Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Nilson Osvaldo Gama Santa Maria

Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica

Belém

2023

Nilson Osvaldo Gama Santa Maria

Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém

2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Santa Maria, Nilson Osvaldo Gama

Ensino de congruência de triângulos com uso de malha isométrica / Nilson Osvaldo Gama Santa Maria; orientação de Miguel Chaquiam, - Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Geometria-Estudo e ensino. 2. Triângulos – Estudo e ensino. 3.Ensino de matemática. I. Chaquiam, Miguel (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 516.1

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

NILSON OSVALDO GAMA SANTA MARIA

ENSINO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS COM USO DE MALHA ISOMÉTRICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 27/10/2023

Banca examinadora

______________________________ , Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

______________________________ , Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

______________________________ , Examinador Externo
Prof. Dr. Alailson Silva de Lira
Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Belém – PA
2023

RESUMO

SANTA MARIA, Nilson Osvaldo Gama. **Ensino de Congruência de Triângulos com uso de malha isométrica**. 2023, 189f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Apresentam-se o relatório e resultados finais de uma pesquisa de mestrado profissional em ensino de Matemática, cujo objetivo foi investigar as potencialidades didáticas de uma sequência didática construída especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos. A problemática levantada na pesquisa preliminar indicou que o objeto matemático Congruência de Triângulos vem sendo tratado como ferramenta para desenvolvimento de outros objetos matemáticos, como estudo de quadriláteros, de modo que algumas características e propriedades desse objeto não são tratadas em pesquisas e livros didáticos do Ensino Fundamental e, consequentemente, não é estudado em toda a sua complexidade. Essa complexidade foi revelada ao longo da pesquisa por meio de um estudo histórico-epistemológico sobre o objeto matemático. Na revisão de estudos, levantou-se indicações metodológicas e materiais didáticos que apresentam potencial para o ensino de geometria, elegeu-se a malha isométrica como recurso para construção de conhecimentos que envolvem os casos de congruência de triângulos. Adotou-se como proposta de ensino a sequência didática estruturada como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), conforme Cabral (2017). Na análise dos registros escritos e em áudio foram verificados indícios de aprendizagem que revelaram que os estudantes apreenderam os conhecimentos sobre Congruência de Triângulos e Casos de Congruência de Triângulos de forma satisfatória de modo conectado com outros objetos de conhecimento de modo a demonstrarem alcance perceptivo/intuitivo, empírico e teórico de aprendizagem por meio de sua interação dialógica escrita e oral. A pesquisa apontou contribuições e desdobramentos quanto a metodologia de ensino adotada e sobre a abordagem em torno do objeto matemático Congruência de Triângulos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Congruência de Triângulos. Sequência Didática. Malha Isométrica.

ABSTRACT

SANTA MARIA, Nilson Osvaldo Gama. **Teaching congruence of triangles using isometric mesh.**. 2023, 189f. Dissertation (Master in Mathematics Teaching) – State University of Pará, Belém, 2023.

The report and final results of a professional master's degree research in Mathematics teaching are presented, whose objective was to investigate the didactic potential of a didactic sequence built specifically for teaching Congruence of Triangles. The problem raised in the preliminary research indicated that the mathematical object Congruence of Triangles has been treated as a tool for the development of other mathematical objects, such as the study of quadrilaterals, so that some characteristics and properties of this object are not treated in research and teaching textbooks of Teaching Fundamental and, consequently, is not studied in all its complexity. This complexity was revealed throughout the research through a historical-epistemological study on the mathematical object. In the review of studies, methodological indications and didactic materials that have potential for teaching geometry were raised, the isometric mesh was chosen as a resource for the construction of knowledge that involves cases of congruence of triangles. The didactic sequence structured as Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC) was adopted as a teaching proposal, according to Cabral (2017). In the analysis of the written and audio records, evidence of learning was verified that revealed that the students apprehended the knowledge about Congruence of Triangles and Cases of Congruence of Triangles in a satisfactory way, in a connected way with other objects of knowledge in order to demonstrate perceptive/intuitive reach , empirical and theoretical learning through their dialogic written and oral interaction. The research pointed out contributions and developments regarding the teaching methodology adopted and the approach around the mathematical object Congruence of Triangles.

Keywords: Mathematics Teaching. Congruence of Triangles. Following teaching. Isometric Mesh..

DEDICATÓRIA

Quero dedicar esta dissertação de mestrado a minha esposa amada com quem vivo há 27 anos, **Glória Lima Filha** por ter me dado força e carinho, fazendo-me acreditar que eu posso. Também a minha maior riqueza que é a minha filha **Natália Lima Santa Maria**, que serviram pra mim de muita inspiração, por todo amor e carinho durante a minha viva e a trajetória aqui no mestrado, mostrando pra mim sempre que o amor transforma. Nunca mais fui o mesmo homem depois que soube que a **Glória** estava grávida e carregando um presente de Deus para nós, minha filha amada **Natália**, obrigado meu Deus. Já mais poderia esquecer dos meus avós: **Aracy, Miguel, Esmeralda e Luiz Gama** e claro também aos meus pais que tanto amo: **Eliete Gama** minha mãe que me ensinou muitos valores, nunca conheci uma mulher com tanta força e sabedoria para conduzir a vida e **OsvaldoSanta Maria** in memoriam meu pai que tinha a força de um tigre e que sinto muita saudade todos os dias, gostaria de dedicar aos meus irmãos amados: **Raimundo Edilson** e **Jorge Gama** homens do bem e muito fortes, as minhas cinco irmãs lindas, exemplo de mulheres empoderadas: **Rose, Aracy, Concy, Teka e Elo**, obrigado por vocês serem essas mulheres fantásticas. Dedicar também por existirem em minha vida: aos meus **sobrinhos, sobrinhas, afilhados, afilhadas, cunhados, cunhadas e amigos** que são poucos. A minha **sogra** e meu **sogro**. Quero mostrar aqui toda minha gratidão e amor. Obrigado por tudo que fizeram em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradeço a **Deus** pelo dom da vida e sei que ele sempre esteve comigo durante esta caminhada. Quero mostrar aqui minha eterna gratidão e poder agradecer a construção e elaboração desta dissertação de mestrado aos **professores do programa**, mas em particular ao meu orientador **Prof. Dr. Miguel Chaquiam** por toda dedicação e paciência durante as suas orientações, por ter acreditado em mim, por toda sua genialidade e contribuição nas disciplinas por ele ministradas durante o curso de mestrado.

Gostaria também de expressar minha gratidão ao **Prof. Dr. Natanael Cabral** com suas teorias, sua forma lógica, divertida e inteligente de ministrar suas disciplinas dentro do curso, abrilhantando ainda mais minha sequência didática.

Não posso esquecer aqui minha colega de trabalho e amiga que tanto me deu força, com estímulo e criatividade para enxergar o caminho durante a construção desta dissertação **Profa. Doutoranda Edna Machado.**

Meu muito obrigado a todos!

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apresentamos os resultados finais de uma pesquisa de mestrado profissional realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), cujo tema foi o Ensino de Congruência de Triângulos. Sou professor de Matemática há 25 anos na rede pública e privada, atuando no ensino fundamental, médio, educação de jovens e adultos, pré-vestibular, supletivos e concursos. Também tive oportunidade atuar no ensino de matemática em braile para cegos no núcleo de produção Braille fazendo atendimento e produzindo material em Braille e adaptando material para os alunos. No nível superior ministrei aula de matemática em Braille para alunos da pós-graduação.

Embora tenha alcançado aprimoramento profissional por meio de cursos de aperfeiçoamento e outros, busquei o curso de mestrado para aprender novas metodologias de ensino e aprendizagem em Matemática e assim contribuir para uma educação de qualidade para meus alunos a quem procuro sempre ajudar a superar suas dificuldades de aprendizagem. No curso de Mestrado recebi a tarefa de desenvolver um produto educacional para o ensino de Congruência de Triângulos. Ao longo das disciplinas tive a oportunidade de conhecer diferentes metodologias e tecnologias para o ensino de matemática e tive meu primeiro contato com a pesquisa.

Ao iniciar minhas pesquisas preliminares identifiquei que as orientações curriculares para o ensino de matemática dispostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre a temática em tela, e percebemos que Congruência de Triângulos tem a indicação como ferramenta para aprendizagem de outros conteúdos, como estudo de quadriláteros e segundo Brasil (2017, p. 536) para aplicar as relações métricas e a noções de semelhança e congruência para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Buscamos também investigar como se deu o processo de evolução do conceito de congruência até chegar no conceito de Congruência de Triângulos por meio de um estudo realizado segundo Chamquiam (2022b) em que evidenciamos a importante contribuição de Gauss e seus contemporâneos para as concepções que hoje temos, haja vista que Gauss reformulou algumas proposições meramente relacionadas a proporcionalidade sobre congruência de triângulos, quando diferenciou igualdade de congruência e estabeleceu o símbolo ≅ para representar a congruência e definiu as propriedades de congruência: simétrica, reflexiva e transitiva.

Em nossa revisão de estudos buscamos investigar alternativas e inspirações para a sequência didática que optamos construir segundo Cabral (2017). Em Facchini (2021) e Rocha (2019) extraímos o estudo sobre o objeto matemático Congruência de Triângulos e percebemos que não há uma única maneira de conduzir esse estudo, optamos então para a que nos pareceu mais didática, partido da definição de semelhança e razão de semelhança, levando a percepção de que quando essa razão é igual a 1, chegamos a uma isometria e por tanto a uma congruência de triângulos. Nessa revisão de estudos vimos a possibilidade de adotar a malha isométrica como recurso de didático e acabamos por investigar mais sobre as transformações isométricas no trabalho de Bezerra (2018).

Mendonça (2021), Silva (2018), Luis (2006) abordaram as possibilidades de se ensinar semelhança e congruência de triângulos adotando tanto material manipulável concreto quanto o material manipulável virtual por meio de softwares educativos, nesses trabalhos o que mais nos inspirou foi a indicação da abordagem de argumentação e prova, bem como as possibilidades de compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esses estudos nos fizeram decidir que em nossa sequência didática iriamos estimular a argumentação matemática e a visão menos estática da geometria por meio das transformações isométricas (translação, reflexão e rotação).

Percebemos que as diretrizes da educação e nossa revisão de estudos apontavam forte indicação de um ensino matemática com conteúdos conectados uns com os outros e que estimulassem o raciocínio lógico dedutivo do aluno, bem como a seu aprimoramento argumentativo. Entretanto na análise de livro de didáticos constatamos essas orientações presentes apenas nas proposições de exercícios e que antes da formalização não é proposto que o estudante reflita, discuta, deduza, elabore uma argumentação. Essa parece ser uma fragilidade da principal recurso didático disponibilizado nas escolas públicas do Brasil.

Ao analisarmos os dados de uma pesquisa de campo que realizamos com 100 estudantes da rede estadual de ensino de Belém do Pará que já haviam passado pela série em que se ensina Congruência de Triângulos, contatamos que embora os professores de matemática dos sujeitos demonstrassem domínio de conteúdo e na maioria das vezes se faziam entender em suas aulas, estes sujeitos não reforçavam os conhecimentos e casa, onde também não recebem incentivo da família. No teste aplicado após o preenchimento do questionário sócio educacional o rendimento dos estudantes (egressos do 8º ano) foi insuficiente, sendo que nenhum sujeito conseguiu desenvolver as questões discursivas ou que fizessem conexões com outros conteúdos circunscritos.

Diante disso, para estruturar a pesquisa nos baseamos percurso metodológico publicado em Silva, Chaquiam, Cabral (2022), onde a sequência didática elaborada se aportou em teorias que preconizam a interação dialógica e o desenvolvimento gradual de formalização de conhecimentos, com estrutura em Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual UARC's.

Neste sentido, nos colocamos diante da seguinte questão de pesquisa: *Que contribuições para o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos de uma sequência didática estruturada por UARC?* Para responder essa questão adotamos como objetivo geral: Investigar as potencialidades didáticas de uma sequência didática construída especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos. Estratificamos esse objetivo em objetivos específicos:

- Planejar o percurso metodológico da pesquisa sob a ótica dos aportes teóricos adotados;
- Compreender as necessidades de ensino e de aprendizagem sobre Congruência de Triângulos por meio de uma revisão de estudos e de análise de livros didáticos;
- Aprimorar a consciência epistêmica do professor/pesquisador sobre o objeto matemático;
- Construir e experimentar uma Sequência Didática estruturada como UARC para o ensino de Congruência de Triângulos;
- Validar a sequência didática experimentada por meio de análise microgenética e análise do discurso para verificar suas potencialidades no ensino de Congruência de Triângulos.

Para atender a esses objetivos e responder a questão de pesquisa, organizamos este texto para avaliação em exame de qualificação da seguinte forma:

No primeiro capítulo, apresentamos os aportes teóricos que adotamos, os quais sejam a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), as Unidades

Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) conforme Cabral (2017), Análise Microgenética (Goés, 2000) e a Análise do Discurso (Montimer e Scott 2002).

No segundo capítulo apresentamos o estudo do ensino de Congruência de triângulos por meio de uma revisão de estudos, uma análise de livros didáticos e uma pesquisa de campo com estudantes.

No capítulo três seguimos com o estudo do objeto matemático Congruência de Triângulos e no capítulo quatro apresentamos a sequência didática com todos os objetivos de aprendizagem e roteiro de aplicação. Por fim, no capítulo cinco temos o planejamento de experimentação, coleta de dados e análise de resultados.

Nos resultados apresentamos por meio de análises embasadas em Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002) que os estudantes sujeitos da pesquisa alcançaram os objetivos de aprendizagem desejados, dentre outras habilidades identificadas. Na apresentação de resultados também apresentamos contribuições para a área da Educação Matemática, bem como desdobramentos desta pesquisa.

1 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste primeiro capítulo apresentamos a fundamentação teórica e metodológica de nossa pesquisa. Considerando que em nosso Programa de Pós-Graduação existe uma estrutura metodológica de pesquisa sendo construída e reconhecida no meio científico da Educação Matemática, nos baseamos em trabalhos anteriores que desenvolveram pesquisa deste mesmo caráter na área de ensino de matemática para outros objetos matemáticos. Nesta pesquisa, o enfoque é o ensino de Congruência de Triângulos, mas o percurso metodológico é similar ao desenvolvido por Silva (2020) e publicado em Silva, Chaquiam, Cabral (2022).

Nessa estrutura metodológica, partiu-se de uma pesquisa preliminar composta de:

a) Revisão de estudos sobre pesquisas que envolvam o ensino de determinado objeto matemático;
b) Análise de livros didáticos, para avaliação do material que vem sendo adotado na rede pública de ensino;
c) Pesquisa de campo com estudantes e/ou professores, para diagnosticar dificuldades de ensino e aprendizagem, tendo como base o currículo escolar de Matemática;
d) Estudo do objeto matemático nos aspectos históricos e epistemológicos.

Após o estudo preliminar, realizamos a construção de uma sequência didática planejada conforme modelo estruturante desenvolvido por Cabral (2017) e fundamentada em teorias a seguir apresentadas nas subseções deste capítulo. Nessa construção, as evidências levantadas na pesquisa preliminar também são consideradas, haja vista que a proposta é colaborar na superação de dificuldades de ensino e de aprendizagem em Matemática, lançando intervenção científica sobre a Matemática escolar, neste caso sobre o ensino do objeto matemático Congruência de Triângulos.

Os sujeitos da fase de experimentação eram estudantes do ensino regular da rede pública estadual de ensino. Considerando a fase de análise, os episódios didáticos de experimentação serão gravados para posterior áudio transcrição dos discursos professor-aluno e aluno-aluno coletados. Também serão coletados os registros escritos dos sujeitos da pesquisa.

Na fase de tratamento e análise de dados, tanto o material transcrito quanto os registros escritos foram analisados conforme a Análise Microgenética e a Análise do Discurso que serão mais bem explicitados nas seções subsequentes. Após reunidas as análises, fizemos a exposição de resultados embasados nas pesquisas preliminares e aportes teóricos e metodológicos da pesquisa para validarmos a sequência didática construída, considerando potencialidades didáticas e limitações levantadas, bem como seus desdobramentos para pesquisas posteriores e para a Educação Matemática.

A seguir apresentamos a base teórica e metodológica de nossa pesquisa.

1. 1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Guy Brousseau surgiu com perspectivas que dialogavam em muitos pontos com as teorias de Piaget e Vygotsk sobre o desenvolvimento do pensamento do educando. Em Brousseau (1986) existe uma preocupação com a didática de sala de aula, considerando as contradições e dificuldades da sociedade humana em que a aprendizagem é desenvolvida, sendo esta uma resposta à lógica interna da situação didática ou adidática que dá significado ao que é aprendido.

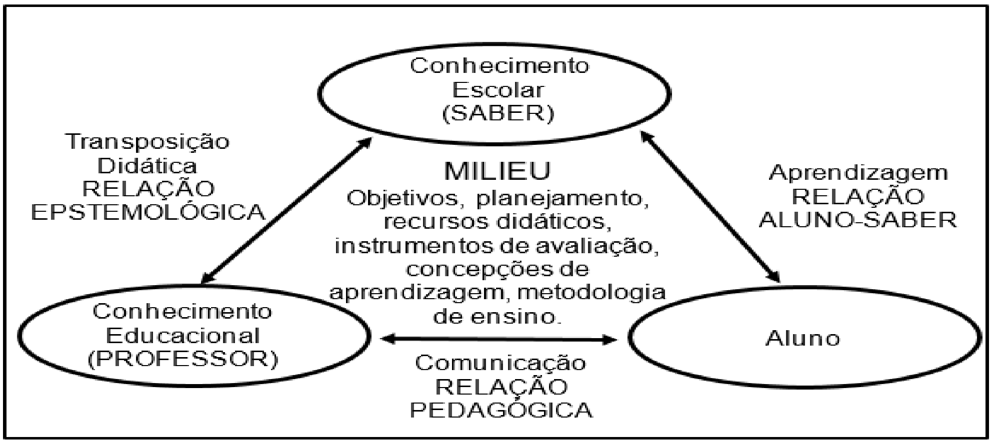
Neste sentido, Brousseau descreve:

> as situações em que o aluno se encontra em ambiente escolar, assim como a clareza do contrato didático que o aluno e professor estabelecem na construção do aprendizado[...]o aprendizado ocorre quando o aluno começa a se adaptar a um ambiente, essa adaptação traz ao aluno novos desafios que quando superados mudam as estruturas cognitivas do aluno resultando no aprendizado. (Chaquiam et al, 2020, p. 6)

Nas situações didáticas, isto é, as criadas intencionalmente pelo professor deseja-se criar diferentes formas de desafios e adaptações. Segundo Amouloud (2007) há quatro situações a saber: a) de *ação*, as de interação sobre o meio didático; b) de *formulação*, momento de discussão e formulação de ideias; c) de *validação*, elaboração de um modelo, generalização de um padrão observado; d) de *Intitucionalização*, sistematização e formalização de conhecimentos. Segundo Chaquiam *et al.* (2020), nessa configuração, o aluno é inserido em uma simulação de atividade científica com formulação de hipóteses até a construção de modelos, tendo o professor como intermediador do processo de construção do saber.

Assim, a intenção de aprendizagem conduz ao planejamento das situações criadas. Essas situações envolvem três elementos, estabelecendo “uma tríplice aliança entre elementos essenciais desse fenômeno: o professor (conhecimento educacional), o saber (conhecimento escolar) e o aluno” (SILVA, CHAQUIAM, CABRAL, 2022, p. 20). Esses elementos estabelecem relações entre entre si e entre o Milieu, meio didático, conforme ilustrado na figura 1:

Figura 1- Tríplice aliança: Professor-aluno-saber



Fonte: Silva (2020)

Pela figura 1, temos que entre o saber e o aluno existe uma relação de *aprendizagem*, entre o professor e o aluno uma relação *pedagógica* e entre o professor e o saber uma relação *epistemológica* onde é promovida a transposição didática, isto é, a aproximação entre o saber científico e o saber escolar. Essas três relações permeiam o *Milieu* criado pelo professor, que está diretamente ligado a seu modo de ensinar, modo este que passa suas concepções formativas e escolhas metodológicas.

A para Pais (2018, p. 18), no que se refere às escolhas metodológicas e à transposição didática, fala que se faz necessário um permanente espírito de vigilância que deve prevalecer ao longo de toda análise didática, diferenciando-se o que é saber científico e o que é saber ensinado, observando que alguns objetos matemáticos podem servir meramente como recurso para facilitar a aprendizagem, o que chama de criações didáticas.

Ilustrando com a nossa temática, queremos tratar didaticamente o objeto científico Congruência de Triângulos de modo que o educando seja capaz de reconhecer seu significado em situações práticas de sua realidade e sua utilidade na aprendizagem de outros objetos matemáticos, dando uma visão conectada entre os conteúdos matemáticos escolares e menos fragmentada. Essa conexão pode é indicada no currículo de Matemática do Ensino Fundamental: “(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.” (BRASIL, 2017, p. 316).

Considerando-se o meio didático associado às relações professor-aluno-saber, apresenta-se na seção 1.2 a escolha metodológica de ensino adotada nesta pesquisa, *Sequência Didática estruturada por UARC*.

1. 2 UARC EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Faz-se importante evidenciar aqui que existe um apelo das atuais orientações curriculares para um exercício efetivo da linguagem matemática, comunicar matematicamente significa argumentar e negociar ideias próprias (intuitivas dos educandos). Para que isso ocorra, as habilidades que os estudantes precisam desenvolver exige que o professor crie situações em que o educando resolva problemas e investigue.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519).

Ocorre que essa é uma tarefa que exige um envolvimento suficiente e necessário para que o educando externalize seu modo próprio de pensar, sendo colocado num ambiente propício a reflexão. Para ser mais claro, na pesquisa de Silva (2020, p.145) esse ambiente precisa contribuir, dentre outros fatores, para que o educando possa desenvolver:

- Valores sociais de autonomia, autoconfiança, cooperação, senso crítico;

- Diálogo, discussões e validações conjuntas;

- Habilidade de comunicar e argumentar em língua materna e linguagem matemática, elaborando, interpretando e convertendo diferentes representações;

-Oportunidade de aprender com os erros;

-Liderança entre os pares;

-Engajamento coletivo.

As Sequências Didáticas muito conhecidas no ambiente educacional e acadêmico, no ensino de Matemática, em especial, fornecem a possibilidade de o professor desenvolver um ensino planejado e sistematizado e:

> essa sistematização proporcionada pela sequencia didática possibilita ao professor organizar as atividades de ensino em função dos núcleos temáticos – dimensão conceitual dos objetos de estudo – e dos procedimentos estruturais – dimensão técnica e estética (CABRAL, 2017, p. 31)

Para Costa e Gonçalves (2022) o termo Sequência Didática (SD), dentro do campo da Educação Matemática, tornou-se um conceito por mobilizar, dentro de si, certas dinâmicas e relações com outros conceitos, além de em sua estrutura agregar-se outras perspectivas teóricas. Assim, a estrutura de uma sequência didática dependerá do aporte teórico em que se baseia.

Embora essa seja uma grande contribuição e alternativa que esteja disponível em pesquisas sobre ensino de matemática (vide seção 2.1), para uma reaplicação nem sempre é evidente para um professor da educação básica, por exemplo, como reaplicar em suas aulas tais materiais, haja vista que nessa aplicação seja necessária uma consciência epistêmica que é inerente a quem planejou as atividades didáticas.

Na estrutura proposta por Cabral (2017) é apresentada uma maneira de articular atividades de Sequências Didáticas para a construção de um conceito, por meio de um roteiro de intervenções escritas, bem como a instrução da mediação oral que o professor deve recorrer sempre que perceber que o educando sozinho ou com seus pares não alcança ou se desvia do objetivo da atividade. Essa maneira de articular Sequências Didáticas é nomeada como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) e tem as seguintes fases apresentadas no Quadro 1:

Quadro 1 - Etapas de construção de Sequências Didáticas.

Primeira fase	Os alunos recebem do professor uma descrição minuciosa da relevância do projeto de ensino em questão bem como dos objetivos, estrutura e condições coletivas de produção dos saberes envolvidos.
Segunda fase	A produção inicial, guarda as intervenções que visam diagnosticar as capacidades já adquiridas pelos alunos em relação ao gênero objeto de ensino e, além disso, procura adequar às ações de ensino posteriores a partir das quais se pretende atingir os objetivos de aprendizagem.
Terceira fase	Desenvolvimento dos módulos – na qual serão ministradas as oficinas que se constituem em diversas atividades, relativas ao desenvolvimento das capacidades de linguagem, envolvendo as três práticas linguísticas: leitura, produção e análise da língua. (Neste caso, linguagem matemática)
Quarta fase	A produção final, na qual o aluno coloca em prática os conhecimentos adquiridos e, juntamente com o professor, avaliam os progressos alcançados.

Fonte: Adaptado de Cabral (2017, p. 34)

Chamamos a atenção do leitor para o apelo ao desenvolvimento da linguagem na construção de sequências didáticas. Perceba na primeira fase que o educando é consciente do que vai aprender, na segunda fase os conhecimentos base são mobilizados e/ou nivelados, na terceira fase os novos conhecimentos são construídos por meio de discussões e registros escritos, por fim, na quarta fase, professor e alunos chegam a um consenso do que seria esse novo conhecimento.

Perceba também que as fases apresentadas no Quadro 1 possuem similaridades com as situações da TSD, apresentadas na seção 1.1. Essas fases são caracterizadas pelo tipo de intervenção que for utilizada, como ilustramos no Quadro 2.

Quadro 2 - As intervenções da UARC

ESCRITAS	**Pré-formais**	**Inicial** - é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito.
		Exploratória - tem com objetivo aprofundar olhar do aluno, não serão dadas por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos. Aqui os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.
		Reflexiva - sempre se materializa por meio de um

		questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve.
	Formal	**Formalizante** o professor, que orienta o pensamento mediado pela sequência didática, se apropria dessas verdades “empírico-intuitivas” (sugeridas pelos alunos) e, a partir delas, enuncia o que chama de Intervenção formalizante. Aqui o professor reelabora as verdades “redescobertas” pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.
	Pós-formais	**Avaliativa Restritiva -** concebidas com a finalidade de se estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. Trata-se de uma espécie de “primeiros passos” para se checar os rudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento é para as implicações conceituais do objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos.
		Avaliativa Aplicativa – a finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.
ORAIS	**Todos os níveis de formalização**	**I-OMO** - O aluno é envolvido numa espécie de “ping-pong discursivo” provocado, por um lado, pelas Intervenções Estruturantes que se materializam de forma escrita nas Sequências Didáticas e, por outro lado, num tipo oculto de intervenções ao texto da Sequência Didática denominado de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO). Essas intervenções são extremamente necessárias, pois ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem.

Fonte: Adaptado de Cabral (2017)

Note, pelo quadro 2, que as I-OMOS, nada mais são do que um reforço para as demais intervenções estruturantes que vão escritas ao longo da atividade, sendo elaboradas pelo professor durante a mediação. As intervenções exploratória e reflexiva, não possuem necessariamente uma ordem de proposição, mas distinguem-se, respectivamente, pelo “fazer” e o “pensar sobre o que fez”, o que pode ser feito conjuntamente, ou alternadamente quantas vezes for necessário, como peças estratégicas desse jogo didático. A intervenção formalizante tem o mesmo caráter da situação de Intitucionalização da TSD (seção 1.1), sendo o momento exclusivo do professor apresentar as definições e propriedades com o devido formalismo matemático.

O ping-pong discursivo proposto pela UARC tem intenção de elevar a “segurança conceitual e algorítmica do aprendiz” (CABRAL, 2017, p. 50). Neste sentido elaborar questões que o educando tenha que construir respostas cada vez mais sofisticadas é fundamental. Responder apenas sim ou não basta, é preciso fazê-lo explicar seu raciocínio, estratégias adotadas, quais conhecimentos foram mobilizados para formular suas respostas. Para tanto, as questões/intervenções possuem uma intenção didática, por meio das respostas orais ou escritas do educando é possível verificar o nível epistemológico de aprendizagem.

Assim, na próxima seção, apresentamos como é a analisado esse nível de aprendizagem por meio do discurso dos aprendizes.

1. 3 ANÁLISE MICROGENÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Como enfatizado até aqui, nosso objetivo foi elaborar uma sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos que promovesse uma aprendizagem autônoma e colaborativa por meio da interação dialógica aluno-aluno e aluno-professor.

Para tanto, na fase de construção e planejamento da sequência didática o discurso do professor é impregnado de intenções didáticas. Essas intenções didáticas estão diretamente ligadas aos objetivos de aprendizagem, habilidades e competências a serem desenvolvidas, muitas previstas no currículo escolar de Matemática. Para ser mais claro, por exemplo, se o objetivo da atividade é fazer que o aluno compreenda a noção de semelhança e congruência, as intervenções devem inserir o educando numa situação de construção/observação que ele possa responder perguntas do tipo: Quais diferenças ou semelhanças entre determinadas figuras? O que diferencia um determinado grupo de figuras de outro grupo? O que você faria para que determinada figura atendesse a determinado critério? O que falta em determinada figura para que ela atenda a determinada condição? Perceba que nenhuma dessas perguntas poderiam ser respondidas com um simples “sim” ou “não”, é necessário refletir e estabelecer conexões para elaborar as respostas.

O mais desafiador é que a resposta pode não ser a “desejável”, mas saber o entendimento do educando dá ao professor a oportunidade de “um feedback imediato de como a aprendizagem está ocorrendo, podendo intervir para que o conhecimento não se sedimente de forma equívoca;” (SILVA, 2020, p. 147).

Assim, na fase de experimentação de nossa pesquisa feita com estudantes do oitavo ano do ensino fundamental do ensino regular, serão organizados em grupos de 3 a 5 alunos, para que interajam entre si. Todos os episódios didáticos serão gravados em áudio e o anonimato dos sujeitos preservado. As falas dos sujeitos serão chamadas de *turnos*, as discussões feitas a respeito de cada intervenção escrita, chamadas de seguimentos e cada UARC (atividades) chamaremos de episódios.

Goés (2000) apresenta a Análise Microgenética como uma forma de coletar e tratar indícios de aprendizagem em episódios didáticos e é aporte de grande influência no constructo proposto por Cabral (2017). Goés (2020) enfatiza que essa maneira de construção de dados requer atenção a detalhes para que os recortes de episódios interativos, chamados de micro eventos, revelem as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação. Este autor recorre a Vygotsky para justificar que é uma análise genética por considerar que os discursos resultam de eventos sociais e culturais singulares para cada indivíduo.

Para complementar a análise de dados, agregaremos a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002) para validação de nosso constructo. A Análise Microgenética e a Análise do Discurso, segundo Chaquiam et al. (2020) se mostraram eficazes para verificação de potencialidades do desenvolvimento de sequências didáticas. Apresenta-se na figura 2 a estrutura de análise de episódios didáticos estabelecida por Mortimer e Scott (2002).

Figura 2 - Análise do discurso em episódios didáticos.

Foco no Ensino	**Intenções do professor**	• Engajar os estudantes; explorar ideias e situações específicas; oportunizar aos estudantes de falar e pensar frente novas ideias; dar suporte para aplicar ideias noutros contextos, etc.
	Conteúdo	• Descrição; Explicação; Generalização.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	• Interativo / dialógico: Professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. • Não-interativo / dialógico: Professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. • Interativo/de autoridade: Professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. • Não-interativo / de autoridade: Professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	**Padrões de interação**	• Definir padrões entre aluno-professor, a exemplo, inicialização pelo professor, ora pelo aluno, com feedback para prosseguimento da fala pelo aluno e avaliação pelo professor. O principal padrão de interação é o I-R-A (iniciação do professor (I), resposta do aluno (R) e avaliação do professor (A)); esse padrão pode ser desdobrado ou alterado, na formação de cadeias de discursos variados (debates) em que as respostas e réplicas constroem conhecimento, a saber, o padrão não triádico I-R-F-R-F, sendo feedback (F).
	Intervenções do professor	• Interações entre professor e aluno que tem por finalidade, dentre outras, introduzir um termo novo; diferenciar significados; compartilhar resultados dos grupos; solicitar esclarecimentos; sintetizar resultados, etc.

Fonte: Silva, Chaquiam, Cabral (2022, p. 25)

Perceba que nesse tipo de análise vários elementos são reunidos para que se desenvolvam as conclusões sobre a aprendizagem, sendo uma análise em três perspectivas: Ensino, Abordagem e Ações. Na perspectiva do ensino é analisada a maneira como o professor envolve os educandos de modo a participarem da aula, estabelecendo suas intenções de ensino e desenvolvimento de conteúdos a serem abordados.

Quando o enfoque passa a ser a abordagem ocorre uma espécie de modulação da interação, as abordagens comunicativas, interativa ou não interativa, referem-se à ocorrência ou não de diálogo entre os sujeitos aluno-aluno e aluno-professor. Quanto à abordagem ser dialógica ou de autoridade refere-se à ocorrência ou não negociação de ideias, isto é, o jogo didático passa por um intenso debate chegando a um ápice de consenso de ideias em que só resta a formalização feita pelo professor. Deste modo existe quatro possibilidades de abordagem comunicativa: interativa/dialógica, interativa/de autoridade, não interativa/dialógica e não interativa/de autoridade.

Ao analisarmos na perspectiva das ações verificamos os padrões de interação estabelecidos por meio das intervenções do professor. Essas intervenções, como nas intervenções da UARC, possuem uma intenção que vai conduzindo o discurso do educando. Logo, dependendo da intenção da interação os padrões de comunicação mudam. Ao analisarmos essas mudanças de padrão podemos definir o nível epistemológico de aprendizagem do educando sendo que basicamente ocorrem dois tipos de padrão de comunicação a saber: I-R-F (Iniciação, Resposta, Feedback) e I-R-A (Iniciação, Resposta, Avaliação). Esses padrões vão sendo combinados formando cadeias discursivas ou debates em torno do objeto de estudo.

O debate criado durante a execução das atividades vão revelar em que nível de epistemológico de aprendizagem o aluno se encontra. Mortimer e Scott (2002) definiram esses níveis como sendo perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Esse modo de análise pós-experimentação coaduna com os níveis de formalização da UARC apresentado na seção 1.2. Para melhor compreensão de como a estrutura metodológica aqui adotada se baseia, apresentamos o quadro 3.

Quadro 3 - Conexões entre a construção da SD e a Análise de resultados.

TSD **Situação**	**UARC** **Intervenção**		**A D com AM** **Interação**		**Intenção do** **Professor**
Ação	Inicial	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Perceptivo / Intuitivo	• Engajar os alunos tanto intelectual quanto emocionalmente.
Formulação	Exploratória	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Empírico	• Apresentar o problema e explorar as ideias e argumentos dos alunos.
Validação	Reflexiva	Pré-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Ênfase no Perceptivo / Intuitivo	• Dar oportunidades ao aluno de falar, refletir e expor suas ideias em pequenos grupos ou turma.
Institucio-Nalização	Formalizante	Formal	Não-Interativa /de Autoridade	Ênfase no Teórico	• Estabelecer a visão científica por meio da formalização e generalização dos conceitos pretendidos do saber escolar disciplinar; • Transferir para o aluno o significado do saber escolar elaborado e controle pelo uso e aplicação desse saber.
Monitoramento Processual das aprendizagens	Avaliativa	Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	• Avaliar a mobilização de conceitos, definições e propriedades do saber escolar elaborado em situações reais e/ou fictícias.
Ação Formulação Validação	IOMO	Pré-Formal Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	• Balizar o aluno de modo que este permaneça numa trajetória próxima a pré-estabelecida pelo professor.

Fonte: Silva (2020, p. 116)

No quadro 3 apresenta-se as conexões entre os aportes adotados na construção e na análise da Sequência Didática. Perceba que a ênfase na interação dialógica durante todo o percurso metodológico requer do professor um domínio sobre o objeto matemático que vai além do que está posto nos livros, é necessário pensar sobre a base cognitiva do educando, sobre uma iniciação que envolva os educandos, um ambiente de comunicação sadia em que o modo de pensar seja respeitado, onde o erro seja uma possibilidade de rever as conclusões. Para Silva (2020), nessa estrutura metodológica o professor ganha no sentido de ter visão sistêmica do processo, considerando formas de pensar diferentes da dele e tornando-se mais experiente frente às dificuldades de ensino e de aprendizagem.

Tendo em vista que os principais dados analisados nesta pesquisa são as falas dos sujeitos em língua natural, consideramos que Silveira (2015, p. 39) explica que é por meio da língua que em seu discurso o sujeito resignifica, reconhece e estranha as suas próprias palavras e a dos outros, formando teias de sentidos e negociação de vozes impregnadas de heterogeneidade. Essa perspectiva enriquece a nossa visão da contribuição da análise microgenética, que valoriza aspectos socioculturais (essencialmente heterogêneos) próprios de cada indivíduo que possam modular seus discursos.

Nos capítulos subsequentes damos prosseguimento a esse percurso metodológico estabelecido, com o objetivo de validar uma sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos. Segue no próximo capítulo o estudo preliminar sobre o ensino de Congruência de Triângulos.

1. 4 RECURSO DIDÁTICO: Malha isométrica.

Os aportes teóricos e metodológicos desta pesquisa, em especial o modelo UARC, requerem que as atividades tenham situações de exploração e/ou manipulação, sobretudo nas intervenções exploratórias. Assim, ao elaborarmos a sequência didática analisada no capítulo 4, pensamos também em atender a competência específica 5 indicada na BNCC.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, 542)

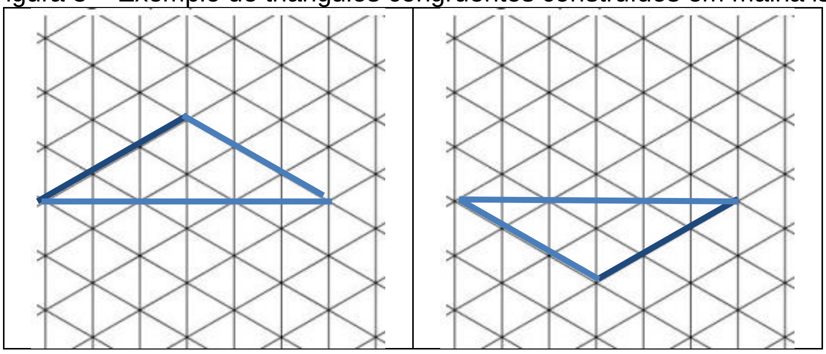
Nessa competência infere-se que ser desejável que no ensino de matemática promova-se a capacidade de investigação e de formulação de explicações e argumentos, com materiais concretos, apoios visuais, proporcionando ao educando experiência empírica sobre o objeto matemático estudado com a intenção de leva-los a construção de "argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições" (BRASIL, 2017, p. 542).

Para tanto, em se tratando do objeto Congruência de Triângulos, adotamos a Malha Isométrica como recurso didático de manipulação e exploração para desenvolvimento de objetivos desse conhecimento. Segundo Facchini (2021) a malha isométrica trata-se de uma malha de triângulos equiláteros e enquadra-se a um conjunto de tipos de malhas denominado de poliformas.

> Poliformas são figuras planas diferentes entre si formadas pela união de dois ou mais polígonos congruentes, cuja interseção de dois polígonos é um lado. São consideradas as mesmas poliformas as congruentes por rotação ou reflexão. Algumas poliformas recebem nomes especiais, como é o caso das poliformas conhecidas como poliminós e os polidiamantes (FACCHINI, 2021, p. 38).

As formas que essa autora trata como polidiamantes são as elaboradas a partir de malhas isométricas. Essa ideia de poliformas nos inspirou em pensar sobre as movimentações que poderiam ser feitas nas construções de triângulos congruentes feitas pelos estudantes e desconstruções da falsa impressão de que a congruência esteja relacionada também a mesma posição e não somente a mesma forma e medida. Isto é, ao adotarmos a malha isométrica como recurso didático, quisemos que o educando inferisse de forma autônoma que dois triângulos podem ser congruentes mesmo que um seja a rotação ou a reflexão do outro.

Figura 3 – Exemplo de triângulos congruentes construídos em malha isométrica

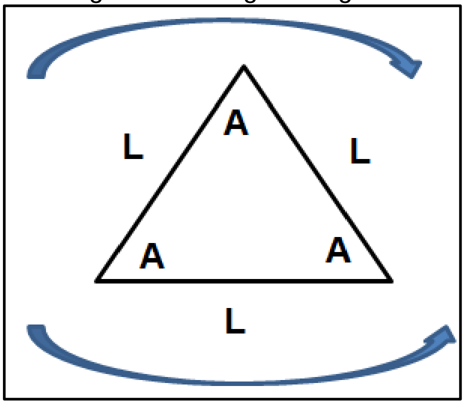


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Em nosso constructo, apresentado na íntegra no apêndice D, consideramos como parâmetro de medida dos triângulos equiláteros de medida os lados ($\boldsymbol{L}$) são e as alturas (h), bem como que todos os ângulos medem 60^0 que tendo as alturas como bissetrizes dos ângulos internos temos ângulos de medida 30^0, ou que juntando dois ângulos internos de triângulos adjacentes, tem-se ângulos de 120^0. Na figura 3, por exemplo, temos no parâmetro adotado dois triângulos congruentes, sendo um a reflexão do outro, com medidas dos lados $3L$, $3L$ e $6h$ e medidas dos ângulos 30^0, 30^0 e 120^0.

Para desenvolvimento dos casos de congruência de triângulos por meio da malha isométrica, criamos uma espécie de relógio cuja contagem pode ser feita no sentido horário e anti-horário (A-L-A-L-A-L), como ilustrado na figura 4.

Figura 4 - Relógio triângular



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Nessa movimentação visual o estudante também compreende melhor a congruência ainda que as figuras estejam rotacionadas ou refletidas, haja vista que a contagem, por exemplo LAL (lado, ângulo, lado) na figura de referência a contagem pode ser no sentido horário e na figura congruente refletida a contagem se dará no sentido anti-horário, mas o educando tem melhor controle e consciência de como e porquê esses movimentos acontecem.

Ainda falando da relação do material manipulável com o objeto matemático, os casos de congruência de triângulos são em sua essência bicondicionais, isto é por meio da igualdade são estabelecida pelas condições mínimas para ocorrência de congruência de triângulos (LLL, LAL,ALA e LAA_o , veja seção 3.2). Ainda que de forma básica o educando é levado a pensar que se não é possível criar um triângulo não congruente ao de referência é porque está ocorrendo algum caso de congruência ou que se por meio das condições estabelecidas inicialmente é possível criar um triângulo congruente e outro não congruente, não estamos diante de um caso de congruência de triângulos, como por exemplo considerando como informações fixas apenas AAA.

A malha isométrica também um recurso didático indicado pelas diretrizes educacionais para o ensino de matemática no Ensino Fundamental: “(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p. 291). Logo, trata-se de um recurso atual e com tendência de adoção crescente nas escolas de todo Brasil inclusive tendo lugar de relevâncias equiparado ao uso de tecnologias digitais.

Consideramos a relevância dessas construções, reflexões e investigações coletivas promovidas por meio da sequência didática com uso de malha isométrica para o ensino de Congruência de Triângulos como sendo uma ferramenta de ensino que leve o educando a elaboração de estratégias e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos e empirias. Assim o educando pode também entender que a natureza humana da matemática, sujeita erros e acertos e exercite a resiliência necessária em processos de raciocínio hipotético-indutivo.

No capítulo posterior apresentamos um estudo sobre o ensino de Congruência de Triângulos por meio de pesquisas bibliográficas e experimentais, análise de livros didáticos e pesquisa com estudantes que nos levaram a entender o cenário sobre as metodologias didático-pedagógicas e dificuldades de ensino e aprendizagem de conteúdos circunscritos e de conhecimentos base que envolvem o objeto matemático de estudo desta pesquisa.

2 ESTUDO DO ENSINO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo, apresentamos um levantamento sobre o ensino de congruência de triângulo, buscando investigar as dificuldades de ensino e aprendizagem desse objeto matemático, bem como as alternativas didático-pedagógicas indicadas em pesquisas que poderiam contribuir com a construção da sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos.

Com esse intuito, levantamos seis dissertações na área de ensino de matemática ou de educação matemática que apresentassem estudos que envolvessem congruência, semelhança, semelhança de triângulos e congruência de triângulos.

Para melhor compreender as necessidades didáticas dos professores matemática ao ensinarem Congruência de Triângulos, realizamos também uma análise em dez livros didáticos sobre sua abordagem diante das exigências curriculares para o ensino de matemática.

2. 1. REVISÃO DE ESTUDOS

Esta revisão de estudos traz uma visão de como a temática ensino de congruência vem sendo abordada em pesquisas, indicando dificuldades e superações metodológicas para ajudar na elaboração da sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos. Assim, organizamos um levantamento bibliográfico, categorizamos e em seguida realizamos as análises conforme supracitado.

No levantamento bibliográfico consultamos o Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o banco de dissertações e teses de programas de pós-graduação, tais como PUC-SP e PROFMAT, o site do Google acadêmico, as bibliotecas das universidades públicas do Pará (UEPA e UFPA). Nesse levantamento utilizamos como palavras chaves “congruência de triângulos”, “ensino de congruência”, “ensino de congruência de triângulos”, “semelhança de triângulos” e “ensino de semelhança de triângulos”. Justificamos o fato de termos expandido os estudos para semelhança de triângulos por conta da estreita relação com Congruência de Triângulos e porque haveria possibilidade de ampliar ideias para a construção da sequência didática.

Ao todo foram seis dissertações analisadas, sendo duas bibliográficas e quatro experimentais. As pesquisas analisadas nesta revisão de estudos estão caracterizadas, do ponto de vista dos procedimentos adotados, segundo Silveira (2013 p. 106-107). Segundo esse autor, a pesquisa bibliográfica é aquela que sua fonte decorre de um registro disponível em documentos impressos ou pesquisas anteriores que o pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analisados. Por outro lado "a pesquisa experimental toma o próprio objeto em sua concretude como fonte e o coloca em condições técnicas de observação e manipulação experimental" (SILVEIRA, 2013, p. 107), neste caso o pesquisador cria as condições adequadas para o tratamento de seus experimentos, estabelecendo critérios, variáveis, sujeitos, etc.

Quadro 4 - Estudos analisados na pesquisa.

Título	Autor/ano	Natureza	Categorização
Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental	FACCHINI (2021)	Dissertação	Bibliográfica
Estudo de congruência e semelhança de triângulos: uma proposta para o ensino básico.	ROCHA (2019)	Dissertação	Bibliográfica
Congruência de triângulos: análise de uma sequência didática utilizando o geogebra para o 8º ano do ensino fundamental.	MENDONÇA (2021)	Dissertação	Experimental
Congruência de triângulos no Geogebra: uma proposta didática para o ensino fundamental.	SILVA (2018)	Dissertação	Experimental
Concepção de uma sequência de ensino para o estudo da semelhança: do empírico ao dedutivo.	LUIS (2006)	Dissertação	Experimental
As isometrias nos azulejos de Belém: uma proposta de ensino	BEZERRA (2018)	Dissertação	Experimental

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

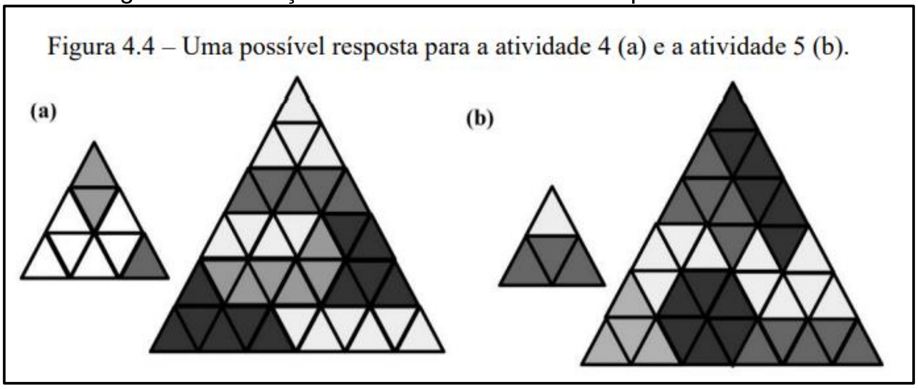
O quadro 4 apresenta os estudos analisados, com sua caracterização e categorização. A seguir apresentamos os resultados das análises, em que buscamos extrair informações sobre problemática, objetivos, fundamentação teórica, metodologia, resultados e desdobramentos da pesquisa, tendo como norteador a intenção de reunir informações que pudessem ajudar na construção da sequência didática e na análise após sua experimentação.

2. 1. 1 Estudos bibliográficos

Apresenta-se a seguir a análise de dois estudos bibliográficos, em que buscamos contribuições em pesquisas anteriores que tratam sobre semelhança de triângulos e congruência de triângulos, respectivamente.

Facchini (2013) elaborou uma proposta de atividades que adota semelhança de triângulos para a construção de diferentes figuras planas no ensino fundamental. Estabeleceu como objetivo geral da pesquisa a implementação da metodologia de Resolução de Problemas e a utilização de materiais concretos. Motivada pela relevância dada no currículo de matemática no ensino fundamental para o ensino de semelhança e congruência, com indicações de uso de malhas, ampliação e redução de figuras, a autora criou atividades com uso de Polidiamantes, poliformas compostas de triângulos equiláteros.

Figura 5- Ilustração de atividade com uso de polidiamantes.

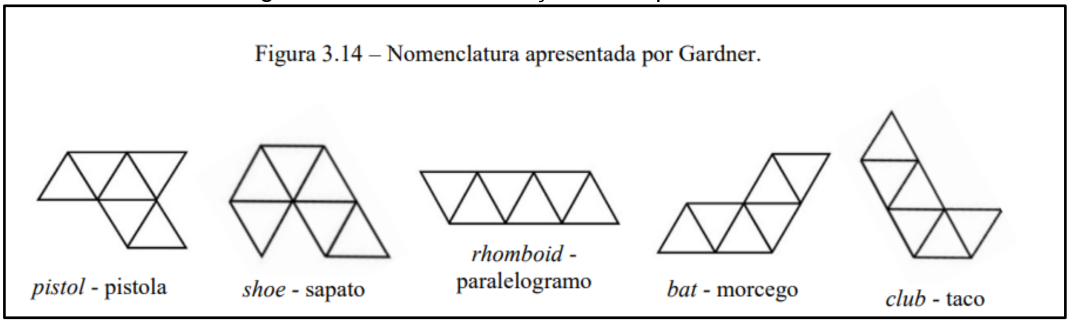


Fonte: Faccini (2013, p. 62)

Em sua fundamentação teórica, Faccini (2013) apresentou os objetos matemáticos semelhança de triângulos e congruência de triângulos dando destaque às propriedade transitiva, reflexiva e simétrica, bem como a razão de semelhança e às condições suficientes e necessárias para ocorrência de congruência de triângulos.

Para fundamentar a adoção dos polidiamantes como recurso didático, a autora apresentou os aspectos históricos das poliformas baseada nas publicações que datam de 1961, de T. H. O'Beirne e que se popularizaram desde 1964 nas publicações de Gardner, um dos teóricos que indicam a versatilidade de jogos lúdicos e desafios com poliformas devido a versatilidade e variedade que ofereciam.

Figura 6- Desafios e soluções com poliformas.



Fonte: Faccini (2013, p. 46)

Como metodologia de ensino da proposta elaborada pela autora, resolução de problemas, afirma ter buscado considerar ao longo da sequência de atividades oportunidades para que o professor que a aplique possa realizar as dez etapas de metodologia sugeridas por Allevato e Onuchic: a proposição do problema, a leitura individual, a leitura em conjunto, a resolução de problemas, o observar e incentivar (do professor), o registro das resoluções na lousa, a plenária, a busca do consenso (da resposta adequada), formalização do conteúdo e a proposição de novos problemas.

Desta maneira a autora apresenta sete atividades sequenciadas em que apresenta para o professor que deseje aplicar todas as instruções, comentários, objetivos de aprendizagem conforme a BNCC, Materiais: papel isométrico (malha de triângulos equiláteros) e soluções. Para fundamentação das atividades a autora também se embasou em Análise de erros baseado em Cury, uso de materiais concretos para ensinar matemática, segundo Mendes Mendes, exploração de erros para a compreensão do processo cognitivo do aluno, conforme Pochulu.

As reflexões levantadas por Facchini (2013) contribuíram de maneira significativa para esta pesquisa, sobretudo por afirmar que alguns erros ocultos podem nos levar a conclusões contraditórias e que as vezes é preciso refletir sobre o que o aluno queria dizer com sua resposta. Acrescenta ainda que os erros são apenas considerados como um esquema cognitivo errado e uma aprendizagem deficiente, que podem ter acontecido por diversos fatores, e que a correção sistemática dos erros não favorece sua eliminação. Indica como estratégia que os próprios alunos percebam seus erros, e descubram por quais hipóteses foram falhas e as concepções válidas, comparando-as e escolhendo a melhor estratégia e deixando de lado o que os levou ao erro para encontrar a resposta correta.

Rocha (2019) apresentou em sua pesquisa uma proposta para o ensino básico que envolve o estudo de congruência e semelhança de triângulos. Justifica que é necessário desmitificar esse conteúdo que normalmente não é tratado com sutileza e é transmitido ao longo dos anos através de memorização mecânica e visam aprimorar também os estudos e pesquisas posteriores. Estabelece como objetivo geral da pesquisa criar um modelo e linguagem que pudesse facilitar a construção lúdica.

Inicialmente, o autor realizou uma revisão histórica por meio dos estudos realizados por alguns matemáticos que se envolveram com semelhança e congruência e triângulos, tais como Euclides, Tales e Gauss alguns. Nesse estudo, aponta Euclides como autor dos primeiros postulados sobre semelhança que baseavam-se na proporcionalidade e a Gauss a origem do termo Congruência.

Nos dois capítulos subsequentes Rocha (2019) tratou apenas do objeto matemático em si, mas numa abordagem diferente de Facchini (2021). Rocha (2019) apresentou primeiro as definições de congruência de triângulos com as propriedades e casos, e depois de semelhança de triângulos onde só então aparece a razão de semelhança, de modo que não fica claro que um par de triângulos congruentes é também um par de triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade igual a 1.

Rocha (2019) contribuiu para este trabalho apresentado vários conceitos, exemplos, teoremas e aplicações relacionados à Congruência e Semelhança de triângulos, tais como o teorema do triângulo isósceles no desenvolvimento da congruência, os teoremas das bissetrizes internas e externas, os teoremas de Menelaus e Ceva, círculo de Apolônio entre outros com o auxílio de régua e compasso e do aplicativo educativo Geogebra na resolução vários exemplos e aplicações, o que pode inspirar a elaboração de diversas atividades de ensino e para ampliar a visão de possibilidades e estratégias de resolução.

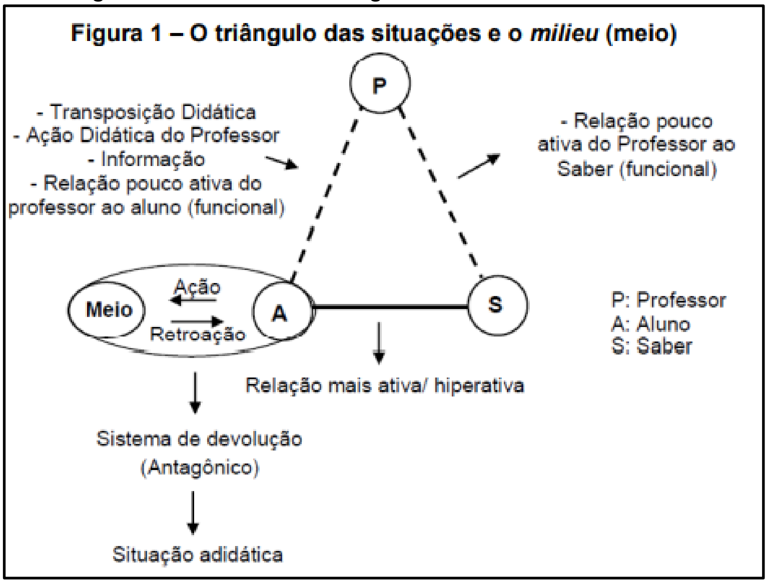
2. 1. 2 Estudos experimentais

Nesta subseção apresentamos seis trabalhos em que foram elaboradas atividades de ensino de semelhança ou congruência de triângulos experimentadas e sala de aula. Deste modo, ao analisarmos as dissertações a seguir extraímos elementos que adotamos para estabelecer objetivos de aprendizagem, material didático, critérios de análise, etc.

Mendonça (2021) analisou uma sequência didática para o 8º ano do Ensino Fundamental, utilizando Geogebra para o ensino de Congruência de triângulos, motivada em dar ênfase ao ensino de geometria no Ensino Fundamental. Estabeleceu como questão norteadora de pesquisa: Como uma sequência didática utilizando o software GeoGebra contribui para o ensino de Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental? E como objetivo geral, analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico. Adotou a Engenharia didática como metodologia de pesquisa, com análise a priori e a posteriori.

A atividade elaborada pela autora buscou relacionar as noções fundamentais para a construção do conceito de Congruência de Triângulos e as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos nessa construção. Para tanto se embasou na Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau. Sobre essa teoria dedicou um capítulo da dissertação para tratar da didática da matemática no âmbito das situações didáticas e esquematizou uma leitura que fez da relação aluno-professor-saber, como ilustrado na figura 5.

Figura 7 - Leitura do triângulo didático de Brousseau.



Fonte: Mendonça (2021, p. 29)

Sobre essa relação afirma que:

> o estudante aprende se adaptando ao *milieu* e ao saber, tendo como consequência dessa adaptação o resultado de novas respostas. Ainda no que diz respeito ao *milieu* (meio), um *milieu* sem intenção didática acarreta uma insuficiência em promover a aprendizagem matemática com eficiência, afinal é necessário que o docente elabore e organize o *milieu* de desenvolvimento das situações para que o espaço educacional e as situações de ensino comprometam-se com os saberes matemáticos envolvendo o processo ensino e aprendizagem. (MENDONÇA, 2021, p. 28)

Essa leitura feita pela autora é um pouco diferente da nossa apresentada na figura 1, haja vista que que em nossa proposta metodológica o professor e o saber interagem nesse *milieu* pelo fato de ser elaborado por ele e pelo jogo dialógico com intenção de conduzir o aluno ao objetivo de aprendizagem. Compreendemos que essas diferentes leitura de uma mesma teoria ocorrem por conta da metodologia de ensino adotada.

No capítulo dedicado ao ensino de geometria, a autora faz um histórico da do currículo de geometria no Brasil sintetizado como ilustra a figura 6.

Figura 8 - Síntese do currículo de geometria no século XX

Quadro 2: Reformas Curriculares no século XX

REFORMAS CURRICULARES DO SÉCULO XX				
1ª METADE DO SÉCULO XX		2ª METADE DO SÉCULO XX		
Reforma 1 (Em 1931)	Reforma 2 (Em 1942)	Período 1 (1965 a 1980)	Período 2 (1980 a 1994)	Período 3 (A partir de 1995)
Francisco Campos	**Gustavo Capanema**	**Influência do MMM**	**Contraposição do MMM**	**PCN**
Proposição da unificação dos campos matemáticos: Aritmética, Álgebra e Geometria na mesma disciplina, proposta por Euclides Roxo.	Mudanças nas decisões curriculares retirando as inovações da reforma 1.	Movimento da Matemática Moderna provocando alterações curriculares em diversos países.	Busca por reformas que contrapunham as ideias sugeridas pelo Movimento da Matemática Moderna.	Documento elaborado a nível nacional para ser empregado nas escolas brasileiras, chamado de Parâmetros Curriculares Nacionais.

Fonte: Autoria própria

Fonte: Mendonça (2021, p. 45)

Uma importante contribuição feita pela autora foi uma análise de livro de didáticos baseado na orientação curricular e no período, apresentando a seguinte síntese ilustrada na figura 7.

Figura 9 - Análise de livros didáticos.

Quadro 4: Análise de alguns livros didáticos

OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS OBSERVADOS			
Orientação Curricular	**Período**	**Livros analisadas**	**Considerações**
PCN (1998)	PNLD 2017	Dante (2016) Silveira (2015) Bianchini (2015) Souza e Pataro (2015)	Com a chegada dos PCN, a geometria passou a ser vista em toda a Educação Básica, porém na maioria dos livros didáticos aparecia no final, geralmente IV Unidade. No que se refere a Congruência de Triângulos a maioria das coleções de livros didáticos continuaram com a mesma abordagem do MMM, com algumas exceções: situações de reflexão ao analisar figuras, atividades de construção em equipe com alguns instrumentos didáticos, sejam eles régua, transferidor e compasso.
BNCC (2017)	PNLD 2020	Dante Silveira Bianchini Souza e Pataro Giovanni Júnior e Castrucci Gay e Silva	Em 2017, com a BNCC impondo como os conteúdos deverão aparecer, em espiral, traz a Geometria desde a Unidade I nos livros didáticos. Por outro lado, Congruência de Triângulos continua, na maioria das obras do PNLD 2020, com as mesmas abordagens das coleções do PNLD 2017.

Fonte: Autoria própria

Fonte: Mendonça (2021, p. 59)

Nos capítulos seguintes, a autora fala da relevância do uso de tecnologia no ensino de matemática, apontando possibilidades e funcionalidades de uso do aplicativo educativo livre Geogebra para o ensino de geometria. Por fim, apresenta as atividades elaboradas e como procedeu sua experimentação. O quadro a seguir sintetiza as atividades da sequência didática elaborada por Mendonça (2021).

Quadro 5 - Detalhamento das atividades.

ATIVIDADES	EXPECTATIVA DE MOBILIZAÇÃO DOS ALUNOS
a) Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?	Saber as condições de existência de um triângulo, bem como construir diversos tipos de triângulos no GeoGebra.
b) Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = α + β + γ? Justifique a sua resposta.	Perceber que mesmo movendo o triângulo ABC a soma das medidas de seus ângulos internos permanece igual a 180°.
c) Desenhe um triângulo A'B'C' no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?	Determinar as propriedades do triângulo ABC para a construção de um triângulo congruente.
d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?	Definir quando dois triângulos são congruentes.
e) Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e dos ângulos encontrado.	Saber classificar triângulos a partir das medidas dos seus lados em equilátero, isósceles ou escaleno, observando a congruência dos dois triângulos construídos.
f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou	Identificar as propriedades dos triângulos construídos mediante a análise de congruência sabendo conceituá-las.
g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAAo?	Conhecer os casos de congruência de triângulos para descobrir medidas desconhecidas em diversos contextos, sejam eles em um software ou em situações-problema.
h) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAAo).	Aplicar os casos de congruência de triângulos para descobrir medidas desconhecidas sem efetuar medições, garantindo a congruência dos triângulos.

Fonte: Mendonça (2021, p. 111)

Nesse detalhamento a autora nos inspirou na elaboração dos objetivos de aprendizagem de nossa sequência didática. Na apresentação das atividades são apresentadas como as situações didáticas da TSD são mibilizadas, considerando que antes da experimentação a autora promoveu uma familiarização com o geogebra em que mobilizou conhecimentos básicos de matemática e o uso das ferramentas do aplicativo. A autora ainda faz comentários importantes para uma reaplicação sobre formas de proceder na institucionalização e sujestões de intervenções.

No que diz respeito às análises, a autora coletou registros escritos e audio transcrições dos episódios didáticos. Para direcionamento da análise a autora seguiu as etapas da Teoria das Situações Didáticas: Ação; Formulação; Validação; Institucionalização. Levando em consideração as análises das gravações, dos registros no diário de campo, das entrevistas inicial e final feitas com o professor, e dos protocolos das atividades dos estudantes. As discussões ao longo do texto articulam as análises das atividades da sequência, o que a autora chama de “modelização e análise das situações da sequência didática”(MENDONÇA, 2021, p. 115).

Quadro 6 - Resultados.

Quadro 42: Relação dos alunos e suas respectivas produções durante a sequência

Situações adidáticas	Construção e manipulação	Percentual
Ação	A01, A02, ..., A18	100%
Formulação	A01, ..., A05, A08, A10, A11, A12, A14, ..., A18	67%
Validação	A01, A02, A03, A08, A11, A14, A15, A16, A17 e A18.	55%
Institucionalização	A01, A02, ..., A18.	100%

Fonte: Mendonça (2021, p. 171)

Sobre os resultados, a autora coletou evidências de que as estratégias usadas pelos alunos na realização das atividades foram formadas por momentos de ação e reflexão das construções e manipulações, formulações de novos conceitos geométricos, validação de estratégias à medida que acertavam as construções das figuras, e consolidação de conceitos após a institucionalização do saber. A grande dificuldade dos estudantes foi de utilizar conceitos geométricos pré-requisitos (conhecimento sobre figuras planas e suas propriedades) para as construções sem a intervenção do professor. A autora relata que após a experimentação passaram a reconhecer as figuras não somente pela sua aparência física, mas também por suas propriedades ao comparar a congruência de dois pares de triângulos. A maioria dos alunos conseguiu perceber as condições necessárias para a congruência de triângulos, sabendo diferenciar os casos que sustentam a congruência. O GeoGebra mostrou-se como um recurso didático que traz contribuições relevantes para o ensino da Geometria.

Sobre os resultados, coletou evidências de que as estratégias usadas pelos alunos na realização das atividades foram formadas por momentos de ação e reflexão das construções e manipulações, formulações de novos conceitos geométricos, validação de estratégias à medida que acertavam as construções das figuras, e consolidação de conceitos após a institucionalização do saber. A grande dificuldade dos estudantes foi de utilizar conceitos geométricos pré-requisitos (conhecimento sobre figuras planas e suas propriedades) para as construções sem a intervenção do professor. A autora relata que após a experimentação passaram a reconhecer as figuras não somente pela sua aparência física, mas também por suas propriedades ao comparar a congruência de dois pares de triângulos. A maioria dos alunos conseguiu perceber as condições necessárias para a congruência de triângulos, sabendo diferenciar os casos que sustentam a congruência. O GeoGebra mostrou-se como um recurso didático que traz contribuições relevantes para o ensino da Geometria.

Silva (2018) apresenta uma proposta didática para o ensino de congruência de triângulos adotando Geogebra como recurso didático. Estabeleceu como questão norteadora: como uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental pode contribuir para a aprendizagem do conceito de congruência, em especial dos casos de congruência de triângulos? Como objetivo geral decidiu analisar as contribuições de uma proposta de ensino para a aprendizagem do conceito de congruência.

Ao tratar do ensino e aprendizagem da geometria o autor em tela apresenta algumas perspectivas teóricas sobre a geometria no ensino básico, a teoria da aprendizagem significativa proposta pelo psicólogo norteamericano David Ausubel (1918-2008), o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, habilidades geométricas por Alan Hoffer, deste último apresenta um quadro que serviram como norteador de suas análises pós-experimentação.

Figura 10 - Habilidades básicas em geometria segundo Alan Hoffer.

NIVEL HABILIDADE	RECONHECIMENTO	ANÁLISE	ORDENAÇÃO	DEDUÇÃO	RIGOR
VISUAL	Reconhece figuras diferentes num desenho. Reconhece informações rotuladas numa figura	Percebe as propriedades de uma figura como parte de uma figura maior	Reconhece relações entre diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para produzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos
VERBAL	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentença que descreva figuras.	Descreve acuradamente várias propriedades de uma figura	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando relações entre figuras.	Entende a distinção entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
GRÁFICA	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades de figuras para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras é capaz de construir outras figuras relacionadas às figuras dadas	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de informação dada como desenhar ou construir uma figura específica	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoricamente conceitos em vários sistemas dedutivos
LÓGICA	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em diferentes critérios. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de uma figura para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir conseqüências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados.Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
APLICAÇÕES	Identifica formas geométricas em objetos físicos	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

Fonte: Silva (2018, p. 48)

A figura 8 ilustra como Silva (2018) analisou habilidades geométricas desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa por meio da sequência didática, aliado a isso também analisou os níveis de desenvolvimento conceitual alcançados pelos sujeitos, os quais sejam: Nível 1 (reconhecimento), nível 2 (análise), nível 3 (ordenação); nível 4 (dedução); nível 5 (rigor).

A sequência foi constituída por oito atividades e aplicada a uma turma de aproximadamente 30 alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Ituiutaba – MG. As atividades foram distribuídas ao longo de 20 aulas regulares de 50 minutos.

As atividades propostas pelo autor apresentam como metodologia de ensino as sequências com o objetivo de promover a aprendizagem significativa de conceitos por meio de procedimentos relativos a um conteúdo especifico. A abordagem realizada foi a de qualitativa e descritiva tendo a preocupação de apresentar o fenômeno educativo que ocorreu durante o planejamento e aplicação da sequência didática proposta, além de algumas características relativas aos alunos no processo de aprendizagem. Os métodos de coleta de dados foram a observação das atitudes dos alunos durante a aplicação da sequência didática, gravação de áudios, fichas de registros impressas, arquivos das construções realizadas no GeoGebra e diários de bordo com anotações realizadas sobre as observações. O autor assevera que a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem de material significativo e que o material de aprendizagem apenas é potencialmente significativo.

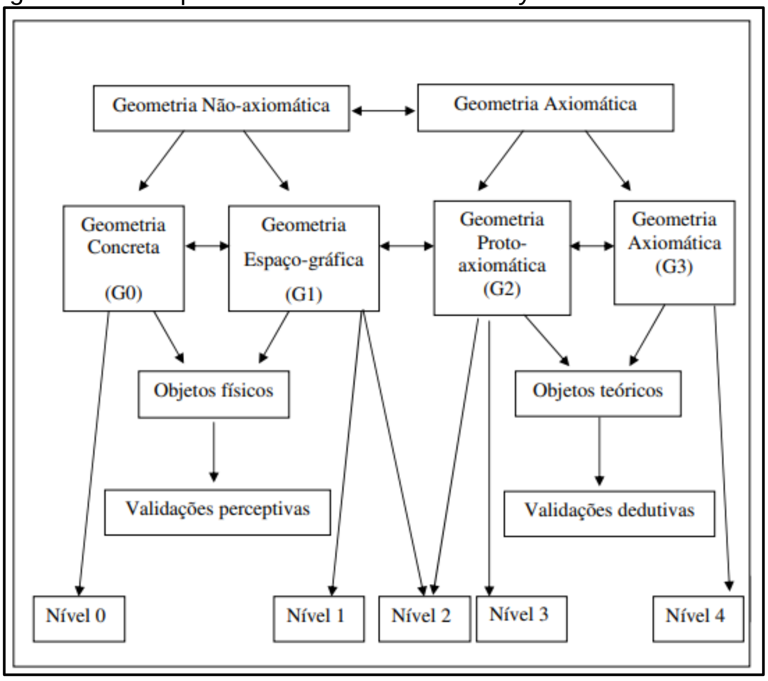
Como resultados o autor identificou como potencialidades da sequência didática de mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos; a importância do papel do professor como organizador e articulador dos diálogos promovidos durante a aplicação da sequência; favorecimento de estratégias para a articulação entre as ideias novas e aquelas existentes na estrutura cognitiva dos alunos; organização lógica e hierarquia conceitual para facilitar o processo de diferenciação progressiva ao partir do conjunto de figuras geométricas planas, perpassando pela aprendizagem de congruência de polígonos até a situação mais particular de congruência de triângulos; a adoção do Geogebra estimulou a criatividade dos alunos por meio de ferramentas de edições no software GeoGebra, contribuindo para a formação de atitudes mais positivas em relação à geometria;

Embora a pesquisa tenha alcançado resultados positivos, Silva (2018) alerta que cabe ao professor a exploração do caráter dinâmico do software Geogebra, para que favoreça o processo de investigação matemática pelos alunos. Para isso, ressaltou a importância dos diálogos estabelecidos durante todo o processo que promoveu confrontamento das ideias dos alunos com vistas à formalização dos conceitos e proposições.

Luis (2006) apresentou em sua pesquisa a concepção de uma sequência de ensino para o estudo da semelhança construída na perspectiva de promover empiria e dedução, utilizando materiais manipuláveis e softwares de geometria dinâmica. Estabeleceu como questões de pesquisa: Como se dá a transição da geometria concreta para a espaço-gráfica no contexto das figuras semelhantes? Como ocorre a passagem das validações empíricas para as dedutivas nesse contexto? Definiu como objetivo geral: investigar como o conceito de figuras semelhantes pode ser apresentado de maneira significativa e motivadora a alunos da 1ª série do Ensino Médio, de modo que a prova seja parte integrante desse processo.

Em seu referencial teórico adotou o modelo dos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Van Hiele (os mesmos adotados por Silva (2018) com a leitura feita por Bernard Parsysz que agrega uma síntese desses níveis correspondendo a geometria concreta e a geometria teórica, revelando um conflito entre o sabido e o percebido, entre o físico e o teórico, geometria axiomática e geometria não axiomática, em que explica por meio do esquema ilustrado na figura 9.

Figura 11 - Comparativo entre os níveis Parsysz e níveis Van Hiele



Fonte: Luis (2006, p. 9)

Aliado a isso, justificando pelas orientações curriculares de que o ensino de matemática deva promover a argumentação matemática, Luis (2006) adotou também a teoria de argumentação e prova segundo Ballacheff, quem defende que a aprendizagem da prova ocorre através da passagem por quatro fases, as quais sejam:

Empirismo ingênuo: quando o aluno conclui que uma afirmação é verdadeira observando um pequeno número de casos;

Experiência crucial: Quando o aluno testa um exemplo com certas características para verificar sua validade para um caso específico e se for confirmado, conclui-se seu caráter geral;

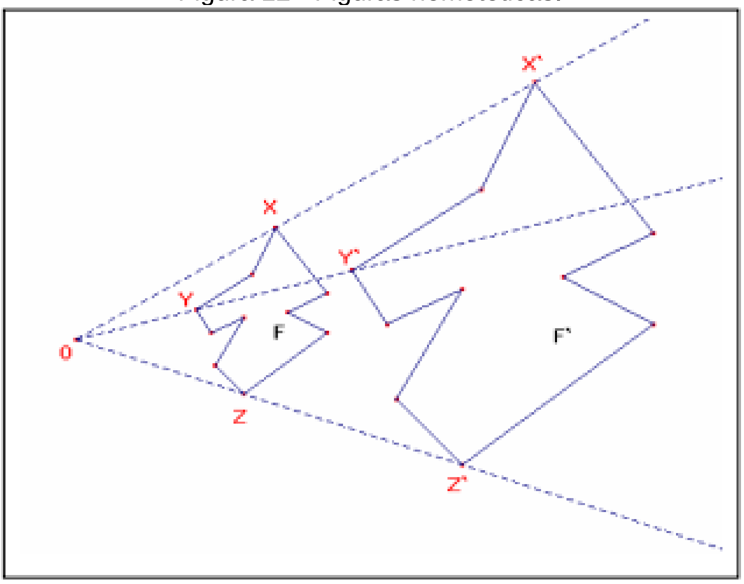
Exemplo genérico: Quando a validação de uma afirmação é feita pela realização de operações ou transformações de um objeto, sendo este representativo de uma classe, com propriedades características e uma estrutura significativa da mesma, tornando-se visível a veracidade do problema em questão.

Experiência mental: quando a validação é feita com uma linguagem e uma construção cognitiva mais complexa, não fazendo uso de casos particulares.

Ao lermos a definição a dessas fases, percebemos uma curiosa similaridade com a classificação das intervenções das UARC's (seção 1. 2), respectivamente, inicial, reflexiva, exploratória e formalizante. O que nos leva a concluir que nosso constructo, estruturado em UARC's pode potencializar as habilidades de argumentação e prova na aprendizagem de Congruência de Triângulos.

Luis (2006) também faz um estudo do objeto matemático "semelhança", começando por um estudo histórico passando pelo Egito antigo, Grécia, mundo árabe e Europa, apresentando diferentes abordagens sobre esse objeto. Ao tratar das definições atuais de semelhança a autora em tela se aporta em Elon Lages Lima que define semelhança por homotétia, nessa definição sugere-se uma notação funcional/vetorial, em que toda homotétia é uma correspondência biunívoca de razão r, cuja inversa é a hemotétia de mesmo centro e razão $1/r$ e que a hemotétia de razão 1 é uma aplicação da identidade, como ilustramos na figura 10.

Figura 12 - Figuras hemotéticas.



Fonte: Luis (2006, p. 33)

Luis (2006) segue o estudo do objeto matemático até chegar em semelhança de triângulos, com a mesma abordagem feita por Facchini (2021), como sendo uma correspondência binívuca entre os vértices em que os lados se correspondem segudo uma razão de semelhança, e conclui que se essa razão é 1, tratando-se de uma isometria que chama de congruência.

Ao apresentar a sequência didática a autora fez uma análise a priori e dividiu as atividades em três blocos:

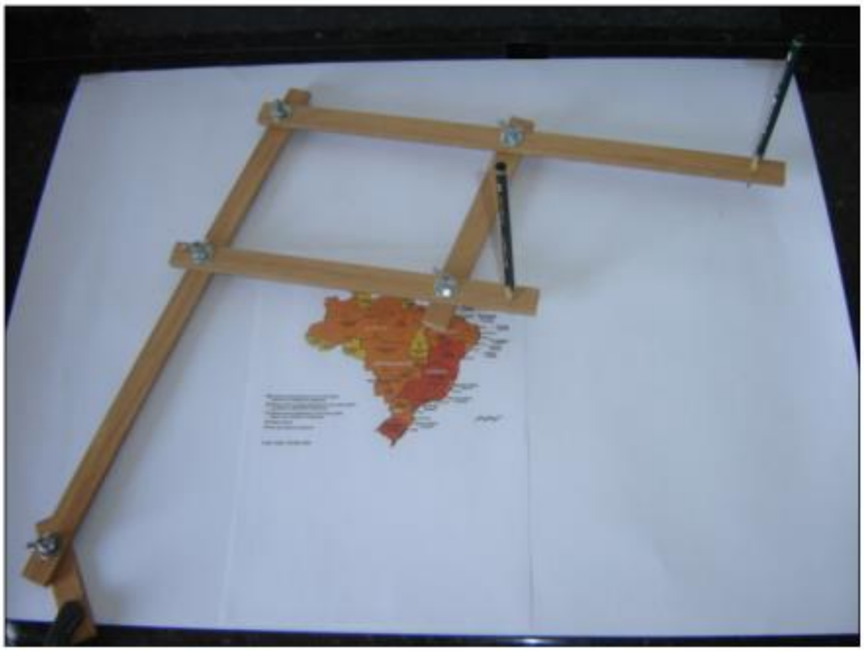
Bloco 1: Investigação e contrução de propriedades entre figuras semelhantes no plano e no espaço, com uso de material concreto.

Bloco 2: Investigação e construção de propriedades entre figuras planas semelhantes, utilizando um ambiente informatizado de geometria dinâmica.

Bloco 3: Dedução e aplicação das propriedades de figuras semelhantes.

Além de régua, transferidor, compasso , lápis e borracha a sequência didática teve como um dos materias mnipuláveis adotados o pantógrafo, sistema destinado a reduzir e ampliar figuras.

Figura 13 - Pantógrafo



O instrumento pantógrafo junto com o mapa a ser ampliado

Fonte: Luis (2006)

A autora relata que embora a origem do pantógrafo seja desconhecida, há registros de seu uso datados de antes de Cristo. Relatou que o matemático Sylvester (1814-1897) se dedicou a sistemas articulados para realizar rotação de figuras e Kempe (1841-1920) que inventou dois sistemas como o pantógrafo para refletir e transladar figuras. Demos destaque a esse recurso adotado por este autor, porque nos chamou atenção que os matemáticos do século XIX as transformações geométricas de isometria estivessem tão interligado com o estudo de semelhança e congruência de figuras, de modo que isso trouxe uma inspiração para a elaboração de nossa sequência didática.

Luis (2006) adotou como recurso didático tecnológico o Cabri-Géomètre um ambiente computacional de geometria dinâmica onde é possível rascunhar, investigar e experimentar construções e transformações geométricas.

Figura 14 - Construção geométrica no Cabri-Géomètre.

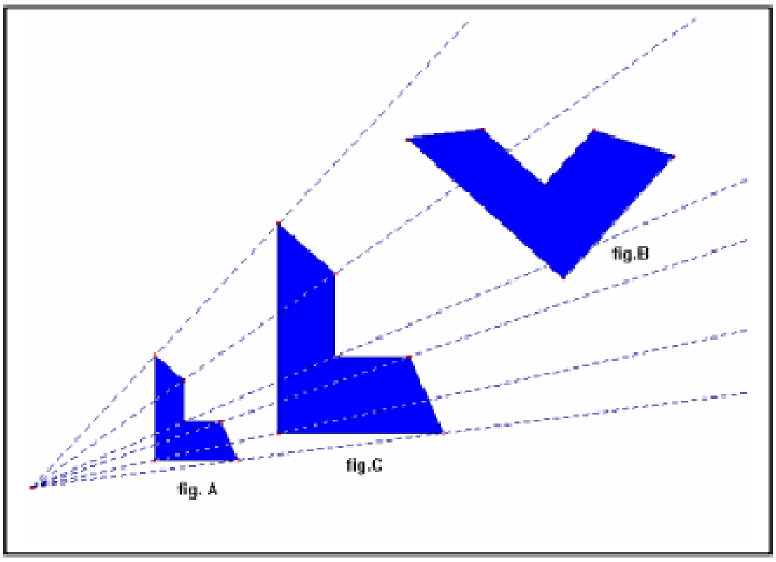


Figura C homotética a figura A e figura B congruente a figura C por rotação

Fonte: Luis (2006, p. 84)

Note que nessa atividade ilustrada na figura 12 são explorados diversos conceitos, tais como semelhança, congruência, correspondência, rotação. E assim vai ao longo de toda a sequência didática, num total de 9 atividades.

A experimentação foi realizada com duas duplas de alunos e foram coletados os registros no protocolo impresso e os episódios gravados em fita K7, nos registros do professor pesquisador eram anotadas quantas e quais estratégias eram adotadas pelos sujeitos em cada tarefa, bem como quantas e quais ajudas foram solicitadas do professor. Ao longo das discussões sobre os recortes dos dados coletados as análises foram feitas segundo os aportes teóricos adotados, em especial as fases de argumentação e prova e do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Sobre os resultados, concluiu-se que os sujeitos embora não tivessem conhecimento do conceito de semelhança e entendessem pouco sobre proporcionalidade, ao final do primeiro bloco de atividades havia indícios de que compreenderam o que seria a razão de ampliação e redução de uma figura. No bloco 2, os sujeitos eram capazes de afirmar que duas figuras eram congruentes por meio da razão de proporcionalidade, e nesse aspecto apontou o recurso computacional e o material manipulável concreto adotados como facilitadores para descoberta de propriedades implícitas devido ao dinamismo. A figura 13 ilustra o fechamento dos resultados da sequência didática.

Figura 15 - Resultados o 3º bloco de atividades.

Alunos	**Estratégias classificadas como uma Experiência Mental**
A	Ativ.10 (estratégia 2).
B	Ativ.4 (estratégia 2), Ativ.6 (estratégia 3), Ativ.7 (estratégia 1), Ativ.8 (estratégia 1).
C	Ativ.1 (estratégia 4), Ativ. 4 (estratégia 1), Ativ.5 (estratégia 3), Ativ.6 (estratégia 2), Ativ.7 (estratégia 2), Ativ.10 (estratégia 2).
D	Ativ.1 (estratégia 4), Ativ.3 (estratégia 2 e 3), Ativ.5 (estratégia 2), Ativ.6 (estratégia 2), Ativ.7 (estratégia 1), Ativ.8 (estratégia 1).

Fonte: Luis (2006, p. 251)

Sobre o bloco 3 em que os estudantes poderiam utilizar apenas lápis e papel pra suas formulações, o pesquisador verificou que ao longo da execução das tarefas os sujeitos foram aprimorando do empirismo ingênuo para a experiência mental, embora um dos sujeitos tenha permanecido na primeira fase. Um resultado interessante dessa pesquisa é o pesquisador relata que despertou nos estudantes a importância de justificar seus resultados, demonstrando uma evolução na estrutura do pensamento e da linguagem. Ainda que os resultados da pesquisa tenha sido promissores, a pesquisadora afirma que os resultados poderiam ser melhores se tivesse mais tempo com os sujeitos, especialmente para retomar conteúdos que ela considerou estarem em defasagem para esses sujeitos. Entendemos que se referia a um nivelamento de conhecimentos base antes da experimentação, o que pretendemos fazer nesta pesquisa.

Essa pesquisa de Luis (2006) aconteceu há quase 20 anos, mas trouxe informações, reflexões, conceitos, teorias e metodologias de ensino e pesquisa que nos inspirou e nos instigou a investigar um pouco mais sobre conteúdos circunscritos ao conceito de Congruência de triângulos. Assim, analisamos uma pesquisa realizada no âmbito do mesmo programa de pós-graduação que cursamos que trouxe importantes contribuições ao estudo de isometrias.

Bezerra (2018) construiu e experimentou uma proposta de ensino explorando as isomerias nos azulejos de Belém. Motivada pela sua experiência pessoal, profissional e em levantamentos bibliográficos que evidenciam que pouco se explora o ensino de geometria na educação básica, estabeleceu a seguinte questão de pesquisa: Em que medida uma sequência didática concebida e estruturada sob certas características pode amenizar as dificuldades recorrentes de aprendizagem do conceito de Isometrias a partir da interpretação do mundo real conectando a Matemática ao ambiente cultural? Como objetivo adotou evidenciar os indícios de aprendizagem a partir da aplicação de uma sequência didática envolvendo os conteúdos relacionados às isometrias, em turma do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual da região metropolitana de Belém.

Como metodologia de pesquisa optou pelos pressupostos da Engenharia Didática, e adotou como metodologia de ensino sequência didática com o mesmo modelo estruturante nosso: Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) proposto por Cabral (2017). Para análise de resultados após experimentação também adotou Análise Microgenética e Analise do discurso. Assim, nesta análise nos concentramos no estudo do objeto matemaático, nas analises e resultados.

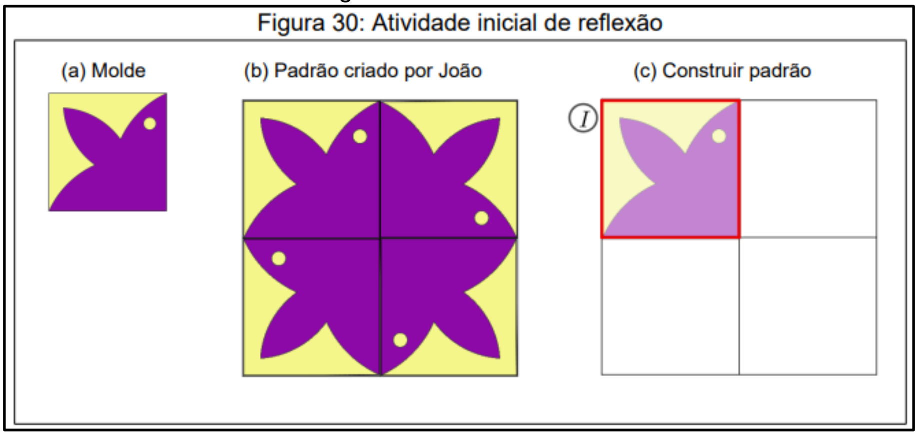
Ao apresentar as definições de transformações no plano, a autora ilustra cada uma com as gravuras de azulejos onde destaca a ocorrência de translações, rotações e reflexões, também definindo como essas imagens poderiam ser contraídas ou dilatadas. Em seguida foi apresentada a definição de isometria:

> Uma transformação do plano é uma isometria se a distância entre quaisquer dois pontos P e Q do plano for igual à distância entre suas imagens pela transformação, ou seja, f é uma isometria se, e somente se, d(P, Q) = d(f(P), f(Q)), quaisquer que sejam os pontos P e Q do plano. Em outras palavras, uma isometria é uma transformação do plano que preserva distâncias. (BEZERRA, 2018, p. 67)

Dessa definição a autora explica que transformações que sofram dilatação ou contração não são isometrias. Nessa parte as definições de translação, rotação e reflexão são ilustradas com calçadas e fachadas da arquitetura de Belém do Pará.

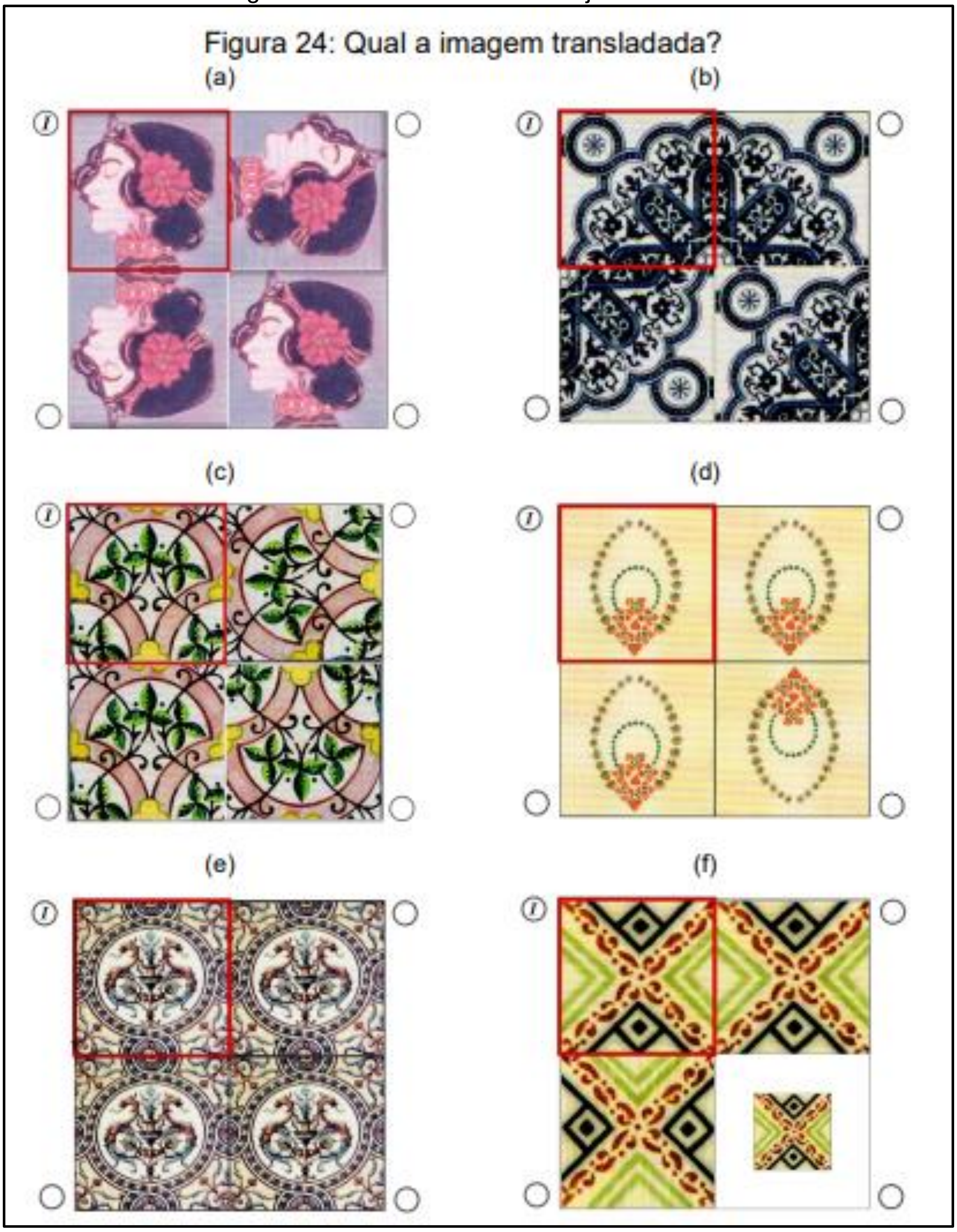
Na elaboração das cinco atividades buscou tornar o ensino de isometrias mais atrativo, as atividades foram elaboradas para serem desenvolvidas com o auxílio de um molde de azulejo, devido ao amplo e diversificado acervo de fachadas azulejares na cidade de Belém do Pará e também devido a grande riqueza de isometrias que podem ser encontradas nos próprios azulejos e na composição deles, aliando-se a preservação cultural com a Matemática de sala de aula. O molde de azulejo foi idealizado pela professora/pesquisadora e todas as informações e imagens de azulejos usadas na sequência didática foram retiradas do livro intitulado Azulejaria em Belém do Pará: inventário - arquitetura civil e religiosa - século XVII ao XX.

Figura 16 - Atividade com molde.



Fonte: Nogueira (2018 p. 89)

Figura 17 - Atividade com azulejos de Belém



Fonte: Nogueira (2018 p. 89)

As atividades foram mediadas pelas intervenções escritas do material impresso e pelas intervenções orais da professora-pesquisadora progredindo do intuitivo ao formal. As análises foram dos recortes dos áudios transcritos, onde foram evidenciados indícios de aprendizagem pelo tipo de abordagem comunicativa. Ao final foi aplicado um teste que avaliou o desempenho dos sujeitos após a aplicação da sequência didática, com apresenta a figura 16

Figura 18 - Desempenho dos sujeitos após aplicação da SD.

Quadro 20: Número de acertos por aluno

Aluno	Questões de 1 a 5		Questões de 6 a 9		Total	
	Acertos	(%)	Acertos	(%)	Acertos	(%)
1	5	100	2	50,0	7	77,8
2	5	100	2	50,0	7	77,8
3	5	100	1	25,0	6	66,7
4	5	100	2	50,0	7	77,8
5	4	80,0	3	75,0	7	77,8
6	4	80,0	3	75,0	7	77,8
7	4	80,0	3	75,0	7	77,8
8	5	100	3	75,0	8	88,9
9	4	80,0	3	75,0	7	77,8
10	3	60,0	3	75,0	6	66,7
11	5	100	3	75,0	8	88,9
12	5	100	3	75,0	8	88,9
13	5	100	3	75,0	8	88,9
14	5	100	3	75,0	8	88,9
15	5	100	2	50,0	7	77,8
16	5	100	3	75,0	8	88,9
17	5	100	2	50,0	7	77,8
18	5	100	3	75,0	8	88,9
19	5	100	2	50,0	7	77,8
20	5	100	3	75,0	8	88,9
21	3	60,0	0	0,0	3	33,3
22	4	80,0	1	25,0	5	55,6
23	5	100	1	25,0	6	66,7
TOTAL	**106**	**92,2**	**54**	**58,7**	**160**	**77,3**

Fonte: Nogueira (2018 p. 89)

Das analises dos discursos nos indícios de aprendizagem e dos resultados da figura 16, a autora concluiu que os sujeitos alcançaram um bom nível de aprendizagem acerca do reconhecimento das isometrias. Durante as atividades relacionadas constatou-se que as intervenções orais de manutenção objetiva iniciadas de forma interativa/de autoridade mudaram, gradativamente, para uma forma interativa/dialógica, isto é, a medida que os sujeitos foram alcançando segurança conceitual interagiam mais entre si.

Desta revisão de estudos, extraíram-se diversas ideias e perspectivas teóricas e metodológicas que colaboraram com a construção da sequência didática para o ensino que Congruência de Triângulos que apresentamos mais adiante. Na seção seguinte, apresenta-se uma análise de livros didáticos para compreensão de como se dá a mediação do ensino de Congruência de triângulos por meio desse importante recurso didático da educação básica na rede pública de ensino.

2. 2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesta análise de livros didáticos, buscamos analisar sob a perspectiva de nosso aporte teórico se esses recursos estão atendendo às necessidades didático-pedagógicas indicadas pelo currículo de Matemática na Educação Básica. A revisão de estudos anteriormente apresentada reforçou nossa perspectiva de que o estrutura de UARC apresenta potencialidades didáticas que atendem as exigências das atuais diretrizes educacionais, sobretudo ao que se refere à investigação sobre objeto matemático de formas dialógica, empírica e com gradual formalização.

Assim, verificamos o quantitativo de páginas dedicados ao conteúdo Congruência de Triângulos, tópicos abordados e como foram abordados, se havia abordagem por meio da História da Matemática, se havia exemplos e questões resolvidas e o nível de conhecimento exigido nos exercícios, basicamente as UARC'c de Cabral (2017) (seção 1. 2) serviram de critério da análise da forma, apresentada no quadro 7.

Quadro 7 - Critério de análise de livro didático

ABORDAGEM DO CONTEÚDO	**Exploratória:** se precisam construir, desenhar ou manipular para poder chegar as definições e conceitos. **Reflexiva:** se precisam observar um comportamento para chegar às conclusões e deduções. **Formalizante:** quando apresentam formalmente as definições e fórmulas.
PROPOSIÇÃO DE EXERCÍCIOS	**Restritiva:** quando se aplica diretamente as definições e conceitos. **Aplicativa:** quando precisa de uma análise dentro de um contexto para responder.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A presentamos num quadro os nove livros analisados do PNLD 2020 a seguir onde apresentamos a descrição dos livros analisados e algumas informações quantitativas e qualitativas sobre eles:

Quadro 8 - Descrição dos livros didáticos analisados.

Descrição	História da Matemática.	Exemplos e questões resolvidas.	Nº de páginas de conteúdo. Classificação da abordagem predominante.	Quantidade de exercícios. Classificação da abordagem predominante.
LIVRO 1: MATEMÁTICA ESSENCIAL- 8 ANO Pataro e Balestri (2018)	Não	Não	2 páginas Abordagem Formalizante	15 questões Abordagem restritiva e aplicativa.
Livro 2: MATEMÁTICA COMPREENSÃO E PRÁTICA Silveira (2018)	Não	Não	3 páginas Abordagem Formalizante	5 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 3: MATEMÁTICA REALIDADE E TECNOLOGIA Souza (2018)	Não	Não	2 páginas Abrdagem Formalizante	4 exercícios Abordagem restritiva
Livro 4: ARARIBÁ MAIS MATEMÁTICA - 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL Gay e Silva (2018)	Não	Sim	2 páginas Abrdagem Reflexiva e Formalizante	5 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 5: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA Giovanni Jr. E Castrucci (2018)	Não	Não	5 páginas Abordagem Formalizante	8 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 6: TELÁRIS MATEMÁTICA Dante (2018)	Sim	Sim	3 páginas Abordagem Formalizante	8 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 7: MATEMÁTICA BIANCHINI Bianchini (2018)	Sim	Sim	5 páginas Abordagem Formalizante	9 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 8: GERAÇÃO ALPHA MATEMÁTICA Oliveira (2018)	Não	Sim	5 páginas Abordagem Formalizante	8 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa
Livro 9: PROJETO APOEMA Galdone (2015)	Não	Não	2 páginas Abordagem Formalizante	20 exercícios Abordagem restritiva e aplicativa

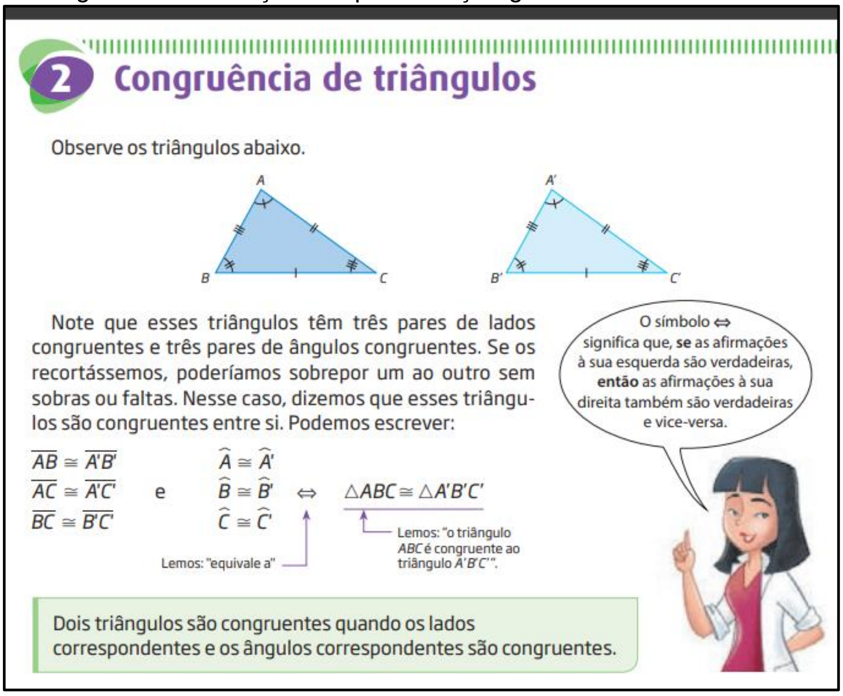
Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Em Pataro e Balestri (2018), dentro do capítulo sobre triângulos, a congruência de triângulos é apresentada por meio dos casos de congruência de triângulos para ser utilizada como mecanismo para o ensino do conteúdo quadriláteros, baseando-se na habilidade EF08MA14: Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. Desse modo, não é apresentada a definição do que seria congruência de triângulos especificamente, mas é feita de maneira genérica no tópico congruência de figuras e no tópico de congruência de triângulos é apresentado apenas quatro casos de congruência de triângulos (LLL, LAL, ALA, LAAº) sem o caso especial para triângulos retângulos, o que nos fez concluir que abordagem comunicativa proposta se compara ao de intervenção formalizante.

Os exercícios em Pataro e Balestri (2018) propõem atividades em malha quadriculada e outros de aplicação direta e reconhecimento da ocorrência dos casos de congruência de triângulos, sendo que dois exercícios necessitam de maior análise e alcance de nível formal do conhecimento sobre o objeto, de modo que podemos dizer que tais exercícios se comparam a intervenções avaliativas restritivas e aplicativas.

Silveira (2018) apresenta a Congruência de Triângulos no capítulo sobre triângulos e quadriláteros, para desenvolvimento da habilidade de demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. É formalizada especificamente a definição de congruência de triângulos, com atenção a notação de congruência (≅) e de bicondicional (⟺).

Figura 19 - Definição e representação geométrica e simbólica.



2 Congruência de triângulos

Observe os triângulos abaixo.

Note que esses triângulos têm três pares de lados congruentes e três pares de ângulos congruentes. Se os recortássemos, poderíamos sobrepor um ao outro sem sobras ou faltas. Nesse caso, dizemos que esses triângulos são congruentes entre si. Podemos escrever:

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\hat{A} \cong \hat{A'}$, $\hat{B} \cong \hat{B'}$, $\hat{C} \cong \hat{C'}$ $\Leftrightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Lemos: "equivale a"

Lemos: "o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'*".

O símbolo ⟺ significa que, **se** as afirmações à sua esquerda são verdadeiras, **então** as afirmações à sua direita também são verdadeiras e vice-versa.

Dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são congruentes.

Fonte: Silveira (2018, p. 136)

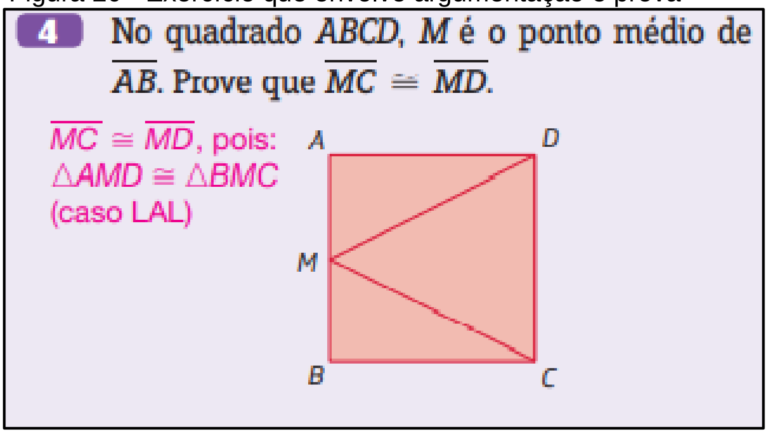
Note pela figura 18 que além da definição expressa em língua natural, também é apresentada a linguagem simbólica da congruência de triângulos e mais o apoio visual geométrico. Nas instruções para o professor há as seguintes instruções a respeito das propriedades de congruência de triângulos:

> • Se julgar conveniente, comente com os alunos que, para a congruência de triângulos, valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. ƒ Reflexiva: Todo triângulo é congruente a si mesmo. ƒ Simétrica: Se um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo A'B'C' é congruente ao triângulo ABC. ƒ Transitiva: Se um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF, e o triângulo DEF é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C' (SILVEIRA, 2018, p. 136)

Embora essa tenha sido uma relevante sugestão, não há no livro do aluno nenhum exemplo ou exercício ilustrando tais propriedades. Em seguida, são apresentados cada um dos quatro casos de congruência de triângulos, sempre com o enunciado, a representação simbólica e a representação algébrica. Embora, Silveira (2018) explore diferentes representações do conteúdo, na apresentação não sugere uma construção por meio de experimentos, manipulações e observação de padrão de comportamento e nem sugere reflexões, de modo que a apresentação de conteúdo se assemelhou a intervenções formalizantes. Também não houveram exercícios resolvidos

Ao que se refere ao se refere aos exercícios em uma lauda propões cinco exercícios, sendo dois de classificação de caso de congruência e três que envolvem argumentação e prova por meio desses casos, como indicado em Luis (2006), na seção 2. 1. 1.

Figura 20 - Exercício que envolve argumentação e prova

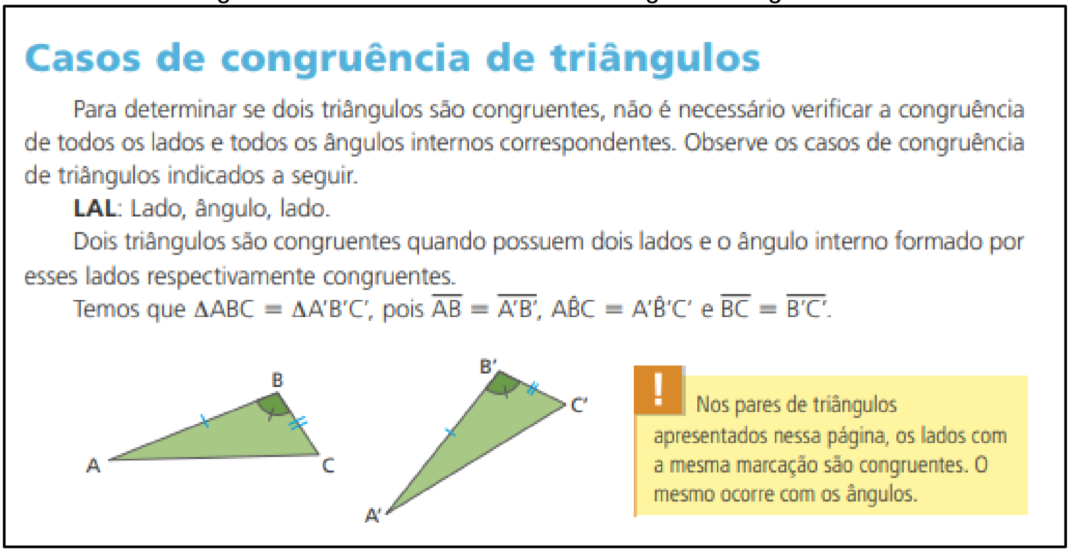


Fonte: Silveira (2018, p. 138)

Assim, concluímos que no livro didático de Silveira (2018) os exercícios se comparam a intervenções classificadas como avaliativa restritiva e avaliativa aplicativa.

Souza (2018) trata dos casos de congruência de triângulos na seção que trata de congruência de figuras. Ao enunciar cada caso de congruência de triângulos, incorre em um erro conceitual (melhor explicado na seção 3.1) ao sugerir que ser congruente é ser igual:

Figura 21 - Erro conceitual na simbologia de congruência.



Casos de congruência de triângulos

Para determinar se dois triângulos são congruentes, não é necessário verificar a congruência de todos os lados e todos os ângulos internos correspondentes. Observe os casos de congruência de triângulos indicados a seguir.

LAL: Lado, ângulo, lado.

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo interno formado por esses lados respectivamente congruentes.

Temos que $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$, pois $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

Fonte: Souza (2018, p. 133)

Na figura 20 vemos o símbolo de igualdade (=) sendo utilizado no lugar do símbolo de congruência (≅), entretanto os pares de figuras não estão na mesma posição, estando rotacionadas ou refletidas, diferente de Silveira (2018) que apresenta os pares congruentes sempre na mesma posição. A apresentação de conteúdo de Souza (2018) tem abordagem formalizante. Este autor apresenta apenas quatro exercícios que envolve os casos de semelhança de triângulos, sendo todos de abordagem avaliativa restritiva.

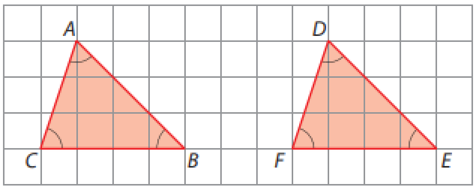
Gay e Silva (2018) a congruência de triângulos é definida de forma genérica com a congruência de polígonos, com enunciado, representação simbólica e representação geométrica em malha quadriculada, como ilustra a figura 21:

Figura 22 - Definição de congruência de polígonos

Dizemos que dois polígonos são congruentes quando atendem simultaneamente a estas duas condições:

- os lados correspondentes são congruentes;
- os ângulos correspondentes são congruentes.

Observe os triângulos na malha a seguir.



Os lados correspondentes são congruentes:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

Os ângulos correspondentes são congruentes:

$\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$

Logo, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF. Indicamos essa congruência assim:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 93)

A imagem no quadriculado sugere que todos os ângulos de cada triângulo teriam a mesma medida, podendo causar confusão, embora na linguagem simbólica represente que a congruência seja entre os pares de ângulos correspondentes.

Ao apresentar os casos de congruência de triângulos, os autores os autores fazem questionamentos que se equiparam a intervenções reflexivas, ao lado das definições/ formalizações. Os pares de triângulos congruentes adotados para ilustrar estão em posições diferentes entre si. Após a definição de cada caso é apresentado um exemplo resolvido, inclusive o caso especial para triângulos retângulos.

Em seguida são propostos cinco exercícios, dos quais dois são para reconhecimento de classificação de casos de congruência de triângulos e dois sugerem análise e argumentação. Deste modo podemos dizer que no livro didático Gay e Silva (2018) os exercícios pós-formalização se enquadram como intervenções avaliativas restritivas e aplicativas.

Giovanni Jr. e Castrucci (2018) apresenta a congruência como ideia de sobreposição de figuras, para em seguida definir congruência de triângulos por meio do enunciado, de linguagem simbólica e de pares de figuras congruentes na mesma posição. São apresentados os quatro casos de congruência de triângulos e mais dois. Há resolução de um exercício resolvido.

Nos exercícios propostos há dois dispostos como intervenções restritivas e três como intervenções aplicativas, pois necessitam de análise, argumentação e prova.

Dante (2018) apresenta a definição de congruência de triângulos como intervenção formalizante, como ilustração geométrica, simbólica e por meio de enunciado. Além disso, a apresentação visual ilustra questionamentos que se equiparam a intervenções reflexivas. São apresentados da mesma forma os quatro casos de congruência de triângulos, formalizante e reflexiva.

Em Dante (2018) são propostos cinco exercícios, os quais quatro são para classificação do caso de congruência de triângulos e um exige análise e argumentação matemática para responder, logo há exercícios que se apresentam como intervenção avaliativa restritiva e aplicativa.

Após os exercícios há três proposições, que se fossem apresentadas antes das formalizações, poderiam ser classificadas como intervenções exploratórias. A primeira propõe a aplicação dos casos de congruência de triângulos por meio de demonstração e prova para triângulos isósceles, entretanto a demonstração está feita no livro. A segunda proposta trata-se de uma questão da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas) resolvida passo a passo. Já a terceira atividade parte de um texto de história da matemática sobre geometria dedutiva e Euclides, do que são propostas três exercícios que exigem análise, equiparando-se a intervenções avaliativas aplicativas. De todo modo o professor que tenha interesse em adotar alguma dessas atividades como intervenções pré-formalizantes, tem nesse livro boas ideias para serem adaptadas pelo próprio professor de matemática.

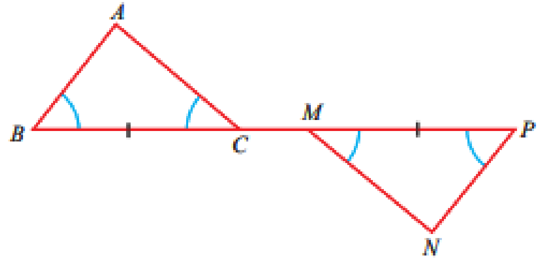
Bianchinni (2018) apresenta a definição de congruência de triângulos, com definição, linguagem simbólica e geométrica, exemplos e exercícios resolvidos. Em seguidas propõe quatro exercícios que envolvem a aplicação da definição por meio de equações com uma e com duas incógnitas, articulando com o capítulo anterior.

Os quatro casos de congruência de triângulos mais o caso especial para triângulo retângulo também é apresentado de modo essencialmente formalizante, mas os pares de triângulos congruentes estão rotacionados ou refletidos entre si. O tópico é finalizado com cinco exercícios resolvidos que envolvem questões que exigem análise e argumentação para justificar as respostas (tais como intervenções avaliativas aplicativas), elaboradas para desenvolver a habilidade (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas, haja vista que antes de falar de congruência de triângulos, o capítulo sobre triângulos iniciou falando sobre cevianas de um triângulo: “Chamamos de ceviana de um triângulo todo segmento de reta que tem como extremidades um vértice e um ponto da reta suporte do lado oposto” (BIANCHINNI, 2018, p. 161),e, apresenta os três tipos especiais de cevianas as medianas, as bissetrizes e as alturas.

No capítulo seguinte do livro didático de Bianchinni (2018), fala sobre a geometria argumentativa a partir de um texto histórico “Da Geometria empírica à demonstrativa”, e num dos subtópicos, Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas, há a apresentação de diferentes maneiras de demonstrar a solução de um problema por meio do conhecimento de congruência de triângulos, como ilustrado na figura 23.

Figura 23 - Exemplos de demonstrações.

b) Dada a figura a seguir, em que $\overline{AB} \parallel \overline{PN}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$, vamos provar que $\overline{AC} \cong \overline{NM}$.



Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{PN} \\ \overline{AC} \parallel \overline{MN} \\ \overline{BC} \cong \overline{PM} \end{cases}$

Tese $\{ \overline{AC} \cong \overline{NM}$

- **Demonstração**

Considerando os triângulos *ABC* e *NPM*, temos:

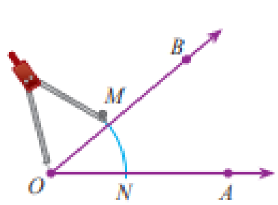
- $A\hat{B}C \cong N\hat{P}M$ (ângulos alternos internos)
- $\overline{BC} \cong \overline{PM}$ (por hipótese)
- $A\hat{C}B \cong N\hat{M}P$ (ângulos alternos externos)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos *ABC* e *NPM* são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{NM}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

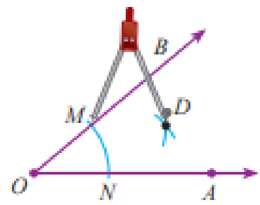
c) Vamos usar a congruência de triângulos para justificar a validade da seguinte construção geométrica: **construção da bissetriz de um ângulo**.

- **Construção**

1º) Com a ponta-seca do compasso em *O*, traçamos um arco determinando os pontos *M* e *N*.



2º) Com a mesma abertura do compasso e a ponta-seca agora em *M* e em seguida em *N*, traçamos os arcos que se cortam em *D*.

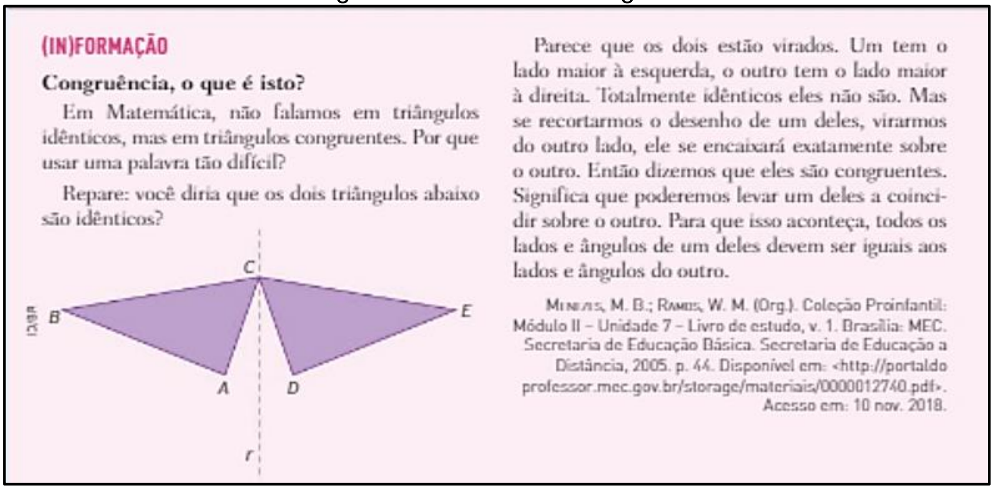


Fonte: Bianchinni (2018, p.179)

No livro didático Bianchinni (2018) tem-se um diferencial de conexão entre diferentes tópicos de matemática, que hora são objeto de estudo, ora são ferramenta para desenvolvimento de aprendizagem de outros conteúdos, além explorar as diferentes linguagens matemáticas e estimular a argumentação matemática por meio dos conteúdos apresentados.

Oliveira (2018) apresenta de forma sucinta a definição de congruência de triângulos e os quatro casos deste, isto é, uma abordagem formalizante sobre o conteúdo. Ao usar a linguagem simbólica, adotou o símbolo de igualdade para representar congruência, porém, é interessante a informação adicional que á dada ao final do conteúdo diferenciando ser idêntico de ser congruente:

Figura 24 - Idêntico x Congruente


(IN)FORMAÇÃO

Congruência, o que é isto?

Em Matemática, não falamos em triângulos idênticos, mas em triângulos congruentes. Por que usar uma palavra tão difícil?

Repare: você diria que os dois triângulos abaixo são idênticos?

Parece que os dois estão virados. Um tem o lado maior à esquerda, o outro tem o lado maior à direita. Totalmente idênticos eles não são. Mas se recortarmos o desenho de um deles, virarmos do outro lado, ele se encaixará exatamente sobre o outro. Então dizemos que eles são congruentes. Significa que poderemos levar um deles a coincidir sobre o outro. Para que isso aconteça, todos os lados e ângulos de um deles devem ser iguais aos lados e ângulos do outro.

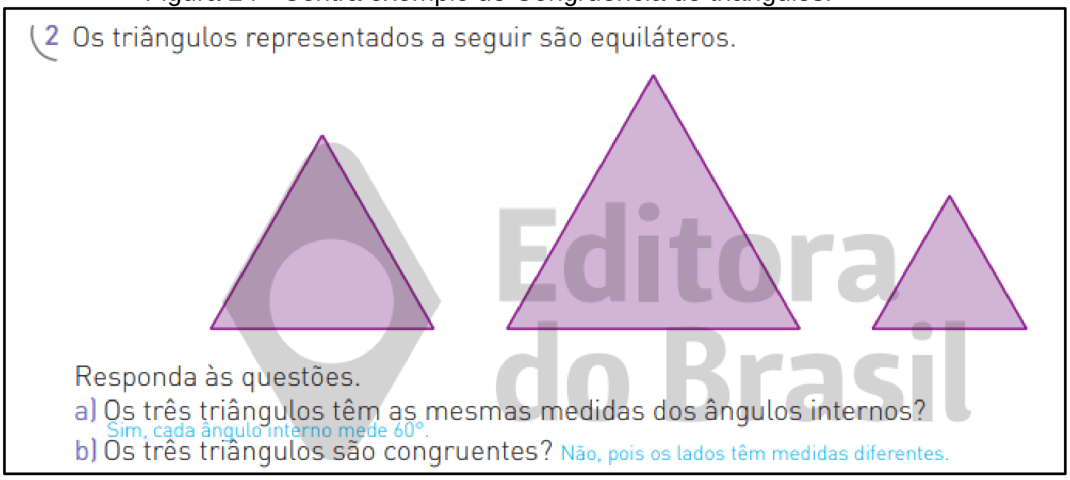
MENEZES, M. B.; RAMOS, W. M. (Org.). Coleção Proinfantil: Módulo II – Unidade 7 – Livro de estudo, v. 1. Brasília: MEC. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação a Distância, 2005. p. 44. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012740.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2018.

Fonte: Oliveira (2018, p. 106)

Os oito exercícios propostos dos quais quatro envolvem aplicação direta e reconhecimento dos casos de congruência de triângulos e os outros quatro necessitam de análise mais criteriosa e exploratória para responder sendo indicada a realização em grupo e com interação dialógica utilizando a expressão “reúna com seus colegas para explicar”.

Galdonne (2018), na apresentação do conteúdo é o que mais se aproxima de uma intervenção exploratória e reflexiva, só não o é pelo fato de ter iniciado com o enunciado da definição apenas. Em seguida, propõe que pela definição façam exemplos que exigem manipulação de régua e transferido e análise por contra exemplo, como ilustrado na figura 24.

Figura 24 - Contra exemplo de Congruência de triângulos.


2 Os triângulos representados a seguir são equiláteros.

Responda às questões.

a) Os três triângulos têm as mesmas medidas dos ângulos internos? Sim, cada ângulo interno mede 60°.

b) Os três triângulos são congruentes? Não, pois os lados têm medidas diferentes.

Fonte: Galdonne (2015)

A figura 24 ilustra um contra exemplo proposto no livro que é necessário fazer o estudante lembrar o que seria um triângulo equilátero no que diz respeito aos lados e ângulos. Interessante que Galdonne não se prende a linguagem simbólica, se prende as percepções intuitivas e a definição que foi enunciada no início, porém, como as proposições exploratórias e reflexivas vieram após a formalização, se enquadram como intervenções avaliativas aplicativas.

Ao apresentar os casos de congruência de triângulos, Galdonne (2015), apresenta os quatro casos, sem o caso especial, com representação simbólica, algébrica e definição enunciada, sem exemplos ou exercícios resolvidos.

Sobre os exercícios propostos, propõe três para serem realizados em grupos com apoio de papel quadriculado e com argumentação matemática, por meio de questionamentos. Em seguida tem mais treze exercícios propostos, dos quais quatro é necessária a análise, a justificativa de resposta, a manipulação em papel quadriculado. Assim, concluímos que no livro didático Galdonne (2015), traz, na perspectiva das UARC's, exercícios que se equiparam as intervenções avaliativas dos tipos restritivas e aplicativas.

Para esta pesquisa todos os nove livros didáticos analisados trouxeram importantes contribuições e inspirações para a elaboração da sequencia didática pretendida. Embora tenhamos feito uma análise comparativa com a teoria de Cabral (2017), nosso intuito foi apenas de buscar exemplos de abordagens possíveis de se encaixar no aporte que adotamos.

Sobretudo, extraímos como relevante a abordagem conectada da Congruência de Triângulos com outros conteúdos, as possibilidades e desenvolver a interação dialógica e argumentação matemática por meio desse objeto matemático. Entretanto, para futuras pesquisas, para elaboração de livros didáticos e para escolha destes pelas escolas públicas, evidenciamos como relevante nesta análise sobre livros didáticos, considerar ao que tange o ensino de geometria:

- Pares de figuras congruentes apresentadas em diferentes posições para dar uma ideia menos estática da geometria;
- A diagramação com lembretes de conhecimentos como recurso visual e cognitivo;
- Destacar a diferença entre ser idêntico e ser congruente (Vide Gauss em 3.2);
- Adoção de elementos da história da matemática como recurso didático pré ou pós formalização de conhecimentos;

- Estímulo de produção em grupo com argumentação em língua natural, simbólica, geométrica e algébrica.

Assim, consideramos que esta análise de livros didáticos trouxe importantes contribuições tanto para esta pesquisa, quanto para outras pesquisas sobre ensino de geometria ou mais especificamente de triângulos e congruência de triângulos.

Na seção que segue apresentamos uma pesquisa diagnóstica de campo realizada com estudantes sobre a aprendizagem de congruência de triângulos.

2. 3 DIAGNÓSTICO COM ESTUDANTES

Nesta seção, apresentamos os resultados de uma pesquisa sobre aprendizagem de congruência de triângulos, buscando investigar quais as principais dificuldades ou lacunas mais comuns na aprendizagem desse objeto matemático para estudantes da rede pública estadual de Belém-PA.

Como o conteúdo Congruência de Triângulos é ministrado para alunos que cursam o 8º ano do Ensino Fundamental, nossa pesquisa se deu com estudantes egressos dessa série, isto é, do 9º ano, para verificarmos o que lembravam, o que aprenderam e quais as habilidades curriculares desenvolvidas sobre o conteúdo. Para tanto nos apoiamos nas diretrizes curriculares de Brasil (2017) dá destaque ao ensino de geometria por envolver o estudo de um amplo conjunto de conhecimentos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Ainda que haja esse destaque, nossa experiência ensinar a vários anos na rede pública estadual da cidade de Belém do Pará verificamos a dificuldade da aprendizagem dos estudantes por terem pouco contato com a geometria, constatação reforça em nossos estudos apresentados na seção 2.1. Ainda falando sobre o destaque dado Em Brasil (2018), a Congruência de Triângulos também é evidenciada como importante para o desenvolvimento do raciocínio:

> No Ensino Fundamental - Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas,

> identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança [...]de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo..(BRASIL, 2017, p. 272)

Segundo Eves (2011, p. 169) por volta de 300 a. C. Euclides, matemático grego, escreveu Os Elementos, As 48 proposições do Livro I se distribuem em três grupos. As primeiras 26 tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. Embora o conteúdo em tela esteja posto e definido há séculos, ainda nos dias atuais é um desafio fazer a aproximação didática desse saber científico com o saber escolar.

Na tradução da publicação de Duval (2022) que aborda as condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Categoriza quatro entradas que articulam “o ver e o dizer” no desenvolvimento do pensamento geométrico as quais sejam: Botanista, agrimensor-geômetra e construtor, inventor-faz tudo:

Figura 25 - O modo de compreensão e de conhecimento - maneira de ver.

	BOTANISTA	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR faz-tudo
ESTATUTO EPISTEMOLÓGICO	**CONSTATAÇÃO** perceptiva imediata: “isso se vê sobre...”	**CONSTATAÇÃO** resultante da leitura de um instrumento de medida	**RESULTADO** *de um procedimento de construção*	**RESULTADO** de uma decomposição da figura de partida em unidades figurais que a reconfiguramos em outra.
FONTE COGNITIVA DA CONFIANÇA	**Superposição** efetuada no olhar ou utilizando um modelo	**Comparação** dos valores numéricos que foram obtidos empiricamente	**Necessidade interna** para a sequência das operações do procedimento de construção	**Invariância das unidades figurais** que são referentes da transformação da figura de partida.

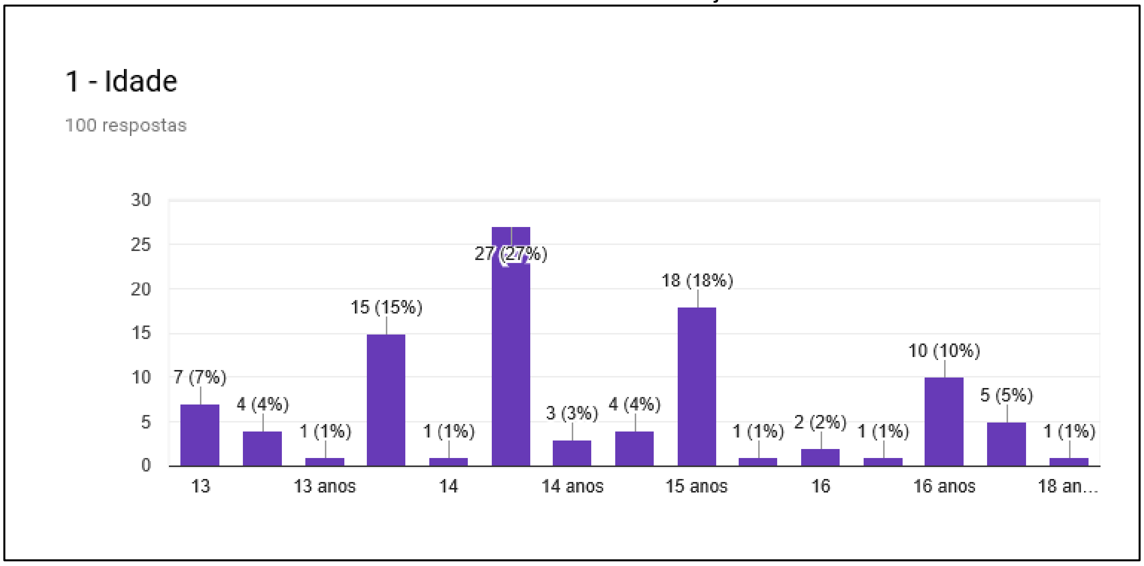
Duval (2022, p. 10)

Duval (2022) ainda assevera que o desconhecimento dessas quatro entradas e da complexidade de articulação entre ver e dizer podem criar obstáculos que, a médio e longo prazo vão se revelar intransponíveis para o progresso dos alunos. Percebemos que diante dessas informações sobre o que poderia causar dificuldade de aprendizagem em geometria e sobre essas formas de ver e dizer nos processos de desenvolvimento de conhecimentos geométricos, que nosso aporte estruturante por meio de intervenções se propõe a desenvolver tais entradas definidas por Duval (2022).

Assim, de alguma forma por meio desta pesquisa com estudantes queremos investigar sobre a aprendizagem de Congruência de triângulos as suas percepções sobre o conteúdo, em outras palavras, a sua maneira de ver e dizer. Para Barbosa (2003), o processo de abstração é um estágio da aprendizagem da Geometria que pode ser alcançado por meio de ações sobre o objeto para a compreensão de seu todo bem como de suas partes. Para que possamos extrair informações sobre o ensino de Congruência de triângulos, inicialmente adotamos como instrumentos um questionário sócio-educacional, com os resultados apresentados a seguir.

Nesta pesquisa diagnóstica com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, aplicamos inicialmente um questionário sócio-educacional (Apêndice B) com 100 estudantes de uma escola pública de Belém-PA que nos recebeu por meio de um ofício emitido pelo programa de pós-graduação ao qual somos vinculados. Os estudantes participaram de forma anônima e consentiram participar por meio de um termo de consentimento livre esclarecido (Apêndice A). A seguir a análise de alguns dados coletados.

Gráfico 1 - Idade dos sujeitos.



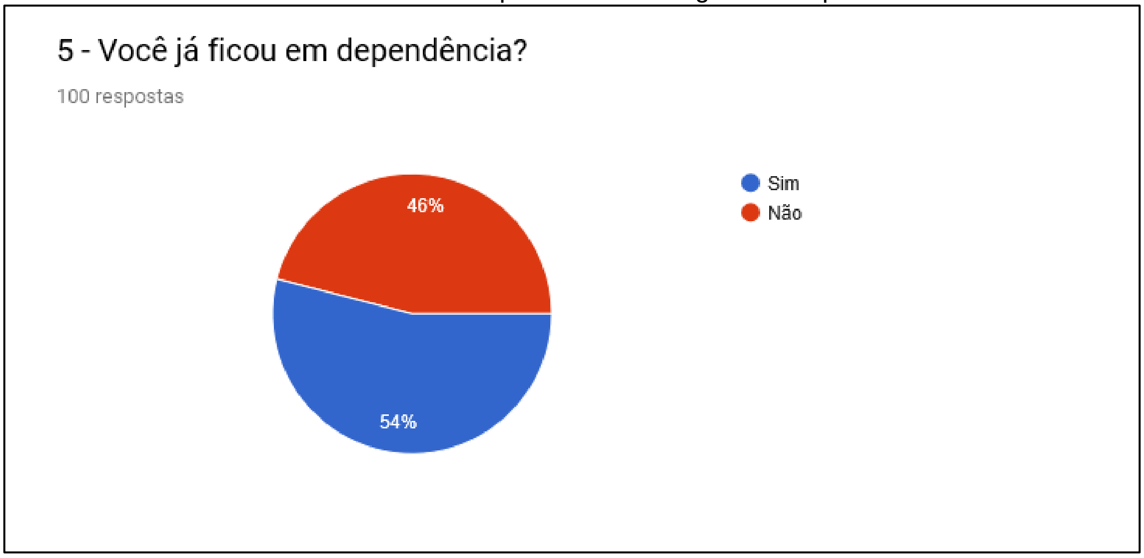
Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Do gráfico 1, temos que existe entre os sujeitos uma discrepância de idade variando entre 13 e 18 anos, sendo que tem idade entre 16 e 18 anos são do ensino noturno e apresentam elevada distorção idade série. Tendo em vista que há em uma mesma turma estudantes entrado na pré-adolescência e outros na fase adolescente, a dificuldade do professor de matemática de planejar aulas para um público de diferentes fases cognitivas num mesmo episódio didático é mais complexo. Lima, Peoersh, Emmel (2020, p. 9) apontam distorção idade série como consequência da reprovação em matemática, que ocorre por diversos motivos: não gosta de matemática (principal motivo), dificuldade de aprender, tempo de estudo, pouco interesse, metodologia do professor, baixa frequência nas aulas.

No nosso caso ainda havia um agravante, os sujeitos haviam acabado de retornar para as aulas presenciais pós pandemia. Logo, alguns desses alunos, abandonaram a escola em 2020 e só retornara no segundo semestre de 2021.

Perguntamos se os estudantes ficaram em dependência, ao que 54% nos respondeu ter ficado em dependência em alguma disciplina. Logo não é somente a dificuldade matemática responsável pelo fracasso escolar de alguns desses sujeitos como mostra o gráfico 2.

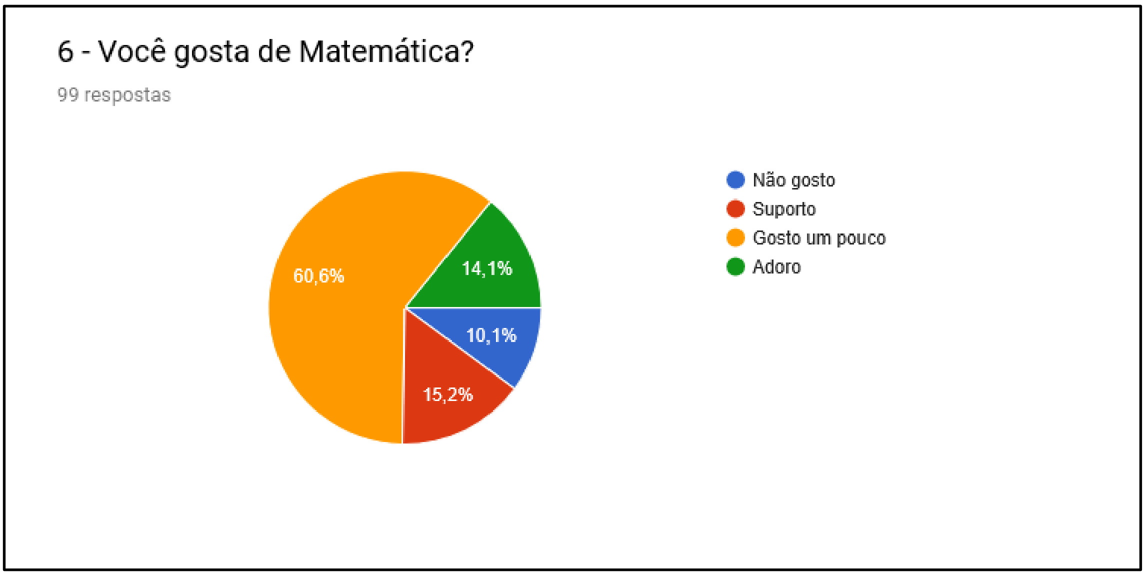
Gráfico 2 - Dependência em alguma disciplina



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Também perguntamos se os estudantes gostam de matemática, para o que apenas 10,1% afirmou não gostar, sendo que entre gosto um pouco ou adoro somam 64,7%, como ilustra o gráfico 3.

Gráfico 3 - Gosta de matemática

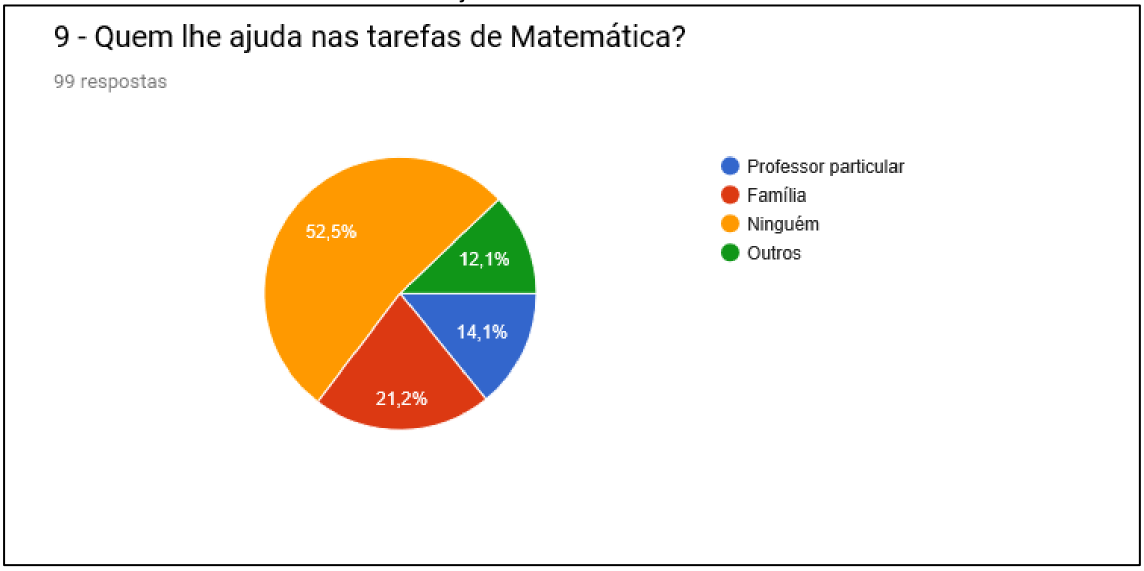


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Os dados sobre gostar de matemática nesta pesquisa são positivos, o nos leva a inferir que os prefessores de matemáticas desses sujeitos têm se esforçado para criar uma relação de afetividade pela disciplina, haja vista que “o papel do professor é de extrema importância na hora de ajudar seus alunos a criarem gosto pela Matemática e conseguirem melhores resultados, consequentemente apresentando menos dificuldades” (LIMA, PEOERSH, EMMEL, 2020, p. 3).

Embora tenhamos evidenciado o esforço dos professores por meio dos dados coletados, temos o indicativo de que falte apoio da família para os estudantes sujeitos da pesquisa, pois 52, 5% deles afirmam que ninguém os ajude e ajuda da família apenas 21,2 % recebem ajuda nos estudos em matemática, como ilustramos no gráfico 4.

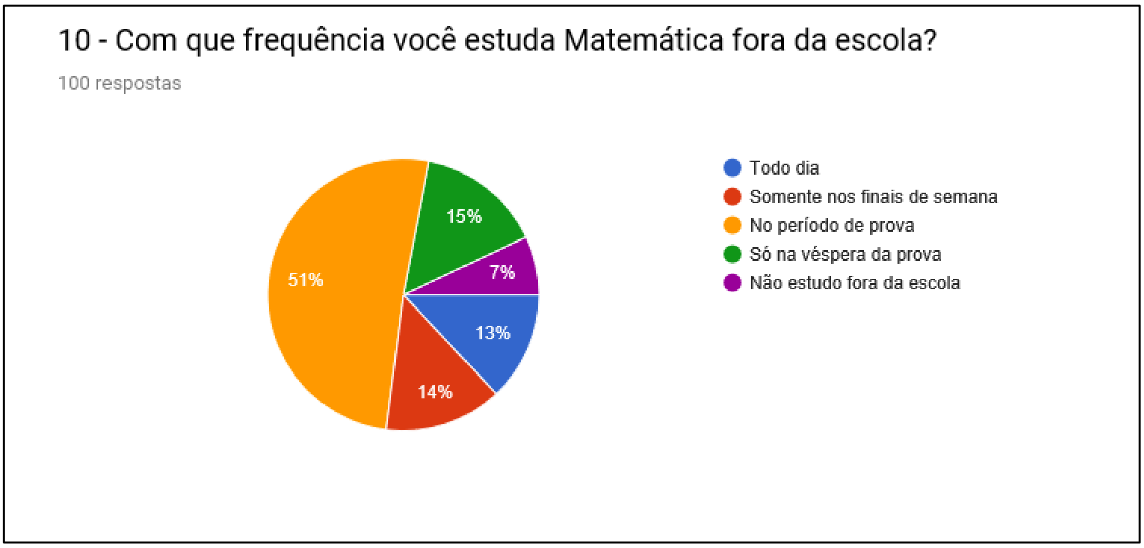
Gráfico 4 - Ajuda nas tarefas de matemática



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Outro ponto agravante apontado aqui é a frequência em que estudam matemática fora da escola, para o que 66% dos sujeitos responderam estudar apenas no período de prova ou véspera de prova, embora apenas 7% afirme não estudar fora da escola, como pode ser verificado no gráfico 5.

Gráfico 5 - Estuda matemática fora da escola.

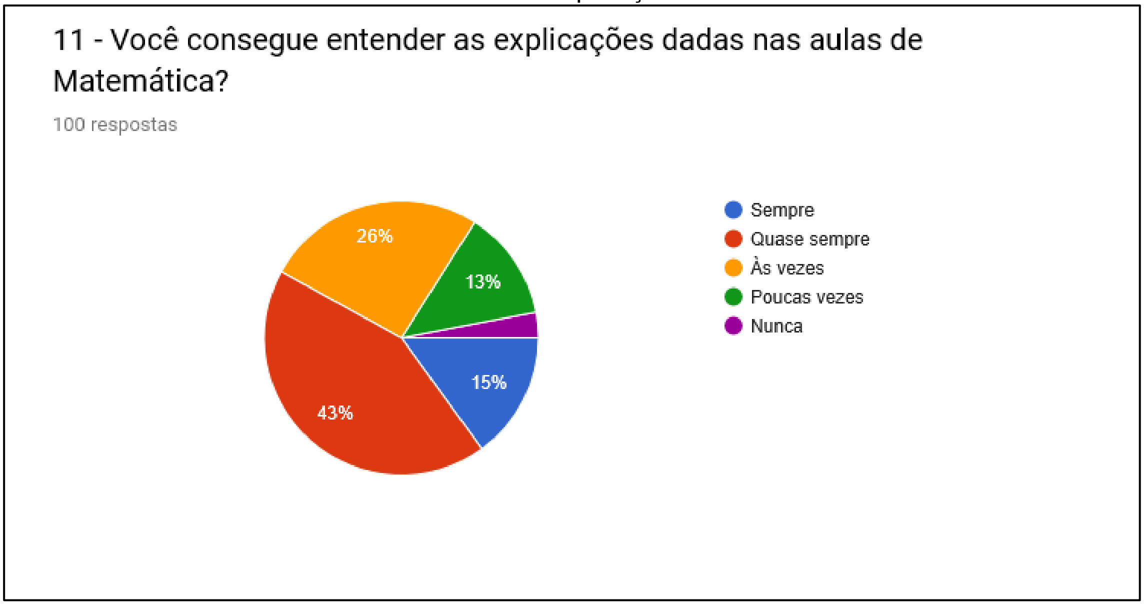


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Inferimos pelos resultados dos gráficos 4 e 5 que há desiteresse dos estudantes em estudar matemática, o que pode estar causando a elevada frequência de dependência na disciplina.

Saindo da conduta escolar dos sujeitos, passamos para suas percepções sobre a atuação de seus professores nas aulas de matemática. Na primeira análise temos que 58% dos estudantes sempre ou quase sempre entendem a explicações dadas nas aulas de matemática

Gráfico 6 - Entende as explicações de matemática

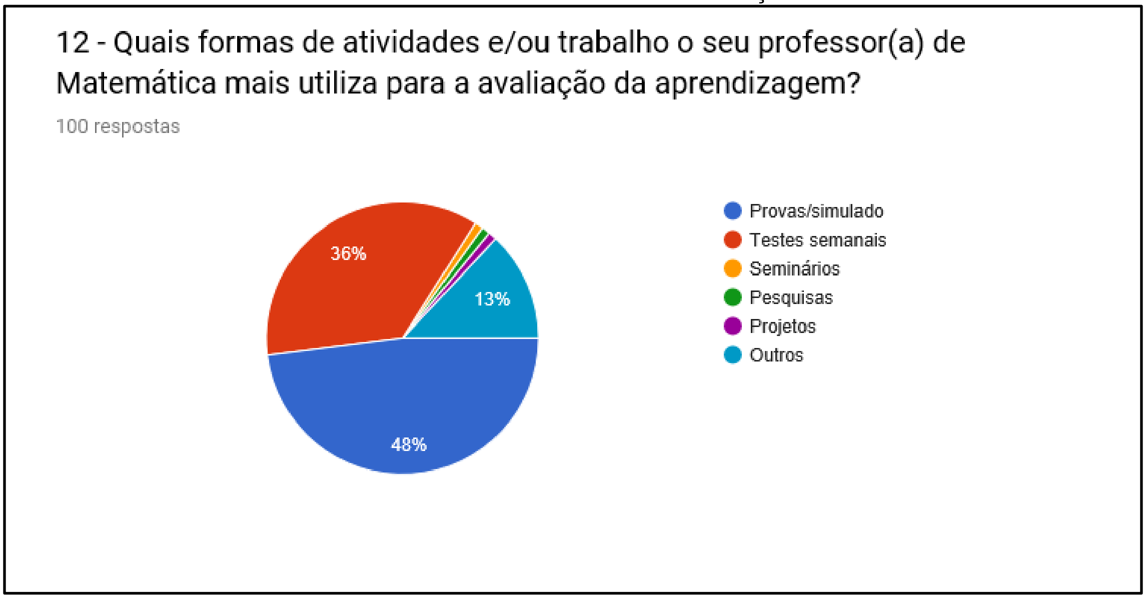


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

O resultado ilustrado no gráfico 5 é um dado positivo quanto a abordagem comunicativa do professor de matemática, o que é elemento de análise de nossa pesquisa sob a óptica da análise do discurso apresentada na seção 1.3.

Sobre a forma de avaliação da aprendizagem realizada pelos professores de matemática desses sujeitos, destaca-se provas e simulados com 48% e testes semanais com 36% (gráfico 7).

Gráfico 7 - Formas de avaliação

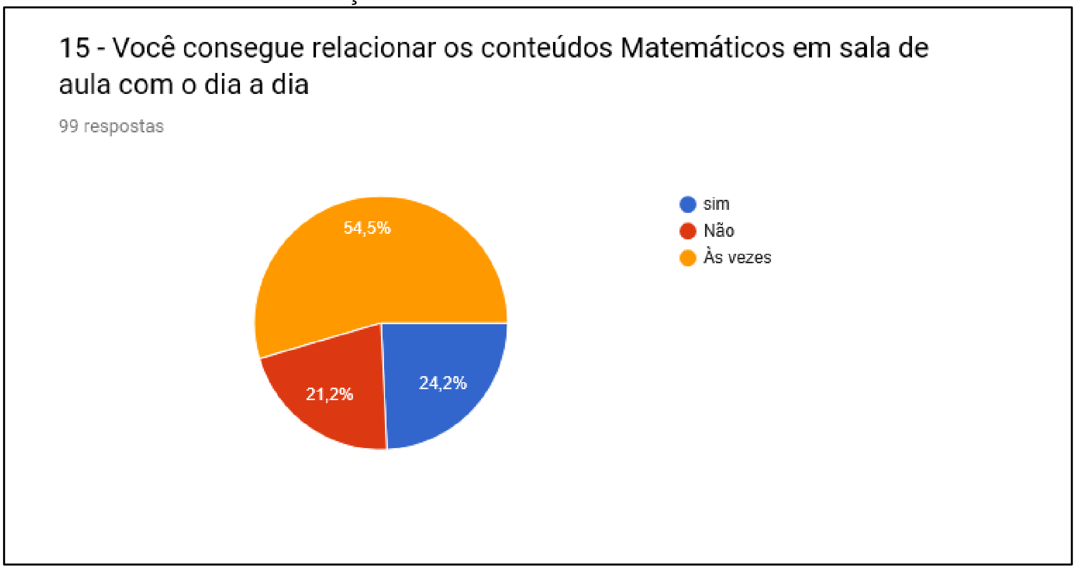


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Com relação ao tipo de avalição predominante, temos que considerar as orientação curriculares no que dizem respeito ao que deve ser avaliado no desenvolvimento da aparesndizagem do educando quanto a argumentação matemática, haja vista que:

> nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada.(BRASIL, 2017, p. 299)

Gráfico 8 - Relação do conteúdo de matemática com o dia a dia

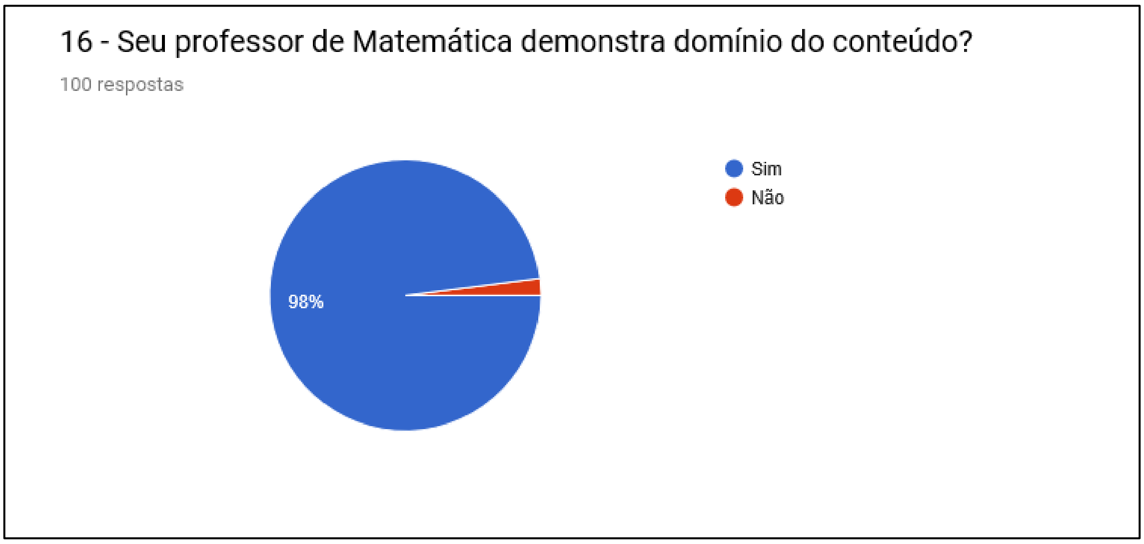


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Pelo gráfico 8 temos que os sujeitos responderam se o professor de matemática consegue relacionar os conteúdos de matemática com o dia a dia para o que 24,2% afirmam sim e 54,5% afirmam as vezes. Esse é um dado importante e um resultado positivo, pois “a Matemática não deve ser apresentada como uma disciplina fechada e desligada da realidade” (LIMA, PEOERSH, EMMEL, 2020, p. 3).

Sobre o domínio de conteúdo 98% os sujeitos afirmaram que seu professor de matemática demonstra domínio de conteúdo. Esse é um resultado positivo sobre a qualidade profissional docente no estado do Pará. Cabral (2017) enfatiza o papel do professor como sujeito epistêmico, aquele que domina o conteúdo a ser ministrado. Assim o gráfico 9 ilustra essa habilidade profissional.

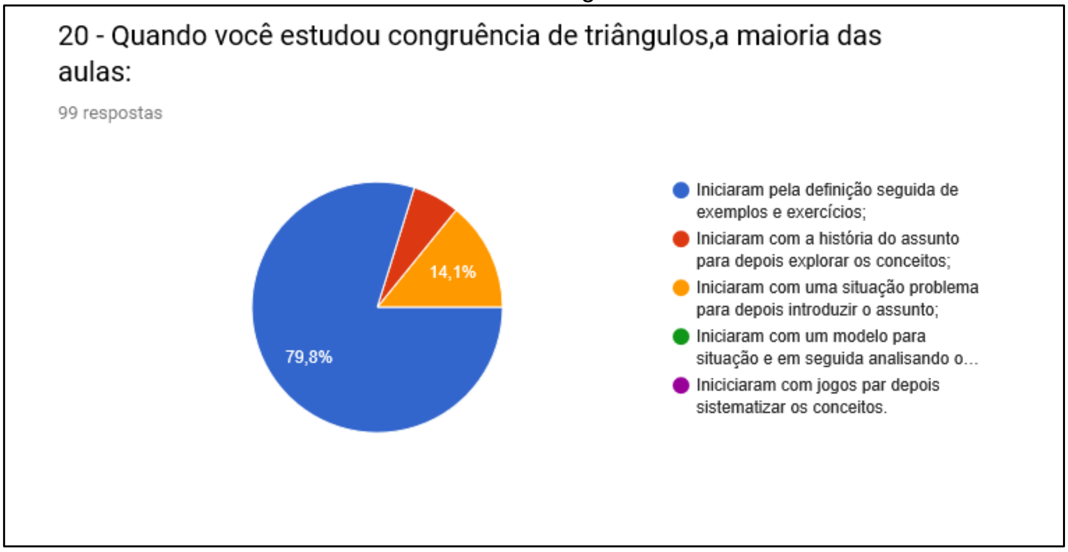
Gráfico 9 - Domínio de conteúdo



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Tratando especificamente sobre o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos, quando perguntados se haviam estudado congruência de triângulos, 68,4% responderam que sim e 31,6% responderam que não, sendo assim a maioria lembra de ter estudado esse conteúdo. O gráfico 10 ilustra os dados sobre a forma como os a Conguência de Triângulos foi ministrada para os sujeitos.

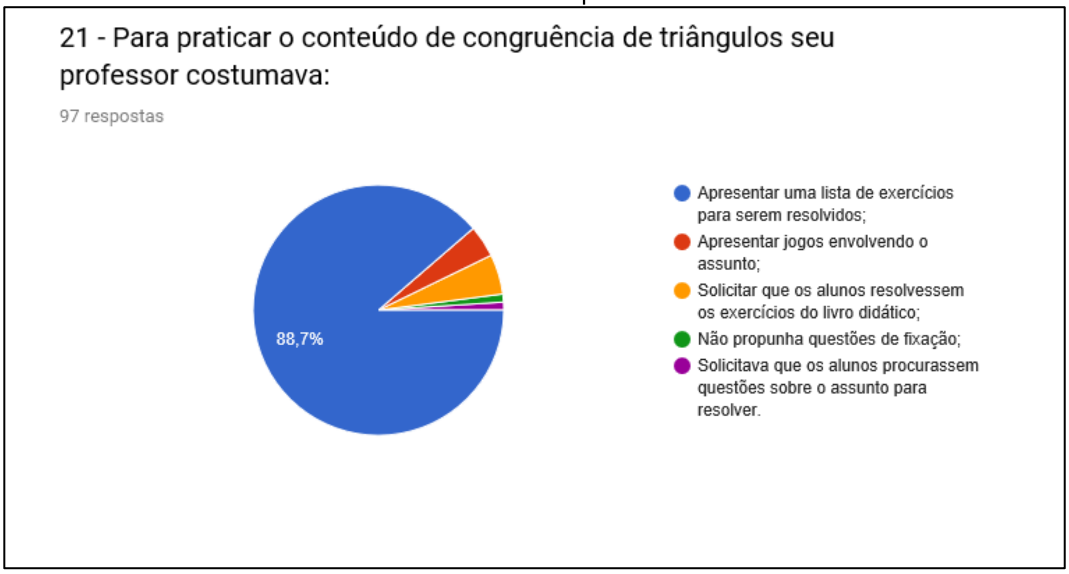
Gráfico 10 - Metodologia de ensino.



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Pelo gráfico 10, temos que a metodologia adotada pelos professores dos sujeitos é predominantemente a que inicia pela definição, seguida de exemplos e exercícios, 79,8%. Esse resultado não nos surpreende tendo em vista que o principal recurso didático utilizado na rede pública de ensino, o livro didático, também segue essa mesma sequência e metodologia de desenvolvimento do ensino, como vimos na seção 2. 2. Além disso, nenhum sujeito afirmou que seu professor tenha usado modelagem ou jogos em suas aulas.

Gráfico 11 - Forma de praticar os conhecimentos.

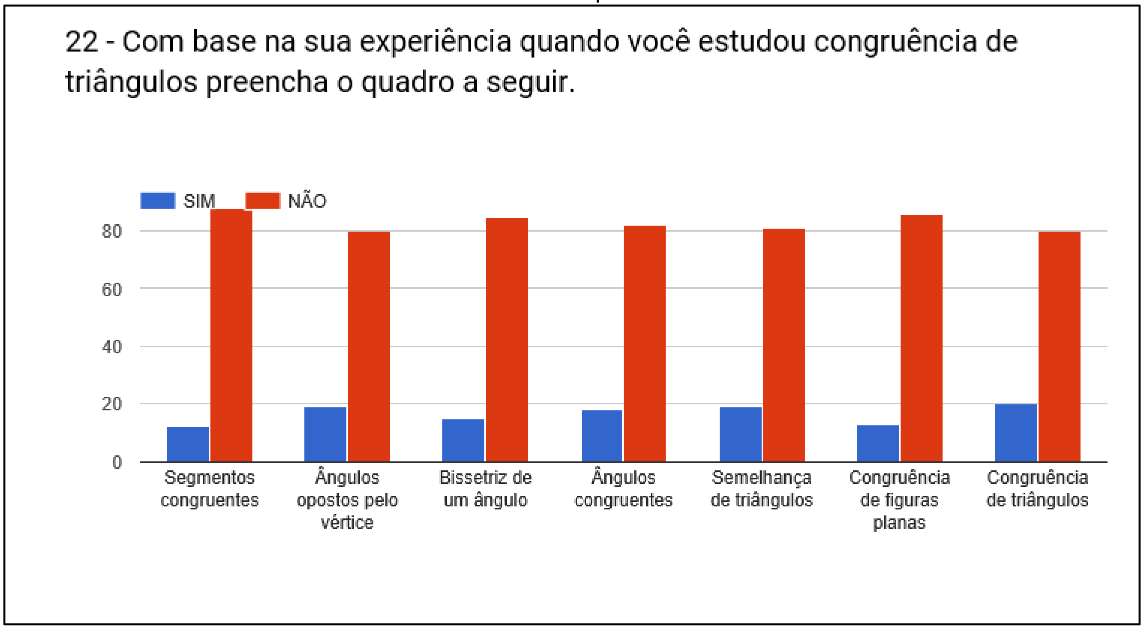


Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

O gráfico 11 ilustra como os professores dos sujeitos costumam praticar o conteúdo congruência de triângulos, para o que 88,7% dos sujeitos que responderam, afirmam ser lista de exercícios. A lista de exercício é sempre uma alternativa prática, entretanto, pelo que defende nossos aportes teóricos (Capítulo 1) e alguns autores de nossa revisão de estudos (seção 2. 1. 2) é importante promover a interação entre os alunos nas resoluções, as questões podem envolver aplicação direta do conteúdo evoluindo para questões mais elaboradas que envolvam análise, argumentação e uso de diferentes representações.

Para avaliar o grau de dificuldade dos sujeitos, também foram perguntados sobre os tópicos que envolvem Congruência de triângulos que eles lembravam e o nível de dificuldade percebida por eles, para isso preencheram um quadro também disponível no apêndice B.

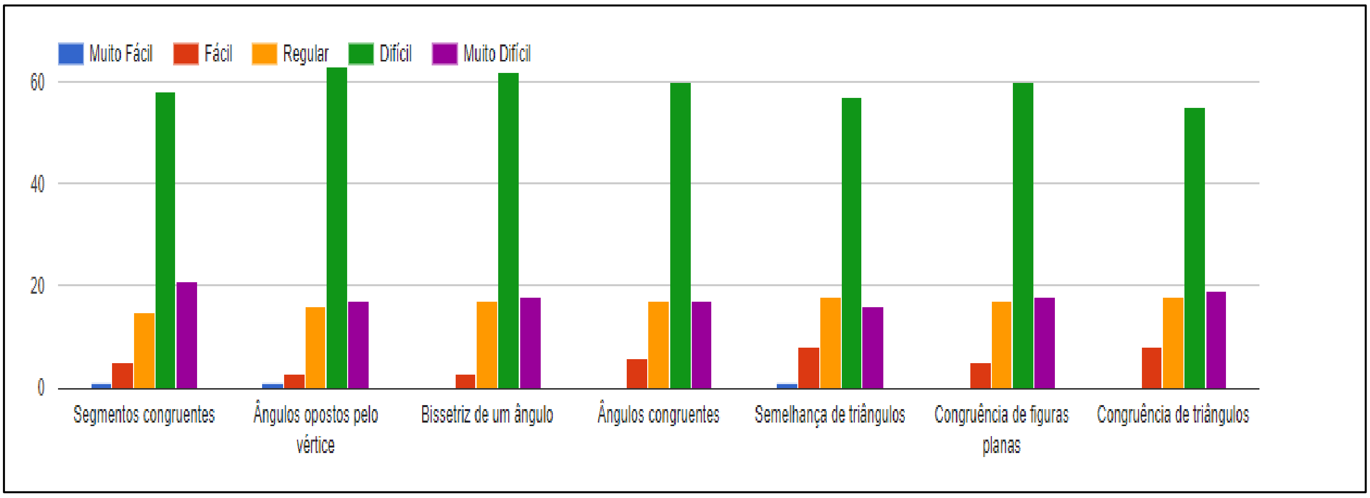
Gráfico 12 - Tópicos estudados.



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

O gráfico 12, apresenta os resultados sobre os tópicos estudados que são circunscritos ao conteúdo Congruência de triângulos, os quais todos menos de 20% dos estudantes se lembraram se haviam estudado. Temos pelo gráfico 13, que dos que afirma ter estudado em torno de 60% consideram de muito difícil aprendizagem todos os tópicos perguntados aos sujeitos.

Gráfico 13- Dificuldade em aprender os tópicos.



Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Do gráfico 13, percebemos que o pouco tempo dedicado ao estudo de matemática e pouca ajuda nos estudos pode ter interferido na sedimentação de conhecimentos, embora os estudantes tenham afirmado, em sua maioria, gostar de matemática e da conduta didático pedagógica de seus professores de matemática. O que nos leva a inferir que a motivação é um ponto relevante para o sucesso na aprendizagem em matemática.

> A motivação ou a falta dela tem papel marcante pelo gosto ou desgosto da disciplina de Matemática; essa motivação pode vir dos professores e da escola. Os professores que utilizam de aplicações práticas em suas aulas e atividades que mobilizem para o conhecimento estimulam seus alunos a estudar Matemática. [...] O objetivo é que o professor procure, na medida do possível, despertar no estudante a curiosidade, tornando sua aula um objeto de conhecimento" (LIMA, PEOERSH, EMMEL, 2020, p. 5).

Isso significa que ainda é necessário mais estímulos por meio de atividades práticas e que agucem a curiosidade dos sujeitos e eleve a sua motivação em participar das aulas e dedicar tempo em casa para aprimoramento da aprendizagem de conteúdos.

Após aplicação do questionário, os sujeitos também realizaram um teste disponível no apêndice C. Tratava-se de 10 questões que envolvem os tópicos que os sujeitos foram questionados sobre sua percepção de dificuldade. Esse teste foi aplicado com apenas 47 sujeitos e quadro a seguir apresenta os acertos por questão.

Quadro 9- Acertos no teste

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Acertos	31	11	2	2	2	1	4	0	0	0

Fonte: Dados da pesquisa de campo (2021)

Percebemos do quadro 9 o baixo rendimento sobre os conhecimentos que envolvem a Congruência de Triângulos. As questões que nenhum estudante acertou são as que estabelecem conexões com outros conteúdos que envolve o estudo de triângulos, o que reforça a necessidade que indicamos na seção 1.3 sobre as consequências de um ensino de matemática fragmentado e desconectado de outros conteúdos.

O fato de os estudantes pouco lembrarem dos conteúdos revela o pouco contato que os estudantes têm com a geometria no Ensino Fundamental de modo a não conseguirem estabelecer um pensamentos geométrico que estabeleça articulação entre o modo de ser e dizer disposto por Duval (2020) no início desta seção.

Deste diagnóstico com estudantes extraímos importantes elementos a serem considerados na elaboração de nossa sequencia didática, especialmente ao que a tange a motivação por estudar matemática e ao desenvolvimento cognitivo geométrico sobre Congruência de Triângulos.

No capítulo a seguir apresentamos um estudo histórico e epistemológico sobre o objeto matemático Congruência de Triângulos.

3 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Este capítulo foi construído para atender o critério de nosso aporte teórico quanto a consciência epistêmica e algorítmica desejada do professor de matemática sobre o objeto que ensina. No nosso caso o aprofundamento é sobre Congruência de Triângulos e os assuntos circunscritos.

Inicialmente fazemos uma abordagem histórica por meio do Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022a) e em seguida apresentamos as formalizações sobre as definições e propriedades que envolvem o estudo de Congruência de Triângulos.

3.1 GAUS E A CONGRUÊNCIA

Para investigar como se deu a constituição do conceito de congruência até chegar a definição de congruência de triângulos, adotAMOS, a partir de uma base bibliográfica, como metodologia para elaboração de um texto, o diagrama-orientador proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022a, 2022b), ou seja.

> O diagrama metodológico orientador destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada estabelecendo conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, explora os conteúdos a partir da produção de um personagem, conectando esse personagem a alguns contemporâneos seus, adotando como referência a tríade contextual nos aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-cientifico. (CHAQUIAM, 2020, p. 198)

Assim, ao elaborarmos este texto visamos nosso aprimoramento sob os pontos de vista conceitual, epistemológico e didático, e de quem nos lê, sobre congruência, para elaborarmos uma fonte de possibilidades de uso como recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos que envolvem o conceito de congruência e como forma de colaborar na aprendizagem desse conceito.

O personagem eleito para esta investigação foi o matemático, físico e astrônomo alemão Karl Friendrich Gauss (1777-1855). “Ele foi o grande introdutor da congruência” (ROCHA, 2021, p. 5). Segundo Roque (2012, p. 381), Gauss foi professor da Universidade de Göttingen até sua morte, em 1855, onde desenvolveu ensino e pesquisa e influenciou os trabalhos Dirichlet e Riemann que juntos promoviam uma visão conceitual e abstrata da Matemática.

Embora os citados matemáticos tivessem um olhar sobre o conceito de congruência sob a perspectiva do ensino e da pesquisa, suas bases epistemológicas e filosóficas tiveram influência das obras de Euclides, como *Elementos*, onde “aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nessas obras os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos” (EVES, 2011, p. 173). As ideias revolucionárias de Gauss e seus pupilos do século XIX contribuíram para a criação da Teoria da Relatividade atribuída a Albert Einstein em 1905.

Justificando a temática pelo potencial didático pedagógico para o ensino de matemática, Brasil (2017, p. 269) aponta como competência reconhecer a Matemática como ciência humana fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também assevera em Brasil (2017, p. 274) que saber aplicar as condições necessárias e suficientes para ocorrência de triângulos semelhantes ou congruentes contribui para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo. Embora os norteadores educacionais coloquem a história e ensino de congruência em local de destaque no ensino de Matemática, revisões de estudos como a realizada por Mendonça (2021) apontam outra realidade:

> Pesquisadores da área apontam que, ao longo da trajetória da educação no Brasil, o quase abandono da Geometria nos currículos interferiu nos processos de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática. Apresentando como reflexo, docentes e discentes com conhecimentos insatisfatórios e grandes dificuldades em explorar situações envolvendo conceitos geométricos e correlacioná-los com outros conteúdos matemáticos.[...] Essas dificuldades dos discentes ao estudarem assuntos da Geometria aparecem desde a educação básica até o ensino superior, por isso há importância de fazer análises reflexivas sobre a maneira de ensinar trazendo atividades diversificadas e inovadoras com o objetivo de melhorar a qualidade de ensino desse campo do saber (MENDONÇA, 2021, p. 43)

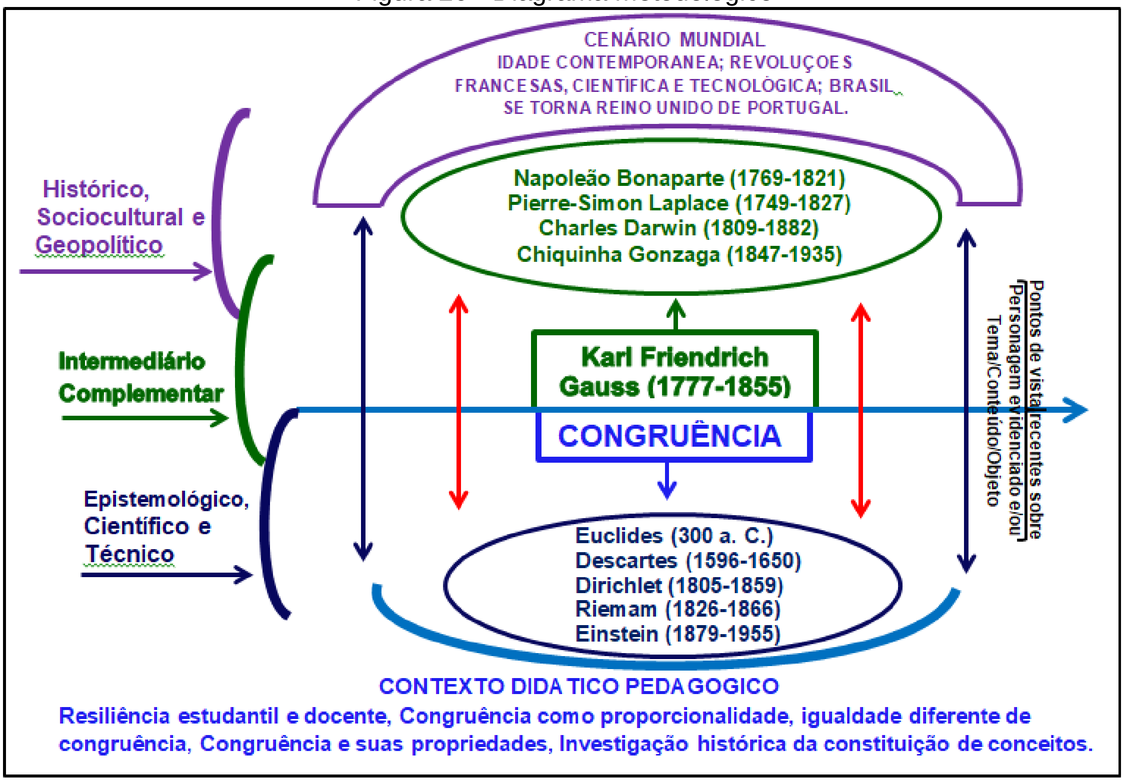
Em relação a essa análise reflexiva sobre maneira de ensinar de forma diversificada e inovadora, Chaquiam (2022a, p. 21) defende que o diagrama-metodológico, adotado nesta pesquisa, pode ser uma maneira de contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática, por entrelaçar história e conteúdos de matemática e por balizar a elaboração de textos com potencial didático. E assim, para contrapor aos problemas nos processos de ensino e de aprendizagem continuamente revelados em avaliações realizadas pelos órgãos governamentais.

Esta seção constituiu-se segundo instruções de Chaquiam (2022b, p. 1237-1238), começa pelo contexto histórico, sociocultural e geopolítico em torno de Gauss, para delimitação em tempo e espaço. Em seguida, no contexto intermediário complementar apresentamos os personagens contemporâneos de diferentes áreas do conhecimento. Por fim, no contexto epistemológico, científico e técnico apresenta-se a elementos biográficos e profissionais sobre Gauss e de contemporâneos da área da Matemática e suas contribuições para o desenvolvimento do conceito de congruência, visando elencar potencialidades didático-pedagógicas sob diferentes pontos de vista e possíveis desdobramentos ou contribuições.

3. 1. 1 Contexto histórico, sociocultural e geopolítico

Segundo Chaquiam (2020, p. 205) o contexto sociocultural contempla, a partir do personagem central, questões históricas e culturais mais abrangentes tendo em vista localizar o leitor a partir do personagem e de seus contemporâneos dentro do contexto pluridisciplinar. Para ilustração desse contexto e dos demais, apresentamos a figura 26.

Figura 26 - Diagrama metodológico



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2022b)

No contexto em que Karl Friendrich Gauss (1777-1855) viveu na Alemanha dos séculos XVIII e XIX e desenvolvia seus estudos na área da Matemática, os Estados alemães vivenciaram cinco guerras contra os exércitos da França revolucionária e napoleônica, sendo que, em 1812, Napoleão foi derrotado na campanha da Rússia. Após isso, a Europa foi redesenhada por meio do Congresso de Viena (1814-1815), de modo que o Sacro Império Romano-Germânico, com mais de 240 estados, foi substituído pela Confederação Germânica, formada por 39 estados representados na Dieta de Frankfurt, dentre os quais, constava estado da Baixa Saxônica e por seguinte a cidade de Göttingen, cidade conhecida como o coração da sabedoria alemã, por ser uma cidade universitária, onde Gauss permaneceu até sua morte em 1855. Ainda houve revoluções liberais de 1830 e 1848 em Paris que alcançaram a Baviera, a Prússia e o sudoeste da Alemanha.

No contexto local que Gauss vivenciou é possível trazer discussões no âmbito do ensino a respeito da disciplina e da resiliência para estudar mesmo em condições hostis e pouco favoráveis a aprendizagem, como a vivenciada em 2020 e 2021 durante a pandemia de COVID-19, que dificultou a relação escola e estudantes do mundo inteiro. A curiosidade e a capacidade investigativa levaram Gauss a fazer descobertas ainda na infância e o colocaram na condição de professor universitário e precursor da Matemática que hoje ensinamos na escola. A história da matemática, neste sentido, revela que as habilidades didático-pedagógicas do professor de matemática são resultado, em boa parte, de sua conduta como estudante.

O século XVIII marca o fim da Idade Moderna e o início da Idade Contemporânea. Além disso, é nesse período que transformações políticas e ideológicas ocorrem em todo o mundo. No século XIX, segundo Jorge e Souza (2019, p. 3), a matemática e a física ampliaram o horizonte dos conhecimentos adquiridos em todos os ramos da ciência, o que proporcionou uma completa transformação e utilizações do vapor e da eletricidade, o progresso tecnológico.

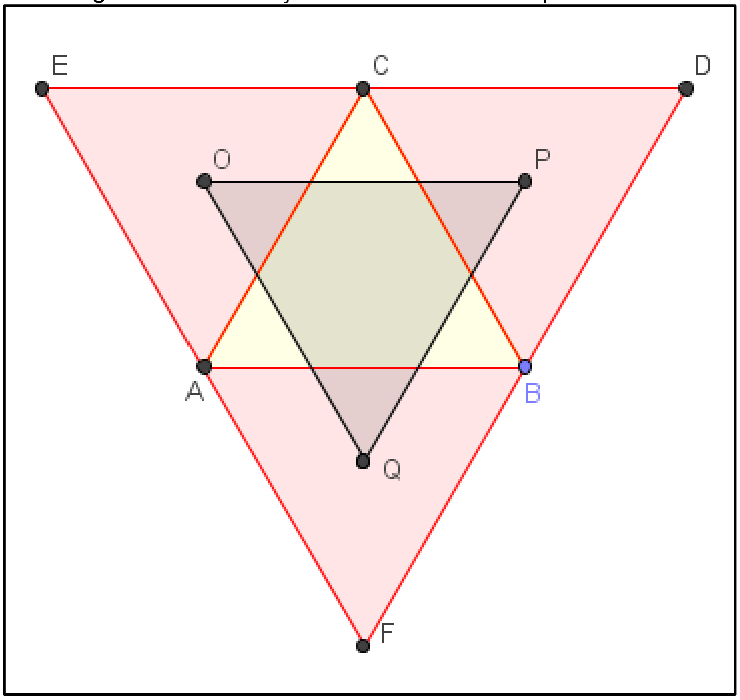
No Brasil do século XVIII, na sociedade brasileira também crescia o espaço para novas ideias políticas especialmente na região Sudeste culminando as Rebeliões Nativistas e Rebeliões Separatistas, como a Revolta de Beckman e a Inconfidência Mineira. Segundo Fernandes (2022), enquanto a revolução francesa acontecia na Europa, a crise do sistema colonial começou a decair na segunda metade do século XVIII. Em 1808, a corte portuguesa deixou Portugal em direção ao Brasil, quando o país passou da condição de colônia a Reino Unido.

3. 1. 2 Contexto intermediário complementar

Nesse contexto "Intermediário Complementar (antes: pluridisciplinar)" (CHAQUIAM, 2022a, p.11), apresentamos traços biográficos e contribuições, de personagens contemporâneos ao personagem eleito, Gauss, que podem ser, ou não, na mesma área dele.

Napoleão Bonaparte (1769-1821), considerado um dos líderes mais célebres e estrategista da história. Liderou as grandes guerras revolucionarias francesas. Construiu um grande império que dominou grande parte da Europa Ocidental até 1815, tendo orquestrado um golpe em novembro de 1799. Segundo Roque (2012, p. 373), após esse golpe Laplace adquiriu grande poder na cena francesa, tornando-se ministro. Embora Napoleão não tenha sido matemático, atribuía a matemática papel importante no progresso, tendo enunciado em 1787 um teorema que tem seu nome: "Para qualquer triângulo ABC, triângulos equiláteros podem ser construídos sobre cada lado, e a partir de seus centros constrói-se um novo triângulo DEF. [...] o triângulo DEF é um triângulo equilátero" (CRILLY, 2021, p. 88). Essa ideia é muito usada na topografia em terrenos inóspitos como pântanos, rios, areia movediça e garante máxima precisão em na medida de ângulos.

Figura 27 - Ilustração do teorema de Napoleão



Fonte: Crilly (2021, p.88)

Na figura 26 temos uma ilustração do teorema de Napoleão com notação dos pontos diferentes do enunciado, é possível por meio de uma atividade de sala de aula utilizar a informação do texto histórico para que a figura seja analisada de modo que os alunos chegassem a conclusão de qual seria o triângulo inicial e quais seriam os equiláteros formados e em seguida realizar outras construções a partir dessa. E assim explorar tanto a notação matemática como a classificação de triângulos e reconhecimento de semelhança e congruência de triângulos.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matemático, físico e astrônomo francês que organizou a astronomia matemática. Formulou a conhecida equação de Laplace, a transformada de Laplace e o operador diferencial de Laplace. Em 1806 foi conde e em 1817 foi nomeado marquês, "chegou a dizer que ao diminuir o trabalho, [o logaritmo] dobrou a vida dos astrônomos" (EICHENBERGER NETO, 2016, p. 179). Como matemático, Laplace contribuiu para "as aplicações do cálculo à mecânica e à astronomia" (ROQUE, 2012, p. 373). As formulações ou generalizações feitas por

Laplace são essenciais no estudo de Cálculo e utilizadas nas engenharias de forma recorrente.

Charles Darwin (1809-1882) nasceu na cidade de Shrewsbury, na Inlaterra. Por meio de sua obra *A origem das espécies,* contribuiu para os estudos sobre a evolução. Essa obra contribuiu para o entendimento da evolução e foi onde o termo *cientista* foi usado a primeira vez. Essa obra de Darwin foi polêmica do ponto de vista religioso, pois, segundo Eves (2012, p. 356), conflitava com a descrição bíblica sobre a criação dos seres vivos.

No Brasil, ainda no mesmo período histórico, a pianista, compositora e maestrina Francisca Edwiges Neves Gonzaga, mais conhecida como *Chiquinha Gonzaga (1847-1935*), mesmo diante das adversidades enfrentadas naquela época para quem é mulher e afrodescendente, soube ter a mesma resiliência conferida a Gauss, soube aproveitar o melhor que a educação burguesa pode lhe oferecer, uma vez que seu pai era primeiro-tenente, sua composição *Ô abre alas*, tornou-a conhecida em 1899*. S*egundo Fuks (2021), contra a vontade de seu primeiro marido, Chiquinha Gonzaga, começou a compor suas primeiras músicas, sendo ela a primeira mulher a reger uma orquestra no Brasil.

3. 1. 3 Contexto epistemológico, científico e técnico

Nesse contexto, conforme orienta Chaquiam (2022b, p.1239), apresenta-se como o personagem principal, neste caso Gauss, que emerge dentre aqueles identificados no contexto epistemológico, científico e técnico e que contribuíram para a constituição/evolução da temática selecionada, aqui eleito o conceito de congruência.

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. Embora tivesse origem humilde, teve incentivo de sua mãe, apresentando evidências de seu brilhantismo ainda na infância, quando foi desafiado por seu professor a fazer a soma dos números de 1 a 100, para o que Gauss rapidamente encontrou a resposta 5050, criando o método hoje aplicado na soma de uma progressão aritmética. Deste modo, a matemática desenvolvida por Gauss contribuía na sua época e ainda contribui para diferentes áreas do conhecimento.

> Gauss deu diversas contribuições à topologia. Das várias demonstrações que deu do teorema fundamental da álgebra, duas eram explicitamente topológicas. A primeira dessas demonstrações, dada em sua tese de doutorado em 1799, quando ele tinha 22 anos de idade, utiliza-se de técnicas topológicas. (EVES, 2011, p. 667)

Gauss também se dedicou na sistematização de conceitos ainda inconsistentes e polêmicos da própria Matemática, conforme Roque (2012, p. 409), tais como: os números negativos, sendo adotados com ideia de coisas contadas opostas, de modo que um par de números opostos possam se neutralizar; os números complexos, em que introduziu a relação de +i a –i, demonstrando geometricamente que essas relações se tornariam intuitivas.

Embora a palavra congruência seja bem mais recente, deste a publicação da obra Elementos de Euclides, a congruência foi associada a teria das proporções. *Euclides de Alexandria (300 a. C.)*, foi professor, matemático, platônico e escritor grego a quem é conferido o título de *Pai da Geometria*. Na Universidade de Alexandria, primeira instituição desse gênero, de acordo com Eichenberger Neto (2016, p. 79), Euclides se destacou na instituição pela sua capacidade de gerenciamento do processo educacional e pela capacidade de transmitir conhecimento.

No tocante ao objeto matemático que é aqui explorado, Segundo Roque (2012), a longo da obra Elementos são demonstrados conceitos elementares da matemática até hoje utilizados. A noção de razão aritmética aparece do livros VII ao livro IX, com a terminologia que ainda vemos em livros didáticos que *duas coisas estão uma para a outra assim como*. No Livro V apresenta-se a teoria abstrata das razões e proporções, que serve para desenvolver as proposições geométricas do livro VI, e por que possivelmente "necessitava de uma teoria geral das razões e proporções para grandezas (incluindo as incomensuráveis)" (ROQUE, 2012, p. 144) e que serviram para sistematizar as ideias de triângulos semelhantes e congruentes.

> As abordagens de razões e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas (EVES, 2011, p.107)

O francês *Renè Descartes* (1596-1650) nasceu em La Haye próximo a Paris, Matemático, físico e filósofo que desempenhou grande papel na revolução científica quando fundiu a álgebra com a geometria, gerando a geometria analítica. Com

Descartes, a geometria Euclidiana agora teria localização no espaço, sendo ele, por esse motivo, conhecido como Pai da Matemática Moderna. Segundo Roque (2012, p. 288), para Descartes, as relações entre as grandezas devem feitas como a proporção, e o objetivo da nova geometria seria estudar figuras usando proporções.

Em sua obra *Geometria*, Descartes demonstra as cinco operações básicas da Aritmética e por meio de construções com régua e compasso, tais demonstrações acabaram por superar o problema da homogeneidade das grandezas presentes na geometria euclidiana. Os estudos de Descartes contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos espaços vetoriais, e, consequentemente para as definições atuais de figuras congruentes.

Gauss também refutou algumas proposições Euclidianas, basicamente provou que há espaços curvos, isto é, não-euclidianos. Segundo (Rocha, 2019, p. 5) Gauss apresentou ao mundo a congruência a partir de um trabalho realizado em 1801, Disquisitiones Arithmeticae, cuja demonstração é dita como "fácil notação de congruência" (EVES, 2011, p. 520), como segue:

> No primeiro capítulo de Disquisitiones arithmeticae, Gauss introduziu a definição (aqui um tanto condensada) e a notação seguinte: Dois inteiros a e b se dizem côngruos módulo n (onde n é um inteiro positivo), o que se simboliza por $a \equiv b \ (mod\ n)$, se, e somente se, n divide a diferença a - b. A seguir Gauss desenvolveu a álgebra da relação de congruência, a qual tem muito em comum com a álgebra da relação de igualdade usual, mas também muitas diferenças importantes. Se n é um inteiro positivo fixo e a, b, c e d são inteiros arbitrários, mostre que: (a) a ≡ a (mod n) (propriedade reflexiva). (b) Se a ≡ b (mod n), então b ≡ a (mod n) (propriedade simétrica). (c) Se a ≡ b (mod n) e b ≡ c (mod n), então a ≡ c (mod n) (propriedade transitiva) (EVES, 2011, p. 566)

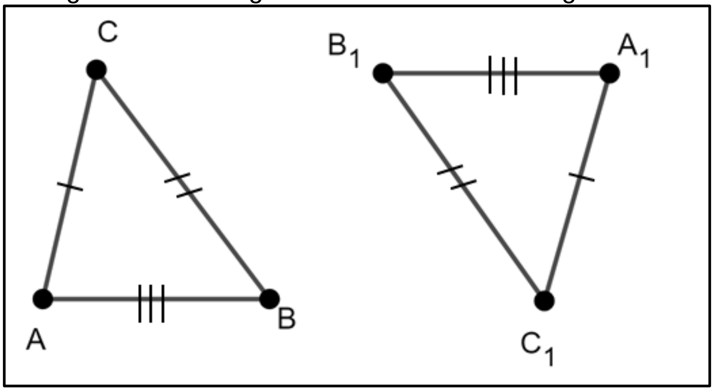
Essas e mais oito propriedades básicas da congruência foram estabelecidas por Gauss nessa obra, sendo que as três citadas são utilizadas atualmente em livros didáticos e livros técnicos no estudo de figuras congruentes e semelhantes.

Outras ideias, como a de vetor foram introduzidas nos estudos de Gauss surgindo a noção da ideia de multiplicidades.

> Gauss entende uma multiplicidade como um substantivo: um sistema de objetos ligados por relações. Esse não é exatamente o conceito que terá um papel central na teoria proposta por Riemann nos anos 1850, mas a multiplicidade de relações defendida por Gauss era um dos novos objetos que motivavam o desenvolvimento de uma teoria das multiplicidades. (ROQUE, 2012, p. 411)

Chamamos a atenção quem nos lê para refletirem sobre esses termos trazidos por nossos personagens: proporção, vetor, multiplicidade, congruência, e façamos uma transposição para o que temos nos livros técnicos atualmente. Dizemos que duas figuras são semelhantes, quando há uma razão semelhança *r* numa correspondência biunívoca estre os pontos ou lados correspondentes de cada uma das figuras, havendo assim uma transformação de semelhança entre as figuras. Assim, por exemplo, dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, os lados correspondentes teriam suas medidas na mesma razão, havendo uma proporcionalidade entre elas, ou mais ainda, teria um fator de multiplicação entre elas: $AB = rA_1B_1$; $BC = rB_1C_1$; $AC = rA_1C_1$. Esse fator *r,* determina a escala entre as figuras se é de ampliação ou de redução. Em seguida, quando se introduz a definição triângulos são congruentes (≡), diz-se que quando $r = 1$ tem-se uma isometria e os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são congruentes.

Figura 28 - Triângulos ABC e A1B1C1 congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}, \overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1}, \ \overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1} \\ \hat{A} = \hat{A}_1 \ , \ \hat{B} = \hat{B}_1, \ \hat{C} = \hat{C}_1 \end{cases} \Leftrightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

> O uso do termo “congruente” é bem mais recente e tem como objetivo resolver uma inconsistência lógica colocada pela formalização posterior da geometria euclidiana. Na lógica, o princípio da identidade afirma que uma coisa só é igual a si mesma. Portanto, dois triângulos ou duas figuras geométricas quaisquer não podem ser iguais. Daí o emprego do termo “congruente”, que significa, intuitivamente, que duas figuras podem ser colocadas uma em cima da outra. (ROQUE, 2012, p. 151)

Essas informações nos fazem entender o porquê de não dizemos que duas figuram congruentes sejam iguais, mas que sobrepostas suas medidas são iguais. Essa ideia alcança uma maior compreensão em sala de aula se for explorada com as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva definidas por Gauss em seu livro supracitado.

> Conta-se que Gauss somente resolveu devotar sua vida à matemática depois que, aos 19 anos de idade, descobriu que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso. Seu orgulho por essa descoberta fica evidenciado por seu pedido para que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados. Embora esse pedido jamais fosse atendido, a base do monumento erigido a Gauss em Brunswick, sua cidade natal, tem a forma de um heptadecágono (EVES, 2011, p. 178)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi um matemático alemão educado na Alemanha e na França a quem se atribui a moderna definição de função. Apresentou uma publicação inspirada na lei da reciprocidade biquadrática de Gauss com quem teve importante relacionamento intelectual e pessoal. Foi um dos matemáticos do século XIX que contribuíram para a chamada *matemática do rigor*.

Suas maiores contribuições no campo da teoria dos números, prestando especial na teoria das séries de Fourier. No campo da análise matemática aperfeiçoou a definição e o conceito de função e na mecânica teórica realizou estudos sobre equilíbrio de sistemas e de potencial newtoniano.

De 1828 até o ano de seu falecimento (1859), Dirichlet ensinou na Faculdade Militar de Berlim, no Colégio Militar e na Universidade de Göttingen, onde substituiu Gauss. Segundo Eves (2011, p. 624) Dirichlet estabeleceu uma generalização notável do teorema de Euclides da infinitude dos primos ao conseguir mostrar que toda progressão aritmética a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., onde a e d são primos entre si, contém infinitos números.

> A junção entre pesquisa e ensino foi marcante em Göttingen depois da morte de Gauss, com a chegada de Dirichlet, em 1855. Suas aulas discutiam os temas recentes da pesquisa matemática e motivavam os alunos a seguir seus passos. A presença de Dirichlet, juntamente com Riemann e Dedekind, que se via como seu discípulo, mudaria a matemática praticada na Universidade de Göttingen. Os três inspiravam-se em Gauss e propunham uma visão abstrata e conceitual dessa disciplina. Apesar das diferenças entre seus campos de pesquisa, eles convergiam nas preferências metodológicas e teóricas e podem ser considerados um grupo. O ponto de vista conceitual de Dirichlet foi expresso em uma frase que se tornou famosa: "É preciso colocar os pensamentos no lugar dos cálculos." (ROQUE, 2012, p.412)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão que deu importantes contribuições para a análise e geometria diferencial. Filho de um pastor luterano, enfrentou na infância problemas financeiros e de saúde, por meio do incentivo de seu pai chegou a Universidade de Göttingen, a mesma de Gauss, onde fez sua tese de doutorado sobre a teoria das funções complexas.

> Em 1857 Riemann foi indicado professor assistente de Gottingen e em 1859 sucedeu a Dirichlet como professor titular de uma cadeira que antes fora

> ocupada por Gauss. Mas em 1866, com apenas 40 anos de idade, morreu vítima da tuberculose no norte da Itália, para onde havia ido à procura de melhoras para sua saúde (EVES, 2011, p. 615)

Riemann dando continuidade aos estudos de Gauss ampliou o entendimento da geometria para algo mais abstrato e relacional. De acordo com ROQUE (2012, p.411) para Riemann, a noção de multiplicidade devia ser independente da intuição geométrica e a noção sugerida por Gauss fornecia uma base adequada sobre a qual construir a nova teoria de Riemann: a topologia exprimindo o ápice da autonomia da matemática com respeito às ideias de quantidade e de grandeza, uma vez que a topologia se definindo como o estudo das relações independentemente das propriedades métricas dos objetos.

Albert Einstein (1879-1955) foi um físico alemão de uma família de judeus alemães iniciou seus estudos na Suíça e fez seu doutorado na Universidade de Zurique. $E = mc^2$ é conhecida como a equação mais famosa do mundo. Recebeu o prêmio nobel de Física em 1921 por suas contribuições à física teórica e, especialmente, por sua descoberta da lei do efeito foto eleétrico e pelo estabelecimento da física quântica.

Graças aos estudos de Gauss e seus discípulos Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral, "apenas registrando aqui que algumas dessas novas geometrias vieram a encontrar aplicações na teoria moderna do espaço físico incorporada na teoria da relatividade geral de Einstein" (EVES, 2011, p. 608).

No ponto de vista didático pedagógico, quando trazemos para discussão o desenvolvimento do conceito de congruência para entender como chegaram às definições atuais de congruência de triângulos, queremos investigar como os grandes matemáticos superaram os desafios que hoje temos em sala de aula. Ora, se o ambiente escolar é um ambiente plural e com suas peculiares deficiências, os grandes matemáticos também tiveram que superar todo um contexto sociocultural e geopolítico para sistematizar a matemática posta nos livros. Mas as sutilezas dos desafios só é possível descobrir revivendo a história, nos inserindo e inserindo nossos educandos no contexto deles. É o famoso *pensar fora da caixinha*.

Nesse sentido a História da matemática como recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos fornece subsídios para compreender como a ciência é produzida, como os cientistas trabalham e quais são as influências sofridas e exercidas por eles, afastando concepções ingênuas e distorcidas sobre o processo de construção do conhecimento científico (Chaquiam, 2020a, p. 199).

Além disso, neste texto que apresentamos, perceba a evolução do conceito de congruência como uma relação medida na perspectiva numérica, passando para uma relação mais de homogeneidade geométrica e chegando a uma geometria abstrata em os conceitos podem ser observados intuitivamente sem necessariamente saber sua magnitude, o que importa é o significado disso.

Sob o prisma do ensino de Matemática, Brandemberg (2022, p.12) indica a História da Matemática como facilitador da aprendizagem de matemática ao considerar suas potencialidades didáticas para o ensino de conteúdos matemáticos.” Para além disso, na perspectiva epistemológica do professor de matemática, indicamos o estudo da constituição de objetos matemáticos por meio do diagrama orientador de conforme instrui Chaquiam (2022b), para a ampliação de seu repertório didático- pedagógico.

No contexto histórico, sociocultural e geopolítico situações o período dos séculos XVIII e XIX, em que acontecia a Revolução francesa e Revolução Científica em que grande nomes foram citados Napoleão Bonaparte (1769-1821),Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Charles Darwin (1809-1882), Chiquinha Gonzaga (1847-1935), todos personagens ilustres da mesma época de Gauss e que contemporaneamente produziam arte e ciência enfrentados diversidades similares.

No contexto epistemológico, científico e técnico apresentamos Euclides (300 a. C.), Descartes (1596-1650), Dirichlet (1805-1859),Riemam (1826-1866), Einstein (1879-1955). Embora Euclides estivesse fora do recorte temporal, foi trazido para o diagrama para que as influências das bases teóricas de nossos personagens fossem justificadas e por meio delas traçarmos a evolução do conceito de congruência através das contribuições de Gauss e seus contemporâneos.

As indicações didático-pedagógicas e os olhares e desdobramentos possíveis servem tanto para a formação epistemológica do professor matemática, quanto para fomentar sua criatividade e domínio de conteúdo a respeito de congruência, de modo que este estudo direcionou a maneira a ser elaborada nossa sequência didática sobre Congruência de Triângulos.

A seção a seguir trata das formalizações das definições e propriedades que envolvem a Congruência de Triângulos.

3. 2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS – DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Neste estudo matemático sobre Congruência de triângulos, nos aportamos em Lima (1991) e Fachinni (2021). Optamos por iniciar pela noção de semelhança que corresponde à ideia natural de ampliação e redução de uma figura, até particularizarmos para Congruência de Triângulos e seus casos. Nas demais seções particularizaremos as definições e propriedades de congruência e semelhança para triângulos e polígonos, baseadas em Barbosa (1985).

Utilizaremos como notação AB para segmento de extremidades A e B, $\overline{AB}$ para medida do segmento AB, o símbolo $\cong$ para representar congruente e o símbolo $\sim$ para representar semelhante.

Sejam F e F′ figuras no plano e r um número real positivo.

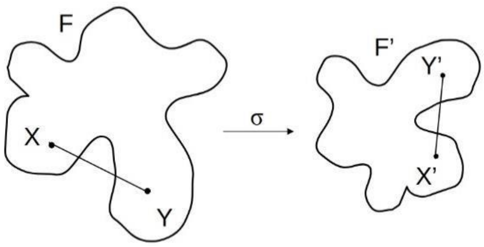
Definição 1: Diz-se que F e F′ são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca σ: $F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F′, com a seguinte propriedade: se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F′ então

$$\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}. \tag{1}$$

Os pontos X e X′ são denominados **pontos homólogos** ou **pontos correspondentes**.

Podemos dizer que duas figuras F e F′ são semelhantes quando existe uma **transformação de semelhança**, que preserva a forma das figuras (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Figuras semelhantes.



A propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se semelhança de razão r entre F e F′.

Para toda transformação que satisfaz a igualdade (1) temos que, pontos colineares são transformados em pontos colineares, as medidas de ângulos e o paralelismo de retas são preservados. A demonstração destes resultados pode ser encontrada em Lima (1991).

Assim, a noção de semelhança corresponde a ideia de mudança de escala, pois, teremos uma ampliação quando a razão r satisfaz $r > 1$ e uma redução quando $0 < r < 1$.

Temos que:

1. se F é semelhante a F′ com razão r então F′ é semelhante a F com razão $\frac{1}{r}$. De fato, da Semelhança de F e F′ existe uma correspondência biunívoca σ: $F \rightarrow F'$, tal que $X' \cong \sigma(X)$ e $Y' \cong \sigma(Y)$, para todo X, Y com,$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY}$. Logo, existe a função inversa $\sigma^{-1}: F' \rightarrow F$ biunívoca, tal que $X \cong \sigma^{-1}(X')\ e\ Y \cong \sigma^{-1}(Y')$. Ainda,

$$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY} \Rightarrow \overline{XY} \cong \frac{1}{r}.\overline{X'Y'}.$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **simétrica**.

2. se F é semelhante a F′ com razão r e F′ é semelhante a F″ com razão r′ então F é semelhante a F″ com razão r. r′. De fato, da semelhança de F e F′ existe uma correspondência biunívoca $\sigma: F \rightarrow F'$, tal que $X' \cong \sigma(X)$ e $Y' \cong \sigma(Y)$, para todo X, Y com,$X'' \cong \sigma'(X') e\ Y'' \cong \sigma'(Y')$. Da semelhança de F′ e F″ existe uma correspondência biunívoca $\sigma': F' \rightarrow F''$, tal que $X'' \cong \sigma'(X')\ e\ Y'' \cong \sigma'(Y')$, para todo X′, Y′ com,$\overline{X''Y''} \cong r'.\overline{X'Y'}$. Logo, existe a função composta $\sigma \circ \sigma': F \rightarrow F''$ biunívoca, tal que $X'' \cong \sigma'(\sigma(X))\ e\ Y'' \cong \sigma'(\sigma(Y))$. Ainda,$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY}\ e\ \overline{X''Y''} \cong r'\overline{X'Y'}.$.Assim,

$$\overline{X''Y''} \cong r'.\overline{X'Y'} \Rightarrow \overline{X''Y''} \cong r\,.r'.\overline{XY}.$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **transitiva**.

3. A figura F é semelhante a ela mesma, ou seja, $\sigma: F \rightarrow F$ é uma semelhança de razão 1. Assim, a semelhança satisfaz a propriedade **reflexiva**. Uma semelhança de razão 1, chama-se <u>isometria</u>, pois para quaisquer pontos X, Y em F, a distância de X′ ≅ σ(X) a $Y' \cong \sigma(Y)$ é igual a distância de X a Y.

Definição 2: Quando existe uma isometria entre as figuras F e F′, diz-se que estas são **congruentes.**

Note que as definições das propriedades simétrica, transitiva e reflexiva ora apresentadas, são as mesmas que apresentamos na seção 3.1.3 sobre Gauss.

Congruência de Triângulos

Definição 3: Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e que dois ângulos Â e B̂ são congruentes se eles têm a mesma medida.

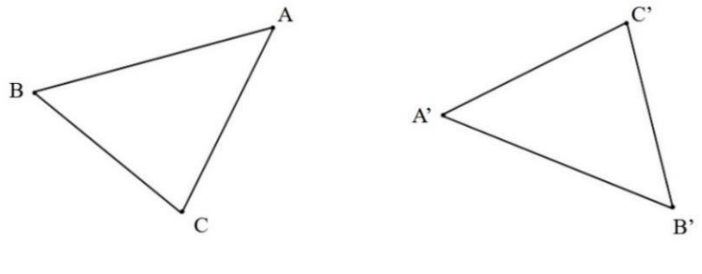
Definição 4: Dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Podemos observar que essa definição satisfaz a definição 1 para r = 1.

Assim, dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no plano, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. A Figura 2.2 mostra dois triângulos congruentes

ABC e A′B′C′ com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$.

Triângulos congruentes.



Temos então, que:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Leftrightarrow ABC \cong A'B'C'$$

Desta forma, temos seis relações necessárias que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes.

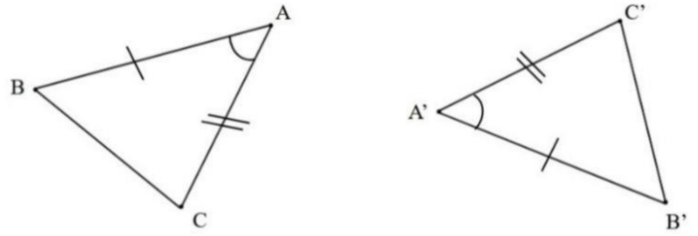
A congruência de triângulo satisfaz as propriedades **reflexiva**, onde um triângulo qualquer ABC é congruente a si mesmo, **simétrica**, se o triângulo ABC é congruente ao triângulo A′B′C′, então o triângulo A′B′C′ é congruente ao triângulo ABC, e a **transitiva**, se o triângulo ABC é congruente ao triângulo A′B′C′ e o triângulo A′B′C′ é congruente ao triângulo A″B″C″, então o triângulo ABC é congruente ao triângulo A″B″C″.

Ao utilizar a definição 4 são necessárias seis hipóteses para verificar a congruência de dois triângulos. Utilizando os casos ou critérios de congruência a seguir reduzimos o número de hipóteses para três.

Axioma 1 (1º caso de congruência - LAL): Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \hat{A} = \hat{A}'$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo axioma 1.

1º caso de congruência - LAL.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{cases} \overset{LAL}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'.$$

Teorema 1 (2º caso de congruência – ALA): Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

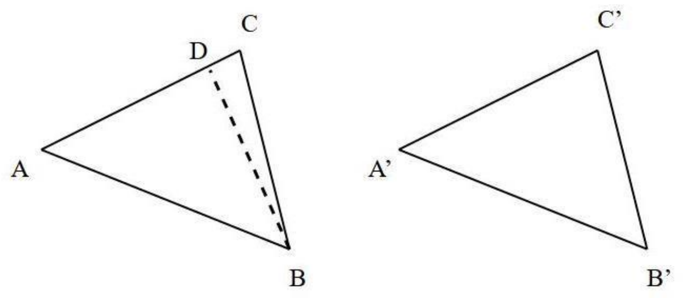
Demonstração:

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}'\ e\ \hat{B} = \hat{B}'$. Seja D um ponto da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$.

Considerando o triângulo ABD e comparando-o com o triângulo A′B′C′, como $\overline{AD} = \overline{A'C'},\ \overline{AB} = \overline{A'B'} e\ \hat{A} = \hat{A}'$ concluímos pelo axioma 1 que ABD = A′B′C′. Como consequência, tem-se que AB̂D = B̂′. Por hipótese B̂′ = AB̂C, logo AB̂D = AB̂C.

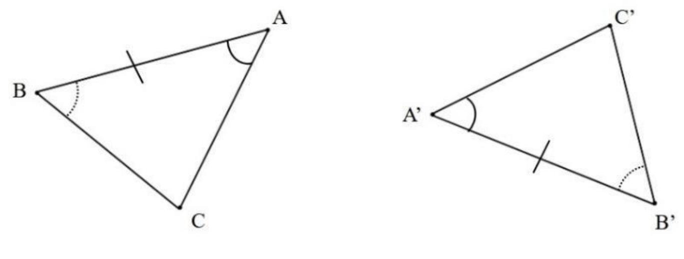
Consequentemente as semirretas BD e BC coincidem. Assim o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como ABD ≅A′B′C′ então, ABC ≅ A′B′C′.

Ponto D da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$



Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}' e\ \hat{B} = \hat{B}'$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo teorema 1.

2º caso de congruência - ALA.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \overset{ALA}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'$$

Teorema 2 (caso de congruência – LAAo): Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração:

Sejam os triângulos ABC e A′B′C′ tal que, $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}'e\ \hat{C} = \hat{C}'$

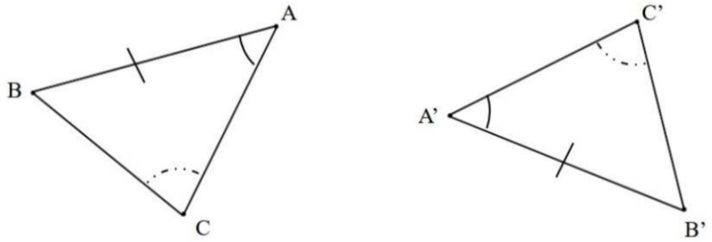
No triângulo ABC,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°,$$

e portanto,

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}. \quad (2)$$

Figura 2.6 – Caso de congruência - LAAo.



Analogamente, no triângulo A’B’C’,

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180°.$$

Assim,

$$\hat{B}' = 180° - \hat{A}' - \hat{C}'. \quad (3)$$

Da hipótese,

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad (4)$$

$$\hat{C} = \hat{C}'. \quad (5)$$

Assim, substituindo (4) e (5) em (3),

$$\hat{B}' = 180° - \hat{A} - \hat{C}'.$$

Comparando $\hat{B}'$ com $\hat{B}$ em (2), temos que:

$$\hat{B}' = \hat{B}.$$

Portanto,

$$\hat{A} = \hat{A}',$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}\text{e}$$

$\hat{B} = \hat{B}'$.

Logo, pelo Teorema 2 os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes.

Teoremas 3 (3º caso de congruência – LLL): Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados do outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

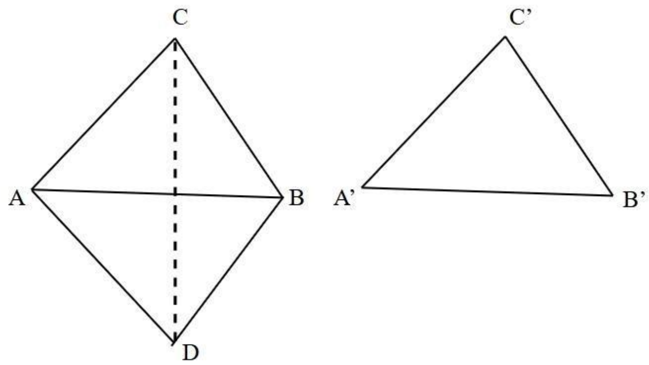
Demonstração:

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \overline{BC} = \overline{B'C'}$

Vamos provar que ABC ≅ A′B′C′.

Para isto, construa, a partir da semirreta AB e no semiplano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo Â′. No lado desse ângulo que não contém o ponto B, marque um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ e ligue D a B. Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AD} = \overline{A'C'} e\ D\hat{A}B = \hat{A}$, então ABD ≅ A′B′C′ , pelo axioma 1.

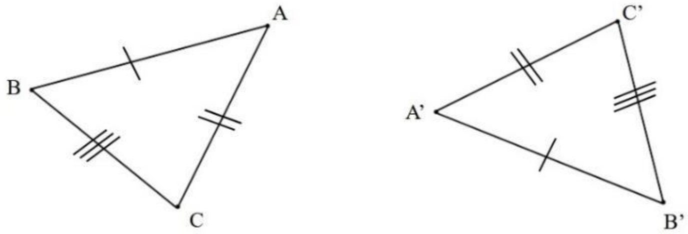
Triângulos ABC, A′B′C′ e ABD.



Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace CD. Como $\overline{AD} = \overline{A'C'} = \overline{AC}\ e\ \overline{DB} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que AD̂C ≅ AĈD e CD̂B ≅ DĈB. Logo, AD̂B ≅ AĈB. Portanto, pelo axioma 1, ABD ≅ ABC. Pela propriedade transitiva, ABC ≅ A′B′C′.

Seja ABC e A’B’C’ dois triângulos tais que $\overline{AB}\overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \overline{BC} = \overline{B'C'}$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo teorema 3.

3º caso de congruência - LLL.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases} \overset{LLL}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'.$$

Assim, concluímos este capítulo sobre o objeto mate matemático e passamos para a apresentação da sequência didática que elaboramos por meio de todo esse estudo preliminar, para o ensino de Congruência de Triângulos. Nessa apresentação detalhamos a experimentação, coleta e tratamento de dados, análise de resultados para então respondermos nossa questão pesquisa.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a sequência didática objeto de estudo desta pesquisa, baseando-nos nos aportes teóricos e metodológicos apresentados no capítulo 1 e nos estudos preliminares apresentados nos capítulos 2 e 3. Nas seções que seguem apresentamos detalhamento da experimentação, coleta e tratamento de dados, bem como a análise de resultados.

Para aplicação da sequência didática que apresentamos se fez necessário que os sujeitos tenham conhecimentos base sobre a condição de existência de um triângulo, representação de lados e ângulos de um triângulo, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer. As atividades foram embasadas em nossas pesquisas preliminares e nas indicações das diretrizes curriculares para o ensino de matemática no Ensino Fundamental sobre a manipulação de transformações isométricas.

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2017, p.527)

A sequência é composta por três atividades conforme o quadro a seguir:

Quadro 10 – Organização da Sequência Didática

Título	Objetivo de aprendizagem	Material	Tempo de aplicação
UARC 1: É semelhante, mas é congruente?	Definir triângulos congruentes	Material impresso, caneta ou lápis.	2 h/a de 45 min
UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?	Estabelecer critérios suficientes para ocorrência de congruência de triângulos.	Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.	3 h/a de 45 min
UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.	Identificar caso de congruência em triângulos retângulos.	Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.	2 h/a de 45 min

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Apresentamos a seguir como se deu a aplicação desta sequência didática.

4. 1 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção apresentamos como se deu a experimentação da sequência didática elaborada para o ensino de Congruência de Triângulos. Essa fase da pesquisa aconteceu durante três episódios no mês de abril de 2023, pouco mais de um mês após o exame de qualificação, quando a sequência didática passou por aprimoramento.

Os sujeitos da pesquisa eram quinze estudantes do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola estadual da periferia do município de Belém, capital do estado do Pará. Esses estudantes foram organizados em três grupos os quais denominamos de Grupo A, GRUPO B e GRUPO C e cada estudante identificado por um crachá com a letra do grupo seguida de número, para garantir o anonimato dos sujeitos. A frequência dos sujeitos está apresentada no quadro 11.

Quadro 11 – Frequência dos sujeitos durante as atividades

Grupo	SUJEITO	EPISÓDIO 1	EPISÓDIO 2	EPISÓDIO 3	TESTE
A	A1	X	X	X	X
	A2	X	X	X	X
	A3	X			X
	A4	X	X		X
	A5	X		X	X
B	B1	X	X	X	X
	B2	X		X	X
	B3	X			X
	B4	X	X		X
	B5	X	X	X	X
	B6		X	X	X
C	C1	X	X	X	X
	C2	X	X	X	X
	C3	X		X	X
	C4	X	X		X

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Temos pelo quadro 11 que os sujeitos estiveram todos presentes apenas no episódio 1 e no teste de verificação de aprendizagem, sendo que nos episódios 2 e 3 alguns sujeitos faltaram. Os grupos não possuem a mesma quantidade de componentes, pois foram formados conforme as afinidades que estabelecem desde o ano letivo anterior, essa característica foi preservada para melhor andamento da atividade.

Os sujeitos eram alunos do professor pesquisador desde o ano letivo de 2022, logo, já haviam apreendido os conhecimentos básicos necessários para a realização eficaz da sequência didática. Isto é, já haviam estudado razão e proporção, estudo de triângulos, semelhança de figuras planas, equação do primeiro grau.

Embora tivéssemos desenvolvido um trabalho preliminar com os sujeitos, os mesmos ainda traziam lacunas de aprendizagem decorrentes dos dois anos de pandemia de Covid-19 em que ficaram sem aula presencial, tais como dificuldades com operações fundamentais e baixa auto-estima para compartilhar suas dúvidas e até seu modo próprio de pensar, o que seria de fundamental importância para esta pesquisa, haja vista que a oralidade serviu como fonte de coleta de indícios de aprendizagem, conforme os aportes adotados da análise microgenética e análise do discurso.

Os responsáveis dos alunos autorizaram a participação dos sujeitos por meio de assinatura em Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TECLE), conforme anexo G. Além disso, a equipe pedagógica e a gestão escolar estavam cientes da realização da pesquisa e proporcionou as condições para a realização satisfatória dessa fase da pesquisa.

Após uma aula de revisão de conhecimentos básicos para nivelamento da turma, a sequência foi aplicada em três episódios de 2 a 3 h/aula, sendo que em um quarto episódio foi aplicado um teste de verificação de aprendizagem, conforme apresentado no quadro 12.

Quadro 12 – Episódios didáticos da Experimentação

Atividade	Data	Tempo de execução
UARC 1	18/04/2023	2 h/ aula
UARC 2	21/04/2023	3 h/aula
UARC 3	25/04/2023	2h/aula

TESTE VERIFICALÇÃO DE APRENDIZAGEM	28/04/2023	1 h/aula

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Em cada episódio didático foram colocados gravadores para captação das falas dos sujeitos em cada grupo. Desse modo, durante a experimentação o professor pesquisador fazia mediações orais, além das intervenções do protocolo escrito disponível no apêndice D.

Na seção seguinte apresentamos como se deu a coleta e tratamento de dados.

4. 2 COLETA E TRATAMENTO DE DADOS

Todos os episódios foram gravados em áudio e depois transcritos conforme disposto no Apêndice F. O tratamento de dados se deu como na pesquisa de Silva (2020) em que cada UARC da sequência didática foi chamada de *episódio*, as falas durante as intervenções de cada UARC chamadas de *segmentos* e cada fala dos sujeitos, inclusive do professor-pesquisador, chamados de *turnos*. Totalizando 558 turnos organizados da seguinte forma:

Quadro 13 - Turnos coletados em cada episódio

Atividade	**TURNOS**	**Quantidade de turnos audíveis**
UARC 1	1 – 273	273
UARC 2	274 – 508	235
UARC 3	509 -558	50

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

No quadro 12 temos a distribuição dos turnos transcritos em cada episódio da experimentação, sendo que no último episódio coletamos apenas 50 episódios, pois os estudantes haviam alcançado segurança conceitual nas atividades anteriores, de modo que executaram as tarefas com pouca interação entre eles mesmos e com o professor. A seguir, análise de resultados.

4. 3 ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos as análises de cada um dos episódios didáticos da sequência didática elaborada para o ensino de Congruência de Triângulos. Aqui retomamos nossa questão de pesquisa: *Quais as contribuições para o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos de uma sequência didática estruturada por UARC e com malha isométrica como recurso didático?* E verificar se o objetivo da pesquisa foi alcançado: *Investigar as potencialidades didáticas de uma sequência didática construída especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos.*

Ao respondermos essa questão de pesquisa e verificarmos o seu objetivo, não nos esquecemos do processo da pesquisa. Ao longo desta pesquisa descobrimos outros elementos sobre o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos que acabaram por influenciar na construção da sequência didática e em nossas percepções no momento da experimentação e da análise de resultados. Ao fazermos essa afirmação, mantemos nosso aporte de análise do discurso e microgenética, mas não poderíamos passar por uma pesquisa sem ser influenciado a cada fase.

Como critérios de análise adotamos os indícios de aprendizagem percebidos nas falas dos sujeitos conforme a abordagem comunicacional e padrão de interação os níveis de aprendizagem alcançados, os quais sejam perceptivo/intuitivo, empírico e teórico (seção 1.3) nos recortes onde identificamos os indícios de aprendizagem.

Os indícios de aprendizagem são verificados quando por meio de suas respostas às intervenções orais ou escritas do professor, quando os estudantes identificam semelhança, congruência, razão de semelhança, transformações isométricas como rotação e reflexão, bem como os casos de congruência de triângulos.

Retomando o processo de pesquisa, trazemos elementos de nossa pesquisa sobre o ensino de congruência de triângulos e nos perguntamos ao analisar: Como se deu as relações no triângulo didático? Os estudantes alcançaram o nível de formalização de conhecimentos? O recurso didático malha isométrica se mostrou eficiente para o ensino Congruência de Triângulos? Que habilidades geométricas foram desenvolvidas? Que estratégias mentais foram desenvolvidas pelos sujeitos? Que conexões com outros objetos matemáticos foram realizadas pelos sujeitos?

Todas essas questões, de maneira direta ou indireta, nortearam a análises apresentadas nas próximas seções.

4. 3. 1 Episódio 1 - UARC 1: É semelhante, mas é congruente?

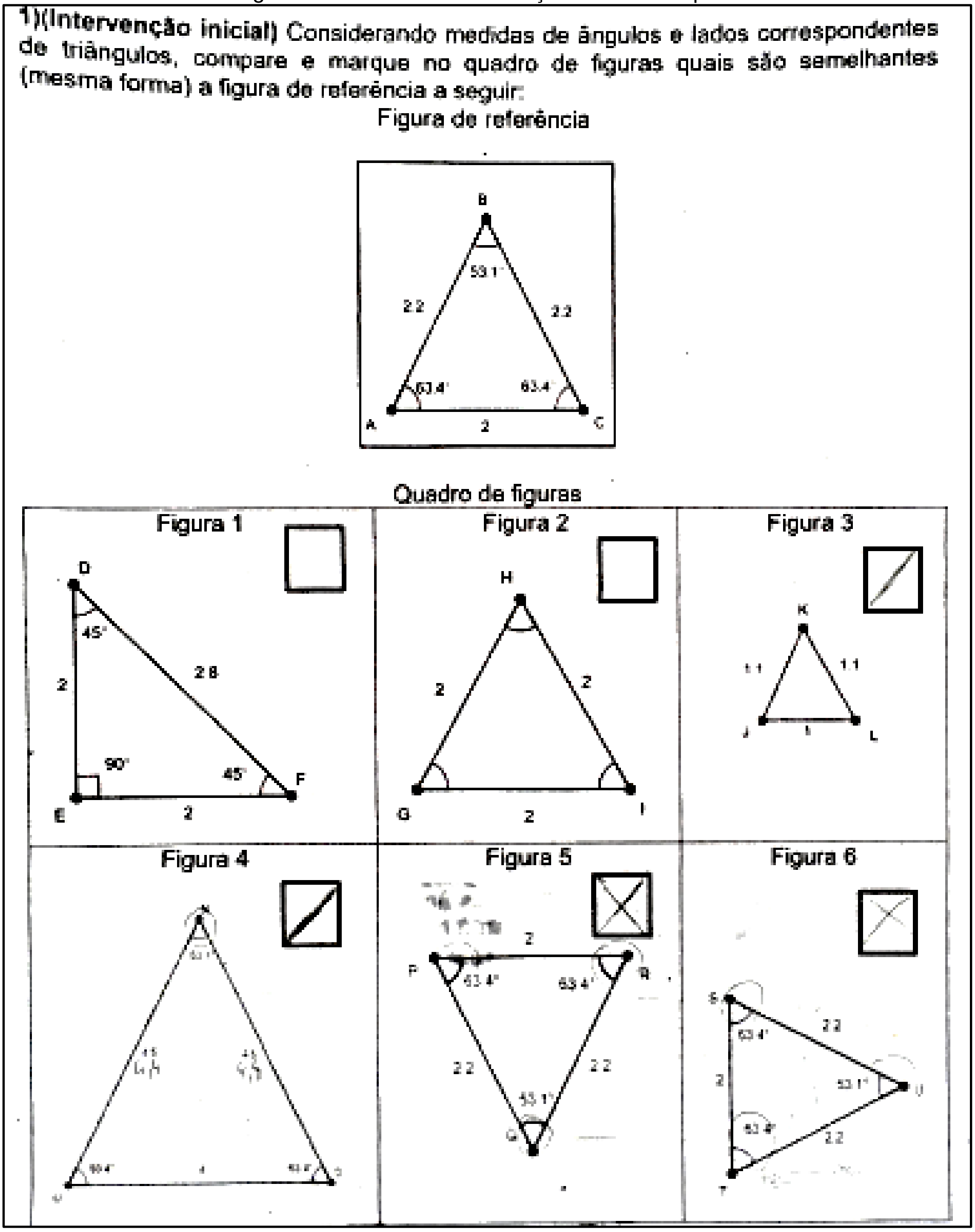
O primeiro episódio de experimentação aconteceu no dia 18/05/2023 em 2h/aula de 45 minutos, todos os quinze sujeitos estavam presentes e distribuídos em grupo como apresentado no quadro 11 da seção 4.1. O objetivo desta UARC foi definir triângulos congruentes. Após organização dos três grupos e posicionamento dos gravadores para captação dos áudios, o material impresso foi distribuído para os sujeitos. Nessa atividade, inicialmente os estudantes fizeram comparações entre um triângulo de referência e cada figura do quadro para verificarem quais eram semelhantes e qual a sua razão de semelhança.

Segmento da Intervenção inicial da UARC 1

Neste segmento, analisamos os registros escritos e recortes onde foram identificados indícios de aprendizagem na intervenção inicial da UARC 1. Essencialmente nesta atividade quisemos que os sujeitos compreendessem que se a razão de semelhança entre dois triângulo é a unidade, então esse triângulos são congruentes, conforme explicitado na seção 3.2 desta dissertação.

Inicialmente os sujeitos não identificaram todos os triângulos semelhantes devido a posição em relação ao triângulo de referência. Nós tivemos que instigá-los por meio de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO) para compararem sob diferentes perspectivas, isto é, considerando que os pares de triângulos possam estar rotacionados ou refletidos um em relação ao outro e ainda serem semelhantes entre si. Para isso, o pareamento de ângulos e lados correspondentes congruentes foi fundamental, assim foram orientados a usar a simbologia matemática $AB = ST$ ou $\hat{S} = \hat{A}$, por exemplo. A seguir temos a figura 29 que ilustra os registros dessa questão.

Figura 29 – UARC 1- Intervenção Inicial - Grupo A



Fonte: Dados da experimentação (2023)

Temos pela figura 29 que os sujeitos conseguiram identificar todas as figuras que pareavam com a figura de referência como semelhantes, de modo que deixaram de marcar apenas as figuras 1 e 2 do quadro do protocolo escrito. Os recortes a seguir ilustram como chegaram a esse resultado.

1. Professor: Intervenção inicial, considerando medidas de ângulos e lados

correspondentes, [...]É só pra marcar aqui no quadro, olhem para a primeira, e se for semelhante você marca, se não for você passa pra próxima. Há várias e vocês devem chegar a conclusão juntos, observando somente se são semelhantes. E se não for semelhante comente o porquê.
2. C2: A figura 6, a figura 5 e a figura 2.
3. C1: É a forma né Professor, não é a medida?
4. Professor: Isso, é a forma.
5. C1: Então é a forma. Mas a forma pode dar de qualquer lado? Tipo, de ponta cabeça?
6. Professor: De ponta cabeça já tem um nome. Qual é?
7. C2: Rotacionado.
8. Professor: Isso. Como também pode ser transladado, quando afasta e tem um outro nome quando ela fica espelhada.
9. C2: Refletida?
10.Professor: Isso, refletida.
11.A1: Por que não é? Porque ela rotacionou esse daqui. Essa tem que ser semelhante no caso. Essa aqui é.
12.A1: **Que característica foi observada? Foi observado que está rotacionada, acho que é isso**.(Dados da Experimentação, 2023)

No recorte dos turnos 1 ao 12 temos uma abordagem comunicativa interativa/dialógica com padrão de interação **I-R-A**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor. Nos turnos 3 e 5 tem-se o indício de que os sujeitos compreendem que a semelhança de triângulos está relacionada a forma e que o par de triângulos podem estar em posições diferentes. A Expressão “de ponta cabeça” do sujeito C1 revela um nível de aprendizagem perceptivo/intuitivo, devido a linguagem coloquial. Por outro lado, as expressões “refletida” (turno 9, sujeito C2) e “rotacionada” (turno 12, sujeito A1), indicam o alcance nível teórico de aprendizagem.

27.Professor: Agora discuta com o seu colega e diga o motivo.
28.C1: Ela pode estar ampliada ou diminuída?
32.C2: Ficamos entre a 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª porque elas têm a mesma forma. Agora, a primeira não, porque ela não é um triângulo.
33.C2: Chegamos a conclusão de que a 1ª figura não é um triângulo semelhante nem a 2ª , Já a 3ª é um Triângulo semelhante, só que ele foi reduzido, está menor, não é a mesma medida. A 4, 5ª e a 6ª são triângulos semelhantes. A 5ª e a 6ª estão em outra posição, uma está rotacionada e a outra está espelhada para baixo.
36.Professor: Por que não? Por que vocês acham que não é semelhante?
37.A2: Porque rotacionou o 90°. (Dados da Experimentação, 2023)

Dos turnos 27 ao 37 tem-se indícios de aprendizagem de que, embora estivessem reduzidos, ou ampliados os sujeitos reconheceram todos os pares de triângulos semelhantes, mantendo uma discussão aluno-aluno.

101. Professor: Então foi somente a medida que vocês levaram em consideração?
102. A1: Também foi a forma.

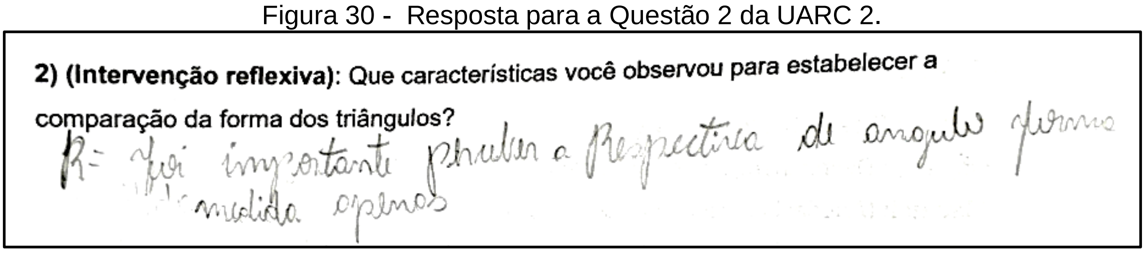
103. Professor: Então as formas também.
104. A1: É.
105. Professor: Vamos lá gente. Que características você utilizou para estabelecer a forma dos triângulos. Aqui no grupo A. Quais as características?
106. A2: observamos as medidas e as formas.
107. Professor: Observaram as medidas e as formas. Vocês, grupo B.
108. B1: Quase todas tem a mesma forma e a mesma razão.
109. Professor: Quase todas? Ou só as que vocês marcaram? Tinham a mesma forma e mesma razão. No caso os lados né. Os lados correspondentes tinham a mesma razão.
110. Professor: E aqui.
111. C1: Foi importante para perceber os respectivos ângulo, forma e Medida. (Dados da experimentação, 2023)

Nos turnos que vão de 101 a 111 temos a socialização das conclusões dos grupos como abordagem comunicativa interativa de autoridade para verificar se todos os grupos haviam entendido o que estava sendo realizado nessa atividade, o que foi confirmado nos turnos 106, 108 e 111, quando os sujeitos afirmam que suas análises se deram em torno da forma, ângulo, medida dos lados e razão de semelhança.

Segmento das intervenções reflexivas da UARC 1

Nas intervenções reflexivas, questões de 2 a 5, os estudantes perceberam que a semelhança tem a ver apenas com a forma, e que a forma pode ser preservada mesmo que a figura seja ampliada ou reduzida segundo uma razão de semelhança Figuras 30, 31 e 32. Concluíram também que quando não ocorre mudança no tamanho da figura semelhante, a razão de semelhança é igual a 1, figura 33.

Figura 30 - Resposta para a Questão 2 da UARC 2.


2) (Intervenção reflexiva): Que características você observou para estabelecer a comparação da forma dos triângulos?
R= Foi importante perceber a Respectiva de angulo forma medida apenas

Fonte: Dados da experimentação (2023)

"Foi importante perceber a respectiva de ângulo, forma e medida apenas".

Figura 31 **-** Resposta para a Questão 2 da UARC 2.

3) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados ampliada? Qual a razão dessa ampliação? E A Fiġura 4 razão 2

Fonte: Dados da experimentação (2023)

.

Figura 32 - Resposta para a Questão 4 da UARC 2.

4) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados reduzida? Qual a razão dessa redução?

3 reduzido pela Metade $\frac{1}{2}$

Fonte: Dados da experimentação (2023)

Nas figuras 31 e 32 temos as respostas dos sujeitos sobre a razão de semelhança entre os pares de triângulos semelhantes, onde inferimos indício de que compreendem como essa razão influencia na redução ou ampliação da figura.

Figura 33 - Resposta para a Questão 5 da UARC 2

5) (Intervenção reflexiva): **Quais figuras selecionadas possuem mesmas medidas de lados e ângulos? Qual seria a razão entre essas medidas?**

Figura 5 e 6 Razão 1

Fonte: Dados da experimentação (2023)

Sobre a conclusão da questão 5 ilustrada na figura 33, tem-se o desenvolvimento da discussão apresentadas nos turnos a seguir.

133. B1: Figuras 5 e 6.
134. Professor: Figuras 5 e 6. Agora vamos pensar, se elas têm a mesma medida, qual a razão dessa semelhança? Qual é a razão de semelhança?
135. C2: É 2?
136. Professor: Não. Vamos lá, vamos pensar.
137. B1: É 1?
138. Professor: 1. Por que seria 1. Olhem pra cá pra divisão. Você não divide os lados correspondentes? Então você vai pegar um número, por exemplo, o lado BC é correspondente ao lado RQ da figura 5, certo? Tem a mesma medida. Aqui como era que fazíamos? Não dividia? Então você irá dividir 2,2 por 2,2, então o que vai aparecer, um número dividido por ele mesmo e quanto é um número dividido por ele mesmo?
139. B1: 1. (Dados da experimentação, 2023)

Temos aqui uma abordagem comunicativa interativa de autoridade e, embora a resposta tenha ocorrido na intervenções reflexivas, foi por meio da manipulação empírica das figuras que os sujeitos conseguiram realizar a generalização de que se os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes tem a mesma medida, então a razão de semelhança é igual a 1. O que nos levou a concluir que os sujeitos alcançaram o nível pré-formal de aprendizagem quando percebem que triângulos de mesmas medidas na perspectiva da razão de semelhança.

Segmento da Intervenção Exploratória da UARC 1

Na questão 6, intervenção exploratória, os estudantes organizaram suas observações num quadro e concluíram quais figuras atenderam aos três critérios: mesma forma, ângulos e lados correspondentes de mesma medida.

Figura 34 - Resposta para a Questão 6 da UARC 2

6) (Intervenção exploratória): Considerando as observações que você fez até aqui preencha o quadro a seguir com **X**:

Figura	Mesma forma da referência	Todos os ângulos têm mesma medida da referência	Todos os lados têm mesma medida da referência
1			
2			
3	X	X	
4	X	X	
5	X	X	X
6	X	X	X

Fonte: Dados da experimentação (2023)

Perceba que na figura 34 ilustramos a resposta ao quadro de intervenção exploratória e que fica mais evidente que as figuras 5 e 6 da intervenção inicial atendem aos três critérios necessários para que ocorra a congruência de triângulo, ainda que essa nomenclatura não esteja formalizada o significado está devidamente posto a um nível de pré-formalização chegado o momento de formalizar.

Segmento das intervenções reflexivas (questões 7 e 8) da UARC 1

Nas questões de 7 a 8 os estudantes sistematizaram a sua ideia pré-formal do que seriam triângulos congruentes e perceberam que a posição do triângulo correspondente não interfere na congruência entre eles. Os indícios de aprendizagem dessas intervenções estão apresentados no recorte a seguir:

173. Professor: A figura 2 tem mesmo forma? Ângulo? Lado?
174. Não. Não. Não.
175. Professor: Figura 3, tem mesma forma?
176. Alunos: Sim.
177. Professor: Ângulo?
178. Alunos: Não.
179. Professor: Não? Não tem o mesmo ângulo?
180. C1 : Espera aí, tem sim.
181. A1: Tem.
182. Professor: Tem. E o lado tem mesma medida?
183. Alunos: Não.
184. Professor: Quarta. Forma?
185. Alunos: Sim.
186. Professor: Ângulo?
187. Alunos: Sim.
188. Professor: Lado?
189. Alunos: Não.
190. Professor: Não. A 5 e 6. Forma, ângulo e lado?
191. Alunos: Sim, sim, sim.
192. Professor: Ok? Todos ficaram assim?
193. A1: Olha, acertei tudo.
194. Professor: Alguém ficou em dúvida?
195. Alunos: Não.

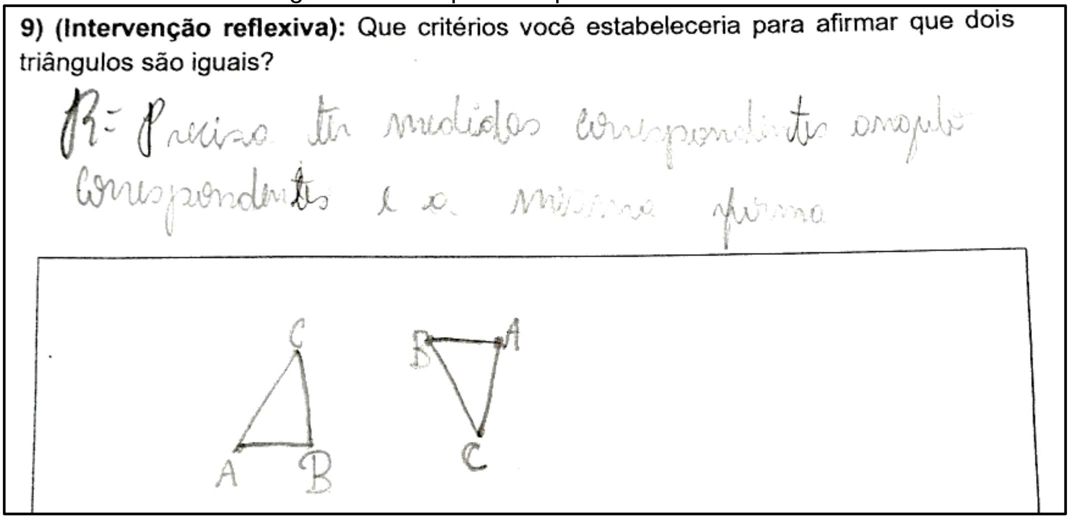
Nos turnos de 173 a 195 tem-se um recorte onde reconhecemos a abordagem comunicativa interativa/de autoridade e padrão de interação I-RF (Iniciação, resposta feedback), haja vista que tratava-se apenas de uma reafirmação do que todos já haviam compreendido, com pouca ou nenhuma negociação de ideias. Um recurso necessário para este tipo de pesquisa em que se coleta dados em áudio. Todas as vezes que percebíamos que estavam fazendo os registros devidamente, fazíamos reafirmar ou explicar sua estratégia, o que ajudou tanto na coleta de dados quanto no aprimoramento do vocabulário científico coletivo, bem como na consolidação de aprendizagem.

Pessoalmente falando, isso me ajudou a dar mais importância na fala de meus alunos, fazê-los me ouvir foi importante, mas ouvi-los concluir de forma autônoma e colaborativa foi muito satisfatório em termos de *feedback*.

Segmentos das intervenções Avaliativas da UARC 1

As intervenções Avaliativas da UARC1 são as de caráter pós-formal. Temos na figura 35 que o sujeito além ter compreendido como se dá a congruência de triângulos, também conseguiu ilustrar sua forma de entender, caracterizando também o movimento entre as figuras congruentes.

Figura 35 - Resposta a questão 9 da UARC 1


9) (Intervenção reflexiva): Que critérios você estabeleceria para afirmar que dois triângulos são iguais?

R= Preciso ter medidas correspondentes angulo correspondentes e a mesma forma

Fonte: Dados da Experimentação (2023)

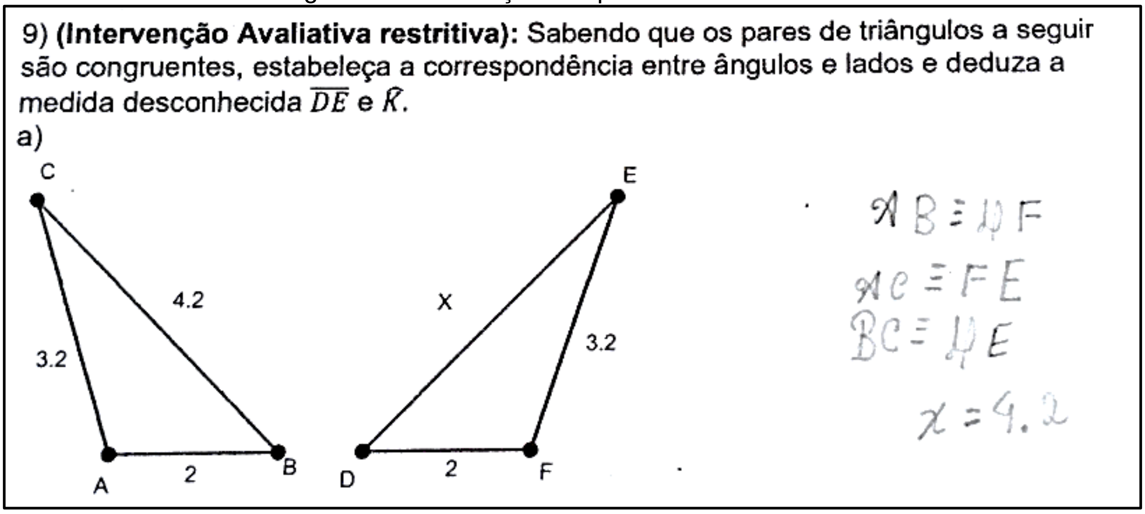
"Preciso ter medidas correspondentes , ângulos correspondente e a mesma forma".

> **206. A1: Tem que ter mesma forma, mesma medida, mesmo ângulo.**
> 207. Professor: O C1 definiu, só faltou um detalhe. Mesmo ângulo, mesma medida de lado, mesma forma, mas medidas de ângulo e de lado, falta uma palavra.
> 208. C1: Razão.
> 209. Professor: Correspondentes. Os lados correspondentes entre esses triângulos têm que ser iguais, não é que esse triângulo tenha que ter todas as medidas iguais. Tem que ter a mesma medida no triângulo correspondente, ok? Então esse lado é correspondente a esse, que tem mesma medida. Então eles precisam ter mesma forma e os lados e ângulos correspondentes tem que ter mesma medida. Façam a sétima.
> **210. A1: Coloca aí, eles têm que ter a mesma forma, mesma medida e ângulos correspondentes**

Nos turnos que vão de 206 a 210, temos indícios de aprendizagem por meio de uma abordagem comunicativa interativa/dialógica, haja vista que as intervenções orais do professor conduziram para que os sujeitos tivessem uma compreensão mais completa sobre a congruência de triângulos, isto é, que há uma correspondência entre lados e ângulos de dois triângulos.

Nesse diálogo, me ocorreu que esses pequenos detalhes poderiam mais a frente se tornar obstáculos de aprendizagem: poderiam concluir que a congruência seria entre os lados de um mesmo triângulo (triângulo equilátero), poderiam não atentar que só se fala em congruência em pares e em correspondência.

Figura 36 - Resolução da questão 10 da UARC 1



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

Na intervenção ilustrada na figura 36 temos uma aplicação de congruência de triângulos em que o sujeito foi capaz de representar a linguagem simbólica e identificar a medida desconhecida do lado de um dos triângulos.

De maneira geral, podemos dizer que os objetivos de aprendizagem da UARC 1 foram alcançados com êxito, sendo que os sujeitos conseguiram mobilizar os conhecimentos base sobre semelhança de triângulos, proporcionalidade e transformações geométricas para concluírem de forma colaborativa a definição de Congruência de Triângulos.

Em decorrência das recomendações em nossa pesquisa histórica sobre o objeto matemático (seção 3.1), evitamos no discurso usar a palavra “igual”, substituindo por “mesma medida” ou “congruente”. Essa tendência foi adotada pelos sujeitos de forma natural.

Ao longo da atividade, inferimos por meio dos registros escritos e da áudio-transcrição que os sujeitos progrediram em nível formalização e passaram pelos níveis de aprendizagem perceptivo/intuitivo, empírico e teórico e desenvolveram a capacidade de reconhecer dois triângulos semelhantes mesmo que estejam em posições isométricas distintas, estabelecem correspondência de forma visual e simbólica entre os ângulos e lados congruentes desses triângulos e que sabem diferenciar triângulos semelhantes de triângulos congruentes por meio da razão de semelhança.

4. 3. 2 Episódio 2 - UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

No episódio 2 foi aplicada a UARC 2, no dia 21/04/2023, com o objetivo de estabelecer critérios suficientes para a ocorrência de congruência de triângulos. Os grupos nesse dia ficaram com a mesma configuração faltando alguns sujeitos, entretanto mantiveram-se os códigos de identificação adotados na primeira atividade, conforme apresentado no quadro 11 da seção 4.1.

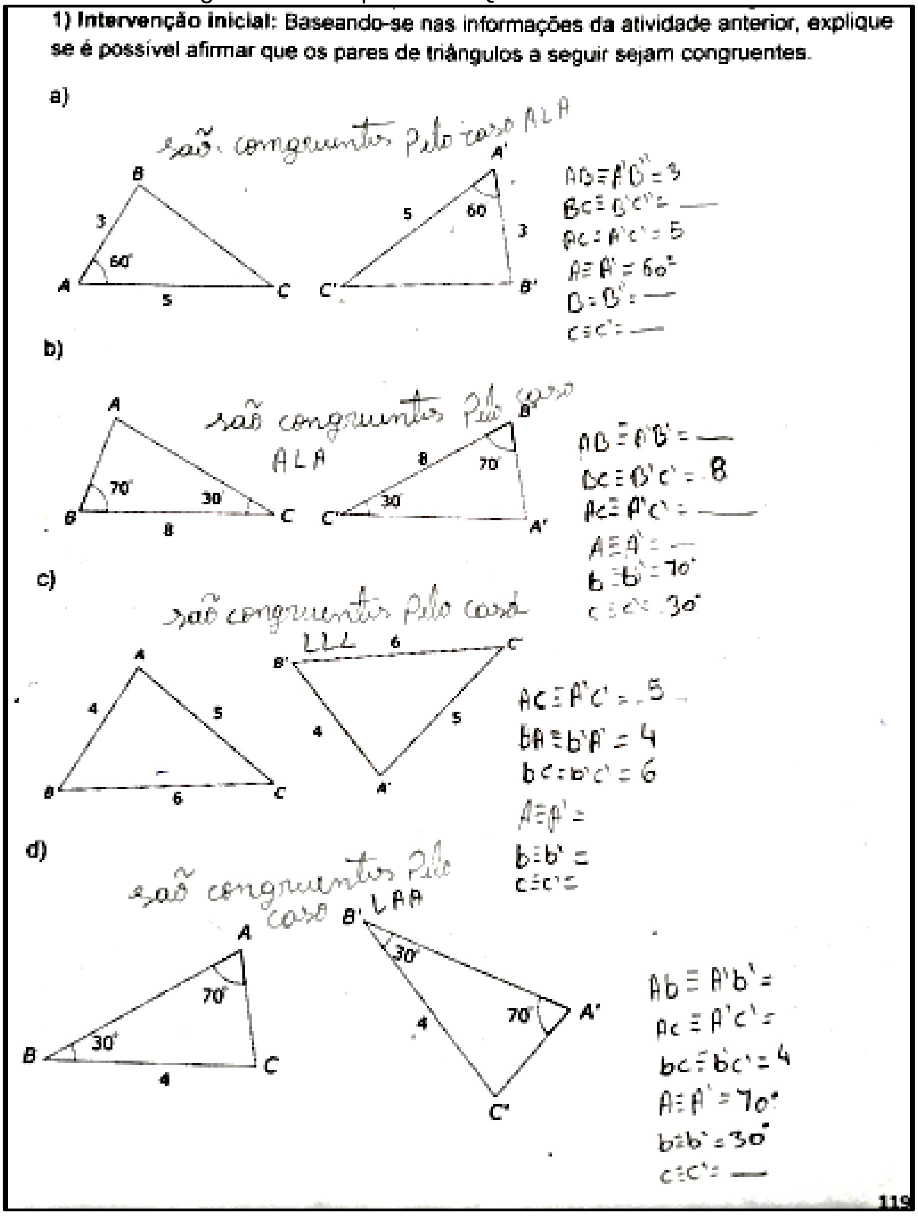
Inicialmente apresentamos a malha isométrica e suas características sobre os triângulos equiláteros que a formam, enfatizando que os lados ($\boldsymbol{L}$) são iguais e que as alturas ($\boldsymbol{h}$) também podem ser usadas como parâmetro de medida e que todos os ângulos são de 60^0. Projetamos uma malha isométrica em branco na lousa e criamos diferentes triângulos e assim fixamos essa caracterização da utilização da malha isométrica, também apresentamos a contagem de lados e ângulos de um triângulo (A-L-A-L-A-L) (apresentada na seção 1.4).

Terminada a parte de familiarização com o recurso didático, partimos para a execução das intervenções do protocolo escrito.

Segmento da intervenção inicial da UARC 2.

Na questão 1, apresentamos os pares de triângulos que os estudantes deveriam identificar. Pelo que aprenderam até aqui, deveriam verificar se eram ou não congruentes. Orientamos que deveriam considerar as letras dos vértices para parear ângulos e lados. Nessa fase apenas acolhemos as proposições e pedimos que registrassem sem negociação de ideias.

Figura 37 - Respostas a Questão 1 da UARC 2



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

Na figura 37, temos as respostas da questão 1 e da questão 8. A questão 8 foi respondida após a formalização e mais a frente falaremos dela. Na questão 1, os sujeitos apenas responderam de acordo com o que aprenderam na UARC 1.   Nessa questão todos os pares são congruentes, mas como os sujeitos estão com a definição geral de congruência de triângulos, a maioria identificou os pares como não congruentes, inicialmente. Como a definição era de que a condição para a ocorrência de triângulos seria um pareamento de todos os ângulos e lados de dois triângulos, eles deixaram identificados em seus registros escritos a lacunas que não atendiam a esse critério, para cada par de ângulos e de lados.

A seguir, analisamos um recorte com indícios de aprendizagem.

302. B6: Sim.
303. Professor: Por que?
304. C1: Porque tem a mesma medida e o mesmo ângulo.
305. Professor: Mas todos? Tem a garantia de todos? E a letra B vocês acham que são? Tem como garantir que todos os pares de lados e todos os pares de ângulos tem a mesma medida?
306. C1: Sim, porque esse aqui tem que ser o mesmo que esse aqui.
307. Professor: Tem que ser. Por que tem que ser?
308. C1: Porque é o mesmo exato. Tem o mesmo tamanho.

Neste recorte verificamos que o professor fez apenas provocações para que os sujeitos refletissem sobre as informações dadas, se seriam suficientes ou não para classificar os pares de triângulos como congruentes. Adotamos uma abordagem comunicativa interativa dialógica com padrão de interação I-R-A.

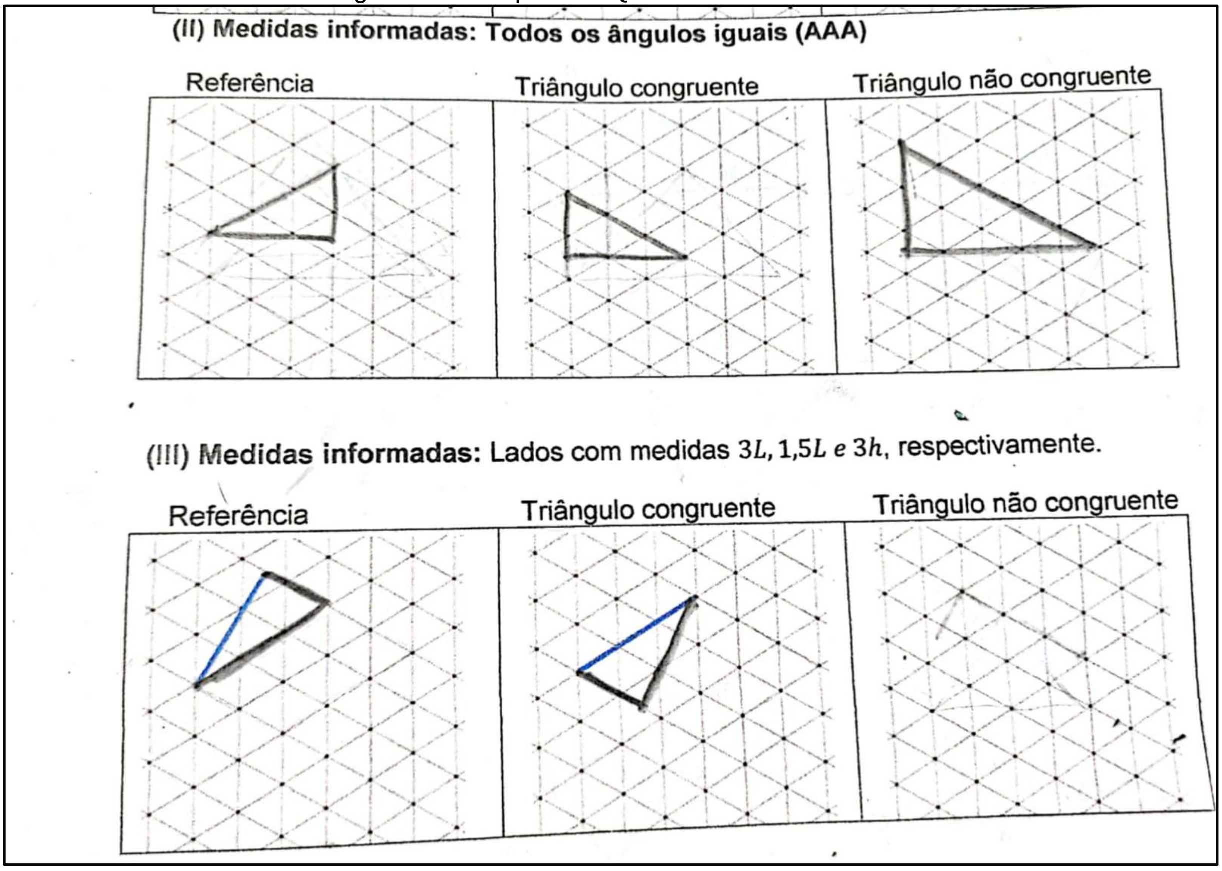
Segmento da intervenção exploratória da UARC 2

Na segunda questão os estudantes reuniram as informações de cada bloco para criar um triângulo referência, um congruente a este e outro não congruente ao de referência. Em algumas malhas referentes aos triângulos congruentes havia um lado fixado apenas para que o estudante pudesse construir triângulo congruente em posição diferente ao da referência (rotacionado e/ou refletido), sendo opcional, conforme a dificuldade do grupo, fazer na mesma posição do triângulo de referência.

Para que os sujeitos conseguissem adotar a posição sugerida enfatizamos a ordem de lados e ângulos que pode ser feita nos sentidos horários e anti-horários. O estudantes perceberam que em alguns casos, com as informações que foram inicialmente fixadas, era impossível criar um triângulo não congruente ao de referência. Para que não se alongassem tentando fazer algo que somente o professor-pesquisador sabia que era impossível estabelecemos prazo de 10 minutos para cada bloco.

A figura 38 ilustra uma das resoluções dos sujeitos à intervenção exploratória.

Figura 38 - Resposta a Questão 2 da UARC 2.



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

A figura 38 ilustra duas situações: uma que as informações permite realizar as três construções e outra, que por ser um caso de congruência não permite a construção da figura não congruente a figura de referência. Na primeira situação da figura 38, temos como informação fixada apenas os ângulos, o que não impediu de reproduzir as três figuras. Por ouro lado, na segunda situação, temos fixadas as medidas dos três lados, recaindo no caso Lado, Lado, Lado. Após várias tentativas, os sujeitos perceberam que seria impossível construir um triângulo não congruente ao de referência. E assim foi feito para os quatro casos de congruência de triângulos.

Destaca-se que no material, pelo menos um lado ou ângulo vem desenhado para iniciar a construção e induzir o sujeito a fazer figuras congruentes entre si, mas em posições diferentes. Essa foi uma atitude que tomamos devido as conclusões que tivemos diante da análise de livros didáticos (seção 2.2), onde encontramos vários exemplares cujas ilustrações dos pares de triângulos congruentes estavam sempre na mesma posição, passando a falsa ideia estática desse conceito e o erro conceitual de que se estivesse numa posição rotacionada ou refletida descartaria-se a congruência. O recorte a seguir apresenta a discussão acerca da possibilidade construção do triângulo não congruente.

> 392. Professor: Vamos ver aqui. Aqui está faltando 3 alturas.
> 393. A1: Ah, é. Verdade.
> 394. Professor: Porque aqui ele deu as alturas e aqui ele deu os três lados, então você tem que completar as 3 alturas e 1,5 lado.
> 395. A2: Assim?
> 396. Professor: É, só que esse não congruente não tem as mesmas medidas de lado, você acha que é possível?
> 397. C1: Tem que ter as mesmas medidas, todos?
> 398. Professor: Tem. Vejam bem gente, quando eu peço para vocês construírem eu quero que vocês reflitam se é possível construir uma figura não congruente com essas medidas, não congruente a está, você acha que dá? Para eu fazer com as mesmas medidas de lado e ela ser não congruente?
> 399. A1: Com essa medida de azul?
> 400. Professor: Isso, tem como fazer com essas mesmas medidas e ela não ser congruente?
> 401. A3: Acho que tem.
> 402. Professor: Acha que tem, então tenta construir ai.
> 403. Professor: Ficou congruente né? É possível então? Não é a mesma medida, mas esse ficou congruente, eu quero não congruente. É possível?
> **404. B6: Não é possível.**

Na discussão apresentada nos turnos de 392 a 404, temos o desenvolvimento de nível de aprendizagem empírico, aquele que advém de manipulação e ou experimentação. Na abordagem comunicativa apresentada, o professor fez I-OMOs de forma enfática para conduzir a conclusão de que em alguns casos, com determinadas informações fixadas, não seria possível construir uma figura não congruente a de referência. Conclusão esta evidenciada na fala do sujeito B6 no turno 404.

Na metodologia de ensino que adotamos é importante que o sujeito tenha suas conclusões mediadas e não imediatamente respondidas. A formalização gradual de conhecimentos aproxima o aprendiz da aprendizagem com o mínimo de ruído possível, pois advém de investigação, discussão e socialização.

Segmentos das intervenções reflexivas da UARC 2

Durante as intervenções reflexivas e orais do professor, os estudantes concluíram em quais casos existiam condições suficientes para ocorrência de congruência de triângulos. Os sujeitos identificaram os casos em que não foi possível construir o triângulo não congruente ao de referência (LLL, LAL, ALA e LAA_o). Pensando que se não é possível criar um triângulo não congruente ao de referência nos casos, é porque esses pares de triângulos são congruentes.

O recorte dos turnos 494 ao 507 apresentam o reconhecimento por parte dos sujeito dos casos de congruência de triângulos.

> 494. Professor: Então eu tenho 3 informações se correspondendo. Quais são essas informações?
> **495. Alunos: ângulo, lado, ângulo.**
> 496. Professor: Eles são congruentes?
> 497. Alunos: Sim.
> 498. Professor: por qual caso?
> **499. A1: Caso ângulo, lado, ângulo.**
> 500. Professor: Certo, então pode escrever ai. Na letra c me digam qual é esse caso?
> 501. A1: Lado, ângulo e lado.
> 502. Professor: veja bem A1, analise, eu tenho algum ângulo ai?
> 503. A1: Não.
> 504. Professor: Então qual o caso?
> **505. A1: Lado, lado, lado.**
> 506. Professor: São congruentes pelo caso lado, lado e lado. Letra D, são congruentes por qual caso?
> **507. Alunos: Lado, ângulo, ângulo.**

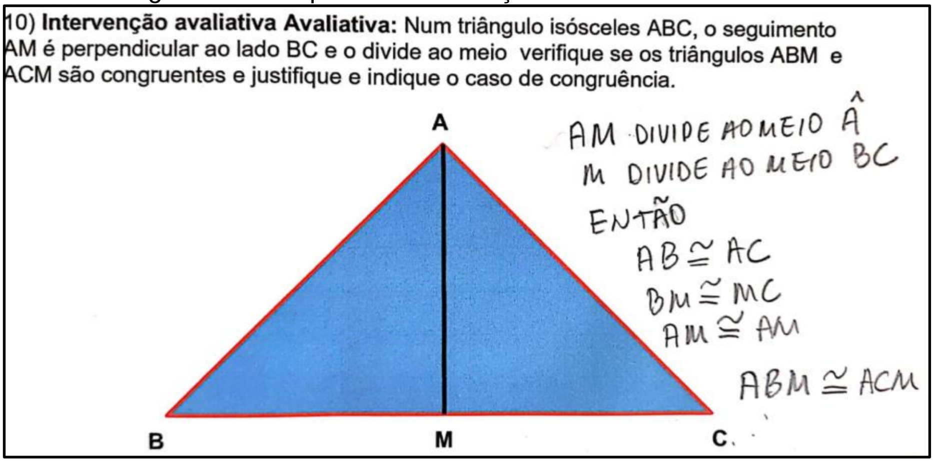
Numa abordagem comunicativa interativa de autoridade os sujeitos foram classificando cada um dos casos de congruência de triângulo, alcançando assim o nível teórico de aprendizagem. Neste ponto foi importante a adoção do “relógio triangular” (Figura 4, seção 1.4) para induzir os sujeitos a pensarem na ordem LALALA no sentido horário e anti-horário.

Seguimento das intervenções avaliativas da UARC 2

Inicialmente na questão 8, os sujeitos foram convidados a rever as questão 1. Diante da formalização dos casos de congruência, concluíram desta vez que todos os itens apresentavam pares de triângulos congruentes, como apresentado na figura 37 referente ao segmento da intervenção inicial.

Diante disso concluíram que embora a definição de Congruência de Triângulos estabelecesse a correspondência de congruência para todos os ângulo e lados dos pares de triângulos, há condições necessárias e suficientes que garantem essa ocorrência sem que todos os lados e ângulos sejam conhecidos. Diante dessas condições, os sujeitos puderam reconhecer a Congruência dos pares de triângulos da questão 1.

Figura 39 - Resposta a intervenção avaliativa da UARC 2.



Fonte: Dados da experimentação (2023)

Na figura 39 podemos observar que o sujeito conseguiu adotar uma linguagem simbólica para organizar as informações, organizar ao raciocínio e chegar a conclusão. Essa questão foi inspirada no trabalho de Luis (2006) apresentado na revisão de estudos (Seção 2.1) onde indica a argumentação e prova como uma maneira eficaz de ensinar geometria.

Diante do exposto, inferimos que os objetivos de aprendizagem para a UARC 2 foram alcançados. De modo que os sujeitos foram capazes de utilizar o recurso didático malha isométrica para realizar empirias sobre os casos de congruência de triângulos.

Ao aprenderem os casos de congruência de triângulos, os sujeitos também reconheceram a importância da contagem L-A-L-A-L-A no sentido horário e anti-horário.

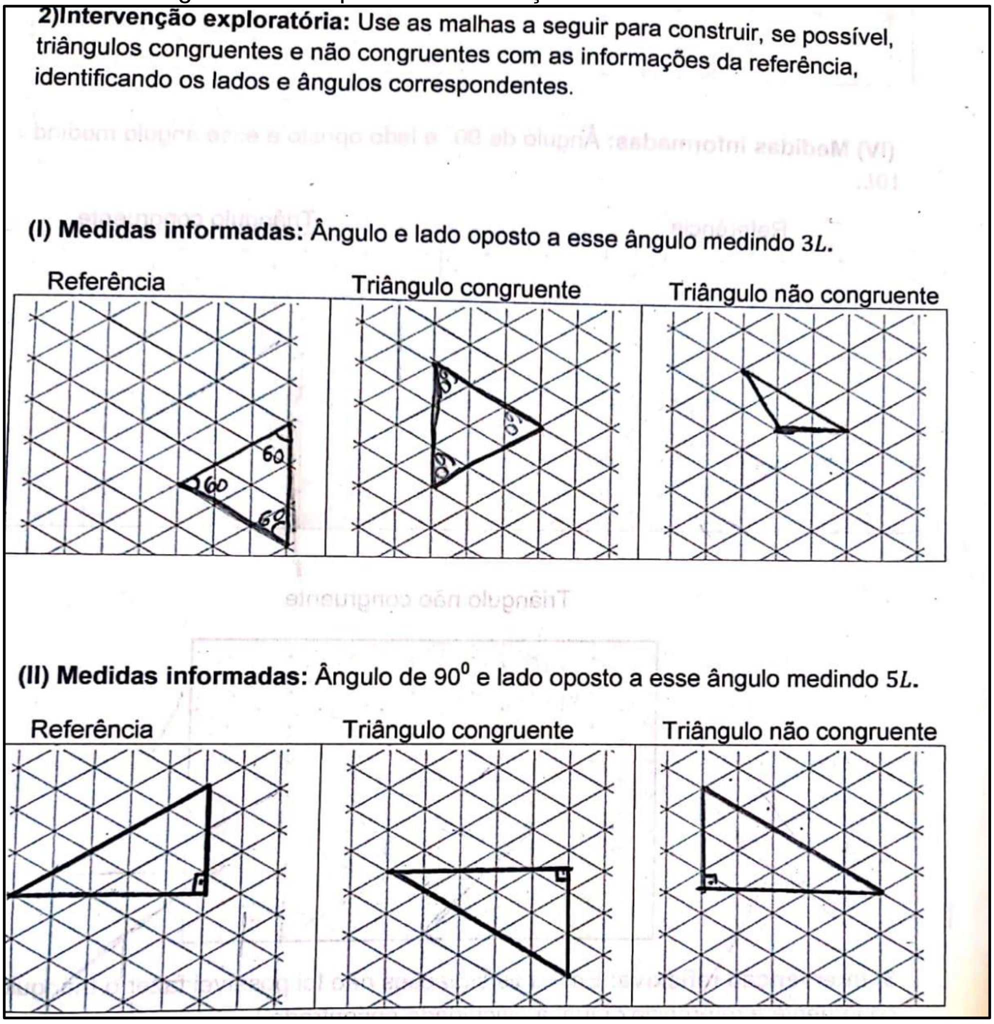
4. 3. 3 Episódio 3 - UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.

O episódio 3 ocorreu no dia 25/04/2023, em 2 h/aula e trata-se da experimentação da UARC 3, sujo objetivo é identificar o caso especial de congruência de triângulos que é aplicável apenas para triângulos retângulos. Nessa atividade os sujeitos estavam familiarizados com o recurso didático malha isométrica e a atividade transcorreu sem muitas dificuldades, sendo executada em menos tempo e sem muitas I-OMOS. Assim, o procedimento e a organização em grupos foi o mesmo da atividade anterior.

Foi necessário fazer uma breve retomada no quadro branco sobre ângulos e lados opostos de um triângulo retângulo, bem como quais seriam os catetos e qual seria a hipotenusa. Tudo isso para que durante a execução da atividade os sujeitos percebessem que dois triângulos retângulos são congruentes se catetos e a hipotenusa correspondentes são congruentes. Para isso, no protocolo escrito consideramos que para haver hipotenusa é necessário haver o ângulo reto oposto a ela. Então apresentamos situações em que não era possível criar um triângulo não congruente ao de referência pelo fato de não estar pareado cateto e hipotenusa congruentes.

Na intervenção inicial desta UARC apenas instigamos com a seguinte reflexão “Pense sobre a atividade anterior, você percebeu que os casos de congruência apresentados fixam sempre 3 informação sobre os triângulos congruentes? E se fossem apenas 2 informações fixadas, seria suficiente para garantir a congruência? Discuta com seus colegas.” A discussão aqui é sobre a quantidade suficiente e necessária de informações fixadas entre uma par de triângulos para garantir que eles sejam congruentes. Assim, os preparamos cognitivamente que poderiam ser menos informações fixadas.

Figura 40 - Resposta a intervenção avaliativa da UARC 2.



Fonte: Dados da experimentação (2023)

Na figura 40 temos duas situações, uma que não é caso especial de congruência de triângulos e outra que é. Na primeira o ângulo de 90^0 não está fixado e portanto foi possível construir triângulos congruente e não congruente ao de referência. Por outro lado, quando fixados o ângulo de 90^0 e a medida da hipotenusa só foi possível construir o triângulo congruente ao de referência. O recorte a seguir ilustra o indício de aprendizagem sobre o caso especial de congruência de triângulos. Note, na figura 40, que o triângulo construído na malha reservada para o não congruente, na verdade é um triângulo congruente ao de referência em posição refletida.

> 557. Professor: Quero que você vá para a sexta. Na quarta diz assim qual a característica comuns nesses casos em que você só conseguiu construir triângulos congruentes aos de referência? Quais foram os que a gente não conseguiu fazer congruente? 2 e a 4. O que o comando da 2 e da 4 tem em comum, olhem para mim.

> **558. B6: O ângulo de 90°, Professor. Então quando você amarrou o ângulo de 90° você criou um caso de congruência, ao criar você não consegue fazer um não congruente, é igual esses 3 casos aqui. Por que chamamos esse de caso especial? Porque para esse caso especial eu só preciso de duas informações. Aqui eu preciso de 3.**
> (Dados da Experimentação, 2023).

Temos no turno 558, expressado pelo sujeito B6, o fechamento da última atividade e dado por finalizada experimentação da Sequência Didática. Embora o estudante não tenha complementado na sua argumentação que se trata de um caso especial para triângulos retângulos, os registros escritos e fragmentos de falas de outros sujeitos durante as socializações nos levaram a concluir que o objetivo da UARC 3 foi alcançado com êxito e que o recurso didático adotado se mostrou potencial facilitador na aprendizagem de Congruência de Triângulos.

Por fim, concluímos que a Sequência Didática ora experimentada com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental apresentou potencialidades didáticas para o ensino de Congruência de Triângulos por ter auxiliado a alcançar os objetivos de aprendizagem pretendidos: Definição de Congruência de Triângulos, Casos de Congruência de Triângulos e caso especial de Congruência de Triângulos.

Os indícios de aprendizagem analisados por meio de Análise Microgenética e Análise do discurso nos levaram a concluir que os sujeitos desenvolveram aprendizagem em gradual formalização em níveis perceptivo/intuitivo, empírico e teórico.

Para ter mais um parâmetro de análise, de forma auxiliar, aplicamos um teste de verificação de aprendizagem que apresentamos a seguir.

4. 3. 4 Teste de verificação de aprendizagem

A seguir temos uma análise quantitativa do desempenho dos estudantes sujeitos desta pesquisa por meio de um teste aplicado ao final da experimentação da Sequência Didática realizado com os mesmos sujeitos no dia 28/04/2023.

No quadro 14 temos a distribuição de notas para cinco questões com peso 2 cada uma, totalizando 10 pontos. O referido teste está disponível no Apêndice E.

Quadro 14 – Desempenho quantitativo dos sujeitos da pesquisa.

Grupo	SUJEITO	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	TOTAL
A	**A1**	1,0	2,0	2,0	0,0	2,0	7,0
	A2	1,0	1,0	1,0	0,0	2,0	5,0
	A3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	A4	1,0	2,0	0,0	0,0	2,0	5,0
	A5	0,0	0,0	1,0	2,0	2,0	5,0
B	**B1**	1,0	2,0	2,0	1,0	2,0	8,0
	B2	1,0	2,0	1,0	1,0	2,0	7,0
	B3	0,0	2,0	0,0	0,0	2,0	4,0
	B4	1,0	1,0	2,0	2,0	0,0	6,0
	B5	1,0	1,0	1,0	0,0	2,0	5,0
	B6	0,0	2,0	1,0	0,0	2,0	5,0
C	**C1**	2,0	2,0	1,0	1,0	0,0	6,0
	C2	1,0	2,0	2,0	1,0	2,0	8,0
	C3	0,0	1,0	2,0	1,0	2,0	6,0
	C4	1,0	2,0	0,0	0,0	2,0	5,0
Média		**0,7**	**1,46**	**1,06**	**0,6**	**1,6**	**5,4**

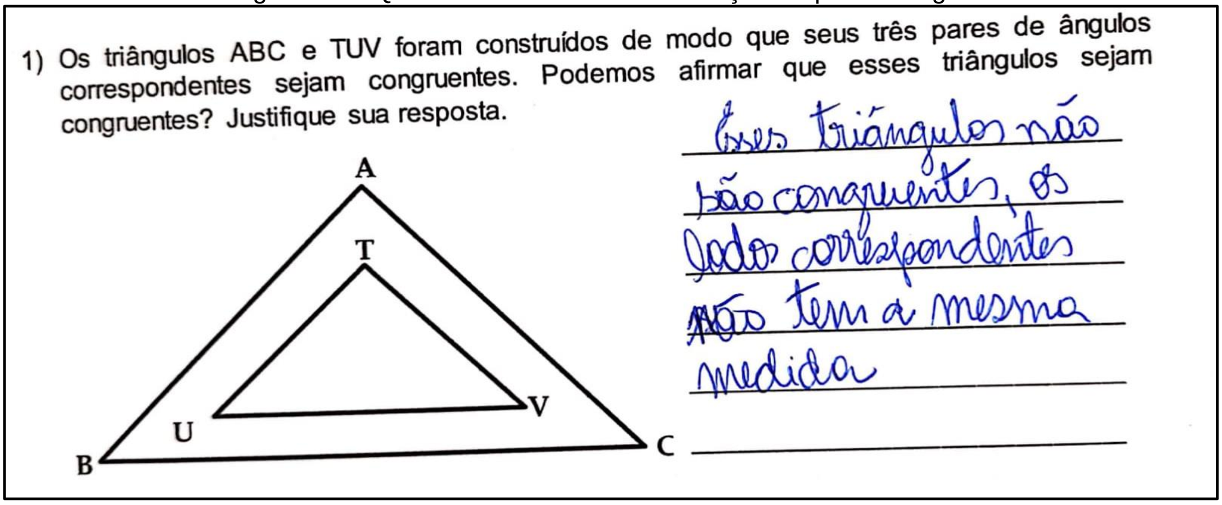
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Notemos que as questões 1 e 4 foram as que os estudantes tiveram menor desempenho, pois apresentaram um média geral de 0,7 e 0,6, respectivamente. Essas questões exigiam argumentação e prova e durante a execuxão da Sequência Didática não houve tempo hábio para exercitar esse tipo de questão, mas foi possível verificar que foi iniciado um processo de aprendizagem e apreenssão de conhecimentos por meio desse caminho didático. A questão 2 que seria para reconhecimento dos casos de congruência houve um bom desempenho, 1,46 para uma questão que valia 2 pontos. E as questões 3 e 5 eram de aplicação da definição de congruência de triângulos, também apresentaram bom desempenho, sendo que na questão 2 houve conexão com equação do 1º grau, como sujerido em nossa revisão de estudos e análise de livros didáticos, conexão com outros objetos de conhecimento matemático.

A média geral da turma, mesmo sem um episódio de fixação de conhecimentos, foi de 5,4, acima da média adotada pela secretaria de educação a qual os estudantes são vinculados.

As figuras 41, 42 e 43 ilustram as resoluções.

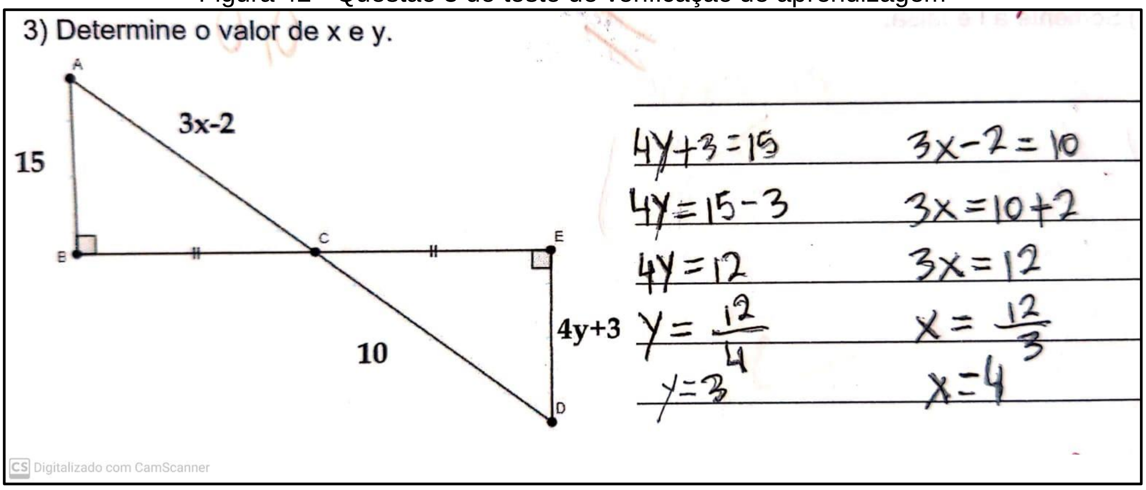
Figura 41 – Questão 1 do teste de verificação de parendizagem



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

Temos na figura 41 que o sujeito foi capaz de identificar o motivo dos pares de triângulos em questão não serem congruentes entre si. Usou devidamente a palavra correspondente e mesma medida, demonstrando domínio conceitual sobre o que estava justificando.

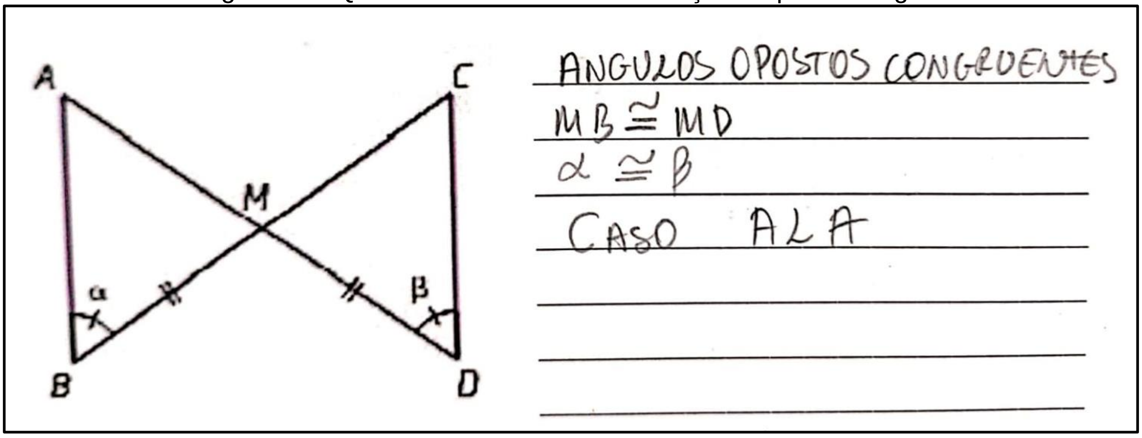
Figura 42 - Questão 3 do teste de verificação de aprendizagem



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

A figura 42 ilustra que além de compreenderam a defição de congruência de triângulos, os sujeitos estabeleceram conexões com outros objetos matemáticos, tais como transformações isométricas, equação do 1º grau e ângulos opostos pelos vértices, além de terem realizado de forma satisfatória o algoritmos e os cálgulos aritméticos necessários ´para a resolução da questão.

Figura 43 - Questão 5 do teste de verificação de parendizagem



Fonte: Dados da Experimentação (2023)

Podemos dizer, que, embora nossa análise seja focada na qualidade do processo de ensino, a Sequência Didática para o ensino de Congruência de Triângulos estruturada como UARC apresentou potencialidades didáticas também no que diz respeito ao desempenho quantitativo que pode ser melhor analisado numa reaplicação futura, em que antes seja realizado exercícios de fixação para melhor consolidação de aprendizagem.

Na seção a seguir apresenta-se uma síntese de resultados com as conclusões sobre as potencialidades didáticas da Sequência Didática construída para o ensino de Congruência de Triângulos.

4. 3. 5 Síntese de resultados

Nesta seção, buscamos reunir as principais conclusões sobre as respostas a questão norteadora de pesquisa e sobre os objetivos definidos para ela. Construímos, experimentamos e analisamos uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos e nessa criação didática tivemos vigilância sobre estarmos desenvolvendo um saber científico e não somente um recurso para facilitar a aprendizagem de outros saberes.

Ao adotarmos a UARC como estruturante da Sequência Didática, tivemos como premissa a constituição gradual e colaborativa de formalização de conhecimentos. Essa premissa foi fundamental para acompanharmos o progresso da aprendizagem e a intervir nos momentos em que a aprendizagem poderia acontecer de forma equivocada.

Ao adotarmos a Análise Microgenética e a Análise do Discurso como instrumento de investigação de indícios de aprendizagem, sabíamos que deveríamos estimular o vocabulário científico e a mobilização de conhecimentos base para melhor qualidade de abordagem comunicativa e padrões de interação. Com isso, ao fazermos os sujeitos explicarem suas conclusões e estratégias acabamos por testemunhar de que forma e em quais momentos a aprendizagem aconteceu. O jeito próprio de cada aluno se expressar revelava um pouco do conhecimento que trazia e suas dificuldades que foram sendo superadas de forma colaborativa com as habilidades uns dos outros também. Por exemplo, no grupo C havia um sujeito que se expressava muito bem oralmente sobre o que havia compreendido, mas não conseguia escrever, delegando essa função para o colega que não tinha a mesma habilidade de fala, mas conseguia fazer registro escrito, algébrico, simbólico e geométrico.

Embora o referencial teórico e o metodológico estivessem devidamente definidos, acabamos descobrir outras caracteristicas sobre o objeto matemático em tela e seu ensino ao longo das várias fases dessa pesquisa como elencamos a seguir:

Sobre o recurso didático Malha Isométrica tivemos o *insight* de adotá-lo em decorrência de revisão de estudos realizada, percebemos o potencial empírico desse recurso, o que se encaixou adequadamente ao aporte da UARC e TSD adotados, proporcionando diferentes situações didáticas e tipos de intervenções dialógicas professor-aluno em torno do objeto de estudo.

Ainda na revisão de estudos verificamos as diferentes abordagens de ensino sobre o objeto matemático Congruência de Triângulos e chegamos a conclusão de que a abordagem por meio da razão de congruência traria uma melhor fluidez quanto a formalização gradual de conhecimentos. Além disso, a indicação de abordagem conectada com outros objetos matemáticos como equação e transformações geométricas trouxe um maior domínio conceitual sobre o objeto.

A pesquisa diagnóstica com estudantes apontou resultados que reforçaram a problemática de falta de conexão com outros objetos matemáticos na maneira como os estudantes compreendem a Congruência de Triângulos no ensino fundamental, conexão que constatamos ter sido bem desenvolvida em nossa pesquisa evidenciada tanto nos registros escritos quanto nas falas ao longo das atividades.

Ainda como resultado da recomendação da pesquisa com estudantes, percebemos que os sujeitos que participaram da experimentação se sentiram mais estimulados nas atividades práticas com a malha isométrica, tendo a curiosidade aguçada, o que verificamos por meio do empenho na realização das construções solicitadas e o quanto essas construções contribuíram para o desenvolvimento cognitivo geométrico sobre Congruência de Triângulos.

Ao longo das atividades, inferimos por meio dos registros escritos e da áudio-transcrição que os sujeitos progrediram em nível formalização e passaram pelos níveis de aprendizagem perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Desenvolveram habilidades geométricas visual, verbal e lógica em nível de reconhecimento, análise e dedução (seção 2.1.2), reconhecendo dois triângulos congruentes mesmo que estejam em posições isométricas diferentes e conseguiram parear visualmente e simbolicamente os ângulos e lados congruentes desses triângulos.

O recurso didático adotado se mostrou potencial facilitador na aprendizagem de Congruência de Triângulos, sendo que da contagem L-A-L-A-L-A no sentido horário e anti-horário e os parâmetros de medida baseado na medida do lado e altura dos triângulos da malha possibilitaram manipulações algébricas para as construções geométricas. Essa foi uma abordagem contra intuitiva, pois em geral a partir da figura construída realiza-se as deduções algébricas.

Também foi contra intuitivo nos casos de congruência de triângulos a verificação de cada caso por meio da impossibilidade de construção do triângulo não congruente. É uma maneira diferente de raciocínio, mas perfeitamente lógica do ponto de vista matemático e diferente de tudo o que encontramos na bibliografia analisada. Para uma síntese dos resultados sobre as contribuições da Sequência Didática analisada apresentamos o quadro 15.

Quadro 15 – Contribuições para o triângulo didático

Aluno	Professor	Saber
• Aprendizagem por meio de	• Maior interação professor-aluno;	• Apresentação de diferentes

manipulação e investigação; • Aprendizagem colaborativa; • Estímulo da curiosidade; • Mobilização de conhecimentos base; • Processo interativo de aprendizagem; • Gradual formalização de conhecimentos; • Promoção de envolvimento dos alunos com o que está sendo estudado; • Desenvolvimento vocabular científico.	• Feedback durante o processo de ensino, podendo intervir; • Material didático e recurso didático eficiente para o ensino; • Cria maior desenvoltura vocabular do professor; • Proporciona ao professor uma postura de mediador da aprendizagem;	abordagens sobre objeto Congruência de Triângulos; • Gradual formalização da ideia de congruência de triângulos por meio da razão de semelhança igual a 1; • Conexão com outros outros objetos matemáticos; • Compreensão visual e empírica da da Congruência de Triângulos em diferentes transformações isométricas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

.

No quadro 15, temos as principais contribuições na perspectiva da TSD da Sequência Didática estruturada por UARC apresentada para o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos, respondendo assim a questão norteadora desta pesquisa. Além dessas contribuições podemos dizer que a abordagem adotada traz contribuições para a área de Educação Matemática e de Ensino de Matemática ao que se refere ao a sua revisão de estudos, estudo histórico e epistemológico e estratégias de ensino adotadas, aliadas ao recurso didático e ao material elaborado.

Essas foram as potencialidades didáticas da Sequência Didática construída para o ensino especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos. Diante do exposto podemos afirmar que foi validada para ser adotada como material educacional no ensino de Congruência de Triângulos no Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizar uma pesquisa de mestrado conciliada com o trabalho não foi uma tarefa fácil. Quando me desafiei a subir mais esse degrau acadêmico sabia que encontraria muitos obstáculos, mas não tinha noção do quanto que iria (re) aprender durante as disciplinas do curso, bem como o desenvolvimento da pesquisa, entre muitas idas e vindas tive a parceria e incentivo de meu orientador.

Tantos anos trabalhando como ensino de matemática no ensino fundamental se somou com a experiência nova com pesquisa em ensino de matemática e em especial sobre o ensino de Geometria. Ao realizar revisão de estudos percebi que muita coisa de minha didática poderia ser melhorada e que ainda havia muito para contribuir, ante as necessidades educacionais em matemática que verifiquei também por meio da análise de livros didático e diagnóstica com estudantes. Nessa fase de estudos sobre o ensino colhemos informações que foram essenciais observar para a construção de nossa sequencia didática:

- Contrapondo as orientações curriculares, nos preocupamos em desenvolver o estudo sobre o saber científico que envolve Congruência de Triângulos e não como recurso para ensino de quadriláteros, o que pode vir como consequência;
- A malha isométrica apresenta potencialidades no ensino tanto da geometria quanto da álgebra. Nós exploramos isso quando estabelecemos notações sobre os lados e ângulos dos triângulos da malha para construir triângulos congruentes;
- A argumentação e prova são recursos que aprimoram o vocabulário escrito e oral dos educandos;
- A criança e o adolescente se envolvem mais nos episódios didáticos de matemática quando há manipulação e experiências diretas. Eles têm prazer em dizer “eu fiz”, “eu consegui”, “eu acertei”, “eu entendi”, “eu desenhei”, “eu construí”. Essa é base da UARC, a reconstrução é pessoal e coletiva.
- A História da Matemática é elemento formador epistemológico essencial para a constituição do sujeito epistêmico do jogo didático, o

professor. Permite entender todos os contextos em que determinado objeto evoluiu e realizar uma transposição para a realidade escolar.

- É contraproducente ensinar um objeto isolado dos demais objetos matemáticos. O ensino fragmentado cria visões isoladas e limitadas e limitadoras sobre a Matemática. Ampliar as possibilidades de aplicações e representações foi a alternativa adotada nesta pesquisa e foi uma decisão bem sucedida.
- Um obstáculo didático que nos empenhamos em superar foi o de visão estática da Congruência de Triângulos, Os estudantes tiveram oportunidade de verificar que dois triângulos congruentes podem se apresentar em posições refletida e/ou rotacionada um em relação ao outro.

As indicações curriculares e as pesquisas preliminares frente ao desafio proposto pelo programa de Pós-graduação, elaborar uma sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos, me fizeram construir um instrumento de ensino que favorece um ensino de matemática que conduza a uma formalização gradual da aprendizagem por meio de interação dialógica e argumentação matemática, que favorece um estudo de Congruência de Triângulos que se conecte a outros assuntos de matemática, dentre outros elementos.

Nosso aporte teórico baseado dentre outros, na Teoria das Situações didáticas e na Análise do discurso, nos levou a criar uma sequência didática com três atividades que têm por objetivo de aprendizagem: definir Congruência de triângulos, deduzir os casos de congruência, deduzir o caso especial de congruência. Como recurso didático, adotamos a malha isométrica para ser manipulada para construção orientada de triângulos congruentes e não congruentes que os estudantes pudessem, pelos padrões observados e discutidos, chegar a uma generalização.

Na fase de experimentação aplicamos nosso constructo a quinze estudantes 8º ano do Ensino Fundamental, formando-se três grupos de estudos, cujas falas foram gravadas em áudio e depois transcritas. Após isso, analisamos os dados coletados por meio de Análise do Discurso e Análise Microgenética para recortar os indícios de aprendizagem, e, para respondermos nossa questão de pesquisa: *Quais as contribuições para o ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos de* *uma sequência didática estruturada por UARC e com malha isométrica como recurso didático?*

A estrutura UARC possibilitou uma organização das situações didáticas de modo que os sujeitos passassem pelos níveis de formalização pré-formal, formal e pós-formal, alcançando na perspectiva da Análise do Discurso os níveis epistemológicos de aprendizagem perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Quando dizemos que os sujeitos passaram por “níveis” em sua essência, estamos falando de construção gradual de conhecimentos, respeitando o tempo cognitivo de cada educando e valorizando sua capacidade de se comunicar matematicamente por meio de bagagem sócio-histórico-cultural. Além disso, queremos dizer que os educandos tiveram os conhecimentos base mobilizados inicialmente, em seguida foram submetidos a experiências empíricas de manipulação, observação e registro de conclusão, seguida da formalização de definições e propriedades e de verificação de aprendizagem.

Todas as decisões didáticas que tomamos se fizeram bem sucedidas por estarem fundamentadas teoricamente, metodologicamente e embasadas em experiências relatadas em outras pesquisas que se fizeram presentes na construção e análise da Sequência Didática ora experimentada e validada para o ensino de Congruência de Triângulos. Nesta deixa, enfatizamos nossa contribuição para a área da educação matemática: a indicação de um ensino de matemática dialogado e colaborativo, que apresente ideias contra intuitivas e reflexivas que envolvam o estudante num jogo de investigação, experimentação e argumentação. Somado a isso, indicamos uma forma de ensinar geometria com movimento visual e manual que foi feito em material concreto, mas pode ser adaptado para a tecnologia digital ou inteligência artificial, mas essencialmente a geometria não precisa ser estudada de forma estática, uma vez que as transformações geométricas são uma aliada na percepção de movimento geométrico.

Pessoalmente falando, essa pesquisa mudou minha conduta didática, pedagógica e conceitual. Didática porque carrego a preocupação de elaborar minhas aulas pensando na minha abordagem e na realidade cognitiva de meus educandos; Pedagógica porque a minha relação com meu educando vem se tornando cada vez mais dialógica no sentido que eu também aprendo com eles e isso vem agregando maior percepção sobre suas dificuldades e aumentado minhas possibilidades de intervir; conceitualmente porque passei ainda mais a me aprofundar no estudo sobre os objetos matemáticos, não somente pelas formalizações postas nos livros, mas também pela sua constituição histórica e epistemológica.

No mais, ao final desta pesquisa, percebo que ainda podemos tirar dela outras contribuições por meio de reaplicações e de análise por meio de outros critérios como os indicados na revisão de estudos e no diagnóstico com estudantes, tais como as habilidades geométricas e as estratégias mentais que foram desenvolvidas, e sobre as entradas que articulam “o ver e o dizer” no desenvolvimento do pensamento geométrico. Também, a mesma notação que adotamos na malha isométrica pode ser adotada para outros objetos matemáticos que envolvem álgebra e geometria. Essas são nossas contribuições para a pesquisa em Ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Paula Márcia *et al.* **A importância do pensamento visual na geometria**. IBC. Rio de Janeiro. 2003.

BEZERRA, Aluzimara Nogueira. **As isometrias nos azulejos de Belém**: uma proposta de ensino. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini** : manual do professor. 8º ano . – 9. ed. – Moderna. São Paulo, 2018.

BRANDEMBERG, João Cláudio. Revisitando a História da Matemática e enfatizando aspectos de sua formação (composição, consolidação) no campo da Educação Matemática. Dossiê: Tendências de Educação Matemática. **Revista Cocar.** Edição Especial N.14/2022 p.1-21

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2017.

BROUSSEAU, G. (1986). Problèmes de l'enseignement des décimaux. In: **Recherche em Didactique des Mathématiques** (RDM). Grenoble/França: La Pensée Sauvage, v. 1/1.

CABRAL, N. F. (2017). **Sequências Didáticas**: Estrutura e Elaboração. Belém:SBEM-PA.

CHAQUIAM, M. *et al*. A percepção de alunos e professores sobre o ensino e aprendizagem do cilindro circular reto. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 9, 2020.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: História e Matemática em sala de aula. Belém/SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, Miguel. História e matemática dos contextos às atividades. **Anais da X Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática.** Organização Universidade Federal do Pará. -- SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RJ : 2022b.

CHAQUIAM, Miguel. História e Matemática: um elo e quatro contextos. Dossiê: Tendências de Educação Matemática. **Revista Cocar.** Edição Especial N.14/2022a p.1-23

CHAQUIAM, Miguel. Historia y matemáticas integradas a través de un diagrama metodológico. **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1; 197 – 211, 2020.

COSTA, D. E. ; GONÇALVES,T. O. Compreensões, Abordagens, Conceitos e Definições de Sequência Didática na área de Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 36, n. 72, p.358-388, abr. 2022.

CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**. Tradução de Helena Londres. 2 ed. Planeta. São Paulo, 2021.

DANTE, Luis Roberto. **Teláris Matemática**: 8° ano: Ensino Fundamental, anos finais. - 3ª Ed. Ática. São Paulo, 2018.

DUVAL, Raymond. **As condições cognitivas da aprendizagem da geometria:** desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Traduzido por: ARINOS, C. R. M. et. Al. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, jan./dez., 2022

EICHENBERGER NETO, João. **História da Matemática.** Editora e Distribuidora Educacional S.A. Londrina, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FACCHINI, Camila. **Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado profissional). Universidade Estadual Paulista (UNESP). São José do rio Preto, 2021.

FERNANDES, Cláudio. **Brasil Colônia**; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiab/brasil-colonia.htm. Acesso em 04 de setembro de 2022.

FUKS, Rebeca. **Os 32 maiores compositores brasileiros de todos os tempos.** 2021. Disponível em: < https://www.ebiografia.com/compositores_brasileiros_todos_os_tempos/ >

Gay, Mara Regina Garcia. Silva, Willian Raphael. **Araribá Mais:** Matemática - 8º Ano do Ensino Fundamental. Moderna. São Paulo, 2018

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy ; CASTRUCCI, Benedito . **A conquista da matemática**: 8o ano : ensino fundamental : anos finais. — 4. ed. FTD — São Paulo, 2018.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf >. Acesso em: 02 de Nov. 2017.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Kaliandra Pacheco de; POERSCH, Kelly Gabriela; EMMEL, Rúbia. **Dificuldades de ensino e de aprendizagem em Matemática no oitavo ano do Ensino Fundamental**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 1, p. 01-15, fev. 2020.

LUIS, Silviane R. **Luis Concepção de uma sequência de ensino para o estudo da semelhança : do empírico ao dedutivo**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matematica). PUC-SP.São Paulo, 2006.

MENDONÇA, Maria F.M. **Congruência de triângulos:** análise de uma sequência didática utilizando o geogebra para o 8º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE. Recife/PE, 2021.

OLIVEIRA, Carlos N.C. de. **Geração Alpha matemática**- 8° ano ensino fundamental. 2ª ed. Edições SM. São Paulo, 2018.

PATARO, Patricia Moreno, BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 8º ano**: ensino fundamental, anos finais. 1. ed. Scipione. São Paulo, 2018

PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Coleção tendências em Educação Matemática- 3. ed. Autêntica Editora. Belo Horizonte-MG, 2018.

ROCHA, Rocha, João Silva. **Estudo de Congruência e Semelhança de Triângulos**: Uma Proposta Para o Ensino Básico. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas. Manaus, 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico** - 1. ed. – Cortez. São Paulo, 2013.

SILVA, E. M.; CHAQUIAM, M.; CABRAL, N. F. Um percurso metodológico para constituição de sequências didáticas: o ensino do conceito de função. **Ensino da Matemática em Debate**. v. 9, n. 1, p. 17-40. São Paulo, 2022.

SILVA, Lucas Rafael Pereira. **Congruência de triângulos no Geogebra**: uma proposta didática para o ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em

Ensino de Ciências e Matemáticas). Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia/MG, 2018.

SILVEIRA, Maria Rosâni Abreu da. **Matemática, discurso e linguagens**: Contribuições para a Educação Matemática. Coleção Contextos da Ciência. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2015.

Souza, Joamir Roberto de. **Matemática realidade & tecnologia**: 8º ano : Ensino Fundamental : anos finais . – 1. ed. FTD – São Paulo, 2018.

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO (DIAGNÓSTICO COM ESTUDANTES)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Diagnóstico do ensino de CÍRCULO, sob a responsabilidade dos (as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e orientando Nilson Osvaldo Gama Santa Maria**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa pretendemos traçar um diagnóstico do **Ensino de Congruência de triângulo** a partir da opinião dos estudantes**.** A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma.

Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **ensino de Congruência de triângulo .**

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos e/ ou Ana Kely Martins da Silva e orientando Nilson Osvaldo Gama Santa Maria** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

Belém, _________________

____
Assinatura do pesquisador

Eu, ____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Participante da pesquisa

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: Diagnóstico do Ensino de **Congruência de triângulo** , sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e orientando Nilson Osvaldo Gama Santa Maria**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de **Congruência de triângulo** a partir da opinião dos estudantes**.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola, sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o ensino de **Congruência de triângulo** .

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e orientando Nilson Osvaldo Gama Santa Maria** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará(UEPA) : Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

Belém, ____________________

____
Assinatura do pesquisador

Eu,____ autorizo que meu/minha filho(a)____ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do responsável

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO COM ESTUDANTES

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIASSOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a), estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade**: _______anos 2- **Gênero**:□Masculino □Feminino 3- **Série**: ____Ano
4- **Tipo de escola que estuda**? □Municipal □Estadual □Conveniada
5- **Você já ficou em dependência**? □Não □Sim. Em quais disciplinas?__________
6- **Você gosta de Matemática**? □Não gosto□Suporto □Gosto um pouco □Adoro
7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?
□Superior □Médio □Fundamental□Fundamental incompleto □Não estudou
8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina**?
□Superior □Médio □Fundamental □Fundamental incompleto □ Não estudou
9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?
□Professor particular□Família□Ninguém□Outros. Quem?__________________
10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?
□Todo dia □Somente nos finais de semana □No período de prova □Só na véspera da prova □Não estudo fora da escola.
11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?
□Sempre □Quase sempre □Às vezes□Poucas vezes □Nunca
12- **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**
□Provas/simulado □Testes semanais □Seminários □Pesquisas □Projetos □Outros. Quais? ________________________________
13- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática**?
□Contente □Tranquilo □com Medo □Preocupado □com Raiva □ com Calafrios
14- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?
□sim □não □às vezes
15- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**?□Sim □Não□Às vezes
16- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo**? □Sim□Não
17. **Como** você **avalia as explicações do seu professor de matemática**?
□Ruim □Regular □Boa □Excelente
18- **Você já estudou congruência de triângulos**? □Sim □Não
19- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série**?
____
20- **Quando você estudou congruência de triângulos, a maioria das aulas**:
□Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
□Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
□Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
□Iniciaram comum modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
□Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- **Para praticar o conteúdo de congruência de triângulos seu professor costumava**:

□Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
□Apresentar jogos envolvendo o assunto;
□Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
□Não propunha questões de fixação;
□Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22-**Com base na sua experiência quando você estudou congruência de triângulos preencha o quadro a seguir.**

(**MF**: Muito Fácil; **F**: Fácil; **R**: Regular; **D**: Difícil; **MD**: Muito difícil)

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	**Não**	**MF**	**F**	**R**	**D**	**MD**
Segmentos congruentes							
Ângulos opostos pelo vértice							
Bissetriz de um ângulo							
Ângulos congruentes							
Semelhança de triângulos							
Congruência de figuras planas							
Congruência de triângulos							

APÊNCICE C: TESTE DIAGNÓSTICO DE APRENDIZAGEM

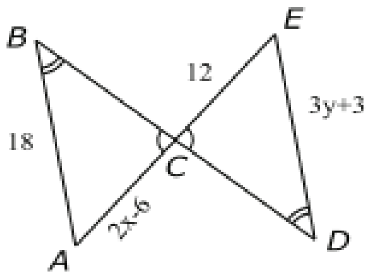
Prezado (a) estudante, com base em seus conhecimentos responda as seguintes questões:

1) O que é um triângulo?

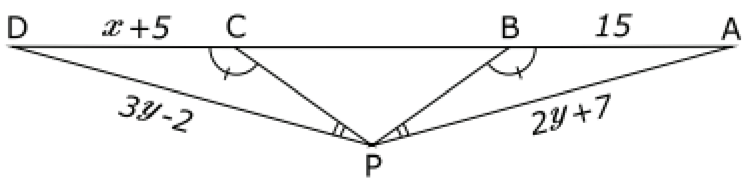
2) Quando dois triângulos são congruentes?

3) Um triângulo com as medidas dos lados 3cm, 4cm, 5cm e outro triângulo com as medidas dos lados 3cm, 4cm e 5cm, são congruentes?

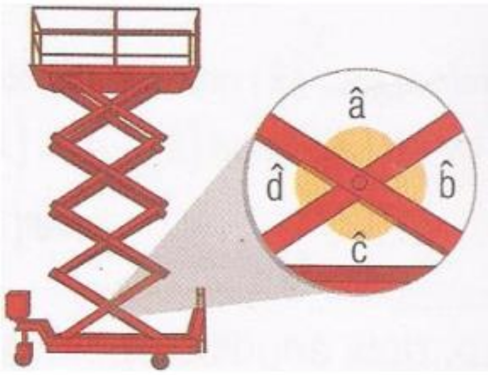
4) Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.



5) Na figura, o triângulo PCD e congruente ao triângulo PBA. Determine os valores de x, y e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD.



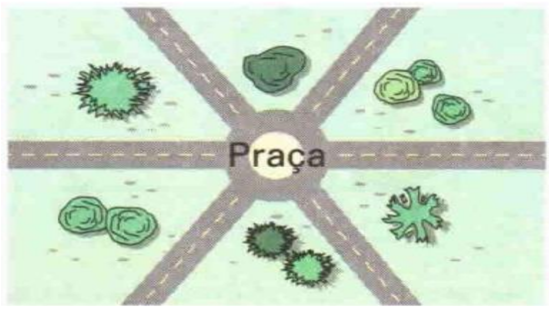
6) O elevador pantográfico é um equipamento de manutenção que permite o acesso de cargas ou pessoas a locais mais altos. Um exemplo é utilizado na manutenção de sistemas de iluminação interna em indústrias, dispensando o uso de escadas ou andaimes. Observe no esquema a representação de articulações de um desses elevadores.

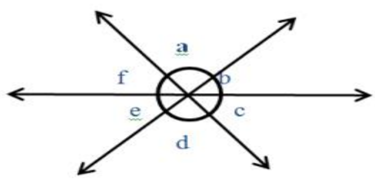


a) No esquema quais são os pares de ângulos opostos pelo vértice?

b) As medidas de *â* e cindicadas no esquema são sempre iguais? Justifique.

7) Sabendo que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Quais são os três pares de ângulos opostos pelo vértice?

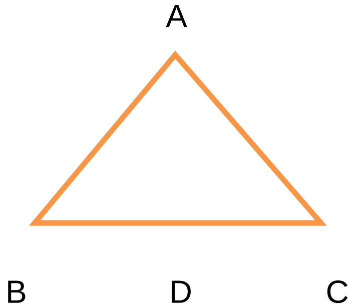




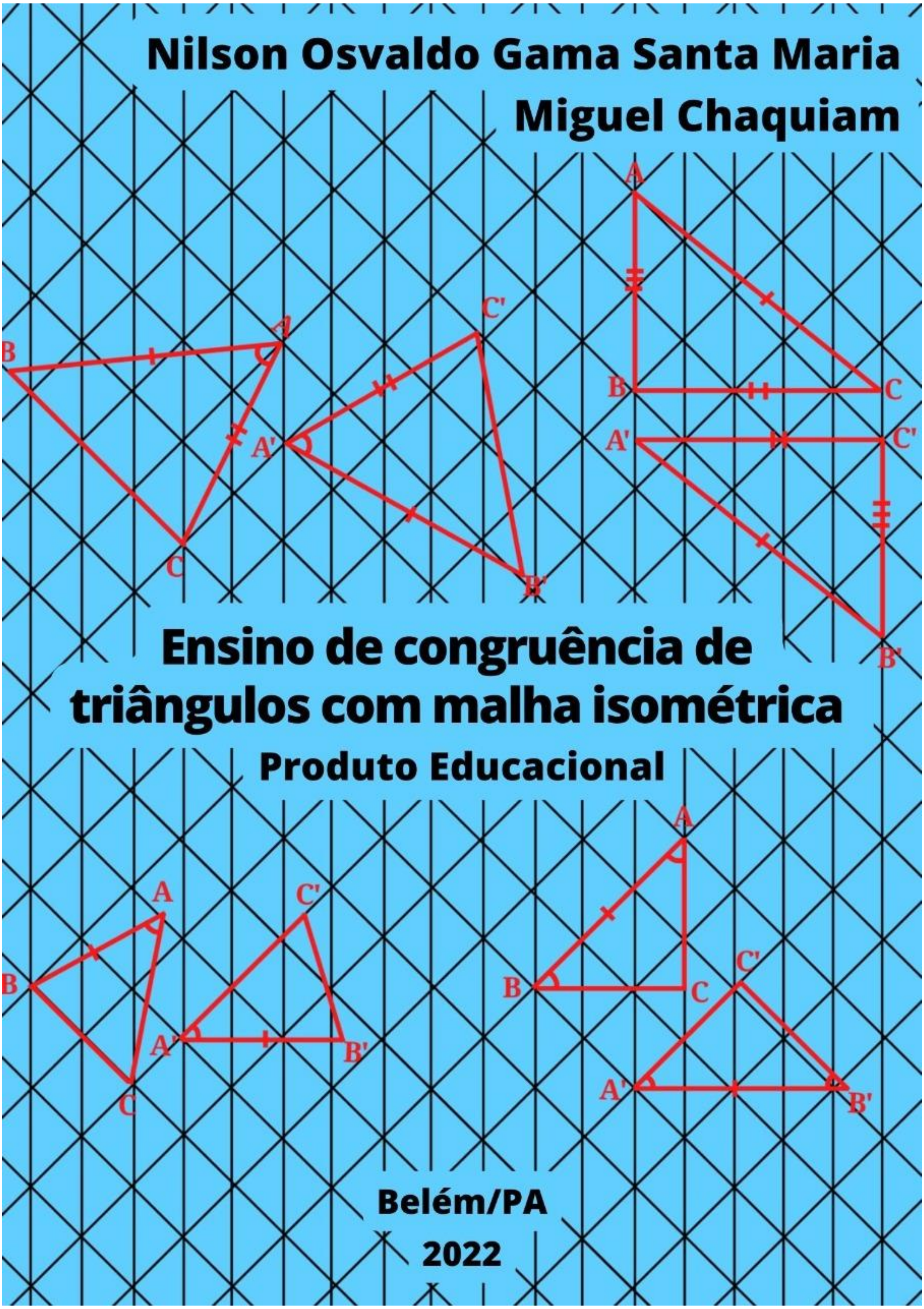
8) No futebol, uma estratégia muito utilizada pelos goleiros é posicionar-se sobre a bissetriz imaginária do ângulo formado entre a bola (vértice) e as duas traves. Qual a vantagem de um goleiro utilizar essa estratégia?

do artista Aldair Costa, identifique dois ou mais triângulos
mitindo que o pentágono destacado é regular (lados que
ma medida).

10) Considere um triângulo ABC equilátero, ao traçar a bissetriz AD, obtemos dois triângulos: ADB e ADC. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.



APÊNDICE D: SEQUÊNCIA DIDÁTICA- VERSÃO ESTUDANTE



UARC 1: É semelhante, mas é congruente?

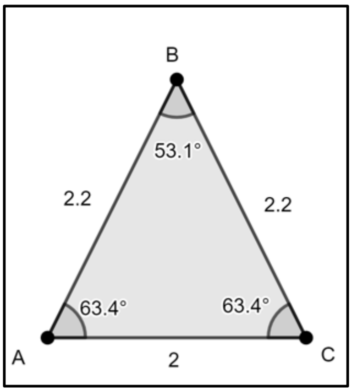
Objetivo: Definir triângulos congruentes

Material: Material impresso, caneta ou lápis.

1)(Intervenção inicial) Considerando medidas de ângulos e lados correspondentes de triângulos, compare e marque no quadro de figuras quais são semelhantes (mesma forma) a figura de referência a seguir:

Figura de referência

.



Quadro de figuras

Figura 1	Figura 2	Figura 3

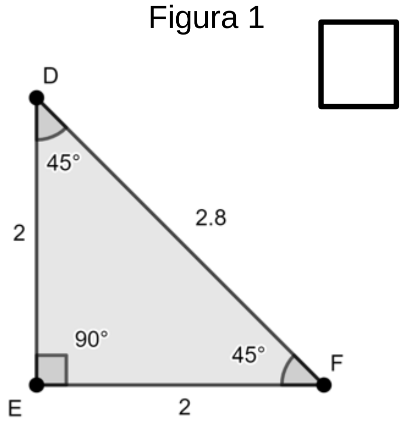
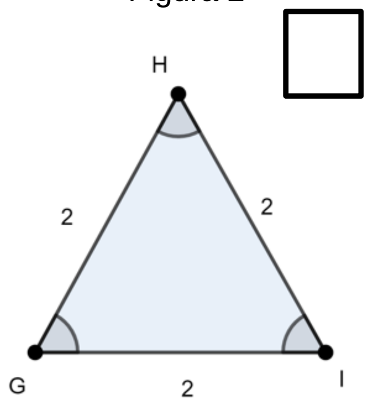
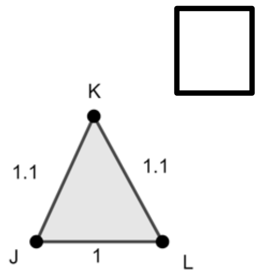
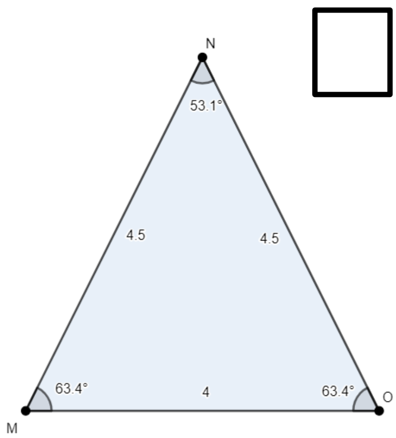
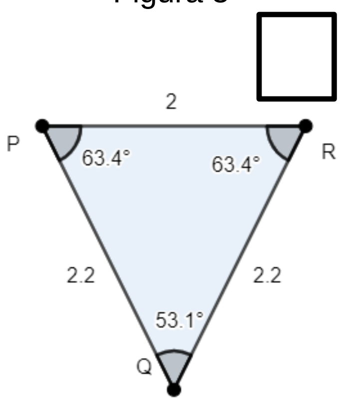
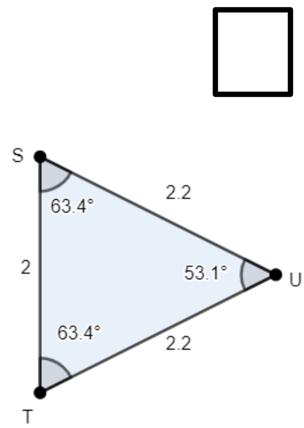

		

Figura 4	**Figura 5**	**Figura 6**
		

2) (Intervenção reflexiva): Que características você observou para estabelecer a comparação da forma dos triângulos?

3) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados ampliada? Qual a razão dessa ampliação?

4) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados reduzida? Qual a razão dessa redução?

5) (Intervenção reflexiva): Quais figuras selecionadas possuem mesmas medidas de lados e ângulos? Qual seria a razão entre essas medidas?

6) (Intervenção exploratória): Considerando as observações que você fez até aqui preencha o quadro a seguir com **X**:

Figura	Mesma forma da referência	Todos os ângulos têm mesma medida da referência	Todos os lados têm mesma medida da referência
1			
2			
3			
4			
5			
6			

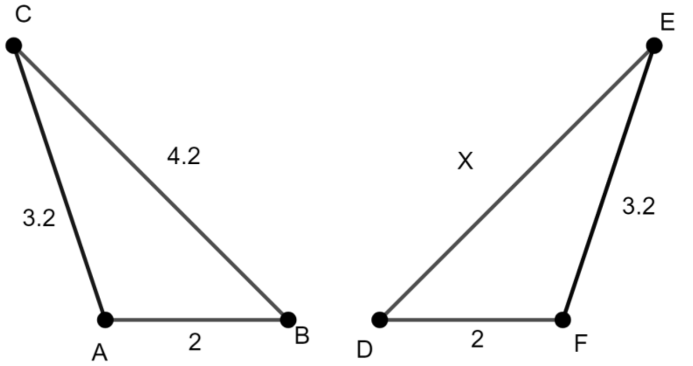
7) (Intervenção reflexiva): Considerando sua resposta na questão 5 e as marcações realizadas no quadro da questão 6, responda: O que é necessário para que triângulos semelhantes sejam iguais?

8) (Intervenção reflexiva): Considerando os triângulos que atenderam as três características do quadro da questão 5, responda: Quais diferenças de posição esses triângulos possuem entre o triângulo de referência?

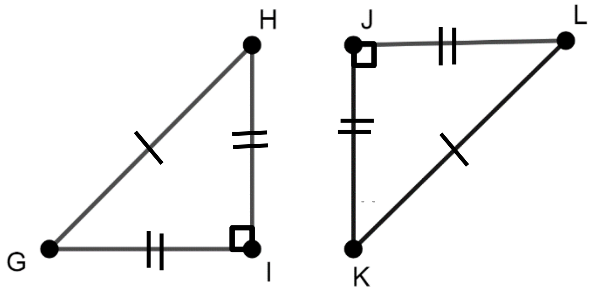
9) (Intervenção reflexiva): Que critérios você estabeleceria para afirmar que dois triângulos são iguais?

9) **(Intervenção Avaliativa restritiva):** Sabendo que os pares de triângulos a seguir são congruentes, estabeleça a correspondência entre ângulos e lados e deduza a medida desconhecida $\overline{DE}$ e $\widehat{K}$.

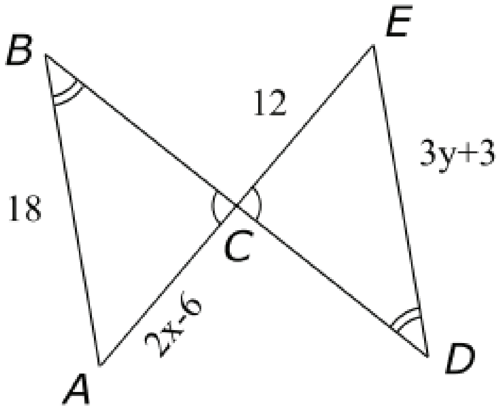
a)



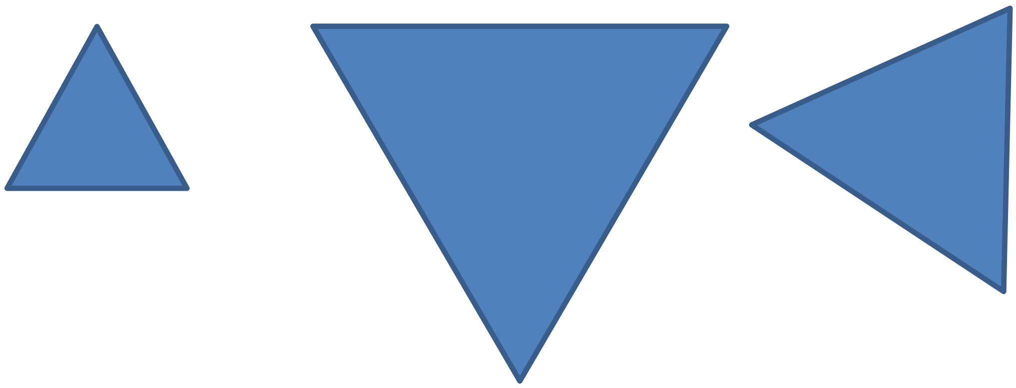
b)



10) **Intervenção Avaliativa Aplicativa:** Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.



11) **Intervenção Avaliativa Aplicativa:** Os três triângulos a seguir são equiláteros:



Esses triângulos são congruentes? Justifique indique o caso de congruência.

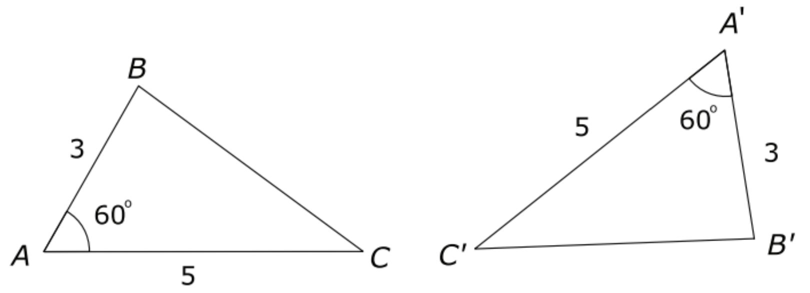
UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

Objetivos: Estabelecer critérios suficientes para ocorrência de congruência de triângulos.

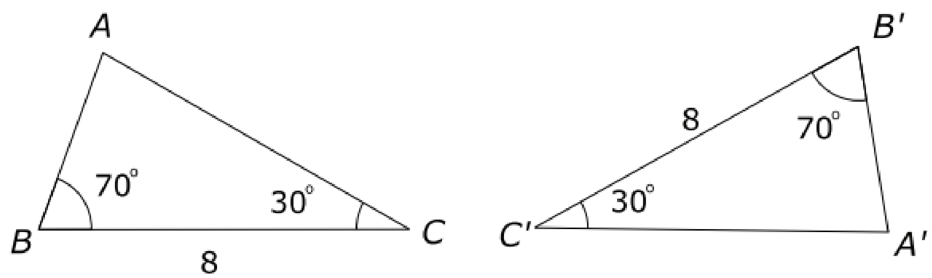
Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.

1) Intervenção inicial: Baseando-se nas informações da atividade anterior, explique se é possível afirmar que os pares de triângulos a seguir sejam congruentes.

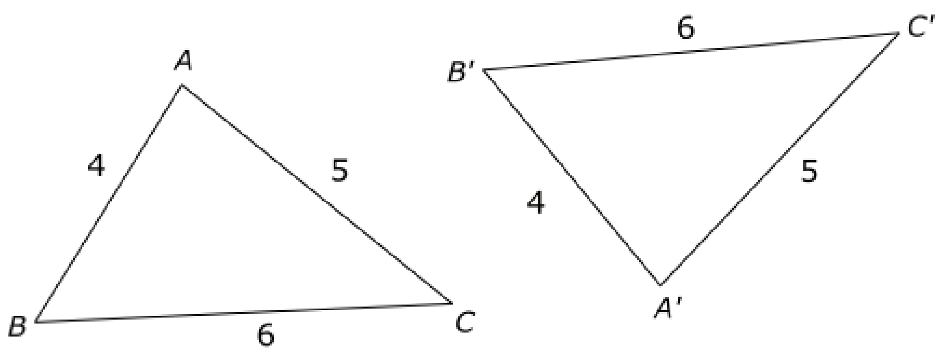
a)



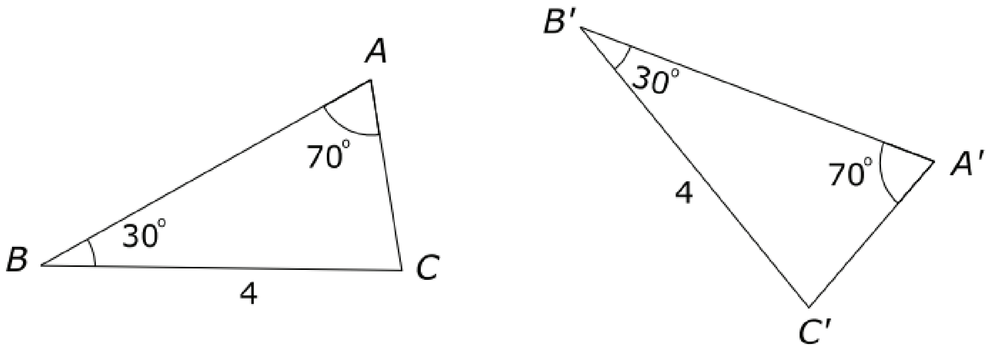
b)



c)



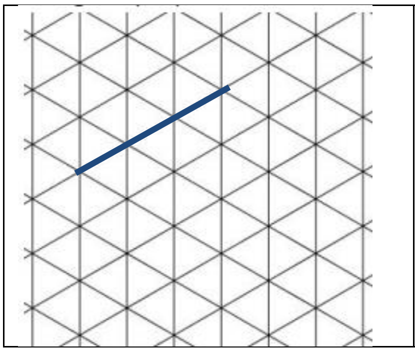
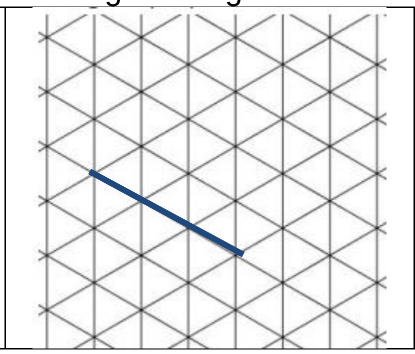
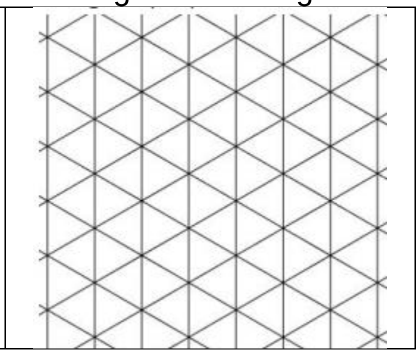
d)



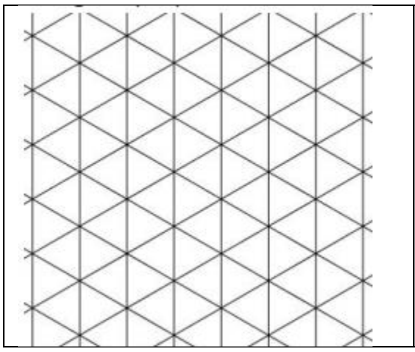
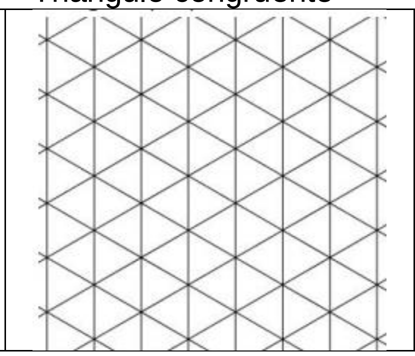
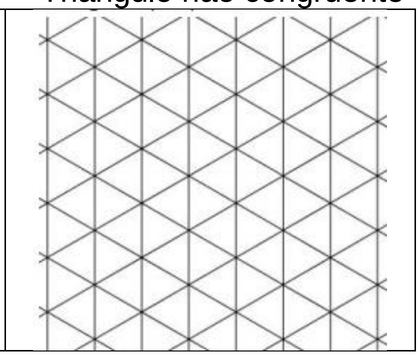
2) Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes. Linhas em azul apresentam medidas fixas, linhas em vermelho devem ser completadas.

Obs.: A malha isométrica adotada é formada por triângulos equiláteros de lado L e altura h, logo todos os ângulos internos são de 60^0.

(I) Medida informada:______________________________

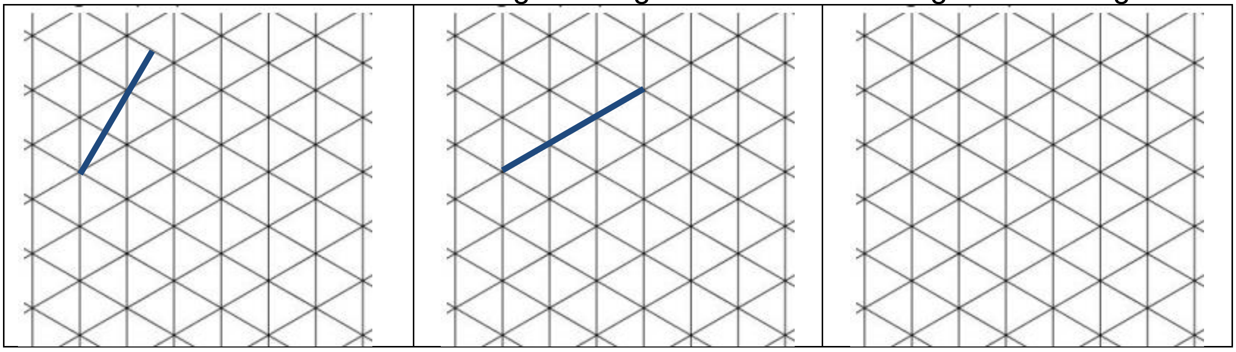
Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente
		

(II) Medidas informadas: Todos os ângulos iguais (AAA)

Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente
		

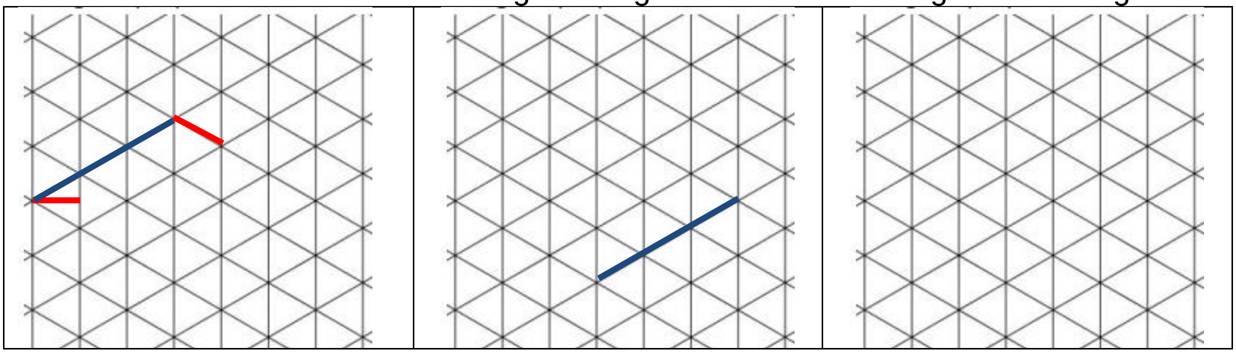
(III) Medidas informadas: Lados com medidas $3L, 1{,}5L\ e\ 3h$, respectivamente.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



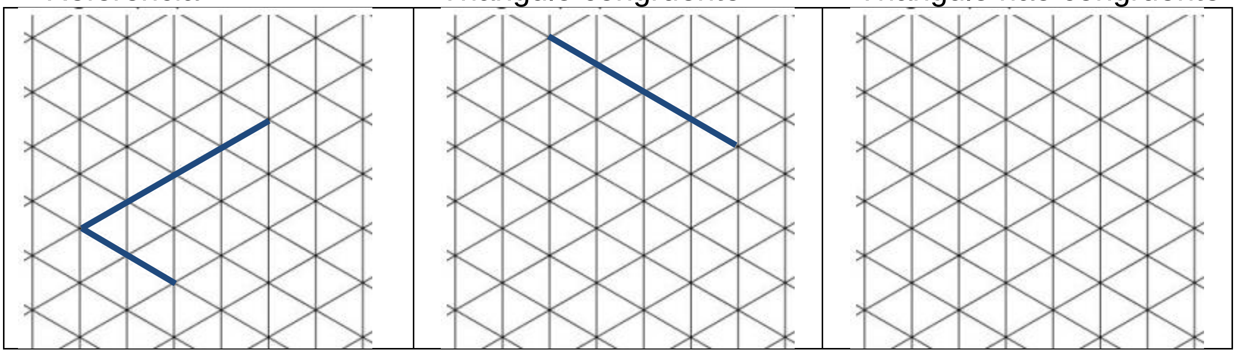
(IV) Medidas informadas: ____________________________________

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente

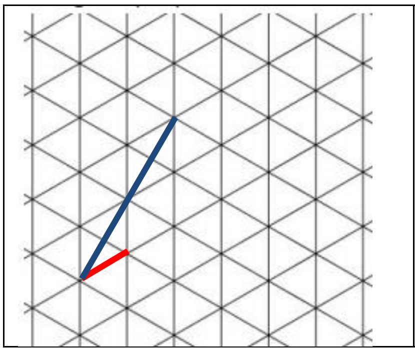
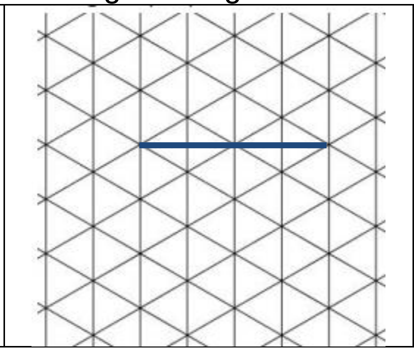
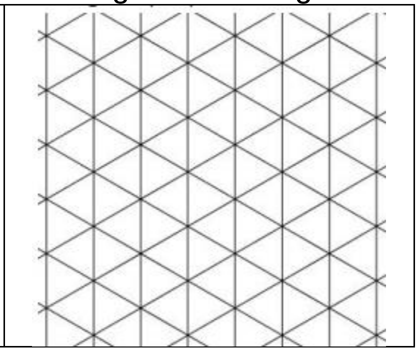


(V) Medidas informadas: ____________________________________

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



(VI) Medidas informadas: Lado $4h$, ângulo 30^0, Ângulo de 60^0 oposto ao lado informado.

Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente
		

3) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos de referência**? Quais dificuldades você teve?

4) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

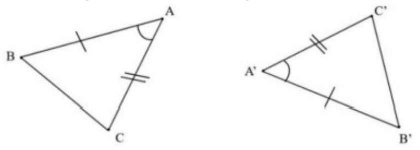
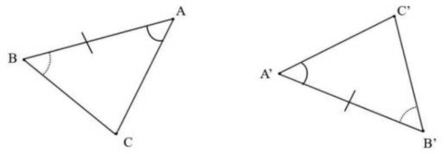
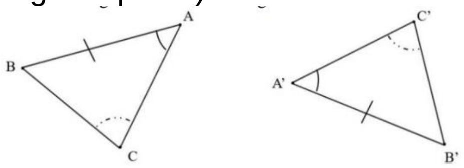
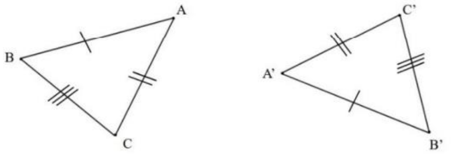
5) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos não congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

6) Intervenção reflexiva: Considerando as situações em que você não conseguiu construir os triângulos não congruentes aos de referência, que informações estavam fixadas?

7) Intervenção reflexiva: Responda a questão título desta atividade: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

FORMALIZAÇÃO

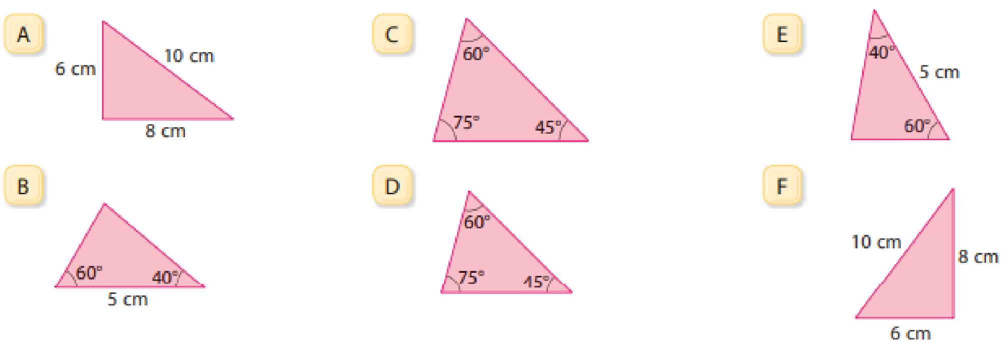
Existem certos critérios suficientes para que possamos concluir que dois triângulos sejam congruentes. Esses critérios se apresentam nos seguintes casos:

1º caso - LAL (Lado-ângulo-lado) 	2º caso-ALA (ângulo-lado-ângulo) 
3º caso - LAA$_o$ (Lado-ângulo-ângulo oposto) 	4º caso - LLL (Lado-lado-lado) 

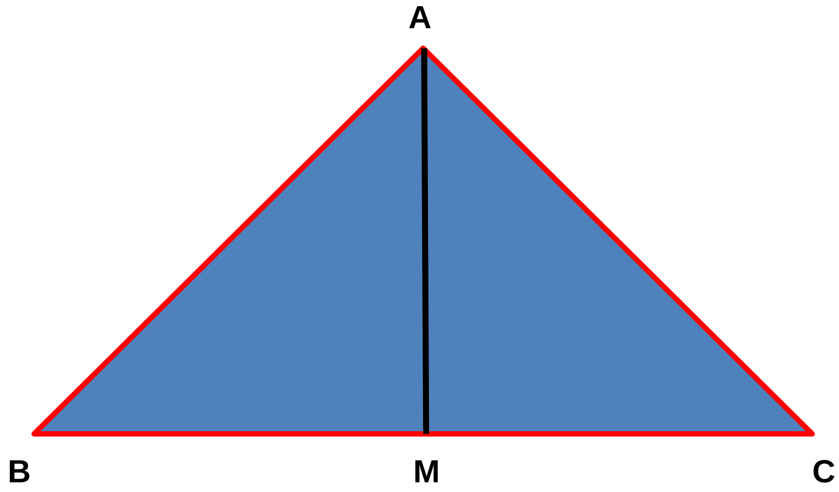
8) Intervenção avaliativa restritiva: Volte a questão 1, caso você conclua que os pares de triângulos são congruentes, em que caso de congruência de triângulos você se baseou para chegar a essa conclusão?

	São triângulos congruentes?	Caso de congruência de triângulos
a)		
b)		
c)		
d)		

9) **Intervenção avaliativa restritiva:** Indique os pares de triângulos congruentes e o caso de congruência que usou como critério:



10) **Intervenção avaliativa Avaliativa:** Num triângulo isósceles ABC, o seguimento AM é perpendicular ao lado BC e o divide ao meio verifique se os triângulos ABM e ACM são congruentes e justifique.



UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.

Objetivos: Identificar caso de congruência em triângulos retângulos.

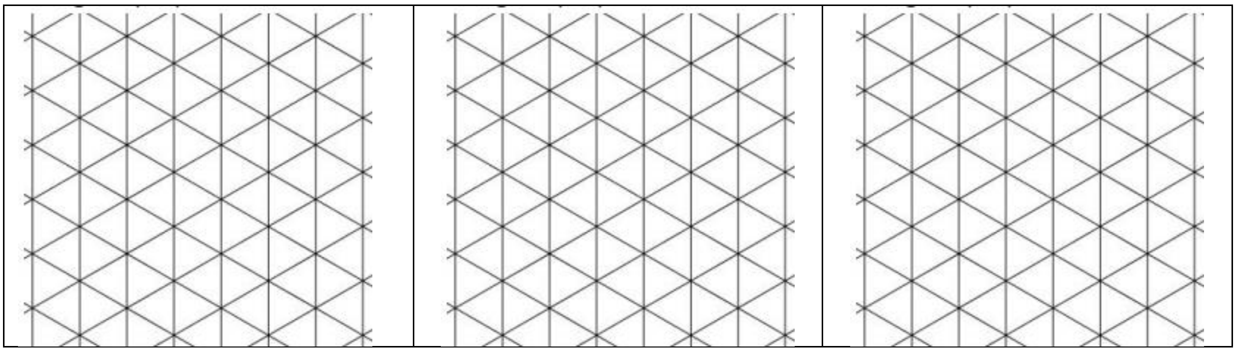
Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.

1) Intervenção Inicial: Pense sobre a atividade anterior, você percebeu que os casos de congruência apresentados fixam sempre 3 informação sobre os triângulos congruentes? E se fossem apenas 2 informações fixadas, seria suficiente para garantir a congruência? Discuta com seus colegas.

2)Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes.

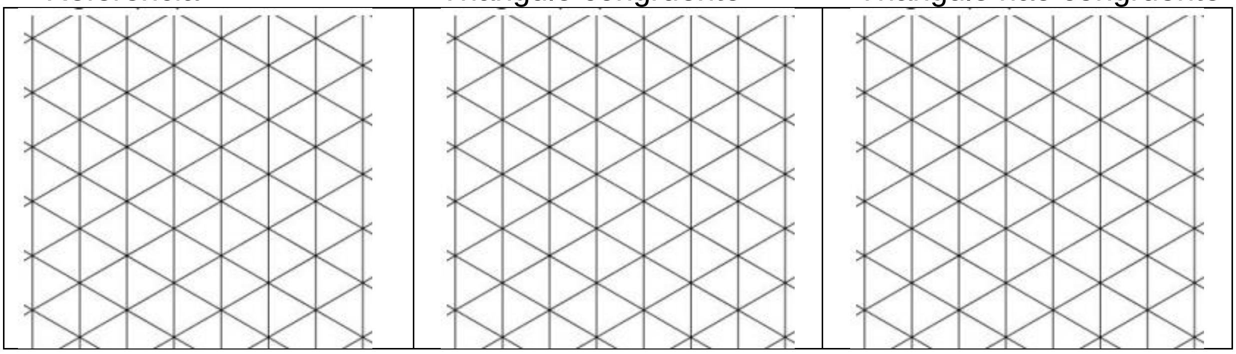
(I) Medidas informadas: Ângulo e lado oposto a esse ângulo medindo $3L$.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



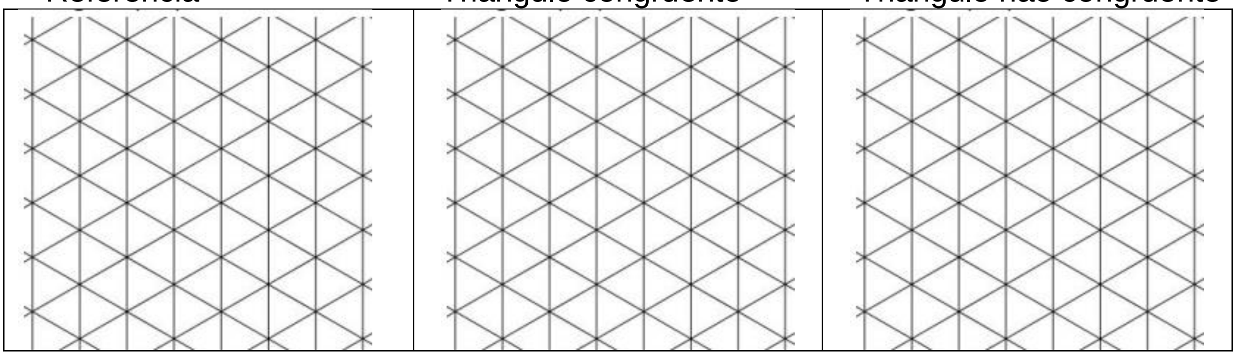
(II) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $5L$.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



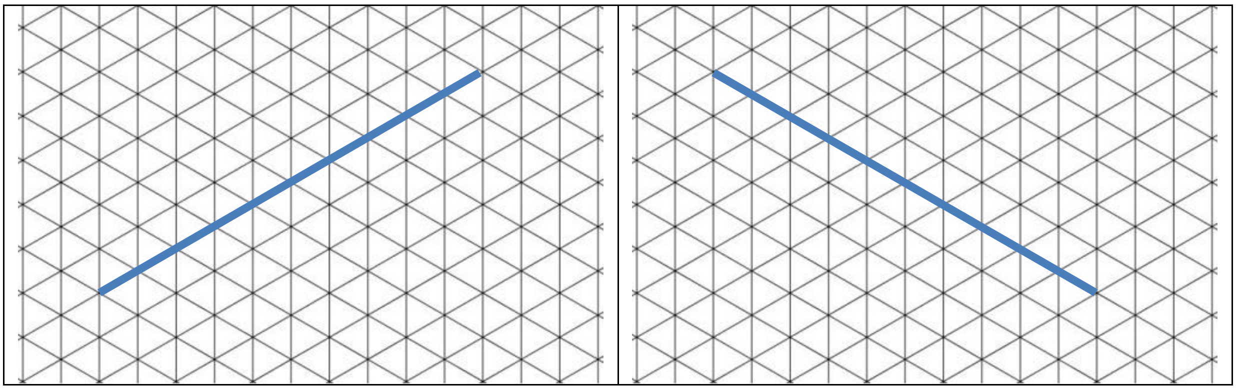
(III) Medidas informadas: Ângulo de 60^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $4L$.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente

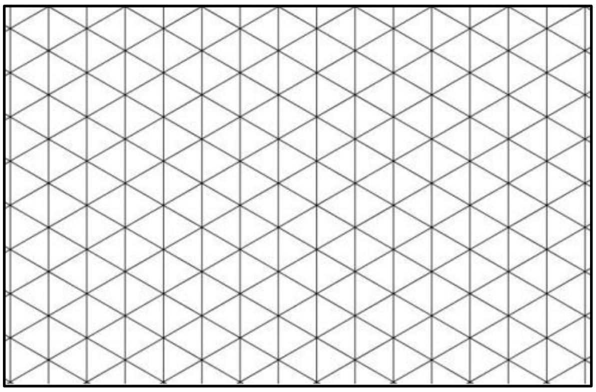


(IV) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $10L$.

Referência | Triângulo congruente



Triângulo não congruente



3) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

4) Intervenção reflexiva: Qual a característica comuns nesses casos em que você só conseguiu construir triângulos congruentes aos de referência?

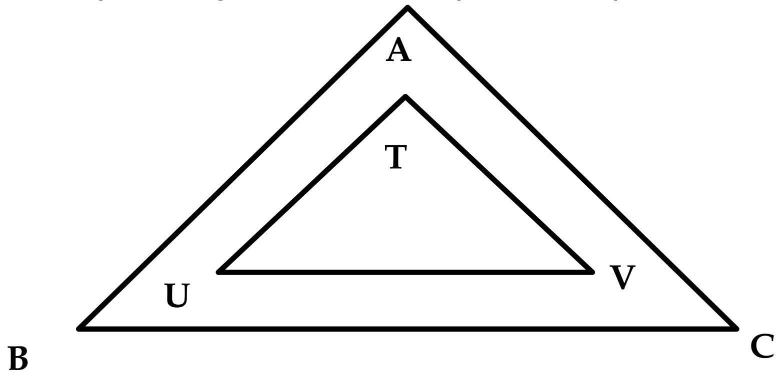
5) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

6) Intervenção reflexiva: Como você definiria esse caso de congruência de triângulos?

APÊNDICE E: TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

1) Os triângulos ABC e TUV foram construídos de modo que seus três pares de ângulos correspondentes sejam congruentes. Podemos afirmar que esses triângulos sejam congruentes? Justifique sua resposta.



____

____

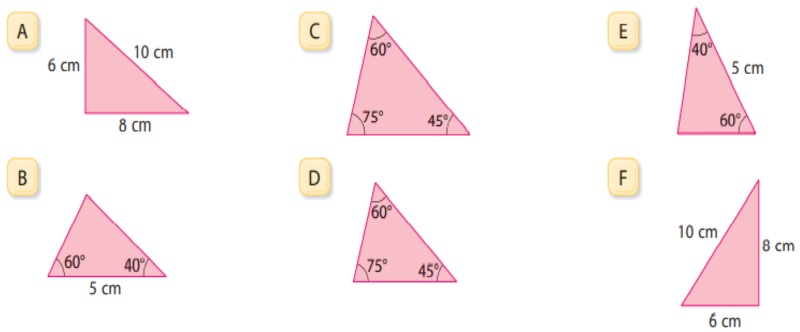
____

____

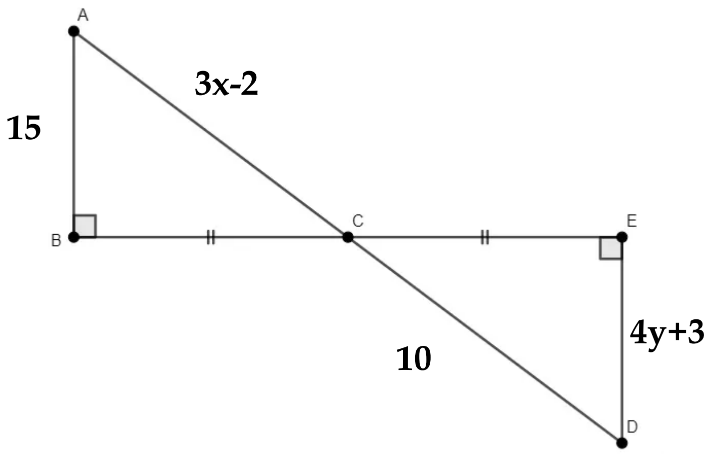
____

____

2) Identifique os pares de triângulos congruentes e indique o caso de congruência de cada par.



3) Determine o valor de x e y.



____

____

____

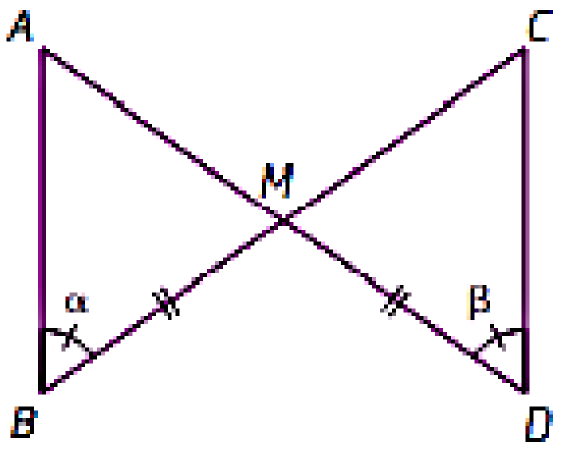
____

____

____

____

4) Justifique a congruência de triângulos na composição abaixo:



5) Sobre a congruência de triângulos, julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas:

I – Ao comparar dois triângulos, se a medida dos ângulos for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Ângulo, Ângulo e Ângulo.

II – Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

III – Ao comparar dois triângulos, as medidas dos lados forem congruentes um a um, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.

Marque a alternativa correta:

A) Somente a I é verdadeira.

B) Somente a II é verdadeira.

C) Somente a III é verdadeira.

D) Somente a II é falsa.

E) Somente a I é falsa.

APÊNDICE F - Transcrição Sequência Didática
Atividade 1

1. Professor: Intervenção inicial, considerando medidas de ângulos e lados correspondentes, que nós já fizemos aqui, compare e marque no quadro de figuras quais são semelhantes, ou seja, quais têm a mesma forma, mesmo que não tenha a mesma medida, mas se tiver a mesma forma você vai marcar. Ou seja, que sejam semelhantes a figura de referência a seguir. Essa aqui é para todos, você irá marcar qual é semelhante a ela, ou seja, qual tem a mesma forma. É só pra marcar aqui no quadro, olhem para a primeira, e se for semelhante você marca, se não for você passa pra próxima. Há várias e vocês devem chegar a conclusão juntos, observando somente se são semelhantes. E se não for semelhante comente o porquê.
2. C2: A figura 6, a figura 5 e a figura 2.
3. C1: É a forma né Professor, não é a medida?
4. Professor: Isso, é a forma.
5. C1: Então é a forma. Mas a forma pode dar de qualquer lado? Tipo, de ponta cabeça?
6. Professor: De ponta cabeça já tem um nome. Qual é?
7. C2: Rotacionado.
8. Professor: Isso. Como também pode ser transladado, quando afasta e tem um outro nome quando ela fica afastada.
9. C2: Refletida?
10. Professor: Isso, refletida.
11. A1: Por que não é? Porque ela fracionou esse daqui. Essa tem que ser semelhante no caso. Essa aqui é.
12. A1: Que característica foi observada? Foi observado que está rotacionada, acho que é isso.
13. A1: Por que a gente não marcou a primeira?
14. A2: Porque não é igual essa.
15. A1: Eu não lembro o nome dessa. No caso o triângulo virou pra cá, então é essa aqui.
16. A2: A segunda não pode ser e a primeira rotacionou.
17. A1: Como que é isso?
18. A2: Eu acho.
19. A1: Não, está certo olha, acho que ela virou pra cá. É, está certo, ela deitou.
20. A2: Então a primeira figura não rotacionou.
21. A1: É isso.
22. C1: Aqui só pode ser espelhado ou rotacionado.
23. C2: mas é a mesma forma.
24. C1: Professor, pode marcar mais de uma?
25. Professor: Sim.
26. C1: Eu acho que são 5.
27. Professor: Agora discuta com o seu colega e diga o motivo.
28. C1: Ela pode dar ampliada ou diminuída?

29. Professor: Pode. Porque aqui o que interessa não é a medida, é a forma. El questionou se a figura pode estar ampliada ou reduzida e ter a mesma forma. O que vocês acham gente? Vocês identificaram isso ai?
30. Alunos: Sim.
31. C1: Eu achei as figuras 2, 4, 5, 3 e 6.
32. C2: Ficamos entre a 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª porque elas têm a mesma forma. Agora, a primeira não, porque ela não é um triângulo.
33. C2: Chegamos a conclusão de que a 1ª figura não é um triângulo e a 2ª sim, mas não é exatamente a mesma medida da figura de referência, mas ainda continua sendo triângulo por ter a mesma forma. Já a 3ª é um triângulo, só que ele foi reduzido, está menor, não é a mesma medida. A 4, 5ª e a 6ª são triângulos. A 5ª e a 6ª estão em outra posição, uma está rotacionada e a outra está espelhada para baixo
34. Professor: Já gente? Terminaram a discussão? Então olha, nós temos esse triângulo de referência, triângulo ABC, vamos analisar a figura 1. Vocês a marcaram como sendo semelhante?
35. Todos: Não.
36. Professor: Por que não? Por que vocês acham que não é semelhante?
37. A2: Porque rotacionou o 90°.
38. Professor: Mas, rotacionar 90° faz com que deixe de ser semelhante?
39. C1: Não tem a mesma forma.
40. Professor: Não tem a mesma forma. Então você diz que não é igual, que está em outra posição, está rotacionada e você diz que não tem a mesma forma. Mas vocês têm que chegar a um consenso. Qual o problema dela?
41. C1: Ela é um triângulo mas não está na mesma forma e medida que devia estar.
42. Professor: Mas o problema é medida, posição ou é forma?
43. A1: É a forma.
44. C1: É a forma.
45. Professor: A forma. Aqui o que está em jogo é a forma. Porque para se ser semelhante tem que ter a mesma forma e a mesma razão de proporcionalidade como anteriormente. Todos os lados tem que estar na mesma proporção. Figura 2, é semelhante?
46. Alunos: Sim.
47. Professor: Vocês têm certeza?
48. Alunos: Sim.
49. Professor: Vamos analisar mais um pouco. Será que estão na mesma razão de proporcionalidade? Olhem só, essa figura 2, todos os lados tem a mesma medida correto, ele é um triângulo equilátero. Mas a figura de referência tem todos os lados com a mesma medida?
50. Alunos: Não.
51. Professor: Podem ser semelhantes então? Não é um triângulo equilátero, quando tem apenas dois lados iguais dizemos que é um triângulo isósceles e esse não pode ser semelhante com um triângulo equilátero, ok? Equilátero tem todos os lados iguais, mas a nossa referência só tem dois lados iguais. Então a figura 2 não é para marcar, ok? E a figura 3? Podem ser semelhantes?
52. Alunos: Não.
53. Alunos: Sim.

54. Professor: Vocês que disseram não, Por que não pode?
55. A1: É por causa do número.
56. Professor: Da medida?
57. A1: É, da medida.
58. Professor: Certo. Mas para ser semelhante tem que ter a mesma medida?
59. C1: Não.
60. Professor: Vocês acabaram de dizer o que precisa.
61. Alunos: A mesma forma.
62. B1: Aqui ela só foi reduzida.
63. Professor: Mas tem a mesma proporcionalidade?
64. Alunos: Sim.
65. Professor: Sim. Qual é a razão de proporcionalidade?
66. B2: Os lados são iguais também.
67. Professor: Ok, também é um triângulo isósceles. Mas se você pegar a medida dos lados correspondentes da referência com a figura 3, por exemplo, 2,2 dividido por 1,1. Quanto dá? Assim, o lado AC da referência corresponde ao lado JL da figura 3 correto? Se eu dividir 2 por 1, quanto dá? Dá 2. E se eu dividir 2,2 por 1,1. Também dá 2. Esse triângulo aqui está com essa medida 1, 1,1 e 1, observe que para chegar nessa medida tudo foi dividido por 2, ou seja, embora seja reduzido foi reduzido com a mesma razão de proporcionalidade. No caso como reduziu, a proporcionalidade é meio, reduziu à metade. Então esse triângulo é semelhante embora esteja reduzido, figura 3 pode marcar. Figura 4?
68. Alunos: Sim.
69. Professor: Sim. Se sim qual é a razão de proporcionalidade.
70. B1 e B5: Está ampliado.
71. Professor: Está ampliado. Qual seria essa razão?
72. B1: Multiplicado por 2.
73. Professor: É, porque ampliou. Esse que diminuiu divide por 2. Esse que ampliou multiplica por 2. Então é semelhante?
74. Alunos: Sim.
75. Professor: Então figura 4, pode marcar. Figura 5, é semelhante?
76. Alunos: Sim.
77. C1: Sim só que ela está refletida para baixo.
78. B1: Ela está rotacionada em 180°.
79. Professor: E você, acha que é o que?
80. X: Está refletido.
81. Professor: Estão certos. Porque a figura estando rotacionada ou refletida irá parar na mesma posição. Mas vamos lá as medidas são iguais ou diferentes? Ampliada ou reduzida?
82. A2: A mesma medida.
83. Professor: Certo, então é semelhante também. Mesma forma e mesma medida. E a figura 6?
84. Alunos: Foi rotacionada em 90°.
85. Professor: Semelhante só que está rotacionada. 90° sentido?
86. Alunos: horário.
87. Professor: Muito bem, vocês aprenderam mesmo. Certo. Agora, eu quero que vocês tentem a 2ª questão. Que características você observou para estabelecer

a comparação da forma dos triângulos em relação a figura de referência? Então, que característica você observou para determinar a semelhança? Escrevam aí, de maneira geral, como foi que vocês analisaram? Falem primeiro, elaborem a ideia e depois escrevam aí.

88. C2: Foi importante para perceber a perspectiva de ângulo, forma, medida, perímetro.
89. C1: Medida é uma forma de perímetro.
90. C2: Então foi importante para perceber a perspectiva de ângulo, forma e medida.
91. C1: Foi importante perceber respectiva de ângulo, forma e medida.
92. A1: Isso aqui é a largura né?
93. A2: É. Não, é o comprimento.
94. A1: Observando os comprimentos. Os comprimentos se você perceber em todos os ângulos são iguais. Porque ele ampliou. Espero que seja isso.
95. Professor: Conseguiram chegar a uma conclusão aqui? Qual seria?
96. A2: Observamos as medidas.
97. Professor: Que observaram as medidas? Mas foi isso que falamos aqui? As medidas mesmo?
98. A1: Os comprimentos. Acho que é isso.
99. Professor: Mas não foi essa a palavra que nós usamos. Nem todos têm a mesma medida. Por que você eliminou essa aqui da figura 1 e da figura 2? Leia aqui o comando. Considerando medidas de ângulos e lados correspondentes de triângulos, compare e marque no quadro de figuras quais são semelhantes. Semelhantes e o que está escrito aqui? mesma forma.
100. A1: Mesma forma.
101. Professor: Então foi somente a medida que vocês levaram em consideração?
102. A1: Também foi a forma.
103. Professor: Então as formas também.
104. A1: É.
105. Professor: Vamos lá gente. Que características você utilizou para estabelecer a forma dos triângulos. Aqui no grupo A. Diga para mim escultar o que você respondeu. Quais as características?
106. A2: observamos as medidas e as formas.
107. Professor: Observaram as medidas e as formas. Vocês, grupo B.
108. B1: Quase todas tem a mesma forma e a mesma razão.
109. Professor: Quase todas? Ou só as que vocês marcaram? Tinham a mesma forma e mesma razão. No caso os lados né. Os lados correspondentes tinham a mesma razão.
110. Professor: E aqui.
111. C1: Foi importante para perceber a respectiva de ângulo, forma e medida.
112. Professor: Ângulo, forma, no caso os pares. Ok. Vocês também observaram os ângulos. Olhem aí os ângulos dos que vocês disseram que são semelhantes. O que vocês podem dizer ai sobre a medida desses ângulos. Se manteve ou mudou? Mesmo quando ampliou ou reduziu, olhem aí.
113. C1: Na 6 teve uma pequena mudança, mas manteve a mesma forma.
114. Professor: Manteve a forma, mudou a medida dos lados, mas quem se manteve sempre?
115. Alunos: A razão.

116. Professor: O ângulo. A medida dos ângulos. A razão, se mantém nos lados respectivos, quando você compara os pares, mas para qualquer que seja a figura, ampliada, reduzida ou com a mesma medida em relação a de referência, houve alteração nos ângulos? Olhem lá, comparem, o ângulo e as figuras que vocês disseram ser semelhantes. Em alguns não deram para colocar, no reduzido não deu para observar, mas nesse que está ampliado, comparem a medida do ângulo, é a mesma? É a mesma né. Vejam se os dois últimos, 5 e 6, são as mesmas medidas dos ângulos?
117. Alunos: Sim.
118. Professor: Sim né. Então mais uma coisa que o grupo C acrescentou. Então observou-se que se mantiveram a forma e os mesmos ângulos embora as medidas alterassem de forma proporcional, ou seja, com a mesma razão que os lados correspondentes. Vamos passar para a terceira questão. Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados ampliada. Qual a razão dessa ampliação? Está no singular então é só uma figura, ela possui a mesma medida de ângulo, mas os lados foram ampliados, houve uma ampliação e a gente quer saber a razão dessa ampliação. Qual é das figuras? 1? 2? 3?
119. Alunos: 4.
120. Professor:4. Qual é essa razão?
121. B1: 2.
122. Professor: 2. Então podem escrever. Essa é de resposta imediata. É a figura 4 e ela foi ampliada em uma razão 2, o que significa que foi dobrado né, dobrou de medida. Então, quando vocês pegarem essa aqui ampliada qual lado corresponde a AB. No caso aqui é M, N e O. Quem é o correspondente ao AB? O MN. Quando eu pegar a medida MN dividido pela medida AB, vai dar o que? 4,4 dividido por 2,2, certo? E isso vai dar 2. Quando eu pegar a medida NO e dividir pela medida BC eu também vou ter 4,4 dividido por 2,2 que vai dar 2. Já a medida MO dividida por AC, vai ser o que? 4 divido por 2 que também vai dar 2. Observe que, para todos os lados correspondentes a razão de proporcionalidade vai ser 2. Agora é a 4. Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados reduzida. Qual a razão dessa redução? Qual que está reduzida?
123. Alunos: figura 3.
124. A1: Figura 3.
125. Professor: Os lados foram reduzidos. A 2 não é semelhante, você não a marcou como semelhante. É a 3.
126. B1: A razão dela é 1.
127. Professor: A razão dela é 1? Por que você diz que é 1?
128. B1: Porque a figura de referência é 2 por 1. Então ela não dividiu?
129. C1: É aquele lá. 1 em cima, traço 2. Meio. É meio Professor. 0,5 ou 1 sobre 2.
130. Professor: É meio. Onde foi 1? Não, quando se coloca 1,1 dividido por 2,2, ao simplificar por 1,1 daria 2. Em outras palavras significa que daqui pra cá reduziu a metade, porque 1,1 é a metade de 2,2. 1 é a metade de 2, ok? Então todos os lados reduziram pela metade. Você pode responder assim 1 sobre 2 ou 0,5, 0,5 também significa a metade. Ok a 4? Alguma dúvida sobre a 4?
131. Alunos: Não.

132. Professor: Escrevam direitinho figura 3, razão de 0,5. Questão 5. Quais figuras selecionadas possuem mesmas medidas de lados e ângulos? Por que essa pergunta? Antes você tinha somente as mesmas medidas de ângulo, certo? Os lados não tinham a mesma medida, correto? Ou estava ampliado ou estava reduzida, mas você tem figuras aí que além de ter a mesma forma tem a mesma medida de lados. Quais são?
133. B1: Figuras 5 e 6.
134. Professor: Figuras 5 e 6. Agora vamos pensar, se elas têm a mesma medida, qual a razão dessa semelhança? Qual é a razão de semelhança?
135. C2: É 2?
136. Professor: Não. Vamos lá, vamos pensar.
137. B1: É 1?
138. Professor: 1. Por que seria 1. Olhem pra cá pra divisão. Você não divide os lados correspondentes? Então você vai pegar um número, por exemplo, o lado BC é correspondente ao lado RQ da figura 5, certo? Tem a mesma medida. Aqui como era que fazíamos? Não dividia? Então você irá dividir 2,2 por 2,2, então o que vai aparecer, um número dividido por ele mesmo e quanto é um número dividido por ele mesmo?
139. B1: 1.
140. Professor: 1. Quando você for dividir os lados correspondentes a razão vai dar sempre 1. Então quando os lados são iguais, ângulos são iguais e a mesma forma, nós dizemos que a razão de semelhança é um. Então respondam ai.
141. C1: Professor, eu não entendi direito a 5.
142. Professor: Como é que você entendeu? Mas você concorda que a razão é 1? Ou não?
143. C1: não, é porque, é a figura 2?
144. Professor: Não. Aqui estamos falando das figuras que mesma media de lados e ângulos. Quais são as figuras? 5 e 6. As medidas dos lados são as mesmas mas a 5 está rotacionada ou refletida?
145. C1: rotacionada.
146. Professor: Rotacionada e a 6 também está rotacionada. A 5 180° e a 6 90°. Correto? Mas não tem os lados correspondentes?
147. C1: É porque aqui é uma medida e aqui são duas diferentes.
148. Professor: Certo, mas mesmo quando você gira a figura, você ainda mantém a correspondência. Vou reproduzir aqui. Essa é a minha figura de referência, ela tem 2,2, 2,2 e 2. E a outra está assim. Mas são os mesmos valores. Ela rotacionou, mas esse lado não é referente a esse aqui. Este é referente a este e eles têm a mesma medida. Quando eu for dividir 2,2 por 2,2 vai dar 1. E esse aqui faz referência com esse, 2,2 dividido pro 2,2 dá 1. E agora, esse aqui faz referência com este 2 dividido por 2 dá 1. Então você tem que descobrir quais lados tem correspondência mesmo que rotacionado ou refletido.
149. C1: Estava pensando que a pergunta era forma que tivesse mesmos lados, que todos os lados são iguais.
150. Professor: Ah, tá. Não é isso, no caso estávamos comparando quais figuras eram iguais a primeira, no caso é a 5 e a 6. E no final temos que dizer qual a razão de proporcionalidade e B1 disse que é 1. É 1 porque se manteve as mesmas medidas, embora tenha rotacionado ou refletido.

151. Professor: Agora gente eu preciso que preencham o quadro. Sexta questão, acompanhem a leitura. Considerando as observações que você fez até aqui preencha o quadro a seguir com X. Então olhem só, vocês têm a figura, a figura 1 se você comparar, ela tem a mesma forma? Sim ou não?
152. Alunos: Não.
153. Professor: Não. Então você não marca. Tem os mesmos ângulos?
154. Alunos: Não.
155. Professor: Então vocês também não marcam. Todos os lados têm a mesma medida?
156. Alunos: Não.
157. Professor: Então vocês não marcam. Vocês vão de figura por figura, vendo o que dá para marcar. Se tiver a mesma forma e o mesmo ângulo, vejam bem, quando eu falo mesmo ângulo, não são as mesmas medidas, é fazendo a correspondência de um triângulo para o outro. Sempre vocês estão comparando um triângulo com o outro.
158. A1: Coloca a figura 3.
159. Professor: É sempre comparando a figura com a referência, ok? Então você vem bem aqui. Figura 1. Você já disse que não tem a mesma forma, nem o mesmo ângulo, e nem a mesma medida. Então por exemplo aqui na figura 4, que vocês marcaram. Tem mesma forma? Então você vem aqui e marca o x. Mesmos ângulos? Então você vai comparar assim. Olhem aqui, esse tem referência com esse. É a mesma medida?
160. A1 e A2: Não.
161. Professor: Não? Olhem aqui, 53,1.
162. A1: Ah, sim.
163. Professor: Então, aqui também. Então você marca e por último, medida dos lados, aqui já não tem, então você não vai poder marcar, para a figura 4.
164. A1: Não tem a mesma forma esse daqui? Tem né. Mas se for de forma a 3 também tem a mesma forma.
165. A2: Tem mesma referência na 3?
166. A1: Mesma referência? Ah, tá. Tem sim. A 5 também tem.
167. Professor: Estão conseguindo fazer?
168. A1: Sim.
169. Professor: Ok gente, deixem só eu explicar algumas coisas pra vocês. Por exemplo, como vocês vão fazer a comparação?
170. C1: Eu escrevi pelos ângulos, medidas e a forma.
171. Professor: vamos pegar aqui pela figura 4 e então você sempre compara daqui pra cá, esse ângulo com esse, esse com esse e esse com esse. É um pareamento, ok C1? Ok gente, vamos ver? Quando vocês parearam, a figura 1 tinha mesma forma? Ângulo? Lado?
172. A1: Não. Também não. Não
173. Professor: A figura 2 tem mesmo forma? Ângulo? Lado?
174. Não. Não. Não.
175. Professor: Figura 3, tem mesma forma?
176. Alunos: Sim.
177. Professor: Ângulo?
178. Alunos: Não.

179. Professor: Não? Não tem o mesmo ângulo?
180. C1 : Espera aí, tem sim.
181. A1: Tem.
182. Professor: Tem. E o lado tem mesma medida?
183. Alunos: Não.
184. Professor: Quarta. Forma?
185. Alunos: Sim.
186. Professor: Ângulo?
187. Alunos: Sim.
188. Professor: Lado?
189. Alunos: Não.
190. Professor: Não. A 5 e 6. Forma, ângulo e lado?
191. Alunos: Sim, sim, sim.
192. Professor: Ok? Todos ficaram assim?
193. A1: Olha, acertei tudo.
194. Professor: Alguém ficou em dúvida?
195. Alunos: Não.
196. Professor: Vamos para sétima questão. Acompanhem a leitura. Considerando sua resposta na questão 5 e o quadro da questão 6, o que é necessário para que triângulos semelhantes sejam iguais? Então vocês vão refletir sobre o que vocês responderam e as marcações que fizeram no quadro e o que é necessário. Vocês já sabem do que precisa para ser semelhante dos triângulos, agora, o que precisa para serem iguais?
197. C1: Iguais? Mesma medida, mesmo ângulo e mesma forma? Não, mesmo ângulo não.
198. C2: Mesmo ângulo sim.
199. Professor: Mesma medida. Mesmo ângulo. Veja bem você está pensando mesmo ângulo na figura, mas os ângulos correspondentes, entre um triângulo e outro. Quando fazemos aqui, esse está refletido ou rotacionado, mas esse ângulo é correspondente a este e tem a mesma medida e assim para os demais, mas aqui dentro eles não precisam ser iguais, precisam ser iguais ao do seu correspondente.
200. C1: Sim, mas eles não têm que ter o mesmo ângulo.
201. Professor: Tem que ter.
202. C1: Esse daqui não é diferente desse?
203. Professor: Não. Veja bem, não é ângulo de visão, é o ângulo do triângulo.
204. C1: Ah, tá. Entendi agora.
205. Professor: É claro virou tem um outro ângulo de visão, é isso que você está querendo dizer, mas não é disso que estamos falando, estamos falando dos ângulos internos dos triângulos. Esses ângulos internos dos triângulos tem uma correspondência e nessa correspondência os ângulos internos que são correspondentes precisam ter a mesma medida para serem semelhantes. Mas aqui a gente não quer apensa que eles sejam semelhantes, estamos buscando que eles sejam iguais.
206. A1: Tem que ter mesma forma, mesma medida, mesmo ângulo.
207. Professor: O C1 definiu, só faltou um detalhe. Mesmo ângulo, mesma medida de lado, mesma forma, mas medidas de ângulo e de lado, falta uma palavra.

208. C1: Razão.
209. Professor: Correspondentes. Os lados correspondentes entre esses triângulos têm que ser iguais, não é que esse triângulo tenha que ter todas as medidas iguais. Tem que ter a mesma medida no triângulo correspondente, ok? Então esse lado é correspondente a esse, que tem mesma medida. Então eles precisam ter mesma forma e os lados e ângulos correspondentes tem que ter mesma medida. Façam a sétima.
210. A1: Coloca aí, eles têm que ter a mesma forma, mesma medida e ângulos correspondentes.
211. C1: Precisa ter as mesmas medidas, ângulos correspondentes e a mesma forma.
212. Professor: Questão 8, gente. Considerando os triângulos que atenderam as 3 características que atenderam ao quadro 5. Quais são as características? Mesma forma e ângulos correspondentes de mesma medida, lados correspondentes com mesma medida. Quais diferenças de posição esses triângulos possuem em relação ao triângulo de referência? Vocês já identificaram, sendo que B1 já observou uma coisa e C1 observou outra, vocês disseram que houve uma mudança de posição na figura 5 e houve uma mudança na figura 6 em relação a medida de referência, então você vai dizer na figura 5 mudou dessa forma, na figura 6 mudou dessa outra forma.
213. A1: Na 5ª ela refletiu ou rotacionou? E na 6ª rotacionou.
214. A2: Na 5ª refletiu e na 6ª rotacionou, é isso?
215. A1: Acho que sim. Na 5ª ela refletiu e na 6ª rotacionou. Ela ficou deitada 90°?
216. A2: 90°. Acho que é isso.
217. A1: Mas onde está isso? No caso ela estava aqui. Ela refletiu verticalmente. No caso na 5ª ela refletiu verticalmente. A 6 rotacionou no sentido anti-horário.
218. A2: Ela rotacionou no sentido anti-horário.
219. A1: É, está certo.
220. C2: Sétima. Precisa ter a mesma medida, ângulos correspondentes e a mesma forma. E a mesma medida também.
221. Professor: O que aconteceu C1 com a figura 5?
222. C1: Ela foi rotacionada ou refletida. Ela rotacionou 360°.
223. Professor: verticalmente ou horizontalmente?
224. C1: Verticalmente.
225. Professor: Então você diga, figura 5 ela está refletida verticalmente.
226. C1:A figura 5 refletiu.
227. Professor: Como ficou a questão 8. A1, como ficou o de vocês?
228. B5: A figura 5 rotacionou 180° e a figura 6 rotacionou 90° no sentido horário.
229. Professor: Ok. Vocês, o que escreveram?
230. C1: A figura 5 refletiu verticalmente para baixo.
231. Professor: Ok. Vamos finalizar a 9. Não tem uma parte em que está escrito aí formalização, é pra escrever isso aqui. Agora questão 9. Que critérios você estabeleceria para afirmar que dois triângulos são iguais? Agora é você formulando. Você vai dizer dois triângulos são iguais quando há isso, isso e isso. É pra responder a questão 9 primeiro.
232. Professor: Vamos fazer uma leitura do que a gente fez na aula anterior. Na primeira folha fizemos a comparação entre a figura de referência e as outras

figuras. Primeiro estávamos procurando quais eram semelhantes. Vocês que estão aqui hoje pela primeira vez nessa atividade, visualmente, quais vocês acham que são semelhantes?

233. C3: A 2.
234. Professor: A 2 é semelhante? E qual mais?
235. B4: A 3, a 4 a 5 e a 6.
236. Professor: Ok. Pessoal que veio a 2 é semelhante?
237. Alunos: Não.
238. Professor: Por que? O que foi que mudou? Observem que a figura de referência é um triângulo isósceles, ela tem só dois lados iguais e um é diferente e essa figura dois tem todos os lados iguais, logo ela não pode ser semelhante, porque ela não vai ter a mesma forma. Todas as outras são semelhantes porque elas mantêm a mesma forma e o mesmo ângulo, mas a figura 5 e 6 têm uma especificidade maior né? Enquanto que a figura 3 é uma redução da de referência a figura 4 é uma ampliação. Figura 3 foi reduzida a metade e a figura 4 ampliada 2 vezes, mas as figuras 5 e 6 mantiveram o mesmo tamanho e mesma medida, então além de ser semelhante tem a mesma medida. Só que elas estão em posições diferentes, certo C1? Como foi que você falou que ela estava em relação a figura de referência?
239. C1: Ela está espelhada para baixo.
240. Professor: Certo. E você B4 o que você vê na figura 6 em relação a figura de referência? Está refletida, rotacionada?
241. B4: Rotacionada.
242. Professor: Sentido horário ou anti-horário?
243. B4: Horário.
244. Professor: Muito bem, 90°, sentido horário essa figura foi rotacionada. Mas ela tem a mesma medida da figura original mesmo que estejam em posições diferentes. Então fizemos toda uma análise de comparação, mas aqui teremos que reduzir para continuar, então chegamos à conclusão de que quando as figuras tem a mesma forma, mesma medida de ângulo e mesma medida de lado são chamados de triângulos congruentes então os triângulos congruentes eles têm mesma forma, mesma medida de ângulos e de lados. Correto? E então chegamos à conclusão de que a razão de proporcionalidade de um triângulo congruente é 1 enquanto que, quando você amplia, no caso da figura 3 ela foi uma redução, a razão era meio porque ela reduziu a metade. A 4 a razão era 2 porque ela dobrou de tamanho então deu razão 2, quando essa figura nem aumenta e nem diminui dizemos que a razão de semelhança é 1. E então chegamos a essa conclusão que triângulos congruentes são aqueles que tem a mesma forma, mesma media de ângulos e de lados. A partir disso eu quero que vocês discutam e resolvam a questão 9 e a questão 10, ok? Agora. Falem e escrevam o porquê de vocês chegarem a essa conclusão. Sabendo que os pares de triângulos a seguir são congruentes. Neste caso já sabemos que eles são congruentes, estabeleça a correspondência entre ângulos e lados e deduza a medida desconhecida DE. Vou só mostrar para vocês como faz a correspondência, vou fazer um exemplo aqui. Por exemplo, eu tenho um triângulo A, B, C em que aqui é 2, 3 e 4. E aqui eu tenho um outro, semelhante a ele, só está em posição diferente, aí aqui está o D, o E e o F, certo? Esse lado é

4, esse aqui é 2 e esse aqui eu não sei. Então eu tô pedindo duas coisas ai estabeleça a correspondência entre ângulos e lados e deduza a medida DE. No caso aqui eu quero que deduza a medida FE. Como fazemos a correspondência, atenção, olhando para a medida dá para nós sabermos a correspondência dos lados. Quem é o lado correspondente ao AB. Ao AB é o ED. Então AB é congruente ao ED. Quem é o lado congruente ao BC?

245. B1: FD.
246. Professor: BC congruente ao FD. Esse símbolo com 3 tracinhos significa congruente e quem é o correspondente ao AC. FE. O FE a medida é Y, se é correspondente ao AC, qual a medida do Y?
247. C1 e C2: 3.
248. Professor: 3. Então Y igual a 3. Então é isso que vocês vão fazer a correspondência dos lados que são congruentes e deduzir o lado que está desconhecido.
249. Professor: E aqui A1. Como ficou? O CB você diz que é o?
250. A1: ED.
251. Professor. E qual é o valor de X?
252. A1: 4,2.
253. Professor: Você acha que é isso mesmo?
254. A2: Acho.
255. C2: Deduzi que esse aqui é 1. Esse aqui são 2. Esse aqui é 2 e esse aqui é 1.
256. C1: Como é pra saber a B, Professor?
257. Professor: Só pra corresponder.
258. Professor: Olhem gente, na letra A é o DE né? Nela quer saber a medida DE que é assim com tracinho que a gente representa. Na letra B está querendo saber a medida do ângulo K. Dentro de um triângulo a medida dos ângulos internos sempre dá 90°. Mas nesse caso temos uma figura em que eu tenho um ângulo reto. Quais são? O I e o J. Quando ele diz que esse ângulo aqui é um ângulo de 90° e que esses dois ângulos aqui são iguais. Se o total é 180 e eu já tenho 90, quanto está faltando?
259. C1: 90.
260. Professor: 90. Então esse 90 se distribuiu para um e para outro, quanto foi?
261. C1: 45.
262. Professor: Então aqui é 90, aqui é 45 e aqui é 45. Então pro ai você tem como saber quanto é o ângulo K.
263. Professor: Intervenção aplicativa. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Dá pra observar que tem 2 triângulos? Sim né?! Os tracinhos identificam quais ângulos que são congruentes. E está pedindo para determinar os valores de x e de y. Então vamos lá. O lado DE é congruente a qual lado do outro triângulo?
264. C1: AB.
265. Professor: Muito bem. Isso significa que o 3y +3 é igual a 18, então para você saber o valor de y o que você vai ter que pensar? Um número que eu multipliquei por 3 e depois eu somei 3 e deu 18. Que número foi esse? O y eu multipliquei o valor dele por 3 e depois eu somei 3.
266. C1: 5.

267. Professor: 5? Bora ver. 5x3 é 15 e 15+3 é 18. Então o valor de y é 5. Vamos descobrir o x. O 2x-6 é o lado AC, Ele é congruente a qual lado do outro triângulo.
268. C2: EC.
269. Professor: Certo. O que isso significa? Significa que 2X-6 é igual a?
270. C1:12.
271. Professor: O que isso significa? Teve um número que multipliquei por 2, tirei 6 e deu 12. O x é?
272. C1: 9.
273. Professor: O x é 9. Porque se eu fizer 9x2 dá 18 e 18-6 dá 12. Pronto.

UARC 2

274. Professor: Como saber se 2 triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas? Vocês devem ter percebido que na atividade anterior nós definimos que a congruência é definida quando eu tenho a mesma forma, todos os lados se correspondendo com mesma medida e todos os ângulos se correspondendo com a mesma medida. Mas e se eu não souber todos os ângulos e todos os lados? Será que ainda sim é possível eu garantir que dois triângulos são congruentes? É isso que vamos ver aqui. Primeira questão, intervenção inicial, baseando-se nas informações da atividade anterior, explique se é possível afirmar que os pares de triângulos a seguir sejam congruentes. Ok, então em todos vocês terão que fazer esse pareamento. Pareamento assim, na letra A, quem está fazendo par com AB? AB é congruente ao $\bar{A}$, $\bar{B}$, que é igual a quanto?
275. Alunos: 3.
276. Professor: Certo. Ai o BC é congruente ao $\bar{B}$, $\bar{C}$, que é igual a quanto?
277. Alunos: 5.
278. Professor: E o outro? AC. Não tem essa medida BC, mas temos do AC e do $\overline{AC}$. Que é quanto gente?
279. Alunos: 5
280. Professor: Agora vamos para o ângulo. O ângulo A é congruente ao $\bar{A}$, que é igual a quanto?
281. Alunos: 60°.
282. Professor: Do B é congruente ao $\bar{B}$ que é quanto? Qual é a medida do ângulo B? Tem?
283. Alunos: Não.
284. Professor: E referente ao $\bar{C}$. Tem? Também não né? Então vocês vão fazer isso para todos. Vão ver a medida dos lados se é possível encontrar e as medida dos ângulos e então vocês vão dizer, olha, aqui tenho certeza de que é congruente ou então não é congruente porque está faltando alguma coisa. Sempre, gente, é uma comparação entre dois triângulos, eles vão ter uma correspondência, tem um ângulo daqui que é correspondente ao de lá, tem um lado daqui que é correspondente ao do outro. Então vocês vão fazer essas correspondências e se vocês identificarem as medidas vocês colocam se não deixem um espaço, mas discutam ai. Como ficou ai a letra B? AB congruente ao $\overline{AB}$, que é quanto? Tem valor?
285. B5: Depois de AB e BC vem o que?

286. B6: AB, BC, AC, A, B, C. Aqui é ângulo.
287. B6: Acho que eu entendi, olha, aqui no BA.
288. B5: Não tem nada coloca uma linha.
289. B6: Aqui no AB é nada.
290. Alunos? Não.
291. Professor: E o BC com o $\overline{BC}$?
292. Alunos: 8.
293. Professor: E o AC com o $\overline{AC}$?
294. Alunos: Não tem.
295. Professor: Ângulo A?
296. Alunos: Nada.
297. Professor: E o B?
298. B6: 60°.
299. Professor: E o C?
300. B6: 30°?
301. Professor: Esse primeiro vocês acham que é congruente?
302. B6: Sim.
303. Professor: Por que?
304. C1: Porque tem a mesma medida e o mesmo ângulo.
305. Professor: Mas todos? Tem a garantia de todos? E a letra B vocês acham que são? Tem como garantir que todos os pares de lados e todos os pares de ângulos tem a mesma medida?
306. C1: Sim, porque esse aqui tem que ser o mesmo que esse aqui.
307. Professor: Tem que ser. Por que tem que ser?
308. C1: Porque é o mesmo exato. Tem o mesmo tamanho.
309. Professor: Quanto é a soma dos ângulos internos de um triângulo?
310. C1: Soma?
311. Professor: É, que nós falamos ainda pouco. É 180°. Quanto eu tenho aqui?
312. C1: 70 e 30.
313. Professor: 100 né, quanto falta para 180?
314. C1: 80.
315. Professor: 80! Então aqui também falta quanto?
316. C1: 80.
317. Professor: isso. Então dá para deduzir esse também. Esse ângulo não dá?
318. A2: Acho que sim.
319. A2: Por que é AC? Tipo assim é BA né?
320. B6: Achei um pouco difícil.
321. B4: A C?
322. B6: É.
323. B4: Na C só não tem grau.
324. B6: Aqui é 5 e aqui não é nada.
325. B4: Acho que na C todos tem né?
326. B6: Não.
327. B4: Tá certo?
328. B6: Está.
329. Professor: Está saindo?

330. Professor: Vamos lá gente, na letra C, como ficou? Quanto deu na B? AB e $\overline{AB}$?
331. Alunos: 4.
332. Professor: AC e $\overline{AC}$?
333. Alunos: 5.
334. Professor: BC e $\overline{BC}$?
335. Alunos: 6.
336. Professor: E o ângulo?
337. Alunos: Nada. Nenhum.
338. Professor: No B?
339. Alunos: Não tem.
340. Professor: No C?
341. Alunos: Nada.
342. Professor: E o BC?
343. Alunos: 4.
344. Professor: E o ângulo?
345. Alunos: 70°.
346. Professor: E o C?
347. Alunos: Nada.
348. Professor: Então vamos lá, eu tenho a informação aqui de todos os lados? Não né, tem quantos aqui? Quantos eu tenho? Tenho 2. Tenho de todos os ângulos?
349. Alunos: Não.
350. Professor: Aqui eu tenho dois ângulos e um lado e dois lados e um ângulo e aqui? Todos os lados e nenhum ângulo. E aqui? Um lado e dois ângulos né? Muito bem. Vocês acham que algum par aí é congruente?
351. C2: O item A eu acho que é congruente.
352. B5: Acho que a C, Professor.
353. Professor: Vamos ver se a A e a C são congruentes. Vamos ler a questão 2, acompanhem junto comigo. Use as malhas a seguir para construir, se possível. Se possível, quer dizer que nem sempre é possível. Triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência identificando os lados e ângulos correspondentes. Linhas em azul representam medidas fixas, linhas em vermelho representam medidas que devem ser completadas. Esses desenhos que vocês vão fazê-los não estão em uma malha quadriculada, já fizemos várias atividades em malha quadriculada. Essa malha é o que chamamos de malha isométrica ou malha triangular. Observem que ela é formada por triângulos, atenção, esses triângulos são equiláteros, o que significa triângulos equiláteros? Os lados são todos iguais, lados iguais e ângulos iguais. Aqui estamos chamando os lados desses triângulos de L, mas a medida do lado é diferente da medida da altura. A altura é a medida que vai dar aqui da ponta até o meio do outro lado. Altura h, estamos chamando a altura de H. E o lado de L. Então todos os ângulos aqui tem 60°. Porque todos os ângulos internos do triângulo têm que somar 180, então se eu dividir 180 por 3 vai dar 60. Então vamos lá, características desses triângulos, eles são equiláteros, todos os lados tem a mesma medida e aqui estou dando uma letra para representar essa medida, qual

é essa letra? L! L representa a medida do lado do triângulo e a altura do triângulo estou representando por H. Todas as vezes que eu quiser representar a altura de um triângulo eu vou usar h e todas as vezes que eu quiser representar o lado eu vou usar L. Ok. Então gente, em todas essas figuras eu sempre vou ter que fazer o triângulo de referência, um triângulo congruente, que não necessariamente vai estar na mesma posição, ele pode estar transladado, refletido, rotacionado, mas ele pode ser congruente porque os lados vão ter as mesmas medidas e os ângulos vão ter as mesmas medidas. Então aqui no primeiro, a partir desse lado, já está construído você vai construir um outro triângulo e aqui do lado você vai construir um triângulo congruente. Do outro lado você vai construir um triângulo não congruente, mas tendo pelo menos um lado com essa mesma medida. Então vamos, aqui no primeiro quadrado eu tenho a minha referência, ok? Essa minha referência eu já tenho um lado do triângulo, o que eu vou fazer? vou construir os outros dois. Depois bem aqui eu vou construir outro triângulo, só que ele é congruente a este. Esse meu triângulo aqui tem um lado já, que nem esse. Então eu só vou fazer construir os outros lados, mas tem que ser um triângulo congruente ao outro. Bem aqui eu vou construir o outro não congruente, ele vai ter o lado com essa mesma medida, mas as outros não vão ter, só um lado que ele vai ter igual, os outros não. Então, lado de referência, triângulo congruente e triângulo não congruente. Podem fazer.

354. B5: Tem que fazer o triângulo diferente dos outros dois.
355. B4: Como assim diferente? 2, 2 ,2?
356. B5: É.
357. Professor: Vamos ver a primeira como ficou. Eu já tinha um lado fixo, esse lado tem quantas medidas gente?
358. B6: 3.
359. Professor: 3 o que? 3L ou 3H?
360. B6: 3L.
361. C1: Olha, vou te explicar. Sabe esse aqui?! Tem que ser um triângulo não congruente. Um bem assim de lado, igual mostra aqui na referência.
362. C2: Ah, tá.
363. C2: Me fala BC aí. É nada?
364. C1: nada.
365. Professor: E bem aqui, eu também já tenho também 3 lados, só que em outra posição, mais ou menos aqui. Então tenho que construir um triângulo que nem aquele. Como ficou o de vocês?
366. B4: Professor, o meu ficou assim.
367. Professor: Muito bom. Aqui pelo menos um lado tem que ter 3. Você construiu certinho o congruente, mas o não congruente tem que ter um lado com 3. Aqui todos os lados tem 2. Um lado tem que ter 3.
368. C1: Ah, entendi.
369. Professor: Bora tentar fazer o não congruente? A maioria de vocês, pelo que estou vendo aqui fez assim, 3 aqui e 3 aqui, não foi? A maioria de vocês fez isso. Ficou tudo 3. Como ficou o teu? Lembrem que vocês podem usar a altura também. Lembrem que pelo menos um lado tem que ter 3, vou fazer um não congruente. Olhem, o não congruente vai ter que ter um lado que seja 3, os outros não necessariamente. Eu posso construir ele usando as diagonais como

também eu posso usar as alturas, como também eu posso vir aqui e cortar uma altura. E bem aqui cortando pela altura e descendo. Esse é um triângulo que um dos lados tem 3 mas os outros dois tem medidas diferentes, então eu consegui construir um triângulo não congruente, porque congruente vocês conseguiram.

370. B6: Aqui Professor, o congruente.

371. Professor: 1, 2. Aqui é 3, puxa mais aqui. Pra cá.

372. Professor: Olhem gente aqui na segunda vocês vão ter que fazer todos os ângulos iguais, então você constrói uma figura. Veja bem, não é que todos os ângulos desse triângulo sejam iguais, significa que se você for parear os ângulos de um triângulo com o outro, sempre vai dar mesma medida, pareando, não é dentro do triângulo. Depois vocês irão fazer um outro que tem lados diferentes, mas mantendo os mesmos ângulos, vocês sabem que isso é possível né? Manter o ângulo sem necessariamente manter as medidas dos lados. Se você for fazer congruente, mesmas medidas de lado e de ângulo, o não congruente pode até ter os mesmos ângulos, mas podem ser lados diferentes, tanto que nós até fizemos na atividade anterior, lembram? Que é aquele reduzido e aquele ampliado? Tinham o mesmo ângulo, mas não tinham as mesmas medidas de lado.

373. Professor: Esse aqui continua errado, porque eu não tenho nenhum lado que tenha a medida 3. Aqui tem 2, aqui tem 2 e aqui tem 2. Aqui todos os ângulos são iguais e todos os ângulos são iguais. Aqui também. Aqui está corretíssimo, esse aqui é não congruente, porque ele tem todos os ângulos iguais mas os lados têm medidas diferentes.

374. Professor: Primeiro tem que fazer o de referência, quando você fala congruência e semelhança é um par, e vou construir um triângulo que seja congruente ao de referência e um que seja não congruente ao de referência. Se você não fez a referência não tem como dizer se é congruente ou não.

375. C3: E quando não tiver referência?

376. Professor: Se não tem uma referência não tem como estabelecer semelhança e congruência. Semelhança e congruência sempre é em pares. É uma comparação.

377. C2: Como é a 2?

378. C1: É só pra tu fazer uma referência, congruente e não congruente. Congruente é o parecido, mesmos lados, mesmos ângulos, mesma medida. Não congruente é só com uma medida igual a do de referência e os outros de outras medidas.

379. Professor: ok. Só falta o não congruente, mas que tenha as mesmas medidas de ângulos daqui. Vou fazer um exemplo aqui, alguns de vocês já fizeram. Fiz esse aqui que é o de referência, vou fazer um congruente aqui e vou fazer um não congruente aqui. Aqui todos os meus ângulos tem 60 e aqui também. Aqui todos tem 60, mas a medida do lado não é a mesma. Se não é a mesma então ele é não congruente, certo? Mas Professor, só poderia fazer desse jeito?! Usando o triângulo equilátero? Observem que aqui todos tem 2, não precisa ser necessariamente assim, eu poderia usar a altura do triângulo. Observem que aqui esse triângulo tem um lado e aqui 2 lados, se eu deixar dessa forma, bem aqui eu vou ter 60. Quantas alturas aqui eu peguei? 3 alturas, certo? Então eu vou pegar 1 lado, 2 lados, era isso que eu queria. Bem aqui eu tenho 1L, bem

aqui eu tenho 2L e bem aqui eu tenho 2H, certo? 2 alturas. E bem aqui eu posso construir um outro congruente. Bem aqui é 90°, bem aqui é 60° e bem aqui é 30°. 60, 90 e 30. Por que aqui eu digo que é 30? Porque eu dividi no meio esse ângulo. Todos os ângulos desse triângulo não têm 60? Então se eu cortei aqui eu tenho meio triângulo. Então aqui tem 30, aqui tem 60 e aqui tem 90. E eu posso construir um outro bem aqui dessa mesma forma. E posso construir outro menor aqui. Estou fazendo esse exemplo para vocês compreenderem que não precisa todos os ângulos serem iguais. Nesse exemplo aqui eu tenho 30, aqui eu tenho 90 e aqui eu tenho 60. Observem que esses ângulos aqui não são iguais entre si. Esse ângulo aqui corresponde a esse. Esse de 60 corresponde a esse, e esse de 30 corresponde a esse. Então quando a gente diz que todos os ângulos são iguais, são os pares. Significa que tenho um ângulo desse que corresponde ao ângulo do outro e todos esses ângulos vão se corresponder. Nos exemplos de vocês aqui é 60 e nos outros 60 e 60. Esse aqui tem que ter todos os ângulos 60 mas ele não vai ter as mesmas medidas de lado, então o exemplo que poderia ficar aqui seria esse. Todos os ângulos são 60 mas os lados são diferentes, então ele é não congruente. Esse aqui não é nem semelhante.

380. C2: Ah, agora entendi.
381. Professor: Então nesse outro aqui que a gente diz que é um não congruente, mas ele tem que ser semelhante.
382. B6: Aqui Professor.
383. Professor: Ok. Já fizestes até o terceiro né. Lado 3, 1,5, 3 alturas. Aqui é 3 alturas, só falta construir o que? Eu já tenho 3 alturas aqui. Falta o que?
384. B5: Falta os 3 lados.
385. Professor: E no caso você tem que puxar pra cá ou pra cá. Olha, 3 lados que aí você vai ter 1,5L bem aqui, como está pedindo.
386. Professor: Vamos passar para terceira. Na terceira está dizendo assim lados com medida 3L, 1,5L, 3H. L já sabemos que é lado e que H é altura. Quando ele colocou esse risquinho tivemos o que? São alturas ou são lados aqui?
387. A1: Lados?
388. Professor: Não, ele construiu o lado de um triângulo, mas essa medida aqui são 3 ângulos ou 3 lados? Qual a medida desse traço? Quando eu digo lado é lado desse triangulozinho aqui. Não tá passando pela altura?
389. A1: Sim. 3H.
390. Professor: Pegou 3 alturas. E agora queremos que os outros lados tenham 3L e 1,5L. Está errado isso aqui C1. Quase vai, não foi. Aqui eu tenho duas saídas, ou eu faço bem pra cá para ficar 3 lados, não acho que a única saída é aqui mesmo, 3 lados e 1,5 lado, confere gente? 3 alturas já está, aí aqui eu tenho 1, 2, 3 lados e aqui 1,5 lado, então aqui eu já tenho a minha figura de referência. Agora você vai construir a sua figura congruente, mas aqui eu tenho os três lados, então qual o lado que está faltando aqui? Está faltando 1,5. Está faltando as 3 alturas para construir esse triângulo aqui congruente. Vejam lá.
391. Professor: Grupo C. Está ok aqui. Esse aqui não é congruente, para ser congruente tem que ter as mesmas medidas, mesmo que deixe em outra posição, mas as mesmas medidas.
392. Professor: Vamos ver aqui. Aqui está faltando 3 alturas.
393. A1: Ah, é. Verdade.

394. Professor: Porque aqui ele deu as alturas e aqui ele deu os três lados, então você tem que completar as 3 alturas e 1,5 lado.
395. A2: Assim?
396. Professor: É, só que esse não congruente não tem as mesmas medidas de lado, você acha que é possível?
397. C1: Tem que ter as mesmas medidas, todos?
398. Professor: Tem. Vejam bem gente, quando eu peço para vocês construírem eu quero que vocês reflitam se é possível construir uma figura não congruente com essas medidas, não congruente a está, você acha que dá? Para eu fazer com as mesmas medidas de lado e ela ser não congruente?
399. A1: Com essa medida de azul?
400. Professor: Isso, tem como fazer com essas mesmas medidas e ela não ser congruente?
401. A3: Acho que tem.
402. Professor: Acha que tem, então tenta construir ai.
403. Professor: Ficou congruente né? É possível então? Não é a mesma medida, mas esse ficou congruente, eu quero não congruente. É possível?
404. B6: Não é possível.
405. Professor: Não tem como? Então passem para quarta. Teu colega chegou à conclusão de que não é possível. Usar as mesmas medidas, mas não ser congruente.
406. A1: É possível sim.
407. Professor: Se é possível eu quero que me mostrem. Aqui eu tô com uma amarração, qual a amarração que eu tenho? O que eu quero que vocês reflitam sobre um triângulo é isso aqui, eu tenho lado, eu tenho ângulo, isso aqui é como um relógio, que eu posso seguir no sentido horário ou no sentido anti-horário. Ângulo, lado, ângulo, lado, ângulo e lado e eu posso voltar lado, ângulo, lado, ângulo, lado, ângulo. Nessa figura, qual a informação que eu tenho? Eu tenho a informação de um ângulo bem aqui, de um lado que tem medida 3L, E eu tenho a informação de um outro ângulo bem aqui, qual é a medida desse ângulo gente? Desse bem aqui? Olhem, aqui esse triângulo tinha 60, eu cortei no meio ficou quanto?
408. C1: 30.
409. Professor: 30! Já esse aqui eu tinha 60 daqui pra cá e 60 daqui pra cá. Por que eu digo 60, lembrem que nesses triangulozinhos eu tenho 60, 60 e 60, mas se eu juntei aqui um outro triângulo, bem aqui eu também tenho 60, então ao todo eu tenho 120. Então bem aqui eu juntei dois ângulos então ao todo eu tenho 120, né? A partir daí eu vou construir um novo triângulo, eu vou projetar até formar um novo triângulo. Então o que eu vou fazer, eu vou puxar um lado e vou puxar esse e vou ver onde que eles se encontram. O de vocês ficou assim?
410. Alunos: Sim.
411. Professor: E ficou quantas alturas? 6 H. Aqui eu tenho 3L. E aqui eu tenho 3L. Aqui vocês constroem um outro só que congruente. Sendo que eu já coloquei esse lado ai. Já tenho um lado que mede 3L, esse lado aqui, que já está construído para ser congruente corresponde a quem? Desse, desse ou desse. Então você vai construir um triângulo semelhante a esse, bem aqui. Mas aqui qual foi a informação que foi dada? Que a gente tinha um ângulo de 30°, nós

tínhamos um lado que media 3L e um outro ângulo que media 120°, era essa minha informação inicial.

412. Professor: Vamos lá gente. Fizemos uma atividade inicial em que nós retomamos o que era um triângulo semelhante. Triângulo semelhante tem mesma forma, mesmos ângulos e lados proporcionais, o que significa que eles aumentam ou diminuem a uma mesma razão de proporção, então eles aumentam ou diminuem a mesma proporção, certo? Por exemplo, a questão da prova de vocês que tinha aqui 12, 10 e aqui 0,5, quando uma razão é meio significa que os lados diminuíram pela metade, então o triângulo semelhante irá ter 6, 6 e 5. Agora se a razão for 2 eu vou multiplicar por 2, então vai ficar quanto? 24, 24 e 20. Nesse caso, na primeira atividade a gente definiu o que era triângulo congruente. No triângulo congruente nós concluímos o que? Que você tem a mesma forma, mesmos ângulos, mas os lados não são proporcionais, eles têm mesma medida, os lados também são iguais e por serem iguais essa razão de proporção é igual a 1. Mas mesmo sendo congruentes, ou seja, tendo mesma forma, mesmos ângulos, lados iguais e razão 1, ele podia ser congruente, mas estar em uma outra posição. Podia estar refletido, transladado, rotacionado, mas ainda sim ser congruente, certo? Então, se um triângulo foi reduzido ou ampliado ele é semelhante, mas para ele ser congruente tanto os ângulos quanto os lados têm que ter as mesmas medidas, ok? Então vamos pegar aqui o material. Fizemos a primeira questão em que você não tem todos os ângulos nem todos os lados, mas pede-se para vocês verificarem se esses pares, já que estou fazendo comparação entre dois triângulos, eram semelhantes ou não. Tudo bem, passamos para as questões seguintes. Fizemos uma primeira intervenção aqui, em que nós tínhamos uma malha isométrica que é essa malha triangular, é uma malha em que os triângulos todos tem uma mesma medida de lado e as medidas desses lados nós representamos com uma letra, a letra L, e as alturas nós chamamos de H. Na primeira construção, nós pedimos para construir um triangulo que partisse dessa posição aqui, da referência. Nessa referência aqui o traço tem 3 lados, certo? Observem aí, 3 lados de triângulo. Aqui queríamos fazer um triângulo qualquer e aqui um triângulo congruente. Não ia ficar na mesma posição, mas ia ter mesmo ângulo e mesmo lado. Aqui no terceiro eu tenho que construir um triângulo também, que também tenha um lado de medida 3, mas os outros lados teriam que ser diferentes, porque eu quero que seja não congruente, um lado teria que ter a mesma medida daqui e os outros teriam que ser diferentes. Agora observem, quando eu falo mesma medida eu não estou dizendo que todos os lados do triângulo têm que ter a mesma medida, eu estou dizendo que tem que haver uma correspondência, por exemplo, tem aqui 3, 4 e 5 e eu tenho um outro aqui também, 3, 4 e 5. Esse lado é congruente a este. Este é congruente a este, este é congruente a este e este é congruente a este. Então quando eu falo mesma medida eu quero dizer que os lados desse tem as mesmas medidas dos lados desse. São diferentes, mas tem correspondência com o outro. Perceberam o que estou falando? Então quando eu peço para você fazer ângulo congruente aqui, eu peço para você fazer o triângulo que tenha os lados correspondentes ao outro triângulo de referência com a mesma medida. Neste caso eu só quero que um lado seja correspondente. Então por exemplo, o não congruente poderia ser assim 3, 7 e 8. Eu só tenho um lado congruente os

outros não são, então esse triângulo não é congruente porque para ser congruente preciso ter todos os lados se correspondendo com os lados do outro triângulo, nesse caso aqui só está se correspondendo o 3, não estão se correspondendo o 8 e o 7. Já aqui não, olhem, eu tenho3 com 3, 5 com 5 e 4 com 4, então esse aqui é congruente, esse aqui é o de referência e esse aqui é o não congruente, então, em cada situação aqui vocês vão construir os triângulos partindo da informação inicial aí.

413. B1: Então a gente tem que fazer da mesma medida só que de formas diferentes com o congruente.
414. A3: Ei, tu já viste esse daqui de cima? Lê esse aqui. Aqui tem 4 bolinhas, não eram só 3 pra marcar?
415. A1: Não.
416. Professor: Cadê, deixa eu ver a primeira de vocês. A primeira já fez. Não congruente não conseguiu fazer? Olha, vou te dar um exemplo, eu só quero que tenha 3. Os outros podem ser diferentes, ai você poderia fazer assim, pela altura.
417. A3: Como assim 3?
418. Professor: 3 lados. O lado do triângulo serve como medida. Aqui no não congruente eu só quero que tenha um lado com 3 medidas os outros eu quero que sejam diferentes.
419. A4: Ah, tá.
420. Professor: Aqui eu tenho um lado que é 3 e os outros são diferentes, então esse aqui não é congruente.
421. A3: Ah, entendi, então esse aqui e esse aqui também estão errados.
422. B5: Aqui estava certo.
423. B1: Mas é congruente, não tem a mesma medida de nenhum lado.
424. B5: Mas aqui é o não congruente.
425. B6: O não congruente tem que ter pelo menos uma medida igual.
426. B1: Mas aqui não tem nenhuma medida igual. Como ficou uma medida igual aqui então? Eu não entendi.
427. B6: Onde tem 4?
428. C2: Tá errado. Esse aqui está equivalente a esse. Agora está certo.
429. C1: Essa aqui está errada, tem que ter pelo menos 1 lado igual
430. Professor: Aqui eu estou querendo que todos os lados sejam iguais. E aqui eu quero não congruente, ou seja, os lados têm que ser diferentes de modo que todos os ângulos sejam iguais. Gente ai na segunda estou querendo que se mantenham os ângulos, eu posso manter as mesmas medidas de ângulos mas com lados diferentes, certo? Nesses triângulos da malha todos os ângulos são de 60°, então eu posso construir um triângulo maior que também vai ter ângulos de 60°. Esses dois triângulos embora sejam semelhantes não são congruentes, porque os ângulos são iguais, mas os lados são medidas diferentes, então na segunda eu quero congruente, que tenha as mesmas medidas de ângulo e eu quero o não congruente, com mesma medida de ângulo. Mas ai eu posso ter também outro pensamento, 90, 30 e 60 graus e eu também posso ter o menor com 90, 60 e 30 graus, eles são semelhantes porque eles têm os mesmos ângulos, mas eles não são congruentes, para ser congruente tem que ter a mesma medida de lado. Nesse caso aqui eu só tenho correspondência de ângulos, não tenho de lados, então esse aqui é não congruente e esse aqui é

congruente, embora tenha correspondência de ângulo, na segunda eu quero que tenha correspondência de todos os ângulos. No congruente eu também vou ter correspondência de lados e no não congruente eu não vou ter correspondência de lados.

431. B2: Ah, entendi. Acho que é assim. Dá pra saber quando eles têm a mesma forma, mesmos ângulos.
432. B1: Mas tamanhos diferentes.
433. B2: É, acho que é isso.
434. Professor: Terminaram?
435. B2: Sim.
436. Professor: Vamos ver. Aqui vocês pegaram um lado, perfeito. Aqui, esse aqui repetiu não foi? Esse aqui manteve. Aqui não poderia aumentar, esse aqui não está certo. Porque o que está azul é fixo. Esse aqui não é congruente, tem que ser congruente. Discutam ai para vocês verem uma solução.
437. A1: Professor, essa aqui está certa?
438. Professor: Certo, veja bem, quando eu digo não congruente esse azul eu fixei a medida de um lado, está vendo? Pelo menos 1 lado aqui tem que ter medida 3. A vocês vão construir um novo triângulo, não um igual a esse.
439. A1: mas é obrigatório ter uma medida específica ou eu posso escolher o lado?
440. Professor: Eu quero que construa um triângulo que seja não congruente a esse mas que pelo menos um lado tenha essa mesma medida .
441. A1: Mas aqui tem um lado.
442. Professor: Não, aqui tem 3. Tem que ser esse que está fixo.
443. A1: Ah, tá.
444. Professor: Percebam ai no comando da questão que nem sempre vocês vão construir um não congruente por conta dessas amarrações que estão ai, algumas coisas ficam tão amarradas que você acha impossível fazer um não congruente, entendeu? Então um não congruente nem sempre vai ser possível.
445. Professor: Gente quando chegar na parte das perguntas nós vamos discutir juntos. Façam as construções de vocês.
446. B2: Professor, vem aqui por favor.
447. Professor: Olha, você não pode fazer isso. O azul não pode prolongar, só o vermelho, você tem que construir a partir do que já está. No caso ali o vermelho, ok. Então significa que esse aqui tem mesma medida desse. Agora você tem que fazer os outros a partir dai. Ele tem que ser congruente, As mesmas medidas aqui tem 2 e aqui só tem 1, isso, agora sim. Esse aqui não é congruente. As medidas não são as mesmas, são diferentes, tem que ajeitar esse aqui e esse aqui.
448. A3: Professor, vem aqui por favor.
449. Professor: Certo, não deu pra fazer não congruente com as mesmas medidas né? Não foi possível.
450. A3: Não foi possível.
451. Professor: Nem sempre vai ser possível. Mas o congruente, perfeito. Olha, é igual, só está em uma posição diferente. Qual a posição aqui que mudou? Ele está o que?
452. A3: Refletido.

453. Professor: Aqui não está legal, essa medida não pode ser prolongada, você vai ter que fazer aqui pela altura, ok? Essa aqui não está certa. Só pode prolongar o vermelho o azul não.
454. A1: Entendi. Então no caso é isso daqui.
455. A3: O que está errado? Isso aqui é?
456. A1: Aqui Professor, consegui.
457. Professor: Ótimo, muito bom.
458. A1: Não congruente olha, consegui.
459. C1: Professor, aqui toda essa borda azul tem que ficar aqui também?
460. Professor: É, mas aqui você vai perceber que toda vez que você tenta não vai conseguir fazer com essas mesmas medidas. Se você fizer com essas mesmas medidas vai acabar ficando congruente.
461. Professor: Vamos passar para a parte das perguntas? Vamos lá, na parte do verso, intervenção reflexiva, você conseguiu fazer todos os triângulos de referência? De referência são os primeiros, ok? Alguém não conseguiu fazer o primeiro triângulo de cada questão? Alguma dificuldade em fazer?
462. A1: Nenhuma.
463. Professor: nenhuma, então vocês coloquem ai se tiveram, se conseguiram e qual foi a dificuldade. Podemos passar para a quarta? Quarta, intervenção reflexiva, você conseguiu fazer todos os triângulos congruentes aos de referência? Quais você teve mais dificuldade? Nesse caso eu quero que a gente volte lá no triângulo de referência. Voltem para o primeiro só pra gente analisar, observem que a gente partiu de um lado, era só essa informação que nós tínhamos, um lado com medida 3L, certo? Então você fez o triângulo congruente. Esse triângulo congruente, grupo A, está na mesma posição do de referência? O primeiro triângulo.
464. A1: Não.
465. Professor: Está como?
466. A1: Um está para baixo e o outro está para cima.
467. Professor: Então você pode dizer que está como?
468. A1: rotacionado.
469. Professor: O de vocês está na mesma posição. Mas tudo bem, não tem problema. O de vocês aqui?
470. C1: mesma posição.
471. Professor: E o de vocês aqui? Algum repetiu ou transladou? Ok, muito bem, vamos passar para o segundo grupo. No segundo grupo nós queríamos que todos os ângulos fossem iguais, tivessem correspondência, certo? De todos os ângulos. Conseguiram fazer o não congruente? Certo. Ai vocês conseguiram fazer congruente igual?
472. A1: Sim.
473. Professor: E o não congruente? Conseguiram fazer com essas amarrações ai, com essas mesmas medidas de lado?
474. A1: Não.
475. Professor: Foi impossível fazer com essa amarração dos 3 lados. Eu só quero que vocês acrescentem ai no primeiro bloco que a medida que foi informada foi apenas um lado. Vamos para a quarta. Qual foi a informação que foi dada aqui nessa questão. Lembra que eu falei para vocês para fazer um relógio? Que você

tem sempre a medida de ângulo, depois um lado, depois um ângulo e depois um lado. Nesse caso você tem a medida de ângulo, depois um lado e depois um ângulo, então vocês só coloquem a medida informada. Um ângulo, depois um lado e depois um ângulo. Na sexta gente o que foi informado? O que está fixado ai? Está fixado um lado, depois um ângulo e depois um lado. Está fixado um lado, depois um ângulo e depois um lado e ai o que vocês tiveram que fazer? Só puxar. Então estava fixo, lado, ângulo, lado, coloquem lá na sexta. Na sétima o que foi informado, gente? Observem que ai tem uma informações, o que está ai na sétima? Eu quero um lado, com medida 4H, 4 alturas, que já está. Medidas informadas, lado 4h, já temos. Depois a gente que um ângulo de 30°. O ângulo de 30° já aparece, porque está cortando um ângulo de um triângulo, aqui tem 60, você corta no meio ficou 30 e ai você quer o ultimo ângulo com 60°, então você teria que construir um novo triângulo com 60°.

476. Professor: Deixa eu ver a sétima de vocês. Ok. 60, 30 e um lado medindo 4H. Ai desse você também não consegue fazer um congruente com essa amarração. Qual foi essa amarração? Lado 4H, 30° de um ângulo, 60° de um outro ângulo. Você até conseguiu aqui, mas você não fez um lado de 4H, então não é possível fazer um não congruente com essa amarração ai.

477. Professor: Vamos lá para a quarta questão. Conseguiram fazer todos os triângulos congruentes? Conseguiram, não foi? A maioria de vocês eu vi que conseguiu fazer os congruentes. Respondam se conseguiram e se algum acharam mais difícil. Você conseguiu fazer todos os triângulos não congruentes ao de referência?

478. A1: Não.

479. Professor: Quais foram os itens que você conseguiu e os itens que você não conseguiu? Esse não congruente teria que ter a amarração dos 3 lados e ai você até fez o não congruente, mas esse não congruente não tem as mesmas medidas dos lados dos outros, ele tem lados diferentes. Ele é um não congruente de lados diferentes e não de lados iguais ao de referência. Certo, a sexta. Nesse caso as únicas que realmente é possível fazer um triângulo congruente e um não congruente com a amarração é a primeira e a segunda. Porque eu só amarrei um lado, amarrando um lado eu posso fazer tanto um triângulo congruente quanto um não congruente, se eu amarrar apenas um lado isso é possível. Na segunda eu amarrei apenas o ângulo eu não amarrei os lados, mantendo os ângulos é possível fazer triângulo congruente e não congruente. Então de todas essas ai as únicas que são possíveis de fazer a amarração são a 1 e a 2. Considerando as situações em que você não conseguiu construir os triângulos não congruentes aos de referência, que informações estavam fixadas

480. Professor: Respondam comigo a sétima. Responda a questão título desta atividade: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas? Baseado nessa pergunta eu queria que vocês respondessem a primeira questão. Lembra que a gente falou que para ser congruente todos os ângulos tem que ser iguais e todos os lados tem que ser iguais? Nem sempre eu tenho todas as informações. Então essa atividade é para eu saber alguns casos em que eu tenho algumas informações que levam a concluir que esses triângulos sejam congruentes e para isso eu não preciso saber nem todos os ângulo e nem todos os lados e são exatamente nessas situações. Se eu tenho 3 pares de lados

amarrados então já é congruente. Então eu quero que vocês voltem para a questão inicial e reparem o que eu tenho de informação aqui na letra a, eu tenho a medida de um lado, de um ângulo e de outro lado. Do outro lado eu tenho a medida de um lado, de um ângulo e de um lado. Eu posso dizer que é congruente esse par? O que eu tenho de informação deles? Aqui eu tenho um lado de medida 5. Lá eu tenho um lado de medida 5?

481. Alunos: Tem.
482. Professor: Aqui tem um ângulo de 60°, lá tem um ângulo de 60°?
483. Alunos: Sim.
484. Professor: Aqui eu tenho um lado de 3, lá eu tenho um lado de 3?
485. Alunos: Tem.
486. Professor: Então qual é desses casos aqui? Lado, lado, lado. Ângulo, lado, ângulo. Lado, ângulo, lado. Qual é desses casos?
487. A2: Lado, ângulo, lado.
488. Professor: Lado, ângulo, lado. Então você vai escrever aí na letra A, são congruentes. Quais são as informações que eu tenho tanto em um triângulo quanto no outro? Eu tenho um lado, um ângulo e um lado. A gente já viu que se eu tenho essas 3 informações correspondentes em 2 triângulos isso já é uma garantia que eles sejam congruentes, então nesse caso eu posso dizer sim, eles são congruentes, por causa dessa situação aqui. Então escrevam aí, são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado. Vamos para a letra B eu tenho um ângulo de 70 aqui, no outro também tem?
489. A1: Tem.
490. Professor: Aqui na primeira eu tenho um lado de 8, na outra eu também tenho?
491. Alunos: Sim.
492. Professor: No lado daqui eu tenho um ângulo de 30°, no outro eu também tenho?
493. Alunos: também.
494. Professor: Então eu tenho 3 informações se correspondendo. Quais são essas informações?
495. Alunos: ângulo, lado, ângulo.
496. Professor: Eles são congruentes?
497. Alunos: Sim.
498. Professor: por qual caso?
499. A1: Caso ângulo, lado, ângulo.
500. Professor: Certo, então pode escrever ai. Na letra c me digam qual é esse caso?
501. A1: Lado, ângulo e lado.
502. Professor: veja bem A1, analise, eu tenho algum ângulo ai?
503. A1: Não.
504. Professor: Então qual o caso?
505. A1: Lado, lado, lado.
506. Professor: São congruente pelo caso lado, lado e lado. Letra D, são congruentes por qual caso?
507. Alunos: Lado, ângulo, ângulo.

508. Professor: observem que nesse caso aqui ele é diferente, aqui eu tenho 2 ângulos e aqui também eu tenho 2 ângulos, mas é a sequência que vai dizer, por exemplo, na letra D, você tem o ângulo, você tem o lado e você tem o ângulo, entre os ângulos. Nestes casos eu tenho lado, depois o ângulo e depois outro ângulo.

Atividade 3

509. C1: Aqui tem que criar um triângulo de referência, aqui um triângulo congruente e aqui criar um triângulo com um lado igual só que não congruente.
510. C3: A referência tem que ser a mesma coisa? Tudo do mesmo tamanho aqui?
511. C1: Sim. Tem que ser os mesmos lados só que em outra posição .
512. Professor: Gente vou dar algumas instruções. Atenção. Nós começamos com a ideia de semelhança, a semelhança de triângulos, correto? O que a gente concluiu sobre os triângulos serem semelhantes? O que a gente precisaria para serem semelhantes?
513. A1: mesma forma.
514. B4: Mesma medida.
515. Professor: Mesma forma, mesmos ângulos e, semelhante. Semelhante não precisa para ter o mesmo tamanho. Tem que ter o que vocês já falaram, mesma forma, ângulos correspondentes. Congruentes por ter a mesma medida. Atenção para ângulos correspondentes. O que tem que ter a mesma medida, que tem que ter mesmos ângulos. Este é congruente a este. Então eu tenho que ter a correspondência entre os triângulos nos seus três ângulos. Esse tem que ser correspondente lá, esse lá e esse lá. E a outra característica que a gente falou foi razão de congruência. Ai, o que falamos sobre essa congruência? O que ela faz com o triângulo semelhante em relação ao triângulo de referência? Se eu disser que tenho esse triângulo aqui e ele é semelhante a este outro, aqui eu tenho medidas 4, 4 e 5 e a razão de semelhança é 2, o que aconteceu com o triângulo semelhante? Dobrou de tamanho, se ele dobrou de tamanho é porque ele ampliou ou reduziu?
516. Alunos: ampliou.
517. Professor: Então a minha razão de semelhança ela faz com que um outro triângulo tenha a mesma fórmula, ângulos correspondentes congruentes e a mesma razão de congruência. Eles vão ter o mesmo tamanho para ser semelhante? Não, eles não vão ter. Então com essa razão quais seriam as medidas do triângulo? 8, 8 e 10. Se eu fosse reduzir para meio, reduzir na metade, ficaria quanto? 2, 2 e 2,5, né? Então vamos lá, mais uma vez, semelhante, os lados não precisam ter a mesma medida e a razão de semelhança vai fazer com que o triângulo que seja de referência ou reduza de tamanho ou amplie. Quando tratamos de triângulos congruentes o que acontece com esses pares de ângulos? Quais são as características deles? O que se repete daí, ele vai ter a mesma forma?
518. C1: Sim.
519. Professor: Vai ter os ângulos correspondentes congruentes?
520. C4: Sim.

521. Professor: Vai ter a mesma razão de congruência? Todas as correspondências? Sim também. Qual vai ser essa razão de congruência? No triângulo semelhante. Qual vai ser a razão de semelhança quando os triângulos forem congruentes? Olha só, se eu coloco 2 amplia, se eu coloco 0,5, reduz. E se eu quisesse que os lados tivessem a mesma medida, qual seria a razão? Teria que ser multiplicado por quanto para ser a mesma medida?

522. A1: Por 1.

523. Professor: Exatamente. Quando você multiplica por 1, vai ter os mesmos resultados. Então se aqui é 4, 5 e 6 e a minha razão de semelhança é 1, 4x1 é 4, 5x1 é 5 e 6x1 é 6. Então no meu triângulo congruente vou ter mesma forma, ângulos correspondentes, congruentes. O que significa congruentes? Mesma medida. E eu vou também ter lados congruentes. Enquanto que no triângulo semelhante os lados podem estar ampliados ou reduzidos. No triângulo congruente eu vou ter além dos ângulos de mesma medida eu vou ter os lados com a mesma medida. Então vamos lá, o fato de a minha razão de congruência ser 1 faz com que os lados seja todos congruentes, portanto o meu par de triângulos também serão congruentes. E então falamos na segunda atividade que existem situações em que não preciso saber se todos os ângulos e todos os lados têm mesma medida, tem algumas situações em que se eu souber algumas informações eu já posso garantir que esses triângulos sejam congruentes. Quais foram essas situações? Primeira, lado, lado e lado. Se eu garantir que tenho os 3 lados correspondentes com a mesma medida eu já posso garantir que esses pares de triângulos são congruentes. A outra situação qual foi? Lado, ângulo, lado. Quando falo isso estou falando de uma sequência. Eu sei que esse lado tem a mesma medida desse lado, que esse ângulo tem a mesma medida desse ângulo e este lado tem a mesma medida deste. Então se eu já tenho está sequência com as mesmas medidas, eu nem preciso saber das outras, eu posso ter certeza que esses triângulos são congruentes. A outra é ângulo, lado, ângulo, mesma situação. Se eu souber que esse ângulo tem a mesma medida desse, que esse lado tem a mesma medida desse e que esse ângulo tem a mesma medida desse, nessa sequência, eu não preciso mais saber os outros lados, nem os outros ângulos. Essa sequência aqui de correspondência já me garante que esse par de triângulos seja congruente. Essa atividade aqui vem para um caso especial de caso de congruência de triângulos. Vamos ler aqui no iniciozinho. Pense sobre a atividade anterior, você percebeu que os casos de congruência apresentados fixam sempre 3 informações sobre os triângulos congruentes? É verdade que são sempre 3 informações?

524. Alunos: Sim.

525. Professor: Sim, né. Sempre é 3 lados ou 2 lados e um ângulo ou é um lado e dois ângulos, correto? Sempre são 3 informações de cada ângulo que se corresponde. E se fossem apenas 2 informações fixadas, seria suficiente para garantir a congruência? Vocês acham que só duas situações garantem? Tem que ter mais? É isso que a gente vai verificar aqui. Diz assim na 2, Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes. Então mais uma vez a gente vai construir pares de triângulos que sejam um congruente ao de referência e o outro não congruente. Então a

primeira informação ai diz assim ângulo, lado oposto a esse ângulo medindo 3 lados. Essa malha se chama malha isométrica, ela é formada por triângulos equiláteros. Lembram o que é? Equi lado. Equivalência lembra o que? Igualdade né? Todos os lados são iguais. O triângulo que está nessa malha são triângulos que têm a mesma medida todos os lados. São triângulos equiláteros. Então ficam aqui encaixadinhos formando uma malha que é onde vocês estão construindo pares de triângulos. A instrução aqui é que você faça um triângulo em que você tenha lado medindo 3L. 3L significa o que? 3 lados. 3 lados desse triângulo. Podem fazer aí. Você vai fazer o lado com 3L e depois fazer o triângulo.

526. B6: Assim, Professor?
527. Professor: Isso é um triângulo, mas aqui a lateral dele não tem 2L, para ter 2L tem que passar por aqui. Ok C1, está excelente.
528. C1: Professor, o não congruente tem que ter só 3 de lado igual.
529. Professor: Aqui a preposição é ângulo e lado oposto a esse ângulo 3L.
530. C3: Está certo o meu?
531. Professor: Eu acho que está faltando uma informação aqui. Está faltando um ângulo aqui, um ângulo de 60. Está certo, está ok. No próximo você tem que tentar fazer um não congruente. Isso mesmo.
532. C1: 5 por 5 aqui. Na segunda
533. Professor: E aqui? 1 dos lados tem que ser 3 e os outros tem que ser diferentes. Tá ótimo. BX falta o congruente. Olha, esse aqui não está legal porque eu preciso que pelo menos 1 lado seja 3L, aqui tudo tem 2L.
534. B6: E esse aqui Professor?
535. Professor: Está certo. Vamos lá gente instrução para a segunda. Atenção, a gente precisa que tenha um ângulo de 90° e um lado oposto a esse lado medindo 5L. Nós temos uma malha triangular, ora eu posso usar as alturas desse triângulo, ora eu posso usar os lados, correto? Para você obter 90 graus você vai ter que pegar o lado e ir em direção a altura e então você obtém um ângulo de 90° e quando você fecha aqui esse triângulo você tem 5L. Deixa eu ver o seu C1. Aqui eu não tenho ângulo de 90°, aqui é 60, aqui é 60 e aqui é 60. O que está mais próximo do que pedimos é esse aqui, esse aqui sim, ele tem um ângulo de 90 graus e 5 de lado. Olha, o da colega de vocês aqui dá bem para ilustrar. Ela precisou de 60 daqui e mais a metade de outro, 30, 30+60 ficou 90 e ai o que a gente quer, que esse lado tenha medida 5L.
536. C1: Eu não entendi isso aqui.
537. Professor: Aqui tem 60 graus e aqui tem a metade, 30. O ângulo é essa abertura que você tem entre os lados
538. Professor: Não tem 90° aqui. É porque assim, um triângulo equilátero como todos os lados são iguais, todos os ângulos também vão ser iguais. Então, como a soma dos ângulos internos do triângulo são 180° e eu tenho 3 ângulos se eu for dividir por 3 vai dar 60, então vou ter 60, 60 e 60. Então nesse caso não pode ser 90. Só pode ser 90 se você fizer assim se você pegar as alturas e mais os lados, aqui, ai vai ter, mas já está certo aqui. Tá ótimo o que você fez. Está rotacionado ou refletido?
539. B6: Refletido.
540. Professor: Ótimo. Perfeito, agora faça o congruente.

541. Professor: Nessa malha isométrica os triângulos que a formam têm todos os lados iguais e para ter todos os lados iguais também precisa ter todos os ângulos iguais, como a soma dos ângulos internos sempre dá 180. Vamos lá, 180 dividido por 3 dá?
542. A1: 60.
543. Professor: Então aqui eu tenho 60, aqui eu tenho 60 e aqui eu tenho 60. Mas a questão está pedindo para você construir com o ângulo medindo 90 graus. Para você obter 90° o que você vai precisar? De um ângulo de 60 e um de 30, 30+60 é 90, então vamos lá, vocês já têm aqui 60, se você pegar metade deste você fica com mais 30, logo, bem aqui vou ter 90°. O seu triângulo vai ter um ângulo de 90, é assim que você vai formar o ângulo.
544. C3: Acho que está errado. Tá errado ainda. Primeiro tem aqui o 5, sempre coloca 3 traços, quando o número é 3 tu coloca 3. Olha 5, depois de colocar tu vai fechar o triângulo, mas não de qualquer jeito, aqui o ângulo é 90.
545. C3: Está certo aqui?
546. Professor: Não, o ângulo reto está aqui. Ok.
547. C1: como assim?
548. Professor: É porque eu não o motivo de você marcar aqui, porque o ângulo de 90° a que ele está se referindo está aqui e aqui. Agora dá para construir o não congruente com essa mesma construção ai?
549. Professor: Conseguiram fazer a terceira e a quarta? Observem que tem questões que não se consegue fazer um triângulo congruente igual daquelas outras que a gente fez.
550. Professor: Alguém conseguiu fazer essa última construção aqui? C1, você conseguiu?
551. C1: Não.
552. B6: Está certo Professor?
553. Professor: certo. Agora verifica se é possível construir um outro triângulo. Eu quero um ângulo de 90 e o lado oposto medindo 10 e ele não pode ser congruente, é possível? Você conversou com seus colegas sobre a resposta. Quando eu fui para a questão 4 não foi possível criar um triângulo congruente, a dificuldade foi. Ok.
554. Professor: Olhem, ele não conseguiu, então ele concluiu que não é possível fazer um triângulo não congruente uma vez que eu fixei que eu vou ter um ângulo reto e um oposto a esse medindo 10, toda vez que eu fizer isso o triângulo vai ser sempre congruente, então não consegue construir o não congruente e agora vamos passar para a terceira. Acompanhem a leitura. Está dizendo, intervenção reflexiva. Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada? Em quais não foi possível?
555. C1: 4.
556. Professor: E qual mais? O 2 gente. Ele não dá pra fazer um congruente. Pra responder por extenso.
557. Professor: Quero que você vá para a sexta. Na quarta diz assim qual a característica comuns nesses casos em que você só conseguiu construir triângulos congruentes aos de referência? Quais foram os que a gente não

conseguiu fazer congruente? 2 e a 4. O que o comando da 2 e da 4 tem em comum, olhem para mim.

558. B6: O ângulo de 90°, Professor. Então quando você amarrou o ângulo de 90° você criou um caso de congruência, ao criar você não consegue fazer um não congruente, é igual esses 3 casos aqui. Por que chamamos esse de caso especial? Porque para esse caso especial eu só preciso de duas informações. Aqui eu preciso de 3.

Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200

Belém-Pa