atrapalha a resolução de problemas que apresentem os sentidos diversificados da multiplicação.

No trabalho de Santos (2017), no pré-teste, as questões tiveram uma média de acerto equivalente a 48%, porém os problemas do tipo produto de medidas apresentaram percentual médio de acertos de 22,75%. O autor apresentou cuidado com o Princípio Fundamental da Contagem, criou atividade de descoberta e atividades de aprofundamento, as questões aritmética foi bem sucedida, contudo a questão algébrica do PFC obteve o rendimento mais baixo entre as questões dos testes.

O trabalho de Silva (2015) vai ao encontro de anteriores, pois na sua sequência didática a questão que envolvia o PFC obteve 17,38% de acertos no pré-teste e 91,30% de acertos no pós-teste, porém não houve nenhum ressaltado sobre o PFC, apenas que a apuração deste item foi excelente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática afirmam ser necessário que os diversos significados da multiplicação e da divisão sejam trabalhados em sala de aula para que estas operações façam sentido para o estudante, que as operações se complementam e um mesmo problema aborde de formas diferentes.

Os trabalhos orientados para a combinatória apresentam algumas considerações fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

O texto de Borba, Rocha e Azevedo (2015) descreve alguns achados nos últimos cinco anos, pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – GERAÇÃO. Esta pesquisa vários aspectos da combinatória, tais como: análise e produção de recursos; avaliação de conhecimentos; desenvolvimento cognitivo; formação de professores e intervenções pedagógicas. Dessa maneira, o conjunto de dados obtidos possibilita reflexões, sobre como o raciocínio combinatório se desenvolve, quais as dificuldades a serem superadas e como práticas podem ser mais eficientes no ensino de combinatória.

Para as autoras, a combinatória estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que se enquadra em determinadas condições. Os problemas combinatórios são mais que uma mera enumeração de objetos expostos e sim todas as maneiras possíveis de combinar dados elementos, de modo que todas as combinações, que atendem certos critérios, sejam consideradas.

Borba, Rocha e Azevedo distinguem cinco tipos de problemas combinatórios: a) *existência*; b) *enumeração*; c) *contagem*; e) *otimização*. Elas ainda asseguram que na educação básica, em geral, existem problemas de enumeração e de contagem que se limita a certos tipos e a determinados níveis de ensino.

As autoras ressaltam que o pensamento combinatório só pode ser plenamente desenvolvido quando o indivíduo estiver na parte do estágio avançado de pensamento denominado de *operacional formal*. Ademais, que o *raciocínio combinatório* é essencialmente hipotético-dedutivo, portanto, base de raciocínio científico. Embora os estudos empíricos indiquem que este modo de pensar pode começar antes, bem como ele pode desenvolver-se por meio de interações entre maturação cognitiva e experiências sociais.

Como consequência, as autoras defendem que os distintos tipos de problemas combinatórios podem ser desenvolvidos desde os anos iniciais de escolarização e amparados por resultados de investigação empírica, afirmam ser possível trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com problemas de *produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação*.

Lima e Borba (2013) defendem que para que o ensino da combinatória seja efetivada de forma mais adequada, ele deve estar presente em toda a educação básica, além da necessidade de trabalhar com os professores da educação básica, o estudo tinha como objeto de investigação dois grupos de professores, um das séries finais do ensino fundamental e outro de professores do ensino médio, ambos grupos de professores de matemática, assim com a mesma formação inicial.

Os resultados apontaram que a dificuldade dos professores em diferenciar problemas de arranjo e combinação está ligada ao desconhecimento das situações nas quais os invariantes do conceito referentes à ordenação irão implicar, ou não, em novas possibilidades. Os resultados aquém do esperado dos professores do fundamental deve ser motivo de preocupação e de pesquisas.

Pessoa e Borba abordam o conhecimento dos alunos dos anos finais do ensino fundamental e médio sobre combinatória, houve acertos em todos os níveis da educação básica. Por isso existe a indicação que a escola aproveite as informações fornecidas pela forma que o aluno resolve os problemas combinatórios e utiliza isto nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à combinatória.

Os trabalhos sobre combinatória apresentam algumas considerações importantes. O conhecimento combinatório é um tipo de pensamento mais complexo que só vai ser plenamente desenvolvido na adolescência, entretanto os estudos demonstram a existência de traços desta forma de pensar em todos os níveis de ensino da educação básica.

As pesquisas sobre o campo conceitual asseguram que o desenvolvimento de campo necessita de tempo, maturidade e experiência. O que justificaria o início precoce da combinatória ainda nos anos iniciais do fundamental, até mesmo na educação infantil, certamente que trabalhada de forma adequada à linguagem própria da idade, com o auxílio de material concreto, jogos e outros recursos.

Os aspectos do processo de ensino e aprendizagem são abordados em trabalhos diferentes. Os estudos diagnósticos que analisaram a aprendizagem dos alunos levantaram a dificuldade dos alunos em resolver as questões que envolvem combinatória e que alguns problemas têm resolução mais fácil, que o número de etapas pode influenciar o resultado. Que a utilização de recursos pode ajudar crianças a pensarem a combinatória, outro recurso relevante é a árvore de possibilidades, que supera a dificuldade dos estudantes em listar todas as possíveis possibilidades de uma situação.

Sobre o ensino da combinatória pode-se observar a necessidade de que esta discussão tenha um espaço mais amplo, que a combinatória faça parte do cenário nacional, desde os anos iniciais. O ensino da combinatória deve estar inserido na formação inicial e nas formações continuadas, para que o professor das séries iniciais tenha o domínio e as ferramentas necessárias para compreender e ensinar as noções de combinatória. Como também que deve estar presente em todas das séries finais do fundamental maior.

Os trabalhos documentais apresentam resultados semelhantes, os livros didáticos demonstram um quantitativo baixo de questões sobre combinatória, e estas abordam em sua maioria apenas alguns aspectos. Por outro lado, para o domínio da combinatória é fundamental uma variabilidade de significados tratados e diversificação de formas de representação utilizadas.

Algumas coleções não apresentam nenhuma questão deste tipo, os autores não identificaram uma linha de trabalho da combinatória ao longo das coleções. Primordialmente, é urgente que os livros didáticos apresentem orientações metodológicas para o professor trabalhar com as propriedades invariantes da

combinatória, isto é preocupante, pois em alguns casos o livro didático é recurso metodológico mais utilizado, principalmente nas séries iniciais, onde o docente deve ser polivalente e ter domínio de várias disciplinas, como consequência utiliza muito o recurso.

Os documentos oficiais que norteiam a educação, tais como o PCN e BNCC, indicam o ensino da combinatória desde as séries iniciais e que ela perpassa toda a educação básica, como também que o seu ensino é importante para o desenvolvimento de uma forma mais complexa de pensamento que está inserido na rotina das crianças e adolescentes.

3 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Na análise a priori foram apresentadas algumas considerações sobre o ensino por atividades com uma abordagem voltada para a resolução de problemas e a construção.

3.1 AS TENDÊNCIAS DE ENSINO DA MATEMÁTICA

Na educação matemática, as tendências de ensino se referem às didático-pedagógicas e a forma como elas são ou podem ser utilizadas no processo de aprendizagem. Entre as diversas tendências da educação matemática, destacam-se: resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, a história da matemática, o uso das TICs e, embasado em Sá (2018), ensino por atividades como tendência educacional. Neste trabalho, utilizou-se a resolução de problemas e o ensino por atividades.

A matemática é uma área de conhecimento muito relevante, tanto que nos documentos oficiais da educação o domínio das quatro operações é tido como condição para o pleno exercício da cidadania. Apesar da sua importância, é considerada muito difícil para a maioria das pessoas, os dados das provas oficiais apontam para uma grande dificuldade dos alunos com a matéria na educação básica.

Para reverter este quadro, o processo de ensino e aprendizagem deve ser compreensível e acessível à maioria das pessoas, Pinheiro (2008) afirma que a tendência predominante na educação é aquela que propõe a definição do conceito de um determinado conteúdo matemático, seguido de exemplos e exercícios, posteriormente resolveriam um conjunto de atividades denominadas *exercícios de fixação*.

Face os baixos índices obtidos nas provas de larga escala, é preciso refletir sobre mudanças na forma de ensinar, o estudante não é uma caixa em branco onde depositamos conhecimentos num modelo de educação bancária.

Este modelo tem como maior obstáculo a ideia que os discentes aprendem de maneira homogênea e simultânea pela transmissão oral ou escrita, ou seja, somente ler ou visualizar alguns exemplos, habilitaria o domínio do tópico matemático em estudo, em suma, memorizar, decorar fórmulas e as possíveis utilizações delas.

A utilização de metodologias de ensino diversificadas no ensino de matemática oferece condição para que um número mais expressivo de estudantes

realmente a compreenda. Mas, isto não pode acontecer de forma superficial, é necessário que o professor se aproprie dos fundamentos teóricos de cada tendência de ensino da matemática para utilizar no momento mais adequado.

Já que diferentes tópicos podem ser trabalhados de formas diversificadas, utilizando as metodologias de forma isolada, ou em conjunto, pois elas não são excludentes, devem ser adaptadas aos objetivos das aulas, aos materiais disponíveis e muitos outros fatores do cotidiano escolar.

Apresentamos uma breve explanação sobre duas tendências, a resolução de problemas e o ensino por atividades que foram utilizadas neste trabalho, pois este último é permeado pelo diálogo entre tendências variadas.

3.2 O ENSINO POR ATIVIDADES

Brasil (1997) afirma que a matemática necessita estar ao alcance de todos e tornar o seu ensino, mais democrático e acessível precisa ser objetivo prioritário do trabalho docente. E ressalta, também, que a matemática escolar não é meramente “olhar para coisas prontas e definitivas”, ao contrário, o importante é a construção e a assimilação de um conhecimento pelo aluno, pois esta ação servirá de subsídio para que o discente compreenda e transforme sua realidade.

Algumas sugestões de Brasil (1997) combinam com o ensino por atividades e com o trabalho sobre o Princípio Fundamental da Contagem:

- Evitar o ensino mecânico da matemática;
- Priorizar a resolução de problemas;
- Utilizar o conteúdo como meio para desenvolver ideias matemáticas fundamentais.
- Introdução de noções de estatística, probabilidade e estimativa;
- Uso de recursos didáticos durante todo ensino fundamental;
- Prioridades ao trabalho em pequenos grupos em sala de aula;

Segundo Silva (2015), o ensino por atividade é uma metodologia que trabalha os conteúdos matemáticos, de forma a auxiliar o discente a encontrar as leis gerais, ou generalizações, sem que o professor forneça esta informação a princípio.

Nesta perspectiva, os estudantes realizam seus achados e descobertas, eles agora são os sujeitos ativos do seu processo de aprendizado, a aula é iniciada

com a atividade e os itens inseridos nesta atividade levam o discente a encontrar semelhanças e/ou regularidades, que se desenrolam como uma lei geral, não tem nada pronto e acabado para cada estudante ela adquire um significado. Acerca do tema, Sá propõe que:

A prática metodológica do ensino de Matemática por atividade dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios. Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los para depois discuti-lo em classe com o professor e colegas. (SÁ, 2009, p. 14-15)

Assim, o discente aprende a pensar de maneira autônoma, levantando hipóteses, testando-as, tirando conclusões e até discutindo-as com os colegas. Silva (2015) explica que muitos aspectos do ensino por atividade contribuem para que o aluno desenvolva habilidades essenciais à matemática como analisar, planejar, testar, concluir e generalizar.

O estudante protagonista necessita de um professor facilitador, um mediador que pergunte e que o instigue a buscar regularidades e padrões. Por isso, durante o planejamento e execução devem existir algumas medidas indicadas por Sá:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda atividade deve procurar conduzir o aluno à construção das noções matemáticas através de três fases: a experimentação, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele; (SÁ, 2009, p. 18).

Sá (2019) aponta alguns momentos de uma aula por atividades e, a princípio, afirma que existem dois tipos de aulas por atividades: a de conceituação e de redescoberta. Que ele define da seguinte maneira:

A atividade de conceituação tem como objetivo levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação matemática que será definido ou conceituado nesta atividade.

A atividade de redescoberta tem como motivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Não é meramente uma demonstração de um resultado matemático e sim o momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado. Para quem nunca

teve contato com o ensino por atividades, a descrição dos momentos de aula por atividades trará considerações importantíssimas.

Sá (2019) elenca os momentos da aula por atividades: organização, apresentação, experimentação, registro, análise e institucionalização.

Na **organização**, a turma deve ser separada em equipes entre 2 a 4 educandos, o autor não recomenda o modo individual por não estimular a troca de ideias, esta organização deve ser preferencialmente espontânea.

A **apresentação** da atividade é feita pelo professor aos estudantes, seguida da distribuição do material da atividade incluindo o roteiro e que pode ser escrito ou digitado. Sá (2019) aconselha que as atividades com procedimento mais longo sejam disponibilizadas de forma escrita para economizar tempo, se tiverem muitas folhas ou qualquer tipo de material de apoio que estes sejam entregues em forma de um kit.

A **execução** corresponde à etapa da experimentação quando o discente manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa. Os estudantes manipulam e agem diante dos obstáculos, registram a forma, os procedimentos utilizados pela equipe. É válido ressaltar que deve seguir as instruções e evitar o desvio de atenção da turma. Sá (2019), ainda, salienta que:

Quando um questionamento ou dúvida evidenciar que sua origem é fruto de uma falha das orientações contidas no procedimento ou da confecção do material a ser utilizado o professor deve imediatamente socializar com a turma o fato e apresentar uma orientação que contorne o ocorrido e permita o prosseguimento da atividade, se possível. Esse tipo de situação pode evitado com um planejamento cuidadoso da atividade (SÁ, 20019, p.2).

Este tipo de aula exige que o professor tenha uma postura muito diferente, ele, como um professor/pesquisador, deve registrar as possíveis falhas, para correções futuras, observe os pontos fortes, a aceitação da turma, entre outros.

O **registro** para Sá (2019) deve ser feito de todas as formas possíveis, é esperado e que cada equipe registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro. O professor pode auxiliar as equipes que tiverem dúvidas, realizando perguntas que conduzam os grupos a alcançarem o objetivo, Sá reitera a importância do espaço adequado para o registro das informações produzidas durante o momento da execução no roteiro.

Na **análise**, espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações registradas. Este é o ápice da atividade, quando do confronto com os registros, descobre-se a lei geral.

Sá (2019) assegura que os alunos descobrirão a propriedade ou ocorrência, se houverem dúvidas o professor faz perguntas que ajudem a equipe a concluir o esperado dentro da linguagem deles.

A **institucionalização** é o momento que a turma produz a conclusão oficial da turma a partir das deduções que a equipe elaborou no momento da análise, um enunciado que corresponda a uma conclusão obtida a partir da realização da atividade. Sá (2019) recomenda que o professor solicite que cada equipe socialize suas conclusões, é nesse momento que a turma escolhe a conclusão mais adequada e que o professor faz inferências junto com a turma para que esta conclusão faça sentido e possa ser compreendido por uma pessoa que leia, mesmo sem ter participado da atividade.

Sobre o ensino por atividades, encontra-se em Brasil (2018) um trecho descrito como “COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL“, dos aspectos que são extensivamente trabalhados no ensino por atividades experimentais.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

(BRASIL, 2018, p.269)

Outro aspecto que também merece destaque é a forma que o ensino por atividades trabalha os tópicos matemáticos, utilizando a técnica da redescoberta que trabalha com as propriedades da igualdade, entre outros conhecimentos. Brasil (2018) recomenda na unidade temática de álgebra, como objeto de conhecimento que se trabalhe “*as propriedades da igualdade e noção de equivalência*” (BRASIL, 2018, p.294).

Brasil (2018) também apresenta duas habilidades que devem ser desenvolvidas quanto à igualdade no quinto item das séries iniciais no ensino Fundamental:

(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

(EF05MA11) p.(295) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido (BRASIL, 2018, p.295).

A primeira habilidade aborda a construção do conceito de igualdade e que este deve ser construído utilizando as diversas operações fundamentais, isto é, intrínseco ao ensino por atividades. Enquanto que a segunda habilidade evidencia a importância da escrita da sentença matemática, outrossim uma igualdade com uma operação que um dos termos é desconhecidos, dependendo do lado da igualdade pode representar uma questão aritmética ou algébrica.

O ensino por atividade é uma das metodologias de ensino que pode ajudar a romper este ciclo de baixo rendimento na disciplina de matemática, para isso é necessário que o aluno possa se sentir seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, para testar hipóteses, para generalizar, para analisar regularidades, o ensino por atividades ajuda o aluno a ter segurança para questionar, para perguntar, além de ajudar a desenvolver atitudes essenciais ao ensino e o aprendizado em matemática.

3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando se trata a resolução de problemas, existem diversos autores e teorias sobre o tema, desde o fundamento mais básico como o conceito de problema

até questões mais complexas. Para Van de Walle (2001) "*Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta*" (PINHEIRO, 2008, p. 51).

Sá (2003) afiança que qualquer situação pode ser um problema ou um mero exercício, depende de quem irá resolver. Se ele já conhece o caminho para solucionar é um exercício, se ele desconhece o caminho e a solução demanda raciocínio, então isto é um problema.

Sá e Fossa (2005) evidenciam que existem vários tipos de denominação dos tipos de problemas: problemas-história; problemas verbais e problemas verbais aritméticos. Para Polya (apud SÁ & FOSSA, 2005) os problemas são seccionados em dois grandes grupos:

Os rotineiros são os que têm como requisito básico a utilização de uma regra bem conhecida e os não-rotineiros que são aqueles que exigem um raciocínio criativo na resolução. Na classificação de Polya, os problemas com as quatro operações são rotineiros e tem uma contribuição ínfima para o desenvolvimento intelectual, portanto não merecem um destaque tão grande.

Para Sá e Fossa (2005), "o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas rotineiros é tão importante quanto o desenvolvimento da habilidade de resolver os problemas não rotineiros". Para estes autores, um problema só é rotineiro quando entendido e internalizado seu processo de resolução, então isto depende de quem vai resolver o problema", também destacam que a semântica utilizada nos problemas pode gerar dificuldades na modelagem.

De acordo com Mendonça (1999, p.16-17 apud SÁ, 2003), há três explicações para a expressão resolução de problemas, como um objetivo, um processo e um ponto de partida, que podem ser assim delineados:

Como objetivo, a resolução de problemas significa que se ensina matemática para resolver problemas, é a visão da escola tradicional que aposta na tríade, assunto, exemplo, exercício.

Como processo, a resolução de problemas implica olhar para o desempenho, para o caminho escolhido pelo aluno, considera a transformação como resolvidores de problemas; sugere analisar as estratégias dos alunos.

Como ponto de partida, os problemas são usados para iniciar o processo de construção de um determinado conhecimento específico, que só posteriormente será formalizado pelo professor, este é o nosso olhar com o ensino por atividades.

Em Sá (2003), encontram-se algumas recomendações sobre a resolução de problemas.

1. Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
2. Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
3. Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
4. Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
5. Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
6. Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
7. Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
8. Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
9. Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
10. Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
11. Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado (SÁ, 2003, p.75).

É necessário repensar o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas na educação básica, os estudantes têm rendimentos aquém do esperado nas provas de larga escala, pois as aulas ainda dão mais ênfase para o algoritmo, do que os problemas, além de utilizar um repertório pouco variado de situações problemas. O que causa uma dicotomia lamentável, o discente sabe utilizar o algoritmo, mas ele não consegue discriminar qual operação deve ser utilizada ao se deparar com um problema.

Brasil (2017), na BNCC (Base Nacional Curricular Comum), afirma que a matemática precisa de competências e habilidades ligadas a raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Para isso, deve ser utilizado processos de resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem, que se interligam às formas de ensinar matemática,

A estratégia que Brasil (2017) recomenda para aprendizagem desta ciência é um ensino focado na resolução de problemas, a ferramenta para o aluno articular

os seus diversos campos do conhecimento, bem como desenvolver a capacidade de agir matematicamente em situações dentro e fora do cotidiano escolar.

Para trabalhar com a resolução de problemas, é necessário reconhecer a existência de aspectos que influenciam na hora de resolvê-los, tais como a linguagem, os tipos de problemas, que alguns problemas são mais difíceis que outros e a variabilidade de tipos de problemas necessários para que o aluno consiga dominar os procedimentos de resolução. Existem formas diversificadas de classificar os problemas, neste trabalho adota-se a classificação proposta por Sá (2003).

3.3.1 Classificação dos problemas

Um dos aspectos mais atuais e discutidos no campo da educação matemática é a resolução de problemas. Sá (2003) defende que os problemas das quatro operações são muito relevantes no desenvolvimento e estes apresentam diversos graus de dificuldades. Aqui, Sá (2003) classifica os problemas da seguinte maneira:

- **Da operação** e problemas que **usam a operação**.
- **Algébricos** e problemas **aritméticos**.

Para entender esta abordagem proposta em Sá (2003), é importante compreender as duas categorizações presente e de forma seccionada. Primeiramente, busca-se definir o que são problemas de uma operação.

Sá (2003) apontou que os problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem, ou Princípio Fundamental da Contagem, e quebra cabeças com as operações que surgiram nos livros didáticos após o auge da matemática moderna no Brasil, utilizam a operação e, conseqüentemente, surgiu a indagação: Todo problema que envolve uma operação na sua resolução é um problema da operação?

O autor faz uma série de perguntas que gera uma reflexão sobre o que seria um problema multiplicativo. O cálculo de área e o PFC são questões de multiplicação? O que trouxe mais problematizações, pois para tal pergunta é necessário definir as operações fundamentais.

Sá (2003), ainda, acredita que as operações podem ser observadas por dois aspectos: semântico e simbólico que é definido assim (SÁ, 2003, p. 64): *O aspecto semântico diz qual é a pergunta que a operação responde. O aspecto simbólico nos dá o resultado da manipulação dos símbolos envolvidos na realização*

de cada operação. Pode ser feito somente consultando a tabuada da operação, sem nenhuma interpretação.

O exemplo utilizado foi o seguinte: Qual é o troco que me sobra se pago R\$ 18,00 com uma nota de R\$ 50,00? São os aspectos semântico das operações que determinam qual delas deve ser usada, que neste caso é a subtração. Logo, depois, o aspecto simbólico é usado para o resultado $50 - 18 = 32$.

Este último permite a utilização de várias técnicas para descobrir o resultado, de dedos da mão até super computadores, é uma questão de escolha e disponibilidade, já o aspecto semântico exige a interpretação da situação e experiência com as operações.

Agora, quando se volta ao questionamento, o que é um problema da operação, Sá apresentou duas situações com a distinção entre problema **de uma operação** e problema **que usa uma operação** na sua solução, por exemplo:

“Paguei uma geladeira em cinco prestações iguais de R\$ 58,00. Quanto custou a geladeira?” É um problema em que a determinação da operação é baseada somente na análise semântica do enunciado. Para o autor, este é um problema da operação multiplicação, pois ela advém da dedução semântica, basta multiplicar o valor de 58 reais pelo número de prestações.

“De uma cidade A até uma cidade B, há 3 caminhos distintos e da cidade B até a cidade C há 4 caminhos. De quantas maneiras distintas é possível ir de A até C, passando por B?”. Optar pela multiplicação necessita da análise semântica do enunciado, mas também do conhecimento, intuitivo ou formal, do Princípio Fundamental da Contagem. Este é um problema que usa a multiplicação na sua resolução.

DEFINIÇÃO 1: Um problema é de uma das operações fundamentais da aritmética quando este pode ser resolvido apenas utilizando uma destas operações, sendo esta determinada diretamente a partir do seu enunciado e do significado semântico da operação.

Assim, os problemas com uma das quatro operações fundamentais dos números naturais podem ser divididos em dois grandes grupos, a saber:

1º grupo: os problemas de uma operação - são aqueles problemas que utilizam a operação a partir do seu sentido semântico;

2º grupo: os problemas que usam uma operação - são aqueles problemas que no algoritmo de resolução a operação utilizada não é determinada diretamente por seu sentido semântico. (SÁ, 2003, p.69)

Sá (2003) em contínuo exemplifica que um problema que utiliza a operação multiplicação na sua resolução operacional, é do Princípio Fundamental da Contagem, em uma questão onde seja necessário combinar uma quantidade de camisas, pois da

multiplicação do número de camisas pelo número de calças é possível obter a solução do problema. Para o autor, *a pessoa não está fazendo uso da interpretação semântica da operação multiplicação e, sim, percebendo a relação simbólica entre os dados e que ele associa com o cálculo de multiplicações*. O autor defende que são mais difíceis para as crianças os problemas classificados como problemas que **usam uma operação**, do que aqueles que são problemas **da operação**.

A justificativa levantada pelo autor é que o ensino das quatro operações no início da escolarização, tem um enfoque no aspecto semântico das operações e no significado de cada operação. Os problemas propostos para a criança tem um leitura no enunciado que permite encontrar o significado semântico da operação, ou seja são problemas **da operação**, e não utiliza aqueles que o enunciado não permite que seja extraído imediatamente o sentido, pois **usam a operação**, considerando que apresentam um grau de dificuldade bem maior.

Em um paralelo com Vergnaud (1994), que afirma que os discentes precisam ter contato com estas questões para que os obstáculos possam ser contornados à medida que são enfrentadas, infelizmente estas questões, quando deixadas fora do alcance dos estudantes, causa uma fragilidade do entendimento das operações.

Quanto à estrutura de resolução, as definições de problemas aritméticos, estão abaixo:

DEFINIÇÃO : Problema Aritmético é aquele problema que, em sua resolução operacional, não são usadas de maneira implícita ou explícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade (SÁ, 2003, p 79).

Segundo o referido autor, os problemas aritméticos podem ser divididos em: simples e combinados.

DEFINIÇÃO: Os problemas aritméticos simples são aqueles problemas aritméticos que só envolvem uma operação na sua resolução.

DEFINIÇÃO: Os problemas aritméticos combinados são aqueles problemas aritméticos que envolvem duas ou mais operações ou a repetição de uma mesma operação na sua resolução. (SÁ, 2003, p 79)

Estes problemas tem a incógnita isolada em um dos lados da igualdade. Da generalização, este problema está relacionada a uma das expressões abaixo:

$$c + b = ?$$

$$c - b = ?$$

$$c \times b = ?$$

$$c \div b = ?$$

Os problemas aritméticos utilizam apenas uma operação ou uma combinação de operações ou uma mesma operação várias vezes, pois para Sá (2003) estes problemas no campo aditivo são sempre de resolução mais fácil. Enquanto que no campo multiplicativo sofrem a influência de outros fatores, alguns problemas são mais difícil de resolver, pois os que usam a operação são de resolução mais complicada, mesmo os aritméticos.

Em nosso trabalho quando abordamos um problema que utiliza o PFC, quando ele apresenta a incógnita isolada em um lado da igualdade, trata-se de um problema aritmético, todavia se ele apresentar 2 etapas é considerado aritmético simples, a partir de três etapas é considerado um problema aritmético combinado.

Os problemas algébricos estão definidos como Sá: *Os problemas algébricos são aqueles problemas em que, na sua resolução operacional, são usadas de maneira explícita ou implícita as propriedades aditivas ou multiplicativas da igualdade* (2003, p.79).

Os problemas algébricos apresentam os seguintes tipos: imediato simples, imediato combinado e estruturado, que de forma análoga tem suas definições descritas da mesma forma em Sá (2003, p. 79).

DEFINIÇÃO 8 : Os problemas algébricos imediatos simples são aqueles problemas algébricos nos quais, na sua resolução operacional, é usada apenas uma operação sem o uso explícito de uma variável ou incógnita.

DEFINIÇÃO 9: Os problemas algébricos combinados são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, são efetuadas mais de uma operação sem o uso explícito de incógnita ou quando pode ser decomposto em problemas aritméticos simples e problemas algébricos imediatos.

DEFINIÇÃO 10: Os problemas algébricos estruturados são aqueles nos quais, na sua resolução operacional, é necessário o uso de variáveis ou incógnitas, para que fique explícita cada etapa da resolução.

Neste segundo grupo de problemas, não é possível escolher a operação diretamente a partir de sua conotação semântica, sendo necessária a utilização da propriedade inversa da operação. Que também pode ser generalizado a uma das seguintes expressões:

$$? + a = b$$

$$? - a = b$$

$$a - ? = b$$

$$a \times ? = b$$

$$a \div ? = b$$

$$? \div a = b$$

Sá (2003) ressalta que as questões algébricas são todas do tipo que **usam a operação**, entretanto a recíproca não é verdadeira, o que implica que nem todas as questões que usam a operação são algébricas. E o que acontece com as questões de produto de medidas, a combinatória, que são problemas que usam a operação multiplicação, contudo eles aparecem em questões algébricas e aritméticas.

O que para o autor existe uma diferença entre os problemas do Campo multiplicativo, esta diferença seria causada pelo **uso da operação** e não as suas **estruturas** (grifo do autor).

Por considerarmos o nível de ensino, utiliza-se apenas os algébricos simples nesta sequência didática. Este trabalho foi fundamental para a construção dos instrumentos de coleta de dados, pois divide-se as questões em algébricas (simples) e aritméticas (simples ou combinadas), além de abordarmos as questões do PFC como situações problemas que usam a operação.

Para a experimentação foram selecionados, os seguintes instrumentos, o questionário socioeducacional, o pré-teste, o pós-teste e a sequência didática composta de 7 aulas. Nesta parte do trabalho, existe uma breve descrição destes instrumentos, bem como os comportamentos esperados, as dificuldades e obstáculos, entre outros.

3.4 O TESTE

O teste é um instrumento com 10 questões, embasadas nos trabalhos de Rosa (2018) e Santos (2017), estas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem e é composto por sete indagações aritméticas e três algébricas que utilizam o PFC. Nesta situação, o comportamento esperado deve-se a falta de conhecimento do assunto sobre o assunto. Alguns discentes possam resolvê-las, montando as possibilidades ou outro tipo de recurso gráfico, entretanto é provável que a maioria das questões não consiga ser resolvida pelo princípio multiplicativo e que os alunos apresentem dificuldade na resolução das questões.

Os trabalhos de Rosas (2018) e Santos (2017) abordaram níveis diferentes de ensino; o primeiro foi concebido para o ensino médio, e o segundo para o sexto ano do fundamental, por isso espera-se que tal estudo, que será realizado no quinto ano do fundamental, possivelmente apresente um grau maior de dificuldade. Este deve ser o primeiro contando da turma com o PFC, de tal forma, é provável que os estudantes apresentem dificuldade na escolha da operação a ser utilizada que tenham dificuldade para associar o Princípio Fundamental da Contagem com a multiplicação, entre outros aspectos que interferem na resolução de um conjunto de problemas que envolvem o PFC.

É aceitável também que existam dificuldades para entender a semântica da questão e transcrever para linguagem matemática, pois este tipo de problema não é facilmente associada diretamente a multiplicação, todavia é plausível que alguns discentes consigam resolver algumas questões, que utilizem registro iconográfico ou que reconheçam e utilizem o PFC.

Outro fator de desequilíbrio para a turma são as questões algébricas, que não são usualmente trabalhadas nas aulas, gerando mais um obstáculo à resolução destas questões, este instrumento será aplicado em dois momentos.

No primeiro momento, antes da sequência didática com o intuito de avaliar os conhecimentos prévios que a turma possuía sobre o assunto bem como aferir o conhecimento individual de cada aluno acerca do tema, nesta fase ele foi denominado pré-teste.

No segundo momento, posterior à sequência didática para averiguar no confronto dos resultado do pré-teste, a evolução ou não do domínio da turma no PFC, nesta fase ele foi denominado de pós-teste.

Quadro 10: QUESTÕES DOS DIAGNÓSTICOS

1. Um estudante possui 2 blusas diferentes da escola (Branca e Preta) e 2 calças distintas (Jeans e Preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?

RESOLUÇÃO:

2. Jeniffer irá participar da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale compras no valor de R\$ 1.000,00 reais. Ganhará o desafio o primeiro participante

que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas, quatro saias e dois pares de sapato do tipo salto alto. De quantas maneiras Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que está no kit de roupa?

RESOLUÇÃO:

03. Para montar seu sanduíche na cantina da escola, Creuza precisa escolher somente um pão e somente um recheio, entre dois tipos de pães (careca ou de forma) e quatro tipos de recheios (queijo, carne, presunto ou salsicha). Quanto tipo de sanduíches Creuza pode montar?

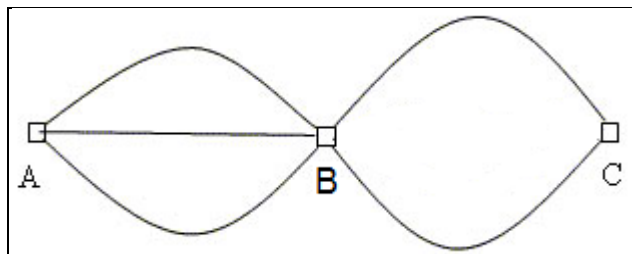
RESOLUÇÃO:

04. Uma promoção de material escolar pode montar um caderno, uma caneta e um lápis por R\$ 20,00. Sabendo que para o caderno pode escolher entre as capas (Homem-aranha, Batmam, Frozen e Moama), as canetas podem ser (azul, vermelha ou preta) e o lápis (preto ou amarelo). De quantas formas diferentes é possível montar um kit da promoção?

RESOLUÇÃO:

05. Três cidades A, B e C são ligadas por estradas e rios. Uma estrada e dois rios ligam A e B. Dois rios ligam as cidades B e C. Não há estradas ou rios ligando A e C diretamente. De quantos modos diferentes pode-se viajar de A até C, passando por B?

RESOLUÇÃO:



06. No lançamento de duas moedas idênticas, quantos são os resultados possíveis? Lembre-se que os resultados em uma moeda podem ser: Cara (C) ou Coroa (K).

RESOLUÇÃO:

07. Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será servido em três etapas: **entrada, prato principal e sobremesa**. De quantas maneiras distintas ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais e 2 sobremesas?

RESOLUÇÃO:

08. Patrícia comprou no shopping alguns shorts e 5 blusa, sabendo que hoje ela quer passear na orla, ela arrumou os conjuntos em cima da cama e percebeu que ela conseguiu montar 10 conjuntos. Quantos shorts a Patrícia comprou?

RESOLUÇÃO:

09 Na sorveteria La Creme você pode escolher 3 bases(casquinha, cascão e copinho) e alguns tipos de sabores, sabendo que é possível tomar 12 tipos de sorvetes diferentes. Quantos sabores esta sorveteria tem?

RESOLUÇÃO:

10. Um cinema tem 3 portas de entrada(A, B e C) que são fechadas quando o filme começa e algumas portas de saída, sabendo que existem um total 18 formas diferentes de entrar e sair do cinema, quantas portas de saída existem neste cinema?

RESOLUÇÃO:

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Esperamos que as questões dos diagnósticos, levantem pontos importantes, confirmem ou refutem aspectos trabalhados neste texto. Que abordados em conjunto com as atividades utilizadas na sequência didática explicitada em seguida, ofereça uma gama de informações sobre o PFC, trabalhado no quinto ano do ensino fundamental.

3.5 AS ATIVIDADES

As atividades utilizadas nessa sequência didática são compostas de daquelas do campo aditivo para que os alunos se habituem com a escrita da sentença natural, atividades do campo multiplicativo e atividades do Princípio Fundamental da Contagem, a de descoberta terá o apoio de material concreto e manipulável para que os alunos possam compreender melhor e descobrir uma maneira prática de calcular o PFC.

Quadro 11 - Roteiro da atividade 01

ATIVIDADE 01						
Título: Adição na igualdade						
Objetivo: Descobrir quando por meio da adição uma igualdade permanece verdadeira.						
Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.						
Procedimento: Preencha o quadro a seguir.						
Valores	a = b	A expressão a = b é verdadeira?		a + c = b + d	A expressão a + c = b + d é verdadeira?	
		Sim	Não		Sim	Não
a = 3 b = 3 c = 5 d = 5						
a = 6 b = 6 c = 4 d = 4						
a = 7 b = 7 c = 2 d = 2						
a = 12 b = 12 c = 8 d = 8						
a = 3 b = 3 c = 4 d = 2						
a = 8 b = 8 c = 1 d = 6						
a = 5 b = 5 c = 4 d = 7						
a = 9 b = 2 c = 3 d = 3						
a = 10 b = 5 c = 4						

d = 4						
a = 7 b = 1 c = 6 d = 6						
a = 3 b = 5 c = 4 d = 2						
a = 9 b = 8 c = 3 d = 4						
a = 6 b = 1 c = 6 d = 11						
Observação:						
Conclusão:						

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise prévia – Está é a primeira atividade, por isto é provável que os discentes tenham mais dificuldade no preenchimento da atividade para enunciar o que descobrirem e que estas formulações sejam confusas ou incompletas com equipes que não escrevam conclusões.

No quadro abaixo, estão descritas algumas das conclusões que poderão surgir no decorrer durante o experimento e para analisar as conclusões foram criadas categorias de conclusões esperadas.

Quadro 10 - Categorização das conclusões

Tipo de conclusão	Conclusões esperadas
Válida, prevista e desejada	Quando a conclusão é correta e se aproxima da conclusão esperada.
Válida, prevista e não desejada	Está correta, foi prevista nas análises, e não se relaciona com a conclusão prevista.
Não válida, prevista e não desejada.	É uma conclusão incorreta, pode ter sido prevista nas análises e se relaciona com a conclusão prevista.
Não formulada	Quando o grupo não transcreveu a conclusão

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Para cada atividade foi construído um quadro síntese com as conclusões esperadas em cada operação e atividade, o item abaixo exemplifica o que se espera na atividade da adição.

Quadro 11 - Categorização das conclusões da atividade da adição.

Tipo de conclusão	Conclusões esperadas
Válida, prevista e desejada	Quando adicionamos o mesmo valor numérico aos dois lados de uma igualdade, esta igualdade permanece verdadeira.
Válida, prevista e não desejada	Quando somamos o número aos dois lados da igualdade.
Não válida, prevista e não desejada	-Podem ser diferentes ou iguais. -As contas podem ser iguais ou diferentes. -Existem umas iguais outras que são diferentes. -Quando são diferentes não são iguais.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Considerando a forma que aula é conduzida, a quebra da lógica costumeira com assunto seguido de exemplo e atividades, é admissível que nenhum grupo consiga descobrir quando por meio da adição uma igualdade permanece verdadeira, caso isto ocorra é possível a intervenção com perguntas que conduzam ao aluno concluir uma proposição válida, que posteriormente será confrontada com as demais equipes para fazer uma síntese delas. É, provavelmente, a primeira vez que os estudantes vão se deparar com as propriedades da igualdade.

Quadro 122 - Roteiro da Atividade 02

ATIVIDADE 02
<p>Título: Subtração na igualdade</p> <p>Objetivo: Descobrir quando por meio da subtração uma igualdade permanece verdadeira.</p> <p>Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.</p> <p>Procedimento: Preencha o quadro a seguir.</p>

Valores	a = b	A expressão a = b é verdadeira?		a - c = b - d	A expressão a - c = b - d é verdadeira?	
		Sim	Não		Sim	Não
a = 5 b = 5 c = 2 d = 2						
a = 8 b = 8 c = 3 d = 3						
a = 10 b = 10 c = 6 d = 6						
a = 15 b = 15 c = 9 d = 9						
a = 7 b = 7 c = 2 d = 5						
a = 9 b = 9 c = 8 d = 3						
a = 13 b = 13 c = 7 d = 10						
a = 4 b = 3 c = 1 d = 1						
a = 10 b = 8 c = 5 d = 5						
a = 11 b = 7 c = 6 d = 6						
a = 5 b = 8 c = 3 d = 6						
a = 9 b = 7 c = 5 d = 3						
a = 10 b = 13 c = 1 d = 4						

Observação:
Conclusão:

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise a priori - Espera-se que as dificuldades sejam menores, pois esta atividade se assemelha a primeira, logo é natural que os estudantes cheguem à conclusão: quando uma igualdade é verdadeira, subtraindo-se um mesmo número aos dois membros da mesma, ela permanecerá verdadeira, já que é um raciocínio análogo à atividade 1. As conclusões esperadas na atividade de subtração estão expostas no quadro abaixo.

Quadro 13 - Categorização das conclusões da atividade da subtração.

Tipo de conclusão	Conclusões esperadas
Válida, prevista e desejada	Quando subtraímos o mesmo número dos dois lados de uma igualdade, esta igualdade permanece verdadeira.
Válida, prevista e não desejada	Quando subtraímos os dois lados da igualdade.
Não válida, prevista e não desejada	-Se forem iguais. -Subtrai os iguais.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Espera-se que baseada na analogia com a atividade anterior, as dificuldades sejam poucas ou inexistentes nesta atividade e nas posteriores.

Quadro 14 - Roteiro da Atividade 03

ATIVIDADE 03	
Título: Sentenças aditivas	
Objetivo: Praticar a determinação de valor desconhecido em sentenças matemáticas aditivas.	
Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.	
Procedimento: Resolva as questões.	
a) $5 + 7 = ?$	b) $9 + 8 = ?$

c) $16 + 13 = ?$

d) $20 + 30 = ?$

e) $? + 2 = 6$

f) $? + 7 = 15$

g) $? + 16 = 30$

h) $? + 75 = 100$

i) $6 + ? = 9$

j) $17 + ? = 28$

k) $32 + ? = 50$

l) $65 + ? = 100$

m) $8 - 3 = ?$

n) $14 - 9 = ?$

o) $20 - 12 = ?$

p) $50 - 15 = ?$

q) $? - 4 = 6$

r) $? - 18 = 9$

s) $? - 10 = 15$

t) $? - 55 = 100$

u) $4 - ? = 1$

v) $12 - ? = 5$

x) $25 - ? = 10$

z) $100 - ? = 70$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise a priori – O comportamento esperado dos discentes é que apresentem uma quantidade menor de dúvidas, por ser tratar de uma atividade de aprofundamento, à forma que as questões estão dispostas também tenha familiaridade com as questões costumeiras em aula, entretanto como existem questões algébricas isso pode gerar alguns obstáculos na resolução.

Quadro 135 - Roteiro da Atividade 04

ATIVIDADE 04						
Título: Multiplicação na igualdade						
Objetivo: Descobrir quando por meio da multiplicação uma igualdade permanece verdadeira.						
Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.						
Procedimento: Preencha o quadro a seguir.						
Valores	a = b	A expressão a = b é verdadeira?		a x c = b x d	A expressão a x c = b x d é verdadeira?	
		Sim	Não		Sim	Não
a = 5 b = 5 c = 3 d = 3						
a = 4 b = 4 c = 6 d = 6						
a = 2 b = 2 c = 7 d = 7						
a = 8 b = 8 c = 4 d = 4						
a = 3 b = 3 c = 4 d = 2						
a = 5 b = 5 c = 1 d = 6						
a = 2 b = 2 c = 4 d = 7						
a = 9 b = 2 c = 3 d = 3						
a = 10 b = 5 c = 4 d = 4						
a = 7 b = 1 c = 6 d = 6						
a = 2 b = 8 c = 12 d = 3						
a = 4 b = 5 c = 10						

d = 8						
a = 6						
b = 9						
c = 6						
d = 4						

Observação:

Conclusão:

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise a priori- Esta é a quarta atividade, espera-se que os estudantes tenham mais facilidade para enunciar quando, por meio da multiplicação, uma igualdade permanece verdadeira, entretanto existe sempre as dificuldades inerentes da operação multiplicação ou do uso da operação, que possivelmente alguns grupos podem apresentar. O esquema abaixo aborda algumas conclusões possíveis na atividade de multiplicação.

Quadro 16 - Categorização das conclusões da atividade da multiplicação

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida, prevista e desejada	Quando multiplicamos o mesmo número aos dois lados de uma igualdade, esta igualdade permanece verdadeira.
Válida, prevista e não desejada	Quando multiplicamos o número aos dois lados da igualdade.
Não válida, prevista e não desejada	Quando multiplica os valores que são iguais
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

A experiência adquirida nas outras atividades deve ser suficiente para que os grupos observem e escrevam conclusões adequadas, todavia está se trabalhando com crianças do quinto ano das séries iniciais, por isso pode existir algumas equipes que deixe as conclusões incompletas ou não válidas.

Quadro 147- Roteiro da Atividade 05

ATIVIDADE 05
Título: Divisão na igualdade
Objetivo: Descobrir quando por meio da divisão uma igualdade permanece verdadeira.

Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.

Procedimento: Preencha o quadro a seguir.

Valores	a = b	A expressão a = b é verdadeira?		a ÷ c = b ÷ d	A expressão a ÷ c = b ÷ d é verdadeira?	
		Sim	Não		Sim	Não
a = 14 b = 14 c = 2 d = 2						
a = 8 b = 8 c = 4 d = 4						
a = 15 b = 15 c = 5 d = 5						
a = 9 b = 9 c = 3 d = 3						
a = 12 b = 12 c = 2 d = 3						
a = 18 b = 18 c = 6 d = 9						
a = 24 b = 24 c = 4 d = 3						
a = 4 b = 3 c = 1 d = 1						
a = 10 b = 20 c = 5 d = 5						
a = 12 b = 18 c = 6 d = 6						
a = 8 b = 16 c = 2 d = 4						

a = 9 b = 21 c = 3 d = 7						
a = 10 b = 25 c = 2 d = 5						
Observação:						
Conclusão						

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise a priori - O comportamento esperado é que os estudantes não apresentem dificuldades em observar que dividindo os dois membros de uma igualdade por um mesmo número diferente de zero, a igualdade permanecerá verdadeira.

Considerando que os cálculos utilizam Algarismos entre 2 e 10, para minimizar os problemas com as operações, os valores maiores são múltiplos de 10 ou 2, nas questões algébricas são valores pequenos, ou de fácil resolução. Entretanto, os trabalhos nos campos conceituais apontam que a divisão para os alunos é mais difícil que a multiplicação, por isso é natural que apareçam dificuldades inerentes à operação. As conclusões esperadas para a atividade de divisão estão no quadro abaixo.

Quadro 18 - Categorização das conclusões da atividade da divisão

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida, prevista e desejada	Quando dividimos os dois lados de uma igualdade, pelo mesmo número, esta igualdade permanece verdadeira.
Válida, prevista e não desejada	Quando somamos o número aos dois lados da igualdade.
Não válida, prevista e não desejada	Se forem iguais primeiro divide e depois subtrai. Se eles são iguais não pode dividir pelo mesmo número.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Esta atividade já conta com uma maturidade da turma, de um olhar mais treinado para encontrar regularidades e de uma recorrência em construir conclusões entre outros aspectos positivos que se espera que já estejam desenvolvidos, as conclusões devem se assemelharem a esperada.

Quadro 159 - Roteiro da Atividade 06

ATIVIDADE 06		
Título: Sentenças multiplicativas		
Objetivo: Praticar a resolução de sentenças matemáticas multiplicativas.		
Material: Roteiro da atividade, borracha e lápis ou caneta.		
Procedimento: Resolva as questões a seguir.		
a) $2 \times 7 = ?$	b) $5 \times 4 = ?$	c) $6 \times 3 = ?$
d) $9 \times 8 = ?$	e) $? \times 2 = 12$	f) $? \times 4 = 28$
g) $? \times 16 = 32$	h) $? \times 9 = 45$	i) $6 \times ? = 24$
j) $15 \times ? = 60$	k) $5 \times ? = 50$	l) $20 \times ? = 60$
m) $8 \times 2 = ?$	n) $18 \times 6 = ?$	o) $30 \times 4 = ?$
p) $9 \times 5 = ?$	q) $? \times 5 = 10$	r) $? \times 8 = 32$
s) $? \times 10 = 20$	t) $? \times 2 = 14$	u) $3 \times ? = 6$
v) $6 \times ? = 60$	x) $8 \times ? = 80$	z) $100 \times ? = 200$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Análise a priori - Nesta atividade espera-se que os alunos já consigam resolver facilmente estas atividades, que foi escolhida para desenvolver a habilidade de escrever a sentença natural, praticar a multiplicação para que as dificuldades na tabuada tenham menos impacto nas próximas atividades, novamente é provável que as questões algébricas apresentem mais dificuldade na resolução.

Quadro 20 - Roteiro da Atividade 07

ATIVIDADE 07
Título: Princípio Fundamental da Contagem
Objetivo: Descobrir uma maneira prática para resolver questões de contagem.
Materiais necessários: Lista de questões, papel, borracha, lápis, lápis de cor.
Procedimentos: Resolva as questões da Lista de questões e preencha o quadro a seguir.

Questão	O que a questão pede?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da:				Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								
5ª								
6ª								
7ª								

Observação:

Conclusão:

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Quadro 21 - Lista de Questões da Atividade 07

Lista de Questões

1. Joana vai à festa de aniversário de sua prima; ela ganhou de presente de natal três calças (marrom, cinza e azul) e três blusas (preta, amarela e rosa). De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?
2. Numa lanchonete há 4 tipos de sucos. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos diferentes. De quantas maneiras você pode tomar um suco?
3. Pedro tem 2 calças (branca e preta), 3 camisas (vermelha, amarela e verde), 4 chapéus. De quantas maneiras diferentes ele pode se arrumar usando uma calça, uma camisa chapéu?
4. Numa lanchonete há 3 sabores de suco (morango, taperebá e abacaxi), 2 tipos de salgados (hambúrguer e pizza) e 3 tipos de doces (brigadeiro, sorvete e bolo).

De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?

5. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei 2 tipos de queijo, 3 tipos de patê e 5 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

6. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 2 tamanhos (pequeno ou grande), de duas formas (quadrada ou redonda) e de 4 tipos diferentes de sabores (morango, brigadeiro, banana, laranja). Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?

7. Maricota quer ir de Belém para Alter do Chão, para isso necessita passar em Santarém. Para ir de Belém para Santarém temos as opções (barco, ônibus, carro e avião) e para ir de Santarém para Alter do Chão temos a opção (barco ou balsa). De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Análise a priori - Essa atividade tem como finalidade a descoberta do Princípio Fundamental da Contagem e as questões utilizadas são do tipo aritmético, o que seria de mais fácil entendimento. Entretanto, de acordo com a categorização proposta por Sá (2003), esse de tal tipo não é de multiplicação e sim usa a multiplicação, a questão semântica também é relevante, pois não utilizamos palavras associadas à multiplicação e para muitos estudantes talvez seja o primeiro contato delas como o PFC.

Estes fatores combinados certamente trarão dificuldades aos estudantes, ademais as questões de 3 etapas necessitam que se multiplique variadas vezes, isso é outro obstáculo, além de ser imprescindível o domínio da multiplicação, ou a utilização de um raciocínio combinatório, por consequente para esta atividade foi criado o material de apoio manipulável para as questões 1,2,3,4,5.

Estas atividades foram organizadas, conforme indica Sá (2018) em seu trabalho “Momentos de uma aula de matemática por atividade”, com o objetivo de descobrir uma lei geral para resolver questões de contagem. A seleção do material foi feita com base na adaptação da atividade de Santos (2017) e Rosas (2018); na

elaboração do procedimento da aula contou a atividade escrita digitada, uma lista de questão e o apoio do material concreto, o quadro 8 (atividade de descoberta) foi criado segundo as recomendações de Sá (2018) com elaboração do espaço de registro; elaboração do desafio e a previsão da institucionalização.

A turma será dividida em grupos que receberá o roteiro com o quadro para preencher, a lista de questões e material de apoio. A seguir, será feita a análise a priori de cada questão e uma rápida descrição dos materiais utilizados.

1. Joana vai à festa de aniversário de sua prima; ela ganhou de presente de natal três calças (marrom, cinza e azul) e três blusas (preta, amarela e rosa). De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?

Análise a priori - Cada equipe receberá uma folha com uma imagem da Joana e receberá um kit de roupas recortadas para fazer a manipulação das roupas, esperamos que eles utilizem os registros gráficos, o desenho ou árvore de possibilidades para obter como resultado nove possibilidades. Esta questão tem duas etapas, os números são pequenos, a questão é aritmética simples, a solução resulta de uma multiplicação, além de ser uma atividade ligada à rotina, o que torna mais fácil e atribui um significado mais próximo da realidade. A imagem (apêndice A) é de um objeto de aprendizagem criado pelo Instituto NET CLARO EMBRATEL para alunos do ensino médio, ele foi adaptado para esta questão e trabalhado de forma diferente, no seu original é parte de programa e utilizado no computador, aqui foi usado como material concreto.

2. Numa lanchonete há 4 tipos de sucos (morango, abacaxi, cajá e abacate). Eles são servidos em copos de 3 tamanhos diferentes. De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?

Análise a priori - Cada equipe receberá uma folha em branco, os tamanhos dos copos recortados (apêndice B) e 4 lápis de cor. Espera-se que as equipes desenhem outros copos do mesmo tamanho proposto e pintem da cor do suco. Ao final, que percebam que é possível pelo tamanho e tipos de sabores tomar suco de 12 maneiras diferentes, é evidente que neste ponto é possível que o aluno apenas conte a quantidade de copos e não realize a multiplicação, o pensamento combinatório abrange uma série de comportamentos tais como estimar; representar por desenhos,

representar pela árvore de possibilidades entre outros, por isso existem atividades que não tem o aporte concreto.

3. Pedro tem 2 calças (branca e preta), 3 camisas (vermelha, amarela e verde), 4 chapéus. De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?

Análise a priori - Nesta questão, os alunos receberão uma folha em branco e as peças recortadas para fazer as conexões, conforme apêndice C, esta questão tem três etapas, o que a torna mais difícil.

4. Numa lanchonete há 3 sabores de suco (morango, taperebá e abacaxi), 2 tipos de salgados (hambúrguer e pizza) e 3 tipos de doces (brigadeiro, sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?

Análise a priori – Na quarta questão, os alunos receberão a folha com as imagens dos copos, espera-se que eles utilizem o registro gráfico Esta questão apresenta três etapas, então pode haver mais dificuldades, bem como a utilização da árvore de possibilidades com mais de duas etapas é trabalhosa.

5. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei 2 tipos de queijo, 3 tipos de patê e 5 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?

Análise a priori – Esta questão não tem o material concreto porque esperamos que os alunos pudessem trabalhar a ideia de combinatória sem a manipulação, que partindo do concreto para generalizações mais abstrata. As questões têm que apresentar um grau crescente de dificuldade, é provável que os alunos ainda utilizem o recurso gráfico.

6. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 2 tamanhos (pequeno ou grande), de duas formas (quadrada ou redonda) e de 4 tipos diferentes de sabores (morango, brigadeiro, banana, laranja). Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?

Análise a priori – Esta questão requer que o aluno desenhe as formas do bolo, o material dessa questão são quatro cores de lápis de cor (vermelho, marrom,

amarelo e laranja) que correspondem aos sabores dos bolos (morango, brigadeiro, banana e laranja).

7. Maricota quer ir de Belém para Alter do Chão, para isso necessita passar em Santarém. Para ir de Belém para Santarém temos as opções (barco, ônibus, carro e avião) e para ir de Santarém para Alter do Chão temos a opção (barco ou balsa). De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?

Análise a priori - Esta questão apresenta novamente apenas duas etapas independentes numa multiplicação de números pequenos. Espera-se pouca dificuldade, pela quantidade de etapas, todavia os valores numéricos não estão explícitos na questão.

As conclusões emitidas pelos grupos podem estar contidas ou não no quadro a seguir.

Quadro 22 - Categorização das conclusões da atividade da redescoberta

Tipo de conclusão	Conclusão esperada
Válida, prevista e desejada	Para encontrar o resultado multiplicamos as etapas independentes.
Válida, prevista e não desejada	Multiplicamos as etapas Multiplicamos várias vezes ou só uma vez
Não válida, prevista e não desejada	É só dá o resultado da multiplicação.
Não formulada	Grupos que não formularam questões.

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Esta atividade rompe com o modelo das atividades anteriores e a conclusão não é análoga as outras, por isso pode aparecer conclusões não válidas.

Ao término das questões é necessário que cada grupo preencha o seu quadro. Esperamos que todas as equipes consigam preencher o quadro conforme o modelo abaixo.

Quadro 23 – Atividade de descoberta- preenchimento esperado

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual o total de possibilidades?			
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	Resultado
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	Sim	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	Sim	2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	Sim	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	Sim	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?	Sim	3	2	3	5	30
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?	Sim	3	2	2	4	16
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém par Alter do Chão?	Sim	2	4	2		8

Fonte: Pesquisa de Campo, (2019).

Os grupos, ao preencherem o quadro, devem observar que basta multiplicar o número de etapas independentes para obter o resultado desejado, ou seja, utilizar o Princípio Fundamental da Contagem. Percebendo que se um evento ocorre em etapas, sucessivas e independentes, o número de possibilidades de cada uma delas, deve ser multiplicado para encontrar o número de possibilidades do evento ocorrer.

É presumível que o aluno não chegue à conclusão formal, devem aparecer definições mais rudimentares, como por exemplo, “multiplicando os números”. Caso isto aconteça, Sá (2019) recomenda que o professor intervenha com sugestões e principalmente perguntas, onde devido à natureza do nosso interesse de pesquisa acredita-se ser possíveis e plausíveis:

- O que a questão pede?
- Quantas possibilidades existem para a primeira etapa?
- Quantas possibilidades existem para a segunda etapa? E assim sucessivamente.
- Observe os números em laranja.
- Agora observe os números da última coluna.
- Qual a relação entre os números de etapas e o total de possibilidades?
- Na primeira questão qual é o número de possibilidades da primeira etapa?
- Qual o número de possibilidades da segunda etapa? Qual foi o resultado? Como eu posso relacionar estes três valores?
- Qual é a operação que eu posso usar para isso? Entre outras perguntas que são passíveis de aparecer no experimento, mediante as dúvidas dos discentes.

Em seguida, pede-se que os grupos escrevam suas conclusões no quadro.

Para concluir, deve existir um diálogo entre pesquisador e a turma para escrever a conclusão mais adequada para que uma pessoa que não tenha participado do experimento possa entender. É a sistematização de uma regra que se assemelhe ao proposto nos livros, entretanto com palavras dos estudantes.

Quadro 24- Roteiro da Atividade 08

ATIVIDADE 08

Título: Questões do princípio fundamental da contagem

Objetivo: Praticar a resolução de problemas de contagem.

Materiais necessários: Lista de questões, papel, borracha e caneta ou lápis.

Procedimentos: Resolva as questões a seguir.

1. Um parque de diversões tem duas entradas (A e B) e quatro saídas (1,2,3 e 4). De quantas maneiras você poderia entrar e sair desse parque?



2. Numa lanchonete há quatro tipos de suco. Eles são servidos em copos de dois tamanhos. De quantas maneiras diferentes você pode escolher um suco para tomar?
3. Beto tem 12 camisetas e 5 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando uma camiseta e uma bermuda?
4. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e cinco opções de sobremesa (sorvete, pudim, creme, brigadeiro e churros). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?
5. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 3 tamanhos, de três formas e de 4 tipos diferentes de sabores. Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?
6. Maria ganhou algumas saias e 9 blusas de presente em seu aniversário. Ela percebeu que com as peças de roupa que ganhou poderia se arrumar de 36 maneiras diferentes, usando uma saia e uma blusa. Quantas saias a Maria ganhou de presente?
7. Um comerciante possui 8 tipos de sucos e deseja preparar alguns tipos de sanduíches, para poder oferecer 48 tipos de lanches aos seus clientes. Quantos tipos de sanduíche ele precisa preparar?
8. Há 24 caminhos diferentes para uma pessoa ir da cidade A para a cidade C passando por B. Se há 4 caminhos da cidade A para cidade B, então existem quantos caminhos da cidade B para a cidade C?

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Análise a priori – Esta atividade deveria ser mais fácil, todavia ela apresenta questões classificadas por Sá (2003) como algébricas, que são as que utilizam a propriedade da igualdade para resolução e, neste caso, necessitam da divisão para resolvê-la, logo o esperado é que os alunos consigam resolver facilmente as questões que utilizam o PFC direto e tenham um pouco mais de dificuldade naquelas onde existe a necessidade de dividir.

Pós-teste é a mesma lista de questões do pré-teste. Espera-se que após o desenvolvimento da sequência de ensino os alunos apresentem facilidade em resolvê-las, que os resultados sejam bem melhores que no pré-teste. O desempenho do aluno será comparado nos dois testes, para averiguar se houve um efeito positivo da sequência nos estudantes da turma em que o experimento foi aplicado.

4 EXPERIMENTAÇÃO

Esta seção se destina a relatar a aplicação da sequência didática, para tal fim é necessário descrever os instrumentos empregados e os resultados obtidos. Utilizou-se como instrumento de coleta de dados: testes; questionário socioeducacional; sequência didática; ficha de observação da aula por atividade de redescoberta, bem como também um diário de campo, além dos registros fotográficos e em vídeo das considerações das equipes sobre as intervenções.

O lócus da experimentação foi uma turma do 5º ano de uma escola estadual de ensino fundamental, localizada em Icoaraci (Distrito de Belém), no Estado do Pará. Esta instituição oferta apenas as séries iniciais do fundamental menor, fato que justificou a escolha, enquanto as outras trabalham com todo este nível, ou fundamental e médio.

O experimento foi desenvolvido em sete sessões de aproximadamente uma hora e aplicadas 8 atividades, divididas entre as de aprendizagem e fixação como o quadro abaixo demonstra.

Quadro 25 - Cronograma da experimentação

Data	Sessão	Atividade
23/09/2019	1	Questionário sócio educacional.
24/09/2019	5	Pré-teste
25/09/2019	6	Adição na igualdade
26 /09/2019	7	Subtração na Igualdade
	8	Sentenças aditivas
16/10/2019	9	Multiplicação na igualdade
	10	Divisão na igualdade
17/10/2019	11	Sentenças multiplicativas
18/10/2019	12	Atividade de descoberta
	13	Atividade de fixação
	14	Pós-teste.

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

O primeiro contato com a escola ocorreu em meados junho em uma sondagem com a coordenadora e com a diretora que foram muito receptivas com o projeto e indicaram a turma que deveria participar. Em seguida, conversou-se com a

professora da turma, que se mostrou muito interessada, mas pediu que o trabalho fosse desenvolvido no segundo semestre, pois estavam finalizando avaliação, além de estabelecer que as atividades não deveriam utilizar todo o período de aula, que ficassem no tempo de aproximadamente 60 min.

Ainda no mês de junho, teve-se contato com a turma, perguntou-se para os estudantes se eles tinham interesse em participar do projeto, depois de responder várias perguntas houve concordância. E explicou-se a necessidade de levar para os pais, o Termo de Consentimento Livre Esclarecimento (Anexo A), instrumento pelo qual os genitores permitiam a participação no projeto.

4.1 PRIMEIRA SESSÃO DE ENSINO

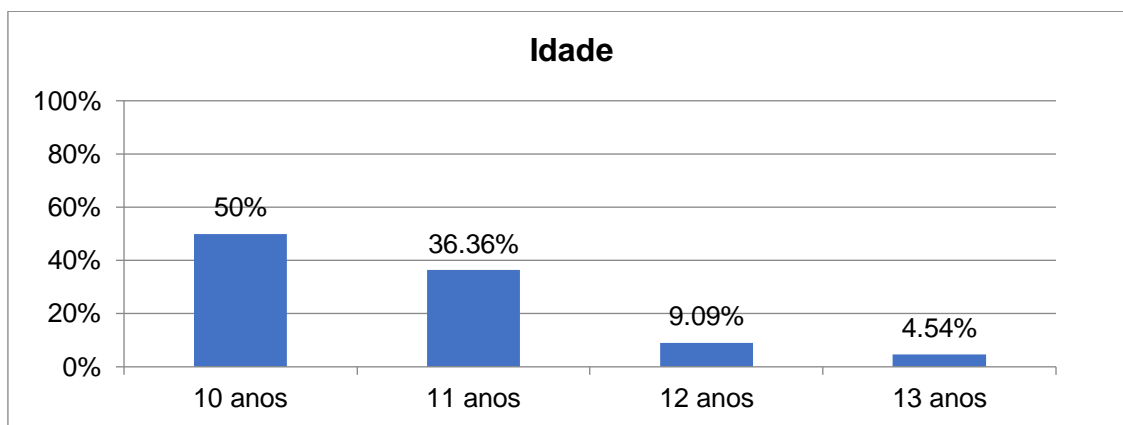
No dia 19 de agosto de 2019, ocorreu a primeira sessão de ensino, com o questionário socioeducacional, composto de questões que levantaram informações quanto à idade, sexo, escolaridade dos responsáveis, hábitos de estudos, afinidade com a matemática, notas em matemática e também sobre a forma que as aulas são ministradas e sobre a resolução de problemas.

Devido à idade dos alunos, optou-se por ler em voz alta o questionário, deixando um intervalo de tempo para que os alunos respondessem. Desta atividade participaram 28 estudantes, entretanto foram utilizados apenas as informações dos discentes que participaram do pré-teste e pós-teste. Esta sessão durou cerca de 57 minutos, pois esperou-se os 15 minutos de tolerância para os alunos entrarem no primeiro período, afim de realizar a atividade em conjunto, os resultados estão dispostos a seguir.

4.1.1 Perfil socioeducacional

No que tange à idade, 10 anos é a recomendada para a série, entretanto os estudantes com 11 anos que fazem aniversário no segundo semestre também estão na idade correta, então somente as categorias de 12 e 13 anos podem ser classificadas como distorção de idade e série, onde é possível inferir que o índice de alunos em tal condição é bem inexpressivo.

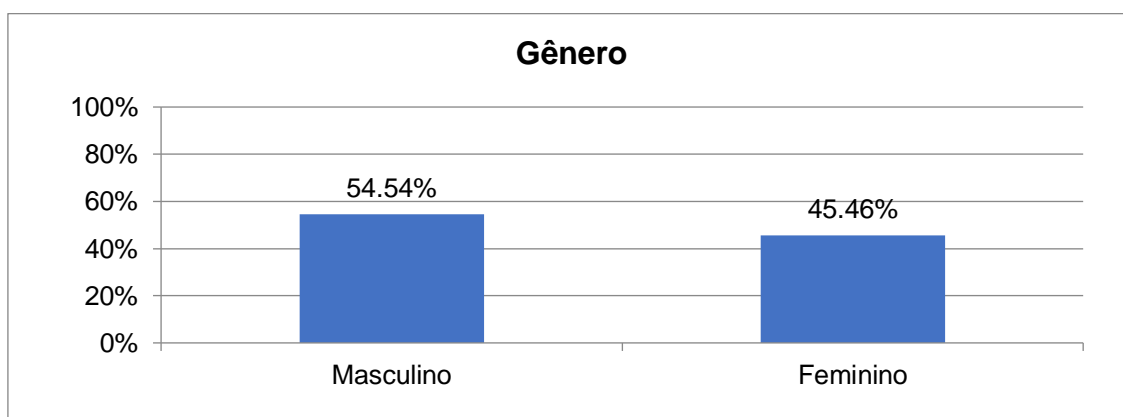
Gráfico 1: Idade



Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Quanto ao gênero, 54,54% é do sexo masculino, evidentemente 45,46% é do feminino, não houve uma diferença muito grande, mas existe uma predominância masculina na classe e se a turma estivesse completa existiria um percentual maior de meninos.

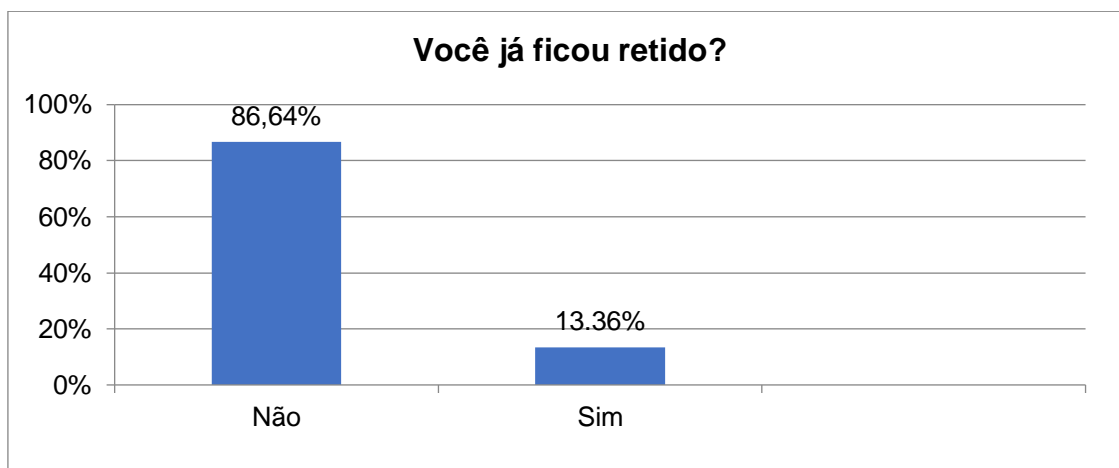
Gráfico 2: Gênero



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Nessa turma, 13,36% dos alunos já ficaram retidos, quando comparava-se esta informação com a idade, é a soma do percentual dos alunos com 12 e 13 anos, que estariam na condição de distorção idade-série, representada no gráfico 1.

Gráfico 3: Reprovação

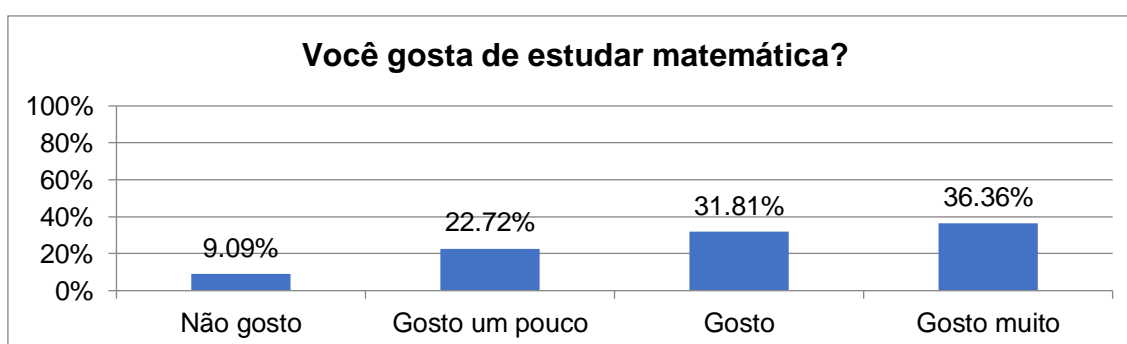


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

A pergunta “você gosta de estudar matemática” teve uma variabilidade de respostas, apenas 9,09% dos estudantes afirmam não gostar da disciplina, isto difere de outras pesquisas realizadas no fundamental maior, que ocorre um percentual mais expressivo de assertivas ou respostas negativas, é provável então que este sentimento só se desenvolva nas séries finais do ensino fundamental e/ou médio.

Enquanto a soma das alternativas “gosto” e “gosto muito” abrange 68,17% desta classe, diante desse percentual, pode-se afirmar que a maioria da turma gosta da disciplina e tem uma relação positiva com a matemática.

Gráfico 4: Gosto por estudar matemática



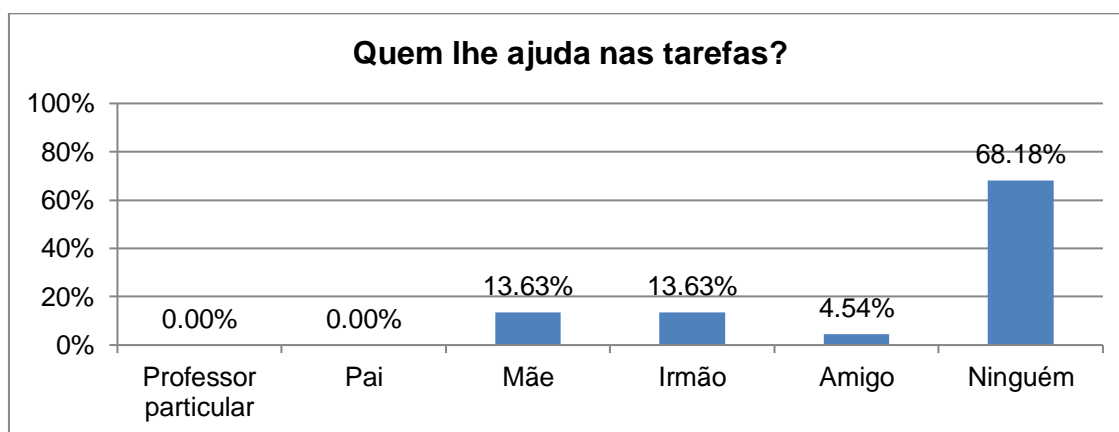
Fonte: Pesquisa de campo de 2019.

Sobre as tarefas de casa, os discentes não possuem professor particular, nem tampouco recebem ajuda do pai, isto indica dois fatores, a escola está inserida em um ambiente com rendimento financeiro baixo, o que não comporta, gastos com

professor particular e sobre nenhum ter ajuda do pai, reflete que muitos filhos não convivem ativamente com o pai.

13,36% recebem ajuda da mãe e o mesmo percentual recebe ajuda do irmão, enquanto 4,5% e auxiliados por um amigo, entretanto a maioria 68,18% não têm ajuda de ninguém, isto é preocupante, pois são crianças entre 10 e 11, que ainda necessitam de ajuda e supervisão nas tarefas de casa.

Gráfico 5: Ajuda nas tarefas de casa de matemática

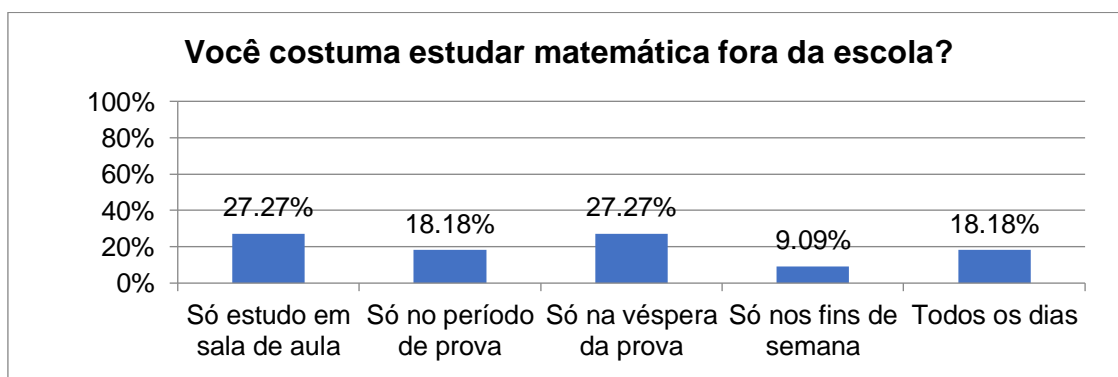


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Os estudantes não têm uma rotina constante de estudos, apenas 18,18% costumam estudar todos os dias, a maioria 27,77% estuda só em sala de aula ou só nos fins de semana, seguido de 18,18% que só estudam no período de prova e 27,27% só na véspera da prova, 9,09% estudam somente nos fins de semana. Estes percentuais são facilmente explicáveis.

A sociedade contemporânea tem muito atrativos tecnológicos que prendem a atenção das crianças, por isso é necessário refletir sobre mecanismos para atrair o interesse das crianças para a matemática dentro e fora das dependências escolares.

Gráfico 6: Frequência de estudo fora da escola

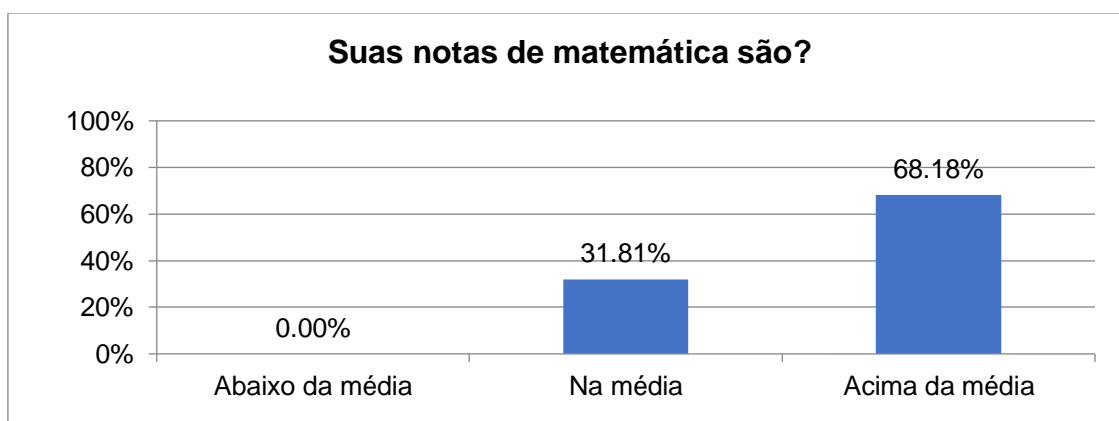


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Neste tópico, ao aplicar o questionário, os estudantes queriam saber o que era média, por uma questão de coerência com o sistema educacional estadual, estabeleceu-se que o valor fosse a nota 5, abaixo desse seriam notas inferiores a 5 e acima maiores que 5.

Face ao exposto, é possível verificar que 68,18% tem notas maiores que 5, logo estão aptos a serem aprovados para o ano seguinte; 31,81% tem notas na média, o que também os habilita ao prosseguimento de estudos, e não tem nenhum estudante com notas menores que 5 em matemática.

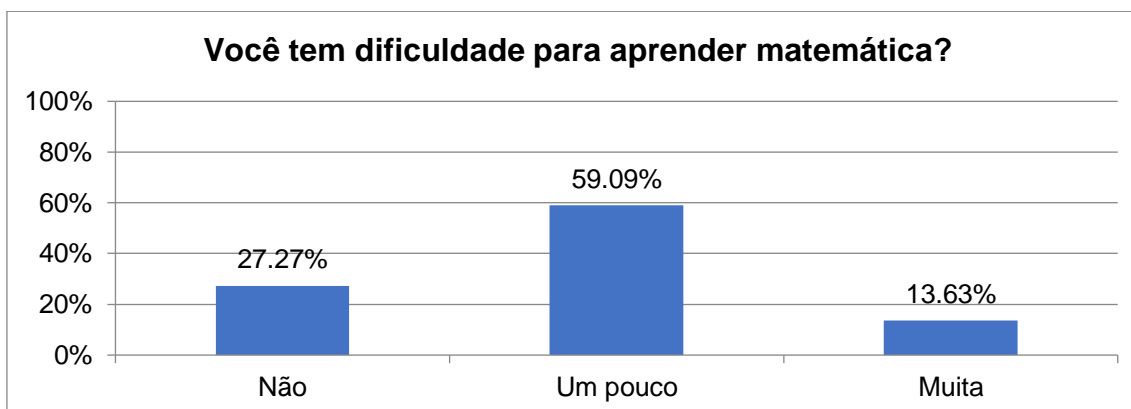
Gráfico 7: Notas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

No que tange ao aprendizado, a maioria afirmou ter um pouco de dificuldade para aprender matemática e 13,36% disse ter dificuldade para aprender matemática, entretanto 59,09% afirmam ter ao menos um pouco de dificuldade para aprendê-la. Enquanto que a maioria destes estudantes gostam da disciplina, tem notas acima da média e eles reconhecem que tem dificuldade para aprender matemática.

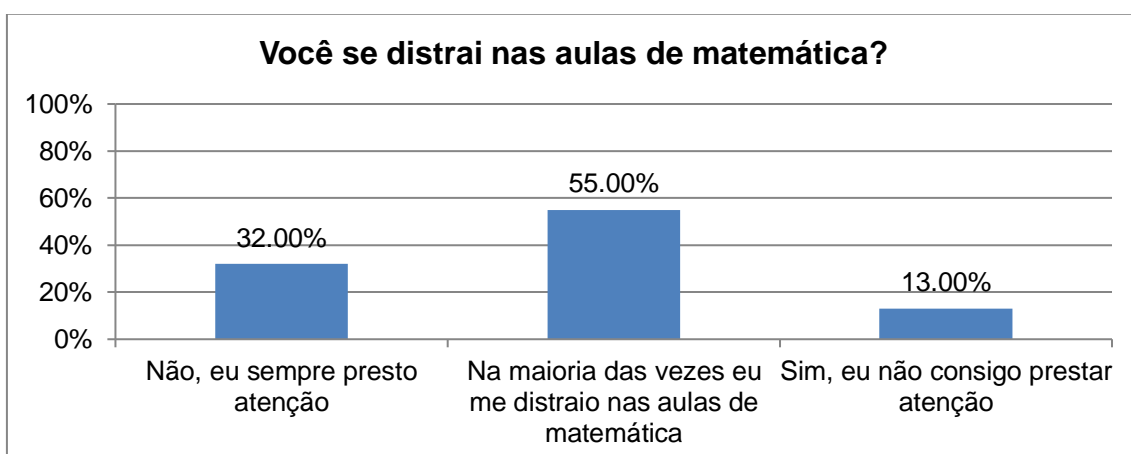
Gráfico 8: Dificuldade para aprender matemática



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Mais da metade da turma se distrai nas aulas de matemática, como fica evidente no gráfico abaixo. Possivelmente isto tem ligação com a forma que as aulas são ministradas com estrutura de assunto-exemplo-atividade.

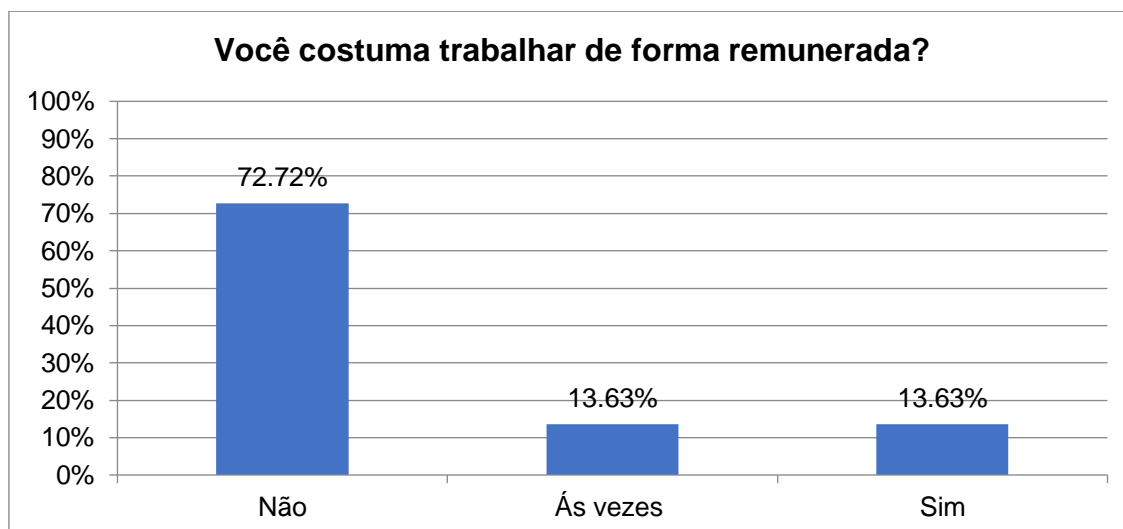
Gráfico 9: Distração nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

O gráfico abaixo trata sobre o trabalho de forma remunerada. Entre os estudantes 77,72%, assegurou não trabalhar de forma remunerada, contudo os 11,11% que às vezes e os 13,63% que afirmaram exercer, é motivo de preocupação, na amostra não existe nenhum estudante maior de 13 anos.

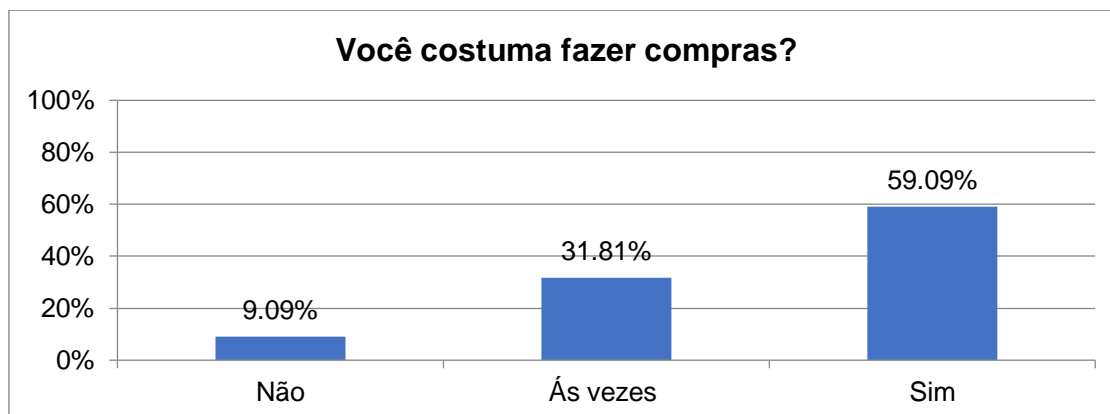
Gráfico 10: Trabalho remunerado



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Os dados abaixo evidenciaram que 59,09% dos estudantes fazem compras. Ao se somar com os 31,81% dos alunos que ocasionalmente também fazem compras, tem-se uma quantidade bem expressiva de alunos que possuem este hábito, o que é positivo, isto os ajuda em matemática, pois utiliza cálculos mentais e mobiliza vários aspectos das operações básicas.

Gráfico 11: Hábito de fazer compras

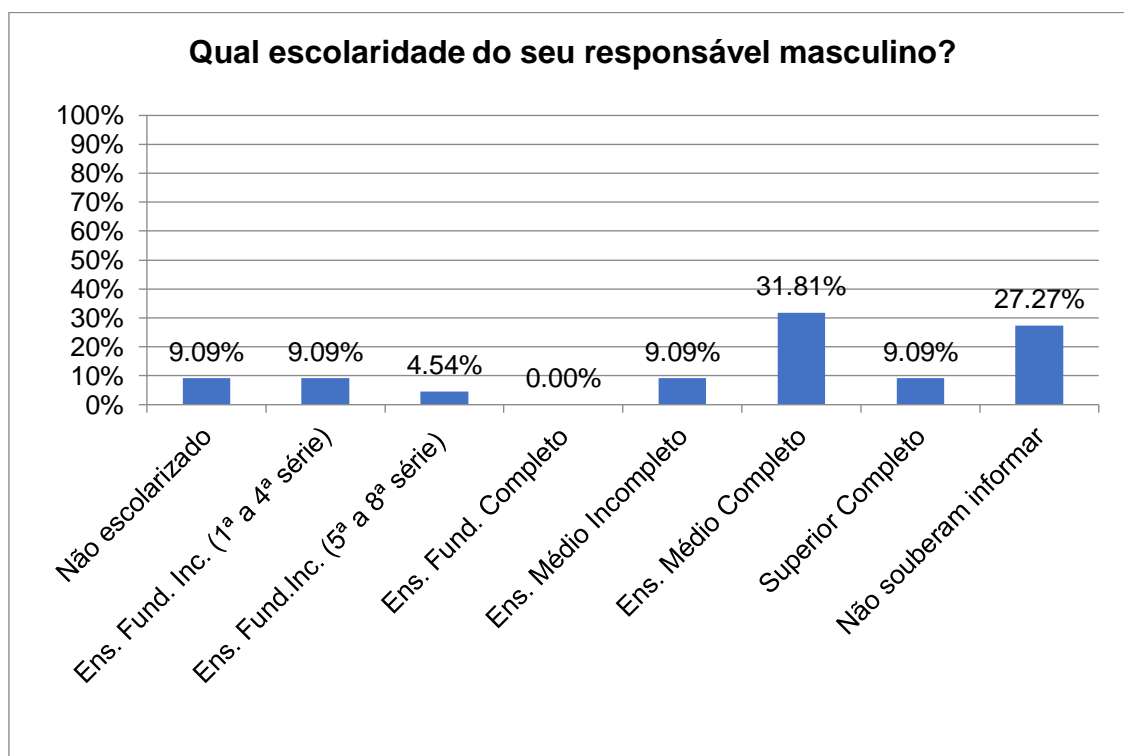


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Quanto à escolaridade do responsável masculino, 27,27% dos estudantes não souberam informar (esta categoria não constava no instrumento, mas a grande ocorrência de “não sei”, ou semelhantes, levou ao acréscimo desta resposta); 9,09% têm nível superior, no outro extremo tem-se 9,09% de não são escolarizados 9,09% tem apenas a antiga 4ª série (5º ano), 4,54% com o fundamental incompleto e 27,78% que possuem o ensino médio completo, e 9,09% apresentam o ensino médio

incompleto, estas informações revelam que o nível de escolarização do responsável masculino é relativamente baixo nessa região.

Gráfico 12: Escolaridade do responsável masculino

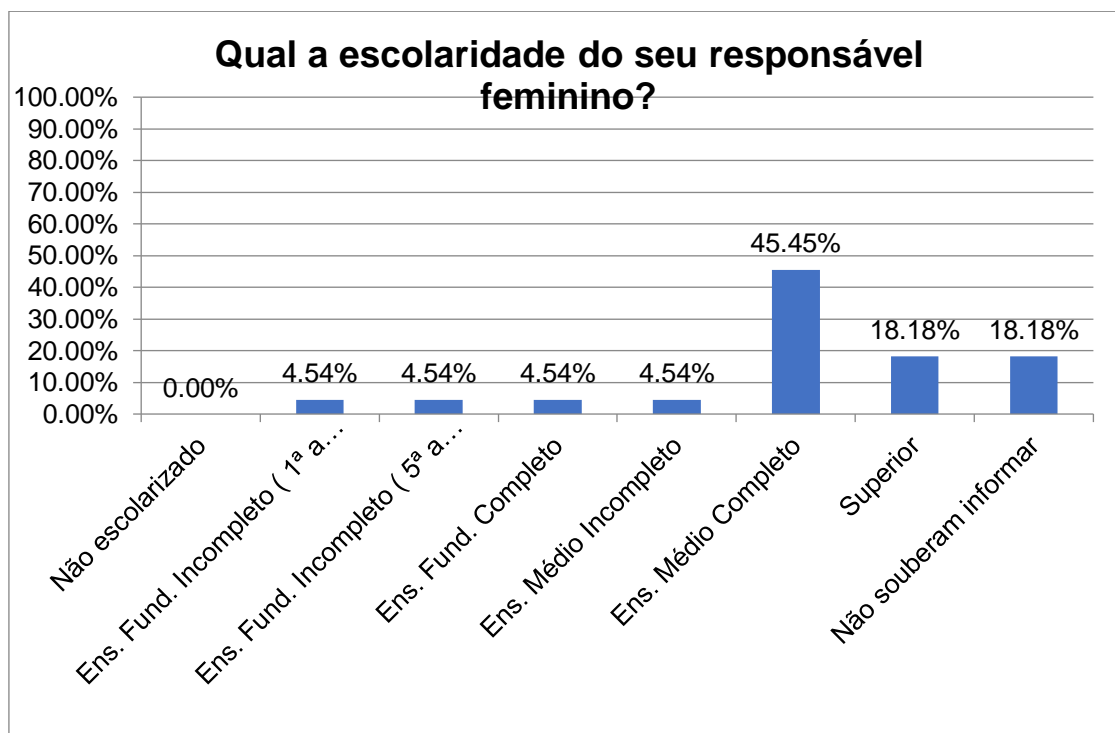


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

A escolaridade do responsável feminino apresenta apenas 18,18% de nível superior, 44,40% que apresentam ensino médio completo não souberam informar. Ainda tem um percentual alto de 18,18%, todavia se juntar o ensino médio e superior, pode-se concluir que o responsável feminino tem mais tempo de permanência na escola que o masculino.

Isto conversa com dados de Santos (2017) e Rosa (2018) e também com os do IBGE que evidencia desde de 2007 que existe um gradual aumento na escolarização das mulheres, e quanto maior o nível de escolarização mais acentuadamente este índice vai aparecendo. É uma informação relevante, pois se compararmos com outra tendência que é a da mulher ser a principal fonte de renda das famílias brasileiras, isto pode refletir em um aumento de tempo escolar nos filhos.

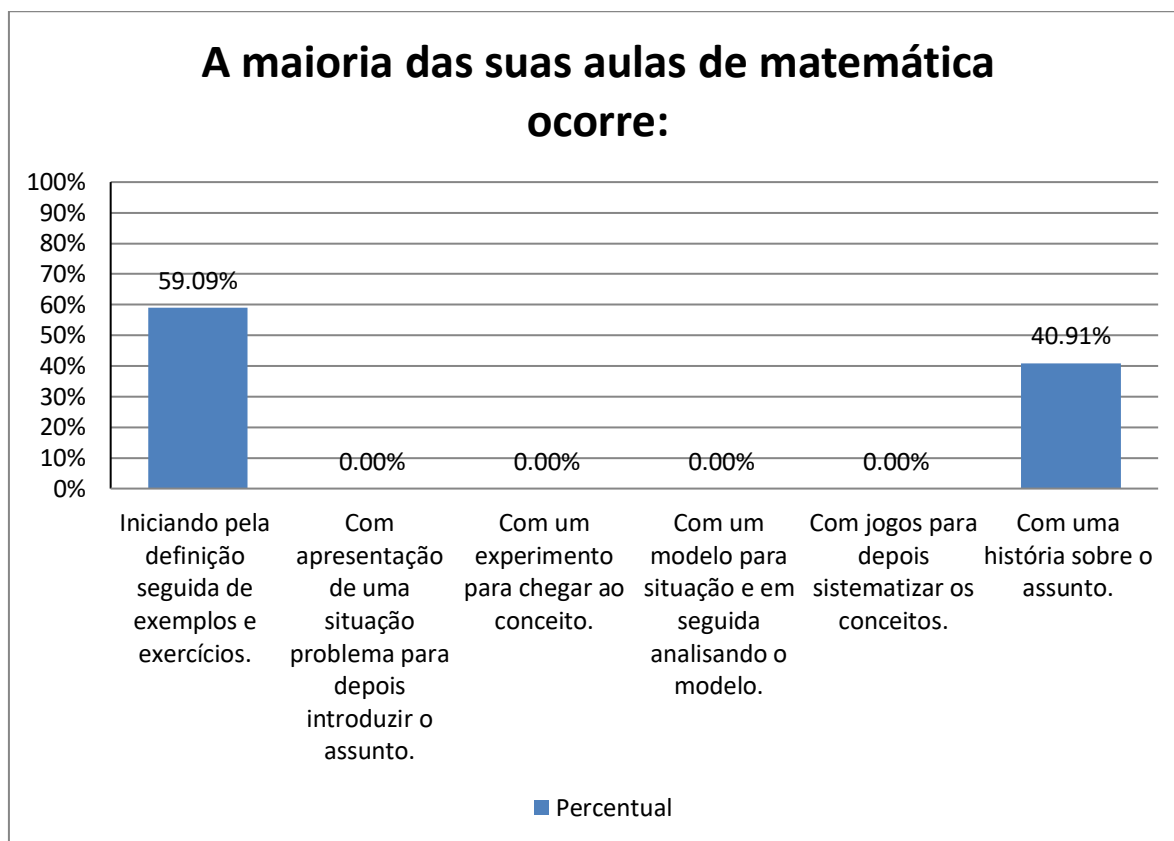
Gráfico 13: Escolaridade do responsável feminino



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Uma das informações mais relevante sobre as aulas se refere à forma como elas são ministradas. Como foi exposto no gráfico 14 elas acontecem, quase sempre, de duas maneiras, na forma clássica: iniciando pela definição, seguida de exemplo e exercícios. A outra forma predominante citada por 40,91% dos estudantes, foi que aula começa com uma história sobre o assunto, isto causou certa curiosidade, ao perguntar para a docente da turma, ela afirmou que o livro didático tem alguns conteúdos que vem apresentados desta forma, e que os alunos gostam muito quando ela trabalha deste formato, isto destaca a importância do livro didático, por vezes é o recurso mais utilizado, por isso ele deve tratar de aspectos diversificados da matemática, as tendências de ensino, entre elas a história da matemática como uma das metodologia de ensino.

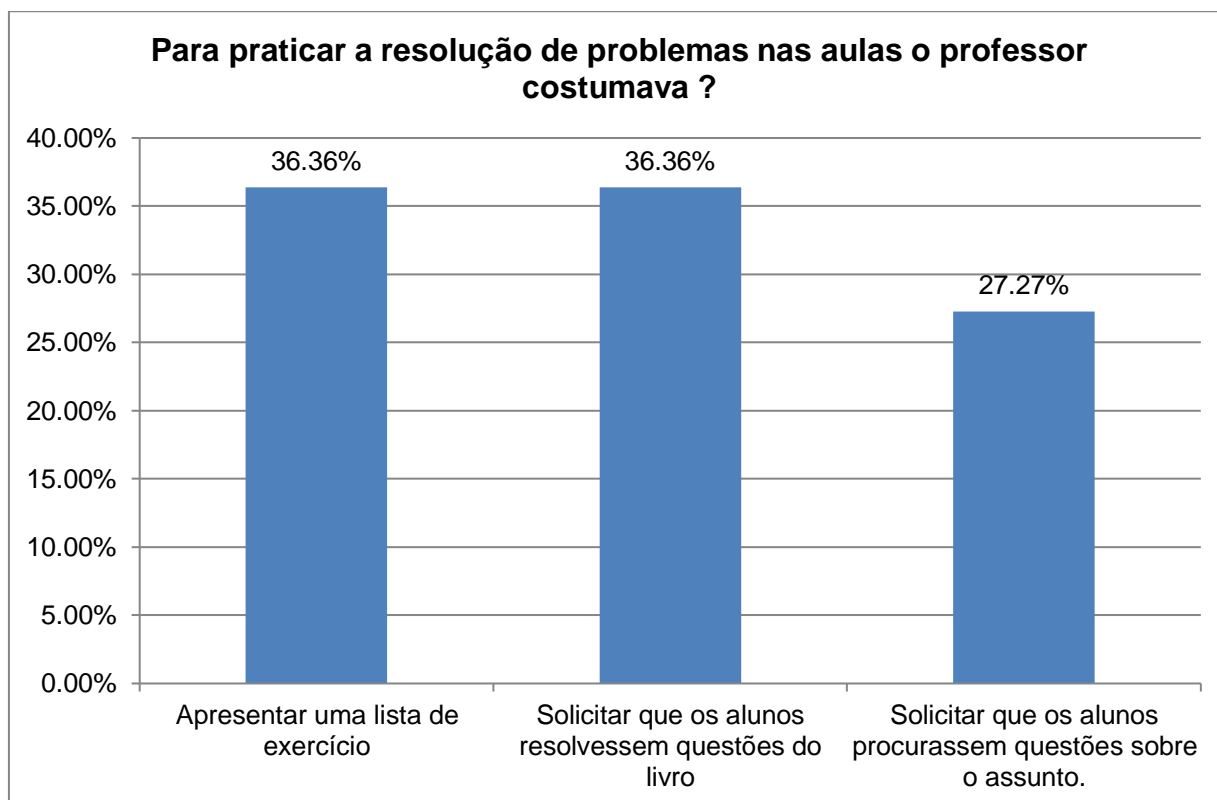
Gráfico 14: Como as aulas de matemática acontecem



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Estas informações conversam com as do gráfico anterior, pois 36,36% dos exercícios advêm da solicitação de problemas que se encontram no livro didático, com a mesma proporção da lista de exercícios com uma proporção um pouco menor. A docente solicita que os alunos procurem questões sobre o assunto; estes dados nos revelam que pelo menos no que tange aos exercícios existe uma variabilidade de procedimentos, entretanto todos estes se inscrevem no estilo tradicional de ensino.

Gráfico 15: Resolução de problemas durante as aulas



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Face o exposto acima, é possível inferir que os discentes possuem afinidade com a disciplina, entretanto tem dificuldade para prestarem atenção durante as aulas de matemática, isto pode estar refletido na dificuldade que dizem ter para aprender a matéria. Considerando que a maioria não tem uma rotina de estudos em matemática, a maior parte estuda apenas em períodos sazonais. O geral da amostra tem o hábito de fazer compras, o que favorece os cálculos mentais e na prática das operações básicas, a turma quase em sua totalidade apresenta notas acima da média em matemática.

A pesquisa também apontou que o estilo predominante de aulas tem a estrutura tradicional: assunto, seguida de exemplo, com uma lista de exercício para praticar; ademais que a turma utiliza o livro didático como recurso pedagógico.

4.2 SEGUNDA SESSÃO.

Nesta sessão, compareceram 26 estudantes e foi aplicado o instrumento de coleta de dados, denominado pré-teste, composto de 10 questões, que

apresentavam duas ou três etapas sucessivas e independentes, bem como existem 7 questões classificadas como aritmética e 3 algébricas. Tal instrumento foi construído com 5 das questões que Rosa (2018) aplicou em uma turma do ensino médio e 5 adaptadas do trabalho de Santos (2017). A intenção era averiguar quais os conhecimentos prévios sobre o PFC eles possuíam.

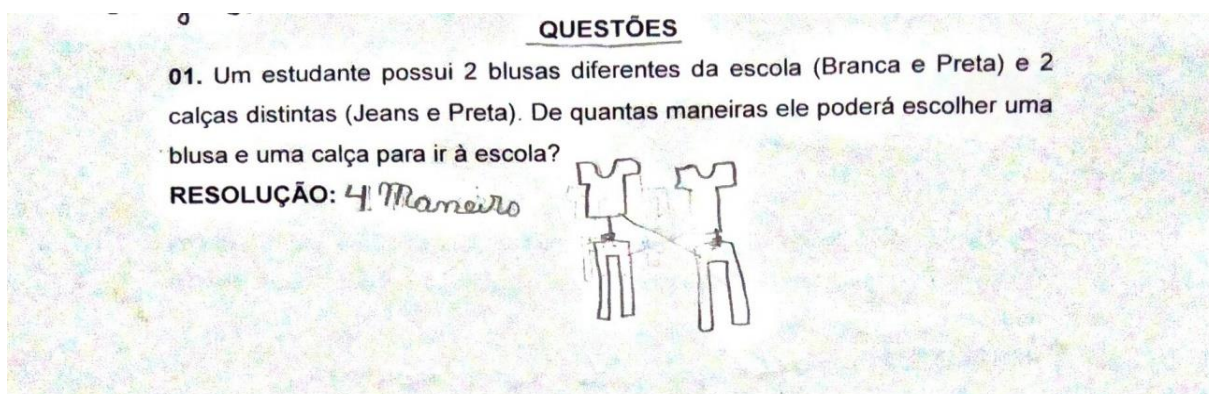
4.2.1 Pré-teste

O conjunto de dez questões trabalhadas com a turma, algumas das informações pertinentes sobre as questões e sobre os estudantes, que foram levantadas nesta fase estão descritas abaixo:

QUESTÃO Nº 1 – um estudante possuía 2 blusas da escola (branca e preta) e 2 calças (jeans e preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?

A maioria dos alunos não escreveu uma sentença, ou utilizou qualquer registro iconográfico, portanto é difícil fazer uma análise mais adequada dos processos de resolução, entretanto a estudante E11, abordou o problema desta forma, ela desenhou 2 camisas e 2 calças, ligou cada camisa com a calça abaixo e depois fez o cruzamento em X e obteve 4 maneiras.

Imagem 1 – Resposta do E2 no pré-teste



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

É uma forma de árvore de possibilidades, outros 7 estudantes utilizaram raciocínio semelhante, entretanto não esgotaram as possibilidades, ligando cada calça à apenas uma camisa, encontrando 2 possibilidades, isto corrobora com os achados de Vega e Borba (2014 apud BORBA, 2016), que apontam que uma das

dificuldades das crianças é interpretar e listar todas as possíveis combinações de elementos e não apenas algumas das possibilidades.

Esta questão teve um número alto de acertos, isto sofreu influência dos valores 2 e 2, para os alunos que somaram para obter o valor de 4 e acertaram, infelizmente a maioria dos alunos escreveu apenas a resposta, o que impede de levantar mais conjunturas.

A segunda questão tinha três etapas e não teve nenhum acerto tal como as questões 4 e 7 que também contavam com 3 etapas. As questões que apresentavam três etapas não tiveram acertos, já era um comportamento previsto, nos estudos sobre combinatória asseguram, que alguns problemas têm resolução mais fácil, analogamente que o número de etapas pode influenciar o resultado.

Foi possível observar que a maioria dos estudantes somou os três valores numéricos indicados nas questões, ou seja, não associaram o tipo de problema à operação multiplicação. Isto vai ao encontro das assertivas de Sá (2003), quando este classificava estas questões como aquelas que usam a operação, que não pode ser associada diretamente à multiplicação apenas pela sua conotação semântica.

Na maioria das questões, os alunos somaram os valores, tal conjectura foi levantada pelos números indicados como resposta no pré-teste, tome-se como exemplo a questão 7: “Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será servido em três etapas: **entrada, prato principal e sobremesa**. De quantas maneiras distintas ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais e 2 sobremesas?” “Quase todos os erros que incorreram nesta questão deram 7 como resposta, mesmo que alguns tenham respondido somente com o número 7, indubitavelmente ele foi obtido assim $3 + 2 + 2 = 7$.

Já as questões 8, 9 e 10 apresentavam 2 etapas, mas eram algébricas, logo era necessário escrever a sentença e operar com a igualdade. As questões 3 e 5 tiveram um índice bem baixo de acertos, apenas o E19 que acertou 3 questões.

A sexta questão teve 81,81% de acertos, certamente que um percentual tão alto chamou muita atenção, na outra sessão perguntamos a turma se eles brincavam de cara ou coroa. Que a turma afirmou ser um ato corriqueiro nas brincadeiras, para decidir quem jogava na educação física. Nesta questão, dois alunos esboçaram uma árvore de possibilidades, uma correta e uma incorreta.

Transcrição da resposta do E4:

Cara, coroa/ coroa, cara/ Cara, cara/ coroa, coroa

Transcrição da resposta do E1

1 cara, 1 coroa, 1 cara, 1 coroa

Em seguida, o estudante E1 respondeu que havia 4 resultados, uma construção errada, mas com resultado correto. Outro ponto que deve ser salientado, é que a questão dizia 2 moedas e que tinha duas faces cara (C) e coroa (K), isto pode ter influenciado a soma de $2 + 2 = 4$, mas ao se comparar com a primeira questão que se tinha os mesmos valores, observamos que ela não teve um índice tão alto. Isto conversa com os achados de Borba, Souza e Carvalho (2018) que asseveram que algumas das noções intuitivas da combinatória, são autônomas da instrução escolar, elas advêm das experiências do cotidiano.

Os erros indicam que esta turma provavelmente ainda não estudou questões que envolvam o PFC, isto aponta dois aspectos já abordados neste texto.

Vergnaud (1993) deixa claro que para que a criança consiga atribuir um sentido a multiplicação é necessário que ela tenha contato com os vários aspectos da operação, inclusive as questões de resolução mais difíceis.

Os resultados também apontam o não reconhecimento da operação multiplicação, apenas pela semântica das questões, pois todas elas não são da operação multiplicação e sim usam a multiplicação em sua resolução.

Os acertos corroboram as assertivas de Borba, Souza e Carvalho (2018) que asseguram que estes conteúdos estão imbuídos na rotina dos estudantes da educação básica, isto pode subsidiar o aprendizado, no entanto, existem aspectos diversificados que precisam de ensino específico para o seu desenvolvimento.

4.3 TERCEIRA SESSÃO

A primeira atividade deste trabalho se inscreve no campo aditivo e tinha o objetivo que de os alunos descobrirem quando, por meio da adição uma igualdade permanece verdadeira, com esta atividade tinha 13 proposições com valores diferentes para a, b, c, d, que no preenchimento os discentes deviam verificar se as igualdades $a = b$ e $a + c = b + d$ eram verdadeiras ou falsas. A análise prévia desta questão tinha a seguinte redação

4.3.1 Atividades do Campo Aditivo

As atividades do campo aditivo foram as primeiras que utilizavam o formato do ensino por atividades, o comportamento esperado (análise prévia) e o que foi observado durante esta fase, foi descrito a seguir.

Análise prévia - Como esta é a primeira atividade, é provável que eles tenham mais dificuldade para enunciar o que descobrirem, por isso que neste momento é recomendada a intervenção com perguntas para que este aluno possa concluir uma proposição válida, ou algo que se aproxime, que posteriormente será confrontada com as demais equipes para fazer uma síntese delas.

Nesta atividade, participaram 28 alunos, divididos em 7 grupos de 4, com as mesas voltadas para o centro, para facilitar o diálogo na equipe, escolhidas de forma espontânea. Foram utilizados os 60 minutos previstos somente com a primeira atividade.

Esta atividade era composta de 13 situações com valores para a , b , c , d . De tal forma que os estudantes precisavam averiguar se as igualdades $a = b$ e $a + c = b + d$ eram verdadeiras ou falsas. Eles apresentaram muita dificuldade, o que já era esperado, em decorrência de ser a primeira atividade deste formato, com a exigência de procurar regularidades, observar, registrar, discutir com a equipe.

Ao se perceber a primeira dificuldade no preenchimento, explicou-se no quadro que era para marcar com o X na coluna de sim ou não, teve-se também que perguntar no quadro quais os valores de A , B , C e D e como estas se relacionavam, para que a atividade fluísse.

Tem-se que ressaltar que estes alunos ainda não tiveram contato com questões onde as letras tem um valor numérico, após este esclarecimento os grupos preencheram os quadros com facilidade, o problema ocorreu na hora de enunciar conclusões, isto causou um desequilíbrio na turma, pediu-se que eles escrevessem o que tinham observado.

Sobre as atividades realizadas durante o experimento, nas análises prévias foram criadas categorias das conclusões, entretanto as categorias propostas não contemplaram todas as conclusões, por isto propôs-se uma categorização mais ampla embasada em Castro (2019).

Quadro 26– Tipos de conclusões dos grupos nas atividades.

Tipo de conclusão	Descrição
Válida, prevista e desejada	Quando a conclusão e tem redação semelhante à conclusão esperada.
Válida, não prevista e não desejada	Quando está válida, mas apresenta algum aspecto não previsto ou utilizou um percurso fora do proposto.
Válida, prevista e não desejada	Está válida, foi prevista nas análises, e se relaciona com a conclusão desejada.
Não válida, prevista e não desejada.	É uma conclusão inválida, pode ter sido prevista nas análises e não se relaciona com a conclusão prevista.
Não válida, não prevista e não desejada	É uma conclusão inválida, não foi prevista nas análises e não se relaciona com a conclusão prevista
Não formulada	Quando o grupo não registrou uma conclusão

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Nesta atividade, as equipes escreveram conclusões, entretanto foram conclusões não válidas nos sete grupos, conforme o descrito no quadro abaixo.

Quadro 167 - Transcrição das conclusões da atividade de adição

GRUPOS	TRANSCRIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Grupo 1	As contas têm resultados diferentes quando somam.	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 2	O que nós entendemos é que sempre os números são diferentes e igual.	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 3	São iguais.	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 4	Todo número que fica igual é igual e todo número que fica diferente é diferente	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 5	Os números são diferentes, os números também são iguais.	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 6	Numa conta ou na outra conta a soma é diferente ou igual.	Não válida, prevista e não desejada
Grupo 7	As questões têm resultados iguais ou diferentes quando soma.	Não válida, prevista e não desejada

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

No quadro abaixo, está a representação em percentual da validade das conclusões da atividade da adição que foram consideradas todas não válidas, previstas e não desejadas.

Quadro 28 – Distribuição da validade das conclusões da atividade de adição

Tipo de conclusão	Frequência	%
Válida, prevista e desejada	—	—
Válida, não prevista e não desejada	—	—
Válida, prevista e não desejada	—	—
Não válida, prevista e não desejada.	7	100
Não válida, não prevista e não desejada	—	—
Não formulada	—	—

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

As conclusões obtidas foram incorretas, durante as análises prévias, esperava-se uma dificuldade muito grande, para enunciar uma conclusão embasada na observação, ainda mais se tratando de propriedades da igualdade, que é um tópico que não é comumente trabalhado na sala de aula. Ademais, são estudantes das séries iniciais.

Resultados similares foram encontrados por Santos (2017, p. 210): “Eles não apresentaram obstáculos no preenchimento do quadro, no entanto tiveram dificuldades em observar as regularidades presentes no quadro a partir de seu preenchimento”, o autor também cita o tempo maior que atividade precisou e que apenas 2 grupos conseguiram observar algo presente no quadro.

As conclusões seriam consideradas não válidas, contudo algumas palavras indicam que eles perceberam que quando se soma o mesmo valor aos dois lados da igualdade ela permanece igual e quando o valor é diferente a igualdade não permanece. A equipe 6 e 7 escreveram sobre os resultados iguais e diferentes. Elas foram classificadas como não válidas, esperadas e não desejadas, pois já esperava-se este grau de dificuldade na primeira atividade e que as conjecturas não se relacionam com aquela esperada.

Aqui se seguem as orientações dos trabalhos de Pinheiro (2008) e de Rosa (2018) e das recomendações de Sá (2020) se faz algumas indagações:

Isto é uma igualdade? Os números que representam as letras A e B são iguais ou diferentes? eu posso dizer que $A = B$? os valores que foram somados a A

e B são iguais? O que acontece com a igualdade se somar-se o mesmo número em ambos os lados da igualdade?

Os discentes tiveram problemas para explicar a igualdade, alguns não reconheceram o sinal de igual e diferente, teve-se que corrigir isto, pois é essencial para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Quais eram os números que se estava utilizando? Quais foram os números que foram somados a igualdade? O que acontecia quando se somavam os valores, se a igualdade permanecia? A cada pergunta as conclusões e as palavras se assemelhavam com o esperado, a sistematização da conclusão turma foi a seguinte. *“Se uma igualdade é verdadeira, somando um mesmo número aos dois membros da mesma, ela permanecerá verdadeira”.*

A importância desta atividade, reside na familiaridade que o aluno precisa desenvolver com vários aspectos relevantes para matemática tais como: observar regularidades, emitir conclusões, escrever matematicamente, escrever sentenças matemáticas, entre outros.

O trabalho em matemática normalmente é realizado individualmente, então quando o trabalho é realizado em grupo, se faz necessário ajustes entre os alunos, que devem ouvir a opinião do outro.

4.4 QUARTA SESSÃO

A segunda atividade era análoga à primeira, mudava apenas a operação. Na primeira era adição, na segunda subtração, o tempo da organização diminuiu, pois os alunos organizavam suas mesinhas em 4 e escolhiam os membros dos grupos mais facilmente.

A segunda atividade também continha 13 situações com valores para a, b, c e d. Que os discentes precisavam identificar se eram iguais ou não, certamente que esta atividade foi mais tranquila, pois os estudantes já conheciam o procedimento, preencheram o quadro mais rapidamente, e utilizaram a conclusão da turma na atividade da soma, como modelo para escrever as conclusões na segunda atividade e levou-se apenas 34 minutos nesta atividade.

Conforme o quadro com as conclusões apresentadas pelas equipes, observou-se que apesar de ser mais rápida, emitir conclusões é um processo

contínuo, que precisa ser feito várias vezes para que o aluno possa emitir uma conclusão coesa e que contemple os aspectos da atividades.

Quadro 179 - Transcrição das conclusões da atividade subtração

GRUPOS	TRANSCRIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Grupo 1	Se uma igualdade é verdade, tirando um número dos lados, ela permanece igual.	Válida, prevista e não desejada
Grupo 2	Se é verdade a igualdade de “menos” o mesmo número dos dois lados da igualdade ela fica igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 3	Quando tem igualdade é só tirar um número igual, dos lados da igualdade que ela é igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 4	A igualdade fica igual se “soma” o mesmo valor dos lados da igualdade	Não válida, não prevista e não desejada
Grupo 5	Na igualdade agente tira número igual dos lados ai ela sempre fica igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 6	Dos lados da igualdade, tem que botar o mesmo valor para ficar igual.	Não válida, não prevista e não desejada.
Grupo 7	Quando é de menos a igualdade fica igual se “somar” o mesmo valor dos lados da igualdade	Não válida, não prevista e não desejada

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Os resultados relativos às conclusões estão sintetizados no quadro 30, que permite avaliar a evolução da turma, 43% das conclusões foram consideradas válidas, previstas e desejadas, pois se aproximavam muito daquela esperada.

Quadro 30 – Distribuição da validade das conclusões da atividade subtração.

Tipo de conclusão	Frequência	%
Válida, prevista e desejada	3	43
Válida, não prevista e não desejada	—	—
Válida, prevista e não desejada	1	14
Não válida, prevista e não desejada.	3	43
Não válida, não prevista e não desejada	—	—
Não formulada	—	—

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Um dos aspectos observados, foi a semântica das operações utilizada pelos estudantes, ainda que eles estejam trabalhando com a subtração a nomeiam como soma, as equipes que escreveram soma (grupo 4 e 7), ao realizarem os cálculos subtraíram, o que revela a necessidade de reforçar as palavras associadas à operação, isto foi um aspecto não previsto nas análises prévias.

Já se tem conclusões que apresentam similaridades com a esperada, novamente realizou-se o processo para institucionalizar a conclusão da turma, utilizamos a conclusão do grupo 1 (se uma igualdade é verdade, tirando um número dos lados, ela permanece igual) e se vai ajustando com perguntas, tais como: se era só um número que deveria ser tirado? se este número precisava ser igual dos dois lados da igualdade? qual é o nome da operação que nós estávamos realizando?

A conclusão acima foi considerada não válida, pois sem determinar que o número a ser subtraído de ambos deve ser o mesmo, do contrário a igualdade não se mantém.

A conclusão da turma foi a seguinte: Se uma igualdade é verdadeira, subtraindo um mesmo número aos dois lados da igualdade ela permanece verdadeira.

Em seguida, aplicaram-se as atividades de fixação, composta de 24 itens escritos em forma de sentença, considerando isto importante, porque o aluno não tem o hábito de transcrever da linguagem do problema para uma linguagem matemática.

Este hábito permite rever erros, observar regularidades e no caso dos problemas algébricos resolvê-los, na correção desta atividade, foi possível observar alguns comportamentos.

- Os grupos tendem a colocar as contas em um mesmo formato, um número embaixo do outro, provavelmente é a forma que são trabalhados em sala de aula.

- Os grupos não utilizam a operação inversa quando a questão é algébrica, eles vão testando valores na adição, tal como: $? + 16 = 30$.

Para encontrar o resultado, os discentes testam valores até encontrar um número que somado com 16 tenha como resultado 30 e as equipes observaram que algumas situações exigiam a adição, enquanto que em outras era necessário subtrair, alguns grupos descrevem que para achar o resultado era necessário encontrar o valor correto, que as equipes faziam testando valores.

Utilizamos pequenos valores, para facilitar os cálculos, pois o objetivo era trabalhar a igualdade na sua propriedade inversa, em conjunto com a escrita da sentença matemática. Nesta atividade, foram utilizados 30 minutos.

4.5 QUINTA SESSÃO

Trinta estudantes participaram desta sessão, que foram divididos em 7 grupos, o objetivo desta atividade era descobrir quando por meio da multiplicação uma

igualdade permanece verdadeira, o tempo utilizado nesta atividade foi de 33 minutos para a atividade que utilizou a multiplicação.

O objetivo fora conduzir os alunos a descobrirem quando por meio da multiplicação uma igualdade permanece verdadeira, para tanto a atividade era constituída por 13 situações com valores diferentes para a, b, c, d nas quais os discentes tinham que verificar se as igualdades $a = b$ e $a \times c = b \times d$ eram verdadeiras ou falsas.

A atividade de multiplicação ocorreu de maneira mais fluida, os alunos preencheram o quadro e perceberam a regularidade das atividades, e de maneira semelhante as atividades anteriores, emitiram conclusões.

Quadro 31 - Transcrição das conclusões da atividade multiplicação

GRUPOS	TRANSCRIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Grupo 1	Se a igualdade é verdadeira, quando faz vezes o mesmo número dos dois lados da igualdade ela fica igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 2	Se a igualdade é verdadeira só multiplica o valor dos dois lados da igualdade, que ela continua igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 3	Se é igual multiplica os dois lados pelo mesmo número.	Válida, prevista e desejada
Grupo 4	Igual fica igual, quando “soma” os mesmos números dos dois lados da igualdade.	Não válida, não prevista e não desejada
Grupo 5	Igual continua igual se o número de “vezes” for igual.	Válida, não prevista e não desejada
Grupo 6	Só multiplica os dois lados por um número igual.	Válida, prevista e desejada
Grupo 7	Multiplica os dois lados da igualdade, mas só se for pelo mesmo número para a igualdade fica verdade.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Quadro 32 – Distribuição da validade das conclusões da atividade de multiplicação

Tipo de conclusão	Frequência	%
Válida, prevista e desejada	5	72
Válida, não prevista e não desejada	—	—
Válida, prevista e não desejada	1	14
Não válida, prevista e não desejada.	—	—
Não válida, não prevista e não desejada	1	14
Não formulada	—	—

Fonte: pesquisa de campo 2019.

A quantidade de conclusões consideradas válidas aumentou muito, das sete equipes apenas uma equipe não teve a conclusão válida, pois trocou a palavra multiplicar por somar.

Este comportamento também foi descrito por Santos (2017, p. 216).

“Os discentes não apresentaram obstáculos no preenchimento do quadro e nem na observação das regularidades presentes no preenchimento do mesmo, logo conseguiram chegar a conclusão esperada de que quando uma igualdade é verdadeira, multiplicando-se os dois membros da igualdade por um mesmo número, ela permanecerá verdadeira, fazendo analogias as atividades 1 e 2 da etapa aditiva do experimento, ou seja, as experiências adquiridas na etapa anterior foram importantes para o desenvolvimento desta atividade

As palavras se afinam com o proposto, nas outras atividades já se abordou, a importância da conclusão ter as palavras igualdade, de nomear as operações que está se utilizando, do mesmo valor ser trabalhado de ambos os lados da igualdade. Na socialização das conclusões nesta atividade, só se precisou ajustar pequenas coisas. Ainda, tiveram-se problemas de nomear corretamente operação, isto invalidou a conclusão do grupo 4, que ainda que na observação do preenchimento do quadro, a equipe utiliza a multiplicação, no enunciado utiliza a palavra associada à adição.

A conclusão da turma foi a seguinte: Se a igualdade é verdadeira, ao multiplicarmos os dois lados da igualdade por um mesmo valor esta igualdade permanece verdadeira.

A atividade 5 teve duração de 30 minutos, com o mesmo molde da atividades anterior. Onde os discentes precisavam observar quando, por meio da divisão uma igualdade permanece verdadeira. Esta também continha 13 situações com valores diferentes para a, b, c, d nas quais os discentes tinham que verificar se as igualdades $a = b$ e $a : c = b : d$ eram verdadeiras ou falsas.

Esperava-se que não houvessem tantas dificuldades, os discentes não apresentaram dificuldades no desenvolvimento e realizaram as observações esperadas utilizando a atividades anterior como base. Entretanto na atividade da divisão teve-se um problema com as últimas questões, pois ao se dividir os valores numéricos de $a : c = b : c$, os valores eram iguais, mas eles não foram obtidos de uma igualdade inicial. Como por exemplo, a linha que possuía os seguintes valores: $a = 8$ $b = 16$ $c = 2$ $d = 4$, logo $a:c=b:d$, entretanto $a \neq b$ e $c \neq d$.

Quadro 33 - Transcrição das conclusões da atividade da divisão

GRUPOS	TRANSCRIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Grupo 1	Se a igualdade é igual, quando dividimos os dois lados da igualdade do mesmo valor a igualdade fica verdadeira.	Válida, prevista e desejada
Grupo 2	Se a igualdade é verdadeira, ao “multiplicamos” os dois lados da igualdade por um mesmo valor esta igualdade permanece verdadeira	Não válida, não prevista e não desejada
Grupo 3	Se dividir os dois lados da igualdade por um mesmo valor esta igualdade permanece verdadeira	Válida, prevista e desejada
Grupo 4	Agente dividi os lados da igualdade por um número ai permanece verdadeira.	Válida, prevista e desejada
Grupo 5	Quando é igual dividi os dois lados da igualdade por um mesmo número e a igualdade permanece verdadeira.	Válida, prevista e desejada
Grupo 6	Só é igual que pode dividir os dois lados, para ficar igual tem que ser o mesmo número.	Válida, prevista e desejada
Grupo 7	Se a igualdade é verdadeira, quando dividimos os dois lados da igualdade por um mesmo valor a igualdade permanece verdadeira.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Pesquisa de campo 2019

Quadro 34 – Distribuição da validade das conclusões da atividade da divisão

Tipo de conclusão	Frequência	%
Válida, prevista e desejada	6	85
Válida, não prevista e não desejada	—	—
Válida, prevista e não desejada	—	—
Não válida, prevista e não desejada.	—	—
Não válida, não prevista e não desejada	1	15
Não formulada	—	—

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Novamente, teve-se que se conversar sobre a igualdade, na hora da formalização do enunciado, perguntar se inicialmente os números eram iguais ou diferentes, se a igualdade pode existir com números diferentes, tivemos inclusive que falar novamente sobre os sinais de igual e diferente. As conclusões estão mais próximas do esperado, todavia ressaltou-se o trabalho nesta sessão com atividade de multiplicação, que obteve conclusão de maneira análoga a da divisão, o que facilitou a redação mais aprimorada desta.

O resultado da turma foi a seguinte: Se a igualdade é verdadeira, quando se divide os dois lados da igualdade por um mesmo valor a igualdade permanece verdadeira.

4.6 SEXTA SESSÃO

As questões para fixação foram escolhidas dentre aquelas que utilizam a multiplicação, como uma sentença direta, e questões algébricas que deveriam utilizar a divisão para encontrar o resultado esperado, pois estas seriam utilizadas na nossa atividade do PFC.

Os erros encontrados nos instrumentos novamente denotam uma certa fragilidade ao efetuar tanto multiplicação, quanto na divisão, as questões algébricas tiveram um quantitativo maior de erros, teve-se que trabalhar com os alunos, pedindo que lessem, perguntando onde estava a interrogação, exemplificando com valores reais e outros.

Esta foi a primeira vez que se trabalhou-se com tal nível de ensino, já realizamos outros trabalhos com o ensino por atividades no fundamental maior,

acredita-se que um dos maiores problemas que se encontra foi o fato que os alunos não têm o hábito de escrever a sentença matemática, além de ainda não trabalharem com as propriedades da igualdade.

Foi essencial a vivência destas atividades que não são diretamente do PFC, mas que servem como alicerce para a atividade de descoberta, o ensino por atividade tem esta característica, quando se iniciou o processo é sempre mais trabalhoso, parece mais difícil e incompreensível para o aluno e muito mais difícil para o professor, entretanto, quando o aluno começa a emitir conclusões corretas, a realizar os procedimentos corretos, o tempo maior utilizado nas primeiras sessões é compensado por resultados mais rápidos e eficientes nas atividades posteriores.

Já nesta fase, teve-se um vislumbre que as questões aritméticas e algébricas obtiveram resultados diferentes nos instrumentos, foi necessário reforçar a importância da escrita da sentença matemática.

Isso foi um obstáculo para os pesquisadores, sempre se trabalha com as séries finais do fundamental maior na prática docente, já se trabalhou com a igualdade, é mais fácil partir de um conhecimento prévio, em vários momentos teve-se que ensinar e explicar sobre a igualdade, os estudantes ainda não conhecem, bem como não utilizam a sentença matemática em seu cotidiano.

4.7 SÉTIMA SESSÃO.

A última sessão foi realizada em uma tarde muita chuvosa, tiveram muitos problemas com as chuvas durante a aplicação desta pesquisa, haviam muitas goteiras na sala, o que dificultou a distribuição dos estudantes, principalmente quando a turma está completa, a sala é pequena para comportar tantos alunos.

O prédio desta escola não é público, é alugado, então estes espaços não foram idealizado para funcionarem como uma escola, as salas são baixas, a área de convivência mais alta, isto causa alagamento nas salas quando chove muito, das salas para a secretaria e saída tem uma área toda aberta, o que obriga os alunos a passarem por este local na chuva, pois os espaços não são conectados entre si.

A escola estava em uma intensa preparação para a prova Brasil, por isso, a diretora pediu ajuda para trabalhar com os 5º anos, a SEDUC, forneceu um caderno de questões com 200 itens e simulados, onde os resultados das turmas apresentavam problemas em questões bem simples, como questões de transformação de

quilogramas para miligramas e cálculo de perímetro e área, então optava-se por auxiliar a turma que se estava trabalhando como uma forma de reciprocidade da pesquisa, bem como os outros quintos anos da escola com algumas aulas, entretanto este nível de ensino, nesta escola, tem uma gama de atividade muito vasta, participam: de um projeto de redação e leitura; do PROERD da polícia militar; tem aula de arte e educação física, que são ministradas por outros professores; a preparação para a Prova Brasil em língua portuguesa, logo nosso planejamento precisou considerar estes pontos.

Apesar de não estar no cronograma, estas aulas extras para a Prova Brasil, descobriram-se informações bem relevantes para pesquisa.

- Das provas utilizadas como simulado, enviadas como treinamento para a prova Brasil, nenhuma das questões eram de combinatória ou do PFC.

- Do material enviado para nortear a preparação dos alunos, que contava com 200 questões dos assuntos mais variados, apenas 3 utilizavam a combinatória, particularmente o PFC. Todas com apenas duas etapas e questões de roupas ou comida.

Isto corrobora os achados da pesquisa nas análises prévias, quando Barreto e Borba (2010) apresentam percentuais muito baixos nas questões de combinatória em livros, apesar deste caderno com questões não se tratarem de um livro, ainda é material oficial, pois foi fornecido pela Secretaria de Estado da Educação (SEDUC).

4.7.1 Atividade de redescoberta

Nesta atividade, com a participação da professora da turma que fez os registros fotográficos e pequenos vídeos gravados com ajuda de um celular, e de uma pessoa que serviu de controladora e observadora que foi quem preencheu as fichas de observação da aula (vide anexo F).

Os alunos foram divididos em seis equipes de 3 ou 4 estudantes, como a turma já conhecia o procedimento, distribuimos os kit para cada equipe, cada kit continha uma lista de questão, o material manipulável, folhas em branco e o quadro para preenchimento dos resultados.

Antes de iniciar atividade e se conversou sobre o que são etapas e quando são independentes.

O objetivo era que os estudantes descobrissem uma maneira de obter o resultado utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Abaixo estão os quadros preenchidos das equipes e as conclusões.

Quadro 35 – Respostas da equipe 01

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	SIM	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	SIM	2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode se arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	SIM	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	SIM	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?	SIM	3	2	3	5	30
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?	SIM	2	2	4		8
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?	SIM	2	4	2		36

Fonte: Pesquisa de campo 2019

A equipe 1 preencheu o quadro corretamente, exceto a questão 6, onde só reconheceram duas etapas, quando ela possuía três, o que gerou um resultado incorreto, seria um erro de interpretação.

A conclusão do Grupo 1 – Para achar o resultado multiplicamos as etapas se elas forem independentes. Considerava-se uma conclusão válida.

Quadro 36 - Respostas da equipe 02

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	SIM	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	SIM	2	4	3		12

3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	SIM	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	SIM	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?	SIM	3	2	3	5	30
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?	SIM	3	2	2	4	16
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém par Alter do Chão?	SIM	2	4	2		8

Fonte: Pesquisa de campo 2019

O grupo 2 preencheu o quadro de maneira impecável.

Conclusão do grupo 2 - Para achar o resultado basta multiplicar as etapas, é um enunciado bem próximo do almejado, todavia não deixou explícito que as etapas precisam ser independentes, consideramos uma conclusão válida

Quadro 37 - Respostas da equipe 03

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	SIM	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	SIM	2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	SIM	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	SIM	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?	SIM	5	2	3	5	30
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?	SIM	3	2	2	4	16
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém par Alter do Chão?	SIM	2	4	2		8

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

O grupo 3 acertou todas as questões, no entanto na questão 5, afirmou que existiam 5 etapas, um equívoco de menor importância, uma das etapas tinha o valor de 5 e era a questão 5, pode ser isso, pensou em 3 e acabou registrando 5.

Conclusão do grupo 3- Procedeu-se a multiplicação das etapas independentes, consideramos uma conclusão válida.

Quadro 38 - Respostas da equipe 04

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	SIM	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	SIM	2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	SIM	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	SIM	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?						
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?						
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?						

Fonte: Pesquisa de campo 2019

O grupo 4 não preencheu todo o quadro e também não escreveu uma conclusão válida, contudo as questões que preencheram estavam todas corretas, pode ter sido um problema de tempo, quando perguntamos se as equipes haviam terminado todos afirmaram positivamente, eles também foram ao quadro e

escreveram uma conclusão, “a gente multiplica as etapas” só que esta equipe não a registrou no quadro.

Quadro 39 - Respostas da equipe 05

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?	SIM	2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?	SIM	2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?	SIM	3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?	SIM	3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?	SIM	3	2	3	5	30
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?						
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?						

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

O grupo 5 também preencheu parcialmente o quadro deixando as duas últimas questões em branco, mas acertou todas as questões que resolveram.

Conclusão do grupo 5 – o resultado se faz com multiplicação dos números em laranjas. A conclusão do grupo 5 está parcialmente correta, entretanto o grupo foi induzido ao erro pelo quadro, onde os valores das etapas estavam destacados na cor laranja.

Quadro 40 - Respostas da equipe 06

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?		2	3	3		9
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?		2	4	3		12
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?		3	2	3	4	24
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?		3	3	2	3	18
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?		2		3	5	15
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?		3	2	2	4	16
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?		2	4	2		8

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

O grupo 6 preencheu todo o quadro corretamente exceto a questão 5, esta contava com 3 etapas mais o grupo só reconheceu 2 etapas.

Conclusão do grupo 6 – para encontrar resposta multiplica as etapas independentes. Esta é uma conclusão válida.

Algumas apontamentos sobre esta atividade:

Foi muito produtiva, com a utilização do material concreto, os alunos gostaram muito e realmente facilitou o entendimento das questões, os estudantes até pediram para ficar com material e todos da equipe queriam manipular. É muito interessante observar uma aula por atividades, a postura da turma muda totalmente, os alunos se ajudam, trocam ideias sobre as questões com os demais alunos, é uma

construção coletiva, diferente da postura individual, que cada um deve realizar sua tarefa e não ajudar ninguém, algumas fotos dos estudantes durante a atividade de descoberta. As conclusões das equipes estão no quadro abaixo:

QUADRO 41 – Conclusões da atividade do PFC

GRUPOS	TRANSCRIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Grupo 1	Para achar o resultado “multiplicamo” as etapas se elas forem independentes.	Válida, prevista e desejada
Grupo 2	Para o resultado basta multiplicar as etapas.	Válida, prevista e desejada
Grupo 3	Fez multiplicação das etapas independentes	Válida, prevista e desejada
Grupo 4	Agente multiplica as etapas.	Válida, prevista e desejada
Grupo 5	O resultado agente faz a multiplicação dos números em laranjas.	Válida, não prevista e não desejada
Grupo 6	Para encontrar a resposta agente multiplica as etapas independentes.	Válida, prevista e desejada

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Sobre as conclusões das equipes, foi muito peculiar o aparecimento da palavra multiplicação, nas construções das equipes, isto se atrela ao fato que nas atividades anteriores, trabalhou-se com atividades de multiplicação, particularmente com esta palavra, pois aparecia muito na fala dos discentes, vezes como sinônimo da operação, bem como muitos deles utilizam a palavra somar, quando estão multiplicando, o que mostra uma necessidade de um desenvolvimento do significado semântico das operações e das palavras que estão associadas a cada operação.

Na gravação de um vídeo, o estudante quando indagado sobre a primeira situação-problema, ele diz que basta somar os números 3 e 3 para achar 9, ele diz somar, mas realiza multiplicação, este estudante foi muito participativo e teve excelentes resultados. Os discentes não tem o hábito de escrever, nem de verbalizar o que fazem.

Aqui, é necessário refletir sobre a prática docente cotidiana, durante o anos ministrando aulas, muitas vezes recebeu-se este questionamento, é de mais, de menos ou de vezes? E muitas vezes respondemos irrefletidamente uma das alternativas, sem considerar o quanto a semântica correta é importante na matemática.

Esta atividade não segue o modelo que se utilizou para enunciar as conclusões anteriores, mas deve existir a presença da palavra multiplicação, que é o

ponto chave da conclusão, por isto que todas foram consideradas válidas, entretanto precisa estar associada à ideia de etapas independentes.

Quadro 42 – Distribuição da validade das conclusões da atividade do PFC

Tipo de conclusão	Frequência	%
Válida, prevista e desejada	4	67
Válida, não prevista e não desejada	1	16,5
Válida, prevista e não desejada	1	16,5
Não válida, prevista e não desejada.	—	—
Não válida, não prevista e não desejada	1	—
Não formulada	—	—

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

As conclusões dos grupos são uma boa forma de analisar a evolução da turma, se sintetizarem-se os quadros em um único só, pode-se observar a evolução da turma.

Quadro 43 .Síntese da distribuição da validade das atividades

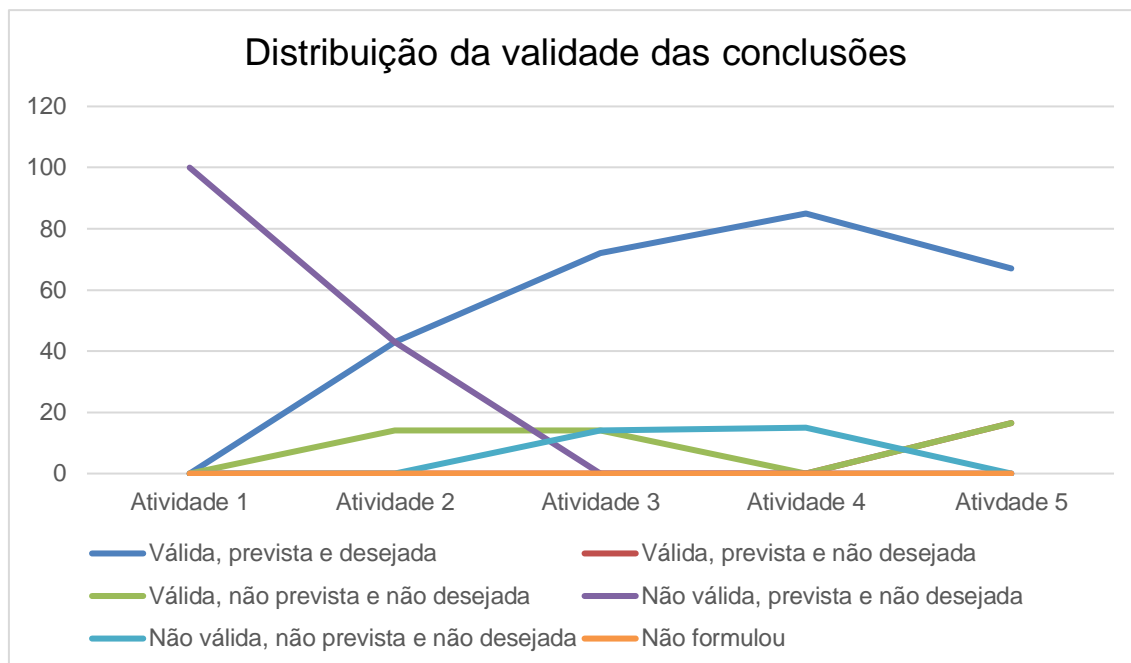
Validade da conclusão	Atividades Experimentais (%)				
	1	2	3	4	5
Válida, prevista e desejada	-	43	72	85	67
Válida, prevista e não desejada	--	--	--	--	16,5
Válida, não prevista e não desejada	--	14	14	--	16,5
Não válida, prevista e não desejada	100	43	--	--	--
Não válida, não prevista e não desejada	--	--	14	15	--
Não formulou	--	--	--	--	--

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Ao se iniciar a sequência obteve-se 100% de conclusões consideradas (não válidas, previstas e não desejadas), ou seja não se relacionavam com a conclusão esperada, previu-se nas análises prévias, contudo não se esperava tal proporção e não se deseja tal resultado. As conclusões vão se aprimorando e refletindo uma maturidade das equipes, além da capacidade de observar e organizar estas observações para enunciar conclusões.

Na última atividade todas as conclusões foram válidas, pois elas refletiam uma forma adequada de utilizar o PFC, dentro do contexto da atividade proposta, depois teve-se que ajustar alguns pontos, para que esta conclusão tivesse sentido para um leitor que não participou da atividade.

Gráfico 16 - Distribuição da validade das atividades



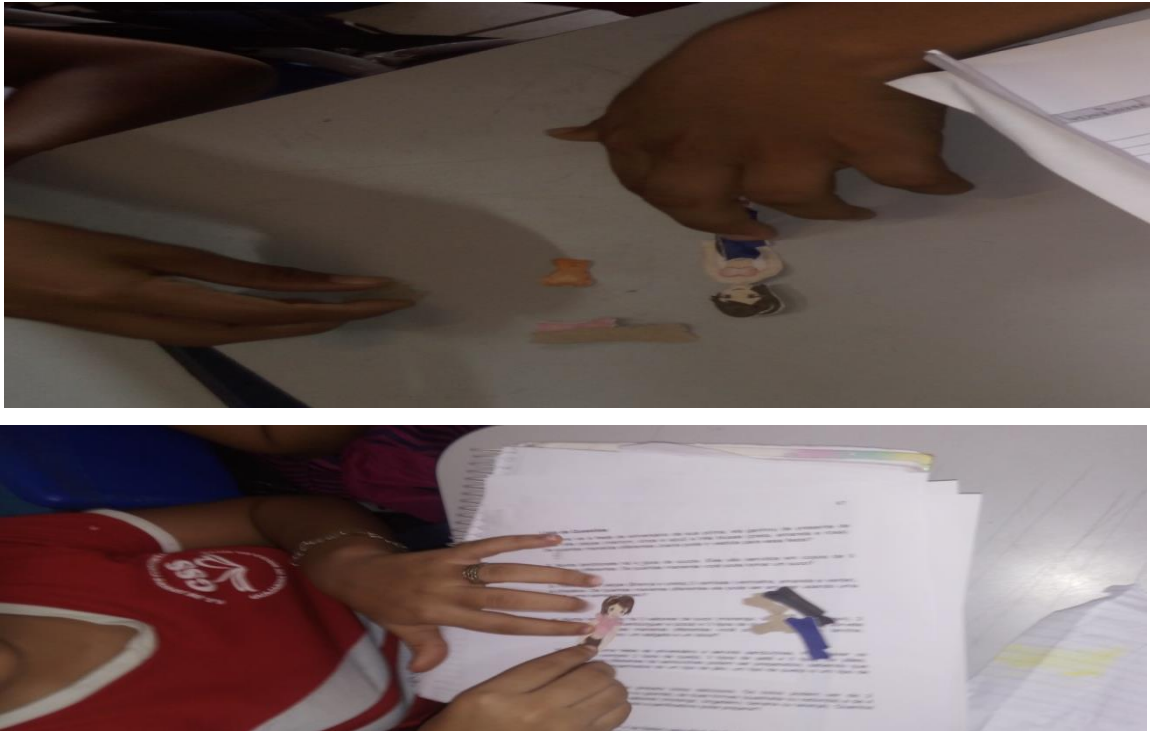
Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Do gráfico percebeu-se que as atividades não válidas, que foram totalidade na primeira atividade, tem uma queda brusca, até deixar de existir, enquanto que atividade válida, prevista e desejada é a maioria nas outras atividades.

A escolha desta atividade e o roteiro das atividades favorecem a percepção que a multiplicação é a operação necessária para resolver questões como as propostas nesta atividades. Por isso que a atividade de multiplicação foi muito importante, pois foi possível a abordagem destes aspectos, antes de se trabalhar as questões do Princípio Fundamental da Contagem.

Os sujeitos da pesquisa tinham uma agenda bem agitada, por isso nosso tempo foi reduzido, o que se acredita ser o motivo que a equipe 4 não escrever uma conclusão na atividade escrita, mas escrever no quadro quando solicitados.

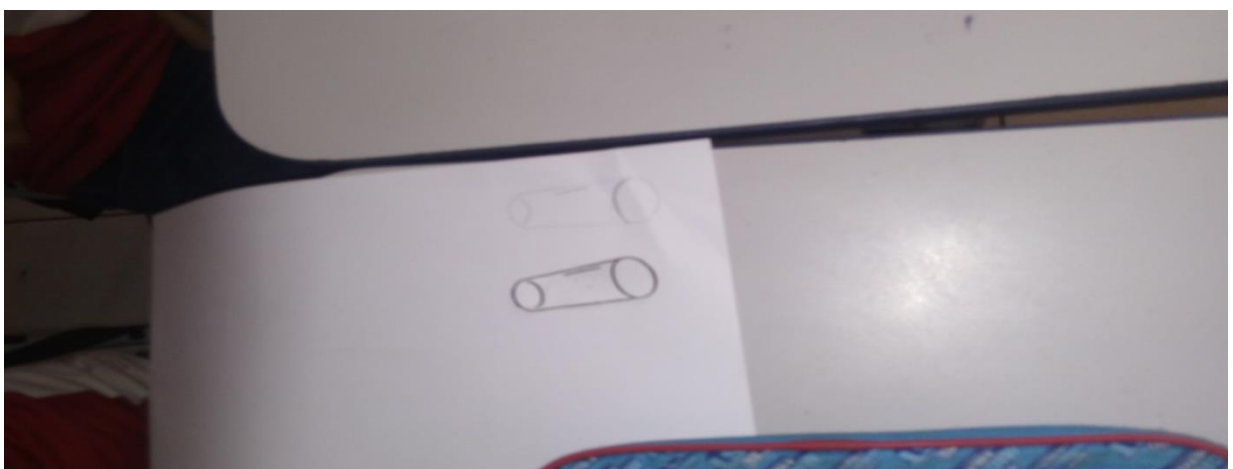
Imagem 2– Resolução da questão 01

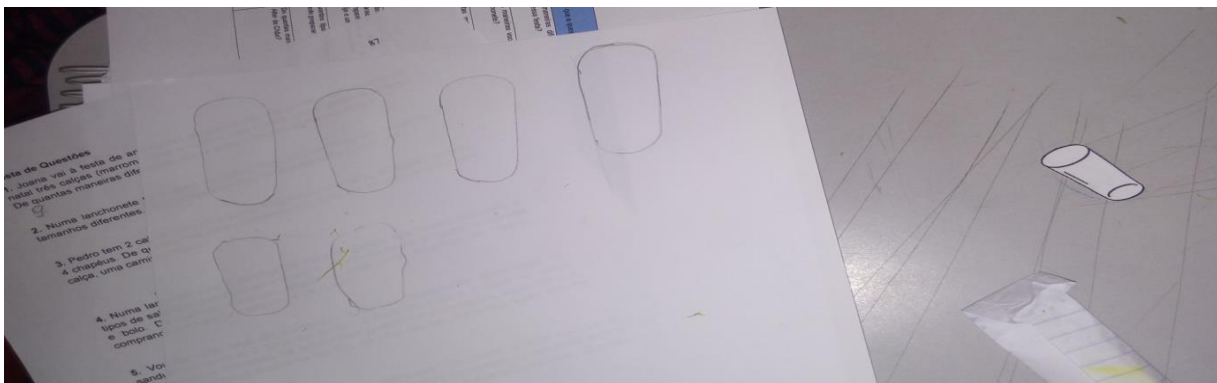


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

A primeira questão consistia em combinar 3 calças e 3 blusas, na primeira imagem o estudante fixou a calça e trocava as blusas, já em outra equipe, escolheu uma blusa e trocava as calças, emitindo rapidamente o resultado da multiplicação de 3×3 , o número 9.

Imagem 3 – Resolução da questão 02

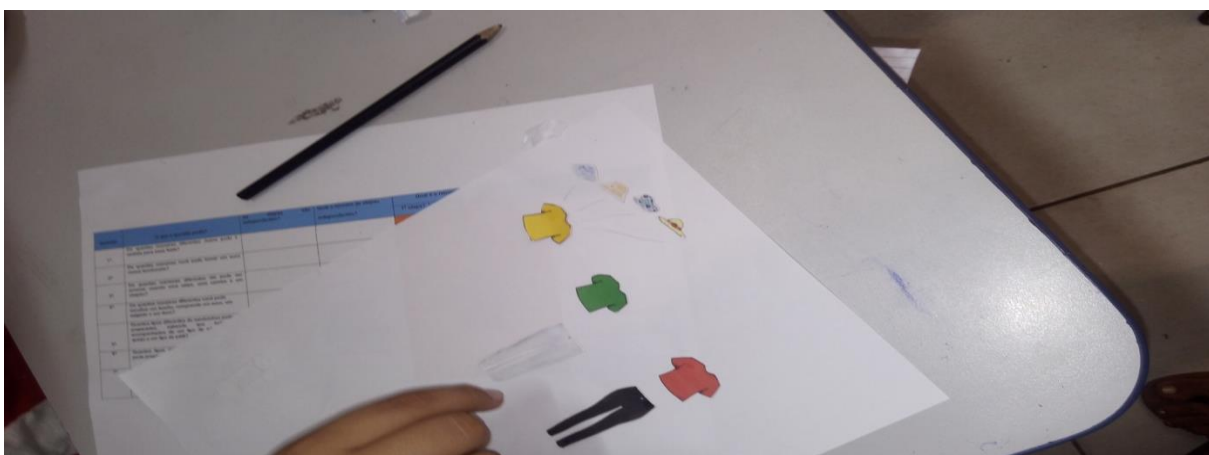




Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Nesta questão existiam três tamanhos de copos e quatro sabores de suco, o caminho escolhido foi desenhar e pintar os copos de tamanhos diferentes com cores que representavam as cores dos sucos, como demonstram as fotos tiradas durante a construção da solução.

Imagem 4 – Resolução da questão 03



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Esta questão tinha três etapas e o raciocínio foi análogo as questões anteriores, onde as equipes conseguiram transferir os procedimentos para as questões com três etapas.

Entre as etapas de uma aula por atividades o preenchimento do quadro é um dos momentos mais importantes, nesta fase ao completar as informações, que são solicitadas, as equipes começam a perceber as regularidades, as primeiras questões contavam com duas etapas e com valores numéricos pequenos, os grupos perceberam a relação multiplicativa entre as etapas e o resultado obtido, até porque eles já estavam familiarizados a procurar regularidades. Quando o grupo observava

que era a multiplicação das etapas, estes não manipulavam mais os materiais e sim multiplicavam os valores da situação problema.

- A socialização das conclusões é um momento muito importante, alguns grupos defendem seus pontos de vista, analisam as respostas dos outros grupos, revisam suas próprias conclusões, é um processo muito dinâmico.

- Na institucionalização, que segundo Sá (2018) é o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que os grupos emitiram. É um momento de negociações entre as várias conclusões, a conclusão da turma foi a seguinte: “Para encontramos o número total de possibilidades de um evento, basta multiplicarmos o número de possibilidades de cada etapa independente”. Deve-se ressaltar que se estava trabalhando com uma turma de 5º ano do fundamental, logo não se poderia utilizar uma definição cuja formalidade dificultasse o entendimento dos alunos.

4.7.2 ATIVIDADE DE APROFUNDAMENTO

A atividade de aprofundamento aplicada após a atividade de redescoberta, teve resultado satisfatório, entretanto dos 6 grupos, apenas 2 conseguiram resolver todas as questões o grupo 1 e o grupo 6. Os grupos conseguiram resolver as questões que utilizavam o PFC de forma direta, entretanto tiveram dificuldade com as questões algébricas, pois era necessária a ideia de reversibilidade entre as operações que se já tinha trabalhado, nas atividades de fixação da adição e de multiplicação. Sugere-se que os grupos escrevessem a sentença, utilizassem o ponto de interrogação para demarcar onde estava faltando um número.

Quadro 44 - Transcrição da atividade de fixação

QUESTÃO	Grupo 01	Grupo 02	Grupo 03	Grupo 04	Grupo 05	Grupo 06
De quantas maneiras você poderia entrar e sair desse parque?	Acertou 8	Acertou $2 \times 4 = 8$	Acertou $2 \times 4 = 8$	Acertou $2 \times 4 = 8$	Acertou 8	Acertou Listou as possibilidades
De quantas maneiras diferentes você pode escolher um suco para tomar?	Acertou 10	Acertou 10	Acertou 10	Acertou 10	Acertou 10	Listou as possibilidades

De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando uma camiseta e uma bermuda?	Acertou $11 \times 5 = 55$	Acertou $11 \times 5 = 55$	Acertou $11 \times 5 = 55$	Errou 11×5	Errou $11 \times 5 = 50$	Listou as possibilidades
De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$	Acertou $3 \times 2 \times 6 = 30$
Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?	Acertou $3 \times 3 \times 4 = 36$	Acertou $3 \times 3 \times 4 = 36$	Acertou $3 \times 3 \times 4 = 36$	Acertou $3 \times 3 \times 4 = 36$	Errou $3 \times 3 \times 4 = 24$	Acertou $3 \times 3 \times 4 = 36$
Quantas saias a Maria ganhou de presente?	Acertou $4 \times 9 = 36$	Acertou $4 \times 9 = 36$	Acertou $? \times 9 = 36$ $4 \times 9 = 36$	Branco	Branco	Acertou $? \times 9 = 36$ $4 \times 9 = 36$
Quantos tipos de sanduíche ele precisa preparar?	Acertou $8 \times ? = 48$ $8 \times 6 = 48$	Acertou $8 \times 6 = 48$	Acertou $48 / 8 = 6$	Branco	Branco	Acertou $8 \times 6 = 48$
então existem quantos caminhos da cidade B para a cidade C?	Acertou $? \times 4 = 24$	Branco	Branco	Branco	Branco	Acertou $? \times 4 = 24$

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Esta atividade demorou cerca de 45 minutos, pois se teve que ceder horário para a aplicação do projeto PROERD (Programa Educacional de resistência às drogas), é provável que esta interrupção tenha atrapalhado um pouco esta atividade, os grupos resolvem as questões em tempo diferente, enquanto alguns são mais rápidos outros são mais vagarosos.

Quando se retornou da atividade do PROERD, aplicou-se o pós-teste, cujos resultados foram comparados com aqueles obtidos no pré-teste, e estão descritos no capítulo seguinte, quando encerramos a atividade. Conversou-se com a turma,

agradecemos pelo tempo deles, pela boa vontade em nos receber, pelo esforço visível de participarem, em seguida se serviu um lanche para as crianças.

É sempre muito interessante as aulas no modelo do ensino por Atividades, é muito gratificante quando os alunos começam a interagir com o modelo, eles se descobrem como produtores de saberes, é uma nova postura, o professor traz situações que desequilibram a turma, para que eles consigam encontrar a regularidade e emitir uma conclusão. É um processo em que os discentes são ativos no seu processo de aprendizagem, após o pós-teste, escutaram-se falas como, isto é muito fácil, eu gostei muito.

Este nível de ensino é mais afetivo, eles demonstram um carinho e esperam receber carinho do professor, o respeito pelas respostas dos discentes, que o ensino por atividades proporciona é muito válido, não tem eu acertei e outro errou, todos vão socializar e devemos respeitar as diferenças.

As atividades certamente proporcionaram aos estudantes um avanço significativo na resolução de problemas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem, o formato das aulas agradou os alunos. O uso de novas tendências para ensinar matemática, como a resolução de problemas, o ensino por atividades, os jogos educativos, atrai atenção dos discentes, pois as aulas se tornaram mais dinâmicas. Entretanto tiveram-se alguns erros que se originaram na operação ou na leitura dos problemas, que são dois pontos que precisam ser melhorados.

5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Esta seção aborda a análise a posteriori e validação do experimento, ademais analisa os resultados dos instrumentos de coleta de dados utilizados (testes, questionário sócio educacional, ficha de observação de uma aula por atividades, diário de campo, gravações em vídeo das sessões de intervenção) para confronto das informações obtidas entre as análises a priori e a posteriori.

Para validar a pesquisa uma das escolhas foi o tratamento estatístico dos dados da experimentação, efetivado pela comparação percentual dos resultados dos testes. Esta análise considerou o percentual de acertos, erros e itens em branco por questão e por aluno. O coeficiente de correlação linear de Pearson também foi escolhido para verificar se existiu ou não uma relação positiva ou negativa que relacione o desempenho dos alunos nos testes e os aspectos sociais e educacionais, a fim de verificar se a afinidade com matemática influencia diretamente nos resultados.

Já abordagem qualitativa observou os tipos de erros que ocorreram, as possíveis causas destes erros, se ocupou também de observar o ambiente obtido em uma aula por atividades, o engajamento dos alunos entre outros aspectos que surgiram durante este estudo.

5.1 ANÁLISE DOS TESTES DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A priori se mostrará a análise dos dados do pré-teste e pós-teste, separadas nas categorias: Acerto, erro e em branco.

Acerto: Considerado assim quando o discente apresentou uma resolução correta para a questão.

Erro: Assim considerado quando o aluno apresentou uma resolução, todavia com o resultado incorreto, decorrente do uso da operação inadequada e/ou equívocos no procedimento do Princípio Fundamental da Contagem.

Em Branco: Quando não houve resolução da questão.

Quadro 45 – Comparação do pré-teste e pós-teste

	ACERTO		ERRO		EM BRANCO	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
E1	10%	90%	90%	10%	0%	0%
E2	0%	90%	10%	10%	90%	0%
E3	10%	100%	90%	0%	0%	0%
E4	10%	80%	90%	20%	0%	0%
E5	20%	70%	80%	10%	0%	20%
E6	20%	60%	80%	40%	0%	0%
E7	0%	100%	90%	0%	10%	0%
E8	20%	60%	80%	40%	0%	0%
E9	10%	70%	90%	30%	0%	0%
E10	10%	50%	90%	40%	0%	10%
E11	10%	60%	90%	40%	0%	0%
E12	20%	80%	80%	0%	0%	20%
E13	10%	70%	90%	30%	0%	0%
E14	10%	100%	90%	0%	0%	0%
E15	10%	50%	80%	50%	10%	0%
E16	10%	100%	60%	0%	30%	0%
E17	10%	80%	90%	20%	0%	0%
E18	20%	100%	80%	0%	0%	0%
E19	30%	100%	70%	0%	0%	0%
E20	20%	40%	80%	60%	0%	0%
E21	0%	90%	20%	10%	80%	0%
E22	10%	70%	70%	20%	20%	10%

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Face o exposto no quadro acima se pode afirmar que houve uma significativa melhora no desempenho de todos os alunos que participaram desta sequência didática. No pré-teste, o melhor desempenho obteve 3 acertos ou 30% em dados percentuais, enquanto no pós-teste o estudante que teve 4 acertos foi o pior desempenho.

O teste fora composto de 10 questões, aplicado em dois momentos distintos, para a mesma turma do 5º ano, antes da sequência didática, no pré-teste e depois da sequência didática no pós-teste.

Os resultados são muitos discrepantes, em pesquisas anteriores com questões do Campo multiplicativo, os resultados não são tão distantes, por isso é necessário elencar alguns fatores.

- Os trabalhos que abordavam o campo multiplicativo, trabalhavam com todas as classes dele, e como já dito nas análises prévias existem questões que são mais fácil de resolver, não oferecem obstáculos a sua compreensão, e que estas dificuldades devem ser trabalhadas à medida que surgem, então as questões que são conhecidas pelos estudantes, somente são adaptadas e são resolvidas com facilidade, entretanto este não é o caso da combinatória, que é considerada de resolução mais difícil, por envolver um raciocínio mais complexo.

- O Princípio Fundamental da Contagem não é trabalhado em sala de aula nas séries iniciais, em sua maioria, por isso o pré-teste obteve resultados tão baixos, os alunos não sabiam o que fazer na questão, a maioria somou os valores que apareciam, eles não reconheceram estas questões como pertencente ao Campo multiplicativo, comportamento descrito no trabalho de Santos (2017) a questão com combinatória foi a que teve o percentual mais baixo, o trabalho de Magina, Merlini e Santos (2010), também apontam apenas 28% de acerto na questão de combinatória, as autoras ainda destacam que alguns alunos até listam possibilidade, entretanto não conseguem resumir em uma só operação, ou como Borba (2010) aponta os alunos não conseguem esgotar todas as possibilidades.

As questões do teste foram adaptadas do trabalho de Rosas (2018), que é uma pesquisa com alunos do ensino médio, que já estão em outro estágio cognitivo, bem mais avançado que os discentes do 5º ano.

Precipuamente, quer-se ressaltar a existência de acertos no pré-teste, principalmente aqueles que guardam traços do raciocínio combinatório, observamos isto, quando os discentes tentam combinar as roupas utilizando uma representação pictográfica, ou escrevem as possibilidades no lançamento de uma moeda, pois estas ações fazem parte do cotidiano dos discentes o que facilita a conexão.

A quantidade de erros estão concentradas nas questões com três etapas e nas questões algébricas, dois motivos podem ser discutidos. Os problemas usam a operação multiplicação, são aqueles em que a operação utilizada não é determinada

diretamente por seu sentido semântico. Isto já é um obstáculo para todas as questões do teste, as três questões algébricas acrescentam um grau maior de complexidade, é natural que estas questões não tivessem acertos.

Alguns resultados desta abordagem do desempenho individual chamaram atenção, entre eles:

O E3 acertou apenas a questão do lançamento dos dados no pré-teste, e deixou o resto em branco, ela afirmou não gostar de matemática, entretanto no pós-teste ela acertou todas as questões, isto pode revelar que a fala não gosto, podia ser substituída por não entendo, ou que a estrutura das aulas por atividades conseguiu alcançá-la.

O E7 não acertou nenhuma questão no pré-teste, mas dizia que gostava muito de matemática, possivelmente ele nunca havia resolvido questões deste tipo, assim que aprendeu uma forma prática, ele acertou todas as questões, esta miscelânea de instrumento nos permite uma análise mais ampla sobre estas crianças, pelo resultado inicial, nós poderíamos considerá-lo alguém sem afinidade com a disciplina.

O E19, acertou 3 questões no pré-teste, aquelas que tinham duas etapas e errou as outras porque tentou somar os valores, no pós-teste também acertou todas, é uma aluno que gosta muito da disciplina, ele utilizou esquemas eficazes.

Já o E16 também só acertou a questão do lançamento dos dados, deixou 3 questões em branco e errou 6 questões, já no pós-teste acertou todas, ele afirmou gostar apenas um pouco de matemática.

O E20 teve o menor desempenho do pós-teste, ele conseguiu resolver as questões com duas etapas que eram aritméticas, errou as 3 questões com duas etapas que eram algébricas, acertou duas questões com 3 etapas e errou duas.

Este estudante refletiu bem as dificuldades do teste, resolveu as questões com duas etapas, pois tem menos números e etapas semânticas para que o aluno compreenda. As questões com 3 etapas, ele resolveu duas corretamente, as questões em que errou ele listou apenas duas etapas e multiplicou, por isso errou, as questões algébricas ele utilizou a multiplicação direta dos valores, o que ocasionou o erro

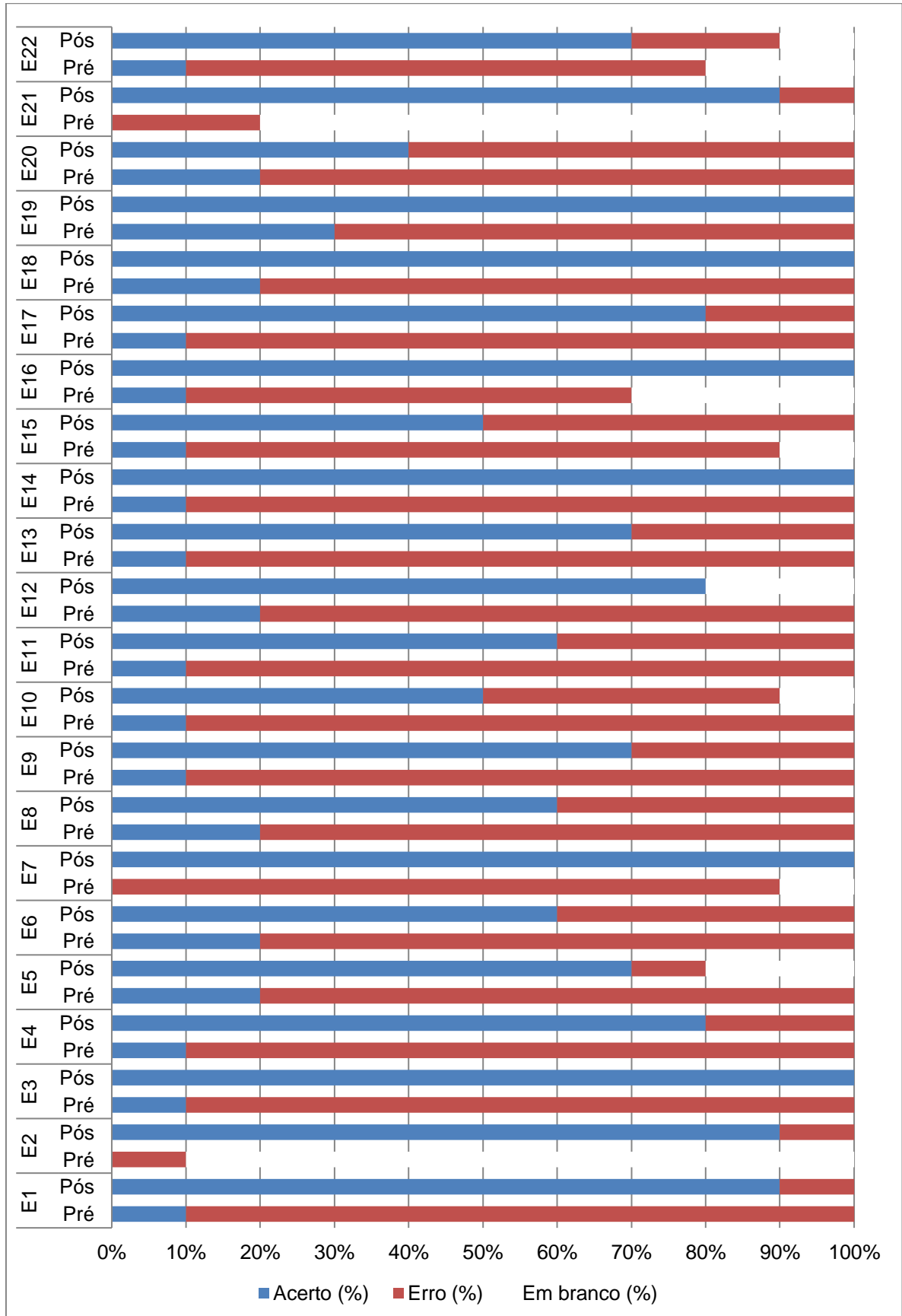
Este estudante não compareceu em todos os encontros, participou apenas do pré-teste, da aula por atividades e do pós-teste, isto deixa claro a importância das aulas anteriores que perfazem a sequência, para familiarizar os discentes com a

escrita de conclusões, com a observação de regularidades, com a busca de soluções por caminhos não usuais, entre outros.

O gráfico abaixo deixa evidente a relação entre os testes no desempenho dos discentes, no pré-teste os estudantes concentraram suas respostas nos erros, representado pela barra vermelha e nas questões deixadas em branco, representada pela barra branca, enquanto que houve um valor baixo de acertos representados pela barra azul.

Já no pós-teste os valores do gráfico são invertidos, a barra azul aparece em todos os estudantes com maior relevância, revelando a predominância de acertos, as questões deixadas em branco aparecem em apenas dois discentes, o que denota um comprometimento em tentar realizar os cálculos, quanto aos erros houve um queda significativa entre os resultados.

Gráfico 167: Comparativo do desempenho dos estudantes no pré-teste e pós-teste.



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Pode-se observar que o percentual médio de acertos por estudantes no pré-teste foi de 12,27%, o percentual médio de questões incorretas foi 76,81% e cerca de 10,90% de questões deixadas em branco. Enquanto no pós-teste, tiveram-se os percentuais de erros e acertos invertidos, o percentual médio de acertos foi 77,72%, o percentual médio de erros foi 19,54% e apenas 2,72% de questões que ficaram em branco.

Além de comparar os erros, acertos e questões deixadas em branco pelos discentes, é essencial que esta análise se ocupe também das questões, isto demonstra que claramente dentro de um tópico existem questões que são mais difíceis que as outras.

Quadro 46- comparação de acertos e erros e brancos por questão

Identificação	Acerto por questão							
	Tipo de questão	Nº de etapas	ACERTO		ERRO		EM BRANCO	
			PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS	PRÉ	PÓS
Q01	Aritmética	2	31,81%	90,90%	68,19%	9,10%	0%	0%
Q02	Aritmética	3	0%	90,90%	90,90%	13,64%	9,10%	0%
Q03	Aritmética	2	4,55%	90,90%	90,90%	9,10%	4,55%	0%
Q04	Aritmética	3	0%	86,36%	90,90%	13,64%	9,10%	0%
Q05	Aritmética	2	4,55%	72,72%	72,72%	22,73%	22,73%	4,55%
Q06	Aritmética	2	81,81%	100%	4,55%	0%	13,64%	0%
Q07	Aritmética	3	0%	77,27%	90,90%	22,73%	9,10%	0%
Q08	Algébrica	2	0%	63,63%	86,36%	31,82%	13,64%	4,55%
Q09	Algébrica	2	0%	54,54%	81,82%	36,36%	18,18%	9,10%
Q10	Algébrica	2	0%	50%	90,90%	40,9%	9,10%	9,10%

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

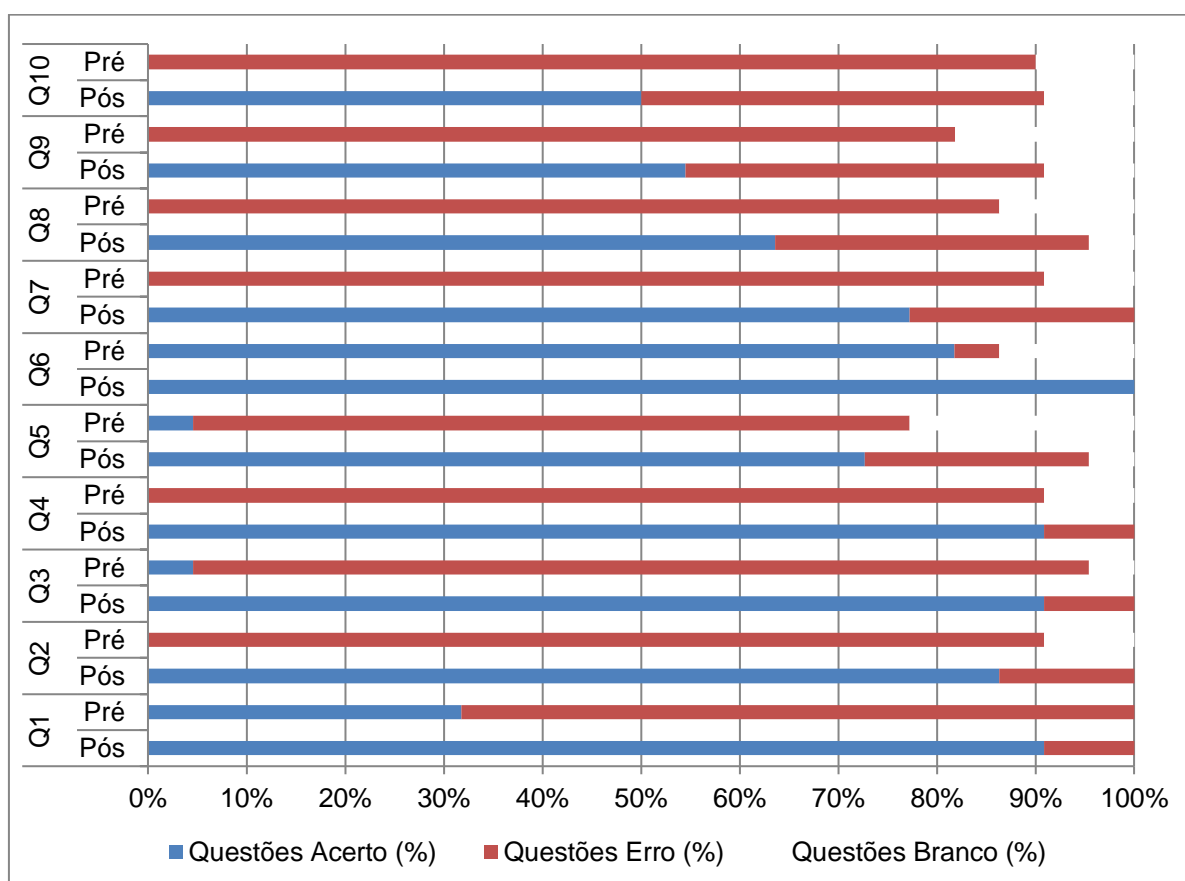
As questões podem facilmente ser classificadas pelos acertos no pré-teste e pós-teste, no pré-teste, só ocorreram acertos nas questões aritméticas com duas etapas, nas questões aritméticas com 3 etapas e algébricas não houveram acertos.

No pós-teste teve-se um resultado excelente nas questões aritméticas com duas etapas, exceto na questão 05 que teve um rendimento bem aquém do esperado, esta questão não tinha valores numéricos explícitos, as informações se apoiavam nas

letras que representavam os caminhos e no desenho, estes fatos podem ter ocasionado dificuldades para o estudante.

Enquanto que as questões algébricas tiveram um desempenho mais regular, houve um aumento significativo nos acertos, todavia tem-se um índice de acertos menor nas últimas questões, além da questão algébrica ser de resolução mais difícil, o tempo para o encerramento da atividade poderia ser maior, entretanto estávamos próximos do horário de saída, é possível que se tivesse um resultado melhor se houvesse mais tempo.

Gráfico 18: Acerto por questão



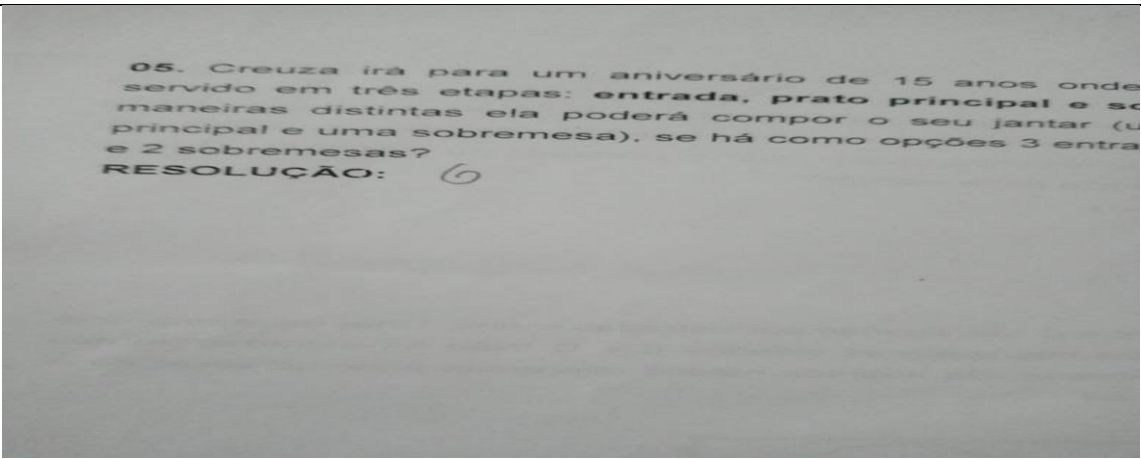
Fonte: Pesquisa de campo 2019.

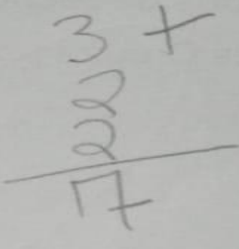
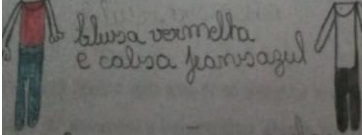
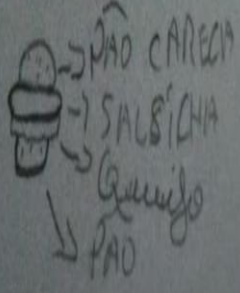
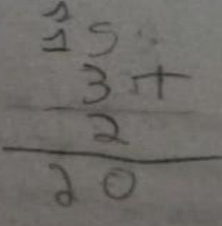
As questões com índices mais baixos de acertos foram as algébricas. Os alunos que conseguiram resolver foi porque escreveram a sentença, em seguida eles fazem um método de testar os valores até achar um compatível, ou dividiram. Os alunos que erraram é porque multiplicaram os dois valores, incorrendo em uma escolha errada de operação.

Isto corrobora com os achados em diversas pesquisas que utilizam o ensino por atividades, segundo Sá (2005) as questões algébricas são mais difíceis porque nesta categoria de problema, é oposta aos problemas usuais, denominados pelo autor como do primeiro tipo que tem a estrutura no caso do PFC $A \times B = ?$, ou $A \times B \times C = ?$, então a operação é realizada de forma linear, enquanto que os problemas algébricos tem a seguinte configuração no nosso trabalho $A \times ? = C$.

A questão 6 foi aquela que teve o melhor desempenho no pré-teste e no pós-teste, tinha valores pequenos, era uma multiplicação de $2 \times 2 = 4$, aborda uma ação que se insere na rotina dos alunos, o lançamento de duas moedas e o enunciado era claro e curto. No quadro abaixo serão apresentados os erros encontrados no pré-teste.

Quadro 47 -Tipos de erros dos estudantes no pré-teste.

Tipos de erros	
E1	Escolher o número equivocado de etapas.
	 <p>05. Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde servido em três etapas: entrada, prato principal e sobremesa. Ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas e 2 sobremesas? RESOLUÇÃO: 6</p>
E2	Escolher a operação inadequada.

	<p>um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será entrada, prato principal e sobremesa. De quantas poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato esa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais</p> 
E3	Não esgotar o número de possibilidades.
	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="331 835 853 1355"> <p>Ana Clara</p> <p>QUESTÕES</p> <p>01. Um estudante possui 2 blusas diferentes da escola (Branca e vermelha) e 2 calças distintas (Jeans azul e Preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?</p> <p>RESOLUÇÃO: Ela pode usar assim.</p>  <p>blusa vermelha e calça jeans azul</p> <p>blusa branca e calça preta</p> <p>Existem dois modos</p> <p>Para montar seu sanduíche na cantina da escola, Maria precisa escolher</p> </div> <div data-bbox="869 835 1489 1355"> <p>RESOLUÇÃO De 4 formas</p>  </div> </div>
E4	Utilizar valores distratores para realizar operações.
	<p>um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será entrada, prato principal e sobremesa. De quantas poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato esa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais</p> 

Os estudantes no pré-teste concentraram seus erros no E2, isto é, escolheram a operação inadequada, no pré-teste eles escolhiam a adição, não existia um assunto que tenha sido previamente trabalhado por nós, então as crianças escolhiam a operação que achavam adequada.

Isto não surgiu na análise prévia, esperava-se outros obstáculos, mas foi possível averiguar que a maioria dos discentes não reconheceu estas questões como pertencentes ao campo multiplicativo.

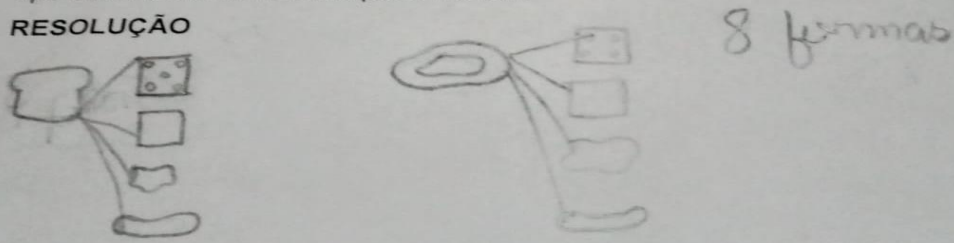
Quando os estudantes utilizavam a representação apoiada no desenho ou na árvore de possibilidades, eles não conseguiam esgotar o total de possibilidades possíveis. Em algumas questões, apresentavam dois tipos de erros, escolher a operação incorreta além de utilizar valores numéricos que não faziam parte das etapas.

No pós-teste os estudantes que utilizaram a árvore de possibilidades acertaram as questões propostas tais como os exemplos abaixo, por isso não foi mais elencado como categoria de erros, isto também foi apontado na revisão de estudo, que a árvore de possibilidades é uma ferramenta muito eficaz, na resolução de problemas combinatórios, especialmente nesta etapa do ensino, que as crianças ainda não desenvolveram totalmente o raciocínio hipotético-dedutivo .

Imagem 5 – Árvores de possibilidades no pós-teste

02. Para montar seu sanduíche na cantina da escola, Maria precisa escolher somente um pão e somente um recheio, entre dois tipos de pães (careca ou de forma) e quatro tipos de recheios (queijo, carne, presunto ou salsicha). Quanto tipo de sanduíches Creuza pode montar?

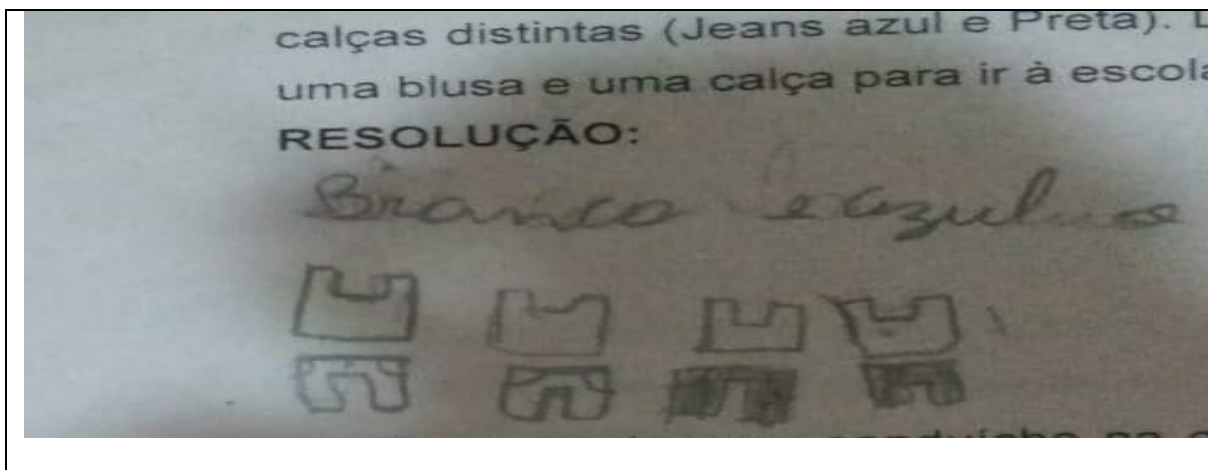
RESOLUÇÃO



04. No lançamento de duas moedas idênticas, quantos são os resultados possíveis? Lembre-se que os resultados em uma moeda podem ser: Cara (C) ou Coroa (K).

RESOLUÇÃO:

Cará x Coroa, Cará x Cará, Coroa x Cará e Coroa x Coroa

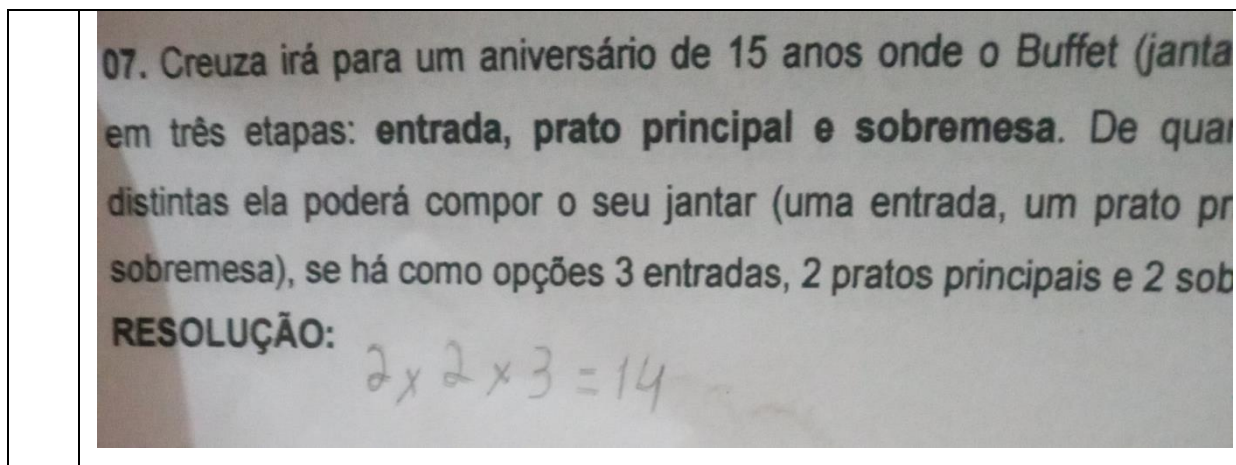


Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Sobre os erros encontrados no pós-teste, alguns tipos encontrados no pré-teste ainda ocorreram e outros tipos apareceram somente no pós-teste.

Quadro 48-Tipos de erros dos estudantes no pós-teste

Tipos de erros	
E1	Escolher o número equivocado de etapas.
E2	Escolher a operação inadequada.
E3	Erro operacionais.



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

No pós-teste na Q1 os poucos erros sugerem uma escolha equivocada de etapas que teve como resultado oito, obtido pelo acréscimo de mais uma etapa. Teve-se comportamento inverso nas questões com 3 etapas (Q2, Q4, e Q7) onde os erros em sua maioria, decorreram do reconhecimento e multiplicação de apenas 2 etapas, ao invés das 3 etapas que os enunciados propunham. Também, apareceram erros operacionais, que são aqueles que o estudante interpreta, escreve a sentença, mas erra o cálculo.

A questão Q5, teve um rendimento razoável no pós-teste, menor que as do seu tipo (aritmética de 2 etapas), acreditamos que isto deve-se ao seu enunciado, a ausência de valores numéricos, que foram representados por letras.

Nas questões algébricas ainda existiu questões deixadas em branco, uma ocorrência maior de erros dos três tipos, escolher o número equivocado de etapas (apresentar como resposta uma das etapas), escolher a operação inadequada (multiplicar as etapas, ao invés de utilizar a reversibilidade da operação) e erro relacional (erros ao dividir os valores numéricos das etapas).

O fato que merece destaque é o alto índice de acertos nas questões com 3 etapas aritméticas, em geral, no pré-teste não ocorreu nenhum acerto e no pós-teste, nós tivemos incidência de até 100% de acertos, nas questões aritméticas e mesmo nas questões algébricas tivemos um aumento muito expressivo nos resultados, isto implica afirmar que a sequência teve um efeito positivo na turma.

5.2 ANÁLISE DAS OBSERVAÇÕES DAS EQUIPES

As observações que foram registradas nas atividades, foram classificadas na experimentação, com seguinte categorização: válida, prevista e desejada; válida, não prevista e não desejada; válida, prevista e não desejada; não válida, prevista e não desejada; não válida, não prevista e não desejada; não formulada.

Quadro 49 – Validade das conclusões na análise a posteriori

Validade da conclusão	Atividades Experimentais (%)				
	1	2	3	4	5
Válida, prevista e desejada	--	43%	72%	85%	67%
Válida, prevista e não desejada	--	--	--	--	16,5%
Válida, não prevista e não desejada	--	14%	14%	--	16,5%
Não válida, prevista e não desejada	100%	43%	--	--	--
Não válida, não prevista e não desejada	--	--	14%	15%	--
Não formulou	--	--	--	--	--

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Face os dados da tabela, foi possível verificar a evolução dos grupos, quanto à redação das conclusões, à compreensão das propriedades da igualdade e em cada atividade a diminuição das conclusões consideradas não válidas, enquanto que as conjecturas tidas como válidas, tiveram um crescimento muito grande. Na primeira atividade não houve ocorrências de conclusões válidas, enquanto que na última atividade tivemos a ocorrência de 100% de conclusões tidas como válidas.

A linha da tabela que representa as conclusões consideradas como válidas, esperada e desejada, é onde se concentrou a incidência de respostas, servindo como validação para a sequência de ensino utilizada neste trabalho.

O processo do ensino por atividades é um processo contínuo que vai se aperfeiçoando com a prática, isto corrobora com o que a BNCC propõem como competências matemáticas para ensino fundamental, mais especificamente a competência número 2, que assegura a necessidade de “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar

no mundo”. O processo de ensino deve ser dinâmico que permita que o estudante desenvolva esta e outras competências.

Aplicou-se um total de 8 atividades, o que difere de outros trabalhos analisados e de outros trabalhos já realizados, que tem um volume grande de atividades, que englobam vários aspectos de um campo conceitual, como o da combinatória, que pertence ao Campo Conceitual Multiplicativo, e dentro da combinatória recortam-se as questões que envolvem o PFC, por isto um número reduzido de atividades. Todavia antes se abordaram o PFC, foi necessário trabalhar com a igualdade.

O quadro desta seção foi elaborado considerando as atividades que utilizavam a redescoberta, e classificaram-se as conclusões que as equipes produziram nestas atividades.

Na atividade 7 que tratava do PFC, seis grupos a realizaram, obteve-se 5 equipes com uma conclusões consideradas como válidas, previstas e desejadas, as conclusões foram muito parecidas com a que se esperou, ressaltaram a multiplicação das etapas, e que estas deveriam ser independentes, uma equipe no entanto enunciou que para encontrar o resultado bastava multiplicar os números em laranja, está conclusão é válida, pois as etapas independentes realmente estavam ressaltadas em laranja, se validou pois considerou-se que a tabela colorida induziu tal consideração.

5.3 CONFRONTO ENTRE A ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DAS ATIVIDADES.

O quadro abaixo apresenta o confronto entre as análise a priori e a análise a posteriori, para que o experimento possa ser validado.

Quadro 50 – Confronto da análise a priori e análise a posteriori (continua)

ATIVIDADES	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
------------	------------------	----------------------	-----------

1	<p>Como esta é a primeira atividade, é provável que os discentes tenham mais dificuldade para enunciar o que descobrirem, e que estes enunciados sejam confusos ou incompletos.</p> <p>Considerando a forma que aula é conduzida, a quebra da lógica costumeira: assunto seguida de exemplo e atividades, é admissível que nenhum grupo consiga descobrir quando por meio da adição uma igualdade permanece verdadeira.</p>	<p>Esta atividade era composta de 13 situações com valores para a, b, c, d. De tal forma que os estudantes precisavam averiguar se as igualdades $a = b$ e $a + c = b + d$ eram verdadeiras ou falsas. Eles apresentaram muita dificuldade, o que já era esperado, em decorrência de ser a primeira atividade deste formato, com a exigência de procurar regularidades, observar, registrar, discutir com a equipe</p> <p>Temos que ressaltar que estes alunos ainda não tiveram contato com questões onde as letras tem um valor numérico, após este esclarecimento os grupos preencheram os quadros com facilidade, o problema ocorreu na hora de enunciar conclusões, isto causou um desequilíbrio na turma, pedimos que eles escrevessem o que eles tinham observado</p>	POSITIVA
2	<p>Espera-se que as dificuldades sejam menores, pois esta atividade se assemelha a primeira, logo é natural que os estudantes cheguem à conclusão: quando uma igualdade é verdadeira, subtraindo-se um mesmo número aos dois membros da mesma, ela permanecerá verdadeira, já que é um raciocínio análogo a atividade 1.</p>	<p>Nesta segunda atividade esperávamos que os discentes utilizassem a primeira atividade como modelo e não apresentassem dificuldades para redigir as conclusões, entretanto ainda que as conclusões se aproximassem do esperado, ainda tivemos que trabalhar alguns aspectos, tais como a semântica das operações, palavras que representam operações, não esperávamos tantos erros, mas os erros refletiam conclusões incompletas, que poderiam ser consideradas parcialmente válidas e problemas para nomear a operação utilizada. Nós obtivemos 4 grupos com questões inválidas e 3 grupos com questões válidas.</p>	POSITIVA

3	<p>O comportamento esperado dos discentes é que apresentem uma quantidade menor de dúvidas, por ser tratar de uma atividade de aprofundamento, a forma que as questões estão dispostas, também tem familiaridade com as questões costumeiras em aula, entretanto como existem questões algébricas isso pode gerar alguns obstáculos na resolução</p>	<p>As questões aritméticas obtiveram um resultado excelente, os valores eram pequenos, tivemos problemas nas questões algébricas, os estudantes apresentaram dificuldades com as questões do tipo algébrica, foi a primeira vez que estávamos realizando cálculos utilizando as propriedades, entretanto pedimos que eles fizessem um paralelo com o que estávamos estudando, entretanto, a maioria utilizou o sistema de tentativas para encontrar o valor.</p>	POSITIVA
4	<p>Esta é a quarta atividade, espera-se que os estudantes tenham mais facilidade para enunciar quando por meio da multiplicação uma igualdade permanece verdadeira, entretanto existe sempre as dificuldades inerentes da operação multiplicação ou do uso da operação que provavelmente alguns grupos podem apresentar.</p>	<p>A atividade de multiplicação ocorreu de maneira mais fluida, os alunos preencheram o quadro e perceberam a regularidade das atividades, e de maneira semelhante as atividades anteriores, escreveram conclusões que se aproximam do esperado. Das sete equipes apenas uma não emitiu uma conclusão válida, por escrever somar ao invés de multiplicar.</p>	POSITIVA
5	<p>O comportamento esperado é que os estudantes não apresentem dificuldades em observar que dividindo os dois membros de uma igualdade por um mesmo número diferente de zero, a igualdade permanecerá verdadeira.</p>	<p>Na atividade de divisão houveram algumas dúvidas quanto algumas situações que tinham resultados similares, mas não partiam de uma igualdade, com esta exceção a atividade ocorreu bem, foi mais rápida, as conclusões se assemelham muito aquela esperada, deixando evidente que o trabalho com atividades experimentais deve ser contínuo, para que estes discentes sejam capazes de emitir conclusões nascidas da observação.</p>	POSITIVA

6	<p>Nesta atividade espera-se que os discentes já consigam resolver facilmente estas atividades, que foi escolhida para desenvolver a habilidade de escrever a sentença natural, praticar a multiplicação para que as dificuldades na tabuada tenham menos impacto nas próximas atividades, novamente é provável que as questões algébricas apresentem mais dificuldade na resolução</p>	<p>Nesta atividade com o intuito de praticar sentenças multiplicativas para minimizar as dificuldades da atividade seguinte, tivemos um bom desempenho, os erros que apareceram tiveram origem na fragilidade em realizar os cálculos de multiplicação e da divisão.</p> <p>Ademais tivemos dificuldades nas questões algébricas, por isso tivemos que trabalhar com a igualdade novamente. No quinto ano normalmente os estudantes nunca trabalharam com as propriedades da igualdade, que muitas vezes fica restrita ao 7º ano.</p>	POSITIVA
7	<p>Essa atividade tem como finalidade, que os alunos descubram o Princípio Fundamental da Contagem, as questões utilizadas são do tipo aritmético, o que seria de mais fácil entendimento, entretanto de acordo com a categorização proposta por Sá (2003) esse de tipo de questão não é de multiplicação e sim usa a multiplicação, a questão semântica também é relevante, pois não utilizamos palavras associadas à multiplicação, e para muitos estudantes talvez seja o primeiro contato delas como o PFC. Estes fatores combinados certamente trarão dificuldades aos estudantes, ademais as questões de 3 etapas necessitam que se multiplique mais vezes, isso é outro obstáculo, além de ser imprescindível o domínio da multiplicação, ou a utilização de um raciocínio combinatório</p>	<p>Esta atividade é o cerne da minha pesquisa, a experiência da turma com as outras atividades foi essencial, seguimos o modelo já conhecido da turma, conversamos um pouco sobre as etapas independentes, utilizamos material concreto para auxiliar na observação das regularidades, mas tivemos resultados obtidos rapidamente, com o preenchimento da tabela, logo nas primeiras linhas já indica a operação, quando as equipes já sabem o que procuram, é muito gratificante quando trabalhamos com uma perspectiva de ensino tão emancipadora, os alunos se sentem confiantes, defendem seus pontos de vistas, compartilhavam na equipe suas opiniões. As conclusões foram todas válidas. Obtidas da manipulação do material, mas principalmente do preenchimento da tabela.</p>	POSITIVA

∞	Esta atividade deveria ser mais fácil, todavia ela apresenta questões classificadas por Sá (2003) como algébricas, que são aquelas que utilizam a propriedade da igualdade para resolução, e neste caso necessitam da divisão para resolvê-la, logo o esperado e que os alunos consigam resolver facilmente as questões que utilizam o PFC direto e tenham um pouco mais de dificuldade naquelas onde existe a necessidade de dividir.	Esta atividade, foi bem tranquila, as questões que utilizavam o PFC do tipo aritmética foram facilmente resolvidas, as questões do tipo algébrica apresentaram algumas dificuldades, mas bem menores que as demais, pois esta se assemelhava a atividade 6, atividade de fixação é o momento que verificamos se o caminho que o discente descobriu para calcular as questões do PFC, estão sólidas o suficiente para praticá-las sem grandes dificuldades.	POSITIVA
----------	--	--	----------

Fonte: Pesquisa de campo 2019

Como foi possível observar a maioria dos comportamentos esperados e descritos na análise a priori, foi confirmado na análise a posteriori, que se converteram em validações positivas, que as conclusões e observações, aproximavam-se do suposto para a turma, o que valida a sequência a luz do ensino por atividades. É possível afirmar que esta sequência influenciou positivamente no aprendizado do Princípio Fundamental da Contagem.

5.4 TESTE DE HIPÓTESE

O teste de hipótese de acordo com Larson e Farber(2015) é um processo ou um procedimento que utiliza estatística amostral para testar uma afirmação, o que possibilita a escolha entre duas hipóteses, cuidadosamente escolhida e complementares, de tal forma que ao aceitar uma, rejeita a outra, elas são chamadas de hipótese nula e hipótese alternativa, cuja definição encontra-se em (LARSON; FARBER, 2015, p. 324).

Uma **hipótese nula** H_0 e uma hipótese estatística que contem uma afirmação de igualdade, tal como \leq , $=$ ou \geq . A **hipótese alternativa** H_a e o complemento da hipótese nula. E uma afirmação que e aceita como verdadeira se H_0 for falsa e contém uma declaração de desigualdade estrita, tal como $<$, \neq ou $>$. O símbolo H_0 e lido como “H zero” ou “H nula”, e H_a , como “H a”.

Na formulação das hipóteses os autores citados, orientam que deve ser escrita a afirmação feita sobre o parâmetro populacional utilizando uma sentença matemática, em seguida escreva o complemento. A hipótese nula é que contem a igualdade.

A amostra deste trabalho é pareada, que tem como finalidade analisar o mesmo grupo em momentos diferentes, o grupo de alunos que participaram do pré-teste e pós-teste, a fim de observar se houve melhoria no desempenho dos alunos nas questões que envolvem o PFC.

Quadro 51 - Acertos no pré-teste e pós-teste

	Acertos no pré-teste(X)	Acertos no pós-teste(Y)	Diferença(d)
E01	1	9	-8
E02	0	9	-9
E03	1	10	-9
E04	1	8	-7
E05	2	7	-5
E06	2	6	-4
E07	0	10	-10
E08	2	6	-4
E09	1	7	-6
E10	1	5	-4
E11	1	6	-5
E12	2	8	-6
E13	1	7	-6
E14	1	10	-9
E15	1	5	-4
E16	1	10	-9
E17	1	8	-7
E18	2	10	-8

E19	3	10	-7
E20	2	4	-2
E21	0	9	-9
E22	1	7	-6
$\sum X = 27$		$\sum Y = 171$	
		$U_d = 0$	
		$S_d = 1,900672$	
		$n=22$	

Fonte: Pesquisa de campo 2019.

$$\text{Média do Pré-teste} \Rightarrow \mu_X = \frac{\sum X}{n} = \frac{27}{22} = 1,22$$

$$\text{Média do Pós-teste} \Rightarrow \mu_Y = \frac{\sum Y}{n} = \frac{171}{22} = 7,77$$

Para o teste de hipóteses deste experimento, instituíram-se as seguintes afirmativas como hipóteses:

Hipótese nula (H_0): a média do pré-teste é maior ou igual à do pós-teste.

$$H_0 = \mu_X \geq \mu_Y \therefore \mu_X - \mu_Y \geq 0 \therefore \bar{d} \geq 0 \therefore \bar{d} > \mu_d$$

Hipótese alternativa (H_a): a média do pré-teste é menor que à do pós-teste

$$H_a = \mu_X < \mu_Y \therefore \mu_X - \mu_Y < 0 \therefore \bar{d} < \mu_d$$

Da escolha de utilizar os símbolos (maior que ou menor que), optou-se por um teste unilateral à esquerda, com grau de liberdade igual 21. Obtido da subtração do número de pares(n) menos 1.

$$gl = n-1 \Rightarrow gl. = n - 1 = 22 - 1 = 21$$

5% de nível de significância, agora serão substituídos os dados da tabela acima na equação.

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

Onde:

\bar{d} = Diferença entre a média do pré-teste e a média do pós-teste

S_d = Desvio padrão do pós-teste.

n = número de elementos da amostra.

$$t = \frac{(1,22 - 7,77) - 0}{\frac{1,900672}{\sqrt{22}}}$$

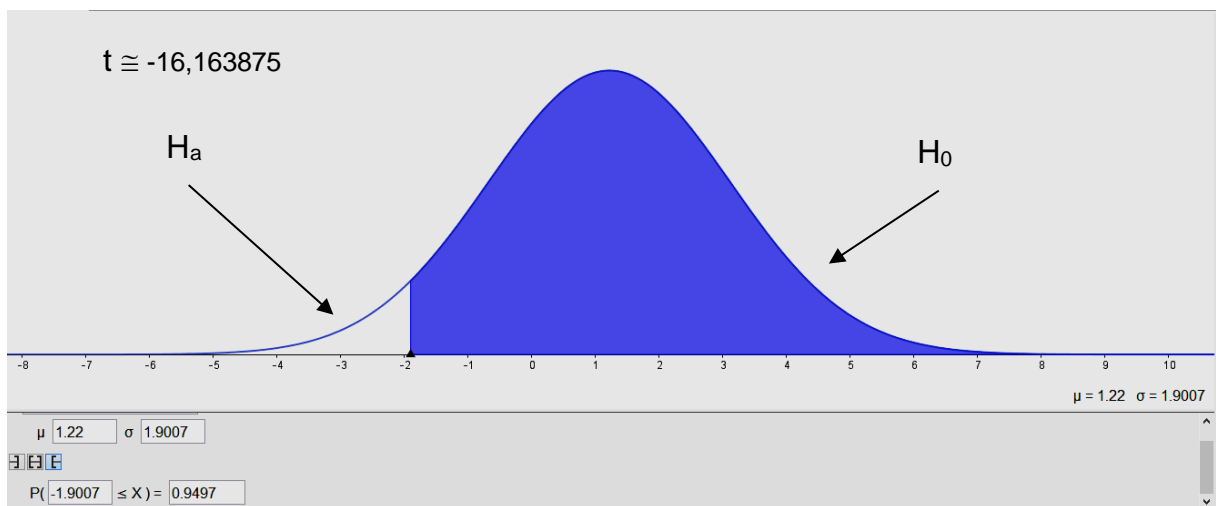
$$t = \frac{-6,55}{\frac{1,900672}{4.690415}}$$

$$t = \frac{-6,55}{0,4052246}$$

$$t \cong -16,163875$$

O gráfico foi feito utilizando o programa Geogebra clássico 5.0.

Gráfico 179 - Gráfico do teste de hipótese



O valor encontrado pertence ao intervalo de significância de 5%, tal fato permite inferir que houve um aumento expressivo no desempenho dos estudantes nos testes.

A média do pré-teste foi significativamente menor que a média do pós-teste, logo a diferença entre a média do pré-teste com a média do pós-teste, obteve como resultado um valor negativo, o que denota, uma melhoria nos resultados em momento posterior à aplicação da sequência didática.

5.3 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON

Na análise dos dados utilizou-se Correlação Linear de Pearson, que segundo Garson (2009 apud FILHO & JÚNIOR, 2009) “é uma medida de associação bivariada (força) do grau de relacionamento entre duas variáveis”.

O coeficiente de correlação é uma medida da força e da direção de uma relação linear entre duas variáveis (LARSON; FARBER, 2016, p. 438-442). A correlação linear entre duas variáveis pode ser expressa numericamente por este coeficiente, que é representado pela letra r , existindo duas variáveis, x e y , o coeficiente de correlação de Pearson é dado por:

$$r = \frac{n(\sum xy) - \sum x \sum y}{\sqrt{[n(\sum x^2) - (\sum x)^2][n(\sum y^2) - (\sum y)^2]}}$$

Sendo n o número de pares de observações na amostra analisada.

O coeficiente de correlação de Pearson pode assumir valores de -1 a +1, todavia Filho e Júnior (2009) asseguram que é infrequente que o coeficiente assumira os valores extremos: 1 da correlação perfeita positiva, o -1 da correlação perfeita negativa e o 0 (zero), que indica a inexistência de correlação.

O índice da correlação mede a intensidade e a força entre duas variáveis, existem dois conceitos essenciais para compreendê-la: “associação” e “linearidade”. Filho e Júnior (2009) afirmam que duas variáveis estão associadas, quando apresentam similaridades na distribuição dos seus escores, elas se associam pelo compartilhamento da variância, representado por um modelo linear.

A linearidade é facilmente observada em termos gráficos, já que os autores entendem que a melhor forma de ilustrar o padrão de relacionamento entre duas variáveis é através de uma linha reta. Portanto a correlação de Pearson (r) exige um compartilhamento de variância e que esta variação seja distribuída linearmente.

Rosas (2018) ressalta que os gráficos de dispersão são representações de duas de duas ou mais variáveis uma em função da outra, este gráfico permite verificar a existência ou não de relação quantitativa entre duas variáveis, por isso foram escolhidos para esta análise. O autor também corrobora com apontamentos de como os gráficos podem ser interpretados.

-Correlação positiva: quando um aumento de uma grandeza acarreta em um aumento na outra grandeza, onde percebemos um gráfico linear crescente.

-Correlação negativa: quando um aumento de uma grandeza acarreta em uma diminuição na outra, onde percebemos um gráfico linear decrescente.

-Correlação nula: quando a variação de uma grandeza não acarreta variação na outra, onde percebemos um gráfico linear constante. (ROSAS,2018, p. 25)

Levin e Fox (2004, p. 334 apud SANTOS, 2017) destacam que quanto mais o valor estiver próximo dos extremos desse intervalo, maior será a intensidade da correlação, e quanto mais perto de 0(zero), menor é a intensidade da correlação. O quadro a seguir apresenta a classificação para a correlação, de acordo com o resultado obtido para o coeficiente de correlação linear de Pearson.

Quadro 52- Classificação da Correlação Linear

Coeficiente de correlação	Correlação
$r=1$	Perfeita positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca positiva
$0 < r < 0,1$	Ínfima positiva
0	Nenhuma
$-0,1 \leq r < 0$	Ínfima negativa
$-0,5 < r \leq -0,1$	Fraca negativa
$-0,8 < r \leq -0,5$	Moderada negativa
$-1 < r \leq -0,8$	Forte negativa
$r = -1$	Perfeita negativa

Fonte: Rosas (2018).

O quadro 25 apresenta uma forma de quantificar e classificar a força da relação entre duas grandezas, para calcular o coeficiente de correlação linear de Pearson utilizamos o Software Microsoft Office Excel (2010).

A primeira correlação utilizou a afinidade com a matemática e a diferença das notas nos testes, cuja a parametrização dos resultados e o gráfico estão abaixo.

Quadro 53 - Parametrização dos dados – afinidade com a matemática

Afinidade com a matemática	Parametrização
Não gosto	1
Gosto um pouco	2
Gosto	3
Gosto muito	4

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

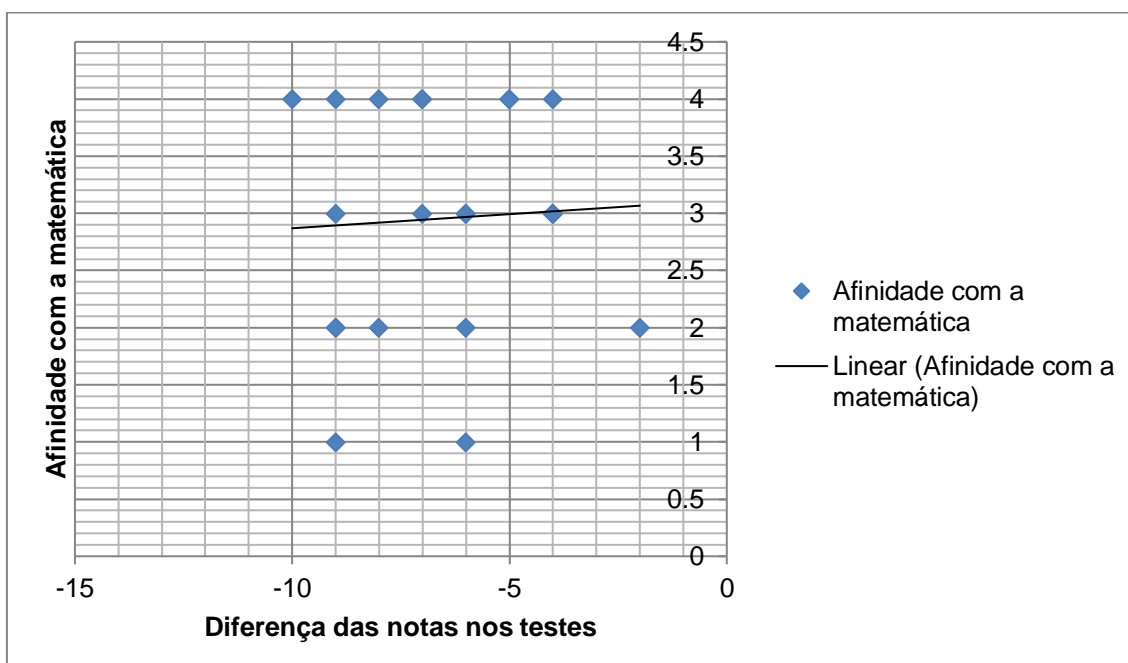
Quadro 54 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a afinidade com a matemática

Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Afinidade com a matemática
E1	1	9	-8	2
E2	0	9	-9	2
E3	1	10	-9	1
E4	1	8	-7	4
E5	2	7	-5	4
E6	2	6	-4	4
E7	0	10	-10	4
E8	2	6	-4	3
E9	1	7	-6	3
E10	1	5	-4	3
E11	1	6	-5	4
E12	2	8	-6	3
E13	1	7	-6	1
E14	1	10	-9	3
E15	1	5	-4	3
E16	1	10	-9	2
E17	1	8	-7	3
E18	2	10	-8	4
E19	3	10	-7	4
E20	2	4	-2	2
E21	0	9	-9	4
E22	1	7	-6	2

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O valor do coeficiente de correlação linear de Pearson (r) foi $r = 0,05$, tal valor pertence ao intervalo $0 < r < 0,1$ considerada uma correlação ínfima positiva. Face tal resultado é possível afirmar que os estudantes possuem alguma afinidade com a matemática, assim como não possuem afinidade com a matemática, não influenciou os resultados dos testes.

Gráfico 20 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a afinidade com a matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Na observação do gráfico, foi possível verificar uma reta crescente, com uma pequena inclinação, decorrente de uma correlação positiva ínfima entre as variáveis. Por tal motivo os pontos se encontram dispersos no gráfico e distantes da linha do gráfico, o que indica que relação linear entre as variáveis é irrelevante. Agora, será feita a correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e o auxílio nas tarefas de casa em matemática.

Quadro 55 - Parametrização- auxílio nas tarefas de casa de matemática

Auxílio nas tarefas escolares	Parametrização
Professor particular	1
Pai	2
Mãe	3
Irmão	4
Amigo(a)	5
Ninguém	6

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

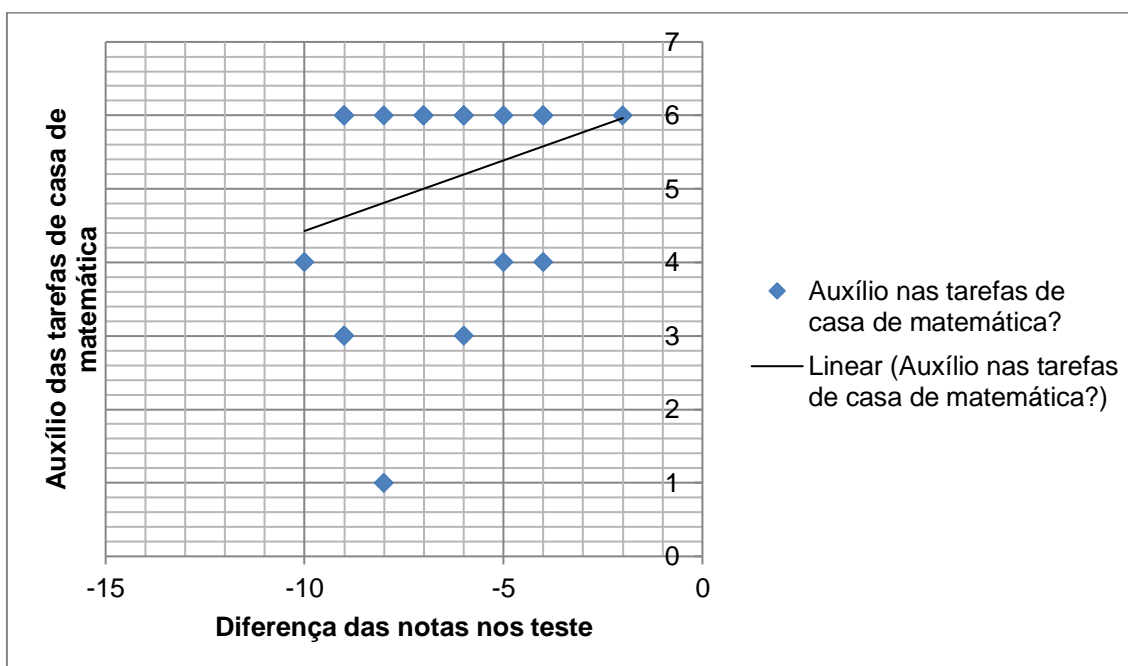
Quadro 56 - Correlação entre diferença das notas nos testes e o auxílio nas tarefas de casa de matemática

Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Auxílio nas tarefas de casa de matemática
E1	1	9	-8	1
E2	0	9	-9	6
E3	1	10	-9	3
E4	1	8	-7	6
E5	2	7	-5	6
E6	2	6	-4	6
E7	0	10	-10	4
E8	2	6	-4	6
E9	1	7	-6	6
E10	1	5	-4	6
E11	1	6	-5	4
E12	2	8	-6	6
E13	1	7	-6	3
E14	1	10	-9	6
E15	1	5	-4	4
E16	1	10	-9	3
E17	1	8	-7	6
E18	2	10	-8	6
E19	3	10	-7	6
E20	2	4	-2	6
E21	0	9	-9	6
E22	1	7	-6	6

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Para esta correlação linear de Pearson entre a diferença das notas nos pré-teste e pós-teste e o auxílio nas tarefas de casa de matemática, obteve como coeficiente $r=0,2$. Este valor indica uma correlação fraca positiva, pois está dentro do intervalo, $0,1 < r < 0,5$. demonstrado que o auxílio nas tarefas de casa de matemática não teve interferência significativa no resultados dos discentes nos testes.

Gráfico 181 -Dispersão: diferença das notas nos testes aditivos e o auxílio nas tarefas de casa de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Sobre o gráfico pode-se observar que a reta é crescente, resultante de uma correlação fraca entre as variáveis, quanto aos pontos eles se encontram dispersos e afastado da reta, sinalizando uma correlação fraca entre o auxílio nas tarefas de casa em matemática e as notas obtidas no pré-teste e pós-teste. Em seguida realizamos a correlação entre as variáveis hábitos de estudos em matemática e a diferença das notas nos testes.

Quadro 57 -Parametrização dos dados – hábitos de estudos em matemática

Hábitos de estudos em Matemática	Parametrização
Só estudo em sala de aula	1
Só no período de prova	2
Só na véspera da prova	3
Só nos fins de semana	4
Alguns dias da semana	5
Todos os dias	6

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 58 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e os hábitos de estudos em matemática

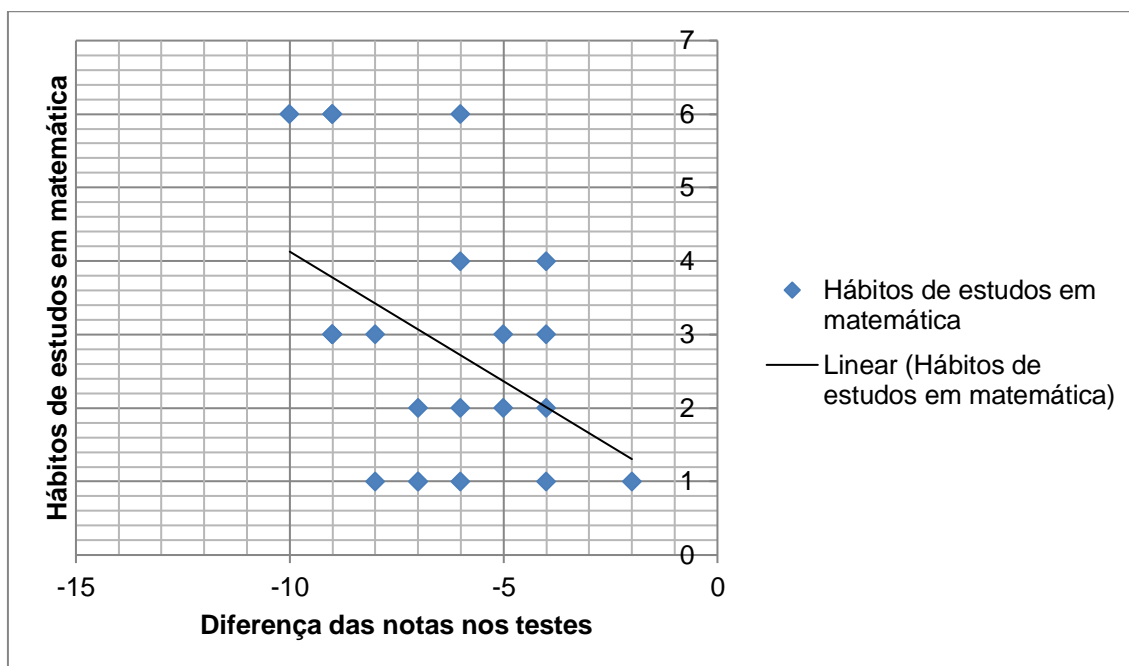
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Hábitos de estudos em matemática
E1	1	9	-8	1

E2	0	9	-9	6
E3	1	10	-9	3
E4	1	8	-7	1
E5	2	7	-5	3
E6	2	6	-4	2
E7	0	10	-10	6
E8	2	6	-4	3
E9	1	7	-6	4
E10	1	5	-4	1
E11	1	6	-5	2
E12	2	8	-6	6
E13	1	7	-6	1
E14	1	10	-9	3
E15	1	5	-4	4
E16	1	10	-9	3
E17	1	8	-7	1
E18	2	10	-8	3
E19	3	10	-7	2
E20	2	4	-2	1
E21	0	9	-9	6
E22	1	7	-6	2

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Neste valor do coeficiente de $r -0,4$, obtido da correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste e os hábitos de estudos em matemática está dentro do intervalo $-0,5 < r \leq -0,1$, isto é, uma esta correlação fraca negativa. Diante deste resultado pode-se concluir, que o hábito de estudar matemática com frequência, ou não, teve pouca influência no resultado dos nossos testes.

Gráfico 19 - Dispersão: diferença das notas nos testes e os hábitos de estudos em matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

No gráfico, pode-se verificar uma reta decrescente, que advém de uma correlação negativa entre as variáveis. A respeito dos pontos, observa-se que estão dispersos em relação à linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. A seguir, será apresentada correlação entre a diferença das notas do pré-teste e pós-teste, com as notas em matemática.

Quadro 59 - Parametrização dos dados – notas em matemática

Notas em Matemática	Parametrização
Abaixo da média	1
Na média	2
Acima da média	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 60 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e as notas em matemática

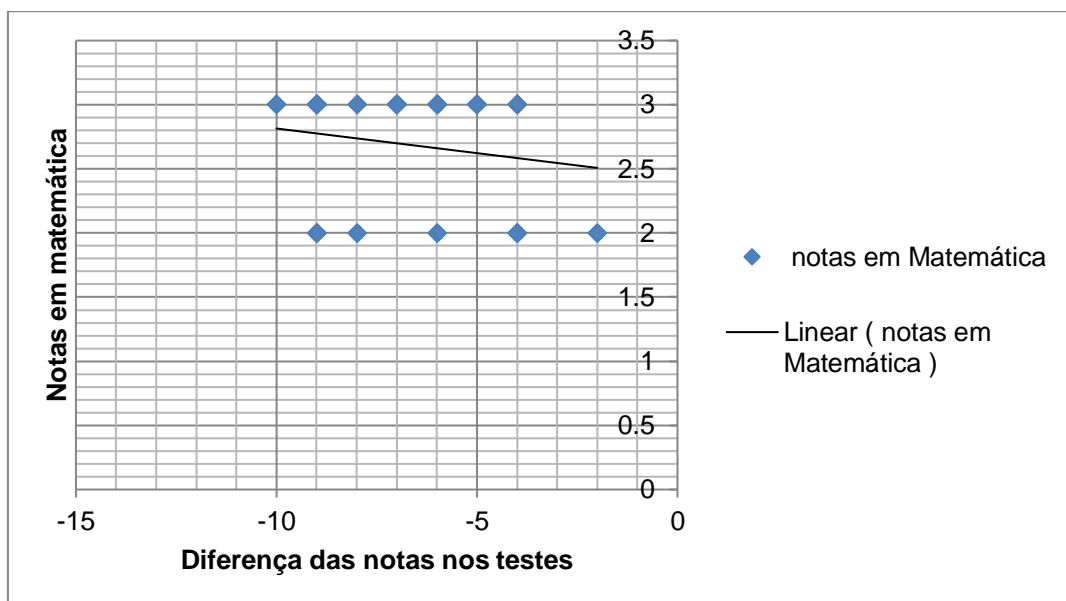
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Notas em Matemática
E1	1	9	-8	2
E2	0	9	-9	3
E3	1	10	-9	2
E4	1	8	-7	3
E5	2	7	-5	3

E6	2	6	-4	2
E7	0	10	-10	3
E8	2	6	-4	3
E9	1	7	-6	3
E10	1	5	-4	2
E11	1	6	-5	3
E12	2	8	-6	3
E13	1	7	-6	2
E14	1	10	-9	3
E15	1	5	-4	3
E16	1	10	-9	3
E17	1	8	-7	3
E18	2	10	-8	3
E19	3	10	-7	3
E20	2	4	-2	2
E21	0	9	-9	2
E22	1	7	-6	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Ao obter-se o coeficiente linear de $r = -0,17525$, pertencente ao intervalo $-0,5 < r \leq -0,1$; isto é, uma correlação fraca negativa, o que evidencia que as notas em matemática dos estudantes durante o ano letivo, tiveram pouca influência nos resultados dos testes.

Gráfico 203 - Dispersão: diferença das notas nos testes e as notas em matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O gráfico de dispersão acerca das variáveis citadas tem uma inclinação decrescente, resultante da correlação entre as mesmas ser negativa, quanto aos pontos eles se encontram afastados da reta, o que indica uma correlação fraca entre a diferença das notas nos testes e as notas em matemática. A próxima correlação utilizou as diferença das notas obtidas nos pré-teste e pós-teste e a dificuldade em aprender matemática, cuja parametrização foi a seguinte.

Quadro 61 - Parametrização dos dados – dificuldade em aprender matemática

Dificuldade em aprender Matemática?	Parametrização
Não	1
Um pouco	2
Muito	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 62 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a dificuldade em aprender matemática

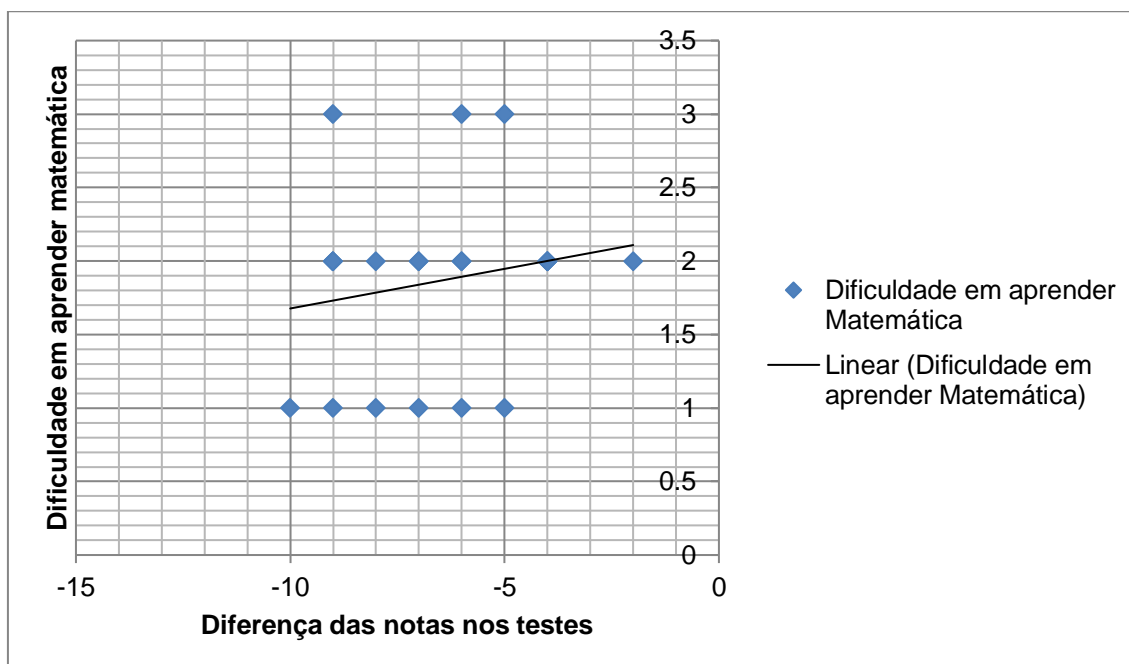
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Dificuldade em aprender Matemática?
E1	1	9	-8	1
E2	0	9	-9	2
E3	1	10	-9	3
E4	1	8	-7	2
E5	2	7	-5	1

E6	2	6	-4	2
E7	0	10	-10	1
E8	2	6	-4	2
E9	1	7	-6	1
E10	1	5	-4	2
E11	1	6	-5	3
E12	2	8	-6	3
E13	1	7	-6	2
E14	1	10	-9	1
E15	1	5	-4	2
E16	1	10	-9	2
E17	1	8	-7	2
E18	2	10	-8	2
E19	3	10	-7	1
E20	2	4	-2	2
E21	0	9	-9	2
E22	1	7	-6	2

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Nesta correlação tivemos como resultado $r=0,183496$, valor muito próximo de zero, pertencendo ao intervalo $0,1 \leq r < 0,5$, portanto é uma correlação fraca positiva, em suma da correlação linear de Pearson, entre a diferença das notas no testes e a dificuldade em aprender matemática, apontou que o nível de dificuldade em aprender matemática, exerceu pouca influência nos resultados obtidos pelos discentes.

Gráfico 21 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a dificuldade em aprender matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Sobre o gráfico verifica-se que a reta é crescente, pois a correlação entre as variáveis é positiva, os pontos estão dispersos e afastados da reta do gráfico. O que se configura em uma correlação fraca entre a diferença das notas dos testes e a dificuldade em aprender matemática. A seguir, será apresentada a correlação entre a diferença do desempenho nos testes a distração nas aulas de matemática.

Quadro 63 - Parametrização dos dados – distração nas aulas de matemática

Distração nas aulas de Matemática	Parametrização
Não, eu sempre presto atenção.	1
Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de Matemática	2
Sim, eu não consigo prestar atenção	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 64 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e distração nas aulas de matemática

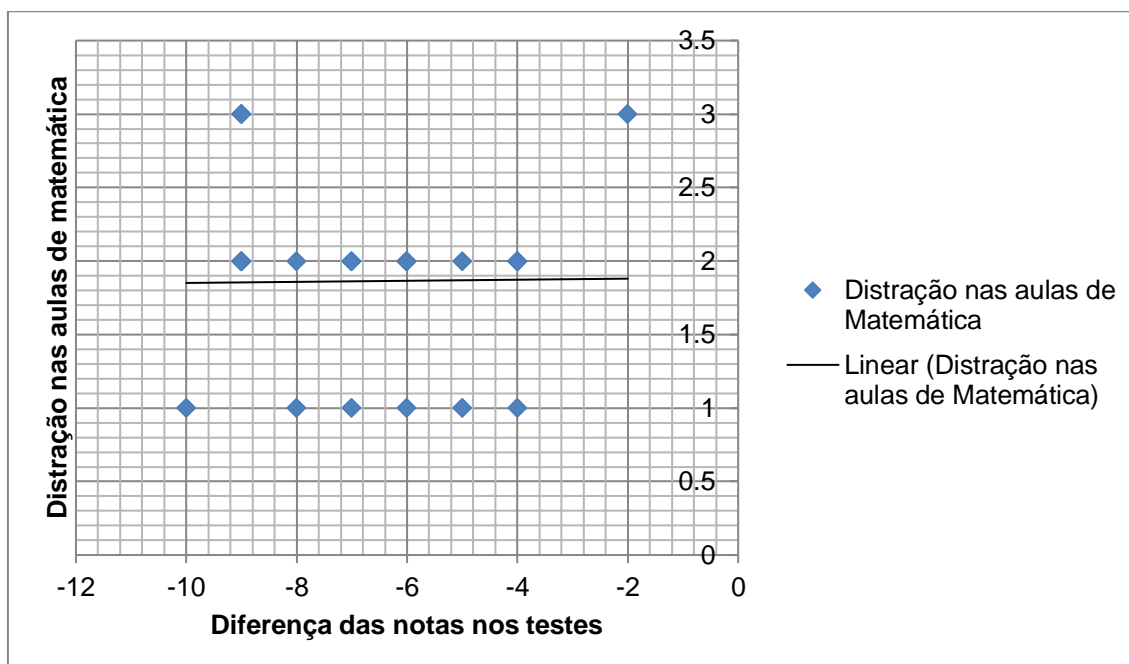
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Distração nas aulas de Matemática
E1	1	9	-8	1
E2	0	9	-9	2
E3	1	10	-9	3
E4	1	8	-7	2
E5	2	7	-5	2

E6	2	6	-4	2
E7	0	10	-10	1
E8	2	6	-4	1
E9	1	7	-6	2
E10	1	5	-4	2
E11	1	6	-5	1
E12	2	8	-6	2
E13	1	7	-6	1
E14	1	10	-9	2
E15	1	5	-4	2
E16	1	10	-9	3
E17	1	8	-7	2
E18	2	10	-8	2
E19	3	10	-7	1
E20	2	4	-2	3
E21	0	9	-9	2
E22	1	7	-6	2

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

A correlação linear obtida entre a diferença das notas nos testes e a distração nas aulas de matemática foi $r=0,01244$, tal valor está dentro do intervalo $0 < r < 0,1$ considerada ínfima positiva. Isto assegura que a variável distração nas aulas de matemática exerceu influência insignificante no desempenho dos discentes nos testes.

Gráfico 22- Dispersão: diferença das notas nos testes e distração nas aulas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O gráfico apresenta uma linha com uma pequena inclinação crescente, ademais os pontos estão dispersos e afastados da reta o que indica um correlação ínfima positiva entre a diferença das notas obtidas nos testes e a distração dos discentes nas aulas de matemática. A seguir apresentamos a correlação entre a diferença do desempenho nos testes e fato de trabalhar de forma remunerada.

Quadro 65 – Parametrização - trabalha de forma remunerada

Trabalha de forma remunerada	Parametrização
Não.	1
As vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019)

Quadro 66- Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercício de trabalho remunerado

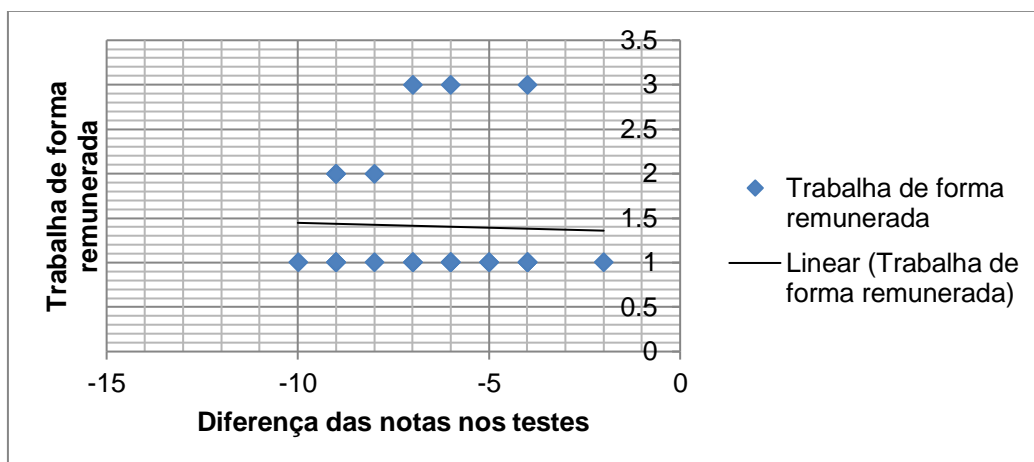
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Trabalha de forma remunerada
E1	1	9	-8	1
E2	0	9	-9	2
E3	1	10	-9	1
E4	1	8	-7	3
E5	2	7	-5	1

E6	2	6	-4	3
E7	0	10	-10	1
E8	2	6	-4	1
E9	1	7	-6	1
E10	1	5	-4	1
E11	1	6	-5	1
E12	2	8	-6	1
E13	1	7	-6	3
E14	1	10	-9	2
E15	1	5	-4	1
E16	1	10	-9	1
E17	1	8	-7	1
E18	2	10	-8	2
E19	3	10	-7	1
E20	2	4	-2	1
E21	0	9	-9	1
E22	1	7	-6	1

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O coeficiente de correlação linear que se obtém entre a diferença das notas nos testes e o exercício de trabalho remunerado foi $r = -0,03252$, tal valor é muito próximo de zero e pertinente ao intervalo $-0,1 \leq r < 0$, considera-se uma correlação ínfima negativa, o que significa que exercer ou não exercer uma atividade remunerada não teve uma influência significativa nos resultados obtidos pela amostra durante os testes.

Gráfico 26 – Dispersão: Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercício de trabalho remunerado



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

No gráfico observa-se que a reta é decrescente, que advém da correlação negativa entre as variáveis trabalhar de forma remunerada e a diferença entre as notas obtidas no pré-teste e pós-teste, similarmente os pontos se encontram espalhados e distantes da reta do gráfico, o que sugere trabalhar de forma remunerada foi irrelevante para os resultados dos testes. Agora, será apresentada a correlação entre a diferença das notas testes e hábito de realizar compras.

Quadro 67 – Parametrização - hábito de realizar compras

Hábito de realizar compras	Parametrização
Não.	1
As vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 68- Correlação entre a diferença das notas nos testes e o hábito de realizar compras

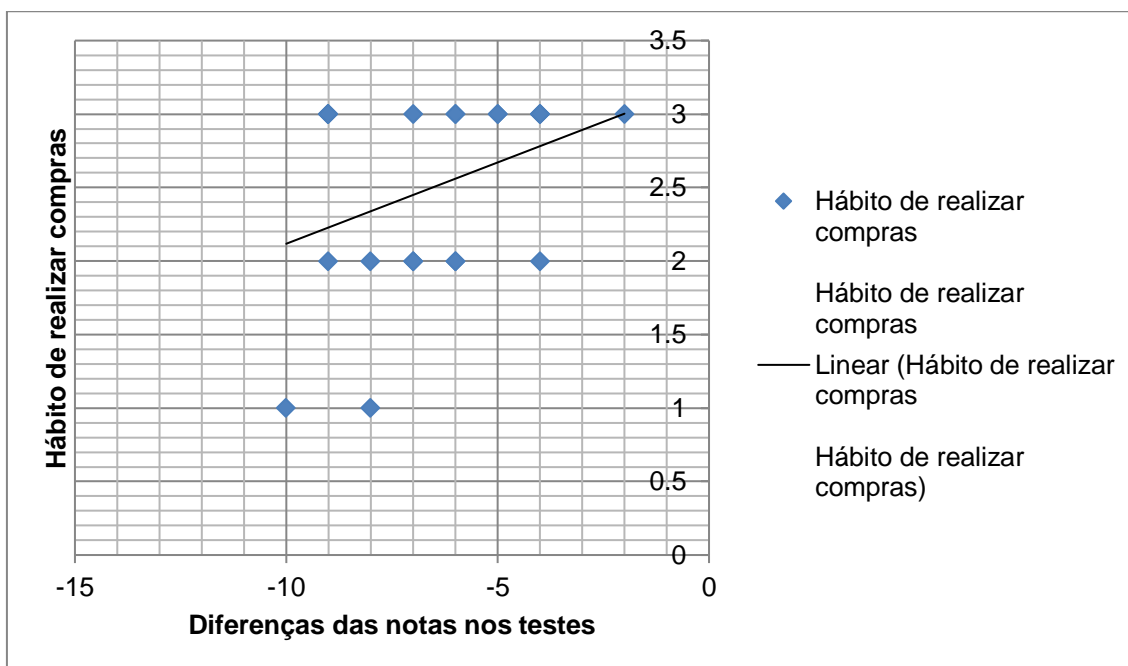
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Hábito de realizar compras
E1	1	9	-8	1
E2	0	9	-9	3
E3	1	10	-9	2
E4	1	8	-7	2
E5	2	7	-5	3
E6	2	6	-4	3
E7	0	10	-10	1

E8	2	6	-4	2
E9	1	7	-6	2
E10	1	5	-4	3
E11	1	6	-5	3
E12	2	8	-6	3
E13	1	7	-6	3
E14	1	10	-9	3
E15	1	5	-4	3
E16	1	10	-9	3
E17	1	8	-7	3
E18	2	10	-8	2
E19	3	10	-7	2
E20	2	4	-2	3
E21	0	9	-9	3
E22	1	7	-6	2

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Ao se obter o valor do coeficiente linear de Pearson , para correlação entre a diferença das notas dos testes, com a variável hábito de realizar compras, obtivemos $r = 0,357864$. Este valor pertence ao intervalo $0,1 \leq r < 0,5$, logo se pode classificar esta correlação como fraca positiva. Então, conclui-se que o fato dos alunos realizarem compras, teve pouca influência nos resultados dos testes.

Gráfico 23 - Dispersão: diferença das notas nos testes e o hábito de realizar compras



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Ao se observar o gráfico, foi possível verificar uma reta crescente, que indica uma correlação positiva entre as variáveis. Sobre os pontos, nota-se que eles se encontram afastados da linha do gráfico, o que indica uma relação linear fraca entre as variáveis. Agora, será feita a correlação entre a diferença das notas dos testes e a escolaridade do responsável masculino.

Quadro 69 – Parametrização – escolaridade do responsável masculino

Escolaridade do seu responsável masculino	Parametrização
Não escolarizado	1
Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)	2
Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)	3
Ensino Fundamental Completo	4
Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)	5
Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)	6
Ensino Superior	7
Não sei	8

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 70- Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino

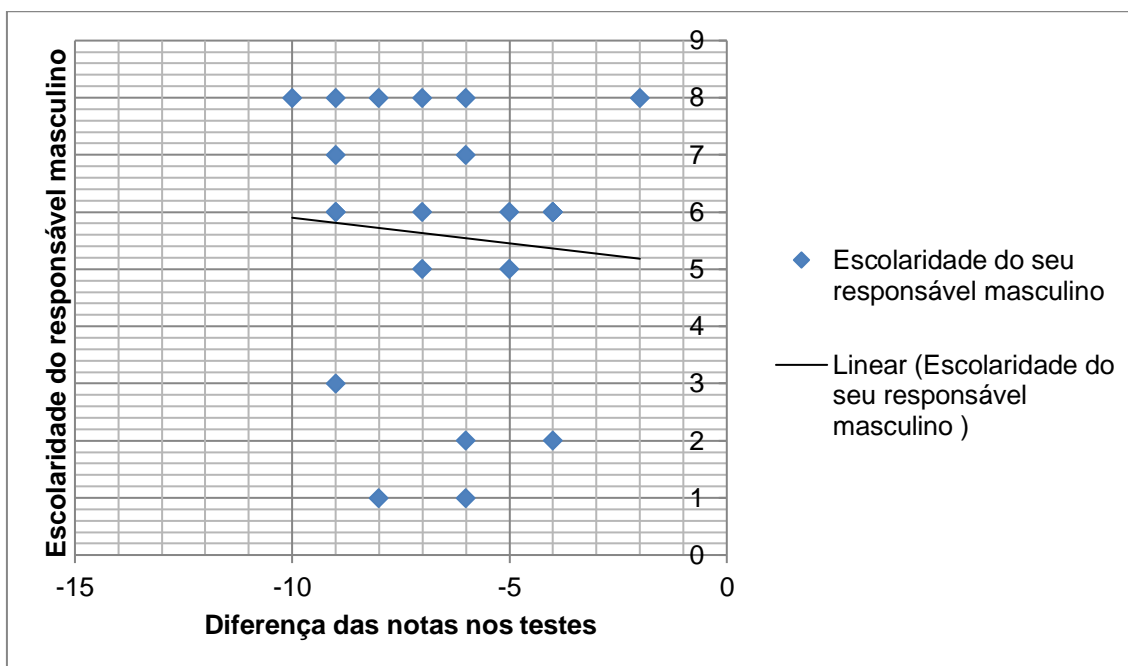
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Escolaridade do seu responsável masculino
E1	1	9	-8	1

E2	0	9	-9	6
E3	1	10	-9	3
E4	1	8	-7	6
E5	2	7	-5	6
E6	2	6	-4	6
E7	0	10	-10	8
E8	2	6	-4	2
E9	1	7	-6	2
E10	1	5	-4	6
E11	1	6	-5	5
E12	2	8	-6	8
E13	1	7	-6	7
E14	1	10	-9	6
E15	1	5	-4	6
E16	1	10	-9	7
E17	1	8	-7	5
E18	2	10	-8	8
E19	3	10	-7	8
E20	2	4	-2	8
E21	0	9	-9	8
E22	1	7	-6	1

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O coeficiente de correlação linear de Pearson (r) para a correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino dos alunos, foi $r=-0,083$. Este resultado está dentro do intervalo $-0,1 \leq r < 0$, será considerada uma correlação ínfima negativa. Com isso, verificar-se-á que a escolaridade dos responsáveis masculinos da teve pouca interferência nos resultados dos testes.

Gráfico 248- Escolaridade do responsável masculino



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O gráfico apresenta uma reta decrescente decorrente da correlação entre as variáveis ser negativa, também foi possível observar que os pontos estão dispersos pelo gráfico e afastados da reta, o que indica que a escolaridade do responsável masculino, teve influência irrelevante na diferença dos teste.

Quadro 71 –Parametrização - escolaridade do responsável feminino

Escolaridade do seu responsável masculino?	Parametrização
Não escolarizado	1
Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)	2
Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)	3
Ensino Fundamental Completo	4
Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)	5
Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)	6
Ensino Superior	7
Não sei	8

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Quadro 72 -Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino

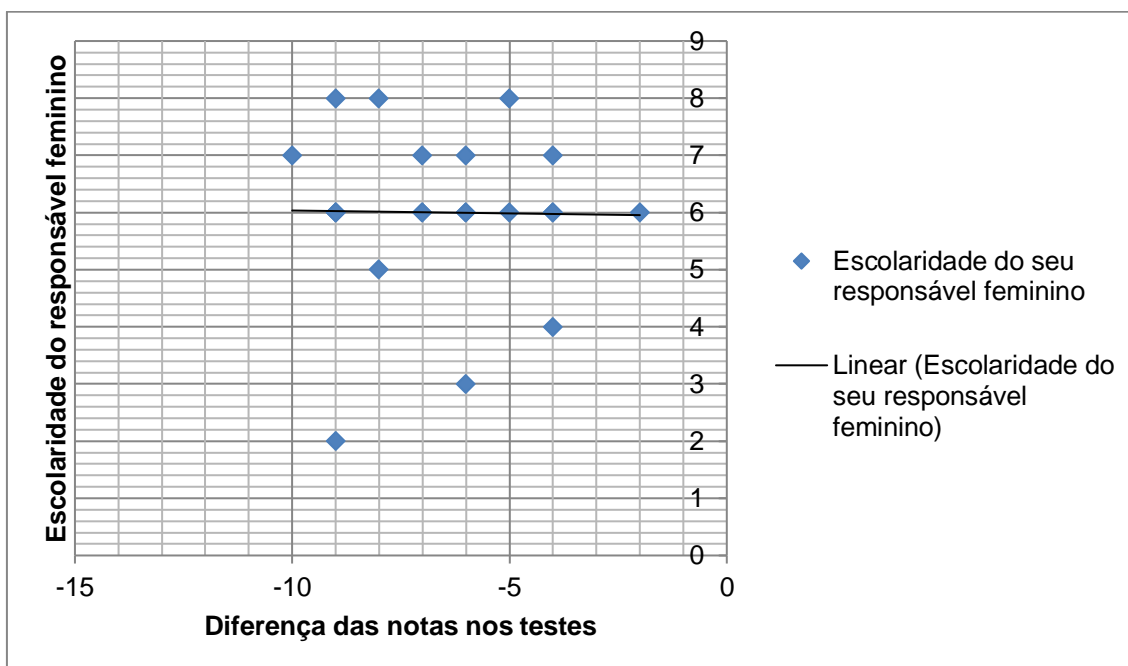
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Diferença	Escolaridade do seu responsável feminino
E1	1	9	-8	5
E2	0	9	-9	2

E3	1	10	-9	6
E4	1	8	-7	6
E5	2	7	-5	6
E6	2	6	-4	6
E7	0	10	-10	7
E8	2	6	-4	7
E9	1	7	-6	3
E10	1	5	-4	6
E11	1	6	-5	8
E12	2	8	-6	6
E13	1	7	-6	7
E14	1	10	-9	6
E15	1	5	-4	4
E16	1	10	-9	6
E17	1	8	-7	7
E18	2	10	-8	8
E19	3	10	-7	6
E20	2	4	-2	6
E21	0	9	-9	8
E22	1	7	-6	6

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Ao se calcular o coeficiente de correlação linear de Pearson (r) para a correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino dos estudantes, o resultado foi $r=-0,01478$, que pertence ao intervalo $-0,1 \leq r < 0$, considerada uma correlação ínfima negativa. Diante de tal resultado foi possível inferir a escolaridade dos responsáveis femininos da amostra, teve pouca interferência nos resultados dos testes.

Gráfico 259 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Sobre o gráfico, observa-se uma reta decrescente que advém da correlação entre as variáveis ser negativa, também foi possível observar que os pontos estão espalhados pelo gráfico e espaçados da reta, o que indica que a escolaridade do responsável feminino, teve alcance irrelevante na diferença dos teste.

Na observação dos aspectos sociais ou educacionais apontados no questionário (vide anexo B), não se encontra nenhum aspecto que obteve correlação forte ou pelo menos moderada como o quadro abaixo explicita.

Quadro 73 – Correlações entre os testes e as questões sócio educacionais

Assertiva	Correlação obtida	Correlação
Afinidade com a matemática	$r=0,05$	Ínfima positiva
Auxílio nas tarefas de casa de matemática	$r=0,2$	Fraca positiva
Hábitos de estudos em matemática	$r=-0,4$	Fraca negativa
Notas em matemática	$r=0,17$	Fraca positiva
Dificuldade em aprender matemática	$r=0,18$	Fraca positiva
Distração nas aulas de matemática	$r=0,01$	Ínfima positiva

Trabalha de forma remunerada	$r = 0,03$	Ínfima positiva
Hábito de realizar compras	$r = 0,3$	
Escolaridade do responsável masculino	$r = -0,08$	Ínfima negativa
Escolaridade do responsável feminino	$r = -0,01$	Ínfima negativa

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Das correlações obtidas entre a diferença dos testes e algumas das questões abordadas no referido questionário, foi possível observar que estes aspectos se correlacionam de forma muito fraca, que segundo os autores, quanto mais próximo de zero, menor a influência de um aspecto sobre o outro, logo a melhoria expressiva obtida no pós-teste, está ligada a sequência didática utilizada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vive-se em uma sociedade cada vez mais dependente de conhecimentos matemáticos para tomar decisões. Todavia, uma grande parcela da população encontra dificuldade para compreender tais conhecimentos. Particularmente os conhecimentos da combinatória, por isso se elabora uma sequência didática, como forma de responder a seguinte indagação: Uma sequência didática pode oferecer condições necessárias para que o estudante reconheça e resolva questões que envolvam o Princípio Fundamental da Contagem no 5º ano das séries iniciais?

O objetivo deste trabalho fora: Verificar se uma sequência didática oferece condições necessárias para que o aluno do 5º ano identifique e resolva questões que envolvam o Princípio Fundamental da Contagem

Para alcançar este fim estipulou-se quatro etapas para a pesquisa. Na primeira etapa a revisão de estudos levantaram-se algumas informações, que foram observadas na escola a qual realizamos nosso trabalho.

No material fornecido ao docente para preparação da Prova Brasil, apenas 3 das 200 situações problemas propostas utilizavam o PFC. Estas questões apresentam uma dificuldade cognitiva e um pensamento mais complexo, por isso, muitas vezes não são trabalhadas, o que é um erro, pois é fundamental que o estudante se depare com uma grande variedade de experiências para formar um conceito, especialmente para formar um campo conceitual.

Isto se refletiu nos resultados do pré-teste, as crianças quando se deparam com estas questões não as reconhecem como pertencente ao campo multiplicativo, tal como Sá (2003) afirmava, não é fácil deduzir a operação apenas da leitura, são questões que usam a operação, o que ocasiona a utilização da operação errada, bem como, que questões com mais etapas dificultam a resolução.

Na concepção da sequência didática destacaram-se que muitos fatores podem influenciar o desempenho na resolução dos problemas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem, entre estes, os que mais se destacam são: Os fatores linguísticos na interpretação do enunciado deste tipo de problema, pois este

não pode ser facilmente deduzido no enunciado; o tipo de problema, aritmético ou algébrico, o número de etapas que a situação problema apresenta.

A quantidade reduzida de questões deste tipo, que por vezes não são trabalhadas em sala de aula, que se configura em uma forma de contornar questões com graus maiores de dificuldade, quando o professor faz uma opção pelas questões mais fáceis dentro do campo multiplicativo, face os fatores que dificultam o ensino do PFC, apresenta-se o ensino por atividades e o uso de materiais manipulativos como métodos que podem ser utilizados para superar estes obstáculos.

Na fase da experimentação utilizamos diversos instrumentos de coleta de dados: questionário socioeducacional, pré-teste, uma sequência de atividades estruturadas, pós-teste, as informações que obteve-se com cada instrumento foram as seguintes:

A consulta aos discentes evidenciou que a maioria gosta um pouco, ou gosta muito de matemática, que não possuem o hábito constante de estudar, entretanto as notas são acima da média, quanto as aulas elas começam pela definição, seguida de exemplo e exercícios e ocasionalmente começam com uma história sobre o assunto, para exercitar a resolução de problemas os estudantes utilizam lista de exercícios, ou resolvem questões do livro, além de procurarem questões sobre o assunto, isto indica a predominância do ensino tradicional na maioria das aulas.

No Pré-teste, confirma-se que estas questões não faz parte do grupo de questões que os discentes conhecem, que eles não a associam a operação multiplicação, todavia conforme o referencial teórico apontou, traços do raciocínio combinatório estão presente nas respostas dos estudantes.

A sequência didática foi composta de 8 atividades, onde foi possível observar a importância do conjunto de atividades, para que os alunos se acostumassem como preenchimento dos quadros, além de desenvolver atitudes que são intrínsecas a matemática que estão no texto introdutório da BNCC que descrevem o trabalho com atividades, o compromisso de desenvolver habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de forma a estabelecer conjecturas, utilizando conceitos, procedimentos e ferramentas matemáticas

Se existe a intenção de desenvolver a habilidade de resolver situações problemas como propõem a BNCC, com o intuito de que os discentes possam ler e escrever em matemática, a aula deve ser composta por atividades desafiadoras, que beneficiem o trabalho em grupo, que propicie a discussão de pontos de vista, além de estimular ações de leitura e representação de pensamentos e conclusões,

Na atividade que se propôs os grupos realizaram observações, procuraram regularidades, transcreveram o problema para a linguagem matemática, manipularam objetos de ensino, trabalharam em conjunto para encontrar soluções, reconheceram questões que utilizam o PFC como pertencentes ao Campo multiplicativo, escreveram conclusões sobre um assunto.

As equipes conseguiram identificar uma regra geral para calcular o Princípio Fundamental da Contagem. Outrossim que a utilização de material concreto é muito eficaz na fixação de resolução de problemas que envolvam o PFC, por permitirem a manipulação das etapas de uma forma mais dinâmica e atrativa. Contudo como demanda tempo e os discentes já estavam acostumados com o preenchimento do quadro, eles facilmente perceberam que a operação necessária fora a multiplicação, o que ocasionou o preenchimento dos grupos desde as primeiras questões sem o suporte do material concreto.

Os resultados obtidos na etapa anterior foram tratados de forma qualitativa e quantitativa, e na análise posteriori, as informações mais relevantes foram as seguintes:

As conclusões que as equipes construíram passam por um processo de amadurecimento, com o tempo e experiência adquirida nas atividades, vão refinando seus processos de observação, bem como a sua capacidade de enunciar uma conclusão que se adeque a todos os aspectos propostos. Destacando o processo contínuo de ampliação de habilidades utilizadas durante as atividades.

Os comparativos percentuais entre os testes que foram realizados na análise a posteriori apontam um crescimento muito expressivo de acertos entre o pré-teste e o pós-teste, um decréscimo nos erros, e no pós-teste, apenas ficaram em branco as questões do tipo algébrica. Houve um desempenho melhor nas questões aritméticas do que nas questões algébricas, entretanto existe também outros fatores que merecem destaques:

Que existe dificuldades maiores se o problema tiver mais etapas, quando o enunciado utiliza palavras ou letras ao invés de valores numéricos também dificulta a resolução, tal ação se relaciona com a competência leitora, que os erros nas questões algébricas derivam da escolha equivocada de operação, normalmente associada ao hábito de não escrever a sentença matemática.

Os resultados dos testes sofreram um tratamento estatístico, para obter resultados mais robustos, utilizou-se o teste de hipótese que confirmou que houve um aumento expressivo nos desempenho dos alunos em momento posterior a sequência didática, assim como utilizamos a Correlação Linear de Pearson para averiguar que os fatores sócios educacionais não tem correlação significativa nos resultados obtidos nos testes.

Logo, pode-se inferir que o bom desempenho no pós-teste na resolução de problemas envolvendo o PFC deve-se a sequência didática, que esta teve um efeito positivo na resolução desse tipo de problemas e no interesse dos estudantes em matemática.

Com as informações produzidas neste trabalho, esperamos contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de problemas que abordem o Princípio Fundamental da Contagem, acredita-se que esta sequência didática possa ser utilizada por professores da educação básica, sugere-se que novas pesquisas abordem o PFC nas diversas séries da educação básica, para que se possa compreender melhor como os estudantes apreendem. É mister a necessidade deste tópico ser trabalhado em formações continuadas de professores das séries iniciais.

É essencial que mais pesquisas se ocupem das questões algébricas que envolvam o PFC, além de trabalhar questões que não tem valores numéricos explícitos, para que estes aspectos possam ser trabalhados de maneira mais aprofundada.

O ensino por Atividades pode ser utilizado em vários tópicos de matemática, na educação básica ou ensino Superior, não podemos enunciar que ele é aplicável em todos, entretanto no ensino do Princípio Fundamental da Contagem no 5º ano das séries iniciais do ensino fundamental, ele se mostrou viável, por isso, também oferecemos como sugestão que os professores o utilizem em suas salas de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática –1ª a 4ª série**, Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL, **Matriz de Referência de Matemática do SAEB: Temas e seus descritores 5º ano do ensino fundamental**. Disponível em: www.portal.inep.gov.br, acesso em 29 de outubro de 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, acesso em 20 de dezembro de 2019.

BARRETO, F.S. e BORBA, R E S R. **Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais** In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática: Salvador. 2010.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **ANTES QUE SEJA TARDE: aprendendo Combinatória desde o início da escolarização** EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - vol. 7 - número 1 - 2016

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. **Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015.

BORBA, Rute E. S. Rosa; SOUZA, Leandro de Oliveira; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **DESAFIOS DO ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE COMBINATÓRIA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE**. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 9 - número 1 – 2018.

CARDOSO, Valdinei Cezar; SCHIO, Rúbia Barcelos Amaral; OLIVEIRA, Samuel Rocha de. **UM ESTUDO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DO CAMPO MULTIPLICATIVO EXPLORADAS POR PROFESSORES E ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL**. Nuances: estudos sobre Educação, Presidente Prudente. SP, v. 29, n.3, p.192-214, Set./Dez., 2018. ISSN: 2236- 0441. DOI: 10.32930/nuances.v.29i3.5733.

CASTRO, Sandro Benício Goulart. **O ensino de divisibilidade de números naturais por atividades**. 2019. 250 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/570109>. Acesso em: 21 maio. 2021.

FILHO, Dalson Britto Figueiredo; JÚNIOR, José Alexandre da Silva. **Desvendando os Mistérios do Coeficiente de Correlação de Pearson (r)**. Revista Política Hoje, Vol. 18, n. 1, 2009.

JENSKE, Grazielle. **A Teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdos básicos da matemática: um estudo de caso**, Dissertação de Mestrado, Pontifícia UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, 2011.

LARSON, Ron; FARBER, Betsy. **Estatística aplicada**. 6. Ed. Tradução: José Fernando Pereira Gonçalves, São Paulo: Pearson, 2016.

LIMA, Ana Paula Barbosa de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa **RECONHECENDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM COMO ESTRATÉGIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.4, pg.694-714, 2015

MAGINA, M. P.; MERLINI, V.L.; SANTOS, A. O Desempenho dos estudantes de 4ª Série do Ensino Fundamental frente a Problemas de Estrutura Multiplicativa. In: X encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Ilheus : Via Literarum,. v. 1. p. 1-11. (2010).

MARTINS, Glauce Vilela. **PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 5º ANO APROVADOS NO PNLD 2016**, COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -ENEM Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

MOREIRA, Marco Antônio. **A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS, O ENSINO DE CIÊNCIAS E A PESQUISA NESTA ÁREA**. Investigações em Ensino de Ciências-v7(1), p. 7-29, 2002. Disponível em <https://www.lume.ufrgs.br>pccbioufam>, acesso em 20 de janeiro de 2020.

MOURA Tiago Emanuel Domingos de; SANTOS Emily de Vasconcelos; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. **A BNCC PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: UMA DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO PROBABILÍSTICO E ARTICULAÇÕES COM OS PCN**. IV CONEDU. V.1, 2017, ISSN 2358-8829 disponível em www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/anais.php.

OLIVEIRA, Eliana Gomes de; QUEIROZ Cileda de. **COMBINATÓRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICADOS ANOS INICIAIS: UMA ANÁLISE DO PNLD**. Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática; Retrospectivas e Perspectivas. Curitiba, PR, 2013.

PESSOA Cristiane e BORBA. Rute. **O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DO INÍCIO DO ENSINO FUNDAMENTAL AO TÉRMINO DO ENSINO MÉDIO**. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010

PINHEIRO Carlos Alberto de Miranda **O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA APARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS.** Dissertação da Universidade do Estado do Pará. Belém, 2008/ Dissertação (mestrado).

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de análise combinatória por atividades** 2018. Dissertação (mestrado) – SÁ, Pedro Franco.

SÁ, Pedro Franco de. **Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear.** 2003. 203 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

SÁ Pedro Franco de; FOSSA John Andrew. **Algumas consequências e conclusões de uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos.** Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, 05. 2005, Porto. Anais...Porto. (Portugal), 2005.

SÁ, Pedro de Franco. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades.** Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I)

SADDO, Ag Almouloud; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. REVMAT: Revista Eletrônica de matemática. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22/23452>>. Acesso em: 10 jun. 2019

SANTOS, Robério Valente. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações fundamentais com números naturais.** 2017. 391 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/559493/1/Roberio%20Valente%20Santos.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2019

SILVA, José Jefferson da; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. **Análise das orientações do ensino de combinatória aos professores através do livro didático.** III CONEDU, 2013.

SILVA, Benedita das Graças Sardinha da. **Ensino de problemas envolvendo as quatro operações por meio de atividades.** 2015. 222 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015. Disponível em: <https://ccse.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/dissertacoes/09/benedita_das_graas_sardinha_da_silva.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2019.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos campos conceituais. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., Rio de

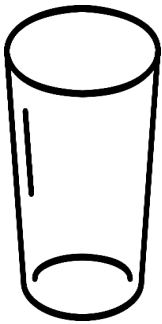
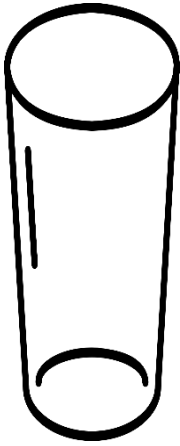
Janeiro, 1993. *Anais...* Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundação, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, Gerárd. **A criança, a matemática e a realidade. Tradução.** Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2014

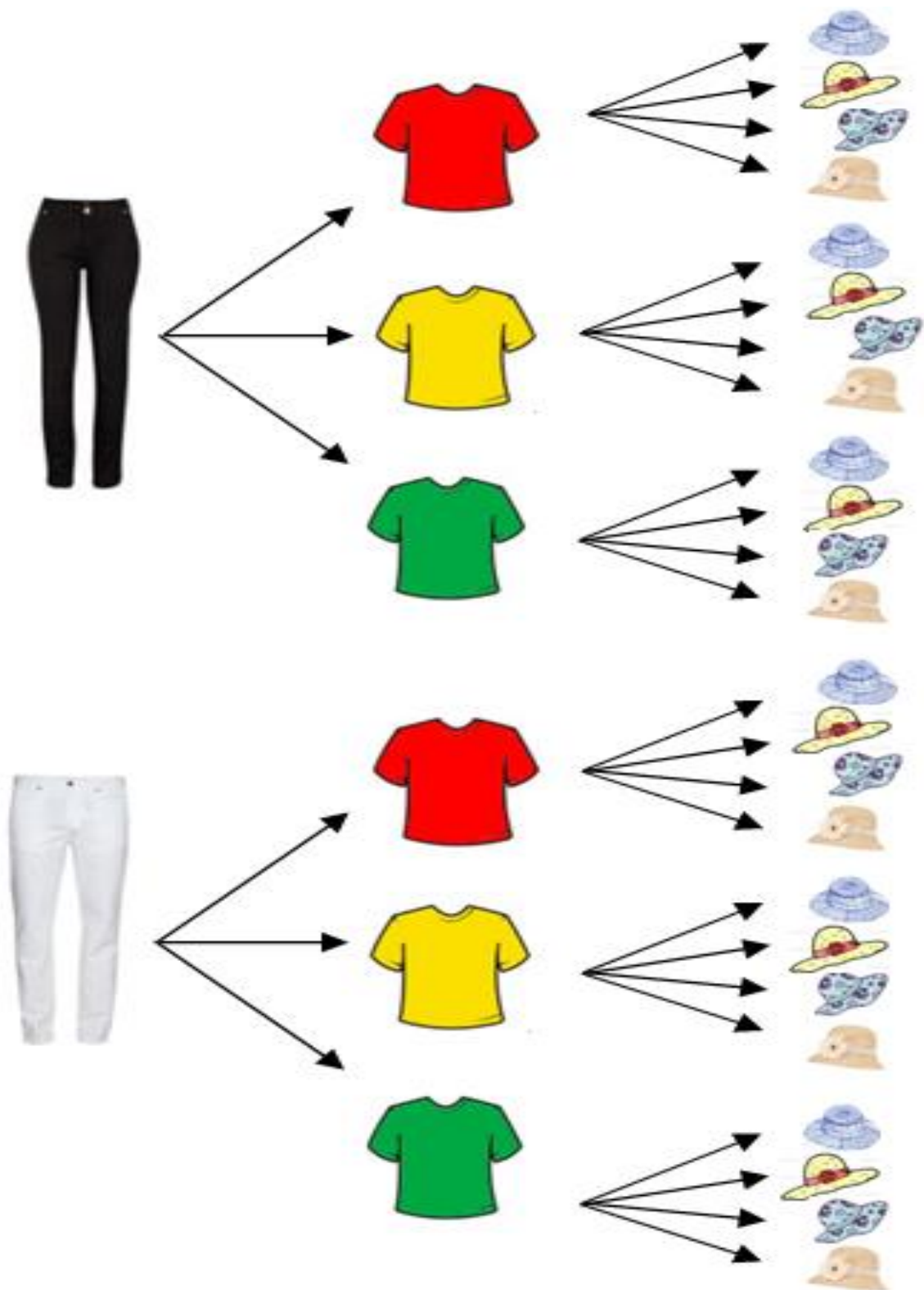
Apêndice A – Material da questão 1da atividade 7**Resultado**

Fonte: institutonetclaroembratel.org.br

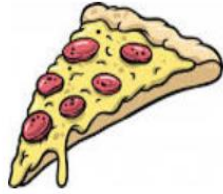
Apêndice B– Material da questão 2 da atividade 7



Apêndice C - Material da questão 3 da atividade 7



Apêndice D –Material da questão 4 da atividade 7



APÊNDICE E - Lista de Questões do pré-teste e pós-teste

1. Joana vai à festa de aniversário de sua prima; ela ganhou de presente de natal três calças (marrom, cinza e azul) e três blusas (preta, amarela e rosa). De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?
2. Numa lanchonete há 4 tipos de sucos. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos diferentes. De quantas maneiras você pode tomar um suco?
3. Pedro tem 2 calças (branca e preta), 3 camisas (vermelha, amarela e verde), 4 chapéus. De quantas maneiras diferentes ele pode se arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?
4. Numa lanchonete há 3 sabores de suco (morango, laranja e abacaxi), 2 tipos de salgados (hambúrguer e pizza) e 3 tipos de doces (brigadeiro, sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?
5. Vou dar uma festa de aniversário e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches comprei 2 tipos de queijo, 3 tipos de patê e 5 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos são acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?
6. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 2 tamanhos (pequeno ou grande), de duas formas (quadrada ou redonda) e de 4 tipos diferentes de sabores (morango, brigadeiro, banana ou laranja). Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?
7. Maricota quer ir de Belém para Alter do Chão, para isso necessita passar em Santarém. Para ir de Belém para Santarém temos as opções (barco, ônibus, carro e avião) e para ir de Santarém para Alter do Chão temos a opção (barco ou balsa). De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém para Alter do Chão?

APÊNDICE F – Quadro síntese da atividade de descoberta

Questão	O que a questão pedia?	As etapas são independentes	Qual o número de etapas Independentes?	Qual é o número de possibilidades da:			Qual o total de possibilidades?
				1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	De quantas maneiras diferentes Joana pode ir vestida para essa festa?						
2ª	De quantas maneiras você pode tomar um suco nessa lanchonete?						
3ª	De quantas maneiras diferentes ele pode ser arrumar usando uma calça, uma camisa e um chapéu?						
4ª	De quantas maneiras diferentes você pode escolher um lanche, comprando um suco, um salgado e um doce?						
5ª	Quantos tipos diferentes de sanduíches podem ser preparados, sabendo que todos vêm acompanhados de um tipo de pão, um tipo de queijo e um tipo de patê?						
6ª	Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?						
7ª	De quantas maneiras diferentes ela pode ir de Belém par Alter do Chão?						

APÊNDICE G - ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1. Um parque de diversões tem duas entradas (A e B) e quatro saídas(1,2,3 e 4). De quantas maneiras você poderia entrar e sair desse parque?



2. Numa lanchonete há quatro tipos de suco. Eles são servidos em copos de dois tamanhos. De quantas maneiras diferentes você pode escolher um suco para tomar?

3. Beto tem 12 camisetas e 5 bermudas. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, usando uma camiseta e uma bermuda?

4. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e cinco opções de sobremesa (sorvete, pudim, creme, brigadeiro e churros). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

5. Uma panificadora prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de 3 tamanhos, de três formas e de 4 tipos diferentes de sabores. Quantos tipos diferentes de bolo a panificadora pode preparar?

6. Maria ganhou algumas saias e 9 blusas de presente em seu aniversário. Ela percebeu que com as peças de roupa que ganhou poderia se arrumar de 36 maneiras diferentes, usando uma saia e uma blusa. Quantas saias a Maria ganhou de presente?

7. Um comerciante possui 8 tipos de sucos e deseja preparar alguns tipos de sanduíches, para poder oferecer 48 tipos de lanches aos seus clientes. Quantos tipos de sanduíche ele precisa preparar?

8. Há 24 caminhos diferentes para uma pessoa ir da cidade A para a cidade C passando por B. Se há 4 caminhos da cidade A para cidade B, então existem quantos caminhos da cidade B para a cidade C?

ANEXO A



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) senhor(a), o(a) menor, pelo qual o(a) senhor(a) é responsável, está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada: O ENSINO DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM POR ATIVIDADES, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Pedro Franco de Sá e Cira Naiá Campos Barbosa** vinculados a Universidade do Estado do Pará. Nesta pesquisa nós estamos buscando avaliar se uma sequência didática pode propiciar condições para que os alunos reconheçam e resolvam questões que utilizam o princípio fundamental da contagem.

Na participação do (a) menor, ele (a) responderá as perguntas a serem realizadas sob a forma de questionário e durante a execução da sequência didática será utilizado uma câmera como um recurso para captar vídeo e áudio do ambiente de sala de aula, após a transcrição das gravações para a pesquisa as mesmas serão excluídas. Também, durante a aplicação das atividades uma pessoa exercerá a função de observador e registrará toda a dinâmica de sala de aula.

O (A) senhor (a) e seu dependente não terão nenhum **custo ou quaisquer compensações financeiras** por participarem da pesquisa. **Não haverá riscos** de qualquer natureza relacionada à participação do(a) menor na pesquisa. O **benefício** relacionado à participação de seu dependente será de aumentar o conhecimento científico na área de ensino de matemática. O menor é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido** ficará com o senhor (a). Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Cira Naiá Campos Barbosa(91) 984026780 ou Pedro Franco de Sá (91)981523988. Poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de pós-graduação da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Belém, ____ de _____ de 2019.

Cira Naiá Campos Barbosa
Mestranda PPGED/UEPA

Eu, _____ autorizo o(a) menor _____ a
participar da pesquisa citada acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecida.

Assinatura do responsável

ANEXO B



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

Caro estudante,

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato. **Muito obrigado!**

QUESTÕES

1-Idade: _____ anos

2- Gênero: Masculino Feminino

3- Qual o tipo de escola em que você estuda?

Municipal Estadual Privada/Particular Conveniada

4- Você já ficou retido em algum ciclo?

Não Sim.

5- Você gosta de estudar Matemática?

Não gosto Gosto um pouco Gosto Gosto muito

6- Quem lhe ajuda nas tarefas de casa de Matemática?

Professor particular Pai Mãe Irmão Amigo(a) Ninguém Outro, quem? _____

7- Você costuma estudar Matemática fora da escola?

Só estudo em sala de aula Só no período de prova Só na véspera da prova Só nos fins de semana Alguns dias da semana Todos os dias

8- Suas notas em Matemática geralmente são:

Abaixo da média Na média Acima da média

9- Você tem dificuldade para aprender Matemática?

Não Um pouco Muita

10- Você se distrai nas aulas de Matemática?

Não, eu sempre presto atenção.
 Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de Matemática
 Sim, eu não consigo prestar atenção.

11- Você trabalha de forma remunerada?

- Não Às vezes Sim

12-Você costuma fazer compras (comércio, mercearia, supermercado, etc.)?

- Não Às vezes Sim

13- Qual a escolaridade do seu responsável masculino?

- Não escolarizado
 Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)
 Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)
 Ensino Fundamental Completo
 Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)
 Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)
 Ensino Superior

14- Qual a escolaridade do seu responsável feminino?

- Não escolarizado
 Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)
 Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)
 Ensino Fundamental Completo
 Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)
 Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)
 Ensino Superior

15- A maioria das suas aulas de matemática ocorre:

- Iniciando pela definição seguida de exemplos e exercícios.
 Com apresentação de uma situação problema para depois introduzir o assunto.
 Com um experimento para chegar ao conceito.
 Com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
 Com jogos para depois sistematizar os conceitos.
 Com uma história sobre o assunto.

16- Para exercitar a resolução de problemas nas aulas o seu(a) professor (a) costumava:

- Apresentar uma lista de exercícios a serem resolvidos.
 Apresentar jogos envolvendo o assunto.
 Solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático.
 Solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolverem.
 Não propor questões de fixação.

ANEXO C**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

Caro professor, você que trabalha na Escola Estadual.....está sendo convidado a participar da pesquisa intitulada: O ENSINO DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM POR AIVIDADES. Sob a responsabilidade da pesquisadora Cira Naiá Campos Barbosa, vinculado a Universidade do Estado do Pará. A sua colaboração na pesquisa será permitir que o pesquisador realize uma intervenção no horário das aulas de matemática, nesta devida escola, sob supervisão de um docente da mesma. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e assim sua identidade será preservada. Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Não há risco. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo em Análise combinatória. Você é livre para decidir se colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato pelo fone: (91)985020827. Poderá também entrar em contato com a direção do centro de ciências sociais e educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djama Dutra s/n. telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; FONE: 4009-9542.

Belém, ____ de _____ de 2019.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____ aceito participar voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do participante da pesquisa

Execução	Propôs questões com dados supérfluos. () sim () parcialmente (x) não	Sim Parcialmente Não	Perceberam quando haviam informações desnecessárias no enunciado das questões? () (X) (X) (X) (X) (X) (X) () () () ()
	Tratou com respeito os equívocos cometidos pelos alunos. (X) sim () parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	Perceberam quando havia falta de informações para permitir a resolução da questão? () (X) (X) (X) (X) (X) (X) () () () ()
	Propôs questões impossíveis de serem resolvidas. () sim () parcialmente (x) não	Sim Parcialmente Não	Perceberam quando era impossível resolver questões com as informações dadas? () (X) (X) (X) (X) (X) (X) () () () ()
	Estimulou a socialização das soluções. (X) sim () parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	Se mostraram interessados em socializar as suas resoluções? (X) (X) (X) (X) (X) (X) ()
	Não permitiu desrespeito por parte dos demais colegas. () sim (x) parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	Mostraram respeito com a apresentação das soluções pelos colegas? (X) (X) () (X) () (X) () () () () () () (X) () (X) () () () () () () () () () () () () () () ()
			Foram ao quadro socializar as soluções?

Correção	Elogiou o esforço dos participantes no momento da socialização. (X) sim () parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	(X) () ()	(X) () ()	(X) () ()	(X) () ()	(X) () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	Estimulou o respeito às soluções diferentes produzidas. (X) sim () parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	Discutiram alternativas de resolução?								
Finalização	Incentivou a resolução de todas as questões da lista. (X) sim () parcialmente () não	Sim	(X)	(X)	(X)	()	()	(X)	()	()	()
		Parcialmente	()	()	()	(X)	(X)	()	()	()	()
		Não	()	()	()	()	()	()	()	()	()
	Estimulou a elaboração da sentença e o preenchimento da tabela. (X) sim () parcialmente () não	Sim Parcialmente Não	Elaboraram sentença para decidir a operação a ser realizada?								
	Sim	(X)	(X)	(X)	()	()	(X)	()	()	()	()
	Parcialmente	()	()	()	(X)	()	()	()	()	()	()
	Não	()	()	()	()	(X)	()	()	()	()	()

Fonte: Pesquisa de campo 2019



Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação PPGED
TV. Djalma Dutra, s/nº-Telegráfo
660113-010 Belém-PA
www.uepa.br