

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



Breno Salgado Ferreira

Sequência Didática para o Ensino de Função Cosseno

Belém - PA
2023

Breno Salgado Ferreira

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Belém - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Ferreira, Breno Salgado

Sequência didática para o ensino de função cosseno / Breno Salgado Ferreira; orientador, Natanael Freitas Cabral .- Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. - Belém, 2023.

1. Ensino de matemática. 2. Funções (Matemática). 3. Geogebra. I. Cabral, Natanael Freitas (orient.). II. Título.

CDD 23 ed. 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

BRENO SALGADO FERREIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Data de aprovação: 16/06/2023

Banca examinadora

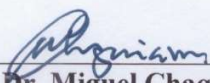


_____. Orientador

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral

Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ

Universidade do Estado do Pará

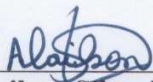


_____. Examinador Interno

Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN

Universidade do Estado do Pará



_____. Examinador Externo

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira

Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará / IFPA

Belém – PA

2023

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus, por me conceder a dádiva da vida, por se fazer presente em cada momento que passo, e por sempre colocar pessoas boas no meu caminho que me ajudam a enfrentar as etapas da minha vida. Por me dar saúde em um período em que muitos a perderam.

Minha eterna gratidão a cada um dos membros que compõem a minha família. À minha mãe Silvana Ferreira por me ajudar em momentos de crises fortes de ansiedade que tive ao longo desses anos. Ao meu pai Ermerino Ferreira por sempre me incentivar e acreditar no meu potencial em momentos em que até eu duvidei. À minha irmã Elinne Ferreira que me ajudou muito financeiramente para que eu pudesse me dedicar à pós-graduação. À minha irmã e meu cunhado Elayne Sousa e Fernando Sousa que também foram meu suporte em vários momentos. Tenho certeza de que não chegaria até aqui se não fosse por eles.

Ressalto também a importância do meu orientador Prof. Dr. Natanael Cabral na construção de cada etapa desta pesquisa, página por página. Por todas as vezes que sempre me ajudou a seguir firme, abrindo as portas de sua casa para nossas reflexões de ideias e por compartilhar sua experiência profissional comigo, muito obrigado por todos os seus ensinamentos ao longo da graduação, no mestrado, bem como, nos direcionamentos pessoais

Agradeço a meu grande amigo Prof. Dr. Pedro Franco de Sá que foi incansável, por vários momentos em que eu desisti, ele não desistiu de mim, me trouxe de volta ao foco lembrando-me de meu potencial e trazendo soluções para os problemas que sozinho não conseguiria solucionar. Ao Prof. Dr. Miguel Chaquiam que foi de uma nobreza e delicadeza invejável. Suas palavras me fortaleceram em vários momentos. Aos meus amigos Samantha, Bruno, Lucas, Michel, Jéssica e Eduardo que várias vezes me acolheram em meio a crises.

Por fim, agradeço a todo o corpo docente e discente do PPGEM-2019, por vários momentos de trocas de conhecimentos que levarei comigo para a minha vida profissional.

Breno Salgado Ferreira

RESUMO

FERREIRA, Breno Salgado. **Sequência Didática para o ensino de Função Cosseno**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de Estado do Pará, Belém, 2023.

O presente trabalho é uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), curso de mestrado em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. O Objetivo da pesquisa é analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma Sequência Didática (SD) envolvendo função cosseno a partir da seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições que uma SD elaborada segundo o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) trazem ao processo de ensino e aprendizagem da função cosseno aos estudantes da 2ª série do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA)? Para tal, foi realizado um levantamento histórico e bibliográfico para dar suporte e origem à questão sugerida tendo como interlocutores Gama (2020), Corrêa (2016), Domingos Neto (2014) e Mendes e Rocha (2010). Fizemos uma pesquisa sobre o uso do aplicativo GeoGebra em sala de aula e os benefícios que os movimentos gerados pelas imagens construídas podem trazer ao aluno no processo de aprendizagem a partir das pesquisas de Bortolossi (2020). Construímos uma SD estruturando-a conforme o modelo da UARC proposta por Cabral (2017), resultando em 5 UARCs que abordam o conteúdo da função cosseno, tendo como início a associação de números reais a um ponto do círculo S^1 , formulando assim a função de Euler e finalizando com a construção do gráfico da função do tipo $E(t) = a + b \cdot \cos(c \cdot t + d)$. Desta maneira, obtivemos como resultado que a SD desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino de Função Cosseno, devido a atratividade vinculada ao uso da tecnologia, bem como a linguagem adequada que permite uma evolução gradativa do objeto matemático, além do papel protagonista que o aluno assume no decorrer da sequência.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Trigonometria. Sequência Didática. Função Cosseno. GeoGebra.

ABSTRACT

FERREIRA, Breno Salgado. Didactic Sequence for teaching the Cosine Function. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) – State University of Pará, Belém, 2023.

The present work is research developed in the Graduate Program in Mathematics Teaching (PPGEM), a master's course in Mathematics Teaching at the University of the State of Pará. The objective of the research is to analyze the evidence of learning resulting from the application of a Didactic Sequence (SD) involving a cosine function based on the following research question: What are the contributions that a SD elaborated according to the model of Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC) bring to the process of teaching and learning the cosine function to 2nd grade high school students in a public school in the metropolitan region of Belém (PA)? To this end, a historical and bibliographical survey was carried out to support and originate the suggested question with Gama (2020), Corrêa (2016), Domingos Neto (2014) and Mendes and Rocha (2010) as interlocutors. We did a survey on the use of the GeoGebra application in the classroom and the benefits that the movements generated by the constructed images can bring to the student in the learning process based on research by Bortolossi (2020). We built a SD by structuring it according to the UARC model proposed by Cabral (2017), resulting in 5 UARCs that address the content of the cosine function, starting with the association of real numbers to a point of the circle S^1 , thus formulating the Euler's function and ending with the construction of the graph of the function of the type $E(t) = a + b \cdot \cos(c \cdot t + d)$. In this way, we obtained as a result that the developed SD presents potential for teaching the Cosine Function, due to the attractiveness linked to the use of technology, as well as the adequate language that allows a gradual evolution of the mathematical object, in addition to the protagonist role that the student assumes in the process. course of the sequence.

Keywords: Mathematics Teaching. Trigonometry. Didactic Sequence. Cosine Function. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - TELA INICIAL DO GEOGEBRA	26
FIGURA 2 - TELA INICIAL DO APP1.GGB.....	36
FIGURA 3 - TELA DO APP1.GGB PARA ÂNGULO IGUAL A 90°	37
FIGURA 4 - TELA INICIAL DO APP2.GGB.....	38
FIGURA 5 - TELA DO APP2.GGB PARA ÂNGULO IGUAL A 90°	38
FIGURA 6 - TELA DO FORMALIZAÇÃO1.GGB PARA ÂNGULO IGUAL A 720° .	39
FIGURA 7 - TELA INICIAL DO APP3.GGB.....	40
FIGURA 8 - TELA INICIAL DO FORMAILIZAÇÃO2.GGB.....	41
FIGURA 9 - RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	60
FIGURA 10 - ASSOCIANDO X AO VALOR DO COSSENO	62
FIGURA 11 - IMAGEM 1	80
FIGURA 12 - IMAGEM 2	80
FIGURA 13 - IMAGEM 3	81
FIGURA 14 - IMAGEM 4	81
FIGURA 15 - CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA.....	87

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - GRÁFICO APRESENTADO POR DANTE.....	63
GRÁFICO 2 - COSSENOIDE APRESENTADO POR DANTE	63
GRÁFICO 3 - IDADE DOS ENTREVISTADOS	65
GRÁFICO 4 - IDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO.....	66
GRÁFICO 5 - ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO	67
GRÁFICO 6 - AJUDA EM CASA.....	68
GRÁFICO 7 - PREFERÊNCIA POR MATEMÁTICA	69
GRÁFICO 8 - FREQUÊNCIA COM QUE REVISA OS ESTUDOS.....	70
GRÁFICO 9 - ESTUDO DE FUNÇÃO COSSENO	71
GRÁFICO 10 - ANO QUE ESTUDOU FUNÇÃO COSSENO	72
GRÁFICO 11 - EXPLICAÇÕES DO PROFESSOR.....	74
GRÁFICO 12 - METODOLOGIA DO PROFESSOR	75
GRÁFICO 13 - PRÁTICA DO CONTEÚDO.....	75
GRÁFICO 14 - DEPENDÊNCIA NAS DISCIPLINAS	77
GRÁFICO 15 - AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA	78

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Estrutura analítica de interações e produção de significado	31
Quadro 2 - Etapas do desenvolvimento da estória científica	32
Quadro 3 - Análises de intervenções do professor.....	33
Quadro 4 - Resultado do Teste de Verificação.....	79
Quadro 5 - UARC's.....	89
Quadro 6 - Percentual de respostas para UARC-1	110
Quadro 7 - Sugestões dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-1.....	111
Quadro 8 - Sugestão dos professores sobre a pergunta 3 da UARC-1	111
Quadro 9 - Percentual de respostas para UARC-2	112
Quadro 10 - Sugestão dos professores sobre a pergunta 1 da UARC-2	112
Quadro 11 - Percentual de respostas para UARC-3	113
Quadro 12 - Percentual de respostas para UARC-4	113
Quadro 13 - Percentual de respostas para UARC-5	114
Quadro 14 - Percentual de respostas para o conjunto das UARC's.....	114
Quadro 15 - Percepção dos professores sobre a pergunta 2 da etapa 2.....	115
Quadro 16 - Percepção dos professores sobre a pergunta 3 da etapa 2.....	115
Quadro 17 - Percentual de respostas para avaliação complementar da SD.....	116
Quadro 18 - Sugestão do professor sobre a pergunta 1 da etapa 3	117
Quadro 19 - Percepção dos professores sobre as contribuições da sequência didática	117
Quadro 20 - Percepção dos professores sobre as potencialidades da sequência didática	119
Quadro 21 - UARC's.....	134

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	16
1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)	17
1.2. SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS E AS UARC	20
1.3. O USO DO GEOGEBRA EM SALA DE AULA	25
1.4. ANÁLISE MICROGENÉTICA.....	27
1.5. ANÁLISE DO DISCURSO.....	31
1.6. MÉTODO UTILIZADO NA PESQUISA.....	34
2. SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO	43
2.1. REVISÃO DE ESTUDOS	43
2.1.1. Estudos Diagnósticos	44
2.1.2. Estudos Experimentais	47
2.1.3. Estudos Teóricos.....	55
2.2. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO	56
2.3. DIAGNOSTICO DOS ALUNOS EGRESSOS.....	64
2.3.1. Categoria 1 – Perfil Dos Alunos	65
2.3.2. Categoria 2 – Currículo	68
2.3.3. Categoria 3 – Metodologias De Ensino.....	73
2.3.4. Categoria 4 – Avaliação Da Aprendizagem	76
3. SOBRE A FUNÇÃO COSSENO.....	82
3.1. A HISTÓRIA DAS TABELAS TRIGONOMÉTRICAS	82
3.2. A FUNÇÃO DE EULER.....	86
4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	89
4.1 UARC 1: ASSOCIANDO OS PONTOS.....	90
4.2 UARC 2: PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE EULER.....	93
4.3 UARC 3: RESTRIÇÕES DA FUNÇÃO DE EULER.....	95
4.4 UARC 4: PARA UM LADO E PARA O OUTRO, PARA CIMA E PARA BAIXO.....	97
4.5 UARC 5: ESCOLHENDO A MELHOR ONDA.....	100
5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS	104
5.1. DADOS DA AVALIAÇÃO DOS PROFESSORES	109

5.1.1. Avaliação individual das UARC's	110
5.1.2. Avaliação do Conjunto das UARC's	114
5.1.3. Avaliação complementar	116
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	122
REFERÊNCIAS.....	126
APÊNDICES	133
ANEXOS	158

INTRODUÇÃO

A cada vez que pesquisamos, nos especializamos, ganhamos experiência e nos reinventamos, percebemos que o ensinar é uma prática que traz aspectos, situações e percepções que são constantemente modificadas a cada aluno, a cada turma, a cada instituição de ensino e a cada cultura em que o indivíduo está inserido. Como Cabral (2017) diz,

“O ato de ensinar e aprender é complexo em sua natureza mais superficial, portanto nesse processo de ensinar e aprender é inevitável a busca por modelos metodológicos alternativos que procuram minimizar as dificuldades de aprendizagem de Matemática largamente difundida pelas pesquisas na área” (CABRAL, 2017, p. 9).

O processo de ensino e aprendizagem em Matemática que vem sendo aplicado nas salas de aula do Estado do Pará tem demonstrado falhas. Isso fica nítido quando analisamos os resultados de exames nacionais que buscam fazer um levantamento sobre a educação no Brasil, como a Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) organizados pelo Ministério da Educação (MEC).

Segundo o MEC, os resultados da Prova Brasil aplicada em 2018 afirma que 7 de cada 10 alunos do Ensino Médio têm nível insuficiente em português e matemática. Os resultados apontam que as piores performances se concentraram nas regiões Norte e Nordeste. Dentre os Estados dessas regiões, o Estado do Pará. O Abismo fica ainda maior quando analisamos somente as Escolas Públicas.

Schastai (2017) afirma que é necessária uma educação de qualidade que permita o pleno desenvolvimento da pessoa e prepare para exercer adequadamente sua cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Fica evidente que a educação tem um papel social. Não só pela educação, o país sairá da situação em que se encontra, mas ela dará subsídios para enfrentar as revoluções técnico-científicas, as mudanças na formação da economia da sociedade (com grande contingente de desempregados, em consequência da automação e da robotização da produção e dos serviços) e as mudanças na formação cultural da sociedade decorrentes do desenvolvimento da informática. A educação também ajudará a diminuir as disparidades, produto de uma lógica capitalista selvagem, que configura um estado de calamidade. (RIBAS, 2005, p.21,apud SCHASTAI, 2017, p.27).

Nesse sentido, é importante que possamos sempre estar melhorando a nossa qualidade profissional buscando por novas técnicas de ensino. Para isso, torna-se necessário que façamos uma investigação para conhecer onde estão localizadas as dificuldades de aprendizagem dos alunos e de que forma podemos ultrapassar esses abismos de entendimento constatados até aqui.

A clareza dos objetivos de ensino auxilia o trabalho de planejar-avaliar replanejar da atividade docente, conduzindo o professor a uma maior compreensão do desenvolvimento das aprendizagens do aluno e da própria intervenção pedagógica. Tal procedimento intenciona mapear a relação entre o ensino e as aprendizagens para um ajustamento do planejado, dos objetivos pretendidos, da intervenção docente em função das necessidades de aprendizagens dos educandos. É preciso destacar que numa reflexão da relação entre o ensino da matemática e a prática avaliativa é importante se discutir desde uma análise a priori do planejamento até uma análise da produção dos alunos, intencionando compreender os seus distanciamentos e as suas aproximações. (GITIRANA, 2003, p. 68).

O professor que no processo de ensino e aprendizagem entra em comodismo, deixando de buscar por modelos metodológicos alternativos, não só se prejudica por tornar sua profissão cansativa e monótona, como também pode ter dificuldades para alcançar com êxito os seus objetivos, como o de ensinar e principalmente o de estimular os alunos ajudando-os no seu processo de aprendizagem, e por não ter em tal processo um sucesso efetivo, acaba culpando o aluno pelo seu fracasso. Por esse e outros motivos relacionados ao aperfeiçoamento profissional é necessário que o professor invista em pesquisas no sentido de diversificar propostas metodológicas alternativas para o ensino de matemática.

Diante disso, decidi criar uma sequência didática que possa facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Função Cosseno com base nas Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) proposta por Cabral (2017). Portanto, esse trabalho tem por objetivo analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma sequência didática envolvendo função cosseno. O lócus da pesquisa será nas Escolas Públicas situadas na cidade de Belém do Pará, com alunos que cursam a 2ª série do Ensino Médio que ainda não estudaram função cosseno.

Para a construção dessa Sequência Didática, tive como apoio as ideias de Cabral (2017) e de Zabala (1998). Para avaliar os efeitos da sequência nos alunos

é necessário de uma análise minuciosa baseado nas ideias de Goés (2000) a respeito da microgenética inspirada nas teorias de Vygotsky, e pela análise do discurso de Mortimer e Scott (2002).

Também foi necessária uma revisão dos estudos já feitos na área de Função Cosseno e das Funções Trigonométricas em geral. Separei em três categorias de pesquisas: as diagnósticas; experimentais; e teóricas. Fiz uma análise do livro didático de Paiva (2015) para investigar como que a Função Cosseno é apresentada nessa obra, sendo esta a indicada às Escolas Públicas do Estado do Pará. Também fizemos um diagnóstico de 77 alunos egressos da 2ª série do Ensino Médio da rede pública investigando seus perfis econômicos, o currículo da escola, a metodologia de ensino dos professores e avaliando a aprendizagem da função cosseno através de um teste de verificação contendo 10 questões discursivas.

Pesquisamos como se deu a criação da Função Cosseno, fazendo uma investigação histórica sobre o surgimento das tabelas trigonométricas até a estruturação da Função de Euler que é a função responsável por estruturar as funções periódicas.

Em seguida apresentamos a nossa sequência didática composta de 5 UARC's que abordam o conteúdo da função cosseno, tendo como início a associação de números reais a um ponto do círculo S^1 formulando assim a função de Euler e finalizando com a construção do gráfico da função do tipo

$$E(t) = a + b.\cos(c.t + d)$$

Posteriormente foram apresentados os resultados das análises geradas a partir da aplicação da Sequência Didática com uma turma de professores ex-alunos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Resultados estes subsidiados da elaboração de um questionário que direcionou a avaliação do constructo educacional pelos professores. Por fim, foram evidenciadas as considerações finais decorrentes do desenvolvimento da pesquisa.

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Nesse capítulo, apresentaremos os fundamentos teóricos que nortearam e possibilitaram o desenvolvimento dessa pesquisa, os quais foram divididos em seis partes na primeira parte trazemos a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1996) para entender como se dá o meio e as etapas para a construção do saber.

Na segunda etapa, fizemos uma breve pesquisa sobre os estudos de Zabala (1998) para entender a sua teoria das Sequências Didáticas, junto a isso, buscamos por Cabral (2017) e seu modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual ao qual nos espelhamos para construir a estrutura de nossa Sequência Didática.

Na terceira etapa, fizemos um estudo para pesar os benefícios que o uso do GeoGebra na sala de aula pode trazer aos alunos, e dessa forma atrelá-lo à nossa sequência. Nos baseamos nas pesquisas de Bortolossi (2020) para fundamentar nossos argumentos.

Na quarta parte apresentamos a análise microgenética na visão de Goés (2000), pois baseado nela é que se dará a abordagem metodológica dos registros adquiridos para que possamos fazer uma análise minuciosa dos resultados, através de relatos de episódios interativos.

Na quinta parte apresentamos as ideias de Mortimer e Scott (2002) sobre a análise do discurso, onde nos baseamos para entender quais ferramentas utilizaremos para obter uma melhor interação entre professor e aluno durante a aplicação da nossa sequência didática.

E na sexta parte apresentamos os métodos utilizados na pesquisa, descrevendo os procedimentos da pesquisa, sujeitos, contextos, instrumentos utilizados, o tratamento dos dados e os resultados esperados.

1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

O processo de aprendizagem deve ser envolvente ao aluno, e o papel do professor é criar meios que proporcionem esse envolvimento, onde o aluno possa se sentir motivado ao saber. Segundo Brousseau (1996), o aluno irá aprender a partir de constantes adaptações a um meio permeado de contradições, dificuldades e desequilíbrios. Esse meio será proporcionado pelo professor podendo ocasionar em duas hipóteses: *i)* o aluno consegue resolver o problema dando respostas corretas; ou *ii)* o aluno não consegue alcançar a resposta correta, carecendo de um ensino para resolver o problema proposto. Para ele

A concepção moderna de ensino vai então demandar ao professor provocar nos alunos adaptações desejáveis, por meio da escolha judiciosa, de problemas que ele propõe. Estes problemas, escolhidos de modo que o aluno possa aceitar devem fazê-lo reagir, falar, refletir, evoluir de seu próprio movimento. [...] O aluno sabe que o problema escolhido pelo professor visa a aquisição de um conhecimento novo, mas ele deve saber também que este conhecimento é inteiramente justificado por uma lógica interna da situação. (BROUSSEAU, 1996, p. 64).

Esse processo de aprendizagem a partir de uma série de situações reprodutíveis é chamado de Teoria das Situações Didáticas. Essas situações devem ser concebidas de maneira a provocar o aparecimento de conhecimentos que os alunos trazem, em respostas, espontâneas ou não, e em condições apropriadas. O fato de o aluno tentar responder, refazer suas respostas, responder novamente, indagar, argumentar, criar hipóteses, etc. foge do padrão comum utilizado em sala de aula (definição, exemplo resolvido e exercícios propostos), mudando a postura do discente de passiva para uma postura onde o aluno assume a responsabilidade quanto à sua própria aprendizagem. Dessa forma o aluno aprende se adaptando ao meio.

Essas situações relacionam-se com três elementos principais: o aluno, o saber e o meio no qual se dará a aprendizagem. Estes três elementos estabelecem fatores determinantes para a evolução dos comportamentos dos alunos, podendo caracterizar a aquisição de determinado conjunto de conhecimento mais significativo (ALMOULOU, 2014; TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 160).

O professor nesse processo passa a ter um papel de mediador, no entanto, é importante que o professor esteja atento aos conhecimentos prévios dos alunos para assim perceber suas limitações. Ao perceber as limitações dos alunos, o

professor poderá proporcionar com maior facilidade o meio mais adequado aos níveis de aprendizagem dos alunos, sendo capaz de prever os resultados com mais clareza.

Com a análise das limitações de cada aluno, o professor tem mais chance de sucesso na aceitação dos alunos às situações criadas pelo professor. Essa aceitação, segundo a Teoria das Situações, é denominada de *devolução*.

Na devolução os discentes aceitam o problema proposto pelo professor como seu e mobilizam conhecimentos para tentar resolvê-lo, sem a necessidade de o docente apelar às razões didáticas da situação. O discente envolve-se de tal maneira que ele próprio deseja resolvê-lo, e não mais mediante uma imposição do professor ou da escola. Quando o discente age voluntariamente, sem querer “ganhar pontos” ou apenas efetuar uma tarefa escolar, temos a situação *adidática* (BROUSSEAU, 1986, p. 49).

Na situação adidática, o aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites, na direção de adquirir novas competências com o seu próprio esforço. Portanto, é necessário que o professor oportunize ao aluno o máximo de independência, para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos para a resolução de problemas por meio de suas elaborações e de seus conceitos.

O professor deverá encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas aos alunos. Não é qualquer situação adidática que o aluno poderá resolver. Portanto, cabe ao professor fornecer-lhe aquelas que estarão ao seu alcance. Assim, para Brousseau (1986), quando o aprendiz tem dificuldade na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática.

Na Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida uma tipologia através da análise das principais atividades específicas da aprendizagem da matemática, construindo uma espécie de *jogo didático* envolvendo a tríade saber-professor-aluno.

O professor propõe uma questão com objetivo de o aluno construir algum saber, de ensinar; o aluno aceita essa proposta e tenta resolver a questão sem ter necessidade de estímulos do professor, sem apelar para questões didáticas. As regras deste jogo são explícitas a todos personagens envolvidos (BROUSSEAU, 1986, p. 49; ALMOULOU, 2014, p. 35).

No jogo didático há fases predominantemente de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, cujas principais características são:

- a) *Fase de ação*: O professor propõe um problema (ou uma situação) relacionado a um determinado conhecimento aos discentes. A solução mais adequada é justamente o conhecimento que o professor espera despertar no aluno;
- b) *Fase da formulação*: o aluno tem a oportunidade de discutir com o professor ou com seus pares sobre as decisões tomadas na fase de ação tentando escrever de tal forma que sua escrita esteja seja aceita por todos e tenta comunicar seu raciocínio mediante um modelo e uma linguagem mais clara possível;
- c) *Fase da validação*: o modelo encontrado pelos alunos é compartilhado aos que ainda estão com dificuldades em encontrá-lo. Aos que foram que foram comunicados o modelo, é facultado pedidos de verificação, demonstrações e explicações e o apresentador terá a oportunidade de justificar seu raciocínio mostrando-lhes a pertinência de seu modelo e, se possível, fornecer um modelo semântico para sua proposta de resposta;
- d) *Fase da institucionalização*: O professor institucionaliza o conhecimento, dando validade àqueles conhecimentos construídos corretamente nas fases anteriores, devendo “estabelecer e dar um *status* oficial a conhecimentos surgidos durante a atividade em classe” (D’AMORE, 2007b, p.83).

Essas fases não precisam seguir exatamente essa ordem para acontecer, porém a fase da institucionalização precisa ocorrer em momento preciso. Segundo Almouloud (2014), se ocorrer de forma prematura, o professor poderá interromper a construção dos alunos do conceito pretendido; ocorrendo de forma tardia, poderão surgir interpretações inexatas sobre o conceito, acarretando atraso na aprendizagem e dificuldades no momento da aplicação.

A Teoria das Situações Didáticas é um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos. Segundo Teixeira e Passos (2013), é um campo de reflexões para fazer progredir o ensino da matemática, onde o professor, com

fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitem apropriar-se de novos saberes.

Segundo Michele Artigue (1988), a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas. Desse modo, a Engenharia Didática é uma metodologia que visa “etiquetar uma forma de trabalho didático”. Esta etiquetagem é um meio para abordar as questões sobre as relações entre a investigação e a ação, no sistema de ensino, e sobre o papel que as realizações didáticas poderiam desempenhar em sala de aula, tendo em vista as metodologias da investigação didática.

Respeitando as etapas do jogo didático, e toda a Teoria das Situações Didáticas, será feita as análises dos indícios de aprendizagens apresentados na aplicação da nossa Sequência Didática.

1.2. SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS E AS UARC'S

O livro Sequência Didática: Estrutura e Elaboração de Cabral (2017) foi fundamental para a construção do nosso trabalho, pois a partir dele que construímos a estrutura de nossa sequência.

Cabral (2017) diz que o ato de ensinar e aprender é complexo em sua natureza mais superficial, portanto nesse processo de ensinar e aprender é inevitável a busca por modelos metodológicos alternativos que procuram minimizar as dificuldades de aprendizagem de Matemática largamente difundida pelas pesquisas na área. Segundo Cabral (2017):

[...] A necessidade de que o aluno saia da postura passiva fortalecida pelo modelo tradicional de ensino – ênfase na tríade definição, exemplo e exercício – e adote uma postura mais ativa, participativa, em colaboração com seus pares aprendizes e com o professor que assume uma conduta de provocador e organizador de ideias [...]. (CABRAL, 2017, p. 10).

Sob essa perspectiva, apostamos que o modelo metodológico que pode facilitar essa mudança de postura do professor de passiva para ativa é o modelo

das “Sequências Didáticas” – **SD** – que foram introduzidas no campo da aprendizagem de língua materna e linguagem escrita.

As principais referências sobre os estudos de sequências didáticas estão nos trabalhos de Zabala (1998), que define como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor quanto pelo aluno”.

Para que se possa utilizar um “empréstimo” desse modelo, é extremamente necessário adaptações e reformulações para que o modelo possa se encaixar às demandas específicas da disciplina para onde vai migrar. *“Essas adaptações acabam gerando um fenômeno polissêmico em torno desses modelos que, por sua vez, criam novos contornos estruturais e significados”*. (CABRAL, 2017, p.10).

Ao propor a **SD**, espera-se também uma mudança na postura dos alunos favorecendo um ambiente no qual “[...] os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam conjecturas e negociem significados e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar”. (KFOURI; D’AMBRÓSIO, 2006, p.2 apud CABRAL, 2017, p.10).

A partir dessas adaptações necessárias, Cabral (2017) propôs um modelo estruturante para a elaboração de Sequências Didáticas no ensino de matemática com base em Rêgo (1995) com os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural em Vygotsky do conceito de *Zona de desenvolvimento proximal* (**ZDP**), bem como com as contribuições de Goés (2000) com as noções de Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos nas interações verbais.

Com um olhar voltado para o processo de reconstrução de conceitos durante as aulas de Matemática concebi um construto teórico denominado Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) consolidado a partir de uma série de categorias de Intervenções Estruturantes criadas, especificamente, para esse fim. (CABRAL, 2017, p.11).

Para a construção dessa sequência didática, é necessário que o professor tenha conhecimento do conteúdo, relacionado à organização de conceitos, aos princípios e categorias explicativas na disciplina, à natureza da investigação no

campo e, ainda, a compreensão de como conhecimento novo é introduzido na comunidade científica na área.

Também é necessário de um conhecimento curricular que por sua vez se estabelece na compreensão acerca dos programas, no domínio dos materiais que dispõe para ensinar, na visão da história da evolução curricular do conteúdo a ser ensinado, bem como na capacidade de realizar articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado.

“Um profissional deveria ser capaz de analisar situações complexas referentes a várias formas de interpretações; de escolher, de maneira rápida e refletida, estratégias adaptadas aos objetivos e às exigências éticas; de extrair, de um vasto repertório de saberes, técnicas e ferramentas, aqueles que são mais adequados e estruturá-los em forma de dispositivo; de adaptar rapidamente seus projetos por ocasião de interações formativas; enfim, de analisar de maneira crítica suas ações e os resultados delas e, por meio dessa avaliação, de aprender ao longo de toda sua carreira”. (TARDIF, 2007, p.190 Apud CABRAL, 2017, p. 15).

Esse é o profissional que nós professores temos que nos aproximar, essa capacidade será possível a partir da evolução do saber de cada profissional, e essa aproximação é muito individual, ainda não é possível identificar o saber dos professores, ou criar um método que seja capaz de igualar o saber dos professores. Conforme Tardif (2007) apud Cabral (2017) explica “ninguém é capaz de produzir uma definição do saber que satisfaça todo mundo, pois ninguém sabe cientificamente, nem com toda certeza, o que é um saber”.

Mas a partir das ideias de Tardif, o professor não precisa atingir a um estágio ideal para começar a aprimorar a sua metodologia de ensino, basta um saber experiencial dos professores, constituído por conhecimentos discursivos, motivos, intenções conscientes, bem como competências práticas quanto à utilização de regras e recursos incorporados a sua ação.

Quando o professor começa a organizar as atividades de ensino em função dos núcleos temáticos – dimensão conceitual dos objetos de estudo – e dos procedimentos estruturais – dimensão técnica e estética, ele passa a criar sequências didáticas. Nesse sentido é necessária uma perspectiva de sistematização e, portanto, de planejamento meticuloso vinculado aos objetivos de ensino.

Para Araújo (2014) apud Cabral (2017) sequência didática é “um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito”. Zabala (1998) usa o termo “Sequências Didáticas” como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (p.18).

A sequência didática deve estar equilibrada de forma que não pode ferir os “interesses da matemática” em sua natureza de ciência formal, e não pode ferir os “interesses do aprendiz” em seu olhar metodológico.

Para Zabala (1998) os procedimentos da **SD** “tem a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo que permite incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação” através dessa tríade, é possível que o professor possa identificar a dimensão unitária do fenômeno de ensinar e aprender matemática.

As Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual propostas por Cabral têm a intenção de aproximar o professor de uma prática discursiva dialógica promotora de interações verbais reflexivas que possa em alguma dimensão, gerar condições para que os alunos explorem regularidades e, mesmo intuitivamente, possam perceber a necessidade e a utilidade de se estabelecer generalizações.

Para que o construto analógico das UARC's seja bem compreendido, passo a descrevê-lo em termos de seis categorias estruturantes que materializam o texto de uma SD de acordo como eu concebi em suas adaptações necessárias para o ensino-aprendizagem de Matemática nos níveis fundamental e médio, são elas: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f) Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r) e, finalmente, as Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a). (CABRAL, 2017, p.40).

Cabral (2017) usa o termo “*Intervenção*” no sentido de que existe uma intencionalidade nas ações dirigidas pelo professor diante de seus alunos, dessa forma ele pretende evidenciar que o papel de orientador do pensamento em construção é uma prerrogativa intrasferível do professor. Essas intervenções tem a intenção de promover, de acordo com os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural (Vygotsky), as chamadas Zonas de Desenvolvimento Proximal (**ZDP**) que

permitem ao aprendiz avançar de um Nível de Desenvolvimento Potencial (**NDP**) para um Nível de Desenvolvimento Efetivo (**NDE**).

A **Intervenção Inicial** é a primeira peça do discurso dialógico-didático, é um aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito. Tem a intenção definida de estimular os aprendizes à percepção de alguma verdade do pensamento matemático e que, associada com outras percepções articuladas a essa primeira, pode exercer um papel facilitador na reconstrução conceitual pretendida.

A **Intervenção Reflexiva** irá se referir a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução, deve vir em forma de questionamento e mesmo que para o aluno esse questionamento não tenha um sentido mais relacional, as ideias geradas tangenciam fatos importantes que facilitam a reconstrução final. O aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer, verificar possibilidades e estabelecer as consequências.

Nessa perspectiva, tudo passa por uma perspectiva de planejamento e de identificação, por parte do professor, sobre a organização atribuída aos conceitos circunscritos, quais sejam, àqueles que de forma associada potencializam a (re)descoberta do conceito objeto de reconstrução (CABRAL, 2017, p.41)

Na **Intervenção Exploratória** tende-se a aprofundar o olhar do aluno a partir da solicitação de certos procedimentos como simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações. A ideia é que a partir da Intervenção reflexiva e da Intervenção Exploratória, o aluno seja estimulado a perceber certas regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual.

As “redescobertas” dos alunos se dará na **Intervenção Formalizante**, onde as percepções são consolidadas em uma linguagem mais abstrata satisfazendo as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.

Após essas intervenções o professor poderá inserir as **Intervenções Avaliativas Restritas** que seria uma primeira etapa de checagem do conceito em tese reconstruído. Nessa etapa se busca confrontar o aluno em dois aspectos

fundamentais do saber matemático: o que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações).

E por fim estão as **Intervenções Avaliativas Aplicativas** cuja finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação em diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino. Em um nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual.

1.3. O USO DO GEOGEBRA EM SALA DE AULA

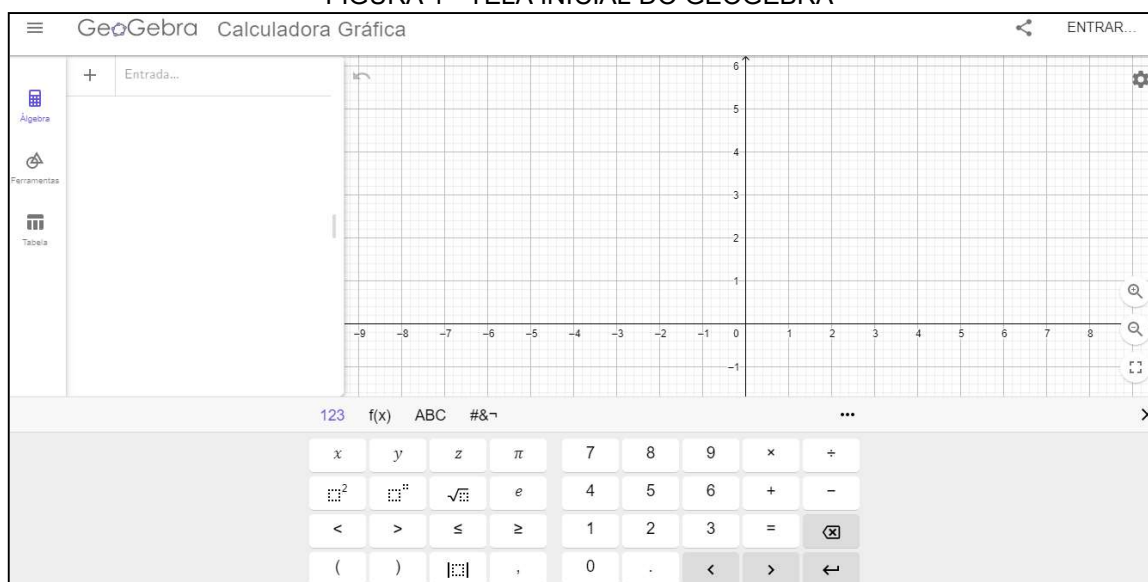
Na construção da nossa Sequência Didática, achamos conveniente utilizar um software que pudesse reproduzir os gráficos gerados pela Função Cosseno. Pois, segundo Bortolossi (2020), uma das tarefas do pesquisador em educação é tornar explícito aquilo que fica invisível na prática da sala de aula.

No entanto, era necessário um software que não só gerasse o gráfico, mas que também cumprisse alguns pré-requisitos. O primeiro pré-requisito é que fosse um software fácil de ser manipulado pelos alunos. Em seguida, era importante que fosse um software livre, visto que o nosso lócus de pesquisa trata-se de uma Escola Pública do Estado do Pará. E por último era necessário um software que fosse de fácil instalação ou que pudesse ser utilizado de outras formas, como em navegadores ou em aplicativos para celular. Após nossa pesquisa, decidimos eleger o software GeoGebra como o mais adequado para ser utilizado na nossa Sequência Didática.

Criado pelo austríaco Markus Hohenwarter em sua dissertação de mestrado (HOHENWARTER, 2002), o GeoGebra (<<http://www.geogebra.org>>) é um software gratuito desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Por meio de suas múltiplas janelas, o GeoGebra reúne, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação em Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de

apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Existem versões do software para computadores desktop (Windows, Linux e Mac OS), tablets Android e IOS e mais recentemente, para smartphones Android, além de ser portátil, isto é, as páginas web interativas e dinâmicas criadas com a tecnologia do GeoGebra podem ser executadas nos principais navegadores (Firefox, Google Chrome, Internet Explorer, Opera). As atividades poderão ser armazenadas em um servidor para uso online pela internet ou, alternativamente, elas podem ser baixadas e disponibilizadas em CDs e pen drives para uso off-line (isto é, em um navegador, mas sem a necessidade de uma conexão com a internet).

FIGURA 1 - TELA INICIAL DO GEOGEBRA



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Enquanto o movimento aparece nas construções dinâmicas do Geogebra, nas brincadeiras em sala de aula, nos gestos de professores e alunos, pode se passar despercebido o porquê de fazer o que se faz. Segundo Bortolossi (2020) As lentes teóricas da Psicologia e da Neurociência evidencia o importante papel que o movimento tem no ensino, na aprendizagem e em nossas vidas de um modo geral.

Algumas partes do cérebro reagem especificamente a estímulos relacionados com movimento, como o córtex temporal medial e o córtex temporal

medial superior. Mesmo fotos estáticas de objetos em movimento (como um jogador de basquete arremessando uma bola) ativam essas regiões, enquanto fotos de poses paradas não. Como observa Tversky (2019), apesar de incompletos, ambíguos, inconsistentes e enviesados, esses aparatos espaciais mentais desempenham papel fundamental em nossas vidas e em nossas imaginações: eles permitem vislumbrar outros mundos, mundos que ainda não foram vistos, e mesmo mundos impossíveis – mundos da ficção, da arte e da ciência.

Um dos fortes recursos do GeoGebra é o de permitir movimentos e mudanças de parâmetros: uma vez que uma determinada construção é feita, os elementos iniciais constituintes da construção podem ser alterados e o aluno consegue então, em tempo real, verificar como estas mudanças afetam os resultados finais. Com isto, o aluno encontrará um ambiente propício à visualização, análise e dedução informal da situação estudada e, a partir desta interação, promover sistematizações posteriores.

Tal tipo de atividade se enquadra na educação STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics), uma abordagem que procura promover a aprendizagem de forma interdisciplinar e holística, integrando as disciplinas de Ciências, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática estimulando o engajamento, a experimentação, a criatividade, a inovação, a curiosidade, a investigação, a colaboração, a resolução de problemas, o uso e a validação de modelos (KHINE; AREEPATTAMANNIL, 2019, p. 05)

O GeoGebra é conhecido por ser um software de matemática dinâmica, e acreditamos que esse dinamismo, criando uma variedade de exemplos de uma mesma situação, contribuirá muito para que possamos alcançar os objetivos de cada UARC da nossa sequência didática.

1.4. ANÁLISE MICROGENÉTICA

Nos campos da educação e da psicologia, no processo de investigação sobre a constituição do sujeito, vêm sendo recorrida a abordagem metodológica referida como “análise microgenética”. A análise não é micro porque se refere à

curta duração de eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante o processo e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos de cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. Essa análise busca investigar de forma detalhada através de relatos de episódios interativos.

De um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção de detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 9).

Goés sugere que, para ter um melhor registro desses dados, essa análise deve estar associada ao uso de videogravação, envolvendo o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição. A análise microgenética está orientada para os detalhes das ações, para as interações e cenários sócios culturais, para o estabelecimento de relações entre microeventos e condições macrossociais.

A visão genética vem das proposições de Vygotsky (1981, 1987a) sobre o funcionamento humano, e, dentre as diretrizes metodológicas que ele explorou, estava incluída a análise minuciosa de um processo, de modo a configurar a sua gênese social e as transformações do curso de eventos. Essa forma de pensar a investigação foi denominada por seus seguidores como “análise microgenética”. (GOÉS, 2000, p. 11).

Esse critério genético qualificativo não tem nenhuma filiação teórica. Piaget também usou estratégias que podem ser consideradas microgenéticas, porém Vygotsky transformou muito a ideia original de entrevista de Piaget, segundo ele os processos humanos têm gênese nas relações com o outro e com a cultura, e são essas relações que devem ser investigadas ao examinar o curso de ação do sujeito.

Para Vygotsky (1984). “o método é, ao mesmo tempo, pré-requisito e produto, o instrumento e o resultado do estudo”, (p. 74). Para isso, talvez seja necessários vários tipos de investigação e diretrizes metodológicas amplas de forma que possa abranger às teses fundamentais: de que a gênese das funções psicológicas está nas relações sociais e de que a constituição do funcionamento

humano é socialmente mediada, num curso de desenvolvimento que abrange evoluções e, sobretudo, revoluções.

No texto “Problemas de Método” (Vygotsky, 1984) ele apresenta alguns de seus princípios metodológicos propondo um estudo de processos e não de produtos ou objetos, pois “é somente em movimento que um corpo mostra o que é” (p. 74). Segundo Goés (2000) Vygotsky em seu texto:

Argumenta pela necessidade de examinar a dimensão histórica e alerta para o fato de que privilegiar a história não é estudar eventos passados, mas sim o curso de transformação que engloba o presente, as condições passadas e aquilo que o presente tem de projeção do futuro. Inclui nessas diretrizes a importância de se identificar relações dinâmico-causais, devendo o investigador buscar distinguir a aparência e os processos da dinâmica subjacente. A expressão dinâmico-causal corresponde também à ideia de que causa e efeito não são entidades de posição imutável. A causa pode transformar-se em efeito e este em causa, dinamicamente. (GOÉS, 2000, p. 13).

Para Wertsch (1985), a tese da constituição cultural dos processos humanos, a visão de desenvolvimento humano e a preocupação com a dimensão histórica levaram a Vygotsky a abordar vários domínios genéticos: a filogênese, a história sociocultural, a ontogênese e a microgênese. Fazendo análises sobre a evolução da espécie e as características das sociedades “primitivas”. Dessa forma, Vygotsky colaborou com os estudos sobre comunidades em transformação.

Wertsch (1985), com base nas proposições e pesquisas de Vygotsky, define a análise microgenética como aquela que envolve o acompanhamento minucioso da formação de um processo, detalhando as ações dos sujeitos e as relações interpessoais, dentro de um curto espaço de tempo.

Essa duração corresponde a uma ou poucas sessões, em delineamentos planejados ou a curtos segmentos interativos, em situações naturais. É uma espécie de “estudo longitudinal de curto prazo” e uma forma de identificar transições genéticas, ou seja, a transformação nas ações dos sujeitos e a passagem do funcionamento intersubjetivo para o intra-subjetivo. Portanto, desse ponto de vista, é destacado o exame de processos interativos e de pistas de internalização.

Goés (2000) acredita que esse tempo é subjetivo, depende muito do processo que está sendo analisado, as vezes é mencionado o tempo total e as vezes é mencionado apenas alguns lapsos de tempo entre um acontecimento e

outro, dessa forma a duração, não parece ser um critério, em si e por si. “Em outras palavras, não há critérios postos quanto a recortes temporais para a configuração de uma análise microgenética”.

Meira (1997) propõe-se a entender a microgenética como uma microanálise interpretativa para fins de estudos cognitivos-interacionais. Apresentando um relato de pesquisa sobre as formas pelas quais estudantes elaboram representações matemáticas, o autor esclarece que, em pesquisas desse tipo, devem ser valorizados os processos e os conteúdos semânticos, abrangendo a descrição cuidadosa da interação em episódios prototípicos, em termos das ações cognitivas, comunicativas e gestuais. Os dados são interpretados na direção de uma minuciosa apresentação narrativa e explicativa.

Rojo (1997), ao discutir as formas de estudo minuciosas de processos interativos, distingue três orientações: a cognitivista, que focaliza o plano intrapessoal durante os eventos interativos; a interacionista, que examina as relações interpessoais e o jogo conversacional como condição para a formação do funcionamento intrapessoal; e a discursiva ou enunciativa, que privilegia a dimensão dialógica e relaciona interação, discurso e conhecimento.

Fontana (1996) focaliza os modos de elaboração conceitual apresentados por crianças em atividades da área de Estudos Sociais, examinando detalhadamente o fluxo das enunciações nos diálogos entre professora – alunos e alunos – alunos. Mostra as minúcias do jogo intersubjetivo, no qual os significados se transformam num movimento heterogêneo de conceitualização dos participantes. O exame da apropriação de vozes de interlocutores presentes e da impregnação do processo por discursos outros permite identificar diversas condições sociais imediatas e contextuais das elaborações e reelaborações dos interlocutores, que vão se constituindo como sujeitos cognoscentes.

Com base nas perspectivas desses autores, faremos a análise minuciosa da aplicação do nosso trabalho para que possamos perceber o quão efetiva poderá ser a nossa sequência didática no processo de aprendizagem dos alunos. A partir da análise de minúcias, detalhes e ocorrências residuais, como indícios,

pistas, signos de aspectos relevantes de um processo em curso. Permitindo assim interpretar o fenômeno de interesse.

1.5. ANÁLISE DO DISCURSO

Nesta parte do trabalho, iremos explicar como será baseada a interação entre o professor e o aluno durante a aplicação da sequência didática. Tendo as contribuições de Mortimer e Scott (2002) que trazem uma ferramenta para analisar essas interações professor/aluno e a produção de significados em salas de aula.

Baseados também nas ideias de Vygotsky (1987), eles acreditam que a construção de significados é dada a partir da interação social, sendo essa construção relacionada diante da perspectiva sócio-histórica e sociocultural. Só a partir desse viés que os significados são internalizados pelos indivíduos. Dessa forma, as interações discursivas são consideradas como constituintes do processo de construção de significados.

A estrutura analítica criada por Mortimer e Scott (2002) é baseada em cinco aspectos inter-relacionados, que focalizam o papel do professor e são agrupadas em termos de focos de ensino, abordagem e ações:

QUADRO 1 - ESTRUTURA ANALÍTICA DE INTERAÇÕES E PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO

Aspectos da Análise		
i. Focos do ensino	1. Intenções do Professor	2. Conteúdo
ii. Abordagem	3. Abordagem comunicativa	
iii. Ações	4. Padrões de Interação	5. Intervenções do professor

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 285)

Sobre as intenções do professor Mortimer e Scott (2002) esboçam um quadro ao qual cada etapa do desenvolvimento da ‘estória científica’ precisa ter um foco para produzir um tipo de ‘performance pública’ dirigida pelo professor, através de seu roteiro, para o plano social da sala de aula.

QUADRO 2 - ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DA ESTÓRIA CIENTÍFICA

Intenções do professor	Foco
Criando um problema	Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente, no desenvolvimento inicial da 'estória científica'.
Explorando a visão dos estudantes	Elicitar e explorar as visões e entendimento dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos.
Introduzindo e desenvolvendo a 'estória científica'	Disponibilizar as ideias científicas (incluindo temas conceituais, epistemológicos, tecnológicos e ambientais) no plano social da sala de aula.
Guiando os estudantes no trabalho com as ideias científicas, e dando suporte ao processo de internalização	Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com toda a classe. Ao mesmo tempo, dar suporte aos estudantes para produzirem significados individuais, internalizando essas ideias.
Guiando os estudantes na aplicação das ideias científicas e na expansão de seu uso, transferindo progressivamente para eles o controle e responsabilidade por esse uso	Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade (Wood et al., 1976) pelo uso dessas ideias.
Mantendo a narrativa: sustentando o desenvolvimento da 'estória científica'	Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 286)

Sobre o conteúdo do discurso na sala de aula, no que se restringe à 'estória científica', Mortimer e Scott (2002) estruturam os termos em três categorias que consideram como fundamentais na *linguagem social* (Bakhtin, 1986) da ciência escolar. Essas ferramentas do discurso são: a descrição do tema a ser ensinado; a explicação sobre ele; e a generalização.

Quanto à abordagem comunicativa, são identificadas quatro classes, que "são definidas por meio da caracterização do discurso entre professor e alunos ou entre alunos em termos de duas dimensões: discurso *dialógico* ou de *autoridade*; discurso *interativo* ou *não-interativo*". (MORTIMER; SCOTT, 2002, p. 287).

Referente aos padrões de interação, o autor nos diz que a interação surge a partir da troca de "turnos" de falas na sala de aula entre professor e alunos, sendo a o mais comum as tríades I-R-A (iniciação do professor, Resposta do aluno,

Avaliação do professor). Mas esse não é um único padrão de interação. As vezes o professor pode fazer curtas intervenções em cima de enunciados elaborados pelos alunos, seja repetindo o que o aluno acabou de falar ou fornecendo um feedback. Nesse caso o padrão já não se trata mais de uma tríade, podendo ser do tipo I-R-P-R-P... onde P significa uma ação discursiva de permitir o prosseguimento da fala do aluno, ou do tipo I-R-F-R-F... onde F é um feedback para que o aluno elabore um pouco mais a sua fala.

No quinto e último aspecto das análises de intervenções do professor, a estrutura foi baseada no esquema de Scott (1998) ao qual identifica seis formas especificando além da intervenção, o foco e as ações do professor.

QUADRO 3 - ANÁLISES DE INTERVENÇÕES DO PROFESSOR

Intervenção do professor	Foco	Ação – o professor:
1. Dando forma aos significados	Explorar as ideias dos estudantes	Introduz um termo novo; parafrasea uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados.
2. Selecionando significados	Trabalhar os significados no desenvolvimento da história científica	Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante
3. Marcando significados chaves		Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado.
4. Compartilhando significados	Tomar os significados disponíveis para todos os estudantes da classe	Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe.
5. Checando o entendimento dos estudantes	Verificar que significados os estudantes estão atribuindo em situações específicas	Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escreva suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados.
6. Revendo o progresso da história científica	Recapitular e antecipar significados	Sintetiza os resultados de experimentos particulares; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da história científica até então.

Fonte: Mortimer e Scott (2002, p. 288)

Acreditamos que diante das ferramentas expostas aliadas com a Análise Microgenética junto com o aporte dos autores citados nessa seção, poderemos fazer uma análise minuciosa quanto à aprendizagem dos alunos perante a aplicação da sequência didática elaborada.

1.6. MÉTODO UTILIZADO NA PESQUISA

A presente pesquisa é classificada no método de estudo de caso, que conforme Gil (2010, p.37), consiste em um “estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita o seu amplo e detalhado conhecimento, tarefa praticamente impossível mediante outros delineamentos”

Para a construção de minha pesquisa, passei por várias etapas, na primeira etapa fiz uma Revisão da Literatura em busca do que tem sido produzido nos últimos anos a respeito do ensino de função cosseno. Na ausência de trabalhos específicos sobre função cosseno, ampliei a pesquisa ao ensino de funções trigonométricas. Dentre os interlocutores, posso destacar o trabalho de Gama (2020) que utiliza também o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual para analisar os indícios de aprendizagem de uma Sequência Didática sobre Função Seno.

Foi através do trabalho de Gama (2020), que construí o meu aporte teórico para a análise e tratamento dos dados que seriam obtidos na pesquisa. Fiz também um levantamento histórico para entender como se deu a evolução do tema de Função Cosseno, buscando pelos principais personagens que vão de Hiparco de Niceia (190 – 120 a.C.) até Leonhard Euler (1707 – 1783).

Quanto à aprendizagem de Função Cosseno, fiz uma pesquisa com alunos egressos da 2ª série do Ensino Médio de duas Escolas Públicas de Belém, que mostrou através da análise de um teste de verificação que os resultados são insatisfatórios quando se trata sobre a aprendizagem de função cosseno. Poucos

alunos acertaram as questões do teste, e o que me deixou mais impressionado foi os vários registros de alunos que não tem autoconfiança com a matemática.

Fiz também uma análise sobre como os livros didáticos vêm abordando o assunto de Função cosseno. Analisei dois livros, o primeiro foi o Paiva (2015), que é o livro que está sendo utilizado nas Escolas Públicas de Ensino Médio do Estado do Pará, e o segundo livro foi Dante (2015). Ao analisar os dois livros, percebi formas distintas de abordagem do tema, revelando diferentes níveis de tratamento do assunto.

Com a SD pronta, segui para a fase de planejamento e possibilidades de execução da experimentação. Onde pensei inicialmente na necessidade de eleger uma determinada turma da 2ª série do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado do Pará para aplicação do produto, a fim de que ele seja experimentado por estudantes, com a devida autorização dos responsáveis por meio de termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE).

Para utilização desta ideia, existe a necessidade da escolha de uma outra turma. Com intuito de que uma seja a de controle, em que um professor colaborador ministrou o conteúdo de forma expositiva com apoio do livro didático e a outra, a ser direcionada para a aplicação da SD elaborada.

Para ter a garantia de que os sujeitos conheçam os elementos mínimos necessários para a aplicação da Sequência Didática, realizaria uma oficina, explorando os conteúdos básicos da trigonometria como arcos e ângulos, unidade de medida em radianos, circunferência unitária, arcos côngruos e determinação de quadrantes.

Para resolver cada UARC, os alunos vão precisar da lista UARC impressa em mãos, lápis ou caneta para preencher os dados percebidos no GeoGebra, e os arquivos ggb abertos no computador ou em um celular. Como o aplicativo do celular, na minha opinião, é mais difícil de operar, sugiro que seja utilizado o laboratório de informática da escola onde se pretende aplicar a sequência. Portanto os arquivos ggb estarão disponíveis no computador do laboratório.

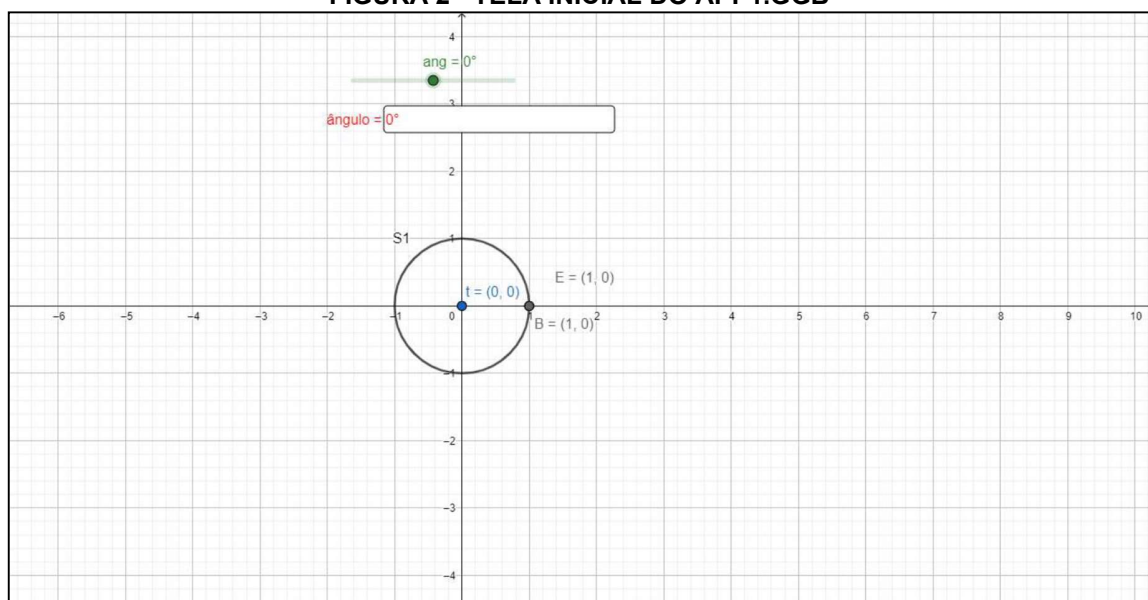
Na ausência de um laboratório de informática disponível, pode utilizar o aplicativo do celular, mas nesse caso, o professor que estiver aplicando a

sequência deve ter uma atenção redobrada quanto à dificuldade dos alunos em operar o aplicativo.

Os arquivos ggb podem ser abertos no software Calculadora Gráfica GeoGebra previamente instalados no computador, ou em qualquer navegador através do site <https://www.geogebra.org/graphing>. Caso o professor queira utilizar um celular ou tablet ao invés do computador, ele precisará instalar previamente o aplicativo GeoGebra, que está disponível para as plataformas Android e IOS.

No total são 5 arquivos ggb, sendo eles app1.ggb; app2.ggb; app3. ggb; formalização1.ggb; e formalização2.ggb. Para resolver a UARC 1 e UARC 2, o aluno irá utilizar o arquivo app1.ggb.

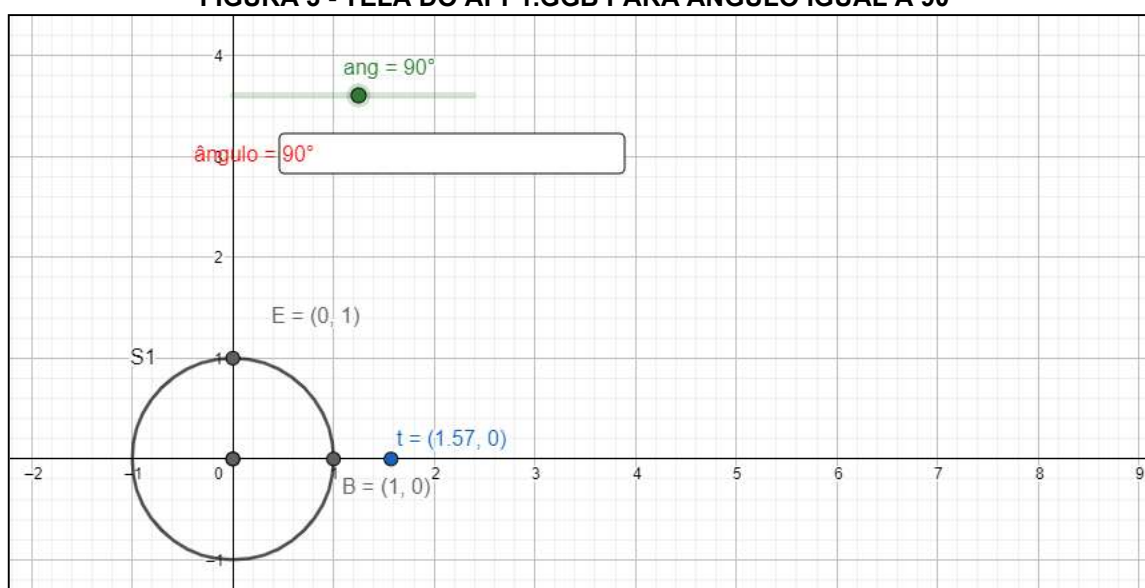
FIGURA 2 - TELA INICIAL DO APP1.GGB



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Através do cursor do mouse ou touchpad, a barra ang (verde) pode deslizar para o ângulo que o aluno desejar, simultaneamente o ponto t (azul) irá gerar uma reta que representará a distância percorrida pelo arco gerado pelos pontos E e B. O ponto t (azul) também pode ser movido pelo cursor. Além dessas opções, o aluno também poderá utilizar a caixa de entrada ângulo (vermelha) para inserir o ângulo precisamente, sem precisar procurá-lo deslizando a barra ang (verde) ou o ponto t (azul).

FIGURA 3 - TELA DO APP1.GGB PARA ÂNGULO IGUAL A 90°



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

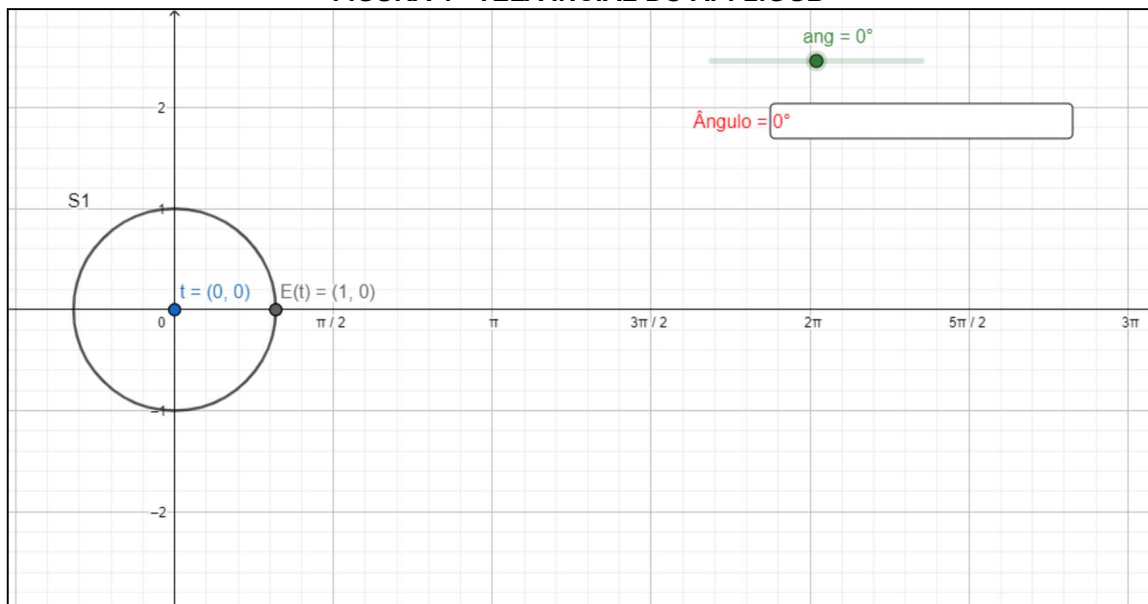
Na UARC 1 denominada “Associando os pontos”, é esperado que, através dos dados percebidos pelo aluno ao manipular o arquivo app1.ggb, o aluno possa preencher a tabela disponibilizada na lista UARC 1 e assim então, perceber que os números reais estão associados a apenas um ponto do círculo S^1 formando assim uma função $E(t) = t = (x, y)$. Dessa forma, o aluno irá perceber que a função pode ocorrer de um número real para um par ordenado.

Provavelmente o aluno que não tenha tanto contato com a tecnologia tenha certa dificuldade de compreender o aplicativo, nesse caso, o professor precisa ficar atento a quais dados o aluno extrairá a partir da análise do aplicativo. O objetivo do professor é definir a função de Euler.

Na UARC 2 denominada “propriedades da função de Euler” é esperado que o aluno perceba os padrões que se repetem conforme os movimentos entre a barra ang (verde) representando o arco e o ponto t (azul), e a partir disso, possa definir as propriedades da função de Euler como domínio, imagem e periodicidade. É possível que o aluno não saiba as definições de domínio e imagem, nesse caso o professor deve fazer intervenções orais dando as definições necessárias para garantir que ao final da UARC 2 todos os alunos saibam o domínio, imagem e periodicidade da função de Euler.

Na UARC 3 denominada “Restrições da função de Euler” o aluno irá precisar do arquivo app2.ggb. aberto.

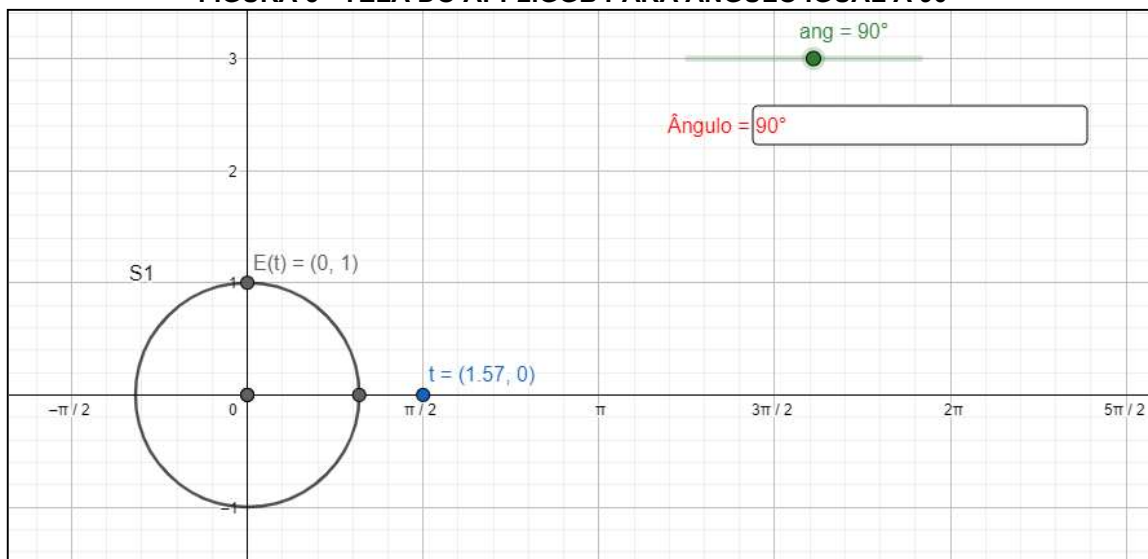
FIGURA 4 - TELA INICIAL DO APP2.GGB



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

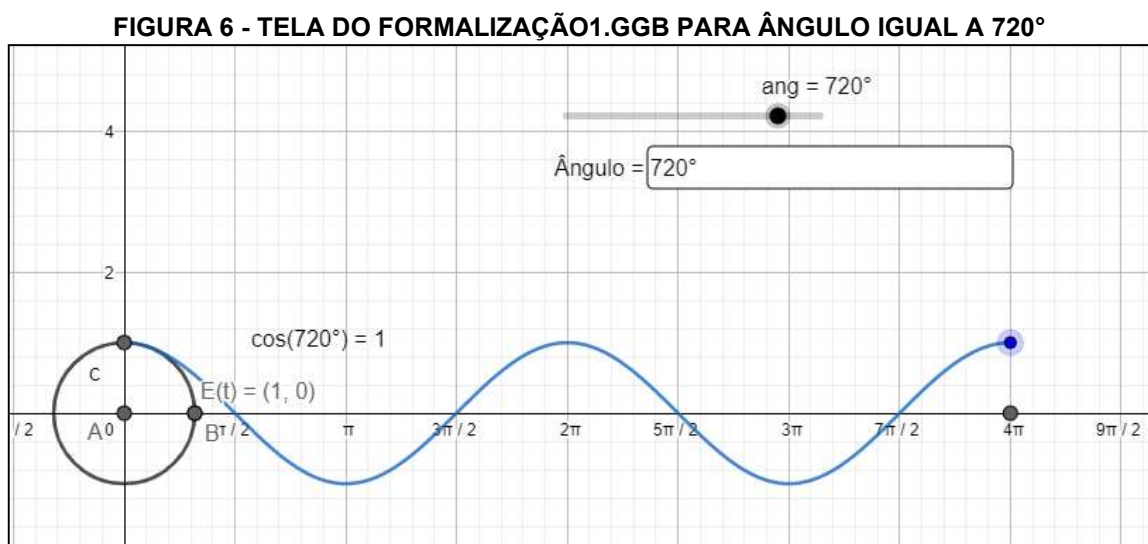
No app2.ggb, a barra ang (verde), a caixa de entrada Ângulo (vermelha) e o ponto t (azul) possuem as mesmas funções que no app1.ggb, porém, mudei o eixo x pelo segmento de reta $\cos t$.

FIGURA 5 - TELA DO APP2.GGB PARA ÂNGULO IGUAL A 90°



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Na UARC 3, é esperado que através da semelhança entre o eixo x e a reta cosseno t, o aluno perceba que existe uma outra função denominada cosseno, ao qual se trata de uma restrição da função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. A partir dos dados que o aluno vai preencher na tabela, esperamos que ele seja capaz de construir o gráfico da função cosseno. É possível que nessa atividade o aluno tenha dificuldade em perceber que o gráfico é senoidal. Por isso, ao final da formalização será pedido para que os alunos abram o arquivo formalização1.ggb onde será possível visualizar o gráfico sendo formado passo a passo. Nesse momento o professor se utiliza de uma intervenção oral para explicar que esse formato formado pelo gráfico é uma senoide. Na UARC 3 o objetivo do professor é definir a Função Cosseno.

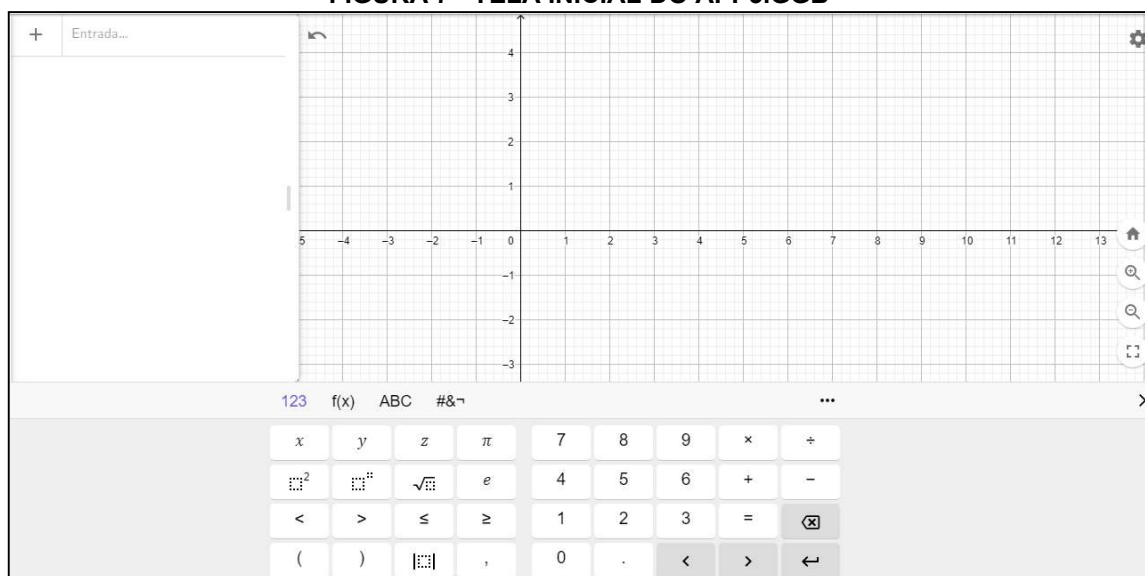


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

No arquivo formalização1.ggb, o aluno poderá através da manipulação da barra ang (cinza) verificar o gráfico senoidal sendo construído.

Para resolver a UARC 4 e UARC 5 o aluno irá precisar do arquivo app3.ggb. que nada mais é do que a tela inicial do GeoGebra sem nenhum comando pré-inserido.

FIGURA 7 - TELA INICIAL DO APP3.GGB



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

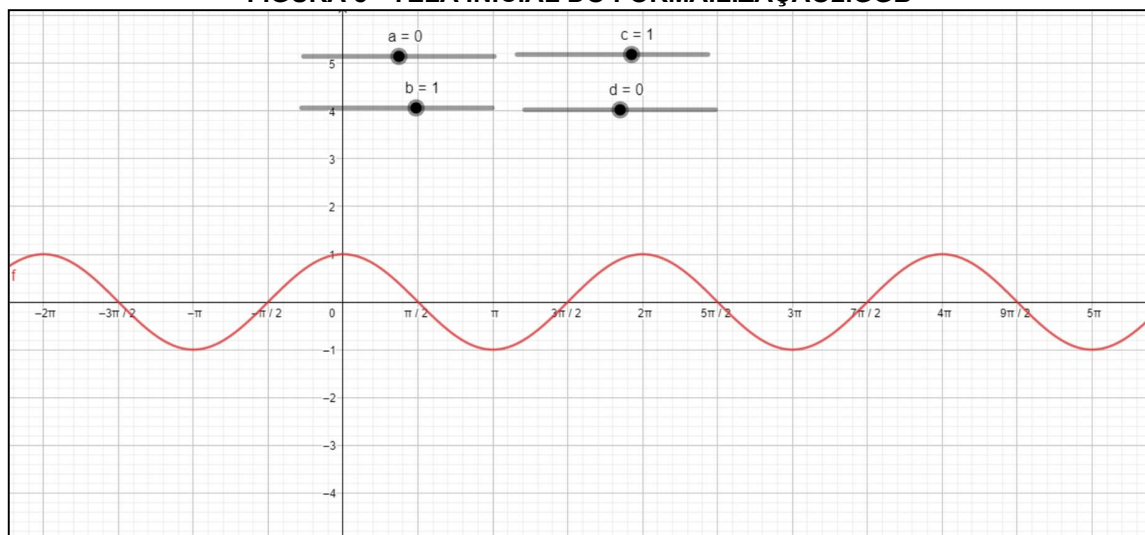
Na UARC 4, denominada “Para um lado e para o outro, para cima e para baixo” é dado ao aluno uma série de equações trigonométrica que representam funções do tipo cosseno, e pede-se que o aluno insira essas equações na Calculadora Gráfica Geogebra. Nessa UARC esperamos que o aluno seja capaz de perceber que em uma função do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$ o parâmetro “a” translada a função verticalmente e que o parâmetro “d” translada a função horizontalmente.

Talvez o aluno, que não esteja acostumado a trabalhar com aplicativos que possuem campo de entrada, sinta uma dificuldade em inserir as funções. Por isso o professor deve estar atento se todos os dados inseridos pelos alunos no aplicativo estão corretos.

Na UARC 5, denominada “Escolhendo a melhor onda”, os comandos são bem semelhantes aos da UARC 4, porém dessa vez, esperamos que o aluno seja capaz de perceber que, em funções do tipo $E(t) = b \cdot \cos(c \cdot t)$, o parâmetro “b” influência na amplitude do gráfico e que o parâmetro “c” influência no período da função. Assim como na UARC 4, o professor também deve estar atento aos alunos que não estão acostumados a trabalhar com aplicativos que possuem campo de entrada para garantir que eles insiram as funções corretamente.

Ao final da atividade, deve ser solicitado que o aluno abra o arquivo `formalização2.ggb` para visualizar os parâmetros a, b, c e d trabalhando simultaneamente.

FIGURA 8 - TELA INICIAL DO FORMALIZAÇÃO2.GGB



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Na `formalização2.ggb`, os controles deslizantes a, b, c e d podem ser manipulados pelos alunos modificando simultaneamente o gráfico da função $E(t) = a + b \cdot \cos(c \cdot t + d)$.

Após este processo, na etapa final dos episódios didáticos de ambas as turmas busca-se aplicar um teste de verificação de aprendizagem com a intenção de validar as formas de ensino adotadas nas turmas.

Para fazer a análise microgenética, iremos utilizar uma câmera filmadora para fazer videograções, envolvendo o domínio de estratégias para a filmagem e a trabalhosa atividade de transcrição. Dessa forma, poderemos perceber detalhes das ações, para as interações e cenários sócio culturais, para o estabelecimento de relações entre microeventos e condições macrosociais.

A análise do discurso será baseada em Mortimer e Scott que nos orienta quanto à produção de significados a partir da interação social diante da perspectiva sócio-histórica e sociocultural a partir das estruturas analíticas de aspectos inter-relacionados que focalizam o papel do professor, sendo a intenção do professor, conteúdo, abordagem comunicativa, padrões de interação e

intervenção do professor. De posse dos resultados encontrados, pode ser feita a validação da SD elaborada nesta pesquisa, ao considerá-la como potencialmente válida para o ensino da Função Cosseno ou não.

Vale ressaltar que mesmo com todas estas etapas planejadas e estruturadas em relação à experimentação e validação da SD, houve a necessidade de um redirecionamento do processo em decorrência das questões sanitárias e de saúde pública oriundas da Pandemia Covid-19. Onde optei pela manifestação de 20 professores por meio da aplicação de um questionário.

Este questionário é composto de três partes. A primeira, referente à avaliação individual de cada UARC; a segunda, da avaliação do conjunto das UARC's; e a terceira da avaliação complementar com o foco na avaliação aplicada, na promoção da interatividade entre os participantes, na identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

Portanto, de posse dos dados obtidos com a sua aplicação. Foram realizadas análises baseadas nas considerações feitas pelos professores. Neste sentido, ao tomar por base os apontamentos indicados pelos participantes (sejam positivos ou colaborativos), realizei as indicações por meio de corroborações ou por colocações de contrapontos com a pretensão de validar a sequência didática como potencialmente válida para o ensino do objeto matemático ou não, de modo análogo ao processo associado à análise do discurso e microgenética.

2. SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO

Neste capítulo apresento o que se tem falado sobre o ensino da função cosseno na nossa revisão de trabalhos publicados sobre o tema. Além disso, faço também uma pesquisa sobre como o assunto vem sendo trabalhado nos livros didáticos e trago também os resultados de uma pesquisa que fiz em duas escolas públicas da cidade de Belém do Pará com alunos egressos do 2ª série do Ensino Médio, a fim de avaliar, através de um questionário e de um teste de verificação, quais os níveis de aprendizagem dos alunos sobre o supracitado tema.

2.1. REVISÃO DE ESTUDOS

Nessa seção abordaremos a revisão da literatura feita através de nossa pesquisa bibliográfica, buscando o que os outros autores têm produzido a respeito de sequências didáticas para o ensino de Função Cosseno de forma a analisar os trabalhos que pudessem contribuir para a construção da nossa Sequência didática para o ensino de Função Cosseno.

A princípio fizemos uma busca nos sites *Google acadêmico*, *ERIC (Education Resources Information Center)* e nos produtos dos programas de mestrado profissional em ensino de matemática e mestrado em educação da Universidade do Estado do Pará, buscando por dissertações de mestrado e teses de doutorado com as palavras chave: “ensino por atividades da função cosseno”, “sequência didática para função cosseno” e “ensino de função cosseno”, porém não obtivemos nenhum resultado que satisfizesse o perfil de trabalho que buscávamos.

Diante disso, decidimos expandir a busca de forma menos direcionada, substituindo as palavras “Função Cosseno” pelas palavras “Funções Trigonométricas” ao qual a função cosseno faz parte. Dessa forma inserimos nas buscas dos mesmos sites as palavras-chave: “ensino por atividades de funções trigonométricas”, “sequência didática para funções trigonométricas” e “ensino de funções trigonométricas” e assim encontramos as dissertações de mestrado e

teses de doutorado que nos orientaram na construção de nossa sequência didática.

Dividimos os trabalhos em três tipos de pesquisa, estudos diagnósticos ao qual o autor sugere um produto, mas sem interferir no processo de ensino e aprendizagem; estudos experimentais ao qual o autor não só cria um produto como também experimenta com sujeitos a fim de contribuir no processo de ensino e aprendizagem; e estudos teóricos onde não há análise e nem recolhimento de dados obtidos em pesquisa de campos e nem interferência no processo de ensino e aprendizagem.

Os trabalhos encontrados vão do ano de 1997 até 2020, nas subsecções abaixo, apresentaremos o resumo dos trabalhos na ordem do mais antigo ao mais recente.

2.1.1. Estudos Diagnósticos

Os estudos diagnósticos são por definição estudos onde não há intervenção do autor quanto ao processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, embora eles possam recolher e analisar dados (geralmente via pesquisa de campo) referentes a este processo. Geralmente são relatadas as dificuldades dos discentes, por exemplo, mas sem intervenção dos autores. Dentre a nossa pesquisa bibliográfica de estudos diagnósticos, apresentarei Mendes e Rocha (2010), Duarte Filho (2017), e Lima (2017).

O trabalho de Mendes e Rocha (2010) começa falando sobre as discussões a respeito do ensino e aprendizagem da matemática. A autora entende que uma das funções do ensino da matemática é preparar o aluno para exercer a cidadania, proporcionando-lhe acesso à cultura, matemática ou não, habilitando-o assim para inúmeras competências para as quais é importante e indispensável a apropriação do conhecimento matemático. Oportunizando ao aluno a construção do conhecimento por si mesmo, iniciando assim o processo de sua autonomia intelectual.

O professor sofre diversas pressões externas e internas na elaboração da aula. Nessa perspectiva, os autores entendem que a história pode ser uma grande aliada para quem ensina matemática, por evidenciar obstáculos no processo de construção do conhecimento desse tema, possibilitando a análise de diferentes significados, definições, e modos de representação, e ainda das dificuldades que historicamente se impuseram na elaboração desses conceitos permitindo ao professor refletir sobre a sua prática e tomar decisões sobre o conteúdo que vai ministrar ajudando o professor a exercer sua autonomia e contribuir para o seu desenvolvimento profissional.

Nesse enfoque, pretende trabalhar as atividades que envolvem a história da trigonometria a partir da corda, com professores de matemática em exercício e em formação possibilitando dessa forma, mostrar em sala de aula que os conceitos matemáticos vistos como abstratos em sua essência podem ser concretizados a partir da sua história. Em vista disso, e tentando resgatar um ensino de trigonometria com significado para o aluno e com destaque para as questões históricas, o autor desenvolveu as atividades deste mini-curso, com base nos procedimentos utilizados na construção de tabelas pelos matemáticos, astrônomos e geógrafos antigos. Para isso foi criado sequências de atividades.

A primeira com o objetivo de apresentar os passos iniciais da tabela de cordas construída por Hiparco; e propiciar espaço para que os alunos iniciem a construção de uma tabela trigonométrica. Na segunda, o objetivo era ampliar noções e conceitos sobre os elementos geométricos e estabelecer relações entre os elementos geométricos. Na terceira atividade, o autor deseja ampliar conceitos e construções trabalhadas anteriormente na medição das cordas. Na quarta atividade ele quer estabelecer relações entre os elementos geométricos. Depois estabelece-se uma relação entre a função corda e a função seno. Faz comparações entre a construção da tabela de cordas com as fórmulas utilizadas atualmente no estudo da trigonometria.

Em Duarte Filho (2017), O objetivo do trabalho é apresentar uma proposta pedagógica de ensino de funções trigonométricas através de atividades interdisciplinares de investigação e modelagem as quais envolvam temas transversais. Usando as ferramentas tecnológicas de suporte educacional

geogebra, google maps e google imagens. No intuito de uma necessidade em demonstrar os meios onde ocorre a aplicação deste conteúdo, que geralmente é tido como abstrato e de difícil aplicação.

Com um conjunto de procedimentos e técnicas de exploração, investigação, modelagem matemática, assimilação e análise de informações. A investigação e exploração constituem-se em pesquisar as características e particularidades que surgem de uma situação problema. A investigação em sala de aula caracteriza-se em estimular o processo de indagar, criar hipóteses e testá-las, para em seguida justificar o que ocorre em determinada situação, trabalha a “formulação de questões, elaboração de conjecturas, tese, refinamento das questões e conjecturas anteriores, demonstração, refinamento da demonstração e comunicação aos seus pares está ao alcance dos alunos na sala de aula de matemática”. Vinculando o ensino de Funções trigonométricas a tópicos da geografia, da física, da arquitetura, de arte e da(s) engenharia(s) separadamente.

As atividades foram elaboradas com a intenção de atingir alunos da 3ª série do Ensino Médio do Estado do Espírito Santo. As atividades propostas neste trabalho devem ser aplicadas após a introdução das funções trigonométricas aos discentes, para que os mesmos tenham uma base e possam formalizar os conhecimentos adquiridos. As atividades foram elaboradas a partir dos seguintes temas: atividades relacionadas a arquitetura (as funções trigonométricas e as construções); atividades relacionadas a geografia (as funções trigonométricas dentro da cidade; e atividades relacionadas a física (funções trigonométricas em tubos sonoros). O autor sugere para estudos futuros a busca por relações entre as funções trigonométricas com outros tópicos como a biologia e a história.

Por último, fez parte desse levantamento bibliográfico de pesquisas diagnósticas, a dissertação de Lima (2017) que me inspirou na criação da sequência por trabalhar a análise de gráficos usando o software geogebra.

A dissertação “uma proposta de análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente usando o software geogebra” escrita pelo autor Marcelo Machado de Lima 2017, tem por objetivo fazer uma análise da função $f(x) = a + b\sin(cx + d)$ e também das funções $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ e $f(x) = a + b\tan(cx + d)$ com a ajuda do software GeoGebra, onde mostra ao aluno o que

acontece com o gráfico da função quando é variado separadamente os valores de a , b , c e d . Adotando por conveniência a, b, c e $d \neq 0$ para não descaracterizar a análise.

O autor traz a definição de produto cartesiano, funções, domínio, imagem e contradomínio, função seno, função cosseno e função tangente, função par, função ímpar, função periódica e função limitada. “O aluno desenhará o gráfico da função no geogebra (através da lei de formação) e depois terá que analisar o que acontece com o seu domínio e sua imagem fazendo comparações com as mudanças dos valores a , b , c e d ”. Espera-se que o uso do geogebra aumente a compreensão e o interesse do aluno pelo conteúdo.

2.1.2. Estudos Experimentais

Os estudos experimentais são por definição estudos em que há intervenção do autor no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Nesses estudos, há relatos de experimentos didáticos e geralmente é proposta (ou apresentada) uma metodologia de ensino validada na pesquisa ou um produto que pode ser utilizado como recurso didático em sala de aula. Dentre a pesquisa bibliográfica de estudos experimentais, apresento Costa (1997), Oliveira (2010), Domingos Neto (2014), Corrêa (2016) e Gama (2020).

Costa (1997) teve por objetivo investigar a influência de dois diferentes contextos - computador e “mundo experimental” – na aprendizagem da trigonometria. A proposta é de investigar a introdução das funções seno e cosseno em três contextos.

O primeiro é chamado de “mundo experimental”, no qual os alunos resolverão grupos de atividades, tratados como experimentos pelo autor, construídas a partir de materiais, tais como relógio, areia, madeira e metal, que serão manipulados pelo aluno, procurando simulações que auxiliem o aluno a “descobrir” as funções seno e cosseno. Para isso foi escolhido fenômenos do campo da Física, explorando o Movimento Circular Uniforme e o Movimento de um

Pêndulo Simples. O que motivou a escolha desses fenômenos foi a facilidade de visualização do movimento periódico.

No experimento denominado “simulador do alarme óptico”, o equipamento que é desenvolvido através de um mecanismo de rotação de um relógio, possibilita efetuar medições, que relacionam um “ponto”, com as suas projeções nos eixos, utilizando duas fontes de luz que iluminam um “ponteiro” e com isso provocam uma sombra em um papel milimetrado, simulando um Ponto do ciclo trigonométrico em movimento e suas projeções, cosseno e seno pretendendo que o aluno colete dados e a partir deles produza tabelas e gráficos.

No experimento “Roda com a Caneta a laser” o objetivo é estabelecer uma ligação entre o ciclo trigonométrico e as funções seno e cosseno. A ideia foi construir um equipamento de madeira que possuisse duas rodas de madeira acopladas. Em uma delas foi fixado um disco metálico com um suporte para uma caneta com ponta de luz a laser. Uma vez girando a roda, tem-se a projeção da luz sobre um anteparo tornando possível observar o aparecimento da função cosseno compondo dois movimentos: o circular da roda e um retilíneo do conjunto todo.

O último experimento do “mundo experimental” chama-se “Pêndulo de Areia”, que tem por objetivo levar o aluno a estabelecer uma ligação entre o fenômeno periódico e sua forma matemática, em específico, funções que envolvem seno e cosseno. O equipamento consiste num pêndulo de areia que estará preso em uma haste metálica suspensa sobre uma mesa e um rolo de papel do tipo formulário contínuo para computador. O pendulo em movimento formará um desenho senoidal com a areia.

O segundo momento será chamado de “contexto do computador” e irá explorar o ambiente computacional através de atividades nas quais o aluno possa lidar com as razões trigonométricas, trabalhando no quadro geométrico e numérico, passando depois ao quadro funcional, com as extensões das definições de seno e cosseno para o ciclo trigonométrico e a introdução das funções seno e cosseno. Os softwares utilizados foram o “software Cabri II” e o aplicativo Graphmatica.

O último contexto refere-se à sala de aula, e será constituído por aulas, ministradas pelo professor responsável pela disciplina, em uma classe de 2ª série do Ensino Médio. A partir da proposta e do objetivo, foi descrito o desenho geral do experimento, composto por cinco fases consecutivas de pesquisa. Para os dois primeiros contextos, a pretensão é de introduzir as funções seno e cosseno dando-lhes um tratamento que as torne significativas para o aluno considerando seu desenvolvimento cognitivo. Para tanto é proposto a elaboração e o desenvolvimento de uma sequência didática com base nos princípios básicos do construtivismo, proposto por Piaget. A proposta da sequência é: retomar as razões trigonométricas seno e cosseno; definir o seno e cosseno no ciclo; definir as funções seno e cosseno de variável real, construir o gráfico das funções seno e cosseno; e trabalhar algumas das transformações destas funções.

Os sujeitos serão alunos do 1ª e do 2ª grau, que já estudaram alguns tipos de funções, como as polinomiais de 1º e 2º graus, a constante, a modular, a exponencial e a logarítmica. O campo conceitual é o das funções. Foram 32 sujeitos todos advindos de uma mesma escola pertencente à rede particular de ensino da cidade de São Paulo. O critério adotado para a amostra foi o interesse e a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa em horário extraclasse, além de estarem cursando o 2º grau, porém sem ter aprendido as funções trigonométricas.

A análise foi feita através de diferentes pontos de vista, afim de obter uma maior precisão dos resultados. Inicia-se fazendo uma discussão sobre os testes realizados ao longo do experimento. Apresenta comentários gerais sobre o desempenho de cada grupo de alunos, seguidos da taxa de variação de acertos entre o pré e o pós-teste, de uma análise a partir dos objetivos didáticos e das questões apresentadas, acompanhada da taxa percentual de evolução, tanto por objetivo didático quanto por questão. Verifica-se o desempenho de cada um dos sujeitos e sua evolução percentual, teste a teste.

Por fim, é feita a análise dos procedimentos e técnicas de resolução bem como o tipo de erro cometido. Para a preservação dos dados foi feito gravações em áudio e vídeo, transcrição dos “tapes” das sessões, notas de campo, anotações feitas pelos estudantes nas guias de estudo durante as atividades e os

testes: pré, intermediário e pós. O autor se convence de que para o desenvolvimento do assunto abordado, segundo o tipo de sequência didática, os dois contextos foram necessários e complementares.

A ordem de introdução por conceitos interferiu na aprendizagem. O grupo que obteve mais sucesso (grupo B) começou no contexto “mundo experimental” e depois pelas do computador. O trabalho em dupla também se mostrou-se extremamente produtivo e fundamental para atingir os objetivos. A utilização dos conceitos mostrou uma possibilidade viável para o professor na sua busca de ambientes didáticos para criar situações que facilitem o entendimento e o processo de construção do conhecimento. O autor sugere que em futuras pesquisas seja feito o experimento com um número maior de alunos de escolas públicas. Também sugere um acompanhamento do desempenho dos estudantes na trigonometria após a participação em pesquisas.

No trabalho de Oliveira (2010) o objetivo foi de investigar uma abordagem de ensino da Trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no ciclo trigonométrico. Pretendeu-se formular atividades com diferentes metodologias que relacionassem tanto a necessidade do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, quanto sua relação com ciclo trigonométrica gerando as funções trigonométricas. Pretendeu-se ainda contextualizar as diversas aplicações destas funções.

As duas primeiras atividades, “A construção das Tábuas Trigonométricas” e “O Inclínômetro”, foram aplicadas na primeira série do Ensino Médio. Segundo a autora, os alunos da 1ª série do ensino médio estão em processo de adaptação e apresentam, de maneira geral, muito medo pela cobrança e a quantidade de estudos que deles é exigida. De maneira geral os alunos apontam dificuldades diversas como familiarização com formulas, dificuldade de interpretar problemas, manipulações algébricas com as funções identidades trigonométricas.

Para o desenvolvimento do projeto, os alunos compareceram nas escolas no período complementar ao das aulas regulares, em um momento chamado de laboratório de matemática. As duas atividades 1 e 2 foram aplicadas aos alunos da 1ª série do Ensino Médio das escolas Objetivo de Mogi Guaçu, no dia 25 de maio de 2009 e, de Mogi Mirim, no dia 27 de maio de 2009. A aplicação da

atividade de Mogi Mirim teve a presença do orientador do trabalho Prof. João Sampaio.

A atividade 4, “Funções Trigonométricas com Canudos”, foi aplicada no terceiro ano do Objetivo de Mogi Mirim já em 2010, e a aplicação dos aplicativos que usam o geogebra foram propostos na terceira série do ensino médio de Mogi Guaçu de 2009. Segundo o autor, as atividades 1, 2 e 4 foram aplicadas também em outras turmas, porém, a análise da aplicação foi restringida apenas às turmas citadas.

A análise da atividade 3, “Exploração do Radiano com Barbantes” foi omitida do texto. Através da pesquisa, a autora conseguiu satisfação com uma atividade em sala de aula que motivou os alunos ao estudo da Matemática e, também permitiu que eles se tornassem alunos mais atentos e criteriosos para com o conhecimento.

Em Domingos Neto (2014), o objetivo é tornar o ensino de trigonometria mais significativo através da manipulação de ferramentas básicas. Propõe saber o quanto é eficaz a utilização das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software geogebra nas aulas de trigonometria, em especial no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente.

Para alcançar o objetivo proposto, foi realizada uma sequência didática que consiste no desenvolvimento de seis atividades propostas para a sala de aula. Cada atividade foi desenvolvida em cada encontro ocorrido e tem como objetivo contribuir com a formação e verificar o desempenho dos alunos envolvidos e averiguar as contribuições que as ferramentas propostas neste trabalho proporcionam no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente, buscando adotar uma metodologia que pudesse estimular a criatividade e interesse dos alunos envolvidos, abordando situações problemas desafiadoras e intrigantes do cotidiano deles buscando alternativas para aumentar a motivação e desenvolver a autoestima e o raciocínio lógico dedutivo.

A sequência didática foi aplicada nas Escolas Públicas Estaduais e Municipais de Minas Gerais com alunos do 1 ano do Ensino Médio, porém não foi especificado no trabalho a amostra utilizadas, portanto não sabemos quantas pessoas participaram da pesquisa.

Para a análise foi feito um teste diagnóstico inicial, com sua aplicação foi possível fazer uma análise dos resultados obtidos pelos alunos envolvidos. Em seguida é apresentada uma proposta para a formação dos alunos envolvidos que constitui na exposição do caderno de atividades. Numa terceira etapa é apresentada a metodologia usada no desenvolvimento da sequência didática com seis atividades em sala de aula e por fim é apresentada a aplicação do teste diagnóstico final onde é descrito os resultados obtidos pelos alunos envolvidos, que visou verificar a eficácia das ferramentas propostas no ensino e aprendizagem das funções citadas.

O autor conclui que as contribuições das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software geogebra tornou o ensino de função seno, cosseno e tangente mais dinâmico, interativo, participativo e construtivo, provocando envolvimento dos alunos. Além disso, as atividades proposta e desenvolvidas os desafiaram a analisar, refletir e tirar conclusões. A partir desta aplicação observou-se nos alunos envolvidos a capacidade de estabelecer relações, de tomar decisões e de fundamentar as suas afirmações, discutindo e enriquecendo os conhecimentos existentes.

Segundo o autor a visualização e a experimentação por parte dos alunos envolvidos, terão um importante papel na compreensão de alguns saberes ligados ao domínio, imagem e período das funções seno, cosseno e tangente. Mostrando como a interação direta com o objeto de estudo poderá conduzir numa melhora na capacidade precisa de estimar elementos das funções seno, cosseno e tangente.

No trabalho de Corrêa (2016), o objetivo é avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática no desempenho dos alunos em resolução de questões envolvendo funções trigonométricas. Para isso, primeiramente a autora fez um levantamento histórico sobre as funções trigonométricas. Em seguida foi feita uma análise de como o tema é abordado nos livros didáticos do ensino médio ao qual percebe-se que essa abordagem precisa ser mais dinâmicas, com atividades interdisciplinares, tecnológicas, contextualizadas para que o processo de ensino-aprendizagem seja mais consistente e eficaz. Além das análises aos livros didáticos, também foi analisado as pesquisas já feita por outros autores.

O lócus da pesquisa foi uma escola pública no município de Abaetetuba. Os sujeitos foram 17 alunos da 2ª série do Ensino Médio. Os dados foram obtidos a partir de 21 encontros, ao qual houve a aplicação e tratamento de questionário socioeconômico, que proporcionou conhecer o perfil do aluno, bem como sua postura diante do ensino e as metodologias utilizadas pelo professor em aulas de matemática; também foi aplicado testes avaliativos com 10 questões de funções trigonométricas, em que a maioria dos alunos (70% a 100%) não conseguiu realizar as resoluções, demonstrando as dificuldades dos alunos em relação ao assunto; e as devidas análises percentuais e estatísticas de uma sequência de 24 aulas elaboradas com o objetivo de proporcionar ao aluno a aprendizagem das funções trigonométricas. A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática e a metodologia de ensino aplicada foi o ensino por atividades.

As análises prévias revelaram, principalmente, que o ensino de funções trigonométricas é na atualidade, na maioria das vezes ensinada de forma tradicional, e que os alunos possuem muitas dificuldades em resolver problemas referentes a este conteúdo. A concepção e análise a priori apresentam propostas de atividades para o ensino de funções trigonométricas que compõem as sessões de ensino, bem como o que se espera com a aplicação da sequência didática. A etapa da experimentação apresenta os dados relativos a aplicação da sequência didática, constando das observações e conclusões a respeito das atividades experimentadas. A análise a posteriori e validação, destacam os dados sobre o desempenho dos alunos nos testes, com as análises percentuais e estatísticas, o confronto entre as análises a priori e a posteriori e os resultados obtidos.

Ao final, é afirmado que a sequência didática aplicada proporciona resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos, pois após as atividades aplicadas, obtiveram maior desempenho na resolução de questões sobre conteúdos de funções trigonométricas, além de perceber que essa metodologia de ensino disponibiliza ao aluno a possibilidade de argumentar, raciocinar diante das situações que lhes são propostas, fazer indagações junto a seus pares e tirar suas próprias conclusões, tendo o professor como orientador-mediador da aprendizagem e não como o detentor do conhecimento.

Segundo a autora, o ensino por atividades se propõe a instigar o aluno a chegar ao conceito a ser estudado, e isso se dá por meio da própria ação durante a execução de atividades relacionadas a um conteúdo matemático, de forma que o mesmo se faça mais presente no momento da aprendizagem, ou seja, o aluno é a peça principal neste processo chamado de experimentação, a qual se faz em várias etapas seguindo os objetivos de aprendizagem que se desejam alcançar.

Por fim, o último trabalho que faz parte do nosso levantamento bibliográfico de pesquisas experimentais é a dissertação de Gama (2020), ao qual foi de fundamental importância para a construção das análises do experimento.

No trabalho de Gama (2020), o autor tem por objetivo responder “quais as contribuições de uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) trazem ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes da 2ª série do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA). Considerando a teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau e a Psicologia Histórico-Cultural, de Vygotsky, além da utilização da Análise Microgenética e da Análise do Discurso, esta última apresentada por Mortimer e Scott (2002).

Foram feitas pesquisas para sondar as concepções dos discentes egressos da 2ª série do ensino médio e de 60 docentes de Matemática sobre esse tema. Com base nelas e no que foi apresentado na fase de revisão da literatura, foi elaborado uma sequência didática contendo 8 UARC's, a qual foi aplicada em uma turma da 2ª série do ensino médio de uma escola pública da região metropolitana de Belém (PA).

Mediante o estudo de caso, constatou-se que a utilização da sequência didática trouxe contribuições ao aluno, ao professor e ao saber, dentre as quais o autor seleciona: ao aluno a valorização dos conhecimentos prévios, maior atividade escolar, permitindo o levantamento e a validação de hipóteses e o respeito ao contexto sociocultural; ao professor, possibilita a sistematização do conteúdo, o favorecimento do pensamento reflexivo, o estímulo ao aprofundamento dos conhecimentos específicos, o aumento da autonomia em relação ao livro didático, o favorecimento da identificação e manutenção de zonas de desenvolvimentos proximais; ao saber, possibilita o favorecimento da

identificação e evolução dos saberes ensinados, a contribuição na sua formação, mediante a estrutura articulada das intervenções estruturais. Por se tratar de um estudo de caso, os resultados e conclusões constantes na pesquisa não é passível de generalizações, segundo o autor, cada professor tem sua peculiaridade, assim como, há uma heterogeneidade de turma para turma, de estudante para estudante. No entanto, apesar de não generalizar, o autor percebe a possibilidade de expansão da pesquisa para outros temas da Matemática.

O trabalho de Gama (2020) foi de fundamental importância para a construção desta pesquisa, primeiramente por ter um aporte teórico e metodologia da pesquisa muito semelhante ao que aplicamos na nossa pesquisa, e segundo por ter como objeto um estudo mais direcionado da trigonometria, que é a Função Seno, assim como também decidi optar pelo estudo direcionado da Função Cosseno. Portanto, o trabalho de Gama (2020) foi de grande inspiração para o processo de construção da pesquisa.

2.1.3. Estudos Teóricos

Os estudos teóricos são por definição estudos em que não há intervenção do autor quanto ao processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas. Neles, os autores não recolhem e nem analisam dados obtidos em pesquisas de campo, apenas fazem análises de estudos bibliográficos ou levantamento de hipóteses que podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas.

No artigo de Monteiro Júnior (2010) a atenção está no desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar das funções trigonométricas através da análise da representação matemática do conceito timbre. Para ele as ligações entre a matemática e a música são inúmeras, tanto no campo da acústica física, quanto nos desdobramentos de sua aplicação na acústica musical.

Numa primeira etapa é apresentado um resumo dos conceitos necessários ao estudo do timbre dos instrumentos musicais, onde as séries de Fourier e as séries harmônicas jogam papel fundamental.

Numa segunda etapa, levantamos um quadro da apresentação do citado conceito a partir de uma revisão de alguns dos principais textos didáticos do segundo ano do Ensino Médio. Nesta etapa, é apontado possíveis falhas destas apresentações textuais, à luz do referencial teórico da acústica.

Por fim, é apresentado duas experiências didáticas no ensino do conceito de timbre que podem ser utilizadas tanto por professores de matemática no estudo das funções trigonométricas quanto por professores de física, no estudo da mecânica ondulatória, interessados numa prática de ensino construtivista.

A ideia foi buscar resgatar não só uma ligação entre matemática e música, subjacente ao desenvolvimento das funções trigonométricas, mas também o espírito da busca de um ensino interdisciplinar, multifacetado, aproximando o ensino da matemática a tantas outras experiências vivenciadas por estudantes.

Ao invés de esconder a complexidade, o ensino do conceito de timbre poderia ser mais bem apresentado pelos livros e textos. O conceito de timbre poderia ser substituído pela lógica de que os sons emitidos por instrumentos são compostos por um conjunto de tons puros cuja representação matemática é feita através das funções seno e cosseno. Assim como o ensino das funções trigonométricas poderia ser mais interessante se aplicações práticas pudessem fazer parte das “tarefas” dos textos didáticos do professor.

2.2. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Sabemos que o livro didático é um recurso que o aluno pode utilizar para complementar o seu processo de aprendizagem. Nas escolas públicas do Estado do Pará, nem todos os alunos tem acesso ao livro didático, quando fui fazer o diagnóstico de alunos egressos, essa realidade se tornou evidente, além desse fator, muitos professores de matemática se recusam a utilizar o livro didático como recurso para complementar o processo de aprendizagem dos estudantes, o que torna o aluno “de certa forma” refém do professor de matemática, pois não é exercitado no aluno, construir o seu próprio conhecimento através de leituras ou

outros recursos didáticos, e assim, o aluno acaba sempre dependendo da visão do professor.

Apesar da realidade já mencionada, dos alunos das Escolas Públicas do Pará em relação à utilização do livro didático, nesta secção apresento uma análise do livro didático de Paiva (2015) por ser um livro indicado às escolas públicas para trabalharem no ensino médio e por ser o livro que as escolas que visitei utilizavam. Pretendo analisar como Paiva (2015) aborda o tema de função cosseno.

A trigonometria em Paiva (2015) é trabalhada em quatro capítulos, sendo esses: trigonometria no triângulo retângulo; circunferência trigonométrica: seno e cosseno; outras razões trigonométricas e adição de arcos; e funções trigonométricas e resolução de triângulos.

No capítulo trigonometria no triângulo retângulo tem dois tópicos sendo o primeiro denominado “a origem da trigonometria”, onde aparentemente o autor teve por objetivo trazer um pouco da história da trigonometria. Porém esse item se resume a apenas dois parágrafos no qual o primeiro parágrafo é para explicar quem criou o termo trigonometria e o segundo parágrafo se resume informar um dos registros mais antigos conhecido sobre a trigonometria, que é o papiro de Rhind. Por fim, o texto define trigonometria como sendo a razão entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Essa introdução histórica do livro não traz muitas informações sobre o processo de construção da trigonometria, ou o porquê dos matemáticos e astrônomos se interessarem pela trigonometria, ou a relevância do estudo da trigonometria para a humanidade. As informações contidas no tópico origem da trigonometria não têm ligação com o resto do capítulo. O texto do tópico traz um caráter mais curioso do que informativo, tanto que a ausência do tópico no capítulo não seria perceptiva ao leitor.

No segundo tópico, denominado razões trigonométricas no triângulo retângulo, é apresentado as razões seno, cosseno e tangente ao qual é definido

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Após a apresentação de um triângulo ABC, o autor utiliza os termos cateto e hipotenusa sem explicar ao leitor o significado dessas palavras. Em seguida um tópico com três exercícios resolvidos, e finaliza o capítulo propondo exercícios

para o leitor resolver. Apesar do autor tentar utilizar a história, o livro acaba seguindo a metodologia *definição* → *exemplo* → *exercícios*.

Nos dois capítulos que sucedem o mencionado acima, é definido alguns conhecimentos que são prévios à função cosseno, como a definição de radiano, da medida de um arco, de ângulo, circunferência trigonométrica, simetrias, seno e cosseno de um arco entre outros.

No meio do capítulo circunferência trigonométrica: seno e cosseno, o autor traz um item chamado “Mentes Brilhantes” ao qual consta de um texto cujo título é “As Origens da Trigonometria”, ao qual traz algumas curiosidades sobre Hiparco de Niceia (190 a.C. – 120 a.C.). O livro apesar de apresentar dois textos com o mesmo nome, não traz relação nenhuma entre eles, podendo causar uma interpretação confusa, ou seja, duas origens para o mesmo tema “trigonometria”.

Como vimos o livro não possui um capítulo apenas para trabalhar a função cosseno, o tema é abordado em um tópico denominado “gráfico da função $g(x) = \cos x$ ” dentro do capítulo “funções trigonométricas e resolução de triângulos”. O capítulo começa com uma situação em uma roda gigante girando no sentido anti-horário, e um ponto P marcado na borda da roda gigante que define a altura em função do tempo. Após explicada as medidas de altura e tempo da situação, o livro apresenta o gráfico que representa a função do ponto P em relação ao tempo. Em seguida é dada a definição das funções seno e cosseno: “A cada número real x podemos associar um único $\sin x$ e um único $\cos x$ ” (PAIVA, 2015).

No tópico “gráfico da função $g(x) = \cos x$ ” é apresentado o gráfico da função cosseno simples, a relação

$$g(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

Também é apresentada a expressão:

$$D(g) = \mathbb{R}; Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}; p = 2\pi$$

Após isso o livro traz dois exercícios resolvidos e propõe quatro exercícios para o leitor resolver.

Também é apresentado um item chamado “período das funções seno e cosseno” ao qual é feita a demonstração de $p = \frac{2\pi}{|m|}$.

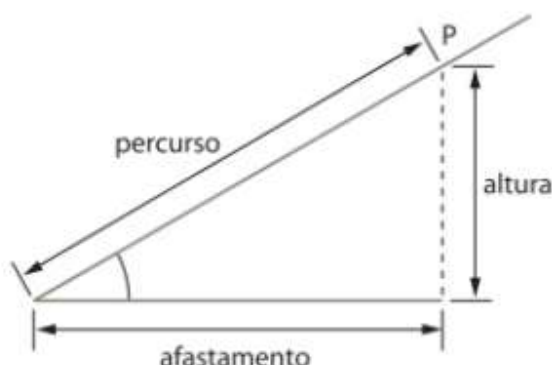
Analisando a forma em que a Função Cosseno é abordada no livro de Paiva (2015), percebemos que o autor tenta trazer uma introdução histórica, mas não aproveita essa introdução no decorrer do livro, e causa até certa confusão na interpretação do autor sobre qual é a verdadeira origem da trigonometria. Percebemos que a abordagem do conteúdo é muito direta, seguindo o modelo *definição → exemplo → exercícios*, e os exercícios propostos ao leitor são muito algébricos e diretos, não trazem situações onde o aluno possa relacionar a importância da função cosseno e sua aplicabilidade em situações cotidianas, tornando assim o tema como se fosse algo distante do universo do leitor.

Analisei também do livro de Dante (2015). Neste, o autor dedica uma unidade apenas ao assunto da trigonometria, dividindo-o em seis capítulos.

No primeiro capítulo intitulado “trigonometria no triângulo retângulo”, o autor começa com uma situação problema ao qual envolve uma pessoa subindo duas rampas sendo uma mais íngreme que a outra. Com um texto muito bem escrito permitindo uma fácil compreensão da situação, o autor questiona como seria possível, sem conhecer os ângulos de subida, saber qual das duas rampas apresentadas seria mais íngreme. Em seguida o autor informa que esse tipo de situação pode ser resolvido com o estudo da trigonometria, e solicita ao leitor que faça a leitura do texto que está ao final do capítulo intitulado “trigonometria: história e importância”. (depois faremos um comentário sobre esse texto).

Dante (2015) expressa as relações que podem se formar com as grandezas: percurso, altura e afastamento, demonstrando as razões que se formam a partir dessas relações.

FIGURA 9 - RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



Fonte: Dante (2015)

O autor expressa as proporcionalidades dos valores decorrentes da semelhança dos triângulos retângulos gerando a razão

$$\text{índice de subida} = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$$

Depois de propor alguns exercícios ao leitor, Dante (2015) usa a palavra tangente para associar a medida do ângulo de subida e o índice na mesma subida.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$$

Após isso, finalmente é mostrada a solução para a situação problema sobre as duas rampas sugeridas no início do capítulo. E logo em seguida é apresentado outras razões envolvendo o percurso em dois itens apresentando a ideia de seno e cosseno:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}} ; \text{cos } \alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

No tópico seguinte é apresentado o triângulo um ABC, onde o autor trás as palavras cateto e hipotenusa para gerar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Ao longo do capítulo também é apresentado as relações entre essas razões.

No final do capítulo é apresentado o texto “Trigonometria: história e importância” por LIMA (1997) em seu livro *A Matemática do Ensino Médio*, e “De onde vem o seno?” também escrito por LIMA (1991) em seu trabalho *Meu Professor de Matemática*, ao qual coincidentemente também foi referência no

nosso trabalho que será apresentado no capítulo 3, tópico 3.1 “A História das Tabelas Trigonométricas”.

Os dois textos de Elon Lages Lima trazem informações interessantes sobre a história da trigonometria, trazem uma prévia sobre as funções trigonométricas e as suas aplicações no dia-a-dia, a importância desse estudo para a Análise de Fourier e a origem da palavra seno. Esses textos não trazem relação nenhuma com a situação problema apresentada por Dante (2015) no início do capítulo, e o autor tem ciência disso, tanto que apresenta esse texto bem separado do resto do capítulo em um tópico chamado “Leituras”. Apesar de ter sido pouco explorado por Dante (2015), os textos de Elon Lima são muito bem escritos e trazem informações que enriquecem o conhecimento do leitor. A pergunta que fica é se o leitor vai sentir atraído em ler os dois textos da forma em que eles foram apresentados por Dante (2015). Lembrando que o público-alvo são de alunos do Ensino Médio, cuja grande maioria são jovens.

Após isso é apresentado, ainda no primeiro capítulo, a tabela com os valores de seno, cosseno e tangente, na forma de números decimais com até três casas após a vírgula, dos Ângulos de 1° até 89° .

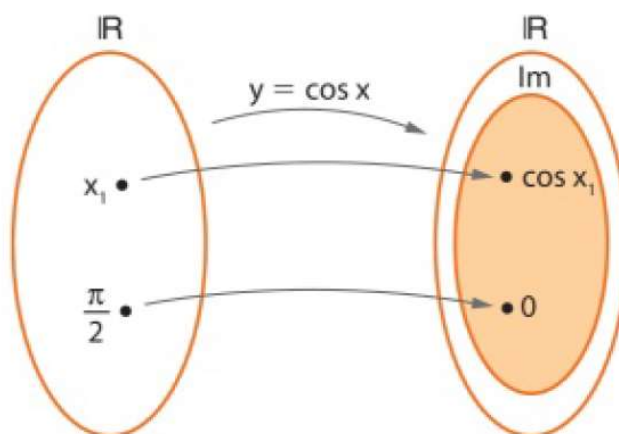
O capítulo seguinte é denominado “Resolução de triângulos quaisquer” onde é apresentado lei dos senos e lei dos cossenos. No capítulo “Conceitos Trigonométricos Básicos” é apresentado alguns conceitos prévios necessários para a compreensão de função trigonométrica como arcos e ângulos, unidades para medir arcos e circunferência e as relações entre essas unidades, circunferência unitária, também conhecida como circunferência trigonométrica, arcos côngruos, a determinação de quadrantes, e principalmente o que me chamou muito a atenção, um tópico apresentando explicitamente a ideia de seno, cosseno e tangente de um número real e não de um ângulo. Tópico importante para a construção do domínio das funções trigonométricas que pouco é explorado por outros autores de livros voltados para alunos de ensino médio.

No capítulo “transformações trigonométricas” é apresentado as fórmulas de adição e subtração de arcos de seno e cosseno, fórmulas do arco duplo, fórmulas do arco metade e fórmulas de transformação em produto.

Após toda preparação dos capítulos mencionados, finalmente é apresentado o capítulo “Funções Trigonômicas” ao qual é a apresentado o estudo da função seno, função cosseno, função tangente e funções cossecante, secante e cotangente.

No que se trata do estudo da função cosseno que é o caso que mais me interessa, é apresentado a associação de um número real x ao valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de x radianos:

FIGURA 10 - ASSOCIANDO x AO VALOR DO COSSENO



Fonte: Dante (2015)

Onde para cada valor real de x existe sempre um único valor real para $\cos x$.

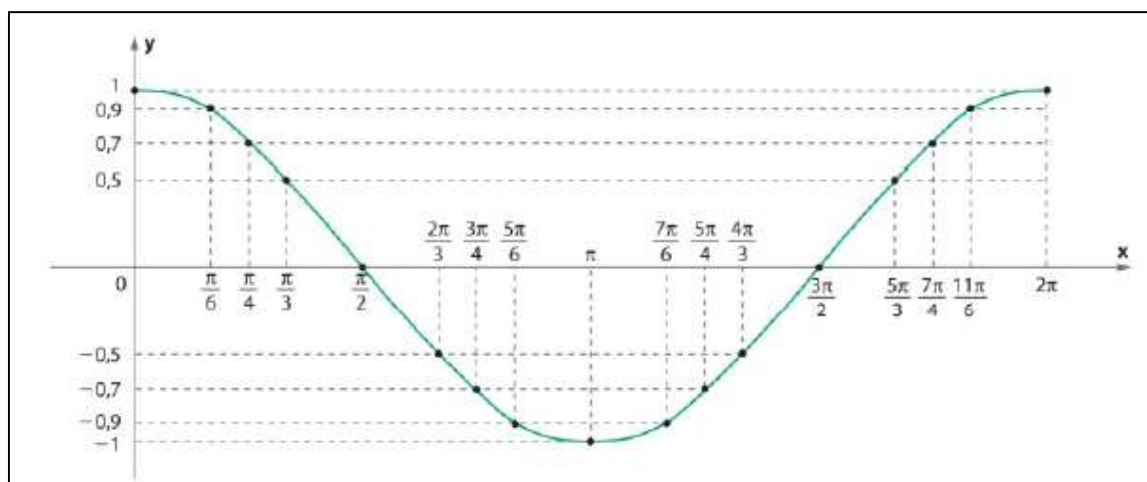
E assim é definida a função cosseno como uma função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor cosseno x , assim sendo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

Em seguida é apresentado o gráfico da função cosseno a partir de uma tabela, inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e depois para $x \in \mathbb{R}$.

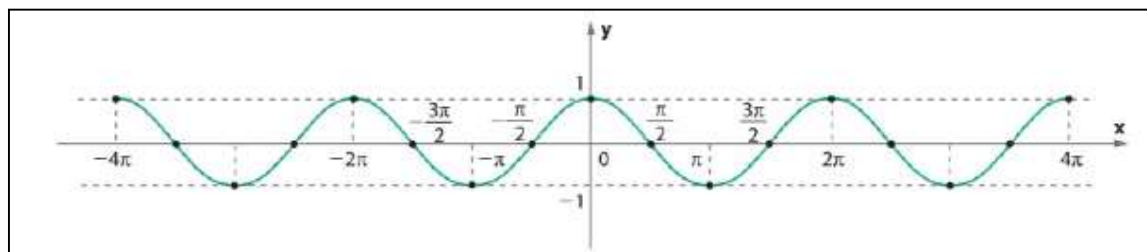
GRÁFICO 1 - GRÁFICO APRESENTADO POR DANTE



Fonte: Dante (2015)

Apresentando o domínio da função em $\mathbb{R}$, o autor apresenta a curva chamada *cossenoide*, já informando que o gráfico $f(x) = \cos x$ é simétrico em relação ao eixo y.

GRÁFICO 2 - COSSENOIDE APRESENTADO POR DANTE



Fonte: Dante (2015)

Em seguida é feita algumas observações sobre a função cosseno:

- i) A cossenoide não é uma nova curva, e sim uma senoide transladada $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Sendo assim, a maioria dos aspectos relevantes da função cosseno são os mesmos da função seno.
- ii) O domínio é: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $D = \mathbb{R}$.
- iii) A Imagem é: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ tem $IM = [-1, 1]$.
- iv) A função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$

v) A função cosseno não é nem injetiva nem sobrejetiva.

O autor faz um breve comentário sobre a função seno ser ímpar e a função cosseno ser par, pois $\cos x = \cos(-x)$, $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Em um tópico bem detalhado com gráficos é explicado o sinal da função cosseno. Para finalizar é dado uma lista de questões para o leitor resolver.

As outras funções trigonométricas também são apresentadas na mesma ordem da função cosseno.

Além desses, ainda é apresentado mais um capítulo denominado “relações trigonométricas”, onde é apresentado algumas relações fundamentais da trigonometria. Ao final de cada capítulo, existe um tópico chamado “questões de vestibular”, onde o autor seleciona algumas questões, dos principais concursos públicos do Brasil, sobre o tema explanado.

O livro de Dante (2015), apesar de não ser um livro que apresenta muitas imagens e não relacionar a parte histórica com os outros tópicos do livro, nos surpreendeu muito com o seu conteúdo. O autor por mais que não aprofundasse em alguns tópicos, tinha o cuidado de mencioná-los, com delicadeza para que o leitor não abrisse margem à interpretações erradas. As questões escolhidas também eram muito bem organizadas e planejadas, evoluindo passo a passo conforme o decorrer das páginas. Dante (2015) é um ótimo livro para trabalhar trigonometria com alunos do Ensino Médio.

2.3. DIAGNOSTICO DOS ALUNOS EGRESSOS

Esta secção apresenta o resultado de uma pesquisa que tinha por objetivo fazer um levantamento para saber como está a aprendizagem de função cosseno dos alunos de escolas públicas de Belém, para isso, foi feita a aplicação de um questionário contendo 21 questões e de um teste de verificação em duas escolas estaduais da cidade de Belém, sendo uma de ensino médio e outra de ensino técnico com uma amostra de 77 alunos pesquisados. A partir dos resultados, foi feita uma triangulação entre as referências bibliográficas, os dados obtidos e as nossas análises. Percebemos através desta triangulação, fragilidades no processo

de ensino e aprendizagem de função cosseno. E ainda conseguimos através do teste de verificação perceber que muitos alunos se encontram com uma baixa autoconfiança em relação à matemática.

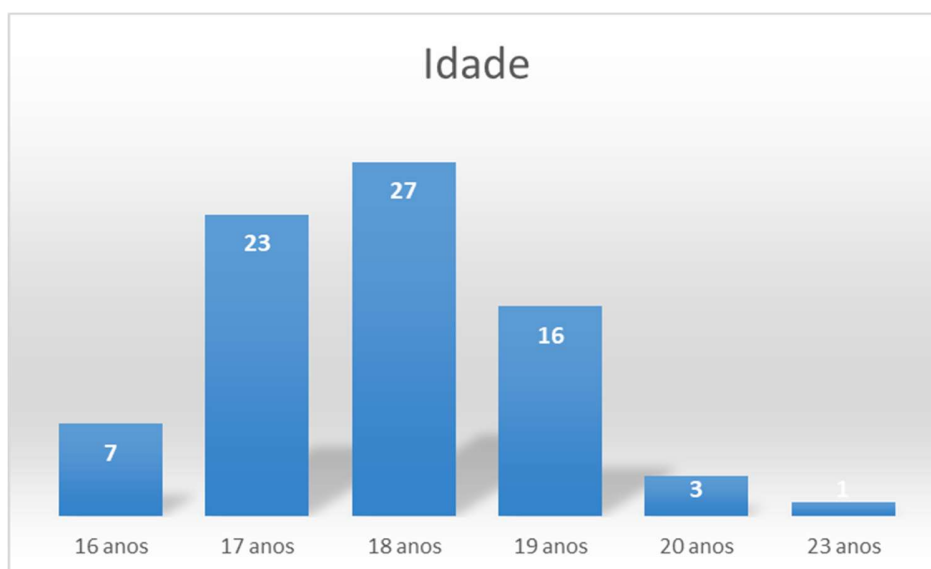
Para analisar os dados obtidos, organizamos em quatro categorias da seguinte forma: categoria 1 – perfil dos alunos; categoria 2 – currículo; categoria 3 – metodologias de ensino; categoria 4 – avaliação de aprendizagem.

2.3.1. Categoria 1 – perfil dos alunos

Para analisar o perfil dos alunos nos enfocamos apenas nas questões 1, 2, 3, 4, 7, 8 e 9 do questionário aplicado.

Quando obtivemos os dados da questão 1, que perguntava qual a idade dos alunos pesquisados, pudemos gerar a seguinte tabela

GRÁFICO 3 - IDADE DOS ENTREVISTADOS



Fonte: pesquisa de campo 2019

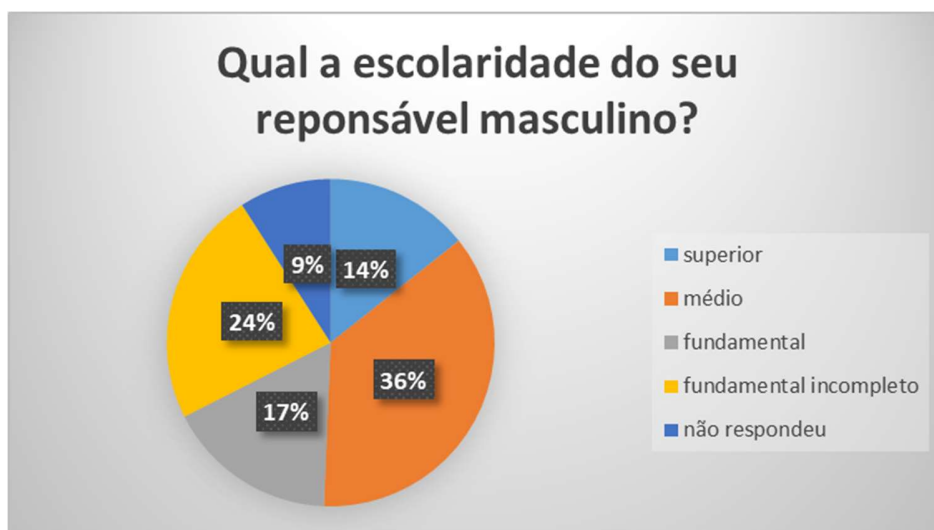
De acordo com a pesquisa feita pelo IBGE (2017), o Ensino Médio deveria ser cursado por pessoas com faixa etária entre 15 a 17 anos. Quando analisamos os dados obtidos na pesquisa percebemos que 47 alunos (61,1%) estão atrasados quanto à idade esperada para a conclusão escolar. O que contradiz com o

estabelecido no artigo 4 da lei 9394/96, no qual diz que a educação básica é obrigatória e gratuita dos 4 aos 17 anos de idade. Ou seja, muitos dos alunos que estão matriculados no Ensino Médio já deveriam ter concluído esta etapa da educação básica.

Quanto ao gênero dos 77 alunos pesquisados, 66,2% que corresponde a 51 alunos eram do sexo masculino e 33,8% que corresponde a 26 alunos eram do sexo feminino. Todos os alunos pesquisados estudavam em escolas públicas estaduais cursando o 3º ano do ensino médio ou a 5ª fase do ensino técnico que corresponde ao 3º ano do ensino médio.

Quando perguntamos a escolaridade do responsável masculino dos alunos, 7 deles não se sentiram à vontade em responder alguns dizendo não conhecer o pai e não considerar nenhuma pessoa do sexo masculino como seu responsável. Dois alunos também se sentiram desconfortáveis ao perguntarmos qual a escolaridade da sua responsável feminino e não quiseram responder. Com base nas duas perguntas geramos os dois diagramas abaixo.

GRÁFICO 4 - IDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO



Fonte: pesquisa de campo 2019

GRÁFICO 5 - ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO

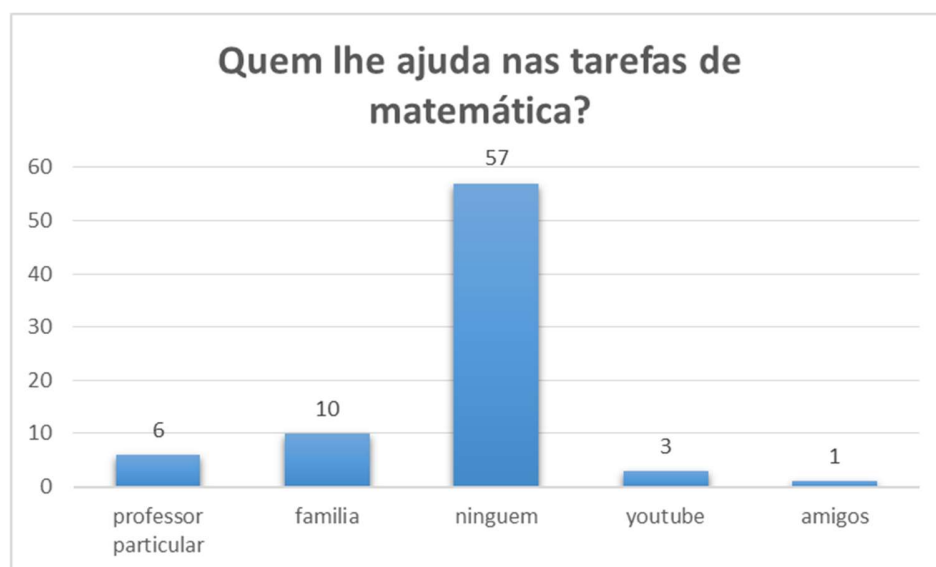


Fonte: pesquisa de campo 2019

Quando analisamos o gráfico sobre a escolaridade do responsável masculino, percebemos que 14% apenas tem o nível superior completo, segundo o IBGE (2017), isso ocorre devido a entrada precoce dos homens no mercado de trabalho. O dado do IBGE também nos afirma que a quantidade de mulheres principalmente entre 25 e 44 anos que completou a graduação é maior do que a dos homens, como podemos observar no gráfico acima, 17% das mulheres responsáveis pelos alunos pesquisados possui nível superior completo.

Quando questionamos dos alunos quem os ajuda nas tarefas de matemática. Obtivemos os seguintes dados

GRÁFICO 6 - AJUDA EM CASA



Fonte: pesquisa de campo 2019

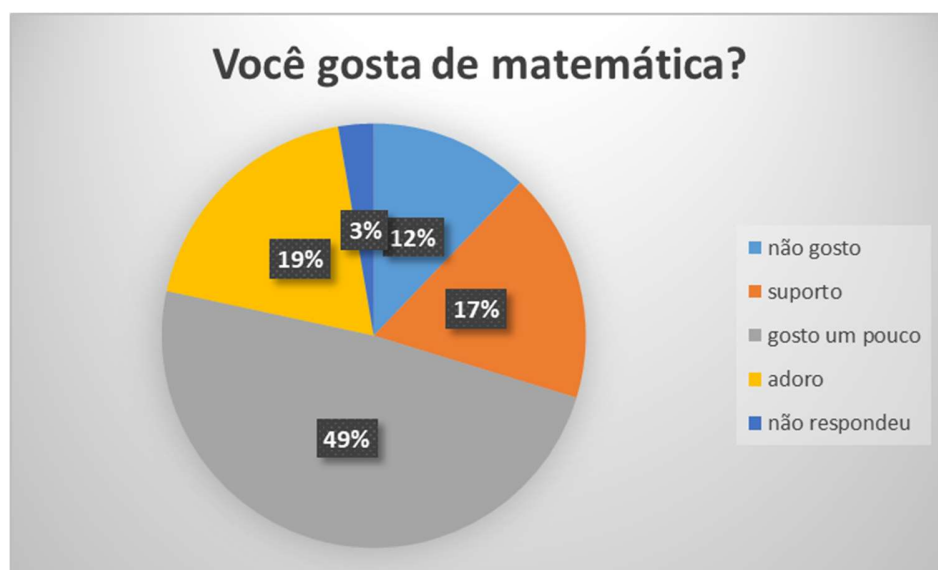
Diante desses dados, percebemos que apenas 13% dos alunos têm a ajuda da família em casa e 7,8% recebem a ajuda de um profissional e 79,2% precisam pedir auxílio aos amigos, ou à internet, ou então alternativas que dependem somente dele aprender. Segundo FEVORINI (2009, p. 11-12) “o acompanhamento da vida escolar dos filhos pelos pais é um fator importante para a aprendizagem e para o sucesso acadêmico da criança e do jovem”.

2.3.2. Categoria 2 – currículo

Na categoria 2 pretendemos avaliar se a escola segue as orientações da BNCC de ensinar o conteúdo de Função Cosseno no 2º ano do Ensino Médio com as perguntas 06, 10, 16, 17 e 18 do questionário.

Quando analisamos a questão 06 que pergunta se os alunos gostam de matemática, geramos o seguinte diagrama

GRÁFICO 7 - PREFERÊNCIA POR MATEMÁTICA

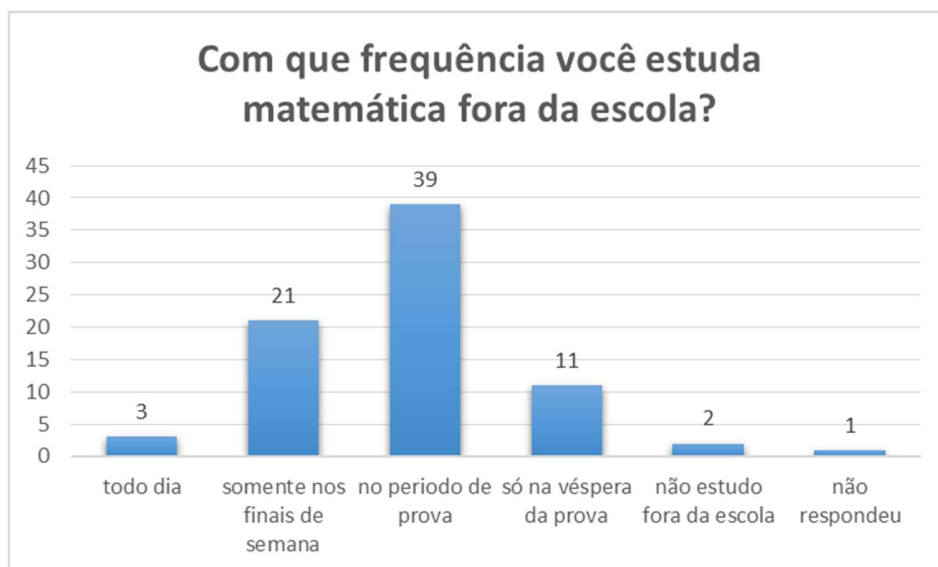


Fonte: pesquisa de campo 2019

Acreditamos que isso ocorre devido a forma como os conteúdos de matemática são ensinados. Lopes (apud SILVA, 2012) afirma que “os métodos tradicionais de ensino estão cada vez menos atraentes para o estudante, ele quer participar, questionar, atuar e não ficar horas a fio sentado ouvindo uma aula expositiva”.

Quando analisamos a questão 10 que questiona com que frequência o aluno estuda matemática fora da escola, obtivemos os seguintes dados.

GRÁFICO 8 - FREQUÊNCIA COM QUE REVISA OS ESTUDOS



Fonte: pesquisa de campo 2019

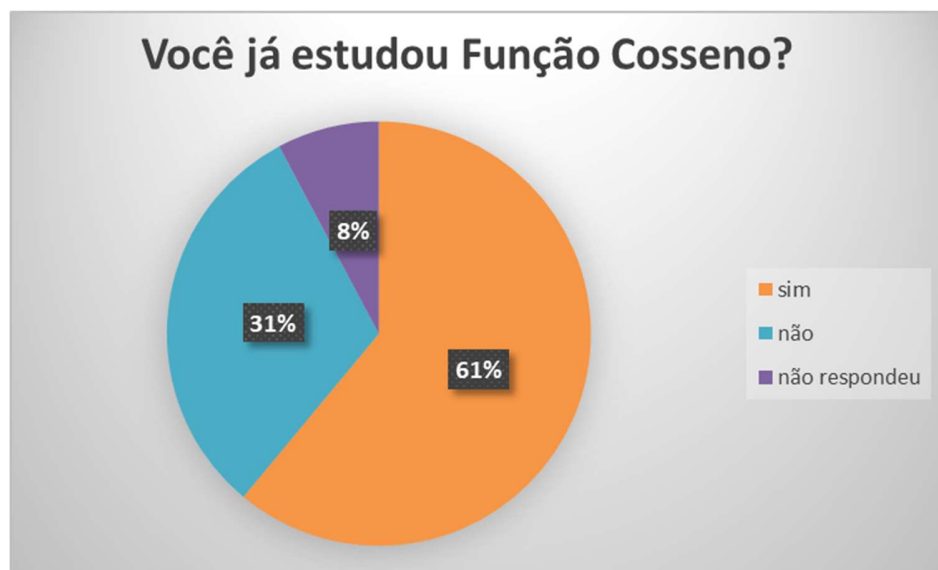
Percebemos que 50,6% dos alunos entrevistados estudam somente no período de prova, o que já é esperado, visto que a partir da investigação já mencionada categoria 1, pudemos perceber que os alunos não recebem ajuda dos pais nesse processo de aprendizagem, logo consequentemente é bem possível que não tenha também uma fiscalização sobre a frequência em que os alunos estudam, assim o aluno só estuda quando julgar necessário, que em geral é no período de provas.

Soares (2010) afirma que “os pais deixaram de acompanhar a vida escolar de seus filhos atribuindo o ensinar e o educar à escola, justificando a sua ausência por questões econômicas e sociais”.

Segundo Pacheco e Andreis (2015) sem a orientação da família, os alunos não têm a organização necessária para o estudo, deixando tudo para ultima hora. Esta falta de apoio pode ter como consequência o desinteresse pelas atividades, acarretando um baixo índice de rendimento em matemática.

Quando analisamos a questão 16 buscando saber se os alunos já haviam estudado Função Cosseno, obtivemos o seguinte diagrama.

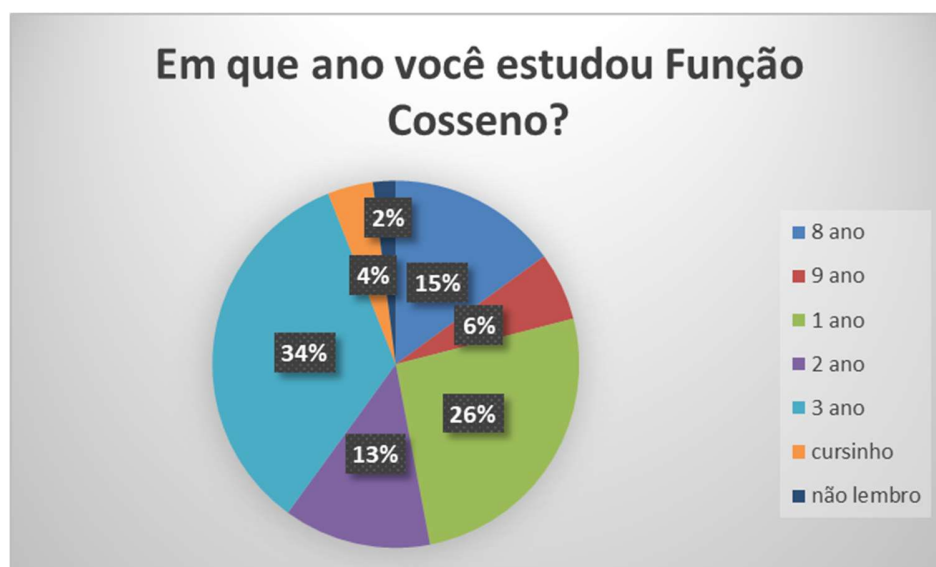
GRÁFICO 9 - ESTUDO DE FUNÇÃO COSSENO



Fonte: pesquisa de campo 2019

Dos alunos entrevistados, 8% não responderam, ao indagá-los eles responderam dizendo que não lembravam de ter estudado ou não, por isso não se sentiam seguros em responder que sim ou não, o que mostra que mesmo que tivessem estudado, o conteúdo não foi marcante ao ponto de eles memorizarem e aprenderem. E outros 31% diz não ter estudado. Quando analisamos o gráfico gerado pela questão 17 que questiona em que ano/série eles estudaram função cosseno, esses dados se tornam mais confusos ainda.

GRÁFICO 10 - ANO QUE ESTUDOU FUNÇÃO COSSENO



Fonte: pesquisa de campo 2019

Verificamos que 21% dos alunos dizem ter estudado função cosseno no Ensino Fundamental, o que possivelmente justifica essa resposta é que os alunos tenham confundido o estudo de função cosseno com o estudo de cosseno de um ângulo formado dentro de um triângulo retângulo. Mas de todos os entrevistados, apenas 10 alunos dizem ter estudado função cosseno no 2 ano, que é o recomendado pela BNCC.

Quando perguntamos se o professor demonstrava domínio do conteúdo Função Cosseno, 67,5% dos alunos responderam que sim, o que contradiz as respostas obtidas na questão 16, visto que se apenas 61% estudaram Função Cosseno, como pode 67,5% dizer que o professor tem domínio do conteúdo, e ainda 22,1% afirmam que o professor não tem domínio e apenas 10,4% não responderam. O que nos leva a acreditar que talvez ao responder à questão 16, os alunos possam ter confundido o “você já estudou função cosseno” por “você aprendeu função cosseno”.

2.3.3. Categoria 3 – metodologias de ensino

Para analisar as metodologias de ensino e entendimento das aulas, analisamos as questões 11, 12, 13, 19, 20 e 21 do questionário aplicado.

Quando analisamos a questão 11, que perguntava se os alunos conseguiam entender as explicações dadas nas salas de aula percebemos que 30% dos alunos responderam que poucas vezes entendem o que o professor explica, 15% afirmara que sempre entendem as explicações e 25% afirmou que quase sempre entende, os outros 30% responderam que entendem poucas vezes.

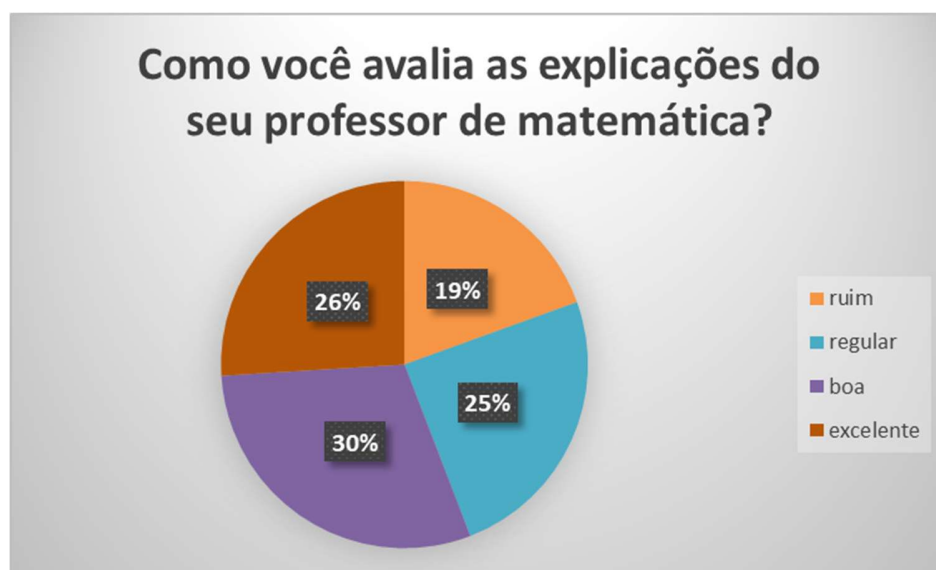
Na análise da questão 12 que questionava se as aulas de matemática despertavam a atenção dos alunos em aprender os conteúdos ministrados, apenas 36,8% responderam que sim. Com os dados obtidos da questão 11 e 12, já podemos perceber que a metodologia utilizada pelo professor de matemática nessa turma alcança a minoria dos alunos, deixando de lado vários alunos que geralmente não entendem as explicações e não sentem interesse pela matéria.

Na questão 13, perguntamos se os alunos conseguiam relacionar os conteúdos ensinados em sala de aula com seu dia-a-dia no que 33,8% respondeu que sim. Segundo Mendes (1994) no que se trata do ensino de função, muitos de nossos alunos e professores, não tem consciência das fragilidades conceituais relacionados à ideia de função. Surgindo, portanto, inúmeros obstáculos ao seu entendimento. Para Marcovitz tais obstáculos estão na falta de clareza dos conceitos inerentes aos estudos de relações funcionais.

Nesse sentido é importante que o professor possa realizar atividades ou incentivos a realização de situações práticas ou manipulativas, a partir do conceito de função. Tendo em vista o “sentido” para o fato de ensinar tal conceito para os nossos alunos. [...] pelo menos nos estágios iniciais do desenvolvimento do conceito. (MARCOVITS et al., 1995).

Quando perguntamos aos alunos como eles avaliam as explicações do professor de matemática na questão 19, obtemos o seguinte quadro.

GRÁFICO 11 - EXPLICAÇÕES DO PROFESSOR

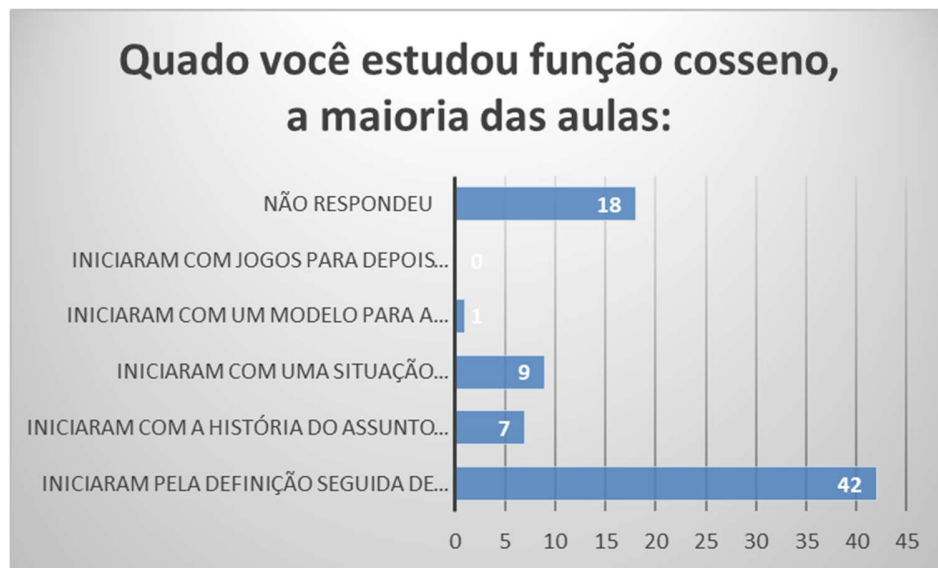


Fonte: pesquisa de campo 2019

Nesse caso, em conversa com os alunos durante a aplicação do teste, pude perceber que em uma escola os alunos tinham uma ótima relação com o professor de matemática enquanto que na outra os alunos diziam “detestar” o professor. Dos alunos que responderam que a explicação do professor era excelente ou boa, a maioria pertencia à primeira escola. Desses alunos alguns até relataram que “quando o professor está explicando pra turma toda, às vezes eu não consigo entender, mas quando eu vou até a mesa dele, ele me explica e eu entendo tudo”. Daí é evidente a importância de uma boa relação entre professor e alunos para que o aluno não tenha receio de expor suas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

Em busca de conhecer qual metodologia o professor utilizou para ensinar função cosseno, elaboramos a questão 20 no qual obtivemos o seguinte quadro.

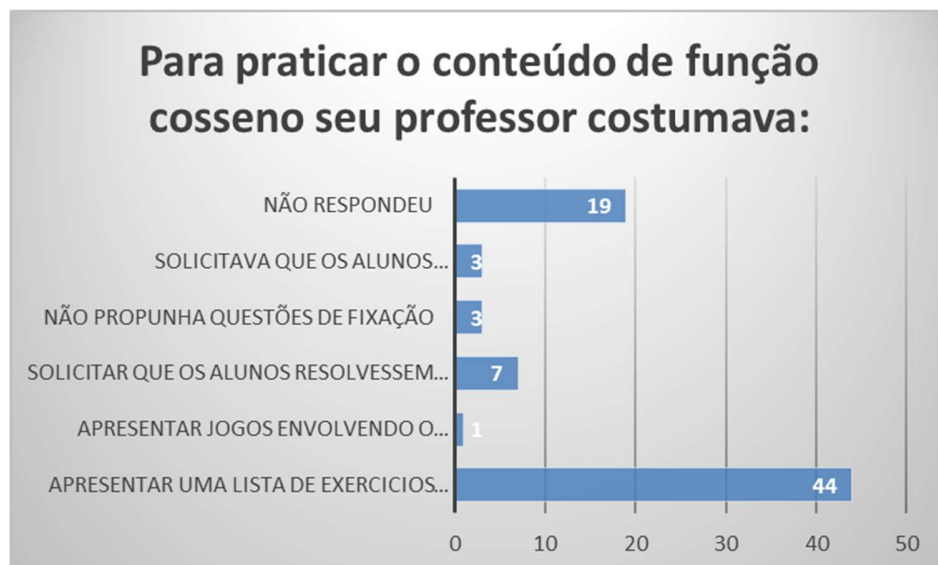
GRÁFICO 12 - METODOLOGIA DO PROFESSOR



Fonte: pesquisa de campo 2019

Na questão 21 perguntamos aos alunos sobre a metodologia que o professor costumava utilizar para a prática do conteúdo. Gerando o quadro abaixo.

GRÁFICO 13 - PRÁTICA DO CONTEÚDO



Fonte: pesquisa de campo 2019

A partir dos quadros 9 e 10 é notável que os professores ainda continuam seguindo a mesma metodologia que os professores utilizavam a décadas atrás, que é da definição seguida de exemplos e exercícios para fixação do conteúdo.

Essa metodologia não tem sido eficiente para a maioria dos alunos em seus processos de aprendizagem. Mostraremos na análise da categoria 4, através do teste de verificação aplicado, que os alunos não conseguiram concluir esse processo de aprendizagem.

2.3.4. Categoria 4 – avaliação da aprendizagem

Nessa categoria, iremos analisar as nossas impressões acerca das avaliações de aprendizagem. Para isso analisaremos as questões 5, 14 e 15 do questionário e também o teste de verificação.

Segundo D'Ambrosio (2000), para modificar os altos índices de reprovação e evasão, é necessário “procurar instrumentos de avaliação de outra natureza daqueles que vem sendo erroneamente utilizados para testar os alunos, tais como provas, exames, questionários e similares”.

Na questão 5 buscávamos descobrir se os alunos já haviam ficado em dependência, e caso tenham ficado, em qual matéria seria.

GRÁFICO 14 - DEPENDÊNCIA NAS DISCIPLINAS



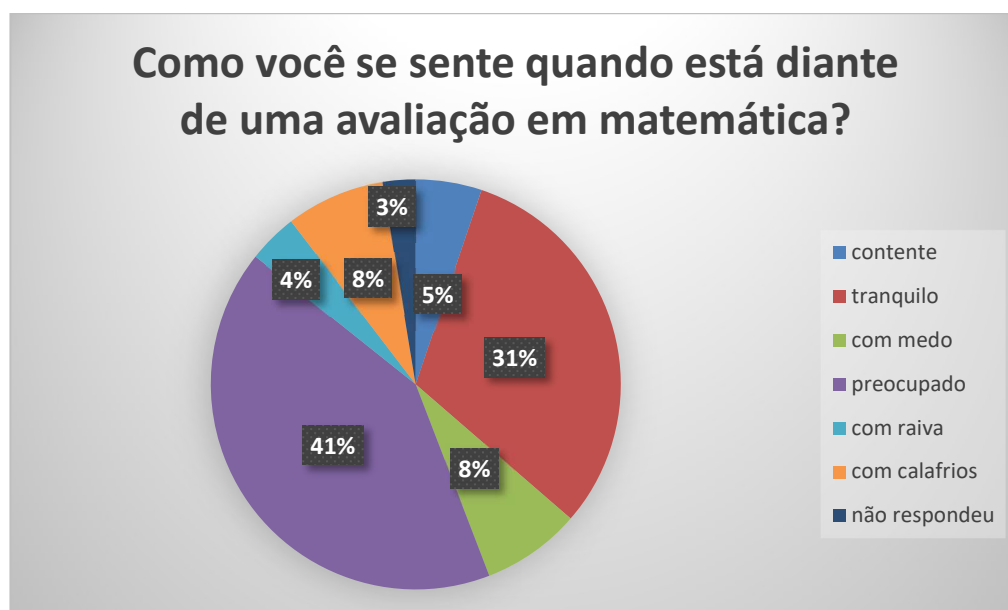
Fonte: pesquisa de campo 2019

Percebemos que a maioria dos alunos em algum momento da vida escolar ficaram em dependência em uma ou duas matérias. Sendo a matemática e a química as duas matérias líderes de reprovação na nossa pesquisa. E segundo D'Ambrósio (2000) a reprovação, repetência e evasão, que ele considera como deformações às vezes irreversíveis, são situações abertas devido a condução das avaliações.

Na questão 15, investigamos qual método de avaliação era esse que o professor utilizava com os alunos e 81,8% responderam que o método mais utilizado era de avaliar através de provas e simulados. Segundo D'Ambrosio (2001), a situação de exames ou testes é artificial, e “dizem quase nada sobre a aprendizagem e criam enormes deformações na prática educativa”.

Na questão 14, perguntamos como os alunos se sentiam diante de uma avaliação em matemática, e obtivemos o seguinte resultado.

GRÁFICO 15 - AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA



Fonte: pesquisa de campo 2019

Dos alunos entrevistados 41% afirmaram que se sentem preocupados com a avaliação e 31% responderam que ficam tranquilos. D'Ambrósio afirma que:

“A avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Reprovar, selecionar, classificar, filtrar indivíduos não é missão do educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar dessa missão”. (D'Ambrósio, 2001, p.98)

Uma boa relação entre professor e aluno é essencial tanto no processo de ensino e aprendizagem quanto no processo avaliativo. Posturas ou falas que metem medo nos alunos como dizer: “estudem porque a prova vai ser difícil” ou “durante a prova eu não vou falar com ninguém”, só dificultam em momento de avaliação.

Para a análise do teste de verificação, nos baseamos pela análise de erros que segundo Moraes (2013), o erro é um conhecimento, é um saber que o aluno possui e não a falta dele. Ele não considera que os erros demonstram aquilo que os alunos não sabem, assim como não é possível assumir que os acertos demonstram aquilo que eles sabem. Os alunos podem acertar um raciocínio por

inúmeras razões sem ter, de fato, absorvido o conteúdo em questão. Cury (1994) afirma que:

Os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático. (CURY, 1994, p. 132).

Montamos uma tabela que expressa em porcentagem a quantidade de alunos que acertou, errou ou não fez as 10 questões do teste de verificação.

QUADRO 4 - RESULTADO DO TESTE DE VERIFICAÇÃO

	acertou	errou	não fez
Questão 1	29,9%	24,7%	45,5%
Questão 2	40,3%	19,5%	40,3%
Questão 3	26,0%	16,9%	57,1%
Questão 4	23,4%	13,0%	63,6%
Questão 5	29,9%	11,7%	58,4%
Questão 6	13,0%	20,8%	66,2%
Questão 7	7,8%	18,2%	74,0%
Questão 8	6,5%	20,8%	72,7%
Questão 9	6,5%	22,1%	71,4%
Questão 10	6,5%	19,5%	74,0%

Fonte: pesquisa de campo 2019

As questões do teste de verificação tinham o objetivo de avaliar o quanto os alunos dominavam os conceitos dos temas, não só da função cosseno como também de outros assuntos que consideramos essenciais para o entendimento do nosso tema em questão. As questões de 1 a 3 trabalhavam arcos e ângulos em radianos. As questões de 4 a 7 buscavam saber os conhecimentos dos alunos sobre os arcos no ciclo trigonométrico. Já as questões de 8 a 10 trabalhavam sobre a função cosseno e suas representações em gráficos.

As questões eram discursivas com o propósito de verificar a real situação da aprendizagem dos alunos em função cosseno e sobre os conhecimentos prévios necessários para o entendimento de função cosseno.

Ao analisarmos os resultados percebemos que a partir da questão 2, a maioria dos alunos desistem de fazer as questões. E dentre os alunos que fizeram a partir da questão 6, percebemos que as porcentagens de erros superam as porcentagens de acertos.

Outro fator que nos deixou muito preocupados, foi que ao analisarmos as respostas, nos deparamos com várias situações como essas:

1. Calcule a medida, em radianos, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

Na imagem 1, percebemos que o aluno começa resolvendo o cálculo certo, mas em seguida ele risca o cálculo feito e escreve “não sei isso”, e “não estudei isso”.

2. Determine a medida, em grau, equivalentes a:

a) $\frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow \frac{180}{4} = 45$

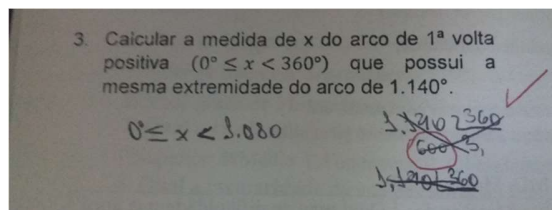
b) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow 3 \cdot \frac{180}{2} = 270$

c) $\frac{\pi}{6} \text{ rad} \rightarrow \frac{180}{6} = 30$

d) $\frac{\pi}{4} \text{ rad} \rightarrow \frac{180}{4} = 45$

Na imagem 2, percebemos que o aluno também começa fazendo certo, mas em seguida, quando o número é expresso em forma de fração, é como se ele desistisse de resolver a divisão, ou não tivesse segurança em sua resposta, visto que a grande maioria dos professores não expressam os ângulos em graus na forma de fração.

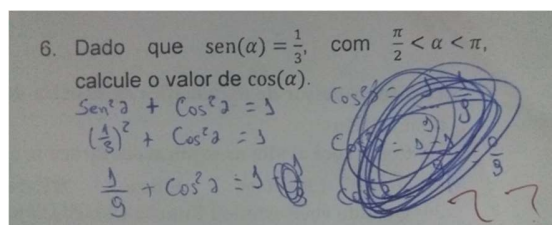
FIGURA 13 - IMAGEM 3



Fonte: pesquisa de campo 2019

Na imagem 3 também temos um exemplo semelhante ao acontecido na imagem 1, onde o aluno começa fazendo o cálculo, no caso da imagem 3 ele até finaliza o cálculo, mas por uma insegurança, ele risca a resposta como se estivesse errada.

FIGURA 14 - IMAGEM 4



Fonte: pesquisa de campo 2019

Na imagem 4, o aluno utiliza a fórmula certa para a resolução da questão, faz as substituições corretamente, mas por algum motivo ele desiste da questão riscando parte do processo construído.

Essas foram apenas algumas das várias situações semelhantes que obtivemos ao analisar as respostas, o que nos levar a crer que as vezes o aluno até sabe o assunto, mas em algum momento nesse processo de aprendizagem, ele perdeu a confiança em seus conhecimentos, e que talvez por uma fraca relação professor-aluno, não foi possível reparar essa autoconfiança com a matemática.

3. SOBRE A FUNÇÃO COSSENO

Nesse capítulo, abordaremos os rumos que levaram à função cosseno trazendo os principais personagens que contribuíram para o surgimento da trigonometria que conhecemos hoje e a função de Euler que define todas as funções periódicas, dentre essas, a função Cosseno. Essa secção foi baseada nas obras de Mendes e Rocha (2010), Mendes (2010) e Lima (1991).

3.1. A HISTÓRIA DAS TABELAS TRIGONOMÉTRICAS

Segundo Mendes e Rocha (2010), pesquisas realizadas por diversos historiadores tanto da matemática como de outras áreas, revelam que a origem da Trigonometria é anterior à Era Cristã. Os primeiros indícios de utilização da Trigonometria são encontrados no Egito e na Babilônia, por volta dos séculos XVI a XX a.C., sempre relacionados a problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Os fenômenos celestes sempre foram alvo da observação dos homens. A regularidade com que aconteciam e se repetiam, por exemplo, as fases da Lua, o nascimento do Sol, e a cada noite o deslocamento das estrelas e o surgimento das constelações, suscitaram muitos estudos sobre o tema.(Mendes, 2010, p. 66)

Foi o fascínio pelo movimento dos planetas que impulsionou a evolução da Trigonometria. Em vista disso, a Trigonometria aparece bastante associada à Astronomia. A Trigonometria era parte da Astronomia, tendo, só muito mais tarde, passado a fazer parte da Matemática. Desde a Antiguidade até a Idade Moderna, foram construídas tabelas que mais tarde deram origem à trigonometria (Mendes; Rocha, 2010, p. 14)

A primeira tabela trigonométrica foi construída por Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) um astrônomo, que também era construtor, cartógrafo e matemático grego, da escola de Alexandria. A tabela construída por Hiparco tinha por base uma única função que relaciona cada arco da circunferência à sua respectiva corda. Por ter sido o primeiro a trabalhar com a tabela foi chamado “pai” da

Trigonometria e deve-se a ele a fundação da Astronomia Científica. Considerado figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu.

Grande parte dos trabalhos de Hiparco foi perdido, entretanto, os teoremas essenciais e as tabelas foram preservadas por Cláudio Ptolomeu (90-168), influenciando definitivamente o desenvolvimento da Trigonometria, durante muitos séculos. Nascido no Egito durante a dominação romana, Ptolomeu viveu e trabalhou em Alexandria, tendo realizado trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia.

A partir de observações, entre as estrelas que pareciam fixas existem algumas que passeiam no meio delas, são os planetas, que semelhantes a pequenos focos luminosos que variavam de intensidade e deslocavam num constante ziguezague, geraram dúvidas e confundiram os astrônomos. Os planetas não percorrem sempre um caminho direto, andam errantes, às vezes para o Norte outras para o Sul.

Conforme Braga; Guerra e Reis (2003), para Ptolomeu a explicação estava em ter a terra imóvel e os planetas girando em torno dela em movimentos circulares com velocidade constante. Com esse pensamento construiu um sistema sustentado pela física de Aristóteles sobre a imobilidade da terra e pelas ideias de Platão de que, os movimentos celestes deveriam ser circulares por ser o círculo a figura geométrica considerada perfeita. (Apud Mendes, 2010, p. 67).

Ptolomeu construiu um sistema do qual saíram tabelas de dados numéricos que permitiam prever as posições do Sol, da Lua e dos planetas então conhecidos. Esse sistema Ptolomeu explica com detalhes em sua obra *Almagesto*, onde se destaca um rigoroso tratamento matemático com uso da trigonometria esférica, uma grande intuição para divisar arranjos geométricos simples que descrevam os fenômenos, e o uso desses arranjos para realizar previsões astronômicas. (Mendes, 2010, p. 68)

A obra *Almagesto* contém uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, em ordem crescente e em função da metade do ângulo, equivalente à tabela de senos que se trabalha atualmente. Ptolomeu começa mostrando a matemática básica que usará, e instrui como calcular a função corda, aplicando-a a uma série de demonstrações, lança mão da geometria elementar,

do sistema de numeração de base 60 e constrói uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco. (Mendes; Rocha, 2010, p. 15).

Ptolomeu, no entanto não conseguiu, com seu sistema, reproduzir completamente o movimento retrógrado que todos os planetas descrevem, pois esse movimento não era regular, não tinha a mesma medida angular nem a mesma duração. (Braga; Guerra; Reis, 2003 apud Mendes, 2010, p. 69).

Segundo Morey (2003) com a queda do Império Romano, o centro da cultura se deslocou para a Índia que revolucionou a Trigonometria com uma série de textos sobre sistemas de Astronomia, a introdução de novas “funções” trigonométrica e o aperfeiçoamento dos métodos de tabulação. Na Índia a Trigonometria tinha suas funções definidas como comprimento de um seguimento e não como uma relação entre dois comprimentos como hoje. Os Indianos usavam frequentemente o comprimento da meia corda do ângulo central, que mais tarde veio a ser chamado **seno indiano**. Utilizando o seno de um arco e seus múltiplos inteiros e fracionários foram construídas tabelas de seno de arcos entre 0° e 90° , as quais eram utilizadas para cálculos em astronomia, como por exemplo, a posição exata dos planetas. (Apud Mendes; Rocha, 2010, p. 15).

Após os hindus, as contribuições à trigonometria vieram dos árabes que com influência helenística, babilônica e indiana deram um tratamento sistemático ao tema em questão. Os árabes tiveram acesso à obra de Ptolomeu e, por conseguinte trouxeram os conhecimentos de trigonometria para a Europa através da Espanha.

Segundo Berlinghoffe e Gouvêa (2010), foi nesse contexto que surgiu a palavra seno. O que hoje entendemos por seno, na Índia era denominado por *jyā – ardha* (meia-corda), ou abreviadamente, *jyā*. Os árabes, ao se depararem com a matemática hindu, adotaram a palavra *jyā* como sendo *jiba*.

Entretanto, os árabes tinham costume de dispensar as vogais em suas palavras, deste modo era utilizado apenas *jb*. Com isso, os europeus ao encontrarem a palavra *jb*, acrescentaram as vogais *a* e *i*, por suporem que se tratava da palavra árabe *jaib*, que significa angra ou baía. Assim, escolheram a palavra latina *sinus* como tradução. É dessa tradução equivocada que surgiu a palavra seno. (Apud Gama, 2020, p. 74).

Aos árabes se atribuiu a introdução das seis funções básicas da trigonometria: seno e cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante; ao definir a função seno em termos de um círculo de raio unitário, os árabes deram às funções utilizadas pelos indianos na astronomia, uma forma mais próxima da atual, além disso, deram origem às funções tangente e cotangente, foram responsáveis pelo estabelecimento de várias relações trigonométricas e, compreenderam que os cálculos trigonométricos, aplicados à astronomia ou à geometria, precisavam de tabelas mais precisas que as existentes na época. Então começaram a construir tabelas: primeiro Al-Hasib (c. 850) com uma tabela de senos e tangentes com intervalos de 1° , e a partir daí tentando reduzir os intervalos, foram construídas outras tabelas, nas quais utilizavam procedimentos de interpolação para encontrar o seno de 1° , da mesma maneira que havia utilizado Ptolomeu em seu *Almagesto*. Foi o árabe Al-Kashi que calculou o seno de 1° utilizando um procedimento diferente do empregado até então, para tanto se baseou em informações que estavam nas mãos dos matemáticos árabes há, pelo menos, três séculos as quais, consideravam: dado um ângulo α , $\text{sen}3\alpha = 3.\text{sen}\alpha - 4.\text{sen}^3\alpha$ e $\text{sen}3^\circ = 0,013083989$. (MOREY, 2003 apud MENDES; ROCHA 2010, p. 16).

Na Idade Moderna, o matemático e astrônomo alemão Regiomontanus (1436-1476) reativou os estudos da Astronomia na Renascença, e fez importantes contribuições para a Trigonometria e a Astronomia. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XV, e em 1464, escreveu *De triangulis omnimodis*, um tratado sobre Trigonometria, onde calcula novas tabelas, e que marcou o renascimento desse ramo da Matemática na Europa.

O polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) também realizou pesquisas astronômicas e astrológicas, e em 1543 lança a sua obra "*De revolutionibus orbium coelestium*" com uma teoria contrária à de Ptolomeu sobre o Universo, trazendo ao mundo o modelo heliocêntrico. Em sua obra são desenvolvidos estudos sobre Trigonometria, onde encontramos uma tabela de senos construída com base na função corda utilizada por Hiparco e Ptolomeu, e que passa a ser um modelo para a Astronomia, tomando o lugar da tabela de Ptolomeu. Sua obra deu ponto de partida para a astronomia moderna.

Para Copérnico, o trabalho de Ptolomeu era uma concepção deselegante, complicada demais, pois era carregada de artifícios para explicar o movimento dos planetas. Quando a trajetória de um planeta não coincidia com a teoria, acrescentava-se outro círculo, e, se necessário fosse, outro e outro. (Contador, 2006, p. 81).

No “*De Revolutionibus ...*” Copérnico tentou corrigir os erros das tabelas e teorias de seus antecessores, com cálculos matemáticos fáceis e exatos das posições dos planetas. Mas apesar de não ter conseguido se afastar completamente das antigas teorias e resolver o problema dos planetas, que era o objetivo maior da obra, conseguiu, com sua teoria, abrir caminho para uma nova mentalidade que acabou por destruir a concepção da Terra imóvel no centro do Universo

Copérnico desenvolveu o heliocentrismo, o Sol como centro do Sistema Solar. Ainda segundo as suas explicações, a Terra girava sobre si mesma, e as estrelas ficavam a muitas distâncias de nós.

Convém, não obstante, reconhecer que os seus movimentos [dos planetas] são circulares ou compostos de muitos círculos, porque esta irregularidade ocorre de harmonia com uma lei definida e retornos fixos às suas posições originais, o que não poderia acontecer se não fossem circulares. (Copernico, 1566 [1996], p. 26).

A obra de Copérnico só foi editada após a sua morte, mas transformou completamente o pensamento e a compreensão dos homens, sobre a Terra e o Universo. Foi uma obra tão revolucionária na medida em que permitiu aos seus seguidores uma abordagem inteiramente nova da astronomia e cosmologia, em aspectos que nem o próprio autor pôde prever.

3.2.A FUNÇÃO DE EULER

A trigonometria consiste em, essencialmente, em associar a cada ângulo α certos números como $\cos \alpha$ (o cosseno de α) e $\sin \alpha$ (o seno de α), a cada um dos quais representa, de certo modo, uma espécie de “medida” daquele ângulo.

Segundo Lima (1991), com o surgimento do Cálculo Infinitesimal e, posteriormente, do seu prolongamento teórico, a Análise Matemática, surgiu uma nova dimensão às noções básicas da trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Nesse contexto, Leonhard Euler (1707-1783), cria uma transição feita por meio de uma função E (que chamamos de *função de Euler*) ao qual considera as funções $\cos t$ e $\sin t$ definidas para todo número real t . Ou seja, Euler começa a falar em cosseno e seno de um número, em vez de um ângulo.

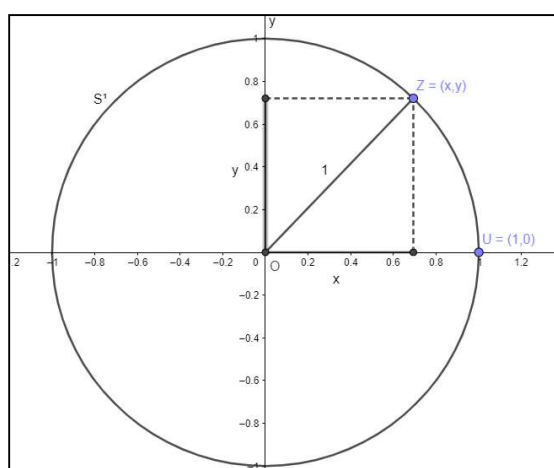
O domínio da função de Euler é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Seu contradomínio é o círculo unitário do plano, que representaremos por S^1 . Assim, a cada número real t , a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo S^1 . (Lima, 1991, p. 33).

Para definir precisamente o círculo S^1 , introduzimos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que todo ponto Z do plano passa a ser representado com um par ordenado $Z = (x, y)$, onde x é a sua abscissa e y sua ordenada. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância do ponto $Z = (x, y)$ ao ponto $W = (u, v)$ é

$$d(Z, W) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Em particular, a distância de $Z = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$.

FIGURA 15 - CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

Cuja distância à origem é igual a 1. Assim, o ponto $Z = (x, y)$ pertence a S^1 se, e somente se, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Agora definiremos a função $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Dado o número real $t > 0$, medimos no círculo S^1 , a partir do ponto $U = (1, 0)$, um arco de comprimento t , sempre percorrendo o círculo no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ pelo caminho mais curto em S^1). A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de $E(t)$. Se for $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um arco de comprimento t , medido a partir do ponto $U = (1, 0)$, no sentido negativo de S^1 (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio).

A função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ consiste em envolver a reta $\mathbb{R}$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginando como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $U = (1, 0) \in S^1$.

Com o auxílio da função $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, podemos definir o cosseno e o seno de um número real t . A função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, possibilitando considerar $\cos t$ e $\sin t$ como funções da variável real t , abriu para a trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações importantes às Ciências Físicas. (Lima, 1991, p. 34).

Uma propriedade fundamental dessas funções é que elas são periódicas, isto é, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ e $\sin(t + 2\pi) = \sin t$. Isso exprime dizer que 2π é o período das funções $\cos t$ e $\sin t$. Portanto, usando as funções trigonométricas, podemos obter funções com qualquer período.

Ora a periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do nosso coração. Periodicidade é uma ideia muito próxima de oscilação (ou vibração). As funções periódicas são o instrumento matemático mais adequado para descrever todos os fenômenos periódicos. (Lima, 1991, p. 36).

Essa definição da fórmula de Euler foi de fundamental importância para a construção da sequência didática.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática utilizada nesta pesquisa encontra-se nesse capítulo. Ela foi composta de 5 UARC's que abordam o conteúdo da função cosseno, tendo como início a associação de números reais a um ponto do círculo S^1 formulando assim a função de Euler e finalizando com a construção do gráfico da função do tipo $E(t) = a + b \cdot \cos(c \cdot t + d)$. O quadro a seguir indica o número e os objetivos de cada UARC.

QUADRO 5 - UARC'S

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM	OBJETIVOS DE ENSINO
1	Associando os pontos	Perceber que os números reais estão associados a apenas um ponto do círculo S^1 formando assim uma função $E(t) = t = (x, y)$.	Definir a função de Euler
2	Propriedades da Função de Euler	Descobrir as propriedades da função de Euler $E(t) = t = (x, y)$. (domínio, imagem, periodicidade).	Definir as propriedades da função de Euler
3	Restrições da Função de Euler	Descobrir que a função de Euler $E(t) = t = (x, y) = (\cos t, \sin t)$ gera a função cosseno e a função seno.	Definir a função cosseno
4	Para um lado e para o outro, para cima e para baixo	Perceber a influência que os parâmetros "a" e "d" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$.	Definir a influência que os parâmetros "a" e "d" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$.
5	Escolhendo a melhor onda	Perceber a influência que os parâmetros "b" e "c" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b \cdot \cos(c \cdot t)$.	Definir a influência que os parâmetros "b" e "c" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b \cdot \cos(c \cdot t)$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2021

Durante a sequência didática, será necessário que o aluno esteja interagindo com o software geogebra com arquivos pré-programados no formato ggb.

App1.ggb disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing/ur2rczk9>

App2.ggb disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/wtxbssz4>

Formalização1.ggb disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/fzgf3cm4>

App3.ggb disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/vtxpucgg>

Formalização2.ggb disponível em: <https://www.geogebra.org/calculator/bkwwndxp>

4.1 - UARC 1: Associando os Pontos

Materiais didáticos:

- Arquivo app1.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 1 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, preencha os dados da tabela e responda as questões a seguir.

- 1) A semirreta t representa a distância em que o ponto E percorre em torno do círculo S' partindo do ponto B (1,0). Deslize a barra ang (verde) ou a semirreta t (azul) para responder à tabela abaixo.

Quais as coordenadas do ponto E, quando t assumir o valor de:	
$t = 2$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 3$	$E = (\quad , \quad)$
$t = -2$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 4,29$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 6$	$E = (\quad , \quad)$
$t = -4$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 8,27$	$E = (\quad , \quad)$
$t =$	$E = (\quad , \quad)$

- a) É possível afirmar que para cada valor de t existe um par ordenado correspondente?

b) É possível ter mais de um valor de t relacionado a um único par ordenado?
Justifique.

c) Podemos dizer que a semirreta t representa o conjunto dos números reais?
Justifique

d) É possível ter dois ou mais pares ordenados associados a um único valor de t ?

2) Dado dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Diz-se que f é uma função de A em B , denota-se $f: A \rightarrow B$, quando cada elemento pertencente ao conjunto A (partida) está correlacionado a um único elemento de B (chegada) por meio de uma “lei” de correspondência. Com base nessa definição de função, é possível afirmar que a relação entre a reta R e S^1 trata-se de uma função?
Justifique.

- 3) Se a sua resposta na questão 2 tenha sido sim, como podemos definir a “lei” dessa função? E se a sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre t e S^1 ?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Dizemos que a função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, consiste em envolver a reta $\mathbb{R}$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $B = (1, 0) \in S^1$. Dado $t \in \mathbb{R}$ temos $E(t) = (x, y)$

4.2 - UARC 2: Propriedades da Função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app1.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 2 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, responda as questões a seguir.

- 1) Agora que sabemos que a relação entre t e o ponto E é uma função? Qual o domínio da função $E(t) = t = (x, y)$?
-

- 2) Qual a imagem dessa função?
-

- 3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t) = t$ e $\cos t$

$f(t) = t$	$\cos t$	$E(t) = (x, y)$	Ângulo
	0.5	(____, ____)	
	0.71	(____, ____)	
	0.87	(____, ____)	
	0	(____, ____)	
2.09		(____, ____)	
2.36		(____, ____)	

- 4) Sendo o raio do círculo S^1 igual a 1, sabemos que uma volta completa sobre esse círculo é igual a $2\pi \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que essa função se repete a cada ciclo? Se sim, que ciclo é esse? Se não, justifique.
-
-

-
-
- 5) Quando analisamos as projeções que o ponto faz com o eixo x e o eixo y, percebemos um triângulo retângulo que cria uma relação entre o par ordenado e os valores de seno e cosseno. Qual relação seria essa?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

A função de Euler $E(t) = t = (x, y)$ possui domínio no conjunto dos reais e a sua imagem vai de $[-1, 1]$. O seu período é de 2π , e através de $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, podemos saber o seno e o cosseno de um número real t

4.3 UARC 3: Restrições da função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app2.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 3 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, e da relação $E(x,y) = (\cos t, \sin t)$ responda as questões a seguir.

- 1) Conforme o que percebemos na UARC 2 o par ordenado $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. É possível fazer uma relação entre o arco formado por $E(x,y) = (\cos t, \sin t)$ e a distância percorrida por t ". Que relação é essa?

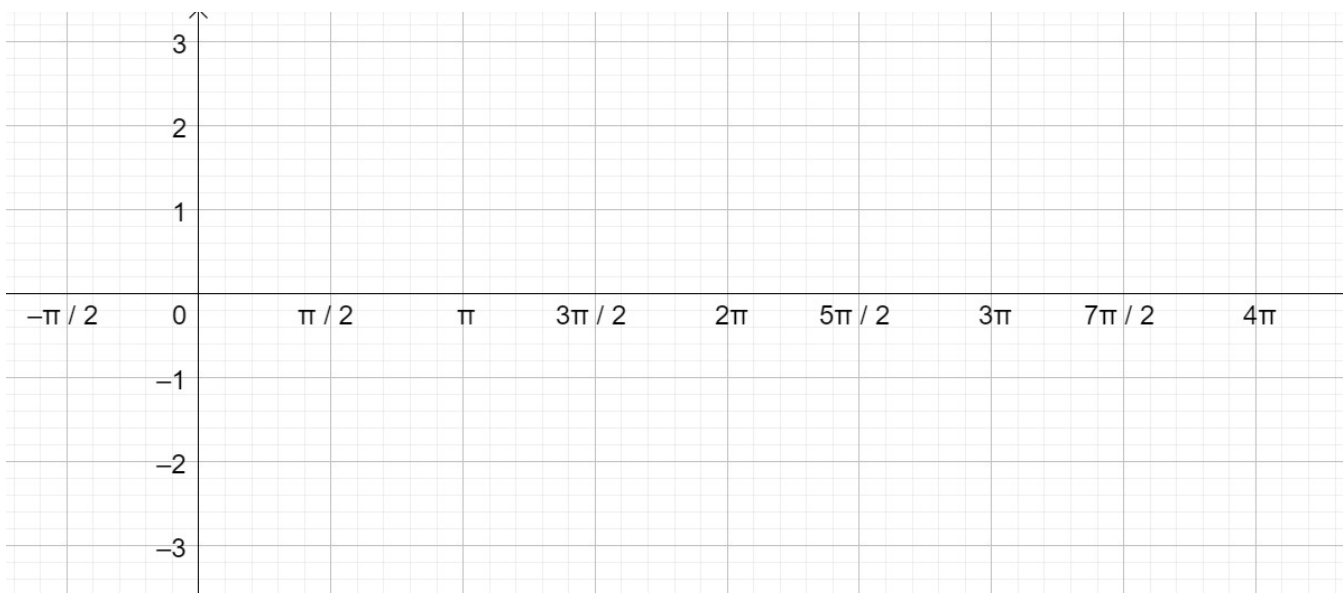
- 2) É possível afirmar que a relação entre o ponto t e apenas o $\cos t$ trata-se de uma função? Se sim, como podemos definir a "lei" dessa função? Se sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre o ponto t e $\cos t$?

- 3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t) = t$ e $\cos t$

$f(t) = t$	$\cos t = x $
	0.5
	0.71
	0.87
	0
2.09	
2.36	

	$ -0.87 $
π	
	$ -71 $
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	
3π	
4π	

- 4) Com base nos dados da questão anterior, construa o gráfico da função $f(t) = \cos t$



INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Com a função $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, sendo $x = \cos t$ (abscissa) e $y = \sin t$ (ordenada) do ponto $E(t)$, se olharmos apenas para $x = \cos t$, temos uma restrição da função $E(t)$, formando assim a função cosseno $f(x) = \cos x$. Agora, abra o arquivo formalização1.ggb para visualizar o gráfico sendo formado passo a passo conforme o ponto E vai percorrendo o círculo S^1 formando assim uma senoide.

4.4 - UARC 4: Para um lado e para o outro, para cima e para baixo

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 4 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a fórmula $f(x) = \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

2) Insira no campo de entrada a fórmula $g(x) = 1 + \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$?

3) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -1 + \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = a + \cos t$, qual a influência que o parâmetro " a " tem no gráfico?

5) Agora apague as funções anteriores deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos(x + 1)$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos(x - 1)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

7) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \cos(1 - x)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $h(x)$ e $i(x)$?

8) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, em uma função $E(t) = \cos(t + d)$, qual a influência do parâmetro " d " tem no gráfico?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = a + \cos(x + d)$, o parâmetro " a " translada a função verticalmente e o parâmetro " d " translada a função horizontalmente

4.5- UARC 5: Escolhendo a melhor onda

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 5 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a função $f(x) = \cos x$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = 1 \cos x$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

2) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -2 \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

3) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \frac{1}{2}\cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $i(x)$ e $f(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, em uma função $E(t) = b \cos t$, qual a função de b ?

5) Agora apague todas as funções deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos 2x$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

7) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = \cos(c \cdot t)$, qual a função de c ?

8) O que aconteceria de diferente com o gráfico se a função fosse $i(x) = \cos(-2x)$ em comparação à função $g(x)$?

9) Apague as funções $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, e insira uma nova função $g(x) = \cos^2 x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$?

10) Insira uma nova função $h(x) = \cos x^2$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) A função $h(x)$ é periódica?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = b \cdot \cos(c \cdot x)$, o parâmetro " b " influencia na amplitude do gráfico e o parâmetro " c " influencia no período da função. Agora para visualizar os parâmetros a, b, c e d trabalhando simultaneamente, abra o arquivo formalização2.ggb.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DE DADOS

Este capítulo apresenta as análises e discussões dos dados gerados a partir da avaliação da Sequência Didática por um grupo de professores atuantes nas redes de ensino da Educação Básica.

Conforme mencionado nos procedimentos metodológicos, pensei inicialmente na realização dessa etapa da pesquisa em uma turma da 2ª Série do Ensino Médio de uma Escola Pública da cidade de Belém do Pará. Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID – 19, tornou-se necessário fazer um redirecionamento deste processo para uma avaliação de professores.

Com isto foi necessário um questionário que é composto por três etapas. A primeira, referente a avaliação individual de cada UARC; a segunda, associada a avaliação do conjunto das UARC's; e a terceira, composta por uma avaliação complementar com o foco na avaliação aplicativa do processo, na promoção da interatividade entre os participantes, identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

A minha intenção com esse questionário foi de coletar os dados para a realização das análises da Sequência Didática. O questionário foi aplicado a um grupo de 20 docentes pertencentes a uma turma do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), vinculado à UEPA.

Junto ao questionário, foi entregue um termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) (Anexo C) com o intuito de orientar os professores avaliadores sobre os procedimentos da avaliação e preservar a identidade dos participantes. Uma cópia do TCLE assinada pelo participante ficou comigo e outra ficou com o participante. Foi realizada uma ordenação, a fim de que cada professor tivesse uma representação por uma numeração de 1 a 20 para ser usada nas análises.

Para um melhor entendimento do processo evidenciado, apresentamos a seguir os parâmetros utilizados para balizar as avaliações da sequência didática

frente às três etapas mencionadas anteriormente em relação a UARC-1, UARC-2, UARC-3, UARC-4 e UARC - 5.

QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR PROFESSORES

• AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS

1. A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

• **AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?

2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibilizá-la?

3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor adequação?

4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor ordená-la?

5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?

- **AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR**

1. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

2. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

3. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

Com base no questionário apresentado, foram realizadas as análises e levantadas as discussões acerca das implicações apontadas pelos professores participantes do processo. De tal modo a compreendermos, ao final, que potencialidades a Sequência Didática em questão para o ensino de Função Cosseno.

5.1. DADOS DA AVALIAÇÃO DOS PROFESSORES

Para termos uma visualização mais organizada das respostas dadas pelos professores nos questionários, criei quadros em percentuais acerca das respostas marcadas pelos avaliadores nas questões objetivas e dois quadros gerais acerca de contribuições que agregam as intencionalidades da pesquisa em relação às respostas subjetivas, como por exemplo, as contribuições da sequência didática para o professor, para o aluno e para o saber, bem como, as potencialidades apresentadas por ela.

Conforme solicitado no instrumento de coleta, os professores que marcasse uma das quatro primeiras alternativas (a, b, c ou d), deveriam sugerir melhoras nas intervenções. Neste sentido, ao tomarmos por base os apontamentos indicados pelos participantes (sejam positivos ou colaborativos), realizamos as análises por meio de corroborações ou por indicativos de contrapontos.

5.1.1. Avaliação individual das UARC's

Nesta subseção apresentaremos através de um quadro a primeira etapa do questionário ao qual os professores deveriam avaliar individualmente se as intervenções conduziam à formalização intuitiva/empírica do objeto matemático, se a formalização estava em consonância com o conhecimento do professor a respeito do objeto matemático, e se a quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto.

Para a UARC – 1, originou-se o seguinte quadro a partir das respostas dos professores.

QUADRO 6 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-1

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1			5%	20%	75%
2			5%	5%	90%
3			5%	10%	85%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Apesar de nas orientações pedirmos aos professores avaliadores que se caso marcassem as alternativas (a), (b), (c) ou (d) dessem uma sugestão de como melhorar a sequência, nem todos os professores que marcaram as alternativas mencionadas se propõem a sugerir as melhorias.

Em relação a primeira questão ao qual pedia a opinião quanto a estrutura das intervenções, percebemos que 75% dos professores marcaram a alternativa (e) que diz que as estruturas das intervenções conduzem integralmente a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático. Obtivemos os seguintes comentários a respeito das intervenções.

QUADRO 7 - SUGESTÕES DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-1

Prof. 10	“O professor precisa interagir sempre com os alunos no sentido de motivá-los”
Prof. 11	“Pode apresentar os outros tipos de intervenção como a inicial, reflexiva ou exploratória, assim como a intervenção formalizante que nessa sequência se destaca”
Prof. 16	“Não que precise melhorar, mas em alguns pontos é necessária a abordagem dentro da própria matemática

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A sequência entregue aos professores não elucidava os outros tipos de intervenção além da formalizante, pois queríamos que o professor tivesse a mesma experiência que os alunos ao explorar a sequência, nesse sentido não explicitamos os outros tipos de intervenção assim como não explicitamos o objetivo de cada pergunta, o que justifica a fala do Prof. 11.

O Prof. 10 marcou a alternativa (e) na primeira questão, e em seguida comentou no sentido de corroborar com o trabalho. Quanto ao comentário do Prof. 16, não ficou muito claro de que forma seria essa “abordagem dentro da própria matemática” mencionada, visto que todas as perguntas estão pautadas dentro da matemática.

Para a segunda questão, não houve nenhum comentário feito pelos professores. Quanto a terceira questão que indagava se o tempo previsto era suficiente para a execução da atividade obtivemos o seguinte comentário.

QUADRO 8 - SUGESTÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 3 DA UARC-1

Prof. 07	“A questão de tempo é relativa e depende da turma, talvez seja necessário o olhar docente quanto a isso, visto que os conceitos trigonométricos derivam de um maior grau cognitivo, apesar do apoio do geogebra”
----------	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Nesse caso, sabemos que a proposta inicial era de fazer uma oficina de nivelamento para garantir que os alunos tivessem os conhecimentos prévios necessários para a execução da sequência no que se refere a conceitos matemáticos.

Mas de fato, como o Prof. 07 disse, o tempo é relativo e precisa ser modificado conforme o perfil de cada turma. Podemos nos deparar com turmas formadas por alunos que não tenham desenvolvido as habilidades para manipular o geogebra, o que nos demandaria mais tempo para explicar a ferramenta, assim como podemos ter turmas com muitos alunos ou poucos alunos o que possivelmente demandaria uma quantidade de diferenciada dependendo no perfil da turma.

Para a UARC – 2, originou-se o seguinte quadro a partir das respostas dos professores.

QUADRO 9 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-2

Questões/ Alternativas	a	B	c	d	e
1				20%	80%
2			10%	5%	85%
3			5%	15%	80%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Em relação aos comentários feitos pelos professores sobre as contribuições com a sequência, só obtivemos o comentário do Prof. 11 que enfatizou novamente sobre os diferentes tipos de intervenção que poderiam ter sido explicitados na sequência.

QUADRO 10 - SUGESTÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 1 DA UARC-2

Prof. 11	“Você pode colocar a atividade e a intervenção dessa atividade se ela inicial, reflexiva ou exploratória”
----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Para a UARC – 3, originou-se o seguinte quadro a partir das respostas dos professores.

QUADRO 11 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-3

Questões/ Alternativas	A	b	c	d	e
1				25%	75%
2			5%	10%	85%
3				15%	85%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Na avaliação dos professores quanto à UARC 3 não houve outras contribuições além das feitas pelo prof. 11 em relação a explicitar os tipos de intervenção, e do prof. 07 de que talvez fosse necessário mais um tempo de aula para a execução da UARC. Destacamos que nesta unidade é quando de fato apresentamos a função cosseno como uma restrição da função de Euler.

Para a UARC – 4, originou-se o seguinte quadro a partir das respostas dos professores.

QUADRO 12 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-4

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				20%	80%
2			10%	5%	85%
3			5%	20%	75%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A partir da UARC 4 já não houve contribuições escritas pelos professores que pudéssemos analisar a fim de contribuir para a melhoria desta sequência, porém ao analisar os dados percentuais, percebemos que quando se trata do tempo destinado para a execução da sequência, houve uma queda para 75% de aceitação integral, que apesar de ainda ser um percentual onde prevalece uma aceitação do tempo determinado, nos cria um alerta se de fato o tempo destinado é suficiente.

Para a UARC – 5, originou-se o seguinte quadro a partir das respostas dos professores.

QUADRO 13 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA UARC-5

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				15%	85%
2			5%	5%	90%
3				10%	90%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Percebemos que dentre as outras unidades articuladas, a UARC 5 foi a que possuiu maior aceitação, em percentual, dos professores avaliadores no que se refere a condução a formalização do objeto matemático, a consonância com o conhecimento do professor avaliador e em relação ao tempo de execução da atividade.

5.1.2. Avaliação do Conjunto das UARC's

Quanto à segunda etapa do questionário que tinha por objetivo a avaliação do conjunto das unidades, obtivemos o seguinte quadro.

QUADRO 14 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA O CONJUNTO DAS UARC'S

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	E
1				15%	85%
2			5%	15%	80%
3				20%	80%
4				10%	90%
5				20%	80%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A primeira questão perguntava aos professores se as atividades são atrativas e se possuíam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos, 85% dos participantes da pesquisa acreditam que as UARC's estão integralmente atrativas a acessíveis para os alunos, uma das grandes preocupações ao criar a

sequência, pois garantindo o interesse e a compreensão da linguagem por parte dos alunos, as chances de autonomia e de alcance dos objetivos pré-definidos nas UARC's são maiores.

A segunda questão avaliava se os recursos de apoio são atrativos, de fácil operacionalização e se contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático. Dessa vez, 80% dos professores concordaram integralmente com a aprovação da ferramenta. O Prof. 07 contribuiu com o seguinte comentário.

QUADRO 15 - PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 2 DA ETAPA 2

Prof. 07	“Quanto ao geogebra será necessário avaliar se a ferramenta é condizente ao entendimento do aluno (próprio manuseio do aluno no app) mas que sem dúvida ajudará nas percepções dos objetivos pretendidos”
----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Entendemos a preocupação do Prof. 07 como válida, pois, pode haver alunos que não tenham tanta familiarização com tecnologias ou com o geogebra em si. Nesse caso, é necessário que o professor que está aplicando a sequência fique atento às dificuldades dos alunos e busque sempre ser muito claro na explicação do manuseio do aplicativo.

Na terceira questão os professores avaliaram sobre a quantidade de atividades da sequência como um todo, e 80% dos professores consideraram integralmente adequado para o ensino do objeto matemático. O Prof. 07 também fez uma contribuição para essa questão.

QUADRO 16 - PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE A PERGUNTA 3 DA ETAPA 2

Prof. 07	“Caso o aluno tenha o entendimento dos conceitos iniciais trigonométricos estará suficiente, caso não talvez seja interessante uma atividade (ou oficina de alinhamento) para resgatar esses conceitos antes de apresentar a sequência”
----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Lembramos que antes da aplicação da sequência é necessário a oficina de nivelamento para garantir os conhecimentos prévios para o assunto de função

cosseno, dentre eles os conceitos iniciais trigonométricos mencionados pelo Prof. 07.

No quadro também percebemos que 90% dos avaliadores acreditam que a sequência está organizada de forma a promover o ensino da função cosseno ao responderem a questão 4. E na questão 5, do total de professores que avaliaram, 80% concordam que o tempo total previsto é compatível para a aplicação da sequência didática.

5.1.3. Avaliação complementar

A avaliação complementar da Sequência Didática, constitui da terceira e última etapa do questionário. Com ela os professores avaliaram se a sequência promove a interação professor-aluno-saber, e quais contribuições ela apresenta para essa tríade. Por último, os professores deveriam expressar quais as potencialidades que eles identificaram na Sequência Didática para o Ensino de Função Cosseno.

Quando questionamos se a sequência promovia a interação Professor-Aluno-Saber, obtivemos o seguinte quadro:

QUADRO 17 - PERCENTUAL DE RESPOSTAS PARA AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR DA SD

Questões/ Alternativas	a	b	c	d	e
1				15%	85%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Dos professores avaliadores 85% afirmaram que a sequência promove interação professor-aluno-saber integralmente e os outros 15% marcaram que essa interação acontece na maioria das vezes. O Prof. 11 fez o seguinte comentário:

QUADRO 18 - SUGESTÃO DO PROFESSOR SOBRE A PERGUNTA 1 DA ETAPA 3

Prof. 11	“Da mais liberdade e autonomia para o aluno na construção do conhecimento matemática”
----------	---

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Tendo em vista que o Prof. 11 marcou a alternativa (e), acreditamos que ele quis corroborar com essa fala, e de fato minha intenção ao fazer a sequência era proporcionar ao aluno essa liberdade e autonomia para o aluno no processo de aprendizagem.

Na questão 2, perguntamos a respeito das contribuições que a sequência apresenta ao professor, ao aluno e ao saber. Criamos um quadro com algumas das respostas mais relevantes dos professores avaliadores.

QUADRO 19 - PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE AS CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Professor	Prof. 01	“Facilidade na construção dos conceitos, facilitando o trabalho da transposição didática”.
	Prof. 03	“Apresenta uma visão diferenciada sobre aplicação do conteúdo que permite aos professores através deste trabalho aplicarem novas abordagens de ensino ao seu aluno”.
	Prof. 05	“O uso de uma ferramenta tecnológica para a sequência didática em questão promoveu um ganho de tempo na construção dos gráficos da função além de mostrar na prática o que para muitos alunos se torna abstrato e de difícil compreensão”.
	Prof. 09	“De maneira clara e objetiva, prioriza o aprendizado dos conceitos necessários para que haja a compreensão do conteúdo apresentado, pois apresenta linguagem de fácil assimilação”.
	Prof. 13	“O professor deixa de ser o protagonista no processo de ensino-aprendizagem e passa a ser apenas um orientador para garantir que o aluno se aproxime de seu objetivo”.
	Prof 16	“Constituem uma forma de o professor desenvolver sua prática docente. A sequência em si apresenta uma forma de ensino da função cosseno por meio de conhecimentos prévios e

		principalmente de forma construtiva com foco no aluno”.
Aluno	Prof. 01	“O aluno consegue enxergar os caminhos que conduzem aos conceitos pretendidos pelo professor”.
	Prof. 03	“O aluno passa ter participação mais ativa no processo, não só mero ouvinte, mas alguém que dialoga e reflete sobre qual o processo algébrico pode utilizar”.
	Prof. 04	“Facilita a construção do conhecimento fazendo com que o estudante se torne protagonista na construção do seu conhecimento”.
	Prof. 05	“Para o aluno, que a cada dia que passa se vê envolto da tecnologia, utilizar uma ferramenta tecnológica faz com que o mesmo se sinta atraído e entusiasmado ao ver na prática a teoria que os livros e os professores ensinam em sala de aula”.
	Prof. 12	“Com o uso desse recurso tecnológico, melhora o entendimento dos alunos em relação aos gráficos, pois estes possuem dificuldades em elaborações manuais”.
	Prof. 16	“Permite com que o aluno se torne protagonista da construção do seu conhecimento. Não obstante, a sequência faz com que este mobilize seus conhecimentos para, raciocinar, testar, inferir os conceitos trabalhados sob orientação do professor”.
Saber	Prof. 05	“No decorrer de cada atividade, o aluno aprende aos poucos sobre o conteúdo da função. Desde o básico como a associação dos pontos até saber construir o gráfico de uma função cosseno”.
	Prof. 08	“Novas formas de se apresentar o conteúdo”.
	Prof. 12	“É um recurso que promove a facilidade no raciocínio e absorção dos conteúdos aplicados”.
	Prof. 13	“Por ser o aluno o protagonista, ele memoriza com mais facilidade o que aprendeu”.
	Prof. 14	“Por ser uma aula diferenciada, o aluno se interessa mais em aprender, podendo trazer até novos questionamentos não previstos pelo professor sobre o assunto”.
	Prof. 20	“A matemática é uma das bases fundamentais para o desenvolvimento intelectual dos alunos, ajuda a adquirir um raciocínio lógico, organizando a mente para o pensamento, a

	crítica e a abstração”.
--	-------------------------

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Percebemos a partir dos comentários dos professores, que quando se trata das contribuições da sequência ao professor, muitos enfatizaram a abordagem diferenciada sobre o tema tendo como protagonista o aluno. A capacidade do professor de buscar por novas abordagens e metodologias sempre beneficia a tríade professor-aluno-saber.

Em relação às contribuições aos alunos, a participação mais ativa foi destacada como positiva. A familiarização do aluno com a tecnologia também traz uma aproximação do aluno com a linguagem matemática, tornando assim mais compreensível e conseqüentemente mais atrativa.

Sobre as contribuições da sequência didática ao saber, foi ressaltado a possível facilidade do aluno em aprender diante das atividades propostas, permitindo um processo mais natural de se apropriar do saber a partir das observações.

Acredito que com a sequência didática proposta o aluno não só desenvolve o conhecimento matemático sobre função cosseno, como também desenvolve outras habilidades que podem lhe ajudar futuramente no mundo do trabalho como disse o Prof. 20 “... ajuda a adquirir um raciocínio lógico, organizando a mente para o pensamento, a crítica e a abstração”. Além de também desenvolver a habilidade de manipular ferramentas tecnológicas.

Sobre a última questão respondida pelos professores avaliadores, geramos o seguinte quadro.

QUADRO 20 - PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE AS POTENCIALIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Prof. 05	“O uso de tecnologias para o ensino da matemática, se bem utilizada, promove o aprendizado de forma espontânea e atrativa para os alunos. A sequência didática em questão se apresenta bem elaborada, e a cada atividade os alunos conseguirão compreender de fato o que é a função cosseno e como construir seus gráficos através de uma fácil compreensão”.
Prof. 09	“Uma abordagem que trabalha as representações Algébricas, gráficas, em

	tabela e em linguagem natural, pois cada tipo de representação é mais adequado para um determinado tipo de procedimento”.
Prof. 12	“O principal é a interação tecnológica entre o assunto e o aplicativo pois facilita o tempo de execução e melhora o entendimento do conteúdo”.
Prof. 14	“O aluno entende mais os parâmetros e a sua influência no gráfico da função”.
Prof. 15	“O aluno além de se interessar pelo assunto de função cosseno, pode se interessar também em aprender a usar o geogebra”.
Prof. 17	“A de construir o conhecimento por partes onde se torna possível entender um conteúdo bem complicado”.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ao que percebemos dos comentários dos professores, todos afirmaram que o uso do geogebra para o ensino da função cosseno atrelado a uma boa organização de sequências de atividades como a que apresento neste trabalho traz grandes potencialidades para o ensino do objeto matemático em questão.

A organização do professor junto com a sua função de mediador do processo, proporciona ao aluno uma atração maior pelo conteúdo, permitindo a reconstrução de conceitos que faz gerar um saber construído e fortalecido de forma gradativa.

Com isso, analisando os dados supracitados a respeito das três etapas do questionário (as avaliações individuais das UARC's, a avaliação do conjunto das unidades conceituais, avaliação complementar). Apresento a seguir ponderações acerca das etapas mencionadas.

Sobre as avaliações individuais das UARC's, evidencio que foram apresentadas sugestões relevantes acerca das cinco atividades que compõe a Sequência Didática. Dentre elas, o tempo disposto para a realização das atividades pareceu preocupar os professores avaliadores; a certificação de que os alunos possuam o domínio dos conceitos básicos de trigonometria antes da aplicação da sequência para obter o sucesso da SD; e acrescentar os tipos de intervenção de cada atividade a fim de trazer melhoras para a utilização em sala de aula por outros professores.

Sobre a avaliação do conjunto das unidades, identificamos que houve uma boa aceitação pelos professores em relação aos itens levantados, como por exemplo a organização da ordem das atividades sequenciadas promovendo o ensino do objeto matemático e a possível atração dos alunos pelo uso do geogebra apesar da preocupação quanto a operacionalização do aplicativo.

Sobre a avaliação complementar, também houve boa aceitação dos professores avaliadores quanto as contribuições da sequência para o professor, o aluno e o saber, a promoção da interação articulada dessa tríade e as potencialidades que a sequência traz para o ensino da função cosseno, como trouxemos nos comentários escritos pelos professores a respeito do uso da tecnologia em sala de aula, a facilidade do aluno em (re)construir conceitos a partir das observações feitas no aplicativo, e a didática diferenciada de abordagem para o tema, tornando o assunto que é tido pelos professores como abstrato e de difícil compreensão para uma linguagem mais “visual” e de fácil compreensão.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Essa pesquisa tinha por objetivo analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma Sequência Didática envolvendo Função Cosseno, e como parte desse objetivo, o interesse de criar um produto educacional, disponibilizando aos colegas professores uma sequência didática válida sobre Função Cosseno.

Para alcançar os objetivos desta pesquisa, foi necessário passar por determinados processos que foram fundamentais na construção desse produto. A análise Microgenética permitiu ter a partir dos registros adquiridos uma análise minuciosa dos resultados. As ideias de Mortimer e Scott (2002) sobre a análise do discurso ajudou a entender quais ferramentas utilizaríamos para obter uma melhor interação entre professor e aluno durante a aplicação da Sequência Didática. E as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, uma concepção de Sequência Didática elaborada por Cabral (2017) foi a base para a construção da Sequência Didática, pois através dela e juntamente em conversas com o autor, foi permitido perceber os processos cognitivos e de intervenção que se fariam necessário na construção e aplicação do produto didático.

A revisão dos estudos também foi de grande inspiração para a construção da Sequência Didática. Cada trabalho analisado teve uma parcela de contribuição, mas posso destacar 4 trabalhos ao qual considero que teve contribuições mais relevantes a esse produto. O primeiro é a tese de Doutorado de Mendes (2010), que traz os rumos das tabelas trigonométricas a partir da corda, um trabalho muito organizado que nos permitiu ver os principais personagens que contribuíram para a evolução do conceito de seno e cosseno. É importante que o professor ao construir sua sequência didática tenha acesso à evolução do tema, pois a história da matemática nos ajuda com possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar e que já foram superadas por nossos antecessores.

O segundo trabalho que destaco, é a Dissertação de Mestrado de Costa (1997), que apesar de ser um trabalho de mais de duas décadas atrás, traz percepções muito atuais com universos ao qual a autora chama de “mundo experimental” e do computador. Costa (1997) consegue contextualizar para o

aluno, através de experimentos materiais e tecnológicos que são manipulados pelos alunos, as Funções Seno e Cosseno.

O terceiro trabalho que teve grande relevância foi a dissertação de LIMA (2017), que traz uma proposta de análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente utilizando o software geogebra, ao qual apesar nós já termos tido contato anteriormente com o software, ainda não havíamos criado nenhum produto relacionando o geogebra à função cosseno. Após ter tido contato com esse trabalho, pude criar um produto que não só relacionava a análise de gráficos com o geogebra, mas sim utilizando-o em todo o processo da formação do conceito de Função Cosseno.

Por último, destaco o trabalho de Gama (2020), ao qual me inspirou na base metodológica de análise dos resultados obtidos. As análises minuciosas que o autor fez durante a aplicação do seu produto foram de grande relevância para que eu também pudesse fazer as análises.

A pesquisa de campo feita com os alunos egressos, fez perceber as lacunas de aprendizagem que os alunos possuíam sobre Função Cosseno, pude também traçar um perfil cultural, econômico e comportamental dos alunos e perceber as suas fragilidades de aprendizagem com o intuito de superá-las na sequência.

Na etapa de aplicação, como havia mencionado anteriormente, tive que fazer um replanejamento devido as condições à que fomos sujeitos a partir das consequências da Covid-19, tive dificuldade de acesso às instituições, assim como encontrar um quantitativo relevante de alunos interessados em participar pelas etapas dessa pesquisa.

Neste sentido, realizei um redirecionamento do processo de aplicação da sequência didática com uma turma de professores que fizeram parte do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Matemática vinculado à UEPA. Por meio da avaliação dos professores baseada em questões de um questionário, composto por três etapas: a primeira, acerca de avaliações individuais das UARC's; a segunda, em relação ao conjunto das unidades; e a terceira, por uma avaliação complementar.

Sobre as avaliações realizadas pelos professores, em relação à primeira etapa foram feitas contribuições pertinentes que foram consideradas na sequência didática do produto educacional. Além disso, notamos que na segunda e na terceira etapa do questionário que de um modo geral houve uma boa aceitação das atividades pelos professores em relação a diversos aspectos que a compõem.

Dentre as quais destaco o uso da tecnologia do geogebra como ferramenta, a atratividade dos alunos devido ao uso dessa tecnologia, a abordagem do tema pela função de Euler, a organização da evolução do tema ao longo das UARC's e o protagonismo do aluno nesse processo de aprendizagem. Abordaram também de forma subjetiva as contribuições da sequência didática para os elementos que compõem o triângulo didático (professor-aluno-saber).

Assim, ao tomar por base o objetivo da pesquisa, bem como, a resposta dos professores sobre a última questão que compõe o questionário. Notamos, que a sequência didática desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino do objeto matemático em destaque por vários motivos apontados pelos professores. Dentre os quais, destacamos: a atratividade vinculada ao uso do geogebra, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de um ser mais ativo para o aluno e no re(descobrimento) do saber de forma gradual. Por este motivo, embora, tenha existido um redirecionamento do processo de aplicação da sequência, entendemos que o objetivo elencado foi respondido.

De posse dos argumentos indicados, ressalto que esta pesquisa trouxe consigo além das contribuições acadêmicas supracitas para o ensino de Função Cosseno, diversas outras contribuições. Dentre elas, destaco o perfil profissional de ensino que passei a atribuir com os meus alunos.

Como professor passei a ter uma postura mais mediadora e mais atenta aos discursos dos meus alunos, passei a ter mais cautela analisando em quais momentos as intervenções são de fato propícias. Nós professores na ânsia de concluir o currículo dentro de um tempo determinado, por várias vezes atropelamos o processo natural de aprendizagem do aluno. Passei a ser mais criativo também ao elaborar minhas aulas de matemática, sempre criando ambientes propícios para a construção dos conteúdos matemáticos com um novo olhar para as atribuições dos alunos enquanto elementos mais participativos do

processo de ensino e aprendizagem, assim como, para a construção gradativa do saber.

Por fim, destaco os possíveis desdobramentos desta pesquisa, baseados em suas reflexões, análises e indicações. Dentre eles, a possibilidade de uma reaplicação da sequência didática com uma turma da 2ª Série do Ensino Médio, com a realização das análises baseadas na microgenética e análise do discurso. Assim como, a possibilidade de trabalhos análogos, com utilização dessa sequência didática adaptado ao ensino das outras funções trigonométricas, bem como, o uso de outros recursos didáticos apontados como válidos por autores que trabalham com a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática matemática**. Curitiba: UFPR, 2014

ARTIGUE, Michele. **Ingénierie Didactique**. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 9, n.3, p. 281-308, 1988

ARAÚJO, Denise Lino de. **O que é (e como faz) sequência didática?** Entrepalavras, Fortaleza – ano 3, v. 3, n.1, p.322-334, jan/jul 2013. <http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/46/texto%201%20Aula%205.pdf>. (Acesso em 23/08/2017).

BAKHTIN, M. M. **The diamogic imagination**, Ed. By Michael Holquist, trans. By Caryl Emerson na Michael Holquist. Trans by Vern W. Mc Gee. Austin: University of Texas Press. 1986.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores entusiastas**. 2 ed. Traduzido por: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blücher, 2010.

BORTOLOSSI, H. J. Movimentos, pensamentos e geogebra: Alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da matemática, In: **Perspectivas Teórico-Metodológicas em Pesquisas que Envolvem Tecnologia na Educação Matemática: O GeoGebra em foco**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad.: Elza F. Gomide, 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRAGA, Marco; GUERRA, Andréia; REIS, José Claudio. **Breve história da ciência moderna**, vol. I: convergência de saberes. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2008.

BRASIL. IBGE. Estatística de Gênero: Indicadores Sociais das Mulheres no Brasil, 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101551_informativo.pdf>. Acesso em 02 junho 2019.

BRASIL/MEC. Lei nº. 9.394, 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF: 20 de dezembro de 1996.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUM, J. (Org). **Didática das matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. P. 35-114.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estrutura e elaboração**. 1 ed. Belém: SBEM/SBEM-PARÁ. 2017.

CONTADOR, Paulo R. Martins. **Matemática, uma breve história**. Vol. II. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. Obra em 3v.

COPÉRNICO, Nicolau. **As Revoluções dos Orbes Celestes**. Basileia: Officina Henricpetrina, 1566. Trad. de A. Dias Gomes e Gabriel Domingues. 2ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1996.

CORREIA, Rosana dos Passos. **O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades**. 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. PUC. São Paulo. 1997.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos**. Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 7 ed. Campinas: Papirus, 2000, 120p.

_____. **Educação pra uma sociedade em transição**. 2 ed. Campinas: Papirus, 2001, 197p.

D'AMORE, Bruno. Didática da Matemática como epistemologia da aprendizagem matemática. In: D'AMORE, Bruno. **Elementos da didática da Matemática**. (tradução: Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007b. p. 221-240.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. Ed. São Paulo: Ática, 2015. Volume Único.

DOMINGOS NETO, Silvino. **Ferramentas auxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica**. Dissertação de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. UFV. Viçosa, 2014

DUARTE FILHO, Sandro Rogério de Abreu. **Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares**. Dissertação de Mestrado em Matemática. UENF. Campos dos Goytacazes, 2017

FEVORINI, Luciana Bittencourt. **O envolvimento dos pais na educação escolar dos filhos: um estudo exploratório**. São Paulo: USP, 2009. P 11-12. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde-22022010-104135/publico/Favorini_DO.pdf>. acesso em 02 junho 2019.

GAMA, P. F da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

GITIRANA, Verônica. Planejamento e avaliação em matemática. **Práticas avaliativas e aprendizagens significativas: em diferentes áreas do currículo**, v. 2, p. 59-68, 2003.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade.** Campinas: Caderno Cedes, v.20. 2000.

HOHENWARTER, M. **Geogebra: Ein Softwares y stem fürdy namische Geometrie und Algebra de Ebene.** Paris-Lodron-Universität Salzburg, Austria, 2002.

KFOURI, William; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Explorar e investigar para aprender matemática através da modelagem matemática.** In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES EM PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, 10, 2006, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/09_-02.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2011.

KHINE, M. S; AREEPATTAMANNIL, S. **STEAM Education: Theory and Practice.** Springer-verlag, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 2ª ed. Rio de Janeiro: sbm impa vitae, 1991

LIMA, Marcelo Machado de. **Uma proposta de análise dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente usando o software geogebra.** Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. UFG. Goiânia, 2017.

MARKOVITS Z. et al. **Dificuldades dos alunos com o conceito de função**. In: COXFORD A. & SHULTE A. (Org.) As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MENDES, Maria José de Freitas. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática**: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

MENDES, Maria José de Freitas; ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves; Organizado por Miguel Chaquiam e Natanael Freitas Cabral. **Rumos que levam à tabela trigonométrica a partir da corda**. Belém: SBEM-PA, 2010. (Coleção Educação Matemática na Amazônia, 1.). ISBN 978-85-7691-102-9 (Coleção).

MONTEIRO JR, Francisco Nayron. **Somando Funções Trigonométricas**: uma reconstrução didática do conceito de timbre a partir de duas experiências pedagógicas. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), 2010, Vol. 23.

MOREY, Bernadete Barbosa. **Tópicos de história da trigonometria**. Natal: Editora SBHMat, 2001.

MORTIMER, Eduardo F.; SCOTT, Phill. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências**: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em ensino de Ciências. Porto Alegre (RS), v.7, n.3, 2002.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência didática para o ensino de função exponencial**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará, 2018.

OLIVEIRA, Thaís de. **Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos**. Dissertação de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas. UFSCar. São Carlos, 2010.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. **Análise na rede pública estadual de ensino de Caxias do Sul das causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 1, 2015.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**, vol. 2 – 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.

RÊGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. Petrópolis: Vozes, 1995

SCHASTAI, Marta Burda; STREISKY, Elizabeth Regina; RUTZ, Sani de Carvalho. **Formação de professores e o ensino de frações nos anos iniciais**. Appris - 1. Ed. Curitiba, 2017.

SCOTT, P. H. **Teacher talk and meaning making in science classrooms: A Vygotskian analysis and review**. Studies in Science Education. 1998.

SILVA, Rodrigo Sychoki. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas**. 2012. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

SOARES, Adriana Fraga. **A participação da família no processo de ensino-aprendizagem**. Trabalho de Conclusão de Curso, UFRGS, 2010.

TARDIF, M. **Saberes docentes e desenvolvimento profissional**. Rio de Janeiro: Vozes, 2007.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Revista Zetetiké**, São Paulo, v. 21, n. 39, p. 155-168. 2013

TVERSKY, B. **Mind in Motion**: How Action Shapes Thought. BAsic Books, 2019.

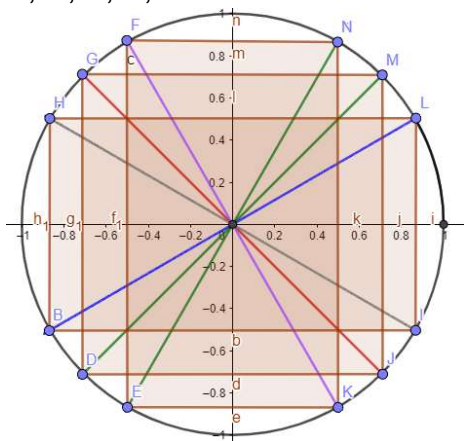
VYGOTSKY, L. S. **Thinking and Speech**. In *The Collected Works of L.S. Vygotsky*; Rieber, R. W.; Carton, A. S. (Eds.). Trans. By Minich, N. New York: Plenum Press. 1987.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: Como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TESTE DE VERIFICAÇÃO

1. Calcule a medida, em radianos, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.
2. Determine a medida, em grau, equivalente a:
 - a) $\frac{\pi}{4} \rightarrow$
 - b) $\frac{3\pi}{2} \rightarrow$
 - c) $\frac{\pi}{6} \rightarrow$
 - d) $\frac{\pi}{3} \rightarrow$
3. Calcular a medida de x do arco de 1ª volta positiva ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140° .
4. Sabendo que na figura abaixo os arcos formados pelos pontos L, M e N representam respectivamente os arcos de 30° , 45° e 60° . Calcule os arcos formados pelos pontos F, G, H, B, D, E, K, J e I.



5. Conhecendo a tabela trigonométrica dos arcos nótáveis, calcule:

a) $\cos(120^\circ) =$

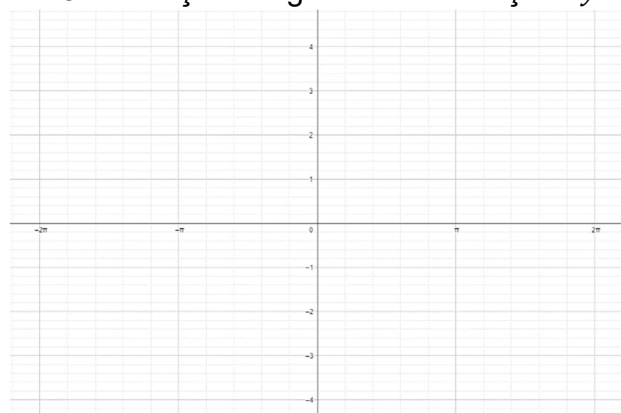
b) $\cos(210^\circ) =$

c) $\cos(300^\circ) =$

6. Dado que $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor de $\cos(\alpha)$.

7. Resolver a equação $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

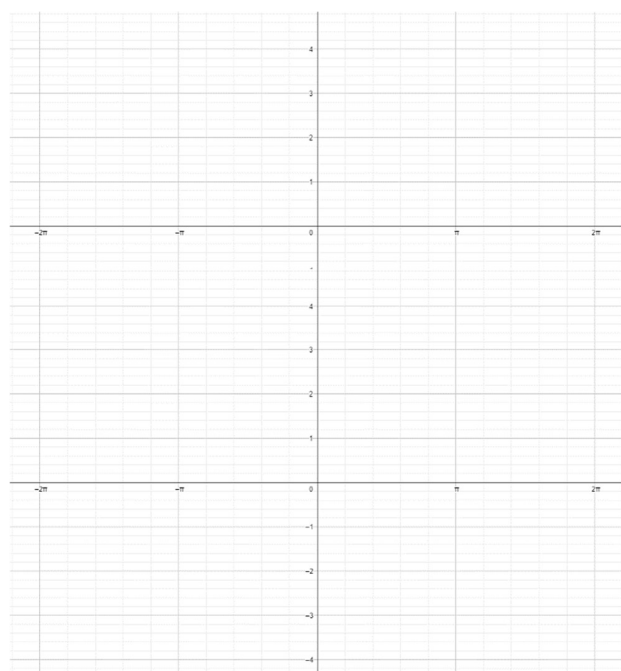
8. Esboçar o gráfico da função $y =$



$2 \cos(x)$.

9. Esboçar o gráfico da função $y = \cos(2x)$.

10. Esboçar o gráfico da função $y = 2 + \cos(x)$.



APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENTREGUE AOS PROFESSORES

1. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática utilizada nesta pesquisa encontra-se nesse capítulo. Ela foi composta de 5 UARC's que abordam o conteúdo da função cosseno, tendo como início a associação de números reais a um ponto do círculo S^1 formulando assim a função de Euler e finalizando com a construção do gráfico da função do tipo $E(t) = a + b \cdot \cos(c \cdot t + d)$. O quadro a seguir indica o número e os objetivos de cada UARC.

Quadro 21 - UARC's

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM	OBJETIVOS DE ENSINO	Tempo
1	Associando os pontos	Perceber que os números reais estão associados a apenas um ponto do círculo S^1 formando assim uma função $E(t) = t = (x, y)$.	Definir a função de Euler	50 minutos
2	Propriedades da Função de Euler	Descobrir as propriedades da função de Euler $E(t) = t = (x, y)$. (domínio, imagem, periodicidade).	Definir as propriedades da função de Euler	50 minutos
3	Restrições da Função de Euler	Descobrir que a função de Euler $E(t) = t = (x, y) = (\cos t, \sin t)$ gera a função cosseno e a função seno.	Definir a função cosseno	50 minutos
4	Para um lado e para o outro, para cima e para baixo	Perceber a influência que os parâmetros "a" e "d" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$.	Definir a influência que os parâmetros "a" e "d" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$.	25 minutos
5	Escolhendo a melhor onda	Perceber a influência que os parâmetros "b" e "c" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b \cdot \cos(c \cdot t)$.	Definir a influência que os parâmetros "b" e "c" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b \cdot \cos(c \cdot t)$.	25 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Durante a sequência didática, será necessário que o aluno esteja interagindo com o software geogebra com arquivos pré-programados no formato ggb.

4.1 - UARC 1: Associando os Pontos

Materiais didáticos:

- Arquivo app1.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 1 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, preencha os dados da tabela e responda as questões a seguir.

- 1) A semirreta t representa a distância em que o ponto E percorre em torno do círculo S^1 partindo do ponto B (1,0). Deslize a barra ang (verde) ou a semirreta t (azul) para responder à tabela abaixo.

Quais as coordenadas do ponto E, quando t assumir o valor de:	
$t = 2$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 3$	$E = (\quad , \quad)$
$t = -2$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 4,29$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 6$	$E = (\quad , \quad)$
$t = -4$	$E = (\quad , \quad)$
$t = 8,27$	$E = (\quad , \quad)$
$t =$	$E = (\quad , \quad)$

a) É possível afirmar que para cada valor de t existe um par ordenado correspondente?

b) É possível ter mais de um valor de t relacionado a um único par ordenado? Justifique.

c) Podemos dizer que a semirreta t representa o conjunto dos números reais? Justifique

d) É possível ter dois ou mais pares ordenados associados a um único valor de t ?

2) Dado dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Diz-se que f é uma função de A em B , denota-se $f: A \rightarrow B$, quando cada elemento pertencente ao conjunto A (partida) está correlacionado a um único elemento de B (chegada) por meio de uma “lei” de correspondência. Com base nessa definição de função, é possível afirmar que a relação entre a reta R e S^1 trata-se de uma função? Justifique.

- 3) Se a sua resposta na questão 6 tenha sido sim, como podemos definir a “lei” dessa função? E se a sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre t e S^1 ?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Dizemos que a função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, consiste em envolver a reta $\mathbb{R}$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $B = (1, 0) \in S^1$. Dado $t \in \mathbb{R}$ temos $E(t) = (x, y)$

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR
PROFESSORES**

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. As estruturas das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

4.2 - UARC 2: Propriedades da Função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app2.ggb aberto em computador com Geogebra Classic instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 2 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, responda as questões a seguir.

- 1) Agora que sabemos que a relação entre t e o ponto E é uma função? Qual o domínio da função $E(t) = t = (x, y)$?
-

- 2) Qual a imagem dessa função?
-

- 3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t) = t$ e $\cos t$

$f(t) = t$	$\cos t$	$E(t) = (x, y)$	Ângulo
	0.5	(____, ____)	
	0.71	(____, ____)	
	0.87	(____, ____)	
	0	(____, ____)	
2.09		(____, ____)	
2.36		(____, ____)	

- 4) Sendo o raio do círculo S^1 igual a 1, sabemos que uma volta completa sobre esse círculo é igual a $2\pi \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que essa função se repete a cada ciclo? Se sim, que ciclo é esse? Se não, justifique.
-
-

-
-
- 5) Quando analisamos as projeções que o ponto faz com o eixo x e o eixo y, percebemos um triângulo retângulo que cria uma relação entre o par ordenado e os valores de seno e cosseno. Qual relação seria essa?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

A função de Euler $E(t) = t = (x, y)$ possui domínio no conjunto dos reais e a sua imagem vai de $[-1, 1]$. O seu período é de 2π , e através de $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, podemos saber o seno e o cosseno de um número real t

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR
PROFESSORES**

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. As estruturas das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

4.3 UARC 3: Restrições da função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app2.ggb aberto em computador com aplicativo Geogebra Classic instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 3 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, e da relação $E(x,y) = (\cos t, \sin t)$ responda as questões a seguir.

- 1) Conforme o que percebemos na UARC 2 o par ordenado $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. É possível fazer uma relação entre o arco formado por $E(x,y) = (\cos t, \sin t)$ e a distância percorrida por t ". Que relação é essa?

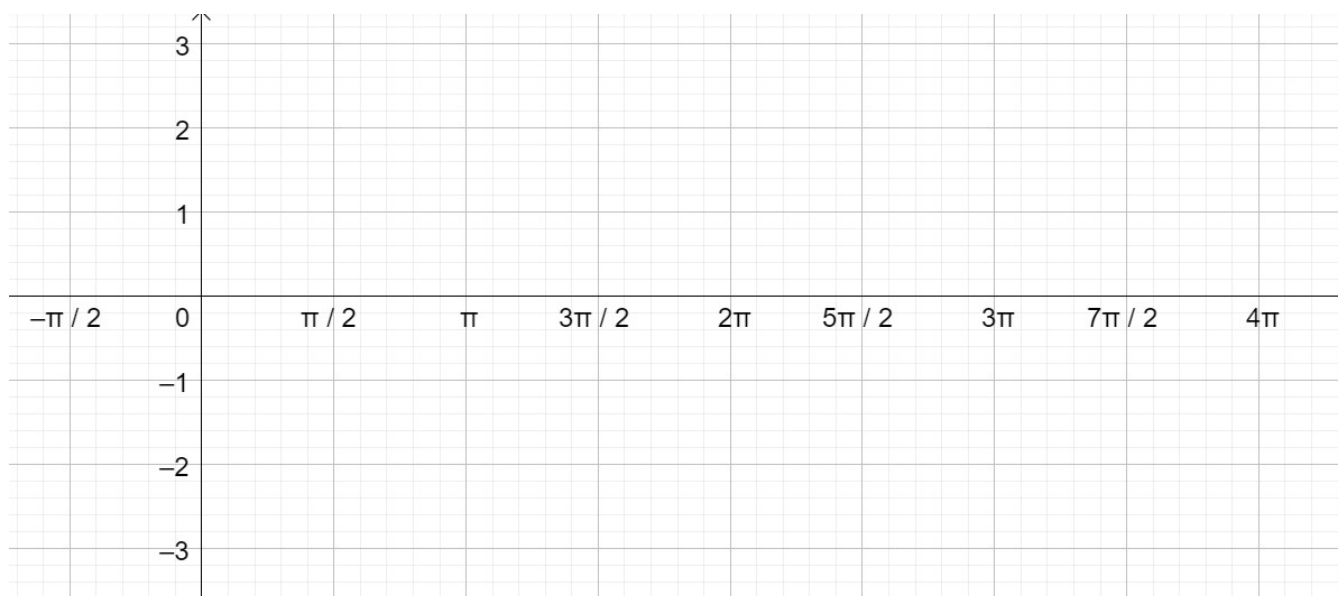
- 2) É possível afirmar que a relação entre o ponto t e apenas o $\cos t$ trata-se de uma função? Se sim, como podemos definir a "lei" dessa função? Se sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre o ponto t e $\cos t$?

- 3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t) = t$ e $\cos t = |x|$ do ponto $E(x,y)$

$f(t) = t$	$\cos t = x $
	0.5
	0.71
	0.87
	0

2.09	
2.36	
	-0.87
π	
	-71
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	
3π	
4π	

- 4) Com base nos dados da questão anterior, construa o gráfico da função $f(t) = \cos t$



INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Com a função $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, sendo $x = \cos t$ (abscissa) e $y = \sin t$ (ordenada) do ponto $E(t)$, se olharmos apenas para $x = \cos t$, temos uma restrição da função $E(t)$, formando assim a função cosseno $f(x) = \cos x$. Agora, abra o arquivo formalização1.ggb para visualizar o gráfico sendo formado passo a passo conforme o

ponto E vai percorrendo o círculo S^1 formando assim uma senoide.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR
PROFESSORES**

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. A estrutura das intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

4.4 - UARC 4: Para um lado e para o outro, para cima e para baixo

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 4 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a fórmula $f(x) = \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

2) Insira no campo de entrada a fórmula $g(x) = 1 + \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$?

3) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -1 + \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = a + \cos t$, qual a influência que o parâmetro " a " tem no gráfico?

5) Agora apague as funções anteriores deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos(x + 1)$ e responda as questões a baixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos(x - 1)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

7) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \cos(1 - x)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $h(x)$ e $i(x)$?

8) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, em uma função $E(t) = \cos(t + d)$, qual a influência do parâmetro " d " tem no gráfico?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = a + \cos(x + d)$, o parâmetro " a " translada a função verticalmente e o parâmetro " d " translada a função horizontalmente

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR
PROFESSORES**

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

4.5- UARC 5: Escolhendo a melhor onda

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet
- Folhas com o material UARC 5 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a função $f(x) = \cos x$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = 2 \cos x$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

2) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -2 \cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

3) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \frac{1}{2}\cos x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $i(x)$ e $f(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, em uma função $E(t) = b \cos t$, qual a função de b ?

5) Agora apague todas as funções deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos 2x$ e responda as questões a baixo.

d) Qual o domínio da função $g(x)$?

e) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

f) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

7) Com base nas comparações que você fez de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = \cos(c \cdot t)$, qual a função de c ?

8) O que aconteceria de diferente com o gráfico se a função fosse $i(x) = \cos(-2x)$ em comparação à função $g(x)$?

9) Apague as funções $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$, e insira uma nova função $g(x) = \cos^2 x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$?

10) Insira uma nova função $h(x) = \cos x^2$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) A função $h(x)$ é periódica?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = b \cdot \cos(c \cdot x)$, o parâmetro " b " influencia na amplitude do gráfico e o parâmetro " c " influencia no período da função. Agora para visualizar os parâmetros a, b, c e d trabalhando simultaneamente, abra o arquivo `formalização2.ggb`.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR
PROFESSORES**

• **AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. A estrutura das Intervenções conduz a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

- a) De nenhuma forma (0%)
- b) Pontualmente (25%)
- c) Em parte (50%)
- d) Na maioria das vezes (75%)
- e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2. A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3. A quantidade de atividades é exequível em relação ao tempo previsto?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar a exequibilidade?

• **AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS**

1. As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?

2. Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibilizá-la?

3. O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor adequação?

4. Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor ordená-la?

5. O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?

- **AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR**

1. A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

- (a) De nenhuma forma (0%)
- (b) Pontualmente (25%)
- (c) Em parte (50%)
- (d) Na maioria das vezes (75%)
- (e) Integralmente (100%)

Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

2. Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

3. Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

ANEXOS

ANEXO A – QUESTIONÁRIO E QUADRO DE DIFICULDADES



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

- 1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** ☐ Masculino ☐ Feminino 3- **Série/Ano** _____
- 4- **Tipo de escola que estuda?** ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada ☐ outra
- 5- **Você já ficou em dependência?** ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas? _____
- 6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro
- 7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**
☐ Professor particular ☐ Família ☐ Ninguém ☐ Outros. Quem? _____
- 10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**
☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova ☐ Não estudo fora da escola.
- 11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**
☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca
- 12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**
☐ sim ☐ não ☐ às vezes
- 13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?** ☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes
- 14- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?**
☐ Contente ☐ Tranquilo ☐ com Medo ☐ Preocupado ☐ com Raiva ☐ com Calafrios

15- Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

☐Provas/simulado ☐Testes semanais ☐Seminários ☐Pesquisas ☐Projetos ☐Outros.
Quais? _____

16- Você já estudou Função Cosseno? ☐Sim ☐Não

17- Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série? _____

18- Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Função Cosseno?

☐Sim ☐Não

19. Como você avalia as explicações do seu professor de matemática?

☐Ruim ☐Regular ☐Boa ☐Excelente

20- Quando você estudou Função Cosseno, a maioria das aulas:

☐Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

☐Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

☐Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

☐Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

☐Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- Para praticar o conteúdo de Função Cosseno seu professor costumava:

☐Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

☐Apresentar jogos envolvendo o assunto;

☐Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

☐Não propunha questões de fixação;

☐Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência quando você estudou Função Cosseno preencha o quadro a seguir.

(MF: Muito Fácil; F: Fácil; R: Regular; D: Difícil; MD: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Conceitos Trigonométricos Básicos sobre Arcos							
Conceitos Trigonométricos Básicos sobre Ângulos							
Conversão de Grau para Radianos							
Ciclo Trigonométrico							
Arcos Congros							
Arcos Correspondentes							
Relações Trigonométricas Fundamentais							
Equações Trigonométricas							
Periodicidade da Função Cosseno							
Amplitude da Função Cosseno							

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O uso de atividades para o Ensino de Função Cosseno, sob a responsabilidade dos(as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando Prof. Breno Salgado Ferreira** vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar um diagnóstico do **ensino de Função Cosseno** a partir da opinião dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de Função Cosseno**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientador e orientando Prof. Breno Salgado Ferreira** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPem) do Centro de Ciências Sociais e Educação(CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém-PA, _____ de _____ 2019.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ aceito
participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **ensino de Função Cosseno** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando Prof. Breno Salgado Ferreira** vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Problemas Aditivos a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de Função Cosseno.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando Prof. Breno Salgado Ferreira** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém-PA, _____ de _____ 2019.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ autorizo
 que meu/minha filho(a) _____ a participar do
 projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

ANEXO C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Professor(a), você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: **Sequência Didática para o Ensino da Função Cosseno** sob a responsabilidade dos pesquisadores **Breno Salgado Ferreira** e **Natanael Freitas Cabral**, vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

A sua colaboração será de responder a um questionário que é dividido em três etapas, a primeira referente a avaliação individual de cada UARC; a segunda associada a avaliação do conjunto das UARC's; e a terceira, composta por uma avaliação complementar com foco na promoção da interatividade entre os participantes, identificação das contribuições em relação aos elementos que compõem o triângulo didático professor-aluno-saber e a identificação das potencialidades da proposta para o ensino do objeto matemático elencado.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

O professor não terá nenhum gasto ou ganho financeiro pela participação na pesquisa. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na educação básica.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **Breno Salgado Ferreira** (brenosalfer@gmail.com) ou **Natanael Freitas Cabral** (natanfc61@yahoo.com.br). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo. Fone: 4009-9542 e **informar o nome dos pesquisadores a instituição a qual estão vinculados** Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, _____ de _____ de 2023.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, professor(a) _____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do professor participante da pesquisa



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br