Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

**JOSÉ HENRIQUE PEREIRA**

# ENSINO DE SENO, COSSENO E TANGENTE EM AMBIENTES DINÂMICOS

BELÉM/PA
2023

**José Henrique Pereira**

# Ensino de seno, cosseno e tangente em ambientes dinâmicos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o ensino e matemática no nível médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

BELÉM/PA

2023

**Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)**
**Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA**

Pereira, José Henrique

Ensino de seno, cosseno e tangente em ambiente dinâmicos /José Henrique Pereira; orientação de Fábio José da Costa Alves. - Belém, 2023

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Trigonometria. 2.Geogebra. 3.Sequência didática.4. Prática de ensino. I. Alves, Fábio José da Costa (orient). II. Título.

CDD 23ed. 516.24

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

**JOSÉ HENRIQUE PEREIRA**

**ENSINO DE SENO, COSSENO E TANGENTE EM AMBIENTES DINÂMICOS**.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

Data de aprovação: 17/05/2023

Banca examinadora

______________________________. Orientador
**Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves**
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Interno
**Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira**
Doutora em Bioinformática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Externo
**Profa. Dra. Cláudianny Amorim Noronha**
Doutora em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

**Belém – PA**

**2023**

**Dedicatória**

**Ir à luta**

``Não pare para lamentar
Fale menos que escuta
Nunca deixe de estudar
Que o futuro é uma disputa
Quem tem sonho para buscar
Se levanta e vai à luta´´.

Guibson Medeiros

## Agradecimento

Agradeço primeiramente a Deus Pai pelo dom da vida. Agradeço a minha família pela profunda gratidão, carinho e pela parceria, em especial aos meus filhos Yasmin, Júnior e esposa Angela, por acreditar que eu sou um super herói.

Ao meu Orientador Prof. Dr.Fábio José da Costa Alves, por aceitar fazer parte do processo de construção deste trabalho. Além do incentivo na conclusão de todo o trabalho.

A todos os professores que estiveram presentes nestes dois anos, proporcionando momentos de profunda reflexão e conhecimento na minha formação como professor.

Aos colegas de Mestrado, pelo apoio, cumplicidade, companheirismo e sugestões. Em especial aos amigos Edivan, Werbet, Aline, Jorge e Jetro.

Enfim a todos que acreditaram em mim, com todas as orações e palavras de força e coragem, para que continuasse nesta caminhada.

# RESUMO

PEREIRA, José Henrique. Ensino de seno, cosseno e tangente em ambientes dinâmicos. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

Este trabalho tem como propósito apresentar os resultados de uma pesquisa, cujo objetivo é investigar a potencialidade de uma sequência didática na aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente, utilizando um software livre denominado de Geogebra. Para isso, a sequência proposta será aplicada, como uma alternativa para o ensino da trigonometria, com alunos do ensino Médio, do Instituto Federal de Educação do Maranhão, em São Luís, no Campus Monte Castelo. Os sujeitos foram 35 alunos (que foram divididos em dois grupos) do segundo ano do ensino médio. Como objeto de análise, foi utilizada uma sequência didática com 12 atividades. A metodologia de investigação adotada foi a teoria da Instrumentação de Rabardel, teoria de Representações Semiótica de Duval como metodologia de ensino e a Análise Microgenética como metodologia de pesquisa. Os dados obtidos a partir de revisões bibliográficas, referenciais teóricos e autores serviu de subsídio para a construção das 12 atividades da sequência didática, para a aprendizagem das definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo, das funções seno, cosseno e tangente. Os resultados da pesquisa a partir dos registros escritos e das vozes gravadas nos mostram que a aprendizagem dos alunos/participantes foi gradativa e que os sujeitos tiveram resultados satisfatórios, pois apontam que as atividades no aplicativo Geogebra foi um recurso didático que tornou as atividades mais dinâmicas, favorecendo a construção da aprendizagem em relação aos conteúdos propostos. Assim, concluímos que a aprendizagem dos sujeitos envolvidos com o nosso objeto de estudo demonstrou pelo menos dois registros de representação, fazendo-os se sentirem motivados a criarem possibilidades de soluções de problemas. Essa dissertação gerou uma Produto Educacional que vai em anexo, e que foi publicado à parte e está disponibilizado no Educapes.



**Palavras-chaves:** Software Geogebra, trigonometria, sequência didática.

## ABSTRACT

PEREIRA, José Henrique. Teaching sine and cosine in dynamic environments. Dissertation (Masters in Education) - University of the state of Pará, Belém, 2020.

This work aims to present the results of a research, whose objective is to investigate the potentiality of a didactic sequence in the learning of trigonometric relations in the right triangle, sine, cosine and tangent functions, using a free software called Geogebra, whose focus is to apply a didactic experiment, as an alternative for teaching trigonometry. The research subjects will be students from a public high school, from the Federal Institute of Education of Maranhão, in São Luís, at Campus Monte Castelo. The subjects were 35 students (who were divided into two groups) of the second year of high school. As an object of analysis, a didactic sequence with 12 activities was used. The research methodology adopted was Rabardel's Instrumentation theory, Duval's theory of Semiotic Representations as a teaching methodology and Microgenetic Analysis as a research methodology. The data obtained from bibliographical reviews, theoretical references and authors served as a subsidy for the construction of the 12 activities of the didactic sequence, for learning the basic concepts, properties and definitions of trigonometric ratios in the right triangle, of the sine, cosine and tangent functions . The research results from the written records and recorded voices show us that the students/participants' learning was gradual and that the subjects had satisfactory results, as they point out that the activities in the Geogebra application are a didactic resource that makes activities more dynamic , favoring the construction of learning in relation to the proposed trigonometric contents. Thus, we conclude that the learning of the subjects involved with our object of study demonstrated at least two representation records, that is, in two different languages, making them feel motivated to create possibilities for problem solutions.This dissertation generated an Educational Product that is attached, and that was published separately and is available on Educapes.


Keywords: Geogebra software, trigonometry, didactic sequence.

**Lista de Ilustrações**

**Lista de tabela**

**LISTA DE QUADROS**

**SUMÁRIO**

## 1. INTRODUÇÃO

O interesse por esta pesquisa surgiu a partir de reflexões e angústias sobre as queixas dos meus alunos do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas na resolução de problemas que envolvem funções seno, cosseno e tangente, e além de precisarem assimilar os temas que são próprios deste assunto, ainda precisam lembrar outros temas anteriormente estudados, tais como circunferência, arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico, que exercerá como pré-requisitos para introduzir este conteúdo.

Conforme Sousa (2018, p.9), ´´O ensino de Matemática é marcado pelas grandes dificuldades dos alunos em estudar muitos conteúdos, conceitos, fórmulas e algoritmos``. O desempenho dos alunos no desenvolvimento direto de atividades, em que eles necessitam de utilizar e aperfeiçoar conceitos e procedimentos matemáticos para serem aplicados nos exercícios de funções seno, cosseno e tangente, requer cada vez mais habilidades e desenvoltura na resolução de problemas. No entanto, os alunos possuem limitações no desenvolvimento dos conteúdos, isto é, construções dos gráficos e análise dos parâmetros das funções trigonométricas em foco, problema que devem ser enfrentados.

E sabendo que o crescimento tecnológico acelerado das últimas décadas, promove mudanças significativas na sociedade e tem influência nas atitudes e relações interpessoais, a utilização da informática no ensino da trigonometria, são muito enriquecedoras, e podem ser estendidas às outras áreas da Matemática, como o estudo das matrizes, determinantes, geometria, funções polinomiais, funções exponenciais, funções logarítmicas, entre outros assuntos (MAGALHÃES, 2013).

À medida que os alunos interagem com o computador, dependendo da sua manipulação, eles visualizam imediatamente o que está acontecendo, assim a utilização da informática no ensino da Matemática, o aluno se deparará com situações em que ele necessite de utilizar, os conceitos, propriedades e definições matemáticos para ser aplicados nas funções seno e cosseno. Portanto, o software Geogebra foi escolhido para este trabalho pelos seguintes motivos: ele é um software de geometria dinâmica de fácil manipulação, também é um software livre e de fácil acesso e instalado no meu computador pessoal. O software geogebra possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

A nossa experiência como docente de matemática nos leva a afirmar que a velocidade do surgimento e renovação de saberes em todas as atividades humanas, tornam rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa no início de sua vida profissional.

Portanto, aprender continuamente e de forma significativa é uma necessidade de todos, por isso, necessitamos estar atualizado com novos contextos de ensino, para melhorar nossas práticas de ensino e para melhorar nossas práticas e renovar nossos saberes, neste processo de mudanças constantes.

Durante o curso de graduação em matemática licenciatura na Universidade Federal do Maranhão (UFMA) em 1980, tive o primeiro contado com tecnologia digital, estudando programações computacionais em 2005 fiz especialização em estatística na Universidade Estadual do Maranhão, em 2006 a 2008 fui aluno especial no mestrado profissional em matemática na UNICAMP.

Na universidade Unicamp em São Paulo, num mestrado profissional como aluno especial, no período de 2006 a 2008, conheci um software educacional matemático denominado de Winplot, percebi que este software poderia constituir-se em uma ferramenta didática para a minimização dos obstáculos dos alunos em relação à trigonometria, assim, comecei a utilizar este software em minhas aulas, de forma experimental, sem organizar ou utilizar uma sequência didática e/ou seguir uma metodologia de ensino e pesquisa.

Em 2020 já no mestrado profissional na universidade do estado do Pará, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, tive acesso ao manuseio do software Geogebra pela primeira vez pelos professores doutores, Fábio José da Costa Alves e Eliza Souza da Silva, desta maneira, percebi que esse software poderia se constituir em uma ferramenta didática poderosa no ensino das funções seno e cosseno.

Minhas experiências profissionais. Em 1984 comecei a minha experiência profissional como contrato para ensinar matemática e Física no ensino médio até

1991, em 1992 passei em meu primeiro concurso público, para professor do estado do Maranhão, como professor de matemática do ensino médio de São Luís, em 1995 tornei passar no concurso público para professor do estado do Maranhão em São Luís, como professor de matemática do ensino médio.

Em 1993 passei no concurso no CEFET, sendo classificado porém não nomeado, devido ter ficado em segundo lugar, em 2003 tornei passar no CEFET em primeiro lugar, como professor do ensino Médio, hoje (IFMA), sendo nomeado, em 2005 passei no concurso público para professor de matemática do município de São Luís.

Nas escolas particulares trabalhei, numa escola próximo da minha casa de 1881 a 1884, e no FARINA DO BRASIL de 1992 a 1995 e em alguns cursinhos que não lembro a data porque não tinha carteira profissional assinada.

Hoje trabalho em apenas no IFMA – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, antigo CEFET, e uma matrícula do estado (SEDUC), devido aos acúmulos.

Tendo em vista o indiscutível crescimento da informática, a pesquisa foi desenvolvida neste ambiente computacional, embora, nem todos estão preparados para tal inovação tecnológica.

Segundo defendem ISOTANI e BRANDÃO, a transição do método tradicional de ensino para o ensino auxiliado por computador pode afetar tanto o professor quanto o aluno.

> Assim como o professor já habituado ao ensino tradicional precisa adaptar-se aos recursos computacionais, o mesmo pode ocorrer com o aluno que precisará adaptar-se aos sistemas de ensino por computador e abandonar o comportamento passivo. (ISOTANI, BRANDÃO, 2006 )

Neste contexto, após o período de adaptação é preciso está constantemente buscando desafios e , sempre que possível, através de experimentações, atinja a maturidade para compreender o conteúdo apresentado, portanto, o software Geogebra, após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais.

O software Geogebra foi escolhido para este trabalho pelos seguintes motivos, ele é um software de geometria dinâmica de fácil manipulação e acesso, que qualquer pessoa pode baixar e instalar em seu computador pessoal. O software Geogebra possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

A utilização de ferramentas da informática, como o software Geogebra, são recursos metodológicos que visam chamar a atenção do aluno de maneira informal estimulando o interesse referente à aprendizagem da Matemática.

A utilização do Geogebra, desenvolvem o raciocínio lógico e contribuem para a formação de atitudes, tornando os indivíduos mais críticos e autônomos ´´A grande vantagem didática deste programa é que ele apresenta, ao mesmo tempo e no mesmo ambiente visual, representações geométricas e algébricas de um mesmo objeto que interagem entre si" (MAGARINUS, 2013, p. 43).

Nesse contexto, no Ensino Médio para a utilização de tecnologias educacionais, especialmente com foco no Geogebra, a maioria dos professores conhecem as tecnologias educacionais para o ensino da matemática, com foco na trigonometria, incluindo o Geogebra. Entretanto, apenas uma pequena parcela utiliza ou pretende utilizar o Geogebra em sala de aula, dentre os que utilizam, têm dificuldades no manuseio do software.

Os professores, em sua totalidade, reconhecem a importância da implementação do aplicativo Geogebra no ensino, e que o Geogebra é uma importante metodologia que auxilia o ensino de trigonometria dos alunos não só no ensino médio, mais em todos níveis de ensino, porém, são poucos os professores que utilizam o software Geogebra em sua prática pedagógica, este tem sido um dos fatores que dificultam a consolidação do seu uso nas escolas.

Na Educação Básica, a utilização de recursos tecnológicos ainda é pequena, talvez pela velocidade do avanço tecnológico, capaz de superar o processo de assimilação e retenção de determinado conhecimento, colocando-nos a necessidade de um acompanhamento rápido e dinâmico das novidades que surgem a cada momento e que exigem atualização constante, o que nem sempre é possível, por razões diversas.

No ambiente escolar, é necessário repensar a educação básica na forma de propor os currículos escolares, reconhecendo as potencialidades do uso das tecnologias educacionais no ensino da matemática, pois o uso dessas metodologias nos ambientes escolares, permitem aos alunos realizar grandes descobertas que impulsionam a busca pelo conhecimento matemático de maneira significativa.

Como vimos anteriormente, o software Geogebra é um recurso que facilita o ensino e aprendizagem de matemática, assim sendo, a pergunta que nos propomos a responder frente às dificuldades encontradas durante as aulas de matemática, isto é, a pergunta norteadora que delineia essa pesquisa é a seguinte: Uma sequência didática usando o Geogebra potencializa a aprendizagem das relações trigonométricas do triângulo retângulo, as funções seno, cosseno e tangente?

A questão de pesquisa originou o seguinte objetivo geral é: Quais são as potencialidades de uma sequência didática na aprendizagem das relações trigonométricas, funções seno, cosseno e tangente com o uso do Geogebra.

Com base nesse objetivo geral, destacamos os seguintes objetivos específicos:

- Propor uma sequência didática com base na teoria da instrumentação de Rabardel, da representação semiótica de Duval e análises microgenética, para a aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente;
- Validar a sequência didática com ajuda de professores de matemática
- Aplicar experimentos didáticos em laboratório de informática com as sequências didáticas, gerando dados para análise

Para que se cumpram os objetivos propostos, a pesquisa foi desenvolvida textualmente da seguinte forma:

Capítulo 1 – Este capítulo introdutório apresentou as fundamentação teórica, minha trajetória acadêmica e profissional e as motivações para o desenvolvimento do tema, levantamento bibliográfico e identificação das dificuldades, do problema e dos objetivos da pesquisa.

Capítulo 2 – Neste capítulo realizamos uma pesquisa bibliográfico, utilizando os buscadores google, google acadêmico, para conseguir informações das dissertações e uma tese, sobre o ensino e aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo, e as funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico, a partir da manipulação geométrica, no software Geogebra, no período de 2011 a 2022.

Capítulo 3 – Neste capítulo foi retratado o referencial teórico, que serão adotados um pouco da teoria da instrumentação de Pierre Rabardel, teoria de representações semióticas de Raymond Duval e a análise microgenética.

Capítulo 4 - Este capítulo destina-se a metodologia, em que esclarecemos como se deu a construção desse trabalho, uma pesquisa com abordagem qualitativa, sobre o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo e as funções cosseno, seno e tangent**e.**

Capítulo 5 - Neste capítulo, foi aplicada, uma sequência didática, com atividades que abordam os conteúdos de Trigonometria, destacados no texto de forma dinâmica, utilizando o software Geogebra, com base na teoria da instrumentação de Rabardel, teoria de representações semióticas de Duval e a metodologia da análise microgenética.

Capítulo 6 - Neste capítulo, foram realizados experimentos didáticos, com os alunos do IFMA, no laboratório de informática, utilizando o aplicativo entregue todo estruturado, para ser manuseado de forma dinâmica.

Capítulo 7 - Considerações finais, esse trabalho foi proposto com o objetivo de facilitar a compreensão de conceitos relacionados às relações trigonométricas no triângulo retângulo, as funções cosseno, seno e tangente, utilizando uma sequência de atividades desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra, aplicando a teoria da instrumentalização de Rabardel, teoria de representações semióticas e a metodologia da análise microgenética.

Capítulo 8- Referências bibliográficas, foram abordados os trabalhos de dissertações escolhidos para fazer parte da nossa pesquisa.

Capítulo 9 - Neste capítulo foram apresentados o produto educacional e uma fundamentação matemática.

No capítulo a seguir, faremos o levantamento bibliográfico que foi elaborado a partir de material já publicado, constituído principalmente de dissertações, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa.

## 2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

No levantamento bibliográfico utilizamos os buscadores, Google, Google Acadêmico, esse estado da arte, buscou levantar informações sobre o ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno no Geogebra a partir da manipulação geométrica no software Geogebra, no período de 2011 a 2022, e usamos as seguintes palavras chaves na sua busca:

1)´´Dissertações`` ensino da função seno cosseno no Geogebra ´´pdf``

2)´´Dissertações`` Funções trigonométricas no Geogebra ´´pdf``

3) ´´Dissertações`` Funções seno cosseno no Geogebra, Durval ´´pdf``

Considerando como critérios as dissertações publicadas e tese durante os últimos 10 anos que compreende o período de 2011 a 2021, vamos selecionar as dissertações e teses que estão relacionados ao ensino médio e aprendizagem de seno, cosseno no Geogebra, utilizando o software Geogebra dinâmica para esse fim. A busca foi feita no período de 03/02/2022 a 17/02/2022, e foram encontradas nove dissertações e uma tese, publicadas em território nacional conforme Quadro 1.

Constam no Quadro 1 abaixo, os dados referentes às 9(nove) dissertações e (1)uma tese selecionadas e citadas no trabalho, ano de 2011 a 2021, em ordem cronológica, com o título, o ano de defesa e a instituição, trabalho estes que visam o uso do Geogebra no ensino de Funções Trigonométrica com o auxílio do *software* GeoGebra.

Quadro - 1 - Relação das dissertações analisadas

| **RELAÇÃO DAS DISSERTAÇÕES ANALISADAS** | | | |
|---|---|---|---|
| **Publicação** | **Autor** | **Título da dissertação** | **Instituição** |
| 2014 | Carlos André Carneiro de Oliveira | Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. | Universidade Federal de Campina Grande |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2014 | William José Bruginski | Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software Geogebra para o estudo de funções trigonométricas | Universidade Tecnológica Federal do Paraná |
| 2015 | Denise Mansoldo Salazar | Geogebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio. | Universidade Federal de Juiz de Fora |
| 2016 | Rosana dos Passos Corrêa | O Ensino de funções trigonométricas por atividades | Universidade do Estado do Pará |
| 2018 | Alcinéia Lima Santos | Utilização do Geogebra em situações didáticas para a aprendizagem de funções trigonométrica | Universidade do Estado da Bahia |
| 2018 | Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de Sousa | Software Geogebra no ensino da trigonometria: Proposta metodológica e | Universidade Federal do Maranhão |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT | |
| 2018 | Rebecca Lourenço | Funções trigonométricas: Produção de uma sequência didática Potencialmente significativa à luz da abordagem Histórico-Epistemológica | Universidade Estadual do Norte do Paraná - Campus Cornélio |
| 2019 | Camila Molina Buffo | Análise da utilização do software Geogebra nas dissertações do PROFMAT para elaboração de uma proposta de atividade para o ensino médio com o auxílio do geogebra | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo |
| 2020 | Eliane de Santana de Sousa Oliveira | Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo | Universidade Federal da Bahia |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | didático alternativo integrado ao Geogebra | |
| 2020 | Maxiel de Mesquita Machado | Geogebra: Uma proposta para o Ensino de funções trigonométricas | Universidade Federal de Goiás |

Fonte: Do próprio autor

A pesquisa de Oliveira (2014), teve como objetivo apresentar um estudo sobre as funções trigonométricas no Ensino Médio, sendo a pesquisa desenvolvida com base no embasamento teórico da aprendizagem significativa de Ausubel, abordando as suas principais características, destacando a diferença entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, a pesquisa desenvolveu uma metodologia que apresenta uma sequência didática de forma organizada e sequenciada, em que suas atividades foram elaboradas tendo como referência, a teoria da aprendizagem significativa e adaptadas ao uso do software Geogebra. Esse levantamento foi uma contribuição para o desenvolvimento da nossa sequência didática, com atividades que contemplam o estudo das razões trigonométricas e funções trigonométricas, de forma a favorecer a aprendizagem.

Em sua pesquisa, Bruginski (2014) tem como objetivo criar uma ferramenta que auxilie no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, sendo assim, este trabalho apresenta o desenvolvimento de planilhas dinâmicas, foram criadas 33 planilhas dinâmicas, todas hospedadas no link www.geogebratube.org/student/b91463, mostrando as relações necessárias para o estudo da trigonometria, Sendo a pesquisa desenvolvida com base a metodologia bibliográfica, uma construção de planilhas, para ser utilizadas na sequência didática no desenvolvimento do ensino da trigonometria, usando o software dinâmico geogebra em sala de aula. Desta forma, este levantamento foi uma contribuição para o desenvolvimento do nosso trabalho, na busca por novos métodos, softwares e recursos metodológicos para entendimento de alguns conteúdos de trigonometria.

Em sua pesquisa SALAZAR (2015), tem como objetivo, investigar as potencialidades do software Geogebra como instrumento tecnológico favorável à aprendizagem das funções trigonométricas no Ensino Médio, a partir das representações gráficas das funções trigonométricas. Esta investigação ocorreu em uma escola privada da cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais, com alunos da 3ª Série do Ensino Médio, foram convidados aproximadamente 200 alunos, mas apenas 14 se interessaram em participar, a pesquisa foi desenvolvida com base nos pressupostos teóricos da Engenharia Didática como metodologia, na qual, foi usada uma sequência didática de atividades. No levantamento bibliográfico, foi observado que o Geogebra apresenta muitas outras opções e recursos, por exemplo, os smartphones, os controles deslizantes e animações que podem tornar dinâmica a visualização das variações propostas nesta pesquisa.

A pesquisa de Corrêa (2016), tem como objetivo avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática no desempenho dos alunos em resolução de questões envolvendo funções trigonométricas. Sendo feito um experimento na escola pública do município de Abaetetuba do 2º ano do Ensino Médio, onde foram feitas uma pesquisa com 17 alunos, a pesquisa foi desenvolvida com base na experimentação por atividade como metodologia de ensino e a engenharia didática como metodologia de pesquisa. Com resultado dessa pesquisa foi observado que a sequência didática aplicada proporciona resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos, pois após as atividades aplicadas, os alunos obtiveram maior desempenho na resolução de questões sobre conteúdos de funções trigonométricas.

A pesquisa de Santos (2018), o objetivo foi desenvolver uma sequência didática digital, baseada no uso do *software* Geogebra, que potencialize a aprendizagem de funções trigonométricas. Sendo feito um experimento trabalhando com alunos do segundo ano do Ensino Médio integral de uma escola pública do estado da Bahia, na cidade de Salvador. Sendo a pesquisa desenvolvida com base na Engenharia Didática de Artigue (1996), que, segundo Almouloud (2010), na realização e na análise de sequências de ensino. Foi utilizada a Teoria de Registro de Representações Semióticas, formulada pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1999). Com resultado dessa pesquisa foi observado que o

Geogebra é uma ferramenta educacional que possibilita o aprendizado dos alunos, aumentando o interesse, a motivação e a compreensão dos conceitos inerentes a trigonometria.

A pesquisa de Sousa (2018), tem como objetivo realizar uma revisão das literaturas a partir das dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sendo feito uma experiência para alunos de 3º ano do Ensino Médio em um colégio estadual no norte do Paraná, a pesquisa foi desenvolvida com base na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, sendo assim a abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica norteou a elaboração desta Sequência Didática Potencialmente Significativa. Com resultado dessa pesquisa foi observado que, os alunos puderam compreender melhor, e também que a abordagem metodológica de ensino Histórico Epistemológica, despertou o interesse, a atenção, a participação e os questionamentos durante as aulas de Matemática.

Em sua pesquisa Lourenço (2018), teve como objetivo, investigar a elaboração de uma Sequência Didática Potencialmente Significativa, sendo feito um experimento para alunos de 3º ano do Ensino Médio em um colégio estadual no norte do Paraná, sendo a pesquisa desenvolvida com base na abordagem metodológica de ensino Histórico-Epistemológica associada a Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel com a elaboração de uma sequência didática potencialmente significativa. Com resultados dessa pesquisa foi observado que os resultados revelam uma análise favorável do trabalho desenvolvido, promoveu a aprendizagem significativa dos alunos do Ensino Médio a respeito dos conteúdos das Funções Trigonométricas trabalhados na sequência didática.

Em sua pesquisa Buffo (2019), o objetivo foi selecionar as dissertações que trabalharam com o Geogebra e classificá-las dentro das diferentes áreas da matemática. O embasamento teórico da presente dissertação inicia-se com a história da educação matemática, pois como defende Ubiratan D'Ambrósio. Sendo a pesquisa desenvolvida com base na metodologia bibliográfica, que consiste na observação e discussão crítica de estudos que já foram publicados. Como resultado dessa pesquisa foi observado que o presente trabalho, discute o real ensino aprendizagem da geometria nas escolas públicas e privadas com a utilização do software Geogebra, e ao mesmo tempo, discute as dificuldades e aperfeiçoamentos que o docente necessita para utilização desse novo método de ensino.

A pesquisa de Oliveira (2020), teve como objetivo analisar, como um modelo didático alternativo com o uso do Geogebra favorece o estudo das funções seno e cosseno, sendo feito um experimento com alunos do 1º semestre do curso de licenciatura em matemática da disciplina de Pré-cálculo. Sendo a pesquisa desenvolvida com base na Teoria Antropológica do Didático - TAD, sistematizada por Chevallard (1999), e tendo como metodologia o Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. Sendo utilizado o Modelo Epistemológico/Praxeológicas de Referência – MPR. Como resultados dessa pesquisa foi observado que a integração do geogebra, para modelação de fenômenos periódicos, permitiu que os licenciandos em matemática construíssem sistemas didáticos para o estudo das funções seno e cosseno.

Em sua pesquisa Machado (2020), teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino que possibilite explorar e compreender melhor aspectos importantes do ensino de Funções Trigonométricas, utilizando o software educacional Geogebra, sendo feito um experimento para a 2ª série do Ensino Médio, para apresentar um modo de utilizar o software educacional geogebra no ensino de Função Trigonométrica, sendo a pesquisa desenvolvida com base na abordagem qualitativa do tipo exploratória e bibliográfica em que foram elaboradas atividades em uma sequência didática com tarefas crescente de exigência relacionadas às Funções Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente. Com resultados dessa pesquisa foi observado que a proposta, espera-se agregar possibilidades mais formativas para o ensino da Matemática e, em particular, para o ensino e aprendizagem com o auxílio de tecnologias digitais, especialmente o Geogebra.

## 2.1 ANÁLISE DAS DISSERTAÇÕES INVESTIGADAS

Realizamos uma análise substancial das dissertações selecionados para caracterização e extração das informações abordadas em cada dissertações, sintetizando os resultados em dez (10) registros de 2011 a 2021, dentre os quais quatro (4), apresentaram contribuições através de sequências didática, três (3) utilizam a planilha como resgate do interesse pela trigonometria, duas (2) apresentam uma aprendizagem com o auxílio de tecnologias digitais, especialmente o smartfone, e uma (1) destaca as potencialidades dessa ferramenta tecnológica educacional dispõe para contribuir com o ensino e com a aprendizagem dos conceitos de Funções Trigonométricas.

Todos os trabalhos, apresentaram estudos com uma proposta "prática" que oferecesse uma abordagem interessante no ensino dos conteúdos, em relação ao qual os estudantes costumam manifestar certa resistência, sobre alguns conteúdos de matemática, em especial a trigonometria.

Nesta investigação procurou-se analisar se o trabalho com o uso do GeoGebra facilita a aprendizagem de alguns conteúdo da trigonometria, principalmente as razões trigonométricas no triângulo retângulo, funções trigonométricas cosseno, seno e tangente, em que o aluno, assumisse um papel ativo no processo de construção do seu conhecimento.

Diante do resultado positivo do levantamento bibliográfico, pode-se dizer que, aprende-se de outras maneiras quando se interage com os recursos tecnológicos, a inserção do software Geogebra, pode ser um importante recurso didático para a sala de aula. Portanto, a pesquisa foi significativa, tendo como perspectiva situar nosso estudo no contexto da literatura existente.

No capítulo a seguir, serão detalhados as teorias de pesquisa, teoria da instrumentação de Rabardel, onde damos atenção especial, ao processo de aprendizagem do modelo das Situações de atividades Instrumentais (SAI). A teoria de Representações Semióticas de Duval, referentes aos registros de representação semiótica, isto é, discursivos e não-discursivas, sobre objetos matemáticos, conversão e tratamento para nos conduzir a uma conclusão, e análise microgenética, escolhida para nortear o trabalho do pesquisador no ensino dos conteúdos da trigonometria, as razões trigonométrica no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente no software Geogebra, o valor da análise microgenética, considera que a característica mais importante desta análise está na forma de conhecer que está orientada para as minúcias, detalhes e ocorrências residuais, como indícios. Uma análise dessa natureza, serve como embasamento teórico e garante qualidade científica ao trabalho a partir de um mediador mais experiente.

## 3. REFERENCIAL TEÓRICO

Para o desenvolvimento desta pesquisa, explicitamos uma proposta de conhecimento, já existente acerca da trigonometria utilizando o software Geogebra, visando com isso oferecer contribuição e subsídio para a aprendizagem da trigonometria, usando as, Teoria da instrumentação de Rabardel, representações semiótica de Duval e análise microgenética.

### 3.1 TEORIA DA INSTRUMENTAÇÃO DE RABARDEL

Vamos descrever um pouco sobre a teoria da instrumentação de Rabardel, a teoria justifica, o processo de aprendizagem do modelo das Situações de atividades Instrumentais (SAI), que fornece elementos teóricos apropriados para pesquisas referentes à aprendizagem com ferramentas tecnológicas. Rabardel estuda as ações dos sujeitos mediadas por instrumentos, inicialmente, pesquisas da ergonomia cognitiva.

Entretanto, ´´(...) A teoria da instrumentação tem sido de grande aporte para investigar o uso da tecnologia em situação escolar (ARTIGUE, 1998, 2001; ARTIGUE; LAGRANGE, 1999; BITTAR, 2011; NICAUD et al., 2006)``.

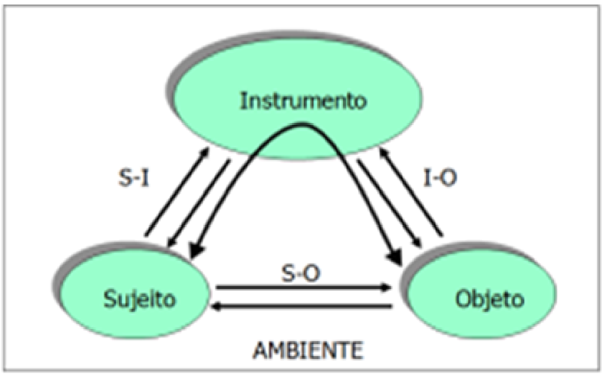
Neste sentido, Rabardel (1995) faz uma reanálise das funções dos instrumentos técnicos, chamados de artefatos/ferramentas, utilizados pelo homem e pela sociedade. Para ele, uma ferramenta não é automaticamente um instrumento eficaz e prático, é um dispositivo que pode ser material ou simbólico. E para tornar-se um instrumento é necessário à sua construção pelo sujeito ao longo de um processo de transformação, que ele chama de Gênese Instrumental, aliado às potencialidades e limitações da ferramenta/artefato e às atividades do sujeito (seus conhecimentos, experiências e habilidades.

Para Rabardel (1995), as mediações que ocorrem em Situações de Atividades Instrumentais (SAI) podem ser representadas pelo modelo a seguir:

Na figura 1, temos como objetivo principal destacar a multiplicidade de interações que mediam as atividades envolvendo determinado instrumento (I), sujeito (S) e um objeto (O)

Neste experimento, o ponto que queremos abordar é o da mudança de postura dos participantes da pesquisa, ou seja, os alunos do ensino médio, relativamente ao uso da tecnologia de modo a provocar a aprendizagem.

Figura 1 - Modelo das Situações de Atividades Instrumentais

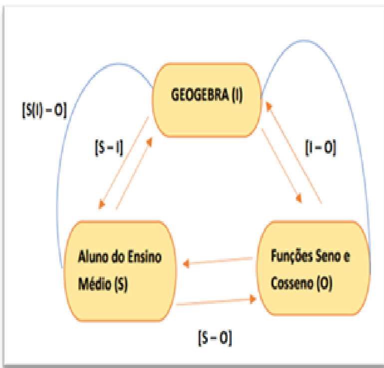



Fonte: Rabardel (1995, pág.53)

Fizemos um fluxograma figura 1, para explicar o modelo da situação de atividade instrumental de Rabardel, se dividiu em três polos que foram representados por: O Instrumento (I) que é o Geogebra, O Sujeito (S) que é o participante, isto é, aluno, o Objeto (O) que são os conteúdos de trigonometria proposto.

Com o objetivo principal de mostrar a multiplicidade de interações entre estes pólos, através de setas e linhas para representar os elementos da nossa pesquisa, com a finalidade de evidenciar as possíveis interações que ocorrem no laboratório de informática entre alunos do ensino médio, Geogebra e os conteúdos.

Figura 2 - adaptação do Modelo das (SAI)




Fonte: Do próprio autor

As relações entre esses pólos, são representados por setas na figura - 2 acima, consideradas em dois ou três sentidos: Aluno e Geogebra [S - I]; Geogebra e conteúdos [I - O]; aluno e Geogebra [S - O]. Neste sentido faremos os seguintes relatórios sobre a teoria da instrumentação de Rabardel, (SAI). Isto é, sujeito com o instrumento (S - I), sujeito e objeto (S - O), e sujeito com instrumento e objeto (S - I - O), representado pela linha azul.

### 3.1.1 Sujeito com o instrumento (S - I)

É importante observar que as duas dimensões do processo de Gênese Instrumental referem-se ao sujeito e o instrumento (S - I), isto é, essa abordagem teórica é utilizada para investigar como se dá a elaboração do instrumento pelo sujeito, ou seja, como os alunos participantes do experimento, aprendem na presença do software Geogebra.

O que o aluno mais gostou?

Foi fazer a manipulação do aplicativo, já estruturado e apresentado ao aluno para construir seu conhecimento,

O que o aluno não gostou?

Os alunos tiveram dificuldade em manusear a barra de ferramentas, formato de tela, acessibilidade do aplicativo, por ser algo novo.

O que o aluno gostou pouco foi de saber que o aplicativo é de matemática.

### 3.1.2 Sujeito e objeto (S – O)

É importante observar que as duas dimensões do processo de Gênese Instrumental referem-se ao sujeito e ao objeto (S - O), permitindo a estruturação de sua ação e a participação da formação dos conceitos matemáticos, por sua vez, os alunos têm muita dificuldade em entender os conteúdos trigonométricos por acharem difícil.

O que o aluno mais gostou?

O aluno gostou de estar em um laboratório de informática, manuseando os aplicativos já feitos, que foram trabalhados saindo do tradicional.

O que o aluno não gostou?

O aluno por passar por uma pandemia, está com muita deficiência nos conteúdos de matemática, então agravou a intolerância sobre a trigonometria.

### 3.1.3 Sujeito com instrumento e objeto (S – I – O)

É importante observar que as três dimensões do processo de Gênese Instrumental referem-se ao sujeito, instrumento e objeto (S - I - O), para a reorganização e modificação dos esquemas de utilização do sujeito, permitindo a estruturação de sua ação e a participação da formação dos conceitos matemáticos.

O que o aluno mais gostou?

Foi feita a manipulação do aplicativo, já feito e apresentado ao aluno para construir seu conhecimento, ou seja, o aluno não teve dificuldade de entender em quais quadrantes as funções assume valores positivos ou negativos, seus domínios, suas imagens, as periodicidades e a construção dos gráficos trigonométricas.

O que o aluno não gostou?

Alguns alunos/participantes, não gostaram dos conteúdos de matemática, que eles deveriam saber para dar continuidade na construção do passo a passo do aplicativo, como por exemplo, circunferência, arcos congruentes, assuntos que geralmente são dados no terceiro ano do ensino médio, que será preciso para a sua construção e aprendizagem.

É bom ressaltar que, Rabardel só vai observar as interações do aluno com o objeto, verificar a instrumentalização de como o aluno se apropria do conhecimento na aplicabilidade do aplicativo Geogebra, ao longo do experimento. se houve mudança de postura dos participantes da pesquisa de modo a provocar a aprendizagem.

Em nossa pesquisa na Figura 2, o objeto O, é um objeto matemático, denominado de “funções Trigonométrica, seno e cosseno”, o sujeito S é o aluno do primeiro ou segundo ano do ensino médio e o instrumento I é o software Geogebra. Essa modelização, por instrumentação e instrumentalização, vai descrever a forma pelo qual o instrumento influi na constituição da relação [S-Ó] do sujeito (alunos do ensino médio) com esse objeto (funções trigonométricas seno e cosseno). Essa relação denotada [S(I)-O] aparecerá em todas as situações nas quais o Geogebra estiver disponível.

Dessa forma, para a análise de atividades realizáveis com auxílio de instrumentos (Rabardel, 1995) propôs o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais) (Figura 1 e Figura 2) e apresenta as relações possíveis entre o Sujeito e o Objeto sobre o qual ele age:

> O objetivo principal do Modelo é colocar em evidência a multiplicidade de interações que intervêm nas atividades realizadas com instrumentos, designadas atividades instrumentais. Nesse modelo, além da interação usual sujeito-objeto [S - O], outras são consideradas, tais como as interações entre o Sujeito e o Instrumento [S - I], o Instrumento e o Objeto [I - O] e a interação do Sujeito com Objeto mediada pelo instrumento [S(I) - O]. Esse modelo permite, portanto, estudar as relações entre o aluno do ensino

> médio e as funções Trigonometria seno e cosseno por meio de um instrumento, tal como software Geogebra (Figura 2). Ele é inscrito em um ambiente constituído pelo conjunto das condições (potencialidades, limitações, etc.) que intervém nas atividades instrumentais. (RABARDEL, 1995)

Rabardel distingue duas dimensões no processo de gênese instrumental:

1. Instrumentação, orientada para a constituição de esquemas de utilização;
2. Instrumentalização, que se refere à emergência das propriedades funcionais e estruturais do artefato

Na instrumentação, o sujeito adapta o seu problema aos recursos do artefato.

E na instrumentalização o sujeito modifica as propriedades do artefato, para resolver o seu problema.

Salientamos aqui a importância da distinção destas duas dimensões, haja vista a necessidade dos estudantes de mediar a transição de um ambiente para o outro, ou seja, estabelecer relações entre os múltiplos registros de representação do objeto em estudo. Finalmente, resta definir o polo instrumento, mas, para isso, é preciso, antes, definir artefato.

Em antropologia, artefato é todo objeto que sofreu algum tipo de ação humana; pode ser um objeto material ou simbólico. É importante observar que o processo de transformação de um artefato em instrumento é dinâmico. À medida que o sujeito interage com o instrumento, novos esquemas são agregados a ele, o que transforma o instrumento em um novo instrumento para o sujeito.

É nesse sentido que Rabardel utiliza a palavra artefato para definir um instrumento como sendo o artefato acrescido de esquemas de utilização que constituem "o conjunto estruturado dos caracteres generalizáveis das atividades de utilização dos instrumentos" (RABARDEL, 1999, p. 210).

Esquema é entendido no mesmo sentido empregado na teoria dos campos conceituais por Vergnaud (1990), logo, esquema é conhecimento e é construído, pelo sujeito, na ação. Portanto, instrumento é conhecimento.

Se considerarmos, por exemplo, o artefato como sendo um notebook ou smartphone: para uma criança pequena ele não tem valia e é, inclusive, perigoso financeiramente, mais tarde, quando ela aprende a manusear o notebook ou smartphone, estes aparelhos transformam-se em um instrumento para ela, a criança desenvolve esquema de utilização do notebook ou smartphone. Ela agregou conhecimento ao artefato e uma vez que o artefato foi transformado em instrumento, pelo sujeito, ele não volta mais à condição de artefato.

É importante observar que o processo de transformação de um artefato em instrumento é dinâmico. À medida que o sujeito interage com o instrumento, novos esquemas são agregados a ele, o que transforma o instrumento em um novo instrumento para o sujeito.

Pensando em um exemplo de tecnologia digital, quando começamos a trabalhar com um determinado software, o *Geogebra* por exemplo, aprendemos alguns comandos básicos e realizamos atividades possíveis de serem feitas com estes comandos, isto é, para construir uma circunferência, procura-se o comando e constrói a sua circunferência. Conforme continuamos a trabalhar com o software novos esquemas são desenvolvidos, o que gera novas possibilidades e o transforma em um novo instrumento, por exemplo, quando colocamos um ponto na circunferência e aplicamos um comando para movimentar o ponto, que pode ser um controle deslizante, logo se transforma em um novo instrumento.

Assim, um mesmo artefato se transforma em diferentes instrumentos para um mesmo sujeito:

> Analogamente, cada sujeito ao interagir com um artefato desenvolve esquemas que estão relacionados às suas experiências e conhecimentos, logo, o “seu” instrumento vai diferir do instrumento do outro. Planilhas eletrônicas, por exemplo, que não foram desenvolvidas com fins didáticos, têm sido usadas no ensino de Matemática para discutir temas como gráficos e tabelas. E cada professor que usa uma planilha o faz de um modo diferente, logo, seu instrumento é diferente do instrumento do outro e, mais ainda, do instrumento daquele que usa a planilha para o fim a que ela foi originalmente criada. (Rabardel 2015).

Pode-se assim dizer que este processo é uma espiral, pois a cada ação do sujeito novos esquemas são associados ao artefato, já transformado em instrumento que se transforma em novo instrumento.

Para que um professor/pesquisador integre uma tecnologia digital, à sua ação pedagógica ele precisa conhecer o funcionamento deste material, esta é uma condição necessária, porém não suficiente.

É muito comum professores e futuros professores conhecerem um software, realizarem atividades com ele, mas terem dificuldade com a elaboração de situações de aprendizagem com esse software, na qual o professor precisa desvendar o artefato, identificando suas potencialidades e também suas limitações.

Quando as noções matemáticas são limitadas implicam na exploração limitada do software e, consequentemente, na elaboração de um instrumento restrito. Por outro lado, conhecimento matemático amplo contribui para que o professor identifique no software ferramentas e componentes que possibilitem construções ricas para a aprendizagem de Matemática.

Nesse processo, na medida em que o artefato se transforma em instrumento, o professor começa a considerar o software como uma ferramenta didática com potencial para a aprendizagem de Matemática.

Raymond Duval, fez várias pesquisas sobre os diversos modos pelos quais o conhecimento matemático é conduzido, referentes aos registros de representação semiótica, sobre objetos matemáticos, conversão e tratamento para nos conduzir a uma conclusão, a respeito de casos de aprendizagem por parte do nosso aluno.

## 3.2 TEORIA DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA DE DUVAL

Foi desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval a partir dos estudos sobre semiótica de Charles Peirce e Ferdinand de Saussure, aplicados à matemática. Levando em consideração a apreensão dos objetos matemáticos que somente será possível quando os sujeitos fazem uso das três atividades cognitivas, formação ,tratamento, e a conversão

Para que haja compreensão do ponto de vista cognitivo é preciso criar condições para que os estudantes reconheçam um objeto matemático por meio de diferentes representações. Nesse sentido, Duval (2018, p.12) diz que para aprender matemática:

> É preciso construir situações de aprendizagem nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B: é a única maneira de aprender a discernir as unidades a serem postas em correspondência e tornar-se capaz de reconhecer, rapidamente, se duas representações quaisquer sendo dadas em dois registros são, ou não são, duas representações equivalentes de um mesmo objeto (DUVAL, 2018).

Levando em consideração as recomendações da Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval e as potencialidades da plataforma geogebra para a produção de atividades, teremos. Para Duval (2006) a apreensão dos objetos matemáticos somente será possível quando os sujeitos fizerem uso das três atividades cognitivas a seguir.

1) Formação de uma representação identificável, refere-se a uma determinada língua natural, à composição de um texto, os desenhos de uma figura geométrica, à escrita de uma fórmula, um gráfico, etc.

2) Tratamento é a transformação de uma representação dentro do próprio registro.

3) Conversão é a operação de transformação de um registro de representação para outro de um mesmo objeto matemático.

A conversão é uma transformação que se efetua ao passar de um registro a outro.

Por exemplo, o teorema “Em todo triângulo retângulo, o seno de um ângulo é a razão da medida do cateto oposto, pela medida da hipotenusa, pode ser representado pela equação sen($\alpha$) $= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, (onde “a=$\overline{BC}$” representa a medida da hipotenusa, “$b = \overline{AC}$” e “$c = \overline{AB}$” representam as medidas dos catetos do triângulo retângulo, na Figura 2. Nesse caso, há uma conversão da representação do teorema do registro linguístico para o registro simbólico.

De acordo com Duval (2006), do ponto de vista matemático, a conversão é basicamente o fator decisivo para aprender

Para Duval (2009) a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos, pois a mudança dos registros gera obstáculos que não dependem da complexidade do campo conceitual.

De acordo com Duval (2009), o tratamento é uma transformação que se efetua dentro de um mesmo registro. Por exemplo, ao desenvolver a equação geral da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ para forma reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , tem-se um exemplo de tratamento no registro algébrico.

Segundo a Teoria de Registros de Representações de Duval (2009), o único acesso ao objeto matemático é por meio de suas representações em seus diferentes registros semióticos. Assim, o estudo das representações é fundamental para explicar a compreensão dos conceitos e da aprendizagem da matemática.

Duval (2009, p. 14) diz que “(...) não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” e “o acesso aos objetos matemáticos passa, obrigatoriamente, pela produção de representações semióticas”

Duval (2011) afirma que a atividade matemática é constituída de dois problemas:

Distinguiremos, assim, dois princípios de análise: um retrata a comparação dos conteúdos específicos das representações produzidas em dois registros diferentes; e o outro, nas possibilidades de transformações específicas em cada registro. São desses problemas que surge a necessidade de representações semióticas.

Para Duval (2011, p. 117) os registros utilizados em Matemática podem ser classificados em:

**a) Discursivos**: língua natural e sistemas de escrita (numéricas, algébrica e simbólicas);

1) Registro de Representação Linguística (língua materna):

2) Registro de Representação Simbólica (equação algébrica):

**b) Não-discursivas**: Figuras Geométricas Planas ou em perspectiva e Gráficos cartesianos.

No experimento didático, ressaltamos que alguns registros são fundamentais para a comunicação entre o objeto proposto e sua representação, para que o sujeito possa obter a aprendizagem.

- REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO LINGUÍSTICO

No triângulo retângulo ABC, temos:

´´ a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos``.

Nas razões trigonométricas do triângulo retângulo ABC, temos:

´´Seno de um ângulo agudo, é igual a razão do cateto oposto, pela hipotenusa``.

- REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA

No triângulo retângulo ABC, temos:

´´$b^2 = a^2 + c^2$ `` .

Na razão trigonométrica do seno no triângulo retângulo ABC,temos:

´´ $\operatorname{sen}(\widehat{A}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ `` .

- FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS.

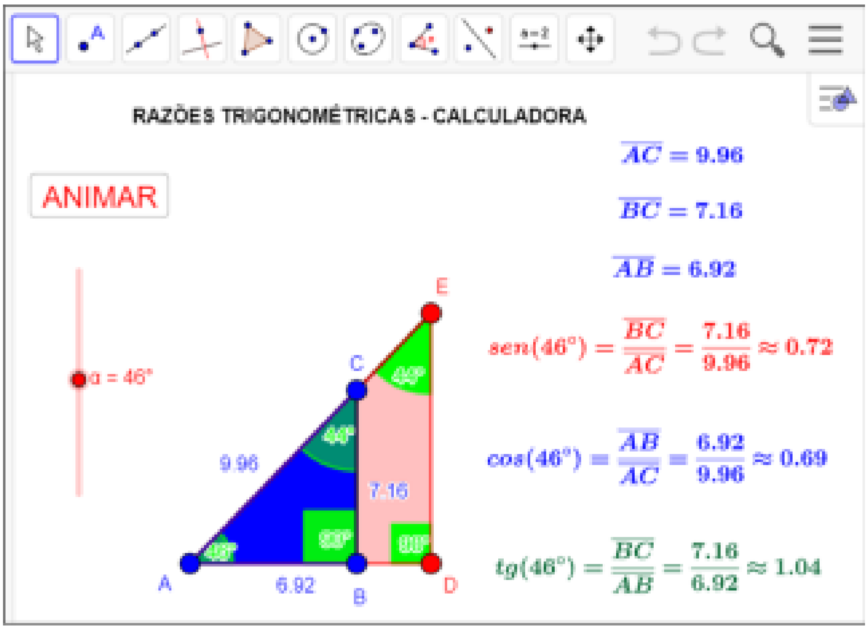
A visualização de uma figura geométrica deve contemplar, segundo Duval:

> a “(...) desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.”. Esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável, pois é contrário ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção (2011, p. 87).

Também é necessária a representação entre os registros, ou seja, o sujeito deve ser capaz de perceber a representação de um mesmo objeto matemático em dois ou mais registros.

Como ilustra a Figura 3, a interface do Geogebra proporciona diferentes registros de representação semiótica em uma mesma janela, auxiliando a apreensão do objeto matemático trigonometria no triângulo retângulo

Figura -3- Registro Figural/Geométrico e Algébrico das razões trigonométricas




Fonte do próprio autor - Geogebra

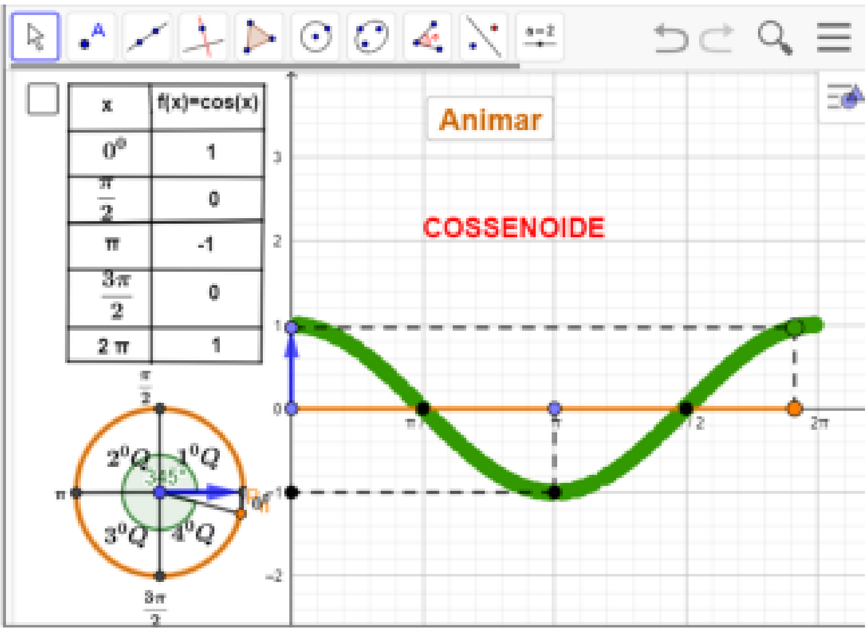
No experimento didático, foram destacados alguns registros discursivos e não-discursivos da função cosseno.

- Registro Algébrico - f(x)=cos(x)
- Registro por meio de tabela de correspondência
- Registro Gráfico no plano cartesiano - cossenóide
- Registro por meio do ciclo trigonométrico - circunferência

Visualizado na figura 4, como exemplos de sistemas semióticos que podem ser citados a linguagem natural, as linguagens simbólicas, as representações gráficas e as figuras geométricas da função cosseno temos:

Os diversos registros de representação podem ser observados através da figura 4.

Figura - 4 - Exemplo de diversos registros de representações -Duval




Fonte: do próprio autor - Geogebra

a) Círculo Trigonométrico e Tabela dos cossenos.

Neste caso faz-se a conversão do registro geométrico (círculo trigonométrico) para um registro algébrico organizado sobre tabela de cosseno.

b) Círculo Trigonométrico e gráfico das funções cosseno.

Temos a conversão do registro geométrico (círculo trigonométrico) para um registro gráfico, o qual neste caso será auxiliado pelos recursos do software GeoGebra.

c) Utilizando a tabela de cossenos a partir do círculo trigonométrico, em algum momento, terá uma atividade de conversão, isto é, quando os valores dos pontos das coordenadas (x, cos(x)), sabermos representá-las graficamente, para observar a forma da função cosseno.

d) Uma outra conversão que será feita pelos alunos/participantes durante a experimentação didática é aquela que toma a forma algébrica de uma função cosseno e a representa graficamente, manipulando os parâmetros da função cosseno.

A utilização de símbolos, gráficos, tabelas e até mesmo língua natural é apontado por Duval (2003) como maneiras de representar um objeto matemático. Ele lembra ainda que as representações distintas trazem consigo conteúdos diferenciados. Quando um estudante consegue efetuar tratamentos e conversões de uma representação, acredita-se que ele tenha compreendido um conceito e as características de cada uma das suas representações.

Alguns exemplos de conversão da sequência didática em que, diante do registro algébrico de uma função trigonométrica, é possível indicar a imagem e o período das funções seno, cosseno e tangente, de maneira simbólica a partir da sua notação algébrica.

EXEMPLOS

a) f(x) = cos(x)

Imagem Im = [ -1, 1]

Período P = 2π

b) g(x) = 1 + 2 sen (x)

Imagem Im = [-1, 3]

Período P = 4π

c) $h(x) = tg\,(x - \frac{\pi}{2})$

Imagem Im = [-∞, ∞ ]

Período P = π

A grande vantagem do Geogebra é a possibilidade de ligação entre a geometria e álgebra, com a representação semiótica interligando as construções, com o seu significado algébrico.

A visualização de uma figura geométrica deve contemplar, segundo Duval:

> a "(...) desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.". Esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável, pois é contrário ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção (Duval, 2011, p. 87).

Para que os alunos tomem consciência das diferentes unidades de significado possíveis no conteúdo das representações e para que ele possa reconhecer as correspondências e as não correspondências entre duas representações diferentes de registro, é necessário tarefas de reconhecimento que não são exercícios nem problemas convencionais. Estas tarefas devem organizar a observação em paralelo das variações de representação em dois ou até três registros de cada vez (DUVAL, 2013, p.156).

Sendo assim a definição de Duval (1993) da palavra representação é bastante importante dentro de matemática, porém acaba ficando marginalizada dentro dessa ciência. De maneira geral é mais utilizada através do verbo representar

> Uma escritura, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor, ... Do mesmo modo os traços e as figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo... Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática (Duval, 1993)

A escolha de um registro de representação depende, segundo Duval (2003), da natureza do sistema semiótico, uma vez que ela deve permitir a formação identificável de uma representação, a conversão e o tratamento. Além de que a formação desta representação pode utilizar da língua materna, desenhos, figuras ou fórmulas com a simbologia da própria da ciência

Essa forma específica da matemática de acessar os objetos torna indispensável a diversificação dos registros de representação para os estudantes. Tal especificação é corroborada pela Base Nacional Comum Curricular ao pontuar que “(...) na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade.” (BRASIL, 2018, p.529)

Em seguida, a análise microgenética é o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante. Essa análise é associada ao uso de registro de vozes, envolvendo o domínio de estratégias para a trabalhosa atividade de transcrição, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

## 3.3 ANÁLISE MICROGENÉTICA

Apresentaremos algumas reflexões para fundamentar a adoção da análise microgenética, que diz respeito a utilização do Geogebra na construção de conceitos matemáticos, a partir de procedimentos de intervenção de um mediador mais experiente.

Uma análise dessa natureza demanda intencionalidade, planejamento, tempo, atenção aos pequenos detalhes que ocorrem na relação dialética de construção de conhecimento entre sujeitos e, sobretudo, uma metodologia adequada a tais exigências.

A metodologia denominada “análise microgenética”, a qual vem sendo utilizada amplamente nos campos da educação e da psicologia. É neste sentido, uma análise orientada para o funcionamento dos sujeitos, também das relações intersubjetivas e das condições sociais da situação.

Assim, Goés (2000) aponta a análise microgenética como um caminho de uma investigação ou articulação de procedimentos na composição de um estudo de caso ou de uma pesquisa participante.

Para Góes (2000), a diferença entre a ancestralidade do entrelaçamento das dimensões cultural, histórica e semiótica no estudo do funcionamento humano, como o faz a análise microgenética.

Para Goés (2000) quando distingue três orientações, a saber: a cognitivista, que focaliza o plano intrapessoal durante os eventos interativos; a interacionista, que examina as relações interpessoais e o jogo conversacional como condição para o funcionamento intrapessoal e, finalmente, a discursiva ou enunciativa, que privilegia a dimensão dialógica e relacional, interação, discurso e conhecimento.

Enfim, Goés (2000) reafirmando o valor da análise microgenética, considera que a característica mais importante desta análise está na forma de conhecer que está orientada para as minúcias, detalhes e ocorrências residuais, como indícios, pistas, signos de aspectos relevantes num processo em curso, que permitem interpretar o fenômeno de interesse.

Em resumo, a análise microgenética constitui-se em um poderoso instrumento metodológico de investigação sobre a construção de conhecimento quando pensamos no encontro de sujeitos em situações do ensino no ambiente escolar. A sala de laboratório, palco das interações dialógicas, proporciona ao professor/pesquisador um ambiente de investigação pedagógica.

Neste trabalho serão feitos registros de vozes de experimentos didáticos e nestes registros, identificar indícios de aprendizagem a partir das interações do pesquisador com o aluno, utilizando o software Geogebra, para o estudo das funções trigonométricas no ciclo trigonométrico, que tenha como resultado, a compreensão dos conceitos, propriedades e definições das relações trigonométricas no triângulo retângulo, funções seno e cosseno.

No capítulo a seguir, foi construído uma proposta de pesquisa, com uma metodologia por abordagem qualitativa, desenvolvendo uma sequência didática de forma dinâmica em que os alunos/participantes, possam interagir manuseando os botões e controles deslizantes, para além de observar e analisar, buscar explicações para entendimentos dos conteúdos de trigonometria, isto é, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, as funções seno, cosseno, tangente e suas definições e propriedades, utilizando o software Geogebra, através de um experimentos didáticos, na busca de resultados na aprendizagem dos alunos/participantes.

# 4. METODOLOGIA

Este trabalho trata-se de uma pesquisa com abordagem qualitativa sobre o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo e as funções cosseno, seno e tangente, onde é feita uma experimentação didática, com uma proposta de ensino a partir de uma sequência didática, que envolve 12(doze) atividades, em um nível de exigência crescente, que tem base na Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), na Teoria da Semiótica de Raymond Duval (2012) e na análise microgenética. Ela foi destinada especificamente aos alunos do Ensino Médio, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Maranhão, de São Luís, no Campus Monte Castelo.

Para validar as atividades da sequência didática que vai ser aplicada para alunos do segundo ano do Instituto Federal do Maranhão - IFMA, em São Luís do Campus Monte Castelo, submetemos as atividades da sequência didática a cinco professores efetivos com mais de cinco anos de efetividade no IFMA, do departamento de matemática, para fazer os seus comentários, analisar, criticar e dar sugestões para o desenvolvimento do experimento didático.

Os cincos professores foram denominados de (A), (B), (C), (D) e (E), as atividades da sequência didática foi enviado para os e-mails dos mesmos, foi dado um prazo para suas análises, as sugestões dos cinco professores foram aceitas em partes, as escolhas foram aceitas através dos registros escritos, em seguida vamos formalizar os resultados dos comentários dos professores do IFMA

## 4.1 AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES POR PROFESSORES SOBRE O EXPERIMENTO DIDÁTICO.

Foi realizada uma pesquisa, com o objetivo de analisar as sequências didáticas, antes de ser realizadas com os alunos do ensino médio, do instituto Federal do Maranhão, da cidade de São Luís, do campus Monte Castelo

A consulta foi individualmente, enviada para os e-mails dos professores no dia 26/08/2022, e nos dias 30 e 31 de agosto, falei com os professores pessoalmente, sobre os seus comentários, informando para eles serem bem criteriosos, ou seja, ser bastante crítico, dizer se acha interessante ou não, caso contrário, faça as suas modificações e der a suas sugestões sobre os aspectos das atividades, foi dado um prazo de entrega até o dia 09/09/2022.

**4.1.1 Comentário das atividades pelos professores sobre o experimento didático**.

A seguir iremos apresentar, de forma geral, as conclusões dos cinco professores de matemática do IFMA do departamento de matemática, que denominaremos de professor (A), (B), (C), (D) e (E), para representar as suas observações, sugestões e comentários, cada uma das 12(doze) atividades, sobre o experimento didático.

**4.1.2 Atividade 1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo**

Tem como objetivo, compreender que os infinitos triângulos retângulos no aplicativo são semelhantes, portanto, a razão entre dois lados quaisquer de um deles é igual à razão entre os lados correspondentes do outro, e que as razões depende exclusivamente da medida do ângulo interno do vértice A. Então as relações trigonométricas podem ser obtidas por qualquer triângulo retângulo do aplicativo que faz a animação.

Em relação à atividade 1, os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), (B), (C) e (D)

Com relação a primeira atividade, o professor (A) faz o seguinte comentário, ´´as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, mostra-se bastante oportuno e didático``.

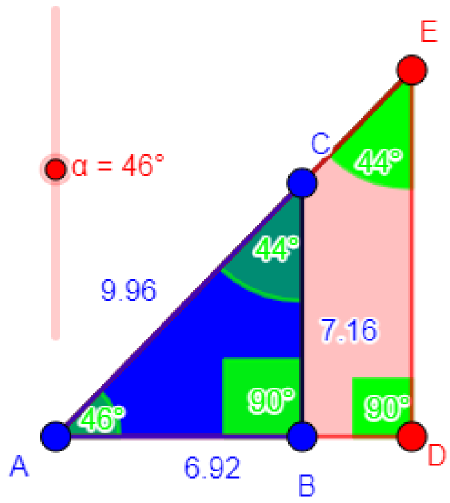
O professor (D), comentou que, ´´a forma dinâmica apresentada para a construção de uma família de triângulos retângulos semelhantes é interessante, a construção manual certamente seria mais cansativa e menos atrativa``.

O professor (B), solicitou que na atividade 1, ´´Seria interessante se fosse possível alterar os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. fazendo isso, poderíamos calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo qualquer, menor que $90^0$ e com o auxílio de uma calculadora científica comprovar o resultado``.

A solicitação do professor (B) foi aceita, porque quando confeccionamos o aplicativo, foi construído um triângulo retângulo maior, com os ângulos agudos $\widehat{A} = 30^0$ e $\widehat{C}=60^0$ fixos. Para ser a referência das razões trigonométricas a ser calculados, e na parte interna desse triângulo, foi construído um outro triângulo retângulo para fazer a animação, com o objetivo de representar uma família de triângulos retângulos semelhantes.

A observação do professor (B) foi aceita, e para atender a observação do professor (B), foi acrescentado no aplicativo, um controle deslizante $\alpha$, no ângulo interno do vértice A, variando de $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$, então, arrastando o controle deslizante $\alpha$, os ângulos agudo $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ , do triângulo retângulo altera, Figura 5.

Figura - 5 - Observação do professor (B)




Fonte: do próprio autor

O professor (C), sugeriu que fosse acrescentada uma questão contendo o conteúdo de tangente, isto é, ´´ seria uma abordagem para reconhecer o valor da tangente, razão extremamente importante para a trigonometria e outros tópicos da Matemática``.

Ao analisarmos os comentários do professor (C), percebemos que devemos acrescentar pelo menos uma questão na atividade 1, contendo o conteúdo de tangente, para ser respondida pelos participantes do experimento didático, porque vai contribuir significativamente na aprendizagem dos alunos. É bom ressaltar que houve o acréscimo da questão 4, contendo o conteúdo de tangente.

**4.1.3 Atividade 2: Circunferência trigonométrica**

Nossa pretensão nesta atividade, é de verificar se a abordagem utilizada permitiu ao aluno sua participação e a construção dos conceitos estudados, considerando a utilização de um aplicativo, no software Geogebra entregue a eles para manusear e  interagirem. Assim, construímos no Geogebra uma circunferência trigonométrica, de Raio 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida iguais a $90^0$.

Para que houvesse a movimentação do ponto P, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante  < a >

Procedimento para manusear os botões:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

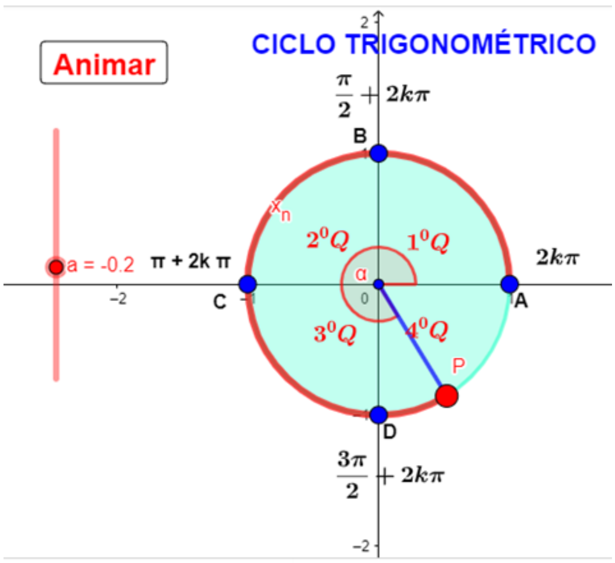
Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < a > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário

Se arrastar o controle deslizante < a > para valores menores que zero, o ponto P movimenta no sentido horário.

Para a realização do experimento didático, será dado ao aluno uma folha impressa, um aplicativo, com todos os passos, feito esses procedimentos os alunos iniciaram de fato a atividade 2, manuseando o aplicativo, de maneira quase que independente, Figura 6

Figura - 6 - Ciclo trigonométrico




Fonte: do próprio autor

Em relação à atividade 2, os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), (B), e (E). Com relação a segunda atividade, o professor (A), faz o seguinte comentário ´´A animação produzida estimula a compreensão da construção da circunferência trigonométrica seja para um arco em grau, seja para um arco em radiano e posteriormente para um número real, identicamente associado ao comprimento do arco em radiano, uma vez que tal raio é unitário``

O professor (E) fez o seguinte comentário, ´´Fica bem mais fácil perceber que o arco continua além de uma volta, inclusive nos dois sentidos, horário e anti-horário`´.

É bom ressaltar que a sugestão do professor (B), ´´que seria interessante, que à medida da extremidade do ponto P, que se desloca sobre o ciclo trigonométrico, mostrasse o valor da medida do arco AP`´.

A sugestão do professor (B), embora achando bastante oportuna, não foi aceita, por adotar uma metodologia de incentivar o descobrimento através do manuseio do aplicativo, acredita-se que o aluno manuseando o aplicativo despertará o interesse e dúvidas, portanto, de posse da teoria da análise microgenética, o professor/pesquisador deverá interferir para que , facilite a visualização da medida do arco $\widehat{AP}$, no ciclo trigonométrico.

**4.1.4 Atividade 3: Transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano**

Buscamos na atividade III, um aplicativo utilizando o Geogebra capaz de reproduzir nas telas de computadores a transposição do comprimento da circunferência para o plano cartesiano, ou seja, reproduzir de forma simples e clara a transposição do comprimento da circunferência para o plano cartesiano se deslocando para o eixo das abscissas, a fim de verificar se a abordagem utilizada permite ao aluno sua participação e a construção dos conceitos estudados, principalmente os arcos, imagens e domínios.

Também foi construído no plano cartesiano, nove pontos B, C, D, E, F, G, H, I e B, para representar as imagens da circunferência sendo transportada para o plano cartesiano, com os seus respectivos arcos.

Para fazer este ambiente dinâmico foi construído dois botões < ANIMAR > e um controle deslizante < v >, para fazer as animações.

Procedimento para manusear os botões:

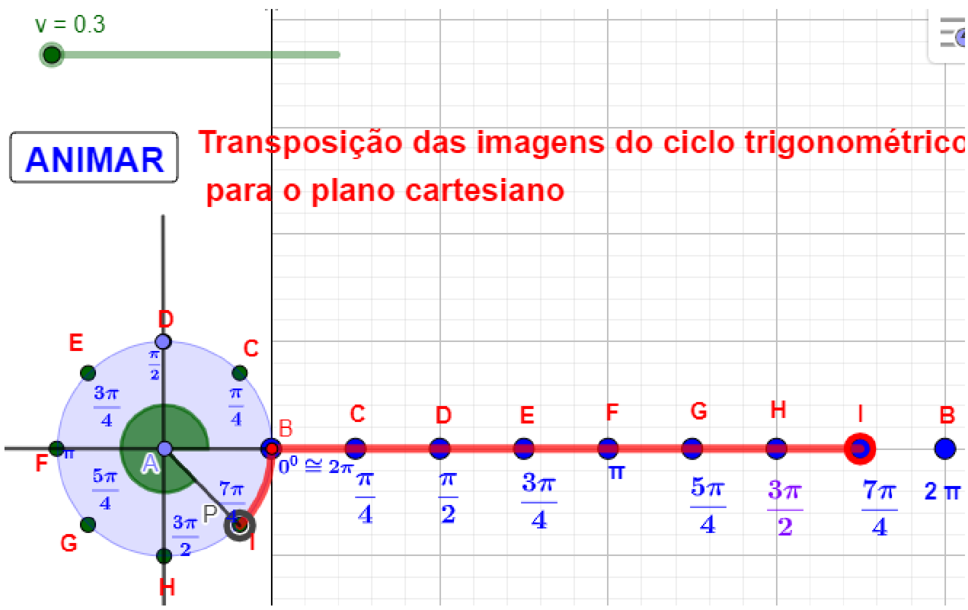
Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário aumentando a sua velocidade figura 7.

A transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é como se tivéssemos cortado a circunferência e esticado levando todas as propriedades da circunferência, mas na reta real, no eixo x do plano cartesiano.

Figura - 7 - Ciclo trigonométricoTransposição das imagens do ciclo para o plano cartesiano




Fonte: Do próprio autor

Em relação à atividade 3, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (D), e (E).

Com relação a terceira atividade, o professor (E) faz o seguinte comentário,

`´ Essa construção certamente facilita a transposição didática entre a medida de um arco em radiano e o seu comprimento, consequentemente associado a um número real. Alguns materiais fazem essa passagem sem explicar. Acredito bastante oportuna essa abordagem`´

O professor (D) fez o seguinte comentário.

´´ A animação está excelente e de fácil compreensão`´.

É bom ressaltar sobre a atividade 3 que a transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é muito importante para a continuidade da aprendizagem das funções trigonometria, principalmente na construção de seus gráficos e também de difícil entendimento, e por unanimidade, os professores que participaram da nossa pesquisa, concordam que o aplicativo analisado, é uma ferramenta muito importante no ensino do ciclo trigonometria.

### 4.1.5 Atividade 4: A função cosseno no ciclo trigonométrico

Para a realização da atividade 4, foi elaborada uma atividade que pudessem privilegiar a construção de conceitos, propriedades e definição da função cosseno no ciclo trigonométrico, assim, foi construído um aplicativo dinâmico no geogebra para ser entregue aos alunos, a fim de construir a definição do cosseno no ciclo trigonométrico, para posteriormente servir como ferramenta para solucionar as questões proposta.

Para a realização dessa atividade, foi construído no GeoGebra, uma circunferência trigonométrica, de Raio = 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida $\frac{\pi}{2} rad$ , na circunferência foi construído um ponto $P_n$ que se movimenta no sentido anti-horário e horário.

Para que houvesse a movimentação do ponto $P_n$, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante < a >

Procedimento para manusear os botões:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

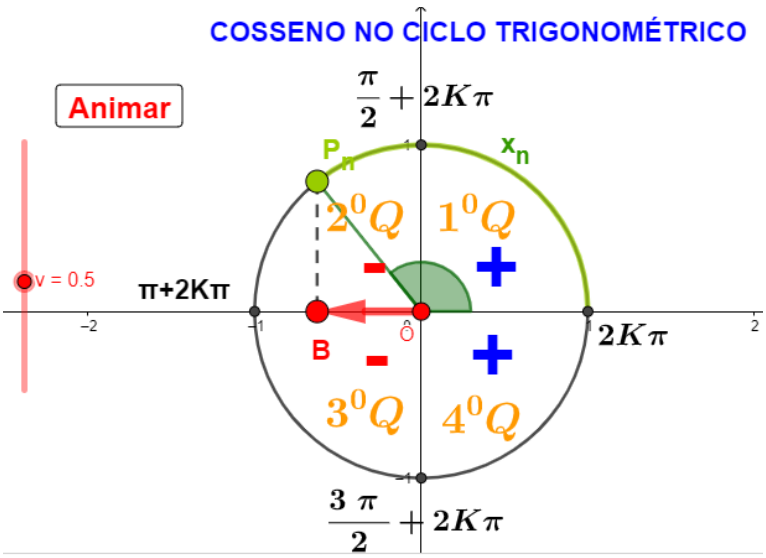
Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores menores que zero, o ponto P movimenta no sentido horário.

Para a realização do experimento didático, será dado ao aluno em folha impressa, um aplicativo, com todos os passos, feito esses procedimentos os alunos iniciaram de fato a atividade 4, manuseando o aplicativo, de maneira quase que independente para que ele possa construir seu próprio conhecimento.

Disponibilizamos aos alunos, um aplicativo no Geogebra para ser manuseado clicando ou arrastando os botões, com as construções prontas da função cosseno, no ciclo trigonométrico para o estudo da definição, domínio, conjunto imagem, sinal nos quadrantes, crescimento, decrescimento, e período. Figura 8.

Figura - 8 - Cosseno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Em relação à atividade 4, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (D).

Com relação a quarta atividade 4, o professor (A) faz o seguinte comentário,

´´ Essa atividade 4, certamente fará com que o aluno perceba que a medida que o ponto $P_n$ , quando se desloca, surge uma projeção de forma dinâmica sobre o eixo horizontal à direita ou à esquerda, bem como sobre o centro da circunferência em algumas situações. Levando o aluno a compreender o cosseno``.

Analisando a quarta atividade do experimento didático, o professor (D), faz o seguinte comentário. ´´ A animação está excelente e de fácil compreensão``.

Vale enfatizar, que a teoria da instrumentação, é adotada para melhor compreendermos o uso da tecnologia, mostra que o uso do aplicativo, entregue aos alunos para a resolução das questões, facilitará o processo de ensino e aprendizagem da função cosseno, pois sua utilização propicia que eles pensem, reflitam e criem novas possibilidades de soluções de problemas.

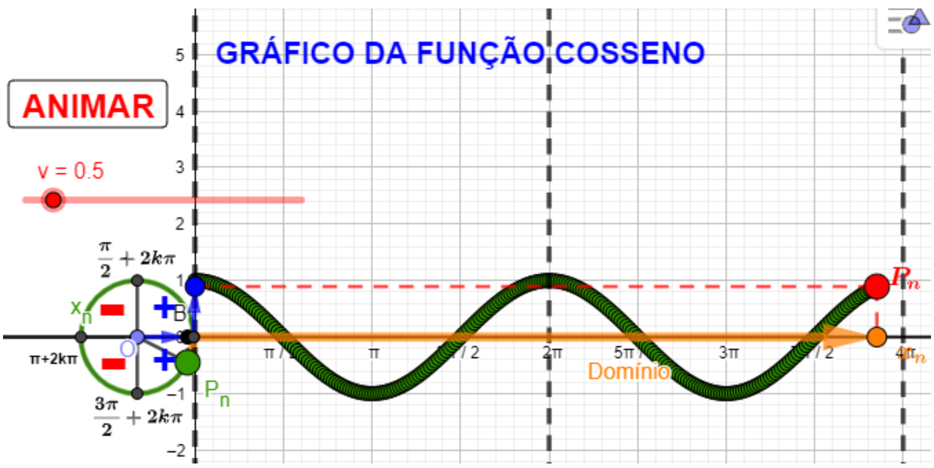
### 4.1.6 Atividade 5: Gráfico da função cosseno

A atividade cinco tem como tema, gráfico da função cosseno, com base nos aspectos da função cosseno e sua definição no ciclo trigonométrico, construímos um aplicativo no Geogebra, para mostrar a passagem da interpretação do ciclo trigonométrico para a gráfica no plano cartesiano.

Para o desenvolvimento do experimento didático, foi construído um ciclo trigonométrico do lado esquerdo do plano cartesiano, para facilitar a visualização da construção do gráfico, relacionando-o com a animação da função cosseno no ciclo trigonométrico. Para o manuseio do experimento didático, será dado ao aluno em folha impressa, o aplicativo, com todos os passos, feito esses procedimentos os alunos iniciaram de fato a atividade 5, manuseando o aplicativo, de maneira quase que independente. manipulando os botões < ANIMAR > e < v >.

O procedimento foi o mesmo usado nas atividades anteriores.. Figura 9.

Figura - 9 - Gráfico da função cosseno




Fonte: Do próprio autor

Em relação à atividade 5, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (C).

Com relação a quinta atividade, o professor (A) faz o seguinte comentário, ´´Sugiro que nessa animação seja permitido o deslocamento no sentido horário inclusive para mais uma ou duas voltas para que seja possível identificar que se trata de uma função de domínio real, periódica e limitada´´.

O professor (C), fez o seguinte comentário, concordando em partes com o professor (A): ´´A animação está excelente e de fácil compreensão, sendo possível colocar mais de uma volta para estudar outros elementos (domínio, período e outros)`

É importante lembrar que as sugestões do professor (A) foram aceitas em partes, nós concordamos em acrescentar no aplicativo, a construção do gráfico dando duas voltas no ciclo trigonometria, em compreender que facilita a visualização e o entendimento do domínio, período e imagem limitada.

A respeito dos comentários do professor (A), sobre a construção do gráfico quanto ao deslocamento no sentido horário, não foi possível atender, pelo motivo de ter que construir outro aplicativo, que gire no sentido horário e associe a construção do seu gráfico para valores menores que zero, no eixo das abscissas, então, partindo do pressuposto, que os alunos/participantes demonstrem interesse, motivação e entusiasmo em aprender a construção do gráfico da função cosseno no sentido horário, e como os alunos já possui um certo domínio do GeoGebra, isto é, o artefato (GeoGebra), que Rabardel (1995) definiu como gênese instrumental, então haverá a intervenção do professor/pesquisador, com base, na teoria da análise microgenética**,** explicando que quando o ponto $P_n$ girar no sentido horário, o gráfico será construído no plano cartesiano para valores no eixo das abcissa menores que zero, portanto, o gráfico da função cosseno, será construído utilizando os conhecimento que os alunos tinham, na sua construção no sentido anti-horário, propriciando os alunos/participantes construírem seus próprios argumentos, fazendo suas próprias conversões, (teoria de representações semiótica de Duval).

#### 4.1.7 ATIVIDADE 6: Entendendo os parâmetros da função cosseno no Geogebra.

Para a realização da atividade 6, foi construído um aplicativo no geogebra para ser entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo, os parâmetros da função cosseno. Na construção do aplicativo existem quatro controle deslizantes para representar os parâmetros, a, b, c, d, e também duas funções, uma fixa e outra variável, f(x) = cos(x) e g(x) = a + b.cos(c. x + d) respectivamente.

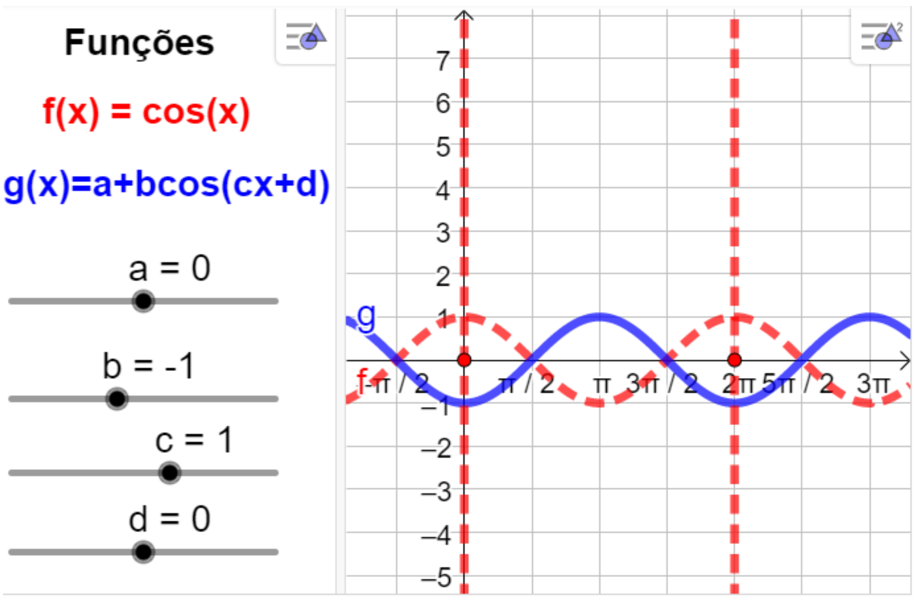
Em relação à atividade 6, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (D), e (E).

Com relação a sexta atividade, o professor (E) fez o seguinte comentário: ´´ Esta atividade mostra-se bastante interessante para a compreensão das funções tipo cosseno, mais atrativa e menos cansativa para que se compreenda as translações verticais e horizontais bem como a amplitude e período das funções tipo cosseno``

O professor (D) fez o seguinte comentário: ´´ A animação não está claro, quando se trata dos parâmetros a, b, c e d, seria importante colocar a função na figura, e não precisa de dois gráficos na figura, apenas uma que ficará se modificando com a variação dos parâmetros``.

É bom deixar claro que as sugestões do professor (D) foram atendidas em partes. No aplicativo realmente estava faltando ser colocado na tela de visualização do Geogebra, a função cosseno e seus parâmetros, então foi colocado as funções, f(x) = cos(x) e g(x) = a +b.cos(c.x+d). Figura 10.

Figura - 10 - Parâmetros da função cosseno




Fonte: Do próprio autor

O comentário do professor (D), sobre deixar apenas um gráfico, não foi aceita, devidos os professores (A), (B), (C) e ( E) acharem interessante para a compreensão, portanto, a função f(x) = cos(x) ficando fixa, fará a comparação com uma outra função g(x) = a +b.cos(c.x + d), que ficam se movimentando no plano cartesiano, quando forem manuseado os controle deslizantes a, b, c, d, para fazer suas animações.

#### 4.1.8 Atividade 7: A função seno no ciclo trigonométrico

Para a realização da atividade 7, foi construído um aplicativo no geogebra para ser entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo função seno no ciclo trigonométrico, a pesquisa tem como finalidade elaborar atividades que pudessem privilegiar a construção de conceitos, propriedades e definição da função seno no ciclo trigonométrico.

Para a realização dessa atividade, foi construído no GeoGebra, uma circunferência trigonométrica, de Raio = 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida $\frac{\pi}{2} rad$ , na circunferência foi construído um ponto $P_n$ que se movimenta no sentido anti-horário e horário

Para que houvesse a movimentação do ponto $P_n$, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante < v >

Procedimento para manusear os botões:

Se clicar pela primeira vez, no botão < Animar >, o ponto $P_n$ movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < Animar >, o ponto $P_n$ vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário

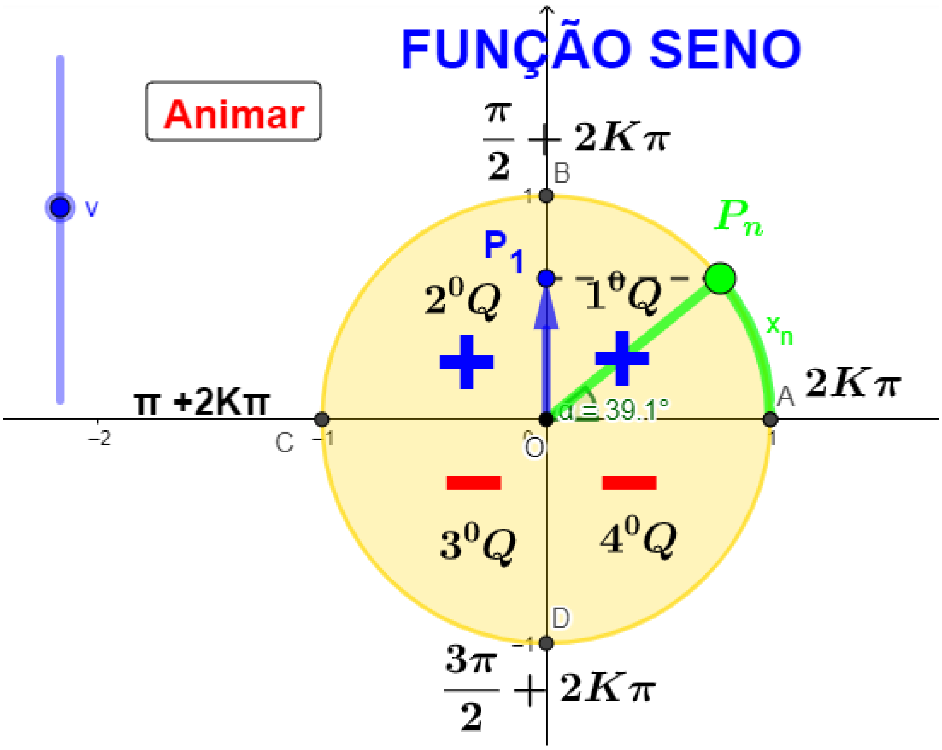
Se arrastar o controle deslizante < v > para valores menores que zero, o ponto P movimenta no sentido horário.

Para a realização do experimento didático, será dado ao aluno em uma folha impressa, um aplicativo, com todos os passos, feito esses procedimentos os iniciam de fato a atividade 7, manuseando o aplicativo, de maneira quase que independente para que ele possa construir seu próprio conhecimento.

Em relação à atividade 7, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (B).

O professor (A) fez seus comentários sobre as atividades 7,concordando com o nosso experimento didático. ´´ Esta atividade certamente fará com que o aluno perceba que a medida que o ponto $P_n$ Quando se desloca, surge uma projeção de forma dinâmica sobre o eixo vertical acima ou abaixo, bem como sobre o centro da circunferência em algumas situações. Levando o aluno a compreender o seno``. figura 11.

Figura - 11 - Função seno




Fonte: Do próprio autor

O professor (B), também concordou com o nosso experimento didático, em seus comentários sobre a atividade 7.

´´ A animação está excelente e de fácil compreensão``.

Vale enfatizar, que a teoria da instrumentação, é adotada para melhor compreendermos o uso da tecnologia, e a teoria de representações semiótica de Duval, mostra que o uso do aplicativo, entregue aos alunos para a resolução das questões, poderá facilitar no processo de ensino e aprendizagem da função cosseno, usando a teoria da análise microgenética, pois sua utilização propicia que eles pensem, reflitam e criem novas possibilidades de soluções de problemas

#### 4.1.9 Atividade 8: Gráfico da função seno

Para a realização da atividade 8, foi construído um aplicativo dinâmico no Geogebra para ser entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo da função seno, para que pudessem privilegiar a construção de conceitos, propriedades e definição da função seno no ciclo trigonométrico,

É bom ressaltar que o aplicativo dinâmico no Geogebra foi entregue aos alunos/participantes, para ser manuseado com a finalidade de facilitar a construção da definição do seno, interagindo com ciclo trigonométrico, para a construção do gráfico no plano cartesiano e posteriormente servir como ferramenta para solucionar as questões proposta.

Para a realização dessa atividade, foi construído no GeoGebra, uma circunferência trigonométrica, de Raio = 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida $\frac{\pi}{2} rad$ , na circunferência foi construído um ponto $P_n$ que se movimenta no sentido anti-horário.

Para que houvesse a movimentação do ponto $P_n$, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante < v >

Procedimento para manusear os botões:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto $P_n$ movimenta no sentido anti-horário no ciclo trigonométrico e também será construído o gráfico da função seno no plano cartesiano..

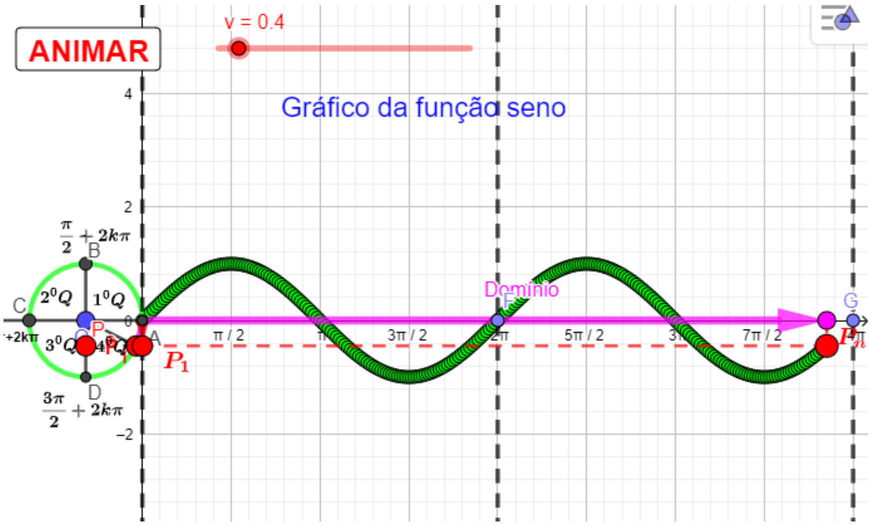
Para o desenvolvimento do experimento didático, foi construído um ciclo trigonometria do lado esquerdo do plano cartesiano, para facilitar a visualização da construção do gráfico no plano cartesiano, relacionando-o com a animação da função seno no ciclo trigonométrico manuseando os botões < ANIMAR > e < v >..

Em relação à atividade 8, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e

(C).

A respeito dos comentários do professor (A) sobre a atividade 8, ´´Sugiro que nessa animação seja permitido o deslocamento no sentido horário inclusive para mais uma ou duas voltas para que seja possível identificar que se trata de uma função de domínio real, periódica e limitada``. Figura 12.

Figura: - 12 - Gráfico da função seno




Fonte: Do próprio autor

O professor (C), fez o seguinte comentário, concordando em partes com o professor (A): ´´A animação está excelente e de fácil compreensão, sendo possível colocar mais de uma volta para estudar outros elementos (domínio, período e outros)``.

É importante lembrar que as sugestões do professor (A) foram aceitas em partes, nós concordamos em acrescentar no aplicativo, a construção do gráfico dando duas voltas no ciclo trigonometria, em compreender que facilita a visualização e o entendimento do domínio, período e imagem limitada.

É bom lembrar que as sugestões do professor (A) e (C), foram aceitas em acrescentar no aplicativo, a construção do gráfico dando duas voltas no ciclo trigonometria, em compreender que facilita a visualização e o entendimento do domínio, período e imagem limitada.

Sobre os comentários do professor (A), a respeito da construção do gráfico quanto ao deslocamento no sentido horário, não foi possível atender, pelo motivo de ter que construir outro aplicativo, que gire no sentido horário e associe a construção do seu gráfico para valores menores que zero, no eixo das abscissas, então, partindo do pressuposto, que os alunos/participantes demonstrem interesse, motivação e entusiasmo em aprender a construção do gráfico da função seno no sentido horário,então haverá a intervenção do professor/pesquisador, isto é, a teoria da análise microgenética**,** explicando que quando o ponto $P_n$ girar no sentido horário, o gráfico será construído no plano cartesiano para valores no eixo das abcissa menores que zero, portanto, o gráfico da função seno, será construído utilizando os conhecimento que os alunos tinham, na sua construção no sentido anti-horário, propriciando os alunos/participantes construírem seus próprios argumentos, fazendo suas próprias conversões, (teoria de representações semiótica de Duval).

### 4.1.10 Atividade 9: Entendendo os parâmetros das funções seno no Geogebra

Buscamos na atividade 9, um aplicativo utilizando o Geogebra capaz de reproduzir nas telas de computadores, a translação do gráfico da função f(x) = a + b.sen(c.x + d), quando for manipulado os parâmetros da a, b, c,. d, com a finalidade de facilitar a visualização da variação das imagens, domínio, amplitude e período da função seno.

Na construção do aplicativo foi feito quatro controle deslizantes para representar os parâmetros, a, b, c, d, e também duas funções, uma fixa e outra variável, f(x) = sen(x) e g(x) = a + b.sen(c. x + d) respectivamente.

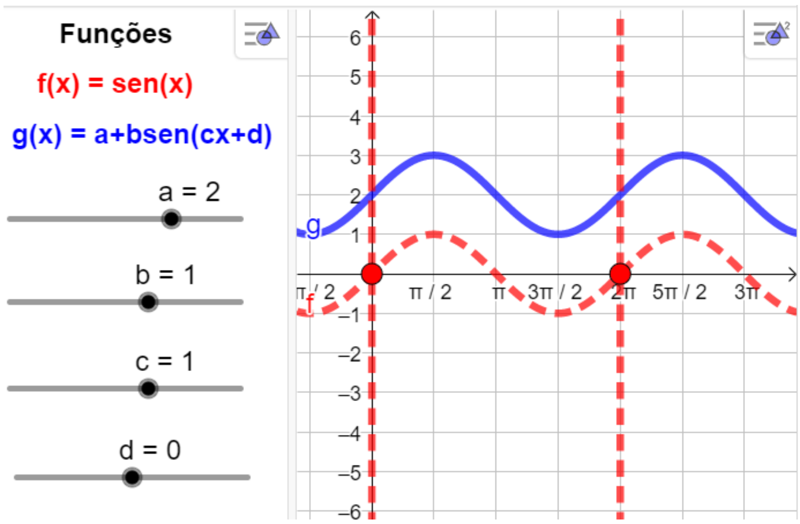
Em relação à atividade 9, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (D), e (E).

Com relação a nona atividade, o professor (E) fez o seguinte comentário ´´Esta atividade mostra-se bastante interessante para a compreensão das funções “tipo” seno. Mais atrativa e menos cansativa para que se compreenda as translações verticais e horizontais bem como a amplitude e período das funções “tipo” seno`

O professor (D) fez o seguinte comentário::´´ A animação não está claro do que se trata os parâmetros a, b, c e d, seria importante colocar a função na figura e não precisa de dois gráficos na figura apenas um que ficará se modificando com a variação dos parâmetros. Também  não está claro as linhas tracejadas verticalmente em x=0 e x=2pi``.

É bom deixar claro que as sugestões do professor (D) foram atendidas em partes, no aplicativo realmente estava faltando ser colocado a função e seus parâmetros, foi colocado a função, f(x) = a+b.sen(c.x+d), para especificar qual função está sendo analisada, mais o comentário sobre deixar apenas um gráfico, não foi aceita, devido os demais professores acharem que a função f(x) = sen(x) que ficará fixa, fará a comparação com uma outra função do tipo f(x) = a +b.sen(c.x + d), que ficam se movimentando no plano cartesiano, quando forem manuseado os parâmetros, para fazer as animações. Figura 13.

Figura: - 13 - Parâmetros da função seno




Fonte: Do próprio autor

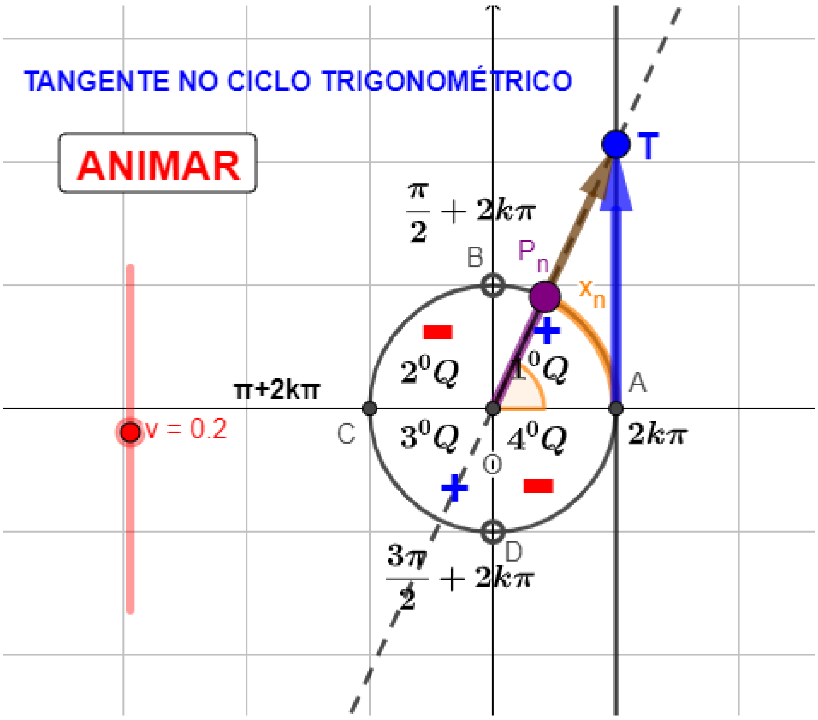
E sobre o comentário sobre as retas trasejadas verticais, foi aceita a sugestão, portanto, modificamos o estilo e cor das retas x = 0 ou x = 2π, facilita a visualização das modificações da função f(x) = a + b.sen(c.x + d) quando ocorrem no intervalo de $0^0$ até $2\pi$.

### 4.1.11 Atividade 10: A função tangente no ciclo trigonométrico

Para a realização da atividade 10, foi construído um aplicativo no geogebra para ser entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo função tangente no ciclo trigonométrico, a pesquisa teve como finalidade elaborar atividades que pudessem privilegiar a construção de conceitos, propriedades e definição da função tangente no ciclo trigonométrico.

No software Geogebra, foi construído uma circunferência de Raio = 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida $\frac{\pi}{2}rad$ , na circunferência foi construído um ponto $P_n$ que se movimenta no sentido anti-horário e horário, um eixo vertical passando pelo ponto A = (1,0), para representar o eixo das tangentes, figura 14.

Figura: - 14 - Função da tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: do próprio autor

Para que houvesse a movimentação do ponto $P_n$, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante < v >

Procedimento para manusear os botões:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores menores que zero, o ponto P movimenta no sentido horário.

Em relação à atividade 10, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (E).

Com relação a décima atividade, o professor (A) fez o seguinte comentário

´´ Sugiro que nessa construção seja ampliado um pouco a parte visível da reta vertical tangente à circunferência para que leve o aluno de forma mais espontânea a compreender que a tangente é ilimitada e que não está definida em determinadas situações``. A sugestão do professor (A) foi aceita e a reta que representa a tangente foi ampliada.

A professor (E) fez o seu comentário sobre a atividade !0: ´´A animação está excelente e de fácil compreensão. Apenas se possível colocar uma circunferência maior``.Foi aceita a sugestão do professor (E), foi acrescentado o zoom da circunferência de raio 1, para facilitar a visualização da definição da função tangente no ciclo trigonométrico.

**4.1.12 Atividade 11: Gráfico a função tangente**

Para a realização da atividade 11, foi construído um aplicativo dinâmico no Geogebra e foram entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo da função tangente, para que pudessem privilegiar a construção de conceitos, propriedades e definição da função tangente no ciclo trigonométrico.

É bom ressaltar que o aplicativo dinâmico no Geogebra foi entregue aos alunos/participantes, para ser manuseado com a finalidade de facilitar a construção da definição do tangente, interagindo com ciclo trigonométrico, para a construção do gráfico no plano cartesiano e posteriormente servir como ferramenta para solucionar as questões proposta.

Para a realização dessa atividade, foi construído no GeoGebra, uma circunferência trigonométrica, de Raio = 1, com dois eixos ortogonais, que passam pelo seu centro, estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes de medida $\frac{\pi}{2} rad$ , na circunferência foi construído um ponto $P_n$ que se movimenta no sentido anti-horário, e um reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A = (1,0), para representar o eixo das tangentes.

Para que houvesse a movimentação do ponto $P_n$, foi necessário a construção de dois botões < ANIMAR> e um controle deslizante < v >

Procedimento para manusear os botões:

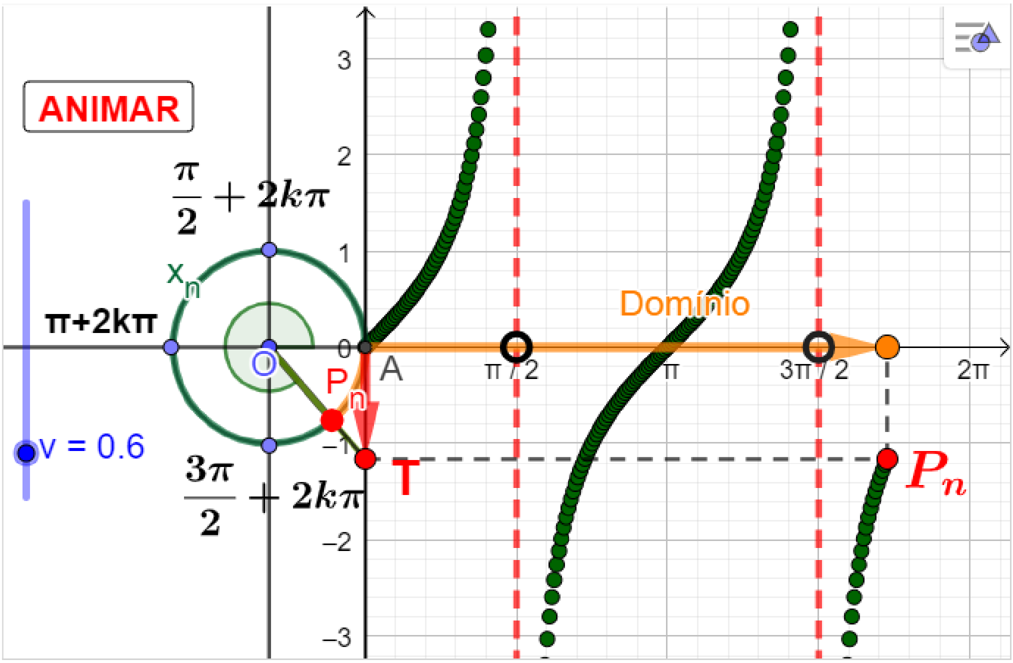
Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto $P_n$ movimenta no sentido anti-horário no ciclo trigonométrico e também será construído o gráfico da função tangente no plano cartesiano..

Para o desenvolvimento do experimento didático, foi construído um ciclo trigonometria do lado esquerdo do plano cartesiano, para facilitar a visualização da construção do gráfico no plano cartesiano, relacionando-o com a animação da função tangente no ciclo trigonométrico manuseando os botões < ANIMAR > e < v >.

Figura: - 15 - Gráfico da função tangente




Fonte: Do próprio autor.

Em relação à atividade 11, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (C).

Com relação a décima primeira atividade, o professor (C) faz o seguinte comentário:

´´ A animação está excelente e de fácil compreensão``

Com relação a quinta atividade, o professor (A) faz o seguinte comentário::

´´ É muito pertinente essa construção. Ficou bem claro a construção da função tangente, seu crescimento e onde não está definida. Sugiro que seja acrescentado o deslocamento do ponto P no sentido horário para que se continue o processo à esquerda da origem, evidenciando a existência também à esquerda``.

É bom ressaltar que a construção do gráfico quanto ao deslocamento no sentido horário, não foi possível atender, pelo motivo de ter que construir outro aplicativo, que gire no sentido horário e associe a construção do seu gráfico para valores menores que zero, no eixo das abscissas, então, haverá a intervenção do professor/pesquisador, isto é, a teoria da análise microgenética**,** explicando que quando o ponto $P_n$ girar no sentido horário, o gráfico será construído no plano cartesiano para valores no eixo das abcissa menores que zero, portanto, o gráfico da função tangente, será construído utilizando os conhecimento que os alunos tinham, na sua construção no sentido anti-horário, propriciando os alunos/participantes construírem seus próprios argumentos, fazendo suas próprias conversões, (teoria de representações semiótica de Duval).

### 4.13 Atividade 12: Entendendo os parâmetros da função tangente no Geogebra.

Para a realização da atividade 12, foi construído um aplicativo no geogebra e foram entregue aos alunos/participantes sobre o conteúdo, os parâmetros da função tangente, na construção do aplicativo foi feito quatro controle deslizantes para representar os parâmetros, a, b, c, d, e também duas funções, uma fixa e outra variável, f(x) = tg(x) e g(x) = a + b.tg(c. x + d) respectivamente.

Em relação à atividade 12, todos os professores acharam muito interessante e deram algumas sugestões. Vamos destacar aqui a sugestão dos professores (A), e (E).

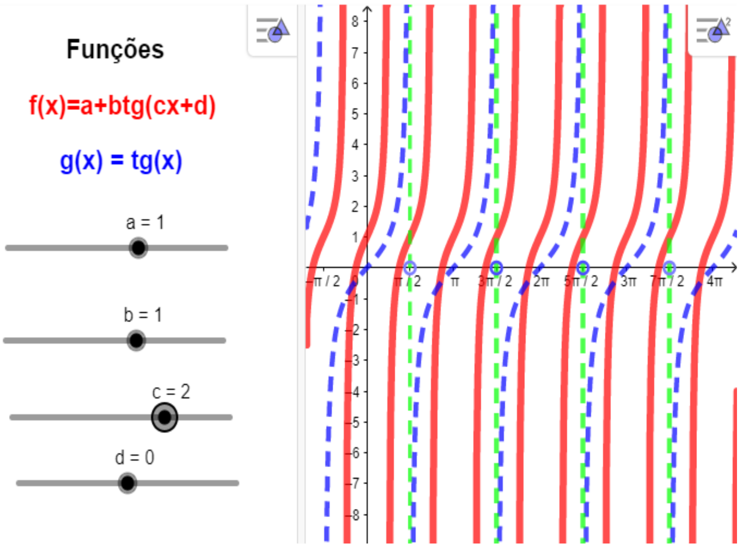
A respeito dos comentários do professor (A) sobre a atividade 12,´´esta atividade mostra-se bastante interessante para a compreensão das funções do tipo tangente bem como seus período e seus domínios``.

O professor (E) fez o seguinte comentário sobre a atividade 12:

´´ Na animação não está claro do que se trata os parâmetros a, b, c e d, seria importante editar a função na figura``

Devido os comentários do professor (E), foi editado no aplicativo as função tangente f(x) = a + b.tg(c.x + d) e g(x) = fg(x), para ser visualizado na tela de visualização do Geogebra. Figura 16.

Figura - 16 - Parâmetros da função tangente




Fonte: Do próprio autor.

É bom ressaltar que as sugestões dos professores de matemática do Instituto Federal do Maranhão, efetivos, que fazem parte do departamento de matemática (DEMAT), com mais de cinco anos de experiências em sala de aula na instituição, foram aceitas e os aplicativos das atividades e as modificações sugeridas pelos professores foram feitas, com uma ressalva, sobre as atividades 6, 9 e 12, que analisam os parâmetros das funções trigonométricas, porque o professores (B), acha desnecessário a construção de duas função em estudo, seno, cosseno ou tangente, juntas com as funções com seus parâmetros, e os demais professores concordam com as duas funções, para poder fazer as comparações, quando for feitas as animações dos parâmetros. Finalizando, queremos agradecer aos professores que aceitaram participar no nosso experimento, com seus comentários, sugestões e criticando de forma construtiva.

No capítulo a seguir, foi construído uma sequência didática com doze atividades de forma bem organizada, diversificadas, desafiadoras, com possibilidades de progressão, que mobilizam diferentes conhecimentos e estimulem a aprendizagem, que esteja relacionado aos objetivos do pesquisador.

## 5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste Capítulo apresentaremos 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, analisando seu domínio, imagens, amplitude e período, faremos também uma análise dos parâmetros utilizando o aplicativo Geogebra.

Esta sequência didática foi sugerida de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos.

As atividades e os aplicativos desenvolvidos no Geogebra podem ser encontrados no endereço que será postado no desenvolvimento das atividades.

No desenvolvimento das atividades contidas nesta sequência didática buscamos apoio nas teorias de instrumentação de Rabardel, teoria de representações semiótica de Duval e da análise microgenética, as atividades propostas, são programadas para alunos do final do primeiro ou segundo ano do Ensino Médio, e podem ser usadas para consolidar o conhecimento previamente trabalhado, ou na introdução destes, para posterior sistematização.

O estudo da Trigonometria se inicia no final do Ensino Fundamental, quando se apresentam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Iniciaremos as atividade nesta sequência didática relembrando um pouco das definições das razões trigonométricas estudadas no ensino fundamental, utilizando o aplicativo Geogebra, serão feitas algumas recomendações para o manuseio do aplicativo, para o entendimento e a aprendizagem dos conteúdo.

No desenvolvimento dessa experiência didática, foram criadas algumas atividades no Geogebra, que será entregue para os alunos/participantes, isto é, uma cópia para cada aluno, e solicitar que seja feita sua leitura, depois que ele abra o aplicativo Geogebra já estruturado no link solicitado, para estudar as questões, de razões trigonométricas no triângulo retângulo, as funções trigonométricas, cosseno, seno, tangente e algumas propriedades..

1º) Os alunos/participantes obtiveram a primeira atividade, ou seja, um aplicativo de razão trigonométrica no triângulo retângulo, já estruturado, com um botão para ser manipulado no link **https://www.geogebra.org/m/ghs5jqby,** e as questões para serem resolvidas.

2º) Cada um dos alunos/participantes, receberam a segunda atividade, ou seja, um aplicativo de circunferência trigonométrica, já estruturado com dois botões para serem manipulados no link **https://www.geogebra.org/m/yvqs25px,** e as questões para serem resolvidas.

3º) Todos os alunos/participantes, receberam a terceira atividade, ou seja, um aplicativo de transposições das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano já estruturados, com dois botões para serem manipulados no link **https://www.geogebra.org/m/rwj2etp**9, e as questões para serem resolvidas.

4º) Foi entregue para todos aos alunos/participantes, a quarta atividade, ou seja, um aplicativo de função cosseno no ciclo trigonométrico para serem resolvidas as questões no link **https://www.geogebra.org/m/nafgjak**q.

5º) Para cada aluno/participante, foi entregue a quinta atividade, ou seja, um aplicativo de gráfico da função cosseno no plano cartesiano e também as questões para serem resolvidas no link **´´https://www.geogebra.org/m/zjhzfsck`` .**

6º) Cada aluno/participante recebeu uma atividade, ou seja, um aplicativo para serem manipulados os seus parâmetros, no link **https://www.geogebra.org/m/vemaaqjs**, da função cosseno no plano cartesiano para ser analisados os seus parâmetros e, também as questões para serem resolvidas.

7º) Foram entregues aos alunos/participantes, a atividade, ou seja, um aplicativo da função seno do ciclo trigonométrico já estruturado com dois botões para sere manipulados no link **https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8** e, as questões para serem resolvidas.

8º) A oitava atividade, foi entregue a todos os alunos/participantes, ou seja, um aplicativo de gráfico da função seno no ciclo trigonométrico já estruturado, com dois botões para serem manipulados no link, https**://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc**, e as questões para serem resolvidas.

9º) Foi distribuída a nona atividade para cada aluno/participante, ou seja, um aplicativo para serem manipulados os seus parâmetros,

**https://www.geogebra.org/m/vemaaqjs** da função seno no plano cartesiano para ser analisados os seus parâmetros e, também as questões para serem resolvidas.

10º) A décima atividade foi dada a todos os alunos/participantes, isto é, um aplicativo de gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico já estruturado, com dois botões para serem manipulados no link **https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc** e, as questões para serem resolvidas.

11º) Todas as pessoas participante do experimento didático, recebeu a décima primeira atividade, isto é, um aplicativo de gráfico da função tangente no plano cartesiano já estruturado, com dois botões para serem manipulados no link **https://www.geogebra.org/m/epppy**3xh e, as questões para serem resolvidas.

12º) Foi designada a décima segunda atividade para cada aluno/participante,, ou seja, um aplicativo para serem manipulados os seus parâmetros, **https://www.geogebra.org/m/gst6mha3** da função tangente no plano cartesiano para serem analisados e resolvidas.

A seguir, serão apresentadas as atividades que serão aplicadas para os alunos participantes da pesquisa, por meio de 12 atividades diversificadas, a primeira atividade, foi pensada para fazer o estudo os conteúdos que são estudados no Ensino Fundamental, e tem a finalidade de relembrar esses conteúdos, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, denominado de Razões trigonométricas, onde é possível explorar as razões trigonométricas do triângulo retângulo de forma dinâmica.

As demais atividades, optamos por apresentar para os alunos apenas as ferramentas necessárias para a realização da atividade, isto é, os procedimentos para o manuseou foram construídos dois botões para serem manipulados, nos quais foram construídos um ciclo trigonométrico, bem como os gráficos das funções seno, cosseno e tangente e seus parâmetros, com apoio do software Geogebra. O software possibilita a construção precisa dos gráficos dessas funções e isso permite uma visualização dos efeitos gerados pelos parâmetros os quais podem alterar o período, a imagem, a amplitude e o domínio das funções.

A utilização da tecnologia no ensino da Matemática pode incentivar e motivar os alunos, além de estimular o interesse pelo conhecimento.

## 5.1 ATIVIDADE 1 - AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

**Objetivo.**

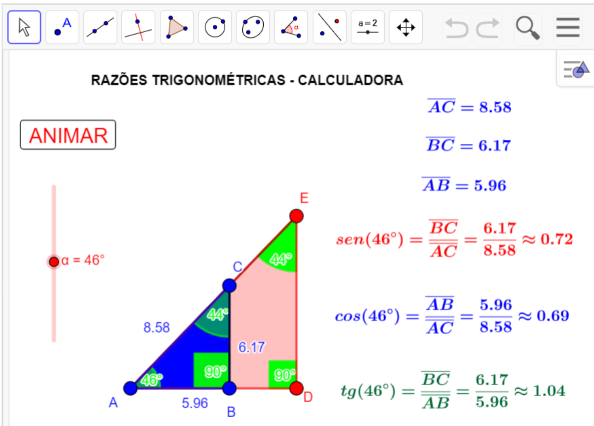
Esta atividade de experimento didático, tem como objetivo compreender os conceitos, definições das razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

**Lista de atividades**

Nesse sentido propomos uma lista de exercícios que retrata as relações trigonométricas no triângulo retângulo, que deverão ser desenvolvidas com o auxílio do software GeoGebra, e averiguar a veracidade do resultado junto ao programa Abra o aplicativo **https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf**. Responda.

Aluno: ___________________________________________________________

Figura - 17 - Razões trigonométricas




Fonte: Do próprio autor

**EXERCÍCIOS**

1º) O valor do sen($30^0$), é aproximadamente ?

2º) Na figura acima o cos($46^0$) é aproximadamente?

3º) Na figura acima o sen($60^0$), é aproximadamente?

4º) Na figura acima, a tg($29^0$) do triângulo retângulo, é aproximadamente?

### 5.1.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no entendimento das razões trigonométricas.

O aluno, de posse do aplicativo online geogebra – Aplicativos Matemáticos, https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf, explora as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo) a partir da manipulação desse aplicativo

No experimento, clique no Botão <Animar>, arraste o controle deslizante <a>, para escolha do ângulo e façam anotações do que observaram das medidas dos lados do triângulo retângulo em seguida, determine as razões entre os lados.

### 5.1.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo

a) Manuseando o aplicativo Identificar as características fundamentais das relações trigonométricas no triângulo retângulo (Medidas dos lados), isto é, pode utilizar um instrumento para medir o segmento ou utilizar as medidas do aplicativo que está exposto na tela de visualização.

b) Depois sugerir que os participantes encontrem o seno, cosseno e tangente dos ângulos das seguintes razões trigonométricas .

cos$(30^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ ,

sen$(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ,

tg$(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

sen$(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,

cos$(60^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ,

tg$(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

c) Verifique se as razões trigonométricas no Triângulo retângulo, dependem somente de um ângulo fixo.

d) Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação das razões trigonométricas (algébrico, geométrico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

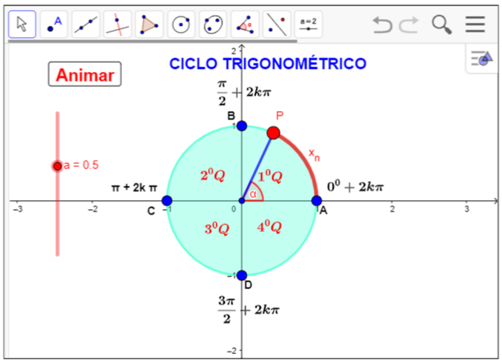
Ao realizar suas atividades, os alunos terão a oportunidade de argumentar sobre os resultados obtidos e, a partir das suas observações argumentativas, tirar conclusões sobre as propriedades das razões trigonométricas. Assim sendo, abre-se um espaço para a constituição de um ambiente em que os alunos se envolvem na discussão matemática, expondo e defendendo suas ideias, comentando as ideias dos colegas e levantando questionamentos sobre os resultados obtidos.

A segunda atividade, trabalha a circunferência trigonométrica de forma dinâmica, tem a finalidade de facilitar a compreensão deste conteúdo de trigonometria, utilizando o software Geogebra onde é possível explorar os quadrantes, imagens, ângulos, medidas de ângulos, congruência, determinação positiva e negativa, periodicidades, etc.

A CIRCUNFERÊNCIA OU CICLO TRIGONOMÉTRICO

Em um primeiro momento será apresentado o ambiente, onde os alunos irão trabalhar o aplicativo já estruturado (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px). Solicitar aos alunos que, usando os recursos do software geogebra, o botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, respostas às questões, interagindo com o aplicativo.

Figura - 18 - Ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Na segunda atividade vamos continuar o experimento no aplicativo Geogebra, desenvolvendo o conteúdo, círculo trigonométrico, O estudo da Trigonometria se inicia no final do Ensino Fundamental quando se apresentam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, mas é no Ensino Médio que esses conceitos se extrapolam para o ciclo trigonométrico, em que se estudam os arcos e os ângulos em uma ou mais volta na circunferência trigonométrica, além da introdução do radiano como outra unidade de medida de ângulos.

## 5.2 ATIVIDADE - 2 - ENTENDENDO A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA.

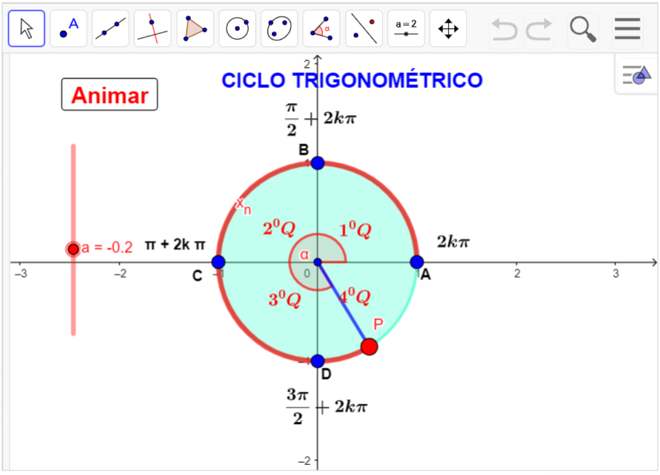
Nome do aluno: ________________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade tem como objetivo aprender os conceitos do ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições e propriedades do ciclo trigonométrico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 19.

Abra o aplicativo **https://www.geogebra.org/m/yvqs25px**, e Responda

Figura - 19 -Ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

**Questões**:

1º) A circunferência é dividida em quantas partes iguais, e como são denominadas?

2º) O ponto P, fazendo um percurso de $245^0$, no sentido anti-horário, vai está em qual quadrante?

3º) O ponto P, fazendo um percurso de $-\ 1024^0$ , no sentido horário, vai está em qual quadrante?

4º) Representar, no ciclo trigonométrico, as imagens do conjunto de números A = $\left\{x \epsilon R / x = k\frac{\pi}{2} \text{ , } k \epsilon Z\right\}$.

5º) Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{4}$, $12\pi$ ,$-\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{7\pi}{4}$, $-\ \frac{15\pi}{8}$.

### 5.2.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no ciclo trigonométrico.

Na atividade 2, vai ser feito um experimento para o entendimento do ciclo trigonométrico, usando o aplicativo já estruturado, encontrado no Geogebra.org.

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < Animar > e < a >.

2º) Se clicar no botão < Animar >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

4º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a < 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido horário.

5º) O nosso experimento é uma circunferência de raio unitário, isto é, (R = 1), divida em quatro partes de medida iguais, denominada de quadrante.

Sugestões para explorar o aplicativo no ciclo trigonométrico

1. De posse do aplicativo, se clicarmos no botão < Animar > e o controle deslizante < a >, com a > 0, o ponto P se movimentará no sentido anti-horário, partindo do ponto A(1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.
2. Se clicarmos no botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, com a < 0, o ponto P se movimentará no sentido horário, partindo do ponto A (1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.

### 5.2.2 Os quadrantes no ciclo trigonométrico

Observando o aplicativo do Geogebra, a circunferência unitária, está dividida em quatro partes iguais, de $90^0$, ou $\frac{\pi}{2}$ radianos, Se o ponto P percorrer todos os quadrantes, isto é o ponto P se deslocará do ponto A, até o ponto B, percorrendo o primeiro quadrante, continuando o seu deslocamento até o ponto C, então o ponto P, fará o percurso no segundo quadrante, se o ponto P, continuar percorrendo até o ponto D, ele percorrerá o terceiro quadrante, se o ponto P, continuar se deslocando do ponto D até o ponto A, deslocou-se no quarto quadrante, então o ponto P completou uma volta completa que equivale ao comprimento da circunferência, que é C = $2\pi R$.

Logo chegaremos à conclusão que:

**Primeiro quadrante**: são os ângulos que estão entre $0^0$ a $90^0$, ou $o^0$, a $\frac{\pi}{2}$

**Segundo quadrante**: são os ângulos que estão entre $90^0$, a $180^o$, ou $\frac{\pi}{2}$ a π .

**Terceiro quadrante:** ângulos que estão entre 180º e 270º ou π e $\frac{3\pi}{2}$radianos;

**Quarto quadrante:** ângulos que estão entre 270º e 360º ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radiano

### 5.2.3 Imagens na circunferência no sentido anti-horário

Se o ponto $P_n$ está associado ao número $x_n$ , dizemos que $P_n$ é a imagem de $x_n$

Quando a cada número real $x_1$, associado a um único ponto $P_1$, na circunferência. Se $x_1$ > 0, então realizamos a partir de A, um percurso de comprimento $x_1$, no sentido anti-horário, e marcamos $P_1$ como ponto final do percurso, logo a imagem do número $x_1$, na circunferência é o ponto $P_1$.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$ , no ciclo trigonométrico, é o ponto B.

A imagem de $-\frac{\pi}{2}$ , no ciclo trigonométrico é o ponto D.

A imagem de $\pi$ no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de $-\pi$, no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de $10\pi$, no ciclo trigonométrico é o ponto A.

Notamos que se $P_1$, é a imagem do número $x_1$, então também é a imagem dos números, $x_1$+2π, $x_1$+4π, $x_1$+6π, ...São chamados de ângulos congruentes.

### 5.2.4 Imagens na circunferência no sentido horário

Se $x_2$ < 0,então realizamos a partir de A um percurso de comprimento de $x_2$ no sentido horário, marcamos $P_2$ como ponto final do percurso, notamos que $P_2$ é imagem de $x_2$. Logo também será de $x_2$- 2π, $x_2$-4π, $x_2$-6π, …

Foi construído um aplicativo no Geogebra, para que pudéssemos manusear e visualizar a transposição das imagens da circunferência para o plano cartesiano, por ser uma importante condição para continuarmos o nosso experimento.

## 5.3 ATIVIDADE - 3 - ENTENDENDO A TRANSPOSIÇÃO DAS IMAGENS DO CICLO TRIGONOMÉTRICO PARA O PLANO CARTESIANO

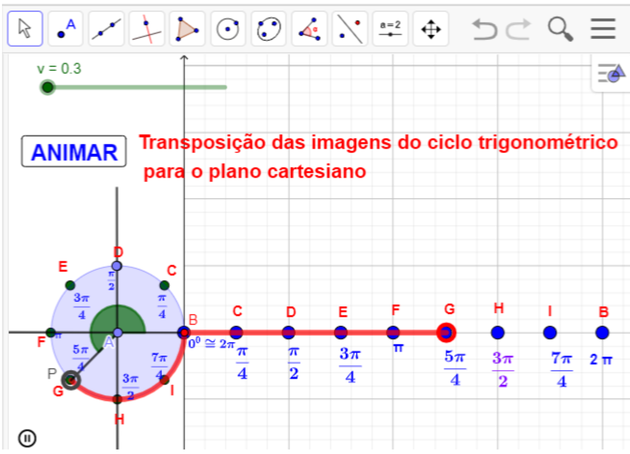
NOME DO ALUNO:______________________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo compreender os conceitos e definições da transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico Geogebra.

Abra o aplicativo **(https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9)** e Responda.

Figura - 20 -Transposição das imagens do ciclo para o plano




Fonte: Do próprio autor

**Questões**

1º) Se $\alpha$ e $\beta$ são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$ c) $\alpha = \beta + 2.360^0$ e) $\alpha = \beta + k.360^0, k\epsilon Z.$

b) $\alpha = \beta + 360^0$ d) $\alpha = \beta - 2.360^0$

2º) Manipulando o aplicativo, e observando as animações que representam as transposições das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, responda:

As imagens do seguinte conjunto. E= $\{x\epsilon R/\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ?

a) A, B b) D, H c) C, G d) B, F e) C, D

3º) Qual a imagem de um arco de $2700^0$ ?

a) A b) C c) D d) E e) F

### 5.3.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo na transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para $v > 0$, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

Ao clicar no botão < ANIMAR > o aplicativa fará a transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é como se tivéssemos cortado a circunferência e esticado levando todas as propriedades da circunferência, mas na reta real, no eixo x do plano cartesiano. Vejamos alguns exemplos:

A imagem de $0^0$, é o ponto **B** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{4}$ é o ponto **C** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$ é o ponto **D** no eixo x.

A imagem de $\frac{3\pi}{4}$ é o ponto **E** no eixo x.

A imagem de $\pi$ é o ponto **F** no eixo x.

A imagem de $\frac{5\pi}{4}$ é o ponto **G** no eixo x

A imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é o ponto **H** no eixo x.

A imagem de $\frac{7\pi}{4}$ é o ponto **I** no eixo x.

A imagem de $2\pi$ é o ponto **B** no eixo x.

Como o gráfico é periódico, as imagens do gráfico se repetem, isto é, são as mesmas de acordo com os seus ângulos congruentes.

A imagem de $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, é o ponto **D** no eixo x, o ponto P, poderia ter dado várias voltas que a sua imagem, seria também o ponto **D** no eixo x.

A quarta atividade, trabalha o cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender a definição, conceitos, e propriedades sinais da função cosseno, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

## 5.4 ATIVIDADE - 4 - ENTENDENDO A FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

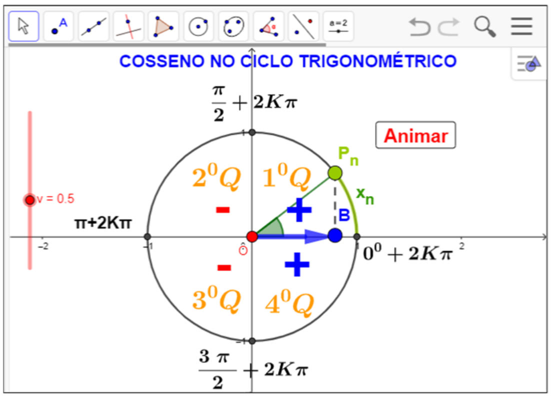
Aluno______________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo compreender os conceitos, definição e propriedades da função cosseno no ciclo trigonométrico, manuseando e visualizando as animações no geogebra, figura 21.

Abra o arquivo ´´ht**tps://www.geogebra.org/m/nafgjakq**`` e Responda.

Figura - 21- Função cosseno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

**Questões**

1º) Em quais quadrantes o cosseno é positivo?

2º) Qual o valor da imagem do cosseno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

3º) Faça uma tabela que contenha os arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens.

4º) Manuseando o aplicativo, podemos encontrar o cossenos dos arcos, girando o ponto $P_n$, no sentido anti-horário. Qual é domínio e a imagem de f(x) = cos(π) ?

5º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes a circunferência de comprimento 2 $\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=cos(6π)?

6º) O ponto $P_n$, deslocando de π→ $\frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas. O cosseno neste local é ?

**5.4.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função cosseno**

1º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

2º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para v > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário, se arrastar o controle deslizante v < 0 ,vai aumentando sua velocidade, no sentido horário

Definição da função cosseno no aplicativo Geogebra

O ponto $P_n$, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico, a sua projeção em relação a abcissa OB, será o cosseno de $x_n$, isto é: OB = cos($x_n$).

**5.4.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo**

1. O ponto $P_n$, fará o percurso de $x_n$, a projeção do ponto sairá do ponto A=(1,0), e irá diminuindo até a origem da circunferência O=(0,0), logo diminuirá, ou seja, na origem o cosseno é zero. Portanto, no primeiro quadrante a função cosseno é decrescente.

2. O ponto $P_n$, continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem O=(0,0), e se deslocará até π, a medida desse deslocamento é 1(um), tamanho do raio (R = 1). Mas este deslocamento está no lado esquerdo dos eixos coordenados, pois, assume valores negativo, logo, $cos(\pi) =- 1$. Portanto a função no segundo quadrante é decrescente.

4) O ponto $P_n$, continuará o percurso no terceiro quadrante, saindo de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas O = (0,0), que corresponde a zero, pois a sua numeração aumenta, portanto, a função cosseno no terceiro quadrante é crescente.

5º) O ponto $P_n$, continuará o percurso no quarto quadrante, saindo de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem O = (0,0) e se deslocará até 2π, pois assume valores positivos, logo, $\cos(2\pi) = 1$. Portanto a função é crescente.

A quinta atividade da função cosseno no ciclo trigonométrico, pode proporcionar ao aluno o entendimento da construção dos conceitos, definição, domínio, imagem, sinais, periodicidade de forma dinâmica.

5.5 ATIVIDADE - 5 - .ENTENDENDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO NO PLANO.

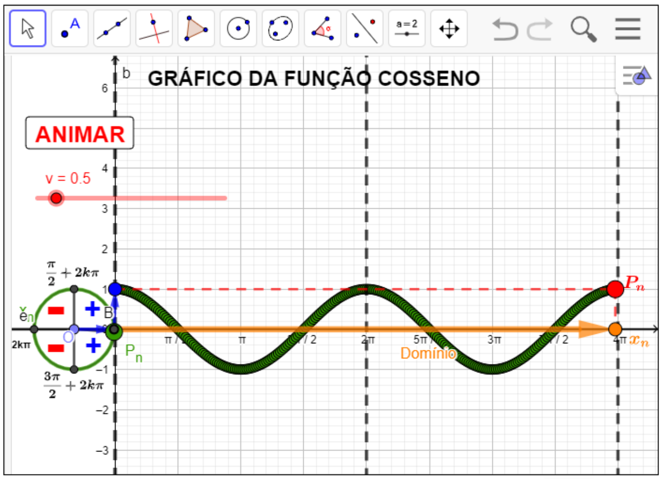
Aluno______________________________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo entender os conceitos, definição, periodicidade, domínio imagem e amplitude do gráfico da função cosseno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico, figura 22.

Abra o arquivo **https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz** e Responda.

Figura - 22- Cossenóide




Fonte: Do próprio autor

**Questões:**

1º) Qual a imagem da função cosseno?

2º) Quais quadrantes a função cosseno é positiva e quais são negativa,

3º) Quais os valores da função cosseno dos seguintes arcos:

a) $2k\pi$

b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\pi + 2k\pi$

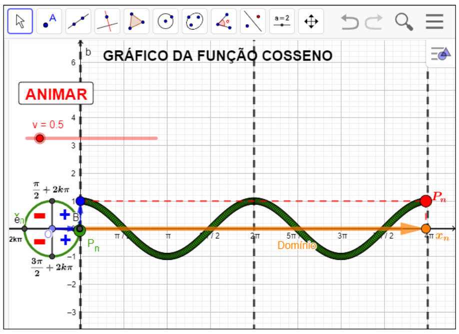
d) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

e) $-1470^0$

**5.5.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para a construção do gráfico da função cosseno.**

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz e execute o mesmo no Geogebra. Iniciaremos a manusear o arquivo clicando no botão < ANIMAR > e arrastando o controle deslizante < v > .para v > 0, a animação fica mais rápida.

Figura - 23 - Função cosseno no plano cartesiano




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante para v > 0, a animação fica mais rápida

O ponto $P_n$, se movimenta no ciclo trigonométrico, no sentido anti-horário, este deslocamento do ponto $P_n$, será transportado para o eixo das abscissas, passando a ser o domínio da função cosseno.

- Domínio é $R$, e a Imagem é o intervalo [−1, 1]
- .A função cosseno é periódica e seu período é $2\pi$, pois $x_n$ e $x_n$ + 2k têm a mesma imagem $P_n$ no ciclo trigonométrico, é positiva no primeiro e quarto quadrante, é negativo no segundo e terceiro quadrante.
- A amplitude é a média aritmética entre os valores máximo e mínimo da função cosseno.

Na sexta atividade, estudaremos os parâmetros da função cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender, as modificações das construções dos gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), tendo como referência a função f(x) = cos(x), para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

5.6 ATIVIDADE - 6 - .ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO COSSENO NO GEOGEBRA

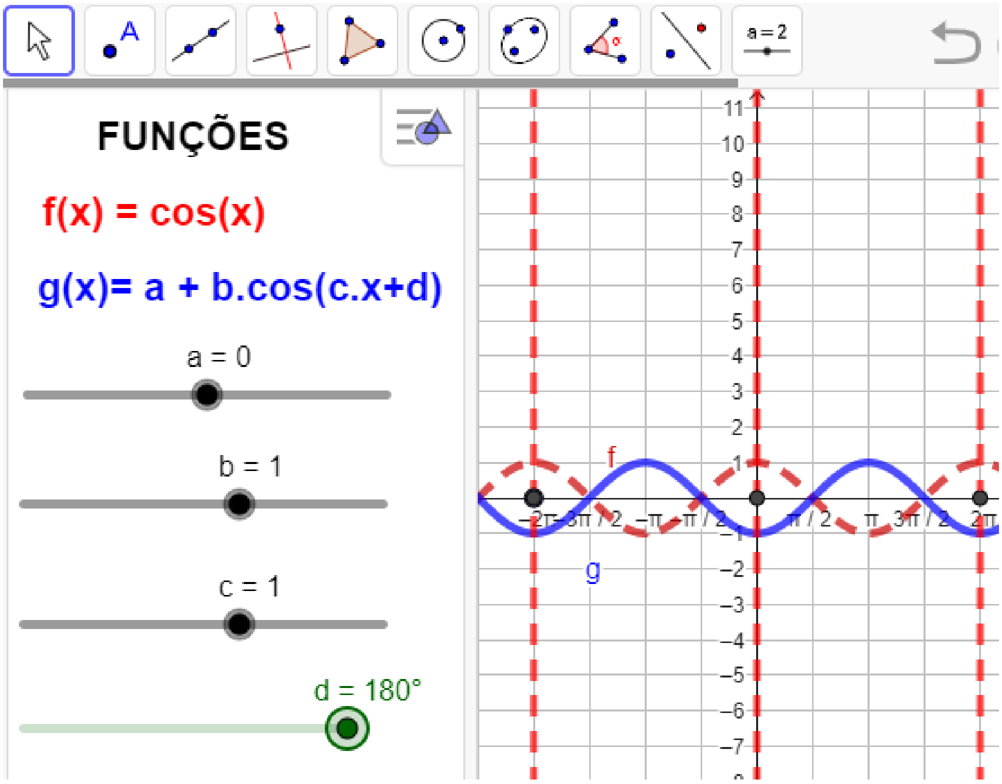
Aluno_______________________________________________________________

Objetivo:

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo aplicar a construção dos gráficos da função cosseno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, visualizando as animações no aplicativo de forma dinâmica.

Abra o aplicativo **https://www.geogebra.org/m/pdzqgkra,** e responda.

Figura - 24- Parâmetros do cosseno,




Fonte: Do próprio autor

**Questões:**

1º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2cos(x)?

2º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=-2cos(x)?

3º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+2 cos(x)?

4º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+3 cos(2x)?

5º) Descreva o que você observa na função cosseno dada por f(x) = a+b.cos(c.x +d), Para b=1, c=1, d=0 , quando você arrasta o controle deslizante ´´a`` de zero até -3?

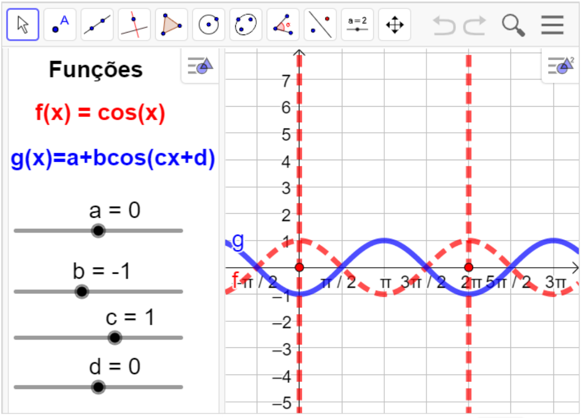
### 5.6.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função cosseno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/classic/w6gdzwwq

2º) Arraste os parâmetros da função ´´g(x)`` para se movimentar.

3º) faça a comparação das funções g(x) e f(x), figura 25.

Figura - 25 - Os Parâmetros da função cosseno,




Fonte: Do próprio autor

Procedimentos para construir o gráfico da função cosseno no aplicativo geogebra.

Essa atividade destina-se à comparação dos gráficos das funções f(x)=cos(x) e g(x)=a+b.cos(c.x+d), utilizando o aplicativo já estruturado no GeoGebra.

Para manusear é necessário arrastar os parâmetros a, b, c, d, constantes, na tela de visualização, e observar as modificações dos gráficos da função g(x) = a+b.cos(c.x+d).

### 5.6.2 Estudo dos parâmetros da função cosseno

Vamos fazer um experimento didático com os parâmetros das funções trigonométricas do tipo f(t)=a+b.cos(c.t+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros.

**Variação do parâmetro a**

Observando as construções de gráficos da função g(x)=a+cos(x) no aplicativo com variações do parâmetro ´´a``, temos como resultado um deslocamento vertical, da seguinte maneira.

No sentido positivo do eixo das ordenadas (para cima), se o valor do parâmetro ´´a`` for positivo, ou seja, a > 0;

No sentido negativo do eixo das ordenadas (para baixo), se o valor do parâmetro ´´a`` for negativo.

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros ´´a``, variando de -1≤ $a$ ≤3, b=1, c=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x) = a+b.cos(c.x+d).

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções, tabela 1.

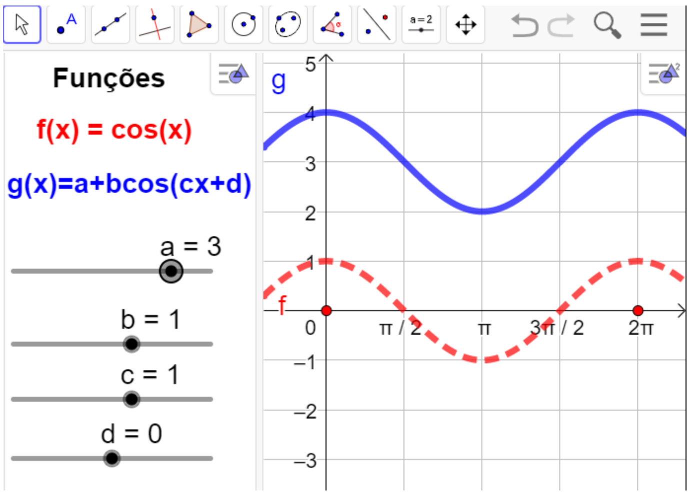
Tabela 1 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =a+cos(x), a∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [-1,1] | 1 | 2π |
| s(x)=1+cos(x) | R | [0,2] | 1 | 2π |
| g(x)=2+cos(x) | R | [1,3] | 1 | 2π |
| h(x)=3+cos(x) | R | [2,4] | 1 | 2π |
| p(x)=-1+cos(x) | R | [0,-2] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor

Visualizando a construção do gráfico da função g(x)=3+cos(x) no aplicativo, tendo como referência a função f(x)=cos(x). Figura - 26.

Figura - 26 - Gráficos, f(x) = $a + cos(x)$




Fonte: Do próprio autor

Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.

**Variação do parâmetro b:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros, variando $-5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.cos(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro ´´b``, chegamos a conclusão que o gráfico tem um deslocamento vertical.

Na tabela 2, apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $bcos(x)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-3 \leq b \leq 3$, b∈Z.

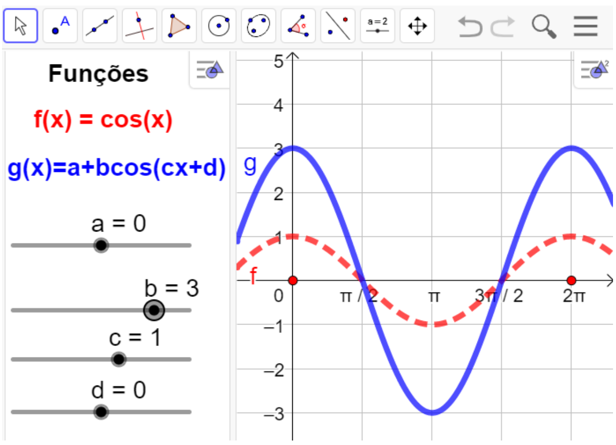
Tabela 2 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bcos(x), b∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x) = cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x) = 2cos(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| h(x) = 3cos(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |
| p(x) = - cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x) = -2cos(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| r(x) = -3cos(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3cos(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 27.

Figura - 27 - h(x) = 3cos(x)




Fonte: Do próprio auto

Observando a construção do gráfico da função h(x)=3.cos(x), temos:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função cosseno. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui até próximo de zero, a amplitude do gráfico também diminui.

chegamos a conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

**Variação do parâmetro c:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -3 até 3, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções f(x) =cos(x), g(x) =cos(2x), h(x) =cos(3x).

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$cos(c.x + d)$, $-3 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos(2x) e h(x) = cos(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos. Tabela 3.

Tabela- 3 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), 1 ≤ c ≤ 3, c $\in Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(2x) | R | [ -1, 1] | 1 | π |
| h(x)=cos(3x) | R | [ -1, 1] | 1 | $\frac{2\pi}{3}$ |

Fonte: Do próprio autor

Observando os gráficos construídos no Geogebra, há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1

Quando aumenta-se o valor de c > 1, o período diminui com relação ao valor inicial. Quando 0 < c < 1, a função tem seu período aumentado

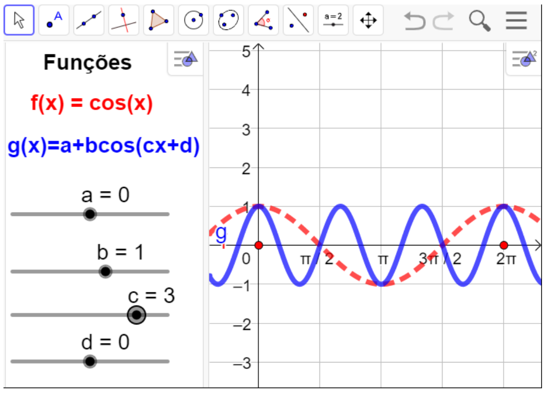
Quando −1 < c < 0, o período diminui

Quando c < -1, o período aumenta.

Conclusão: O parâmetro c altera o período da função cosseno

Construindo o gráficos da função h(x)=cos(3x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 28.

Figura - 28 - h(x) = cos(3x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=cos(3.x) no aplicativo

O gráfico construído no Geogebra, há uma compressão horizontal.

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico h(x)=cos(3.x) tem uma compressão horizontal.

Construindo os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d) no aplicativo Geogebra, haverá um alongamento horizontal se valor do parâmetro ´´c``, estiver entre 0 e 1.

Observando os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), e manipulando os parâmetros a=0, b=1, 0 < c < 1, e d=0, construídos no aplicativo do Geogebra, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos($\frac{1}{2}$x) e h(x)=cos($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $cos(c.x)$, $0 < c < 1$, c∈R, identificando, o domínio, imagem, amplitude e período, tabela 4.

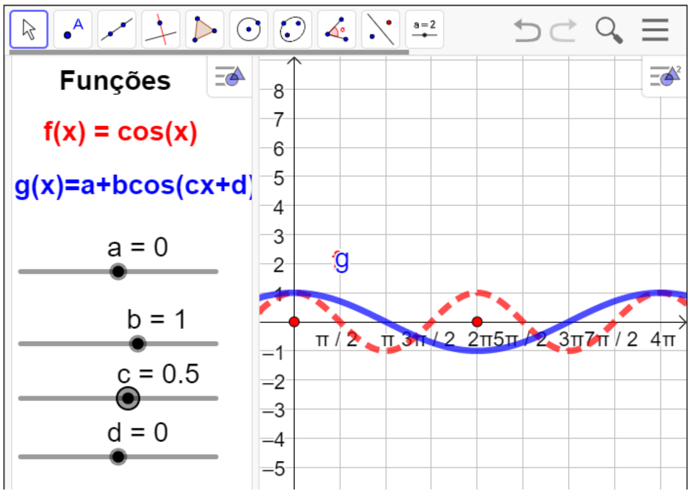
Tabela- 4 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), 0 < c < 1, c $\in R$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos($\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=cos($\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=cos($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 29.

Figura - 29 - Gráficos, f(x) = cos(cx), $0 < c < 1$.




Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=cos($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal

Vamos analisar o parâmetro ´´c``, variando de -1 < c < 0.

Analisando os gráficos da função g(x)=cos(c.x), se o valor do parâmetro ´´c``, estiver entre - 1 e 0, ou seja, -1 < c < 0. Os alunos deverão chegar a conclusão que, haverá um alongamento composto com reflexão em relação ao eixo vertical, Construindo os seguintes gráficos no aplicativo do Geogebra e observando as suas modificações f(x)=cos(cx), isto é, g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$), h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$), em relação a função f(x)= cos(x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos.

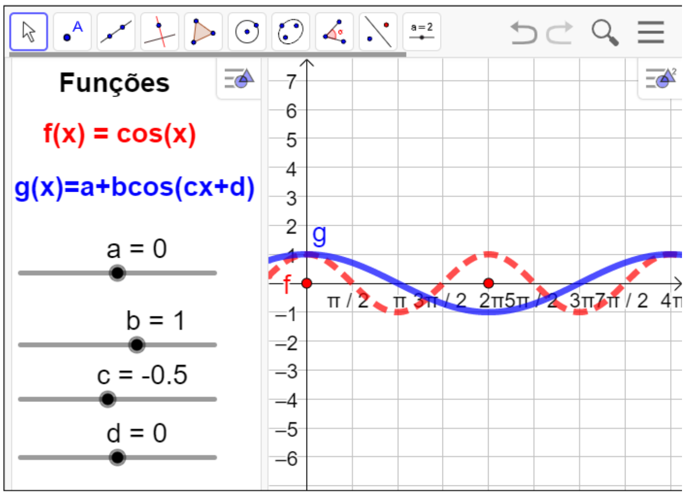
Tabela - 5 - Domínio, imagens, Amplitude e período, f(x)=cos(cx), $-1 < c < 0$.

| Funções | Domínio | Imagens | Amplitudes | Períodos |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 30.

Figura - 30 - Gráficos de g(x)= cos($-\frac{1}{2}$x), -1< c < 0.




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {y$\in R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p = $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{2}|} \rightarrow p = 2\pi.|2| \rightarrow p = 4\pi$
- haverá um alongamento do gráfico, no eixo horizontal.

Observando os gráficos construídos no aplicativo do Geogebra, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1. há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

Construindo os seguintes gráficos g(x)=cos($-2x$), h(x)=cos($-4x$) no aplicativo, e observando as suas modificações, em relação a função f(x)= cos(x), encontraremos domínio, imagem, amplitude e período, tabela 5.

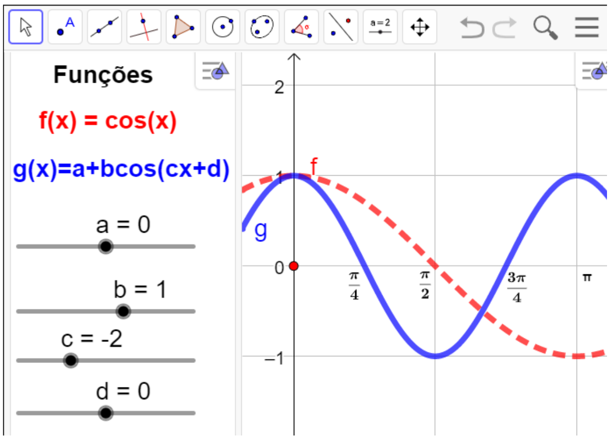
Tabela - 6 - O domínio, imagem, amplitude e período de f(x)=cos(c.x)., c=-2, c=-4.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(-2x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | π |
| h(x)=cos(-4x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | $\frac{\pi}{2}$ |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos($-$ 2x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$-$ 2, a=0, b=1 e d=0, temos figura 31.

Figura - 31 - Gráfico f(x) = cos(cx), c = - 2,




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1

- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{|-2|} \rightarrow p = \pi$
- Na construção do gráfico, há uma compressão horizontal.

**Variação do parâmetro d**

O experimento didático serve para os alunos observarem, o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função, g(x)=a +b.cos(c.$x + d$).

Construídos os gráficos das funções g(x), arrastando os parâmetros $-\pi \leq d \leq \pi$, observe-se que:

O parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

O parâmetro ´´d`` determina uma translação horizontal no sentido positivo do eixo x (para a direita), se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo, ou seja, d < 0.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = a+b.$cos(c.x + d)$, devido às alterações dos parâmetros, isto é, f(x) = cos(x ), g(x) = (x + $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos( x+ π), g(x) = cos(x - $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos(x - π), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos, na tabela 7,

Tabela - 7 - Funções f(x) = a+b.cos(c.x + $d$), a=0, b=1, c=1, $-\pi \leq d \leq \pi$.

| Funções | Domínios | Imagens | Amplitudes | Períodos |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(x+$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=cos(x+π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(x-$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=cos(x-π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

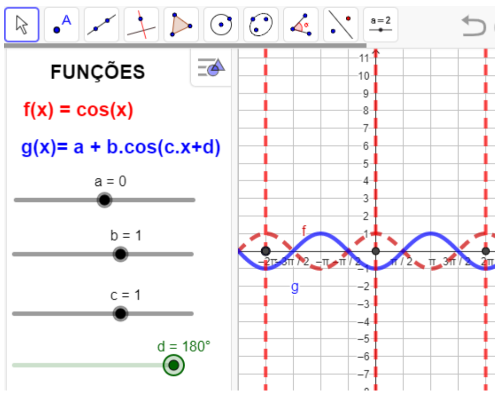
Fonte: do próprio autor

Visualizando os gráficos construídos observe-se que, o parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0. Determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

No experimento didático, vamos construir os gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d), alterando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d variando de -π, até π, no aplicativo do geogebra, para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, em relação a função, f(x)=cos($x$).

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x+π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e d=π, temos a figura 32.

Figura - 32 - Gráfico g(x)=cos(x+π), a=0, b=1, c=1 e d=$180^0$

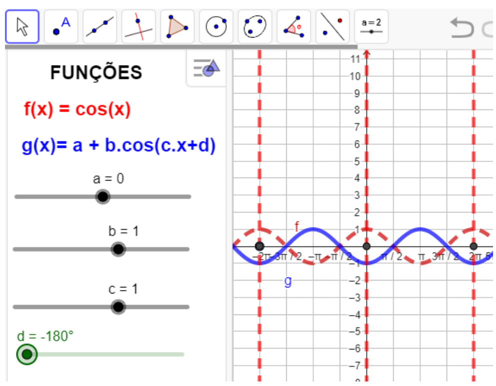



Fonte: Do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), porque d>0.

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x-π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e $d = -$ π, temos figura 33.

Figura - 33 - Gráfico g(x)=cos(x-π), a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 180^0$




Fonte: do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), porque o parâmetro ´´d`` é negativo, isto é, d < 0

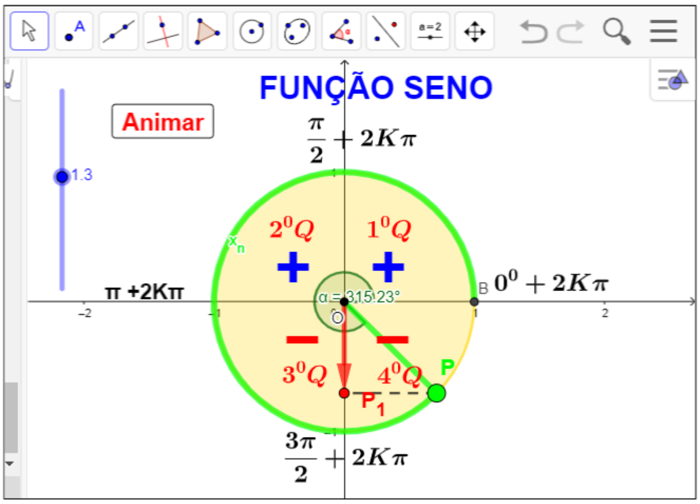
## 5.7 ATIVIDADE - 7 - ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno______________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo compreender os conceitos, definição e propriedades da função seno no ciclo trigonométrico figura 34. Abra o arquivo **https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8** e responda.

Figura - 34 - Função seno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quais quadrantes o seno é positivo ?

2º) Quais quadrantes o seno é negativo ?

3º) Qual o valor da imagem do seno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

4º) Faça uma tabela que contenha os seno dos arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens.

5º) Qual o seno de 20π rad ?

6º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes na circunferência de comprimento $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=sen(6π)?

7º) O ponto $P_n$, deslocando de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá de -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, O seno neste local é ?

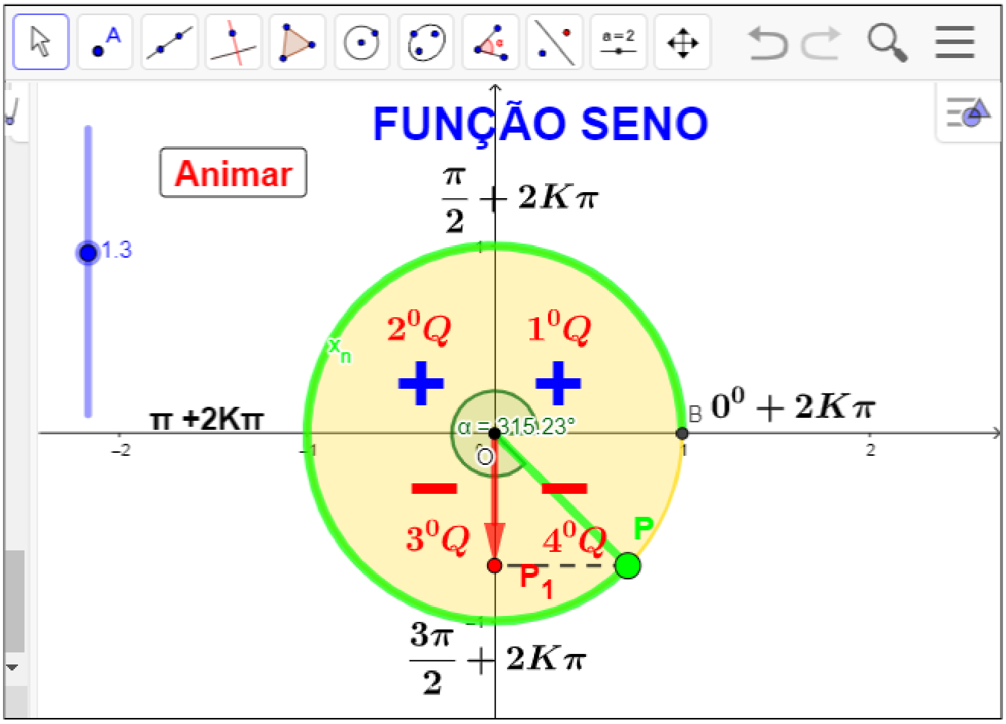
### 5.7.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função seno

De posse do aplicativo https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8, abra aplicativo, clique no botão < Animar > e arraste o controle deslizante.

O ponto P se movimenta no sentido anti-horário, se clicar no botão < Animar > e arrastar o controle deslizante para valores positivos.

Se arrastar o controle deslizante para valores negativos, o ponto P, movimento no sentido horário, figura 35.

Figura - 35 - Função seno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

### 5.7.2 Sugestões para o desenvolvimento do aplicativo

Ao clicar no botão < Animar >, e arrastar o controle deslizante, os alunos serão convidado a observar:

O ponto $P$, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico no sentido anti-horário, então a sua projeção em relação a ordenada, é o ponto $P_1$, então o segmento $\overline{OP_1}$, será a definição da função seno do arco $x_n$, isto é:

$\overline{OP_1}$ = sen($x_n$).

Sobre os seus quadrantes, valores negativos, nulos ou positivos crescentes ou decrescentes.

1. O ponto P, sairá da origem O=(0,0), portanto, neste local o valor do seno do arco $x_n$, que está na origem é zero, isto é: sen($0^0$)= 0.

2. O ponto P irá até o ponto B=(0,1), a sua projeção o ponto $P_1$, terá como medida o raio, (R = 1) ou seja, o seno do arco de medida $\frac{\pi}{2}$ é igual a 1(um), isto é: sen($\frac{\pi}{2}$)= 1, portanto, no primeiro quadrante, a função seno é CRESCENTE.

3. O ponto $P$ , continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \pi$ , a projeção do ponto $P$ , sairá do ponto B=(0,1), e se deslocará até a origem O=(0,0), logo o sen do arco de medida (π) é 0(zero), isto é sen(π)=0. Portanto no segundo quadrante a função seno é decrescente.

4. O ponto P, continuará o percurso no **terceiro** quadrante, a projeção do ponto P em relação a ordenada, se deslocará de zero (origem) até −1, portanto, o seno do arco de medida $\frac{3\pi}{2}$ é -1, isto é: sen($\frac{3\pi}{2}$) = -1, e a função é decrescente.

5. O ponto P, continuará o percurso no **quarto** quadrante, a projeção do ponto P, em relação a ordenada, se deslocará de -1 até a origem, O = (0,0), quando à medida que o arco $x_n$ se desloca de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$, então do seno de um arco de medida 2π, é igual a zero, isto é: sen(2π) $= 0$, e a função é crescente.

Manuseando o aplicativo Geogebra ao clicar no botão < Animar > podemos observar:

- Se o ponto $P$ estever, no primeiro ou segundo quadrantes, a sua projeção será positiva, então o seno nestes quadrante será POSITIVO.
- Quando o ponto P estiver, no terceiro ou quarto quadrante a sua projeção será negativa, o seno nestes quadrantes será NEGATIVO.

A função seno é limitada, ela varia de -1 até 1, isto é: a sua imagem varia de $-1 \leq y \leq 1$.

Se o ponto P girar várias vezes no ciclo trigonométrico que vamos denominar de K, então os números reais $x_n$ e $x_n + 2k\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e, portanto, sen($x_n$)= sen ($x_n + 2k\pi$), k ϵ Z.Assim,a função seno é periódica e seu período é 2π.

5.8 ATIVIDADE -.8 -.ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E NO PLANO CARTESIANO

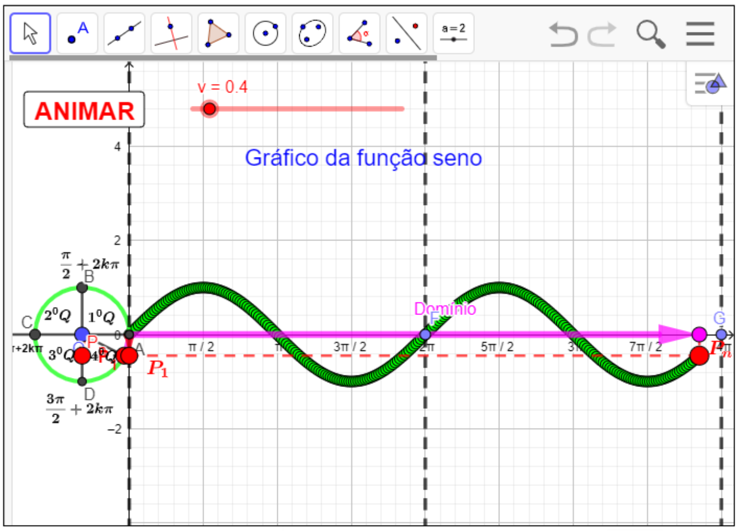
Aluno______________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo entender os conceitos, definição e construção do gráfico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 36.

Abra o arquivo ´´**https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc**`` e responda.

Figura - 36- Gráfico da função seno




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função seno?

2º) A função seno assume valores positiva e negativa no intervalo $0 < x < 4\pi$, quais intervalos no plano cartesiano, correspondente esta situação ?

3º) O valor da expressão $\text{sen}(0^0) + \frac{3}{5}\text{sen}(\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(4\pi)$?

4º) Construa o gráfico e identifique domínio, imagem e o período da seguinte função, $f(x)=\text{sen}(x)$

### 5.8.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para construção do gráfico da função seno.

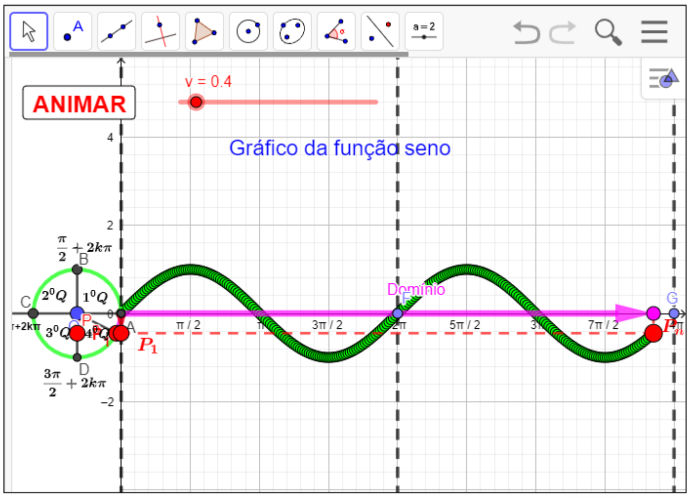
1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação.

O aplicativo visualiza a construção do gráfico da função seno, associado ao ciclo trigonometria, figura 37.

Figura - 37 - Gráfico da função seno




. Fonte: Do próprio autor

Para continuar a nossa experiência, vamos lembrar se algumas propriedades características importante da função f(t) = sen(t),

- A função é **positiva para os ângulos do 1° e 2°** quadrantes(projeções na reta y acima da origem);
- A função é **negativa para os ângulos do 3° e 4°** quadrantes (projeções na reta y abaixo da origem).
- A função seno é **crescente no 1° e 4°** quadrantes;
- A função seno é **decrescente no 2° e 3°** quadrantes
- Domínio é $R$, e a Imagem é o intervalo [−1, 1].
- A função seno é periódica e seu período é $2\pi$, pois t e t + 2k têm a mesma imagem P no ciclo, então, $sen$(t) = sen (t + $2k\pi$).

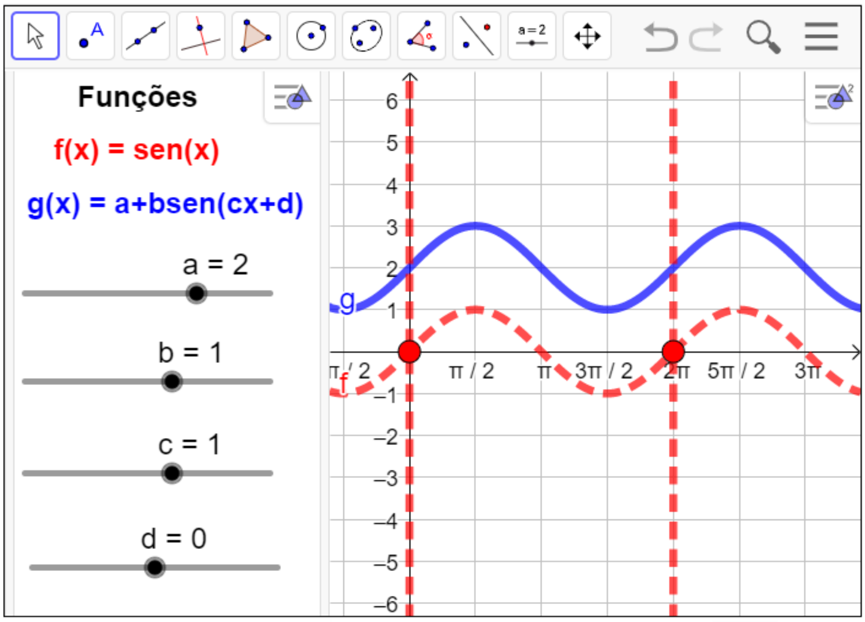
## 5.9 ATIVIDADE - 9 - ESTUDO DOS PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo aplicar a construção dos gráficos da função seno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, e visualizar as animações no aplicativo figura 38.

Abra o arquivo **https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq**, e responda

Figura - 38 - Parâmetro da função g(x) = $a + bsen(cx + d)$




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Construa o gráfico da função f(x) = 2+sen(x), e identifique o domínio, imagens, amplitude e período?

2º) Construa o gráfico da função f(x) = 3sen(x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

3º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(-2x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

4º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

5º) Construa o gráfico da função f(x) = 2 + 3 sen(-2x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

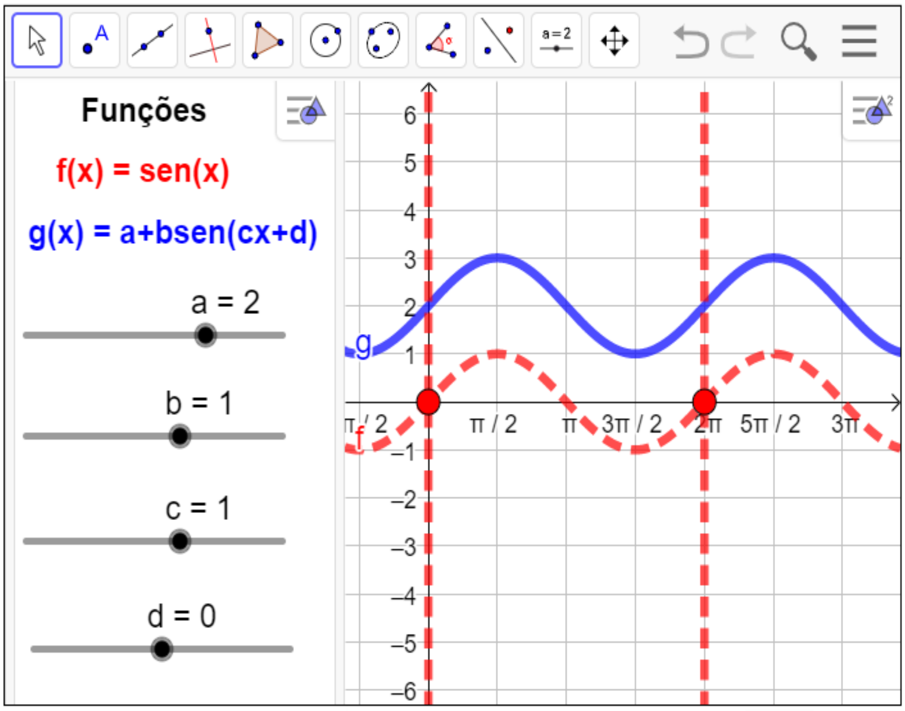
### 5.9.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função seno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq.

2º) Arraste os parâmetros para a função ´´g`` se movimentar.

Vamos fazer um experimento didático com as funções trigonométricas f(x)=sen(x) e g(x)=a+b.sen(c.x+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros, figura 39.

.Figura - 39 - Parâmetros da função seno




Fonte: Do Próprio autor

### 5.9.2 Estudo dos parâmetros da função seno

**Variação do parâmetro a:**

Observando as construções dos gráficos da função f(x)=a+sen(x) no aplicativo do Geogebra, com variações do parâmetro´´a``, chegamos a conclusão que o parâmetro ´´a`` é a soma das ordenada de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, temos como resultado um deslocamento vertical.

Vamos fazer um experimento com a função do tipo g(x)=$a + sen(x)$, a seguir apresentaremos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x)=a+bsen(cx+d), fixando os parâmetros, b=1, c=1, d=0 e $-3 \leq a \leq 3$, b∈Z, isto é, f(x)=sen(x), t(x)=1+sen(x), h(x)=2+sen(x), r(x)=3+sen(x), s(x)=-1+sen(x), p(x)=-2+sen(x), q(x)=-2+sen(x), para análise do domínio, imagem, amplitude, período das funções, tabela 8.

Tabela - 8 - f(x) = $a$ + sen(x), com -3 ≤ a ≤ 3, a ∈ Z.

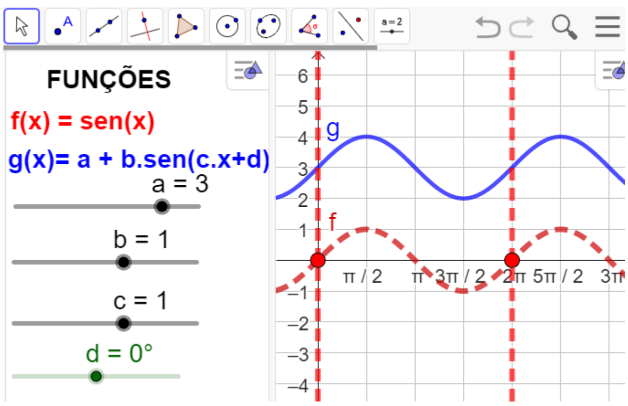
| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| t(x)=1+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=2+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| r(x)=3+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| s(x)=-1+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| p(x)=-2+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x)=-3+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor

Observa-se que não houve variação no domínio, imagens, amplitude e período das funções. Houve um deslocamento dos gráficos para cima ou para baixo.

Construindo o gráfico da função g(x)=3+sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=3, b=1 e d=0, para analisar do parâmetro ´´a`` da função, f(x) = $3 + sen(x)$figura 40.

Figura - 40 - Gráfico da função f(x)=3+sen(x).




Fonte: Do próprio autor

- Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.
- Imagem da função, Im(g)={y$\epsilon R/2 \leq y \leq 4$}.
- Domínio são os números reais.
- Período é 2π.

**Variação do parâmetro b:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, manipulando os parâmetros, $-\ 5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.sen(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.sen(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro ´´b", chega-se à conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

Na tabela, a seguir apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+ $bsen(cx\ +\ d)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-\ 3 \leq b \leq 3$, b∈Z, a=0, c=1 e d=0, tabela 9.

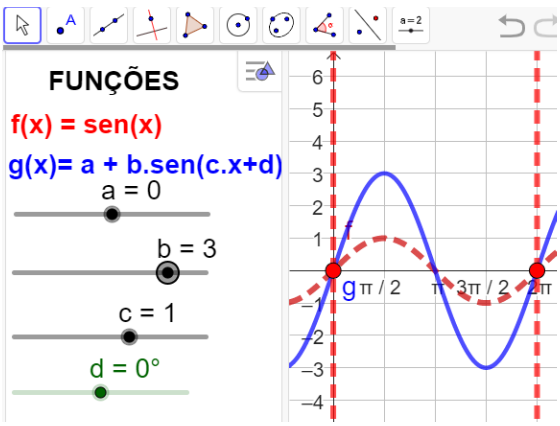
Tabela 9 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bsen(x), b∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x) = sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x) = 2sen(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| h(x) = 3sen(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |
| p(x) = - sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x) = -2sen(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| r(x) = -3sen(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 41.

Figura - 41 - Gráfico h(x)=3sen(x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=3.sen(x), temos:

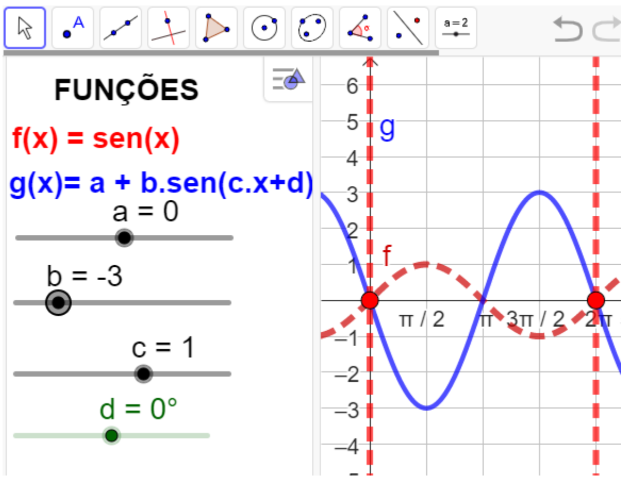
- Domínio da função seno, são todos os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

Modificando o parâmetro b, neste caso, além da imagem ser alterada, a amplitude do gráfico também muda.

A função seno tem sua flutuação quando b > 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser crescente, decrescente, decrescente e crescente.

Construindo o gráficos da função r(x)=-3 sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros $b\ =-\ 3$, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 42

Figura - 42 - Gráfico da função r(x)=-3sen(x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função r(x)= -3.sen(x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

A função seno tem sua flutuação invertida quando b < 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

**Variação do parâmetro c:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -5 até 5, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x)=a+b.sen(c.x+d), e comparar com a função f(x)=sen(x)

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

Vamos fazer um experimento didático no Geogebra, para analisar o parâmetro ´´c`` das funções f(x) = $sen(cx)$, onde, $-5 \leq c \leq 5$, c $\epsilon$ $Z$.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, $1 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=sen(x), g(x)=sen(2x) e h(x) = sen(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos para c > 0, tabela 10.

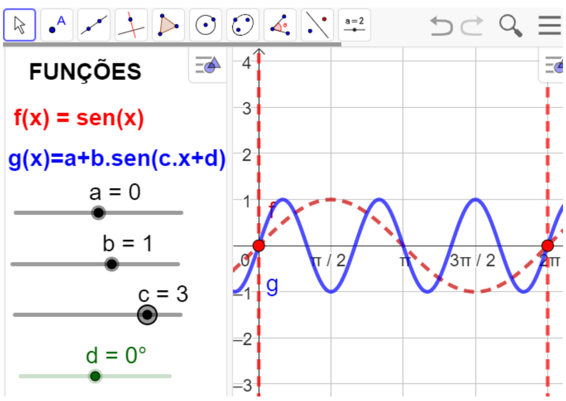
Tabela-10- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), 1 ≤ c ≤ 3, c ∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=sen(x) | R | [ -1, 1] | 1 | 2π |
| g(x)=sen(2x) | R | [ -1, 1] | 1 | π |
| h(x)=sen(3x) | R | [ -1, 1] | 1 | $\frac{2\pi}{3}$ |

Fonte: Do próprio autor

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c = 3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 43.

Figura - 43 - Gráfico da função h(x)=sen(3x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=sen(3x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

A construção do gráfico h(x)=sen(3x), houve uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d), -3 \leq c \leq -1,$ c∈Z, isto é, vamos construir uma tabela para analisarmos o domínio, imagem, amplitude, período das funções f(x)=sen(x), g(x)= sen(-x), h(x)=sen(-2x), p(x)=sen(-3x).

Tabela -11 - função f(x) = sen(c.x), com -3 < c < -1.

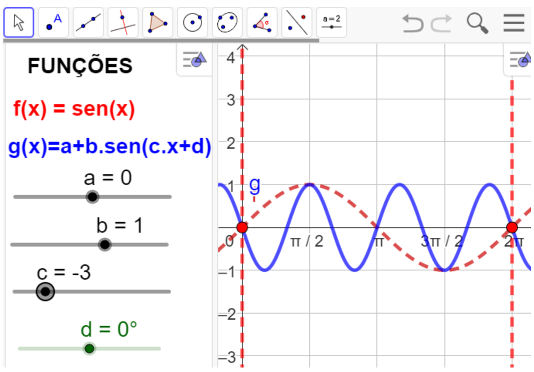
| Função | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| g(x)= sen(-x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=sen(-2x), | R | [ -1, 1 ] | 1 | π |
| p(x)=sen(-3x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | $\frac{3\pi}{2}$ |

Fonte: Do próprio autor

Observando na tabela que consta a função seno, variando o parâmetro ´´c``, chega-se à conclusão que há variação do período.

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(-3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c = -3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 44.

Figura - 44 - Gráfico da função p(x)=sen(-3x)




Fonte: Do próprio autor

A função p(x)=sen(-3x), tem sua flutuação invertida quanto ao gráfico da função h(x)=sen(3x), ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

Construindo os gráficos g(x)=a+b.sen(c.x+d), arrastando os parâmetros $0 < c < 1$, a=0, b=1, d=0. no Geogebra, haverá um alongamento horizontal.

Observando os gráficos construídos no Geogebra, na tela de visualização, isto é, g(x)=sen($\frac{1}{2}$x) e h(x)=sen($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos, identificando, o seu domínio, imagem, amplitude e período, tabela 12.

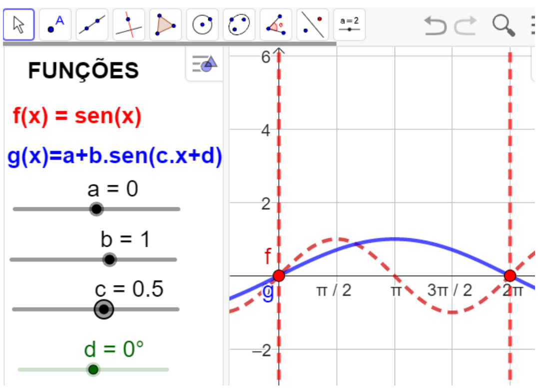
Tabela-12- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), 0 < c < 1, c $\in R$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| g(x)=sen($\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=sen($\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=sen($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 45.

Figura - 45 - Gráfico g(x)=sen($\frac{1}{2}x$)



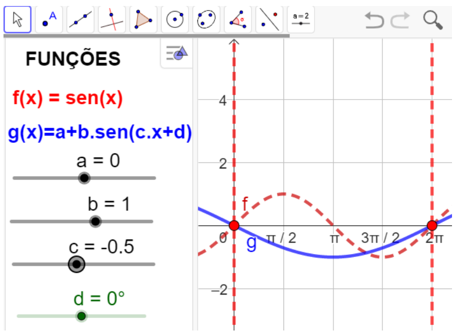

Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Chega-se à conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=sen($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, figura 46.

Figura - 46 - Gráfico g(x)=sen(-$\frac{1}{2}x$)




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de ajustados os parâmetros no aplicativo, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Os alunos chegaram à conclusão de que o gráfico da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}x$), haverá um alongamento no eixo horizontal.

**Variação do parâmetro d:** `.

Este experimento didático é para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função g(x)=a+b.sen(c.x+d),em relação à função, f(x)=sen(x), sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq \pi$.

Depois de construídos os gráficos no aplicativo Geogebra, os participantes serão convidados a analisar o parâmetro ``d`.

A seguir, temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq 0$.

Vamos construir, os gráficos das funções g(x)= sen(x-$\frac{\pi}{2}$), h(x)=sen(x-π). para analisarmos o domínio, imagem, amplitude e período, para d < 0, tabela 13.

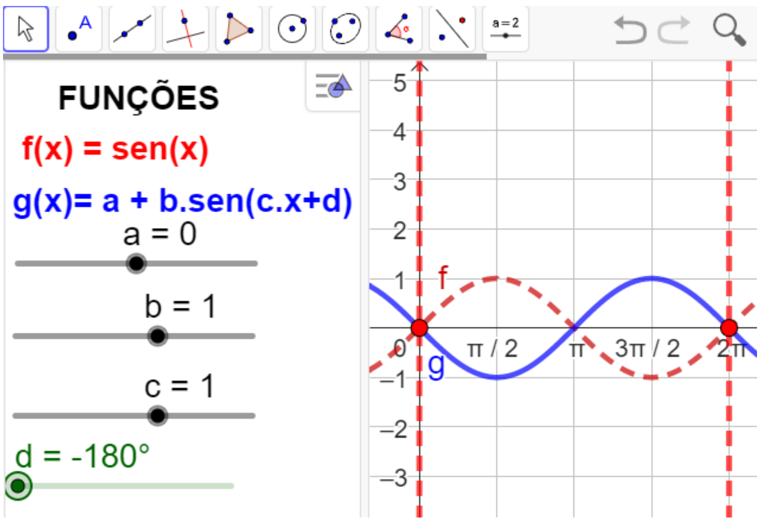
Tabela -13 - Domínio, imagens, amplitude e período, g(x) = sen(x - d), $-\pi \leq d \leq 0$.

| Função | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| p(x)=sen(x-$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=sen(x-π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x-π) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=− π, temos como imagem a figura 47.

Figura - 47 - Gráfico da função, h(x)=sen(x-π)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

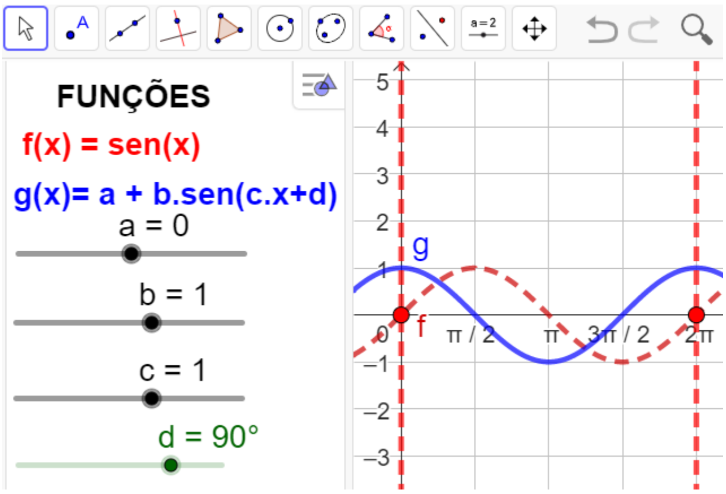
- A imagem da função será Im = {y∊$R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x - \pi$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a direita), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser negativo, ou seja, d < 0.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x+$90^0$) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=$90^0$, temos como imagem a figura 48.

Figura - 48 - Gráfico da função, h(x)=sen(x+$90^0$)




Fonte: do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x + 90^0$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser positivo, ou seja, d > 0.

Visualizando os gráficos construídos no Geogebra, chega -se à conclusão que o parâmetro ´´d``. determina uma translação horizontal no gráfico das funções trigonométricas seno, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), ou (para a direita) se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo.

## 5.10 ATIVIDADE - 10 - ENTENDENDO A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

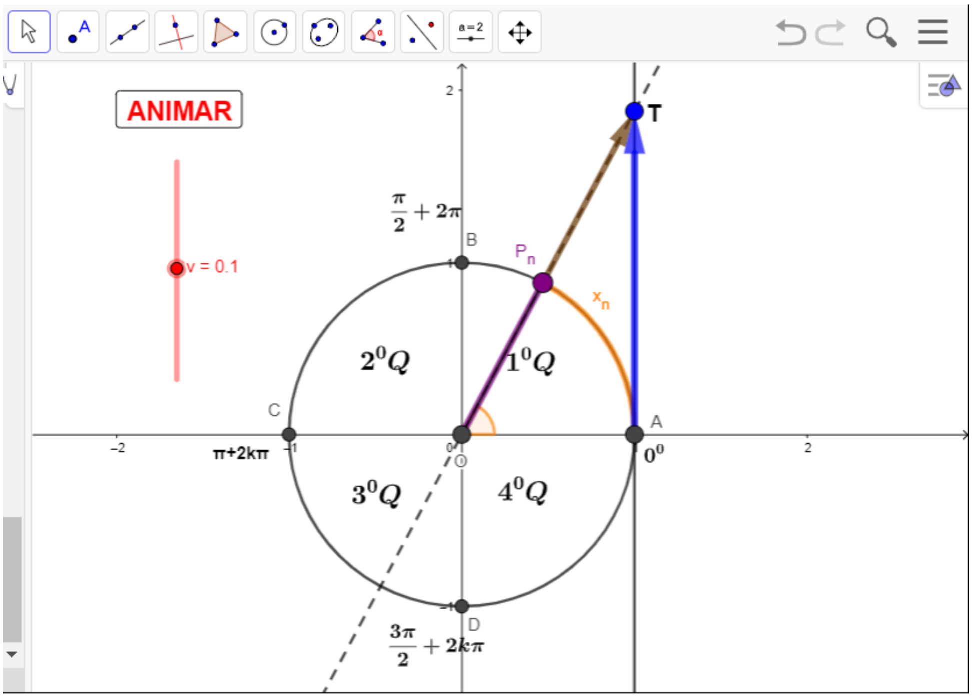
Aluno________________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo compreender a função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições no ciclo trigonométrico, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 49.

Abra o arquivo **https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc**, e responda.

Figura - 49 - Função tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quanto vale a tangente de $\pi + 2k\pi$ ?

2º) Em quais quadrantes a tangente é positiva ?

3º) Em quais quadrantes a tangente é negativa ?

4º) Quanto vale a tangente de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ?

5º) Determine o domínio da função f(x) = tg(x)?

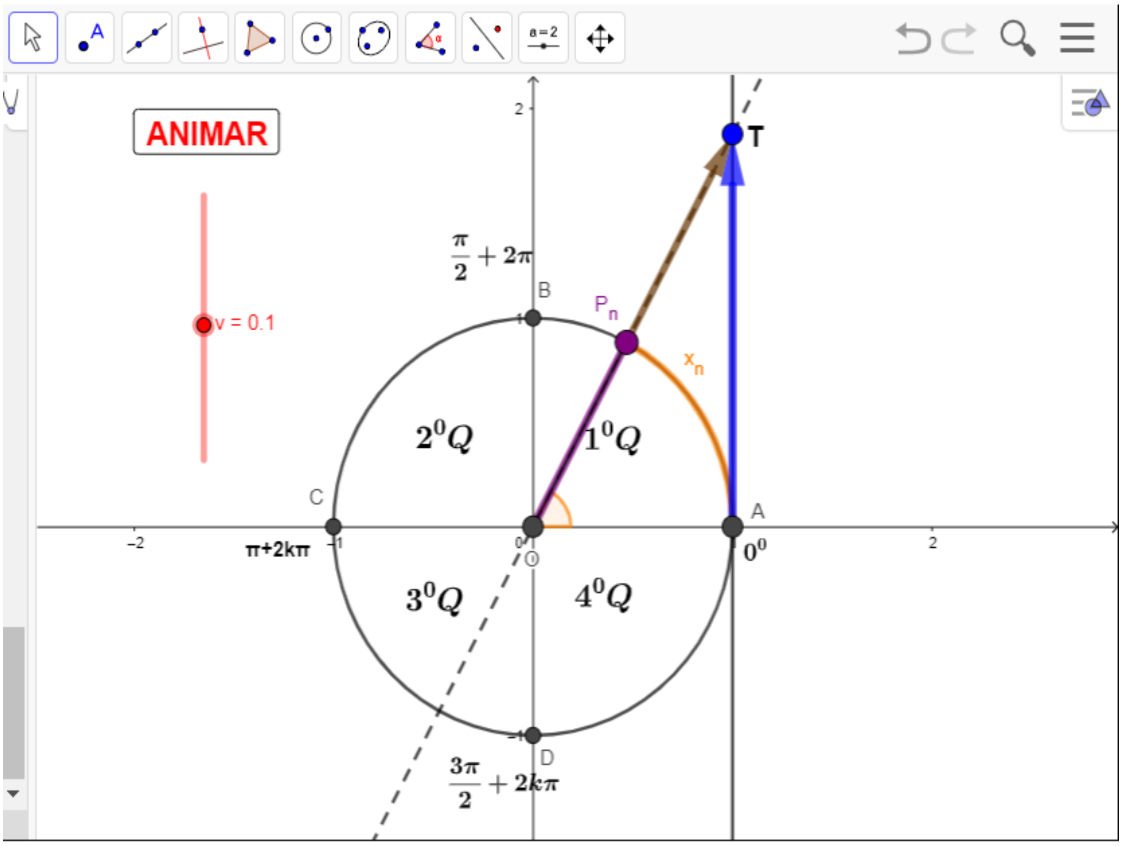
6º) Determine o período da função f(x) = tg(x) ?

7º) Determine a imagem da função f(x) = tg(x) ?

### 5.10.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função tangente.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 50.

Figura - 50 - Função tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade e a direção da animação.

- Se v > 0, o ponto $P_n$, se desloca na circunferência, no sentido anti-horário.
- Se v < 0, o ponto $P_n$, se desloca na circunferência no sentido horário.
- Para obter a tangente de um arco, devemos observar um terceiro eixo que tangencia a circunferência no ponto A=(1,0).
- O ponto $P_n$ e a reta que passa pela origem da circunferência O=(0,0), e que intercepta a reta perpendicular ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo y, que passa pelo ponto A=(1,0) no eixo das abcissas.

- Ao unirmos a extremidade do arco $x_n$, (ponto $P_n$), ao centro O=(0,0) e prolongando o raio da circunferência, ele intercepta o eixo das tangentes no ponto T.

**Definição da função tangente**

A tangente de $x_n$, é a medida do segmento $\overline{AT}$, obtido pela interseção do prolongamento do raio $\widehat{OP_n}$, com o eixo das tangentes.

**Propriedades da função tangente**

1. Para $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ o valor da tangente de $x_n$ cresce à medida que $P_n$se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente.
2. Para $\frac{\pi}{2} < x_n < \pi$, a tangente de $x_n$, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de $x_n$, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
3. Para $x_n = \pi$, a tangente está na origem do eixo da tangente, então tg$(\pi) = 0$.
4. Para $\pi < x_n < \frac{3\pi}{2}$ o valor da tangente de $x_n$ cresce à medida que $P_n$se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente
5. Para $x_n = \frac{3\pi}{2}$ , a tangente não existe, porque a reta que passa pelo centro não intercepta o eixo da tangente.
6. Para $\frac{3\pi}{2} < x_n < 2\pi$, a tangente de $x_n$, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de $x_n$, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
7. A tangente é positiva no $1^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.
8. A tangente é negativa no $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.

**5.10.2 Conjunto imagem da função tangente**

9. O conjunto imagem da função tangente é Im = ] -∞, ∞[ , ou seja o conjunto dos números reais.

**5.10.3 Domínio da função tangente**

10. O domínio da função tangente é D = $\{x_n \in R / x_n \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$

**5.10.4 Período da função tangente**

11. A função tangente se repete a cada intervalo de π, então o período é p = π.

## 5.11 ATIVIDADE - 11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

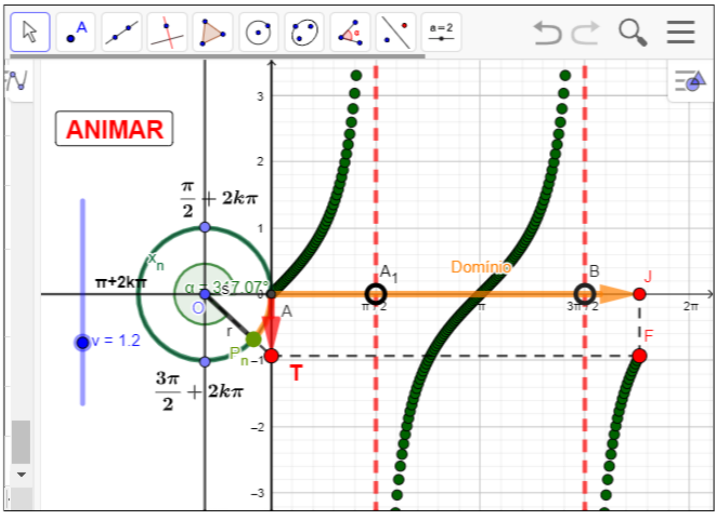
Aluno________________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo, construir os gráficos da função tangente no plano cartesiano, a partir do círculo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 51.

Abra o arquivo ´´**https://www.geogebra.org/m/epppy3xh**`` e responda.

Figura - 51 - Gráfico da função tangente.




**Fonte: Do próprio autor**

Questões:

1º) Qual a imagem da função tangente?

2º) Durante a análise de uma função, Kárita encontrou uma função trigonométrica, e ficou em dúvida entre as funções f(x) = sen(x); f(x) = cos(x); e f(x) = tg(x).

I → A função possui imagem [-∞, ∞].

II → A função é trigonométrica possui período igual a π.

III → O valor numérico da função f(π/2) = não existe

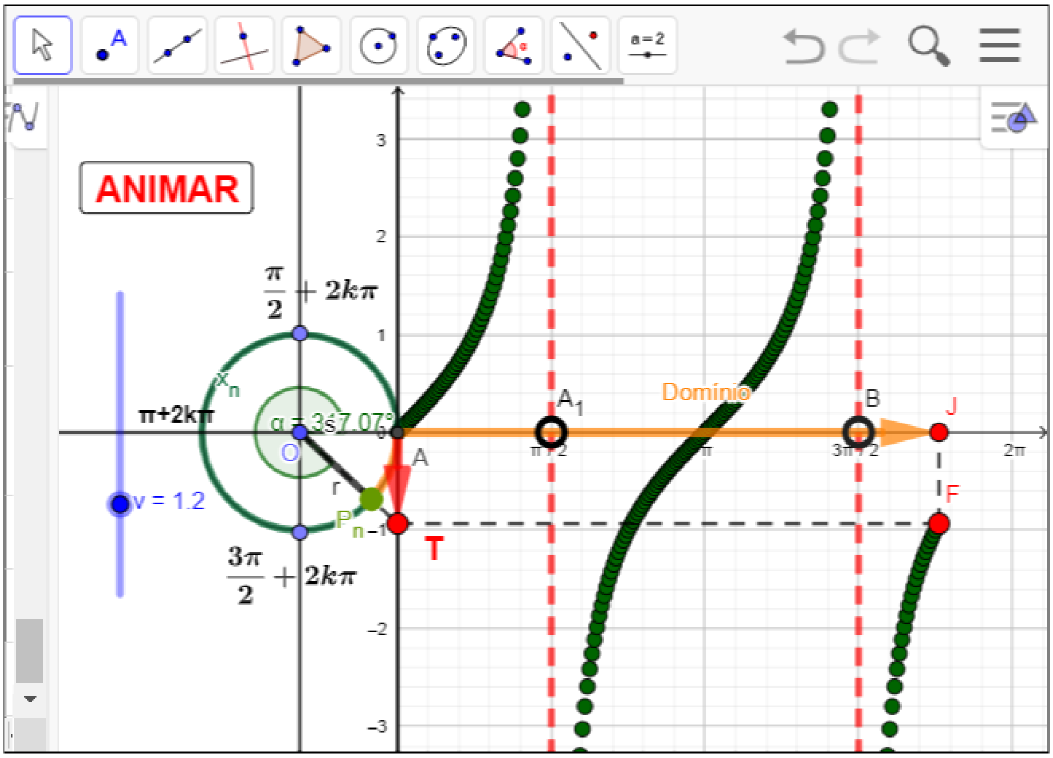
A função descrita por ela é:

3º) Construa o gráfico e identifique o domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x) = tg(x).

### 5.11.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da construção do gráfico da função tangente.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/epppy3xh e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 52.

Figura - 52 - Gráfico da função tangente.




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação no sentido anti-horário.

### 5.11.2 Definição da tangente utilizando o ciclo trigonométrico.

Ao clicar nos botões < Animar > e < v>, os alunos serão convidado a observar

A movimentação do ponto $P_n$ no sentido anti-horário, existe uma reta passando pela origem do ciclo trigonometria O=(0,0), e o ponto $P_n$, interceptando no ponto T, na reta tangente ao círculo trigonométrico, no ponto A=(1,0). A medida do segmento $\overline{AT}$, será a tangente do ponto $P_n$ na circunferência trigonométrica.

Transposição da tangente do ciclo trigonometria, para o plano cartesiano.

A medida do segmento $\overline{AT}$, na circunferência trigonométrica, é a tangente do ponto $P_n$, que passa a ser a imagem da função tangente, situada no eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Usando as informações que já tínhamos sobre a tangente na circunferência trigonométrica, e lembrando que no ponto A(1,0), é a origem da tangente no ciclo trigonométrico. Vamos dar uma volta completa no ciclo e relacionar com o plano cartesiano.

### 5.11.3 Construção do gráfico da função tangente no primeiro quadrante

A medida que o ponto $P_n$, se desloca no primeiro quadrante de $0^0$ para $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, o comprimento do arco $x_n$ no ciclo trigonométrico, corresponde ao domínio no plano cartesiano, observa-se que a tangente do ponto $P_n$ cresce, esse valor fica ainda maior, quanto mais o domínio se aproxima de $\frac{\pi}{2}$. Dizemos, nesse caso, que o valor da tangente de $x_n$, tende a mais infinito (+∞), ou seja, aumenta indefinidamente.

Visualizando a manipulação do aplicativo do gráfico da função tangente, às retas onde a função não existe são chamadas de assíntotas. Ou seja, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ são assíntotas.

### 5.11.4 Domínio da função tangente

Logo o domínio da função tangente será todos os valores reais retirando os valores das assíntotas, isto é, D={x$\epsilon R / x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ com\ k \epsilon Z$}.

### 5.11.5 Período da função tangente de $x_n$.

É bom ressaltar que o gráfico nunca toca nas retas das assíntotas, no entanto, a função tangente se repete a cada intervalo π, logo a função tangente, f(x) = tg(x) também é periódica de período π.

### 5.11.6 Propriedade

A função tangente assume valores positivos no 1º e 3º quadrantes, e valores negativos no 2º e 4º quadrantes, e visualizando o gráfico da função tangente, que é crescente em todos os quadrantes.

A função tangente é crescente em todos os quadrantes.

## 5.12 ATIVIDADE - 12 - ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO TANGENTE

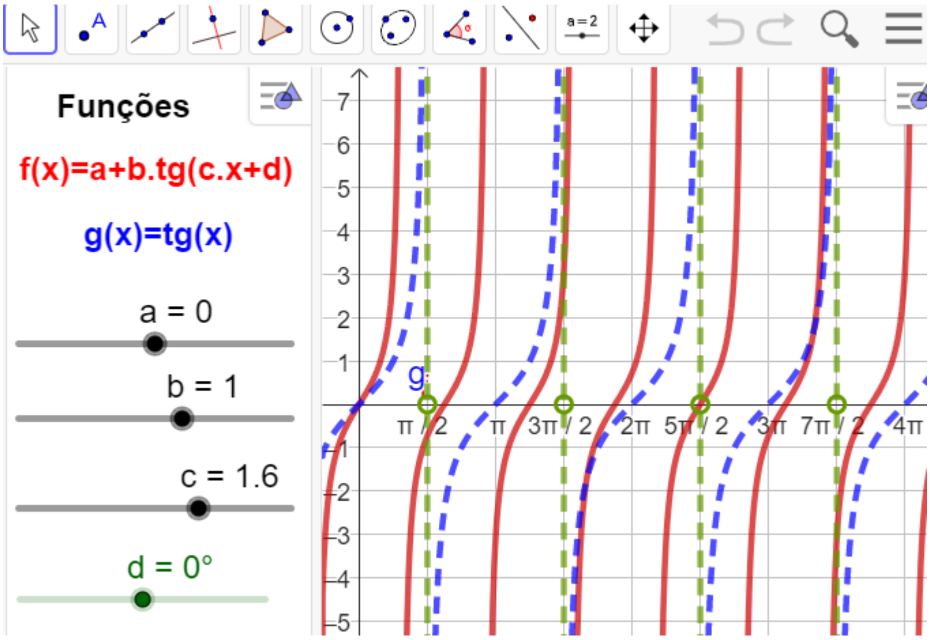
Aluno_______________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo aplicar a construção do gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno as construções dos gráficos, identificar domínio, imagem, período no plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

Abra o arquivo **https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy** e responda

Figura - 53 - Parâmetros da função, f(x) = a + b.tg(c.x+d).




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) O que acontece se o valor do parâmetro a > 0, b=1, c=1 e d=0 ?

2º) O que acontece se o valor de a=0, b < 0, c=1 e d=0 ?

3º) O que acontece quando o valor de a=0, b=1, c = $-4$ e d=0 ?

4º) que acontece quando o valor de a=0, b=1, c=1 e d = $-\frac{\pi}{2}$ ?

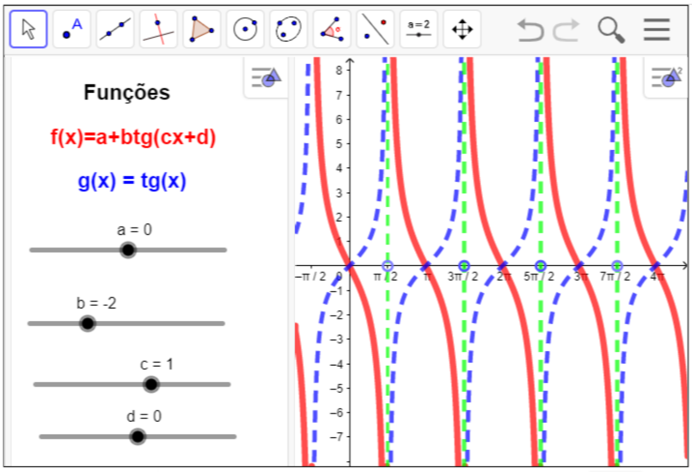
5º) Descreva o que você observa na função f(x) = a +b.tg(c.x), quando a = 0, b=1 e c=0 e d=0.

6º) Descreva o que você observa na função f(x)=a + b tg(x), quando a = 0, c=1, d=0 e quando o controle deslizante ´´b``, desliza de 0 até 5 ?

**5.12.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função tangente.**

1º) Abra o arquivo(https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy) e execute o mesmo no Geogebra, e arraste os controles deslizantes (a, b, c, d), para observar as alterações do gráfico, figura 54.

Figura - 54 - Parâmetros da função tangentes f(x) = a + b.tg(cx + d).




Fonte: Do próprio autor

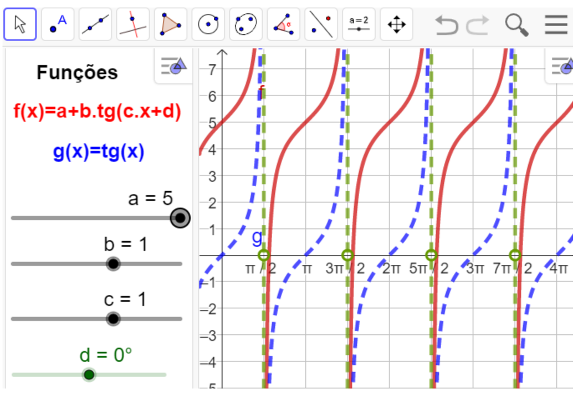
Ao abrir o aplicativo aparece no lado esquerdo os controles deslizantes com as letras a, b, c, e d, que são chamadas de parâmetros ou coeficientes, que arrastados provocará alterações no gráfico, da seguinte maneira.

**Parâmetro ´´a``** , responsável por um deslocamento vertical no gráfico

- Se arrastar o parâmetro, a > 0, teremos um deslocamento vertical para cima

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=5, b=1, c=1 e d=0, figura 55.

Figura - 55 - gráfico f(x)=5+tg(x)




Fonte: Do próprio autor

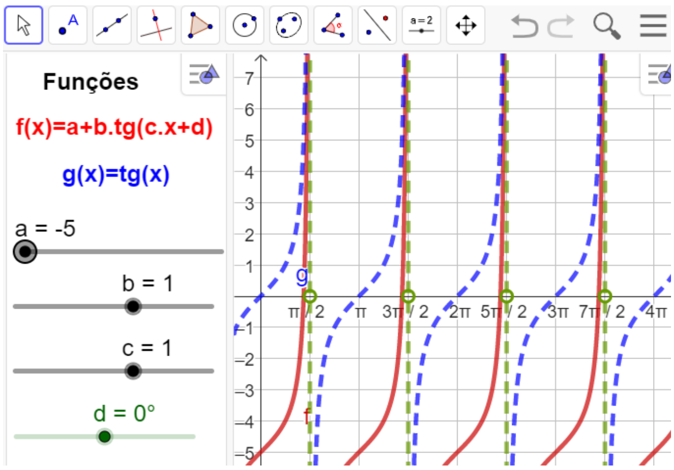
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - $\infty \leq$ y $\leq < \infty$}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg($x$), haverá um alongamento no eixo vertical, para cima.

Se arrastar o parâmetro a < 0, teremos um deslocamento vertical para baixo

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=-5, b=1, c=1 e d=0, figura 56.

Figura - 56 - Gráfico f(x) =-5+tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

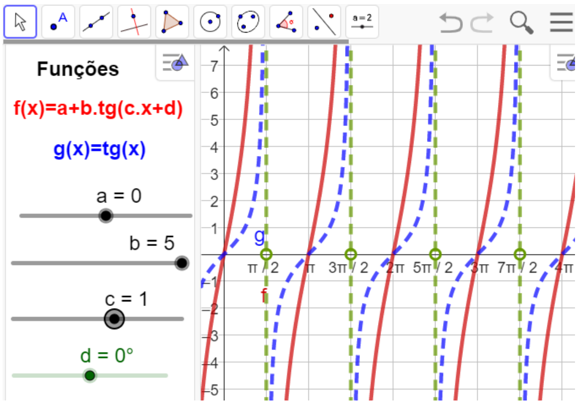
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - $\infty \leq$ y $\leq < \infty$}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg($x$), haverá um alongamento no eixo vertical, para baixo.

**Parâmetro ´´b``**, responsável pela variação da inclinação do gráfico em crescente ou decrescente.

- Se arrastar o parâmetro b > 1, o gráfico será esticado e crescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=5, c=1 e d=0, figura 57.

Figura - 57 - Gráfico f(x)=5 tg(x)




Fonte: Do próprio autor

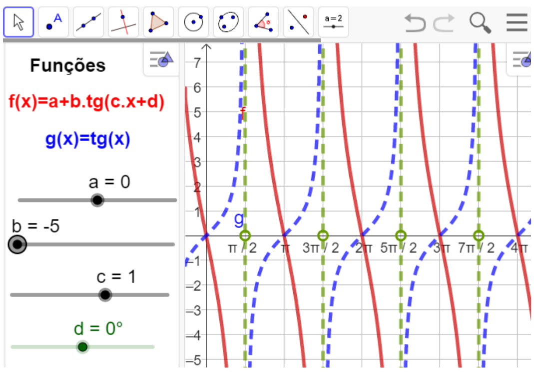
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5tg($x$), haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será crescente.

Se arrastar o parâmetro b < -1, o gráfico será esticado e decrescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-5, c=1 e d=0, figura 58.

Figura - 58 - Gráfico f(x)=-5 tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando

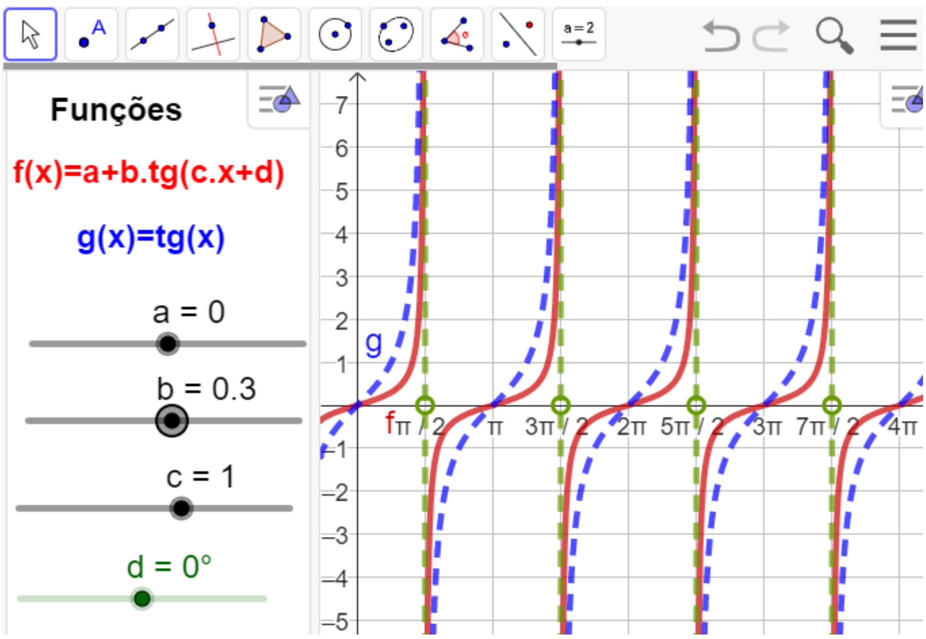
as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=-5tg($x$), haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será decrescente.

  Se arrastar o parâmetro 0 < b <1, o gráfico será comprimido e crescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=0.3, c=1 e d=0, figura 59.

Figura - 59 - Gráfico f(x)=0.3tg(x)




Fonte: Do próprio autor

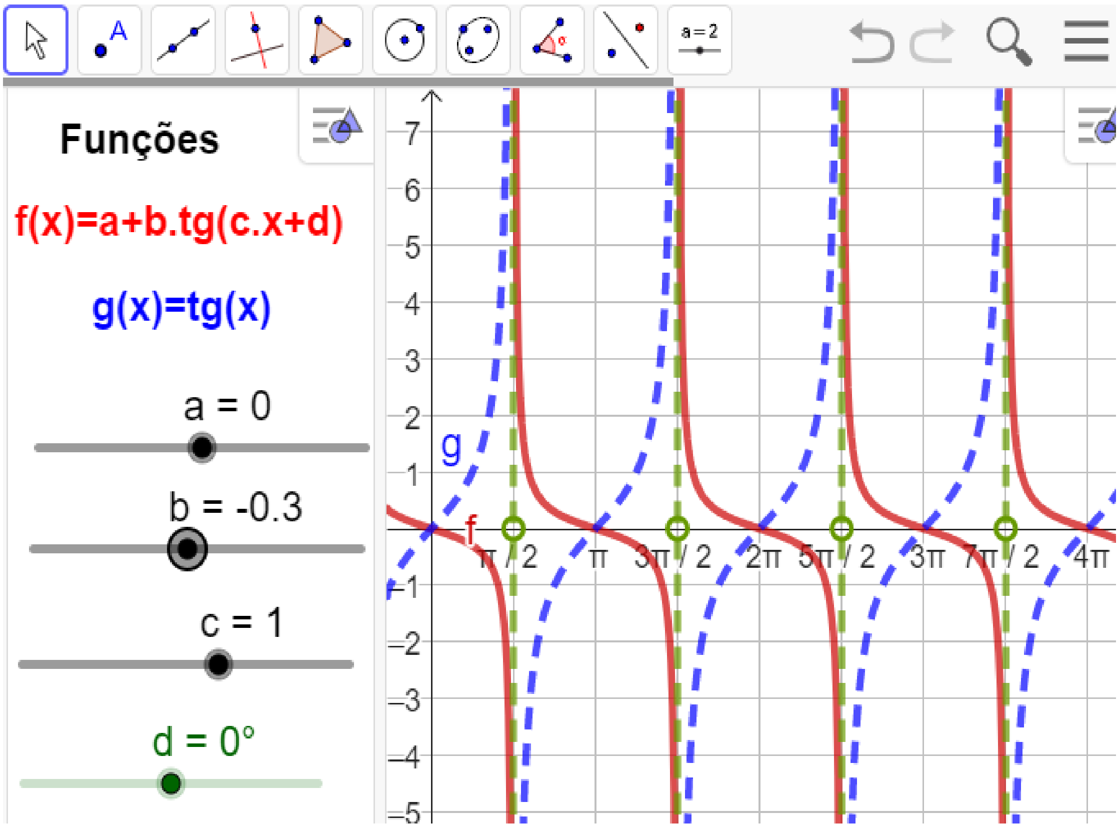
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=0.3tg($x$), o gráfico será comprimido e crescente.

  Se arrastar o parâmetro -1 < b <0, o gráfico será comprimido e decrescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-0.3, c=1 e d=0, figura 60.

Figura - 60 - Gráfico f(x)= - 0.3tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

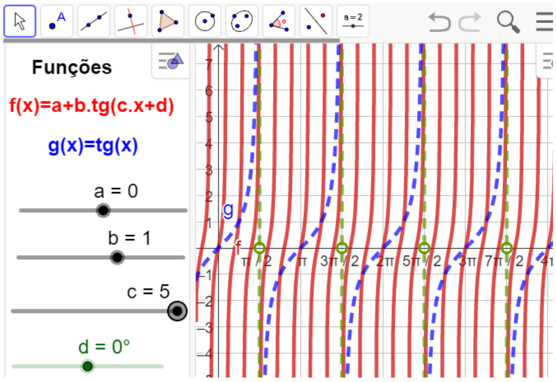
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- A construção da tangentóide da função g(x)=-0.3tg$(x)$, o gráfico será comprimido e decrescente.

**Parâmetro ´´c``**, modifica o período da função. Esse novo período pode ser calculado por: P = $\frac{\pi}{|c|}$.

Se arrastar o parâmetro $c > 1$, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=5 e d=0, figura 61.

Figura - 61 - Gráfico f(x)=tg(5x)




Fonte: Do próprio autor

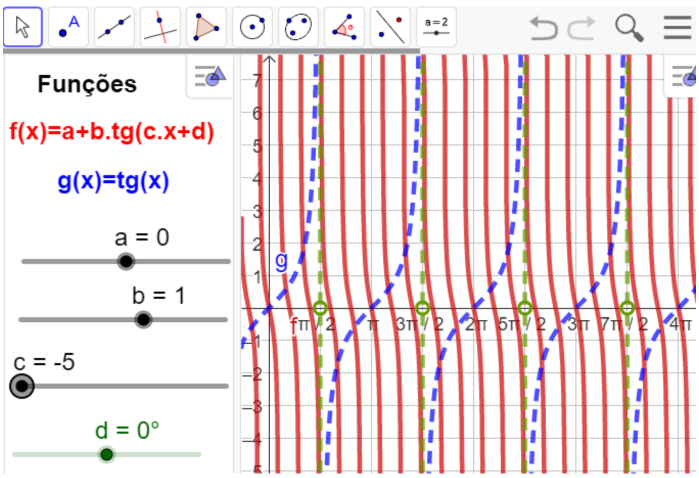
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - $\infty \leq$ y $\leq < \infty$}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg$(5x)$, o gráfico será comprimido horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro c < - 1, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(-5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-5 e d=0, temos a figura 62.

Figura - 62 - Gráfico f(x)=tg(-5x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando

as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

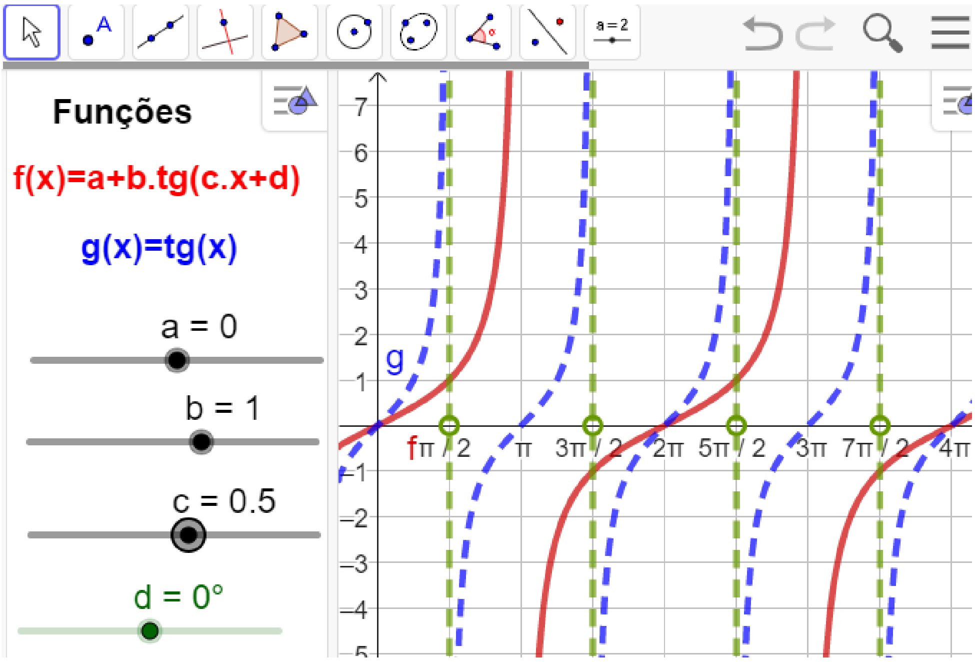
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($-\ 5x$), o gráfico será comprimido horizontalmente e decrescente.

  Se arrastar o parâmetro 0 < c < 1, então o período da função aumenta.

  Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($\frac{1}{2}$x) no aplicativo

geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 63.

Figura - 63 - Gráfico f(x)=tg($\frac{1}{2}$x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

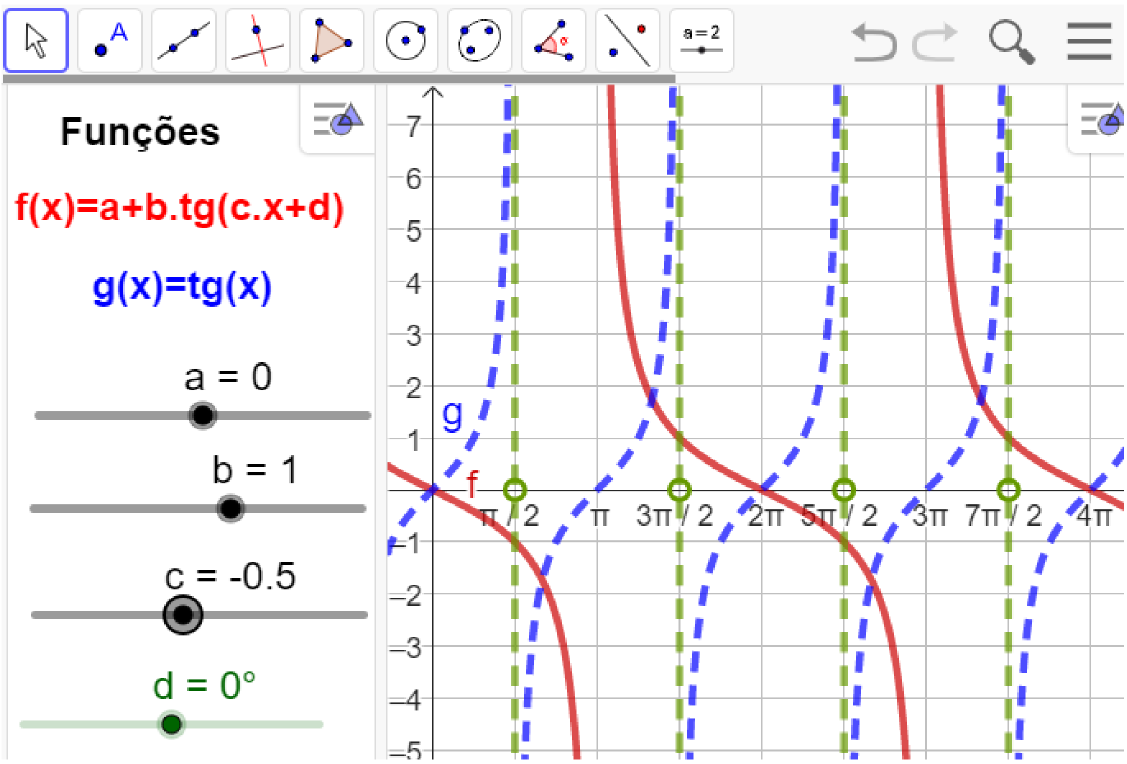
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado

horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro -1 < c < 0, então o período da função aumenta.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 64.

Figura - 64 - Gráfico f(x)=tg(-0.5x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

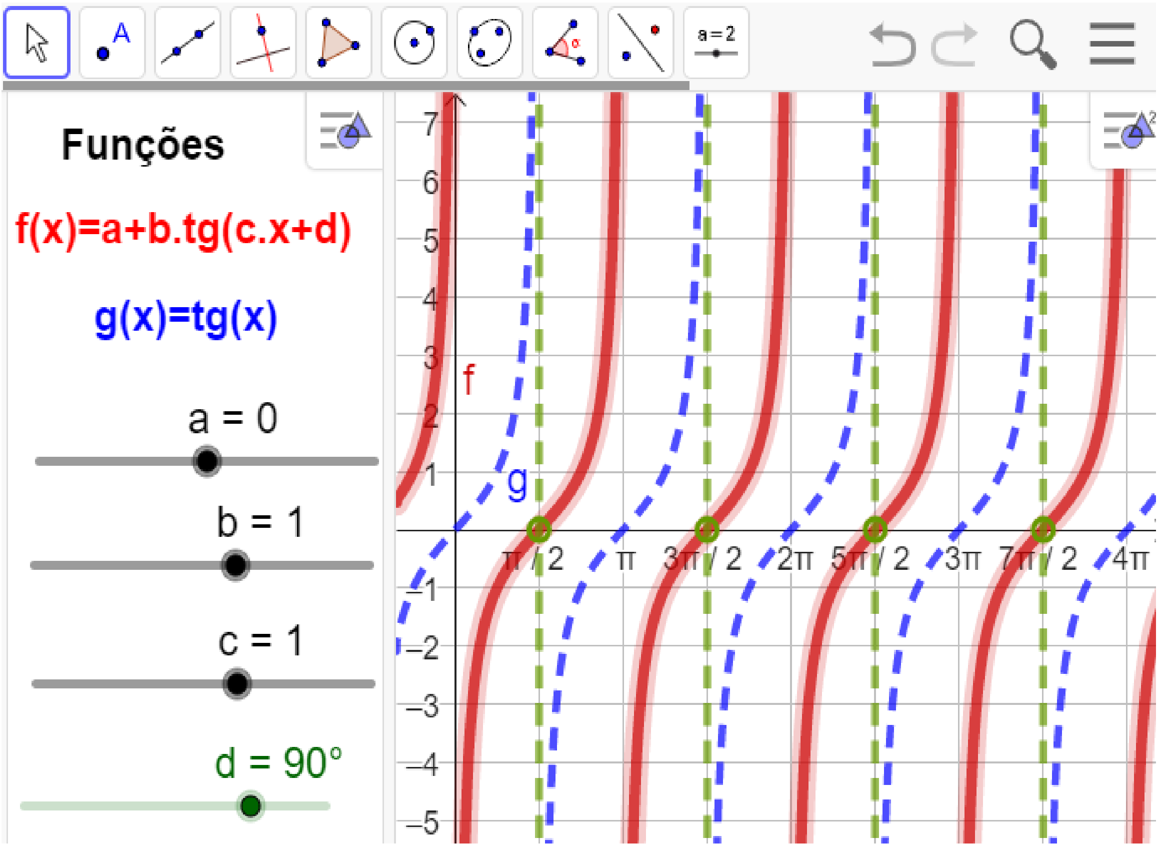
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(-$\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado horizontalmente e decrescente.

**Parâmetro ´´d``**, responsável por um deslocamento horizontal no gráfico.

Se arrastar o parâmetro d > 0, haverá um deslocamento do gráfico para a esquerda do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+$90^0$) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=$90^0$figura 65.

Figura - 65 - Gráfico f(x)=tg(x+$90^0$)




Fonte: Do próprio autor

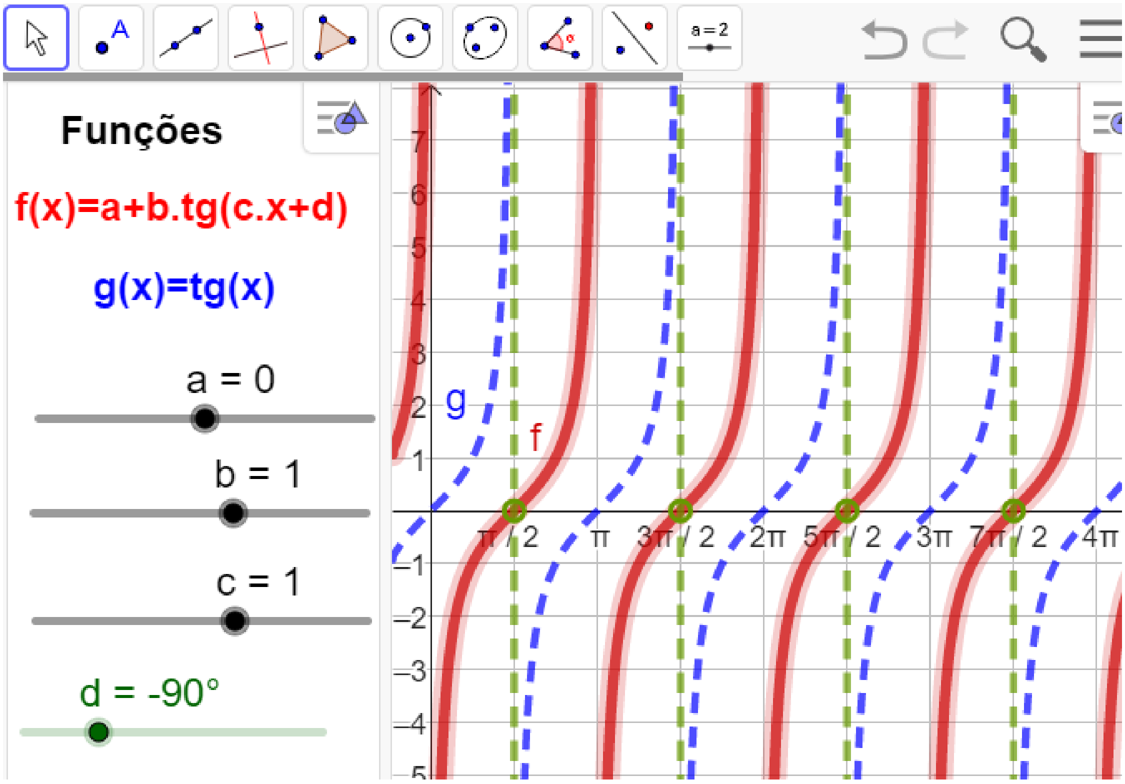
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p = π
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(x+$90^0$), haverá um deslocamento para a esquerda do eixo horizontal.

Se arrastar o parâmetro d < 0 haverá um deslocamento do gráfico para a direita do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+$90^0$) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 90^0$Figura 66.

Figura - 66 - Gráfico f(x)=tg(x-$90^0$)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π

Resumindo o que foi aprendido até aqui sobre os parâmetros das funções trigonométricas, temos:

- Parâmetro a: desloca no eixo y
- Parâmetro b: altera a amplitude
- Parâmetro c; altera o período
- Parâmetro d: desloca no eixo x

No capítulo a seguir, faremos uma investigação pedagógica, com os alunos do segundo ano do ensino médio do IFMA, que tem como foco, o entendimento dos conteúdos de razões trigonométricas, função cosseno, seno e tangente através de 12(doze) atividades desenvolvidas no software Geogebra.

## 6. EXPERIMENTO DIDÁTICO

Tendo em consideração a importância do conteúdo trigonometria no ensino e aprendizagem, e o baixo nível de aproveitamento dos alunos relativamente a esse conteúdo, elaborou-se 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho, razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, com o intuito de melhorar o processo do ensino e da aprendizagem desse conteúdo, e promover mais interesse e motivação nos alunos.

A pesquisa tem como objetivo ensinar as definições das funções cosseno, seno e tangente e também a construção dos gráficos de composições de funções trigonométricas f(x) = a + b.cos(cx + d), g(x) = a + b.sen(cx + d) e h(x) = a + b.tg(cx + d), identificando a ideia de movimentos dos gráficos a partir das alterações de cada um dos quatro parâmetros e para isso contou com o apoio, de 12( doze) listas de atividades, para ser explorado no aplicativo Geogebra.

O aluno de posse da atividade, abrirá o aplicativo digitando um endereço, ou seja, um link para ter acesso ao aplicativo, para manusear, visualizar e interagir com os conteúdo, será necessário o aluno seguir alguns procedimento, exposta nas atividades, para resolver as questões do experimento didático.

### 6.1 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção, descrevemos acerca da escola e os sujeitos da pesquisa, o cronograma da experimentação, bem como o desempenho dos alunos com o software Geogebra e a aplicação da sequência didática, no laboratório de informática, com doses atividades sobre os seguintes conteúdos, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, funções trigonométricas cosseno, seno e tangente.

A pesquisa experimental foi desenvolvida inteiramente no laboratório de informática, no instituto Federal do Maranhão, na cidade de São Luís, no Campus do Monte Castelo, do curso de Eletrônica, turma 205 do ensino médio, turno matutino, com 35 alunos que foram divididos em dois grupos, um de 17 e outro de 18 alunos, em 5 encontros de 110 min cada.

Para o desenvolvimento das atividades propostas da sequência didática, dispomos de um data show conectado ao computador com o software Geogebra e cada aluno/participante recebeu uma atividade, para ser manuseado e respondido as questões, bem como uma lousa para fazermos os registros escritos de algumas atividades dos conceitos trabalhados, figura 67.

Figura - 67 - Fotos dos alunos realizando um dos experimentos didático

Fonte: Do próprio autor

Para a análise dos registros escritos, e de vozes utilizaremos as teorias:

A teoria da instrumentação de Rabardel, ela proporcionará uma análise das ações dos sujeitos, que são os alunos do 2º ano do Instituto Federal do Maranhão de São Luís do Campus Monte Castelo, com o instrumento que é o Software Geogebra.

A Teoria das Representações Semiótica de Duval, ela proporciona ao aluno/participante do experimento didático, que interagindo com o software Geogebra, possa aprimorar as transformações de conversão à linguagem escrita no tratamento de seus registros.

Análise microgenética que diz respeito à utilização do Geogebra na construção de conceitos matemáticos, a partir de procedimentos de intervenção de um mediador mais experiente, ou seja, professor/pesquisador.

Mostraremos a seguir alguns registros escritos e de vozes dos alunos/participantes das atividades do nosso experimento, no qual observamos os avanços da turma, com relação ao nível de aprendizagem da mesma.

Os alunos participantes do experimento didático foram dividido em duas turmas, T1 e T2, a turma T1 com 17 alunos, escolhidos aleatoriamente e T2 com 18 alunos também escolhidos aleatoriamente, nomeados de T1A1, T1A2, T1A3, T1A4, T1A5,..., T1A17, e a segunda turma T2A18, T2A19, T2A20,..T2A30, onde a letra T representa a turma 1 ou 2, a letra A representa o aluno, e o segundo número representa a sua posição da escolha aleatória.

No quadro abaixo, temos o cronograma das atividades desenvolvidas em cada encontro, bem como a quantidade de encontros por sessão e a descrição das atividades realizadas em cada dia.

Quadro 2 - cronograma das atividades desenvolvidas em cada encontro

| Encontros | Datas | Descrições |
|---|---|---|
| 3 Encontros | 15/09/2022 | • Razões trigonométricas<br>• Ciclo trigonométrico<br>• Transposições das imagens para o plano cartesiano |
| 3 Encontros | 16/09/2022 | • A função cosseno no ciclo trigonométrico<br>• Gráfico da função cosseno<br>• Entendendo os parâmetros da função cosseno no Geogebra |

| | | |
|---|---|---|
| 2 Encontros | 22/09/22 | • A função seno no ciclo trigonométrico<br>• Gráfico da função seno |
| 2 Encontros | 23/09/22 | • Entendendo os parâmetros da função seno no Geogebra.<br>• Função tangente no ciclo trigonométrico |
| 2 Encontros | 29/09/22 | • Gráfico da função tangente<br>• Entendendo os parâmetros da função tangente no Geogebra. |

Fonte: Do próprio autor

Para o desenvolvimento do experimento didático foi apresentada para cada aluno, um computador e uma folha digitada com as questões e os procedimentos para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador, as quais tinham por objetivo familiarizá-los com os principais comandos e ferramentas do Geogebra e, ao mesmo tempo, relembrar objetos e conceitos elementares da trigonometria.

O 1º encontro demandou de 110 min, no dia 15/09/22 e consistiu na apresentação do trabalho que seria desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários para o manuseio do aplicativo para a resolução das atividades. Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar as três atividades propostas pelo professor/pesquisador.

Quadro 3 - As atividades, 1, 2 e 3, do experimento didático

| |
|---|
| Atividade 1 - Razões trigonométricas<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 2 - Ciclo trigonométrico<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 3 - Transposições das imagens para o plano cartesiano<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |

Fonte: Do próprio autor

No desenvolvimento da atividade 1, percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, devido ser assunto que eles já havia visto no $9^0$ ano.

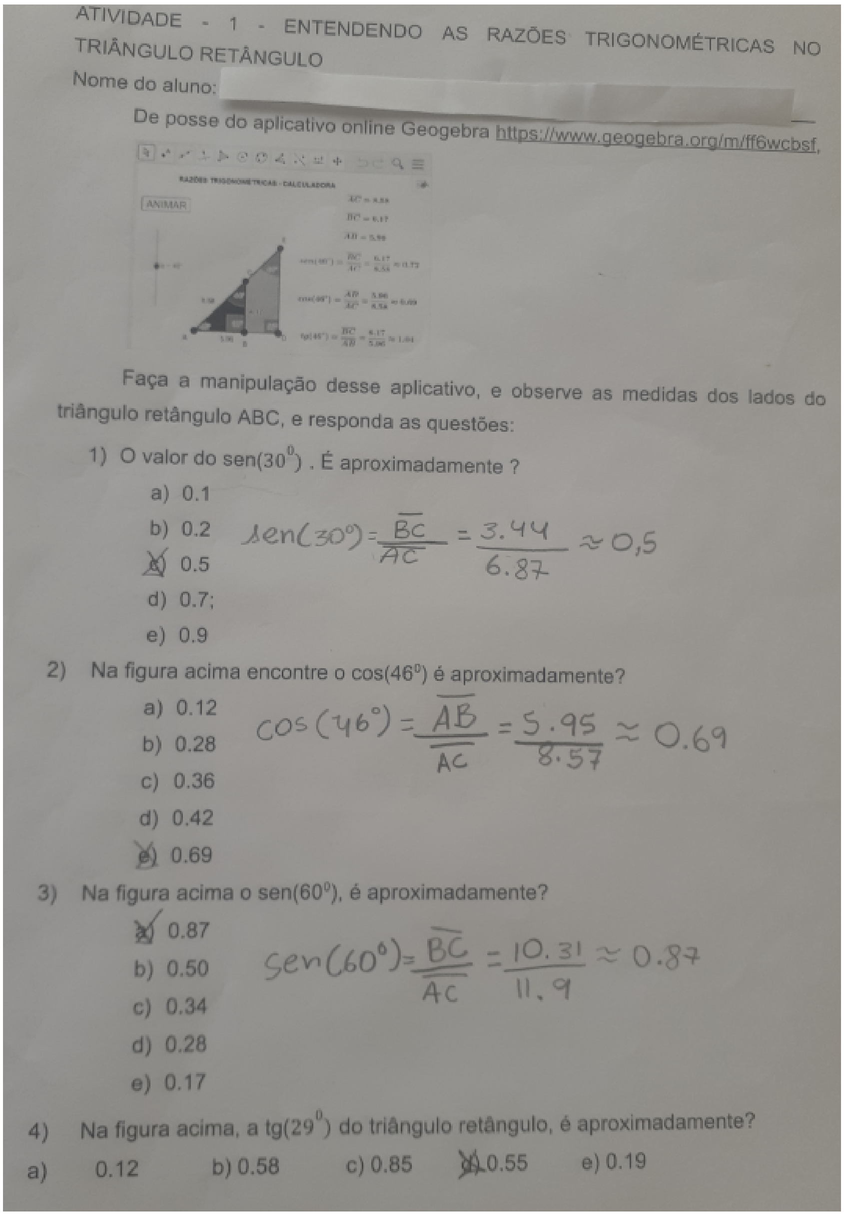
Verificamos que os alunos/participantes no início da aplicação do experimento didático encontraram pouca dificuldade, no manuseio da atividade 1, feito no Software GeoGebra, até porque, para o manuseio do aplicativo, era só clicar no botão < animar > e arrastar o controle deslizante < v >, mas com decorrer da aplicação essas dificuldades foram sendo superadas, mas o mesmo despertou nos alunos/participantes a curiosidade e interesse, portanto se sentiram motivados em aprender os conteúdos e a manusear o software Geogebra.

Na atividade 1, nos traz como tema, as razões trigonométricas no triângulo retângulo e apresenta como objetivo, interagir com o aplicativo entregue, manuseando-o, seguindo o roteiro das atividades para resolver as questões.

EXPERIMENTO 1 digitando o link, https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf, que está na parte de cima na lista de questões.

De acordo com as respostas, selecionamos a do aluno T2A5, por ser praticamente a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático. Figura 68.

Figura - 68 - Resolução do aluno T2A5



ATIVIDADE - 1 - ENTENDENDO AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nome do aluno:

De posse do aplicativo online Geogebra https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf,

Faça a manipulação desse aplicativo, e observe as medidas dos lados do triângulo retângulo ABC, e responda as questões:

1) O valor do sen($30^0$) . É aproximadamente ?

a) 0.1
b) 0.2
c) 0.5
d) 0.7;
e) 0.9

$sen(30^o) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{3.44}{6.87} \approx 0,5$

2) Na figura acima encontre o cos($46^0$) é aproximadamente?

a) 0.12
b) 0.28
c) 0.36
d) 0.42
e) 0.69

$cos(46^o) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5.95}{8.57} \approx 0.69$

3) Na figura acima o sen($60^0$), é aproximadamente?

a) 0.87
b) 0.50
c) 0.34
d) 0.28
e) 0.17

$sen(60^o) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{10.31}{11.9} \approx 0.87$

4) Na figura acima, a tg($29^0$) do triângulo retângulo, é aproximadamente?

a) 0.12 b) 0.58 c) 0.85 d) 0.55 e) 0.19

Fonte : Do próprio autor

O aplicativo terá dois botões, um < ANIMAR> e o outro um controle deslizante < v >, para manusear o aplicativo, basta o aluno clicar no botão <ANIMAR>, e se arrastar o controle deslizante os ângulos mudam de $0^0$ até $90^0$.

Durante a gravação de voz, do experimento didático, observamos algumas interações dos alunos/participantes que demonstraram interesse, motivação e entusiasmo em aprender ou recordar os conteúdos de razões trigonométricas.

Comprovam este fato através de recortes de trechos de voz dos alunos/participantes, neste caso, os alunos T1A3, T2A21 e T2A24, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A3

“Eu achei a aula muito legal, foi uma aula diferente e deu pra entender as relações trigonométricas no triângulo retângulo.``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A21

“O aplicativo é um show de bola.”

Acerca do trecho de voz do aluno T2A24

“Esta maneira  de ensinar é melhor, porque a gente aprende mais.”

Verificamos na correção da atividade 1, através da análise dos registros escritos e de vozes da maioria dos alunos/participantes, que não houve grande dificuldades em generalizar os resultados, do experimento didático, utilizando o aplicativo Geogebra, nesse sentido, levando-o a construírem seus próprio conhecimento.

Na aplicação da atividade 2, cujo tema é o ciclo trigonométrico, o objetivo é interagir com o aplicativo entregue, manuseando-o. Seguindo o roteiro das atividades para resolver as questões, o aluno entenderá que a trigonometria a partir daquele momento será estudada no ciclo trigonométrico.

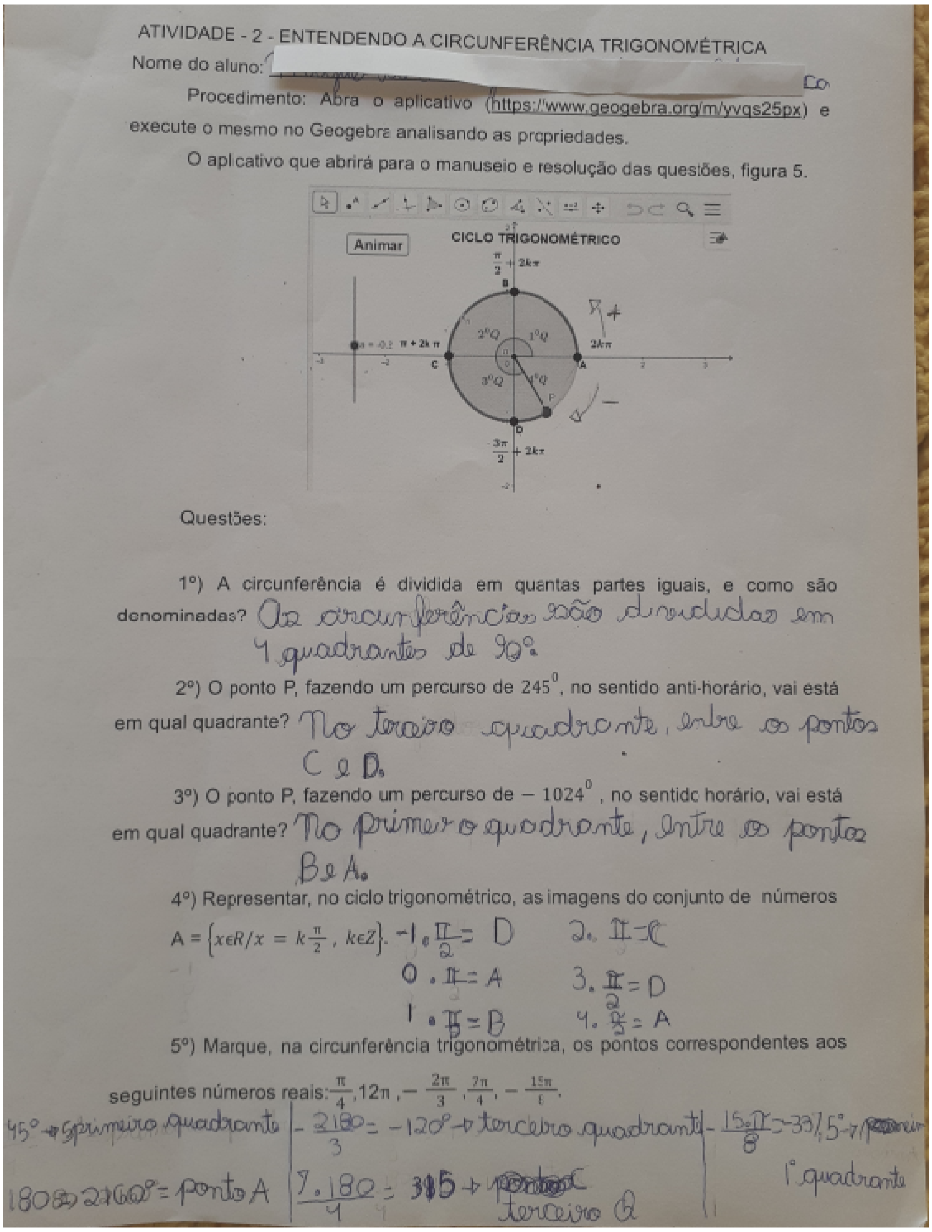
EXPERIMENTO 2, se digitar o link https://www.geogebra.org/m/yvqs25px, que está na parte de cima na lista de questões.

O aplicativo terá dois botões, um < ANIMAR> e o outro um controle deslizante <v >. Para manusear o aplicativo, basta o aluno clicar no botão <ANIMAR> e, ao arrastar o controle deslizante para valores maiores que zero, o ponto $P_n$ vai girar no sentido anti-horário; se arrastar o controle deslizante para valores menores que zero, o ponto $P_n$ vai girar no sentido horário. Portanto, observará que o ciclo trigonométrico será dividido em quatro partes iguais de medida igual  a $90^0$ ou $\frac{\pi}{2}$, e cada parte recebe o nome de quadrante.

Além disso, foi preciso intervenção do professor/pesquisador para auxiliarmos nos procedimentos, como resolver questões de ângulos congruentes, para que entenda, que a cada volta do ponto $P_n$no ciclo trigonométrico, é representado pelo comprimento da circunferência, que tem como equação C=2kπ, onde, a variável K, representa a quantidade de voltas que $Pn$ dá no ciclo trigonométrico,

Selecionamos a atividade 2, do aluno T1A3 do experimento didático figura Conforme a resposta apresentada.Figura 69

Figura - 69 -Resolução do aluno T1A13


ATIVIDADE - 2 - ENTENDENDO A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Nome do aluno:

Procedimento: Abra o aplicativo (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px) e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 5.



Questões:

1°) A circunferência é dividida em quantas partes iguais, e como são denominadas? Os circunferências são divididas em 4 quadrantes de 90°.

2°) O ponto P, fazendo um percurso de 245°, no sentido anti-horário, vai está em qual quadrante? No terceiro quadrante, entre os pontos C e D.

3°) O ponto P, fazendo um percurso de $-1024^0$, no sentido horário, vai está em qual quadrante? No primeiro quadrante, Intre os pontos B e A.

4°) Representar, no ciclo trigonométrico, as imagens do conjunto de números $A = \{x \in R / x = k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\}$. $-1 \cdot \frac{\pi}{2} = D$ $\quad 2 \cdot \pi = C$

$0 \cdot \pi = A$ $\quad 3 \cdot \frac{\pi}{2} = D$

$1 \cdot \frac{\pi}{2} = B$ $\quad 4 \cdot \frac{\pi}{2} = A$

5°) Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{4}$, $12\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{8}$.

45° → primeiro quadrante | $-\frac{2 \cdot 180}{3} = -120°$ → terceiro quadrante | $-\frac{15 \cdot \pi}{8} = -337{,}5°$ → 1° quadrante

1808 2160° = ponto A | $\frac{7 \cdot 180}{4} = 315$ → terceiro Q

Fonte: do próprio autor

.Durante a gravação de voz, do experimento didático, observamos algumas Interações dos alunos/participantes que demonstraram interesse, motivação e entusiasmo em entender as imagens na circunferência trigonométrica.

.Comprovamos este fato através de recortes de trechos de voz dos alunos/participantes, neste caso, os alunos T1A3, T2A21 e T2A14 respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A3

“Eu achei a aula muito legal, foi uma aula diferente e deu pra entender as imagens na circunferência trigonométrica.``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A21 e T2A14

“Esta maneira de ensinar é melhor, porque a gente aprende mais.”

No desenvolvimento da atividade 2, percebemos que a maioria dos alunos/participantes reagiram bem às atividades propostas, e não sentiram grandes dificuldades para executá-las.

Na aplicação da atividade 3, nos traz como tema, transposições das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano,

EXPERIMENTO 3 digitando o link, https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9, que está na parte de cima na lista de questões.

Após fazermos os esclarecimentos necessários para a realização da atividade, em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar o experimento proposto pelo professor/pesquisador, as quais tinham por objetivo fazer a transposição do ciclo trigonometria para o plano cartesiano de maneira clara e objetiva.

Foram distribuídas a cada aluno as atividades em folhas impressas, as quais deveriam ser respondidas e entregues ao professor/pesquisador. vale ressaltar também as questões foram desenvolvidas individualmente e depois socializada com os colegas .

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

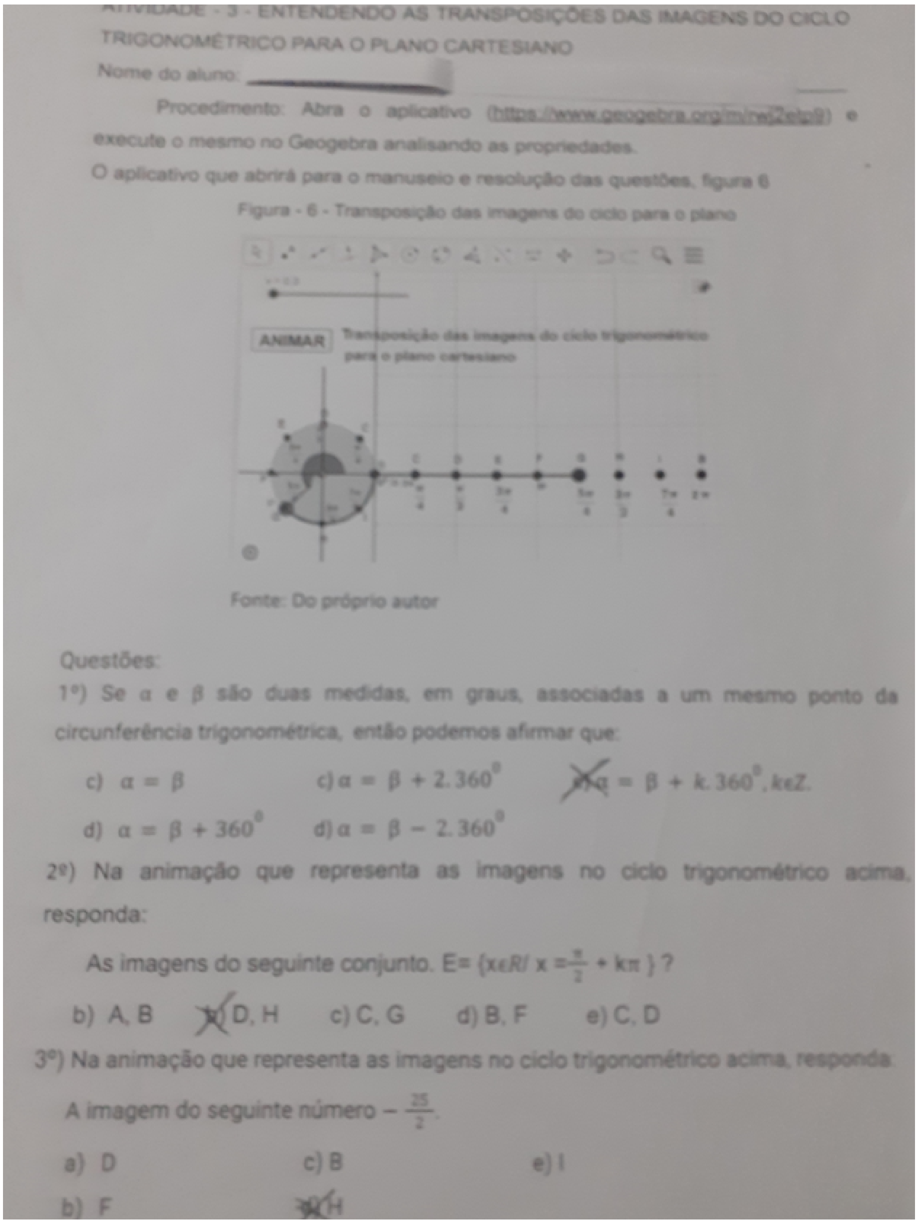
Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário e para valores menores que zero o sentido é horário, e também vai aumentando a sua velocidade de animação.

Selecionamos as respostas do aluno T2A4, por ser praticamente a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático, figura 70.

Figura - 70 - Resposta do aluno T2A4


ATIVIDADE - 3 - ENTENDENDO AS TRANSPOSIÇÕES DAS IMAGENS DO CICLO TRIGONOMÉTRICO PARA O PLANO CARTESIANO

Nome do aluno: [redacted]

Procedimento: Abra o aplicativo (https://www.geogebra.org/m/rej2elp9) e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 6

Figura - 6 - Transposição das imagens do ciclo para o plano



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Se $\alpha$ e $\beta$ são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

c) $\alpha = \beta$ c) $\alpha = \beta + 2.360^0$ $\alpha = \beta + k.360^0, k\epsilon Z$.

d) $\alpha = \beta + 360^0$ d) $\alpha = \beta - 2.360^0$

2º) Na animação que representa as imagens no ciclo trigonométrico acima, responda:

As imagens do seguinte conjunto. E= $\{x\epsilon R / x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ?

b) A, B D, H c) C, G d) B, F e) C, D

3º) Na animação que representa as imagens no ciclo trigonométrico acima, responda.

A imagem do seguinte número $-\frac{25}{2}$.

a) D c) B e) I

b) F H

Fonte: Do próprio autor

Observando os alunos participantes da atividade 3, constatamos que os participantes do experimento didático não encontraram dificuldade em entender o conteúdo, relacionado a transposição do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, verificamos que os alunos conseguiram resolver as atividades.

Acerca das respostas da maioria dos alunos que afirmam, já participaram de atividades com uso do Geogebra, mas apenas com o professor apresentando as construções já estruturadas, com uso do data show.

Comprovamos este fato através de recortes de trechos de voz dos alunos/participantes, neste caso, os alunos T2A4 e T1A2 respectivamente

Acerca do trecho de voz do aluno T2A4

´´Eu ainda não havia tido a oportunidade de fazer uma manipulação de uma atividade já estruturada no software Geogebra.``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A2

´´A aplicativo tornam as explicações mais claras``

buscamos na atividade III, reproduzir de forma simples e clara a transposição do comprimento da circunferência para o plano cartesiano se deslocando para o eixo das abscissas, a fim de verificar se a abordagem utilizada permite ao aluno sua participação e a construção dos conceitos estudados, principalmente os arcos, imagens e domínios. Devido ao interesse e motivação da maioria dos alunos/participantes em entender o conteúdo, o objetivo do experimento didático teve êxito.

O segundo encontro demandou de 110 min, no dia 16/09/22 e consistiu na apresentação do trabalho que foi desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários para o manuseio do aplicativo para a resolução das atividades 4, 5 e 6. Quadro 4.

Quadro 4 - As atividades, 4, 5 e 6, do experimento didático

| |
|---|
| Atividade 4 - A função cosseno no ciclo trigonométrico<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 5 - Gráfico da função cosseno<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 6 Entendendo os parâmetros da função cosseno no Geogebra<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões |

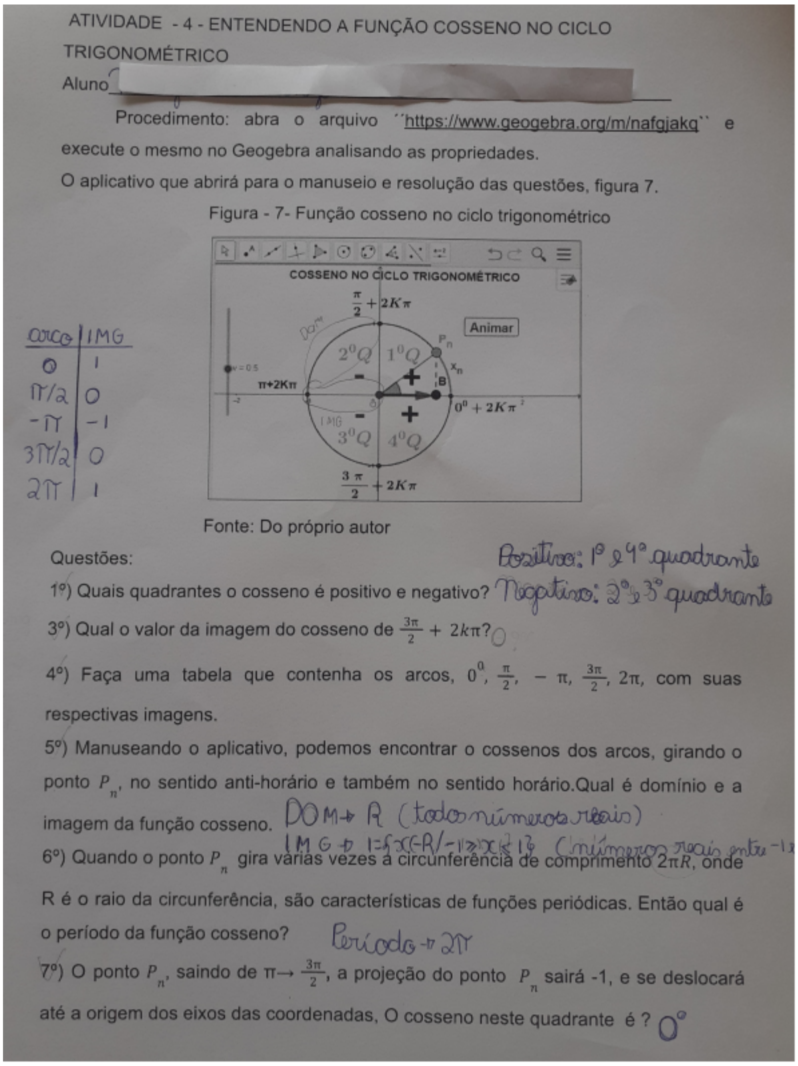
Fonte: Do próprio autor

Na aplicação do experimento didático, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, na definição da função cosseno no ciclo trigonométrico,

EXPERIMENTO 4, ao digitar ´https://www.geogebra.org/m/nafgjakq`, que está na parte de cima na lista de questões.

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T2A16, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático Figura 71.

Figura - 71 - Resolução do aluno T2A16



ATIVIDADE - 4 - ENTENDENDO A FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/nafgjakq`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 7.

Figura - 7- Função cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

| arco | IMG |
|---|---|
| 0 | 1 |
| π/2 | 0 |
| -π | -1 |
| 3π/2 | 0 |
| 2π | 1 |

Questões:

1º) Quais quadrantes o cosseno é positivo e negativo? Positivo: 1º e 4º quadrante Negativo: 2º e 3º quadrante

3º) Qual o valor da imagem do cosseno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$? 0

4º) Faça uma tabela que contenha os arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens.

5º) Manuseando o aplicativo, podemos encontrar o cossenos dos arcos, girando o ponto $P_n$, no sentido anti-horário e também no sentido horário.Qual é domínio e a imagem da função cosseno. DOM → R (todos números reais)

IMG → I={x∈R/-1≥x≤1} (números reais entre -1 e 1)

6º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes à circunferência de comprimento $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função cosseno? Período → 2π

7º) O ponto $P_n$, saindo de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, O cosseno neste quadrante é ? 0º

Fonte: do próprio autor

No desenvolvimento da atividade do aluno T1A6, percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las.

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, função cosseno no ciclo trigonométrico facilitou o entendimento, e a construção do seu gráfico, foi efetivamente viável, pois verificamos que os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo, que é comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A10, T1A8, T2A26, e T2A31, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A10

´´A aplicativo facilita entender a definição do cosseno no ciclo trigonométrico``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A8

´´Eu entendi porque a função cosseno é periódica``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A26

´´Eu entendi em quais quadrantes a função cosseno é positiva e negativa``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A31

´´ O aplicativo é show``

No desenvolvimento da atividade 4, os alunos não tiveram grandes dificuldades, devido ao manuseio do aplicativo, porque facilita a visualização e o entendimento da definição da função cosseno no ciclo trigonométrico

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido a desenvoltura da maioria dos alunos/participantes em resolver as questões, manuseando o aplicativo, para o entendimento de conteúdos, com um pouco de complexidade.

No desenvolvimento da atividade 5, buscamos reproduzir de forma simples e clara a definição do gráfico da função cosseno no sentido anti-horário, destacando principalmente o seu domínio, imagem, período e amplitude.

A aplicação do experimento didático, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, na construção do gráfico da função cosseno, Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador.

EXPERIMENTO 5**,** digitando o link, https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz, que está na parte de cima na lista de questões.

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

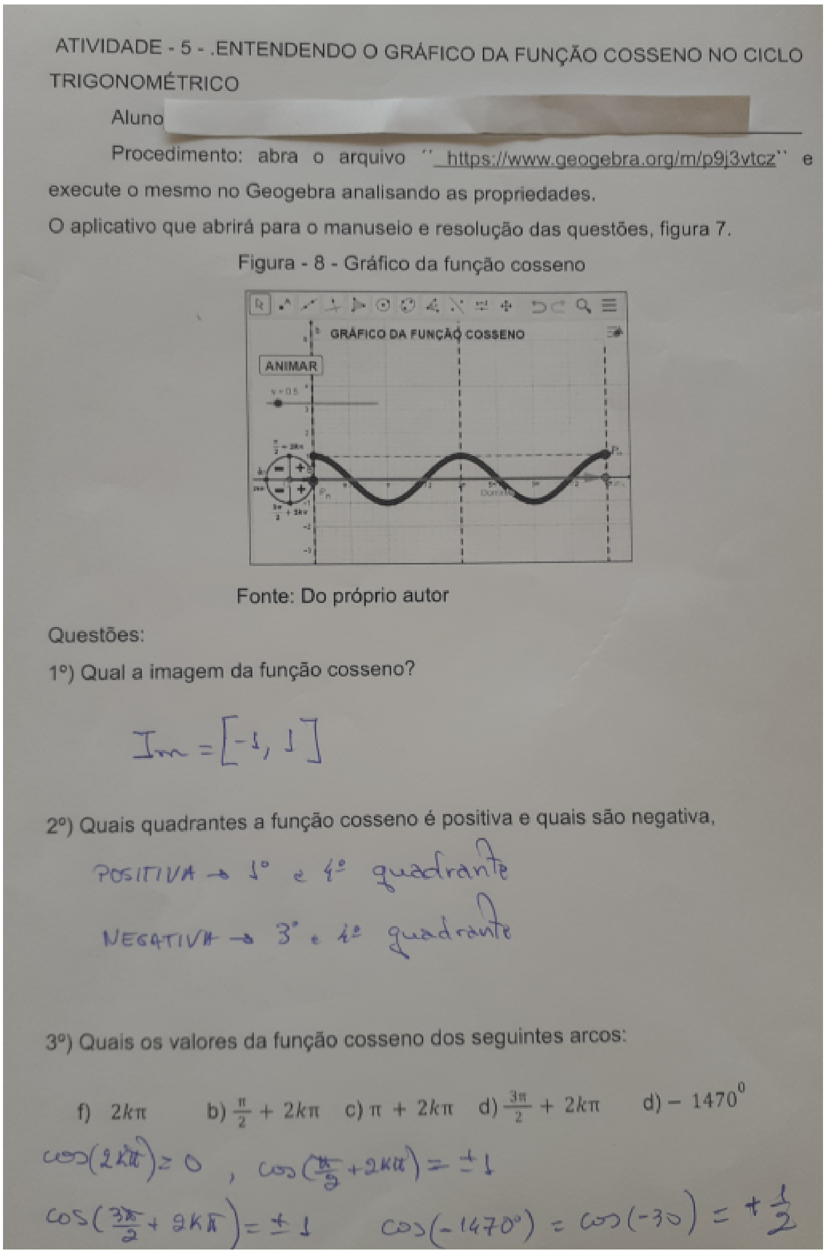
Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto $P_n$ vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário e para valores menores que zero o sentido é horário, e também vai aumentando a sua velocidade de animação...

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T1A8, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático Figura 72.

Figura - 72 -Resolução do aluno T1A8



ATIVIDADE - 5 - .ENTENDENDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno

Procedimento: abra o arquivo ''https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz'' e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 7.

Figura - 8 - Gráfico da função cosseno



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função cosseno?

$Im = [-1, 1]$

2º) Quais quadrantes a função cosseno é positiva e quais são negativa,

POSITIVA → 1º e 4º quadrante

NEGATIVA → 3º e 2º quadrante

3º) Quais os valores da função cosseno dos seguintes arcos:

f) $2k\pi$ b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ c) $\pi + 2k\pi$ d) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ d) $-1470^0$

$\cos(2k\pi) = 0$ , $\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \pm 1$

$\cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = \pm 1$ $\cos(-1470°) = \cos(-30) = +\frac{1}{2}$

Fonte: Do próprio autor

Na quinta atividade, registramos algumas dúvidas com relação à determinação da amplitude, cuja definição a maioria não conhecia. Com relação ao período, percebemos que os alunos participantes não estavam conseguindo diferenciar domínio de período, nesse caso, houve a interferência do professor/pesquisador, reforçando, que o período está relacionado com a quantidade de voltas que são dadas no ciclo trigonométrico, pois o domínio, são todos os valores reais no eixo das abscissas onde a função cosseno está definida.

Na análise da atividade 5, os alunos  tiveram um pouco de dificuldades em entender o período da função cosseno e a amplitude, não verificaram o que acontecia ao manipular os botões. Portanto, pediram ajuda depois de várias tentativas não conseguidas, assim, a intervenção do pesquisador se faz necessária, mais próximo da ideia de facilitador e orientador de processos, portanto, o entendimento da definição do período da função cosseno e de sua amplitude no plano cartesiano se concretizou.

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, o gráfico da função cosseno no ciclo trigonométrico facilitou o entendimento na construção do seu gráfico da função cosseno, pois verificamos que os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo depois que o professor/pesquisador, tirou as dúvidas sobre o período e amplitude, que fica comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A10, T1A1, T2A12, e T2A3, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A10

´´ A construção do gráfico da função cosseno pode auxiliar na visualização do período``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A1

´´ “Esse jeito que foi ensinado o período é melhor, porque a gente aprende mais.”

Acerca do trecho de voz do aluno T2A12

“Eu achei aula muito legal,deu pra aprender a amplitude só visualizando o gráfico no Geogebra``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A3

`` Com o aplicativo fica fácil entender a amplitude``

Percebemos que depois da interferência do professor/pesquisador a maiorias dos alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, ao final do experimento didático, alguns alunos relataram, espontaneamente, que gostaram de utilizar o software GeoGebra para resolver as questões sobre domínio, imagem, período e amplitude do gráfico da função cosseno.

EXPERIMENTO 6, digitando o link, https://www.geogebra.org/m/pdzqgkra, que está na parte de cima na lista de questões.

No desenvolvimento da atividade 6, os alunos tiveram grandes dificuldades em resolver algumas questões que envolvem parâmetros da função cosseno mais com a interferência do professor/pesquisador e com o manuseio do aplicativo o problema foi solucionado

No desenvolvimento da atividade 6, buscamos reproduzir de forma simples e clara o entendimento dos parâmetros do gráfico da função cosseno no sentido anti-horário, destacando principalmente o seu domínio, imagem, período e amplitude.

Foi construído duas funções, f(x) = cos(x) fixa e ponteada para servir de referência e a função g(x) = a + b.cos(c.x + d) que se movimenta quando, os parâmetros forem alterando a sua numeração.

Para resolução das questões é necessário manusear os controle deslizante < a >, < b >, < c >, e < d >, da seguinte maneira:

O controle deslizante < a > quando arrastado, o parâmetro ´´a``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < b > quando arrastado, o parâmetro ´´b``, assumirá seus valores numéricos.

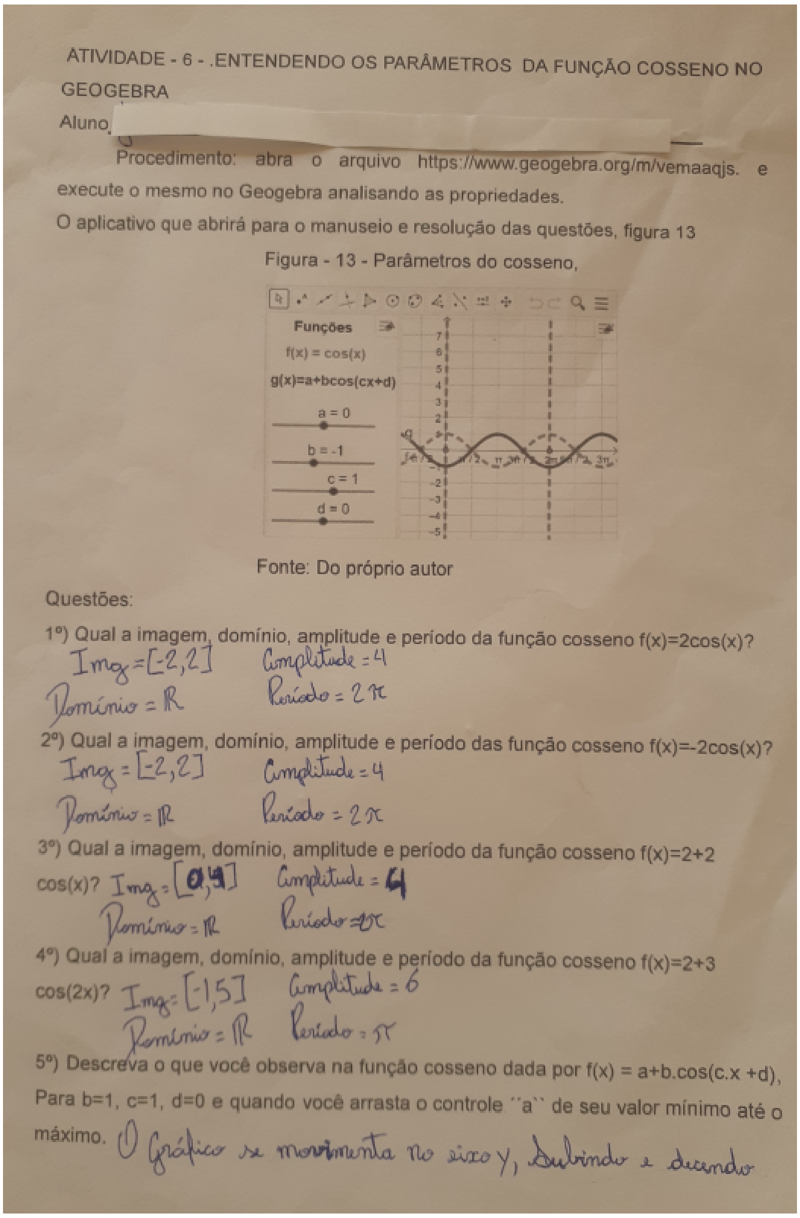
O controle deslizante < c > quando arrastado, o parâmetro ´´c``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < d > quando arrastado, o parâmetro ´´d``, assumirá seus valores numéricos.

No desenvolvimento da atividade 6, buscamos reproduzir de forma simples e clara o entendimento dos parâmetros em que cada controle representa uma característica da função cosseno e é responsável pelas transformações das funções e seus gráficos, como translação/deslocamento vertical ou horizontal, amplitude e período.

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T2A11, por ser também, a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático no laboratório, figura 73.

Figura - 73 - Resolução do aluno T2A11


ATIVIDADE - 6 - .ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO COSSENO NO GEOGEBRA

Aluno:

Procedimento: abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/vemaaqjs. e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 13

Figura - 13 - Parâmetros do cosseno,



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função cosseno f(x)=2cos(x)?
Img=[-2,2] Amplitude=4
Domínio=R Período=2π

2º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período das função cosseno f(x)=-2cos(x)?
Img=[-2,2] Amplitude=4
Domínio=R Período=2π

3º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função cosseno f(x)=2+2 cos(x)? Img=[0,4] Amplitude=4
Domínio=R Período=2π

4º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função cosseno f(x)=2+3 cos(2x)? Img=[-1,5] Amplitude=6
Domínio=R Período=π

5º) Descreva o que você observa na função cosseno dada por f(x) = a+b.cos(c.x +d), Para b=1, c=1, d=0 e quando você arrasta o controle ``a`` de seu valor mínimo até o máximo. O Gráfico se movimenta no eixo y, Subindo e decendo

Fonte: Do próprio autor

Na análise da atividade 6, os alunos tiveram um pouco de dificuldades em entender o que acontece com o período, imagens e amplitude da função quando são arrastados os controles deslizantes, modificando o gráfico da função g(x) = a + b.cos(c.x + d).

. Destacamos algumas afirmações quando é alterado os parâmetros da função cosseno, pois percebemos nela a construção das características da amplitude, período e imagem pelos alunos, a partir da manipulação do controle na
janela do GeoGebra.

A resposta que mais se repetiu entre os alunos/participantes foi “Ao alterar o controle ‘a’ das funções ocorre uma translação vertical. Para valores negativos

as funções transladam para baixo e para valores positivos transladam para cima ``

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, os parâmetros do gráfico da função cosseno no plano cartesiano, facilitou o entendimento na construção do seu gráfico da função cosseno, pois verificamos que , os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo depois que o professor/pesquisador, tirou as dúvidas sobre a translação do gráfico, visualizando as modificações do período, amplitude e imagens na tela de visualização do Geogebra, que fica comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A13, T1A12, T2A5, e T2A7, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A13

´´O gráfico se movimenta no eixo y, subindo e descendo``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A12

´´ quando b=c = 0, o gráfico fica uma reta paralela ao eixo x``;

Acerca do trecho de voz do aluno T2A5

´´Quando c≠0, o gráficos as funções contraem``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A7

:´´no parâmetro d ocorre a deslocamento para a esquerda ou para a direita``

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido a desenvoltura da maioria dos alunos/participantes depois da intervenção do professor/pesquisador, em explicar os processo de contrações, dilatações e translações, ou seja, entender o que acontece com as modificações do gráfico da função cosseno, quando é manuseando o aplicativo, para o entendimento de conteúdos com um pouco de complexidade.

O 3º encontro no desenvolvimento da atividade 7 e 8, demandou um encontro de 110 min, no dia 22/09/22 e consistiu na apresentação do trabalho que foi desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários para o manuseio do aplicativo para a resolução das atividades.. Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar 2 atividades propostas pelo professor/pesquisador. Quadro 5.

Quadro 5 - As atividades, 7 e 8, do experimento didático

| |
|---|
| Atividade 7 - A função seno no ciclo trigonométrico<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 8 - Gráfico da função seno<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |

Fonte: Do próprio autor

A aplicação do experimento didático 7, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, na construção do gráfico da função cosseno no ciclo trigonométrico, Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador.

EXPERIMENTO 7, digitando o link, https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8, que está na parte de cima na lista de questões.

A aplicação do experimento didático, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, na definição da função seno com um ponto $P_n$, girando no sentido anti-horário e horário, em seguida, cada aluno utilizará um computador para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador.

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

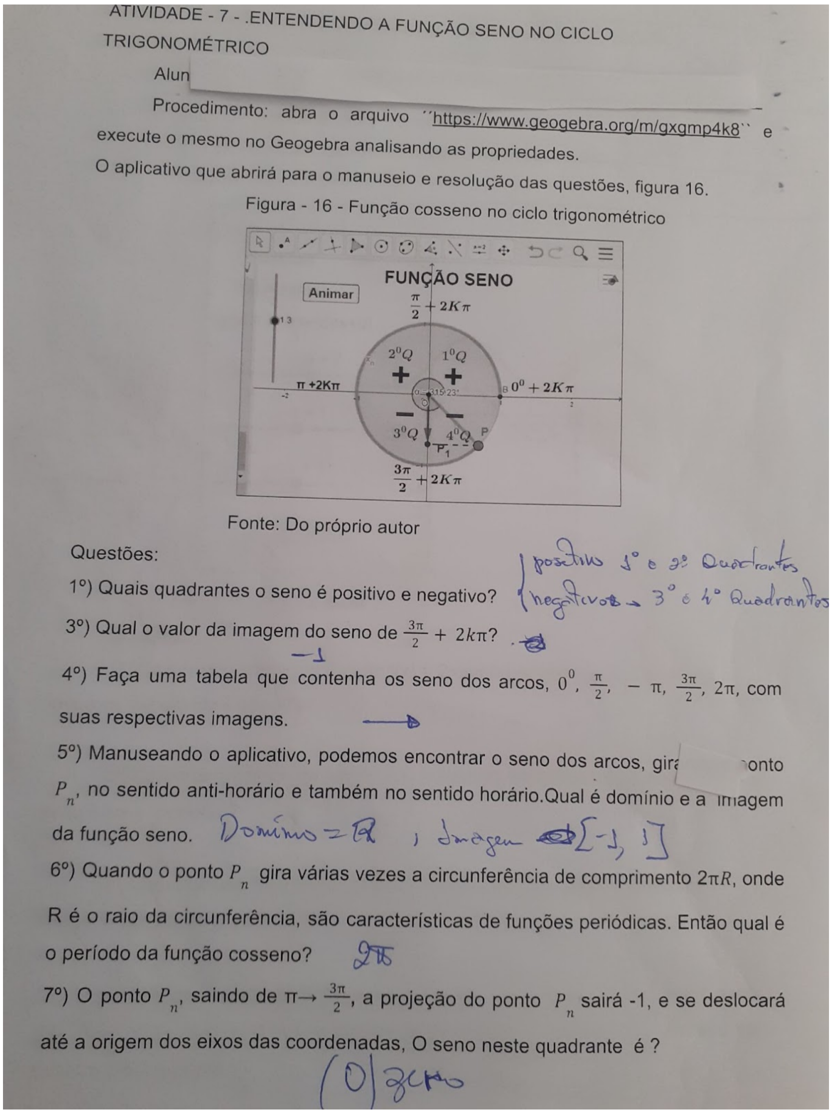
Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto

P movimenta no sentido anti-horário

Se arrastar o controle deslizante para valores menores que zero, o sentido é horário, e também vai aumentando a sua velocidade de animação.

Selecionamos a atividade do alunos/participante T2A8, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático, no laboratório, figura 74.

Figura - 74 - Resolução do aluno T2A8



ATIVIDADE - 7 - .ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Alun

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 16.

Figura - 16 - Função cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quais quadrantes o seno é positivo e negativo? positivo 1º e 2º Quadrantes / negativos → 3º e 4º Quadrantes

3º) Qual o valor da imagem do seno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$? -1

4º) Faça uma tabela que contenha os seno dos arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens. →

5º) Manuseando o aplicativo, podemos encontrar o seno dos arcos, gir… onto $P_n$, no sentido anti-horário e também no sentido horário.Qual é domínio e a imagem da função seno. Domínio = ℝ ; Imagem [-1, 1]

6º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes a circunferência de comprimento $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função cosseno? 2π

7º) O ponto $P_n$, saindo de π→ $\frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, O seno neste quadrante é ? (0) zero

Fonte: Do próprio autor

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações percebemos que essa metodologia para ensinar, no Geogebra, função seno no ciclo trigonométrico, foi efetivamente viável, pois verificamos que os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo, que é comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A9 , T2A27 e T1A6 respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A9

´´A definição da função seno, é idêntica a função cosseno, só muda a projeção do ponto $P_n$, para o eixo das ordenadas``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A27

´´A imagem da função seno fica fácil de visualizar com o aplicativo``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A6

´´O valor do seno de $0^0$, $\frac{\pi}{2}rad$, $\pi\ rad$, $\frac{3\pi}{2}rad,$ é 2π. Fica fácil de visualizar no aplicativo, que são os pontos de interseção da circunferência, com os eixos do plano cartesiano´`.

Percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, pelo fato que, o procedimento para entender a função seno é idêntico ao procedimento para entender a função cosseno no ciclo trigonométrico, só difere, o eixo para ser analisado. O seno é no eixo vertical, e o cosseno no eixo horizontal

Concluímos que a maioria dos alunos/participantes, relataram espontaneamente, que entenderam a definição da função seno no ciclo trigonométrico, que gostaram de utilizar o software GeoGebra para resolver as questões propostas.

No desenvolvimento da atividade 8, buscamos reproduzir de forma simples e clara a construção do gráfico da função seno no ciclo trigonométrico e algumas propriedades da função cosseno.

EXPERIMENTO 8, digitando o link, https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc, que está na parte de cima na lista de questões.

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

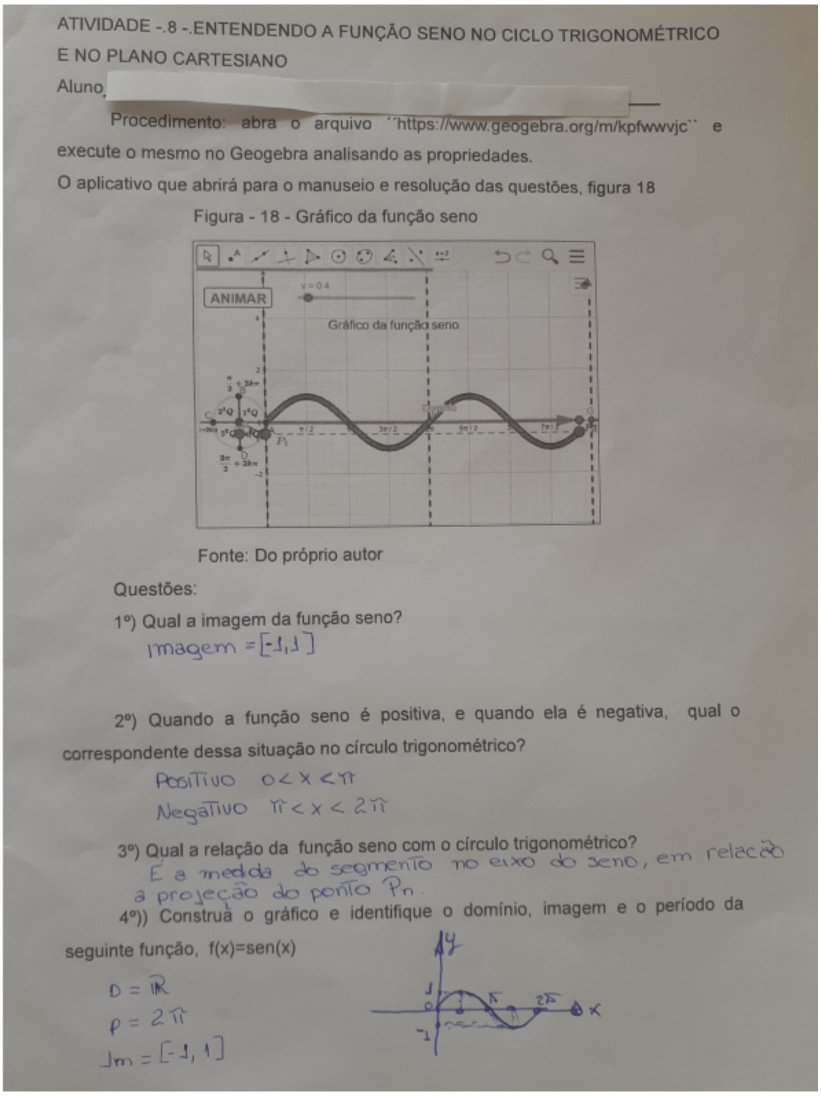
Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto $P_n$ vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto

P movimenta no sentido anti-horário aumentando a sua velocidade da animação. No desenvolvimento da atividade 8, buscamos reproduzir de forma simples e clara a construção do gráfico da função seno no ciclo trigonométrico, e algumas propriedades da função seno.no ciclo trigonométrico e algumas propriedades, em seguida, cada aluno utilizará um computador para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador.

Selecionamos a atividade do aluno/participante T1A6, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático, figura 75.

Figura- 75 - Resolução do aluno T1A6



ATIVIDADE -.8 -.ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E NO PLANO CARTESIANO

Aluno

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 18

Figura - 18 - Gráfico da função seno

ANIMAR

Gráfico da função seno

Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função seno?

Imagem = [-1,1]

2º) Quando a função seno é positiva, e quando ela é negativa, qual o correspondente dessa situação no círculo trigonométrico?

Positivo $0 < x < \pi$

Negativo $\pi < x < 2\pi$

3º) Qual a relação da função seno com o círculo trigonométrico?

É a medida do segmento no eixo do seno, em relação a projeção do ponto Pn.

4º)) Construa o gráfico e identifique o domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x)=sen(x)

$D = \mathbb{R}$

$p = 2\pi$

$Im = [-1, 1]$

Fonte: Do próprio autor

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, os parâmetros do gráfico da função seno no plano cartesiano, facilitou o entendimento na construção do seu gráfico da função seno, pois verificamos que, os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo depois que o professor/pesquisador, tirou as dúvidas sobre a translação do gráfico, visualizando as modificações do período, amplitude e imagens na tela de visualização do Geogebra, que fica comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A8, T1A11, T2A9, e T2A17, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A8

´´ É possível perceber a relação que há entre o círculo trigonométrico e a função seno``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A11

´´A função seno é periódica onde há um padrão que se repete e que é chamado de período``.

Acerca do trecho de voz do aluno T2A9

´´ A função seno assume valores positivos no primeiro e segundo quadrantes, e valores negativos no terceiro e quarto quadrantes.

Acerca do trecho de voz do aluno T2A17

A função é crescente no primeiro quadrante e quarto, e decrescente no segundo quadrante e terceiro``

É bom ressaltar que na atividade 8, buscamos concentrar nas dificuldades apresentadas pelos alunos, para a aprendizagem na construção do gráfico da função seno, alguns alunos, precisaram da interferência do professor/pesquisador, para entender que na construção do gráfico da função seno no plano cartesiano, é importante relacionar, a medida do segmento que representa o seno no ciclo trigonométrico, como sendo a medida da sua imagem no plano cartesiano, e o comprimento da circunferência no ciclo trigonométrico quando transportado para o plano cartesiano, passa a ser o período da função seno, visualizado nos eixos das ordenadas, o domínio são os pontos no eixo das abcissas que estão relacionados com os pontos a imagens.

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido a maioria dos alunos/participantes, relataram espontaneamente, que entenderam os conteúdos, isto é, a definição da função seno no ciclo trigonométrico, o domínio, imagens, amplitude e imagem, explorando o básico, mais com um pouco de complexidade.

O 4º encontro demandou de 110 min, no dia 23/09/22 e consistiu na apresentação do trabalho que foi desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários para o manuseio do aplicativo para a resolução das atividades.. Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar 2 atividades propostas pelo professor/pesquisador.Quadro 6.

Quadro 6 - As atividades, 9 e 10, do experimento didático.

| |
|---|
| Atividade 9 - Entendendo os parâmetros da função seno no Geogebra.<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |
| Atividade 10 - Função tangente no ciclo trigonométrico<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões. |

Fonte: Do próprio autor

No desenvolvimento da atividade 9, buscamos reproduzir de forma simples e clara o entendimento dos parâmetros do gráfico da função seno no sentido anti-horário, destacando principalmente o seu domínio, imagem, período e amplitude.

EXPERIMENTO 9, digitando o link https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq, que está na parte de cima na lista de questões.

Foi construído duas funções f(x) = sen(x) fixa, e ponteada para servir de referência, e a função g(x) = a + b.sen(c.x + d), que se movimenta, quando os parâmetros forem alterados, isto é, as suas numerações. Para resolução das questões é necessário manusear os controle deslizante < a >, < b >, < c >, e < d >, da seguinte maneira:

O controle deslizante < a > quando arrastado, o parâmetro ´´a``, assumirá seus valores numéricos.

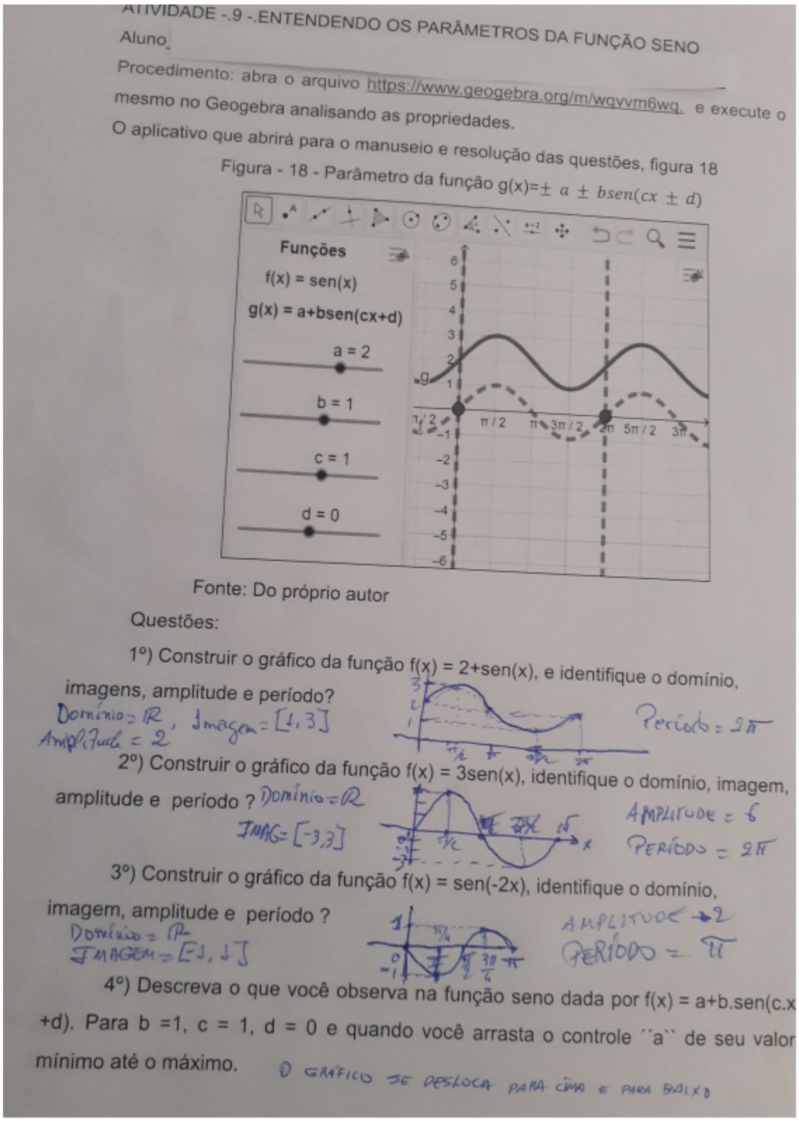
O controle deslizante < b > quando arrastado, o parâmetro ´´b``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < c > quando arrastado, o parâmetro ´´c``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < d > quando arrastado, o parâmetro ´´d``, assumirá seus valores numéricos.

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T1A6, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático, figura 76.

Figura - 76 - Resolução do aluno T2A6


ATIVIDADE -.9 -.ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO SENO

Aluno

Procedimento: abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq. e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 18

Figura - 18 - Parâmetro da função g(x)=$\pm\ a \pm bsen(cx \pm d)$



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1°) Construir o gráfico da função f(x) = 2+sen(x), e identifique o domínio, imagens, amplitude e período?
Domínio = R, Imagem = [1, 3]
Amplitude = 2
Período = 2π

2°) Construir o gráfico da função f(x) = 3sen(x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ? Domínio = R
IMAG = [-3,3]
AMPLITUDE = 6
PERÍODO = 2π

3°) Construir o gráfico da função f(x) = sen(-2x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?
Domínio = R
IMAGEM = [-1, 1]
AMPLITUDE → 2
PERÍODO = π

4°) Descreva o que você observa na função seno dada por f(x) = a+b.sen(c.x +d). Para b =1, c = 1, d = 0 e quando você arrasta o controle ´´a`` de seu valor mínimo até o máximo. O GRÁFICO SE DESLOCA PARA CIMA E PARA BAIXO

Fonte: Do próprio autor

Na evolução da atividade 9, percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, devido ser assunto que tem grande semelhança com os assuntos que foi visto nas atividades 6, ( parâmetros da função cosseno).

No desdobramento da atividade 9, os alunos não tiveram grandes dificuldades em resolver algumas questões que envolvem parâmetros da função seno, porque na atividade 6 é praticamente igual os procedimentos para o entendimento da função em estudo, mais houve a interferência do professor/pesquisador, para orientá-lo nas diferenças entre as funções, e com o manuseio do aplicativo o problema foi solucionado

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, os parâmetros do gráfico da função seno no plano cartesiano, facilitou o entendimento na construção do seu gráfico da função seno, pois verificamos que , os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo depois que o professor/pesquisador, tirou as dúvidas sobre a translação do gráfico, visualizando as modificações do período, amplitude e imagens na tela de visualização do Geogebra, que fica comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T2A13, T2A12, T1A5, e T1A7, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T2A13

´´Quando é modificado os valores do parâmetro a, há uma translação vertical``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A12

Quando é modificado os valores do parâmetro b, há uma modificação na imagens``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A5

´´Quando é modificado o parâmetro c, Há mudança no comprimento do período``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A7

´´ Quando é modificado os valores do parâmetro d, há uma translação horizontal``

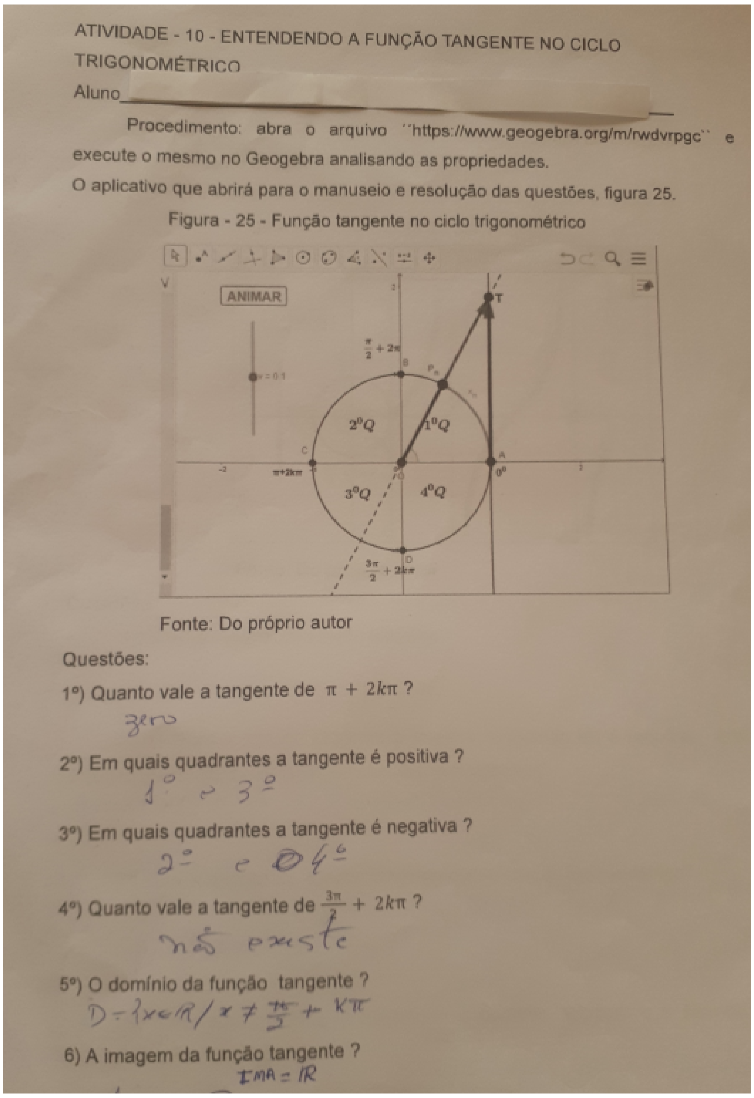
Percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, em generalizar os resultados interagindo com o software Geogebra, levando-o a construírem seus próprios conhecimentos.

No desenvolvimento da atividade 10, buscamos reproduzir de forma simples e clara a definição do da função tangente, no sentido anti-horário e horário, destacando principalmente o seu domínio, imagem, período e amplitude.

EXPERIMENTO 10, digitando o link, https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc, que está na parte de cima na lista de questões.

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T2A10, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático Figura 77.

Figura - 77 - Resolução do aluno T2A10



ATIVIDADE - 10 - ENTENDENDO A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno______

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 25.

Figura - 25 - Função tangente no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quanto vale a tangente de $\pi + 2k\pi$ ?

zero

2º) Em quais quadrantes a tangente é positiva ?

1º e 3º

3º) Em quais quadrantes a tangente é negativa ?

2º e 4º

4º) Quanto vale a tangente de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ?

não existe

5º) O domínio da função tangente ?

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

6) A imagem da função tangente ?

$IMA = \mathbb{R}$

Fonte: do próprio autor

A aplicação do experimento didático, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, na definição da função tangente com um ponto $P_n$, girando no sentido anti-horário e horário, em seguida, cada aluno utilizará um computador para realizar as atividades propostas pelo professor/pesquisador. O aluno teve acesso a atividade, digitando https://www.geogebra.org/classic/f3bcejga.

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta.

Se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar

Se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário e para valores menores que zero o sentido é horário, e também vai aumentando a sua velocidade de animação.

É bom ressaltar que a atividade 10, alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade de entender o conceito da função tangente, principalmente quando o ponto $P_n$ se desloca no $2^0$ até o $4^0$ quadrante, devido a função ser crescente, e variar de $-\infty$ até zero, no eixo da tangente.

Na resolução das atividades, buscamos concentrar nas dificuldades apresentadas pelos alunos, para a aprendizagem da definição da função tangente no ciclo trigonometria e algumas de sua propriedades, alguns alunos precisaram da interferência do professor/pesquisador, para entender, porque, não tem tangente em $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e em $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$., e também quando o ponto $P_n$ percorre o segundo e terceiro quadrante, temos que traçar uma reta, passando pelo ponto $P_n$ e pela origem, até interceptar o eixo da tangente, portanto, a tangente será o segmento de comprimento no eixo da tangente da origem A= (0,1) até a intersecção da reta com o eixo da tangente se existir.

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações, percebemos que essa metodologia para ensinar, os parâmetros do gráfico da função tangente no plano cartesiano, pois verificamos que, os alunos/participantes realmente entenderam o conteúdo depois que o professor/pesquisador, tirou as dúvidas sobre a definição da tangente, período, domínio e imagens na tela de visualização do Geogebra, que fica comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A2, T1A1, T2A4, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A2

´´A imagem da função tangente é dada por: $Im$ = $R$ ou $Im$ = ]−∞,∞[``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A1

´´O período da função tangente é π``.

Acerca do trecho de voz do aluno T2A4

´´O domínio da função tangente é D = { x $\epsilon\, R/x \neq k\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ }``

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido ao desempenho da maioria dos alunos/participantes, em compreender e resolver as questões, manuseando o aplicativo já feito no Geogebra, para o entendimento dos conteúdos, isto é, definição da função tangente e suas propriedades, explorando o básico, mais também com questões com um pouco de complexidade.

O 5º encontro demandou de 110 min, no dia 23/09/22 e consistiu na apresentação do trabalho que foi desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários para o manuseio do aplicativo para a resolução das atividades, de acordo com a quadra 7.

Tabela - 7 - Atividade 11 e 12, do experimento didático

| |
|---|
| Atividade 11 Gráfico da função tangente<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões |
| Atividade 12 Parâmetros da função tangente no Geogebra<br>Foi apresentado ao aluno, um link contendo o endereço do aplicativo Geogebra, para ser manuseado e também resolver uma lista de questões |

Fonte: Do próprio autor

No desenvolvimento da atividade 11, buscamos reproduzir de forma simples e clara, a construção do gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico e algumas de suas propriedades

A aplicação do experimento didático, buscamos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos/participantes, na construção do gráfico da função tangente, com a interferência do professor/pesquisador tirando as dúvidas quando foi necessário.

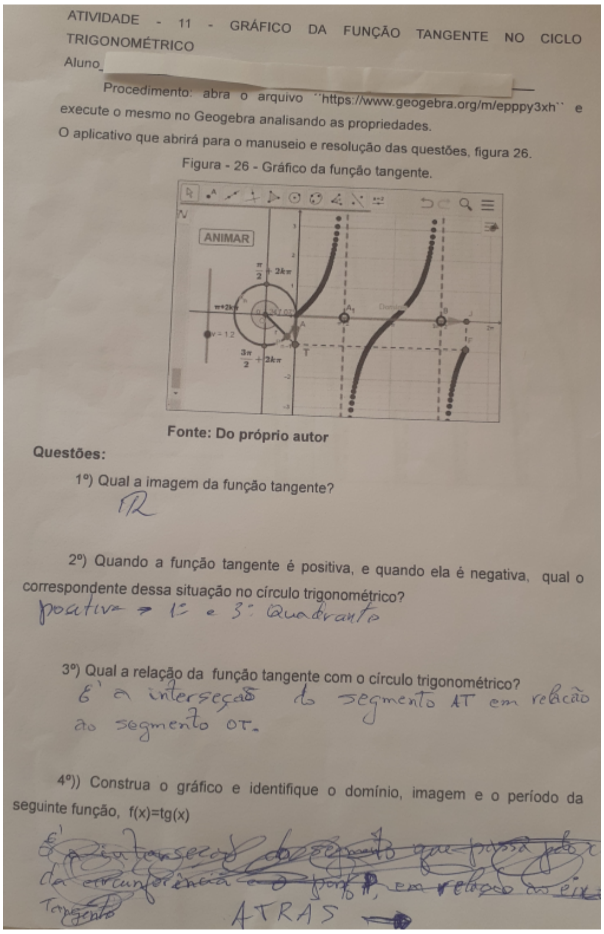
EXPERIMENTO 11**,** digitando o link, https://www.geogebra.org/m/epppy3xh, que está na parte de cima na lista de questões.

Para resolução das questões é necessário manusear os botões < ANIMAR > e o controle deslizante < v >, da seguinte maneira:

Se clicar pela primeira vez, no botão < ANIMAR>, o ponto P movimenta, se Clicar pela segunda vez no botão < ANIMAR > o ponto P vai parar de movimentar, se arrastar o controle deslizante < v > para valores maiores que zero, o ponto P movimenta no sentido anti-horário, e também vai aumentando a sua velocidade de animação.

Selecionamos a atividade dos alunos/participantes T2A25, por ser também a resposta da maioria dos alunos/participantes do experimento didático. Figura 78.

Figura - 78 - Resolução do aluno T2A25


ATIVIDADE - 11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno_____

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/epppy3xh`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 26.

Figura - 26 - Gráfico da função tangente.



**Fonte: Do próprio autor**

**Questões:**

1º) Qual a imagem da função tangente?

$\mathbb{R}$

2º) Quando a função tangente é positiva, e quando ela é negativa, qual o correspondente dessa situação no círculo trigonométrico?

positiva → 1º e 3º Quadrante

3º) Qual a relação da função tangente com o círculo trigonométrico?

É a interseção do segmento AT em relação ao segmento OT.

4º)) Construa o gráfico e identifique o domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x)=tg(x)

~~É a intersecção do segmento que passa pelo~~
~~da circunferência e o ponto P, em relação ao eixo~~
~~Tangente~~

ATRÁS

Fonte: Do próprio autor

No desenvolvimento da atividade 11, percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, Ao analisarmos os registros de voz, das gravações percebemos que essa metodologia serviu para entender a definição da função tangente no ciclo trigonométrico, com a interferência do professor/pesquisador foi efetivamente viável, verificamos que os alunos/participantes realmente aprenderam o conteúdo, que é comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T1A5, T1A13, T2A21, e T2A34, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A5

´´ O aplicativo é legal, os quadrante negativos a tangente sai da origem e vai para o infinito positivo``

Acerca do trecho de voz do aluno T1A13

´´ nos quadrantes positivo a tangente vem subindo do infinito negativo``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A21

´´Agora que eu entendi, porque não existe a tangente de $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, e devido a reta não corta a reta da tangente``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A34

´´ Neste aplicativo, eu entendi a imagem da tangente, é de menos infinito até mais infinito``

É bom ressaltar que é a construção do gráfico da função tangente, inicialmente os alunos demonstraram algumas dificuldades na análise do período e domínio, solicitaram ajuda para esclarecimento das questões, depois da intervenção do pesquisador, pode se dizer que os alunos conseguiram observar, analisar, refletir e registar as conclusões conseguidas na resolução das questões .

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido ao desempenho da maioria dos alunos em resolver as questões, manuseando o aplicativo no Geogebra, para o entendimento dos conteúdos, isto é, construção do gráfico da função tangente e suas propriedades.

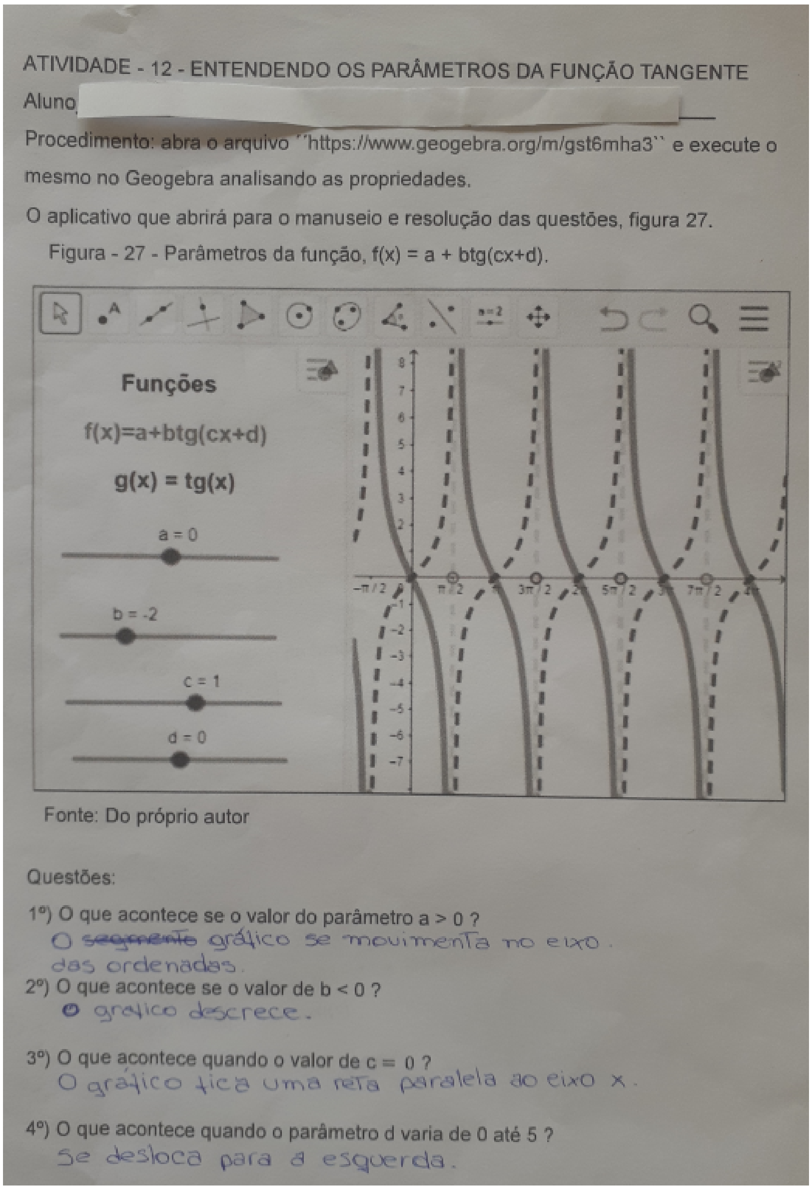
Percebemos na atividade 12 que a maioria dos alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las, devido ser assunto que tem grande semelhança com os assuntos que foi visto nas atividades 6 e 9.

EXPERIMENTO 12, digitando o link, [https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy](https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy), que está na parte de cima na lista de questões.

No desenvolvimento da atividade 12, buscamos reproduzir de forma simples e clara o entendimento dos parâmetros do gráfico da função seno no sentido anti-horário, destacando principalmente o seu domínio, imagem, período e amplitude.

Selecionamos a atividade 12, do aluno T1A7, por ser também a solução da maioria dos alunos/participantes do experimento didático Figura 79.

Figura - 79 - Resolução do aluno T1A7



ATIVIDADE - 12 - ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO TANGENTE

Aluno

Procedimento: abra o arquivo ``https://www.geogebra.org/m/gst6mha3`` e execute o mesmo no Geogebra analisando as propriedades.

O aplicativo que abrirá para o manuseio e resolução das questões, figura 27.

Figura - 27 - Parâmetros da função, f(x) = a + btg(cx+d).



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) O que acontece se o valor do parâmetro a > 0 ?
O ~~segmento~~ gráfico se movimenta no eixo das ordenadas.

2º) O que acontece se o valor de b < 0 ?
O gráfico descrece.

3º) O que acontece quando o valor de c = 0 ?
O gráfico fica uma reta paralela ao eixo x.

4º) O que acontece quando o parâmetro d varia de 0 até 5 ?
Se desloca para a esquerda.

Fonte: Do próprio autor

Na atividade 12 do experimento didático, foi construído duas funções, f(x) = tg(x) fixa, e ponteada para servir de referência, e a função g(x) = a + b.tg(c.x + d), que se movimenta quando os parâmetros são alterados, isto é, a sua numeração.

Para resolução das questões é necessário manusear os controle deslizante < a >, < b >, < c >, e < d >, da seguinte maneira:

O controle deslizante < a > quando arrastado, o parâmetro ´´a``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < b > quando arrastado, o parâmetro ´´b``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < c > quando arrastado, o parâmetro ´´c``, assumirá seus valores numéricos.

O controle deslizante < d > quando arrastado, o parâmetro ´´d``, assumirá seus valores numéricos.

No desenvolvimento da atividade 12, buscamos reproduzir de forma simples e clara o entendimento dos parâmetros em que cada controle representa uma característica da função tangente responsável pelas transformações dos seus gráficos, como translação/deslocamento vertical ou horizontal.

Ao analisarmos os registros de voz, das gravações percebemos que essa metodologia serve para o estudo dos parâmetros da função tangente, pois verificamos que os alunos/participantes realmente aprenderam que os parâmetros tem a finalidade de modificar o domínio, amplitude e o período da função tangente, que é comprovada nos recortes de fala dos alunos/participantes T2A14, T2A3, T1A15, e T1A3, respectivamente.

Acerca do trecho de voz do aluno T2A14

´´Quando é modificado os valores do parâmetro ´´a``, há uma translação vertical``

Acerca do trecho de voz do aluno T2A3

´´Quando é modificado os valores do parâmetro ´´b`` há uma inclinação do gráfico em crescente ou decrescente.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A15

´´Quando é modificado os valores do parâmetro ´´c``, há uma alteração no período.

Acerca do trecho de voz do aluno T1A3

´´Quando é modificado os valores do parâmetro ´´d`` o gráfico desloca no eixo x``.

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, devido ao desempenho da maioria dos alunos/participantes, em resolver as questões, manuseando o aplicativo, que buscou possibilitar a construção do conceito dos parâmetros, que representam as transformações gráficas da função tangente, ao final do experimento didático, alguns

alunos relataram, espontaneamente, que gostaram de utilizar o software GeoGebra para resolver as questões propostas

Consideramos que o desenvolvimento das 12 atividades no software Geogebra gerou resultados satisfatórios, evidentemente, que nas resoluções das questões propostas, alguns alunos enfrentaram algumas dificuldades, o que é absolutamente normal, até porque, era a primeira vez que os alunos/participante, estavam individualmente manuseando um aplicativo no Geogebra.

É bom ressaltar que utilizamos a Teoria da Análise Instrumental de Rabardel (1995) para analisar como os alunos/participantes (sujeitos) manipularam o software GeoGebra e interagiram com ele (instrumento). Ela proporcionou uma análise das ações dos sujeitos, que são os alunos do 2° ano do Instituto Federal do Maranhão, com o instrumento, que é o Software Geogebra, no decorrer de toda aplicação do nosso experimento didático formado de 12 atividades, nomeado de objeto, isto é, os conteúdos de razões trigonométricas, função cosseno, função seno, função tangente e suas propriedades.

Além disso, observamos, os Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo, em língua natural e o registro figural. O registro discursivo é utilizado para enunciar as definições, os teoremas ou as hipóteses, enquanto o registro figural é necessário para evidenciar propriedades que estão contidas no desenho. (DUVAL, 2004).

Analisamos também os prováveis erros de tratamento e conversão, que se deu nos registros escritos, na hora de resolver as questões e também nos registros de vozes. Estas transformações foram observadas num mesmo registo da teoria das representações semióticas de DUVAL. Os erros foram corrigidos com a interferência do professor/pesquisador.

Também é importante deixar claro que apresentamos algumas reflexões para fundamentar a adoção da análise microgenética, na construção de conceitos matemáticos, a partir de procedimentos de intervenção de um mediador mais experiente, isto é, as interferências do professor/pesquisador, para minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos/participantes no desenvolvimento das 12 atividades, embora, haja uma necessidade de incorporar a tecnologia nas atividades educacionais, é importante termos em mente que o professor continuará sendo uma peça fundamental neste processo  de ensino e aprendizagem

Diante desse contexto, tendo em vista a análise obtida por meio dos registros corretos dos alunos e de suas manifestações favoráveis em relação ao software, tanto pelas afirmações feitas durante a realização das atividades quanto pelas mensagens via registro de vozes, acreditamos que a realização das atividades com as razões trigonométricas no triângulo retângulo, nas funções seno, cosseno e tangente, apoiadas pelo software Geogebra, apresentaram resultados satisfatórios. Portanto, acredita-se ter atingido o objetivo proposto, o que nos leva a validar a hipótese de que as atividades, utilizando o software Geogebra, são capazes de potencializar o aprendizado das funções trigonométricas.

No capítulo a seguir, procurou-se descrever se o trabalho com o uso do Geogebra, facilita a aprendizagem de alguns conteúdos da trigonometria, através de 12(doze)  atividades práticas, utilizando aplicativo construído no software GeoGebra.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho foi desenvolvido a partir de análises sobre as inquietações diante das queixas dos alunos do Ensino Médio em relação às dificuldades para entender o conteúdo de matemática denominado de trigonometria, numa tentativa se impedi-los de desistir desse aprendizado, pois tornou-se frequente ouvir dos alunos expressões como “a trigonometria é muito difícil”, “é impossível aprender esse negócio”.  Buscamos uma alternativa que abordasse as relações trigonométricas no triângulo retângulo e as funções trigonométricas em ambientes dinâmicos com o auxílio do software Geogebra. O contexto da pesquisa abrangeu 35 alunos do ensino médio do Instituto Federal do Maranhão, Campus Monte Castelo de São Luís, Maranhão.

Iniciamos o nosso trabalho com uma revisão da literatura na busca por pesquisas que relacionassem a Trigonometria ao software GeoGebra. Encontramos alguns textos, mas selecionamos 10 trabalhos de dissertações, os quais apresentaram excelentes contribuições. Partindo dessas leituras, procurou-se desenvolver e analisar uma sequência didática envolvendo 12 atividades com os seguintes conteúdos: as relações trigonométricas no triângulo retângulo, as funções seno, cosseno e tangente.

A seleção dos textos auxiliou o professor/pesquisador no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de trigonometria e ainda beneficiou as percepções dos alunos/participantes acerca da importância da utilização de softwares como o GeoGebra visando uma educação mais significativa para o ensino de trigonometria.

Este trabalho expõe as interpretações que finalizam esta pesquisa científica e, a partir dessa investigação, foi possível responder à seguinte questão: uma sequência didática usando o GeoGebra potencializa a aprendizagem das relações trigonométricas do triângulo retângulo, as funções seno, cosseno e tangente?

Nessa pesquisa, foi proposta uma metodologia com a finalidade de analisar um modelo alternativo que favorecesse o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente, levando em consideração uma geração que já nasceu inserida no mundo da tecnologia. Usamos a teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) e a Teoria da Semiótica de Raymond Duval

(2012) para analisar os registros escritos e observamos alguns trechos dos registros de voz, para interagir com os participantes. Foi necessário introduzir a análise microgenética, para serem feitos os detalhes, as minúcias de aspectos relevantes, nas conversões e nos tratamentos, que permitem interpretar o fenômeno de interesse.

Aliamos a tecnologia, no caso o software Geogebra, às 12 atividades da nossa sequência didática, tendo sido alcançado o resultado esperado após a aplicação do experimento didático.

Os participantes tinham de seguir alguns procedimentos para conjeturar sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo e as funções trigonométricas a partir do movimento dos botões <ANIMAR> e <v> e resolver algumas questões sobre as suas caraterísticas (conceito, definição, propriedades dos quadrantes, domínio, imagens, amplitude, período e seus parâmetros).

Essas atividades foram baseadas na teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), na a Teoria da Semiótica de Raymond Duval (2012) e na análise microgenética, o que gerou resultados satisfatórios. Entretanto, acreditamos que somente desenvolver as atividades no GeoGebra não tenha sido o suficiente. Nesse sentido, também merece destaque a participação dos registros feitos pelos 5 (cinco) professores do Instituto Federal do Maranhão, do Campus Monte Castelo, do departamento de matemática, todos efetivos com mais de cinco anos de experiência, durante a realização das atividades.

As sugestões dos professores do IFMA foram aceitas em partes, mas foram de extrema importância para o desenvolvimento das atividades, por acreditarmos que os saberes experienciais, produzidos pelos docentes por meio da vivência, no ambiente escolar, com alunos e colegas de profissão, são fundamentais para a aprendizagem. Com isso, concluímos que a aplicação de nossa sequência didática foi aceitável e teve efeitos positivos nos processos de ensino e aprendizagem.

Para analisar a sequência didática sobre os registros de vozes dos experimentos didáticos desenvolvidos pelos alunos/participantes no laboratório de informática, houve a interferência do professor/pesquisador para tirar algumas dúvidas no tratamento e conversão na resolução das questões do experimento didático. Foi verificado que a nossa sequência didática seguiu uma sequência lógica. Os resultados nos mostram que a aprendizagem dos alunos/participantes gradativamente aconteceu, pois se sentiram motivados, desafiados e envolvidos com o nosso objeto de estudo.

A metodologia usada nesta pesquisa, a teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), foi fundamental para nossa sequência didática, demonstrando resultados positivos. Em relação à aprendizagem dos alunos/participantes, no início eles tiveram dificuldades em manusear o Software GeoGebra, mas, no decorrer das atividades, essa dificuldade foi superada. Assim, essa interação entre o instrumento e o objeto nas 12 (doze) atividades que formam nosso experimento didático auxiliou na melhoria do processo de ensino - aprendizagem em todo nosso experimento.

A análise dos registros escritos e de vozes, por meio da Teoria da Semiótica de Raymond Duval, mostrou que nossa sequência didática facilitou a aprendizagem dos alunos/participantes no decorrer de todo experimento didático, pois foram verificadas transformações de conversão e de tratamento, o que se deu quando o aluno foi capaz de transformar esse registro no mesmo sistema semiótico ou não, isto é, quando os alunos/participantes foram capazes de escolher o mais adequado dos registros de representações, quais sejam:

- Discursivas: Registro de Representação Linguística (língua materna) e o Registro de Representação Simbólica (equação algébrica)
- Não-discursivas: Figuras Geométricas Planas ou em perspectiva e Gráficos cartesianos.

Para Duval, quando o aluno é capaz de realizar conversões entre representações, ocorre aprendizagem, levando-nos a entender que, desse modo, os resultados dessa análise foram alcançados satisfatoriamente.

Na metodologia da análise microgenética, foram observados os registros de vozes e escritos no desenvolvimento das atividades, isto é, o que o estudante tem a dizer do seu próprio ponto de vista no que diz respeito às dificuldades de interagir com o experimento didático. Com isso, aliamos o professor/pesquisador e os conteúdos de ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas, que resultam em diferentes padrões de interações. É bom ressaltar que não foi fácil, mas o resultado após a intervenção do professor/pesquisador por meio de interações ao falar sobre a aplicação do experimento didático foi satisfatório.

Nesse sentido, na primeira atividade foram feitas revisões sobre os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente nos triângulos retângulo, que são conteúdos do $9^0$ ano. No início os participantes tiveram um pouco de dificuldade em aceitar como dois triângulos de lados diferentes possuem razões trigonométricas iguais, devido não lembrarem ou não saberem que estavam investigando triângulos semelhantes. Com a intervenção do professor/pesquisador no desenvolvimento da atividade 1, acabou ocorrendo a compreensão esperada. A teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) e os registros de representações semiótica de Duval (nas transformações de conversão e de tratamento, que se deu na hora de aplicar as propriedades das razões trigonométricas) foram fundamentais para proporcionar aos alunos/participantes um envolvimento maior com o objeto de estudo. Ao final, todos passaram a entender o conteúdo.

Em seguida, foram trabalhados os seguintes conteúdos trigonométricos: o círculo trigonométrico e seus quadrantes, propriedades dos sinais, definição das imagens dos seus respectivos arcos, arcos congruentes e as reduções dos arcos para o primeiro quadrante. Os registros de voz correlacionaram Sujeito e Instrumento, pois os resultados nos mostram que a aprendizagem dos alunos/participantes foi se dando gradativamente, pois houve algumas dificuldades nos conteúdos dos arcos, principalmente na redução para o primeiro quadrante. Devido à análise microgenética, o professor/pesquisador intermediou o entendimento, fazendo com que os alunos apresentassem mudanças de atitudes em relação ao conteúdo. Observou-se pelo menos dois registros de representação para um mesmo objeto, ou seja, quando o aluno é capaz de realizar conversões entre representações, ocorre a aprendizagem.

Na terceira atividade, foi analisada a transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano. Os registros de vozes dos alunos/participantes nos mostraram a relação do Sujeito com o Instrumento. Não houve dificuldades, portanto, avaliamos o resultado da atividade 3 (três) como satisfatório.

As demais funções trigonométricas seno, cosseno e tangente foram sequenciadas. Primeiro construímos o ciclo trigonométrico para se observar as projeções do ponto $P_n$ em relação ao eixo das abscissas, das ordenadas e ao eixo das tangentes; depois, registar as suas conclusões a respeito das propriedades dos quadrantes, isto é, em quais quadrantes as funções cosseno, seno e tangente serão positivos, negativo, crescente, decrescente; em seguida, entender arcos congruentes e, por fim, definir suas imagens, domínio e período. A análise dos registros escritos, por meio da Teoria da Semiótica de Raymond Duval (2012), mostrou que nossa sequência didática seguiu uma sequência lógica. Foram observadas transformações de conversão e de tratamento nos registros de representação semiótica.

Dando continuidade, para Duval (2012) quando o sujeito é capaz de coordenar e mobilizar pelo menos dois registros de representação para um mesmo objeto, ou seja, quando o aluno é capaz de realizar conversões entre representações, ocorre aprendizagem. Observamos também alguns trechos dos registros de voz, que mostram a teoria da Instrumentação de Rabardel (1995), isto é, a relação dos alunos/participantes com o instrumento (Geogebra). Assim, verificou-se que, a partir da proposta de atividades apresentada, o objetivo foi atingido satisfatoriamente.

Em seguida, foram construídos os gráficos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, a partir do movimento dos botões <ANIMAR> e <v>, cujo objetivo foi entender a sua construção gráfica. Também pretendeu-se que os alunos/participantes investigassem as características (domínio, imagens, amplitude, período e seus parâmetros) da função seno, cosseno e tangente, através do processo de movimento e visualização do objeto na tela de visualização. Foram observadas nos registros de representação semiótica transformações de conversão e de tratamento. Para Duval (2012), quando o sujeito é capaz de coordenar e mobilizar pelo menos dois registros de representação para um mesmo objeto, ocorre aprendizagem. Os registros de voz nos mostraram a relação do Sujeito com o Instrumento, levando-nos a concluir que a aplicação de nossa sequência didática foi aceitável e teve efeitos positivos.

Dando sequência às funções trigonométricas, criamos um aplicativo para os participantes do experimento didático entenderem as construções gráficas das funções cosseno, seno e tangente, quando são submetidas às alterações dos seus parâmetros. Percebemos no relato de vozes dos estudantes que eles conseguem identificar com dificuldades as mudanças a que os gráficos são submetidos. Nessa situação, o professor/pesquisador interferiu explicando as mudanças gráficas quando se manipulam os parâmetros das funções trigonométricas, principalmente da função tangente por ser um pouco diferentes em relação às funções cosseno e seno, pois puderam ver e entender de forma dinâmica as modificação dos gráficos.

Os alunos/participantes, ao generalizarem as regularidades observadas em cada atividade, nos permitem concluir que o objetivo geral foi atingido satisfatoriamente, a partir da proposta de atividades apresentada. Espera-se, pois, terem sido fornecidos subsídios para o ensino de trigonometria.

Por meio da realização desse trabalho apresentamos o roteiro para construção de uma sequência didática, através de atividades desenvolvido no software Geogebra, que é destinado a estudantes do Ensino Médio, como um instrumento de apoio ao ensino das funções trigonométricas cosseno, seno, tangente e seus parâmetros com seus respectivos conceito, definição e algumas propriedades.

Finalizamos com a plena certeza de que é possível o uso do software GeoGebra na perspectiva do desenvolvimento de uma metodologia ativa, dinâmica e inovadora. Que se faça uso dessas tecnologias em ambiente escolar de forma interativa, visando desenvolver a capacidade de resolver atividades de trigonometria. Assim, desejamos que nossa sequência didática possa contribuir como uma alternativa para o ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo, funções cosseno, seno, tangente e algumas propriedades. Além disso, espera-se que este relato possa oportunizar discussões e reflexões acerca do uso das tecnologias no ensino de Matemática.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACELAR JR., J.S. **O uso do GeoGebra no ensino da trigonometria.** 2013. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Ceará

BRUGINSKI, William José. **Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software Geogebra para o estudo de funções trigonométricas.** 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná,Curitiba,2014.Disponível em:http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/802. Acesso em 9 de fevereiro de 2022

BUFFO, Camila Molina. **Análise de utilização do software geogebra nas dissertações do PROFMAT para elaboração de uma proposta de atividade para o ensino médio com o auxílio do geogebra.** 2019, 104 f. Dissertação - Mestrado Profissional em Rede Nacional, Instituto de Ciência Matemática e Computação, Universidade de São Paulo. 2019.Disponível em: https://www.teses.usp.br, de-23082019-161742 . Acesso em 17 de fevereiro de 2022.

CORRÊA, Rosana dos Passos. **O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades.** 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016. Disponível em: http://ccse.uepa.br. Acesso em 04 de fevereiro de 2022.

LIMA, Acinéia Santos. **A utilização do geogebra em situações didáticas para a aprendizagem de funções trigonométricas -** Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Salvador, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11896/1182. Acesso em 05 de fevereiro de 2022

LOURENÇO, Rebecca. **Funções trigonométricas**: Produção de uma sequência didática potencialmente significativa à luz da abordagem histórico-epistemológica.

2018. 209 f. Dissertação - Mestrado em ensino. Universidade Estadual do norte do Paraná. Paraná, 2018. Disponível em: dissertação-ppgec Rebecca Lourenco (2).pdf. Acesso em 9 de fevereiro de 2022.

. MACHADO, M. M. **Geogebra: uma proposta para o ensino de funções trigonométricas.** 2020. 184 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2020. Disponível em:http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/10604. Acesso em 03 de fevereiro de 2022.

OLIVEIRA, André Carneiro de. **Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente -** Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande, 2014. 81 f. Disponível em: https://www.ufcg.edu.br. Acesso em 08 de fevereiro de 2022.

SALAZAR, Denise Mansoldo, **Geogebra e o estudo das funções trigonométricas no ensino Médio -**2015. 132 f. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3241. Acesso em 05 de fevereiro de 2022

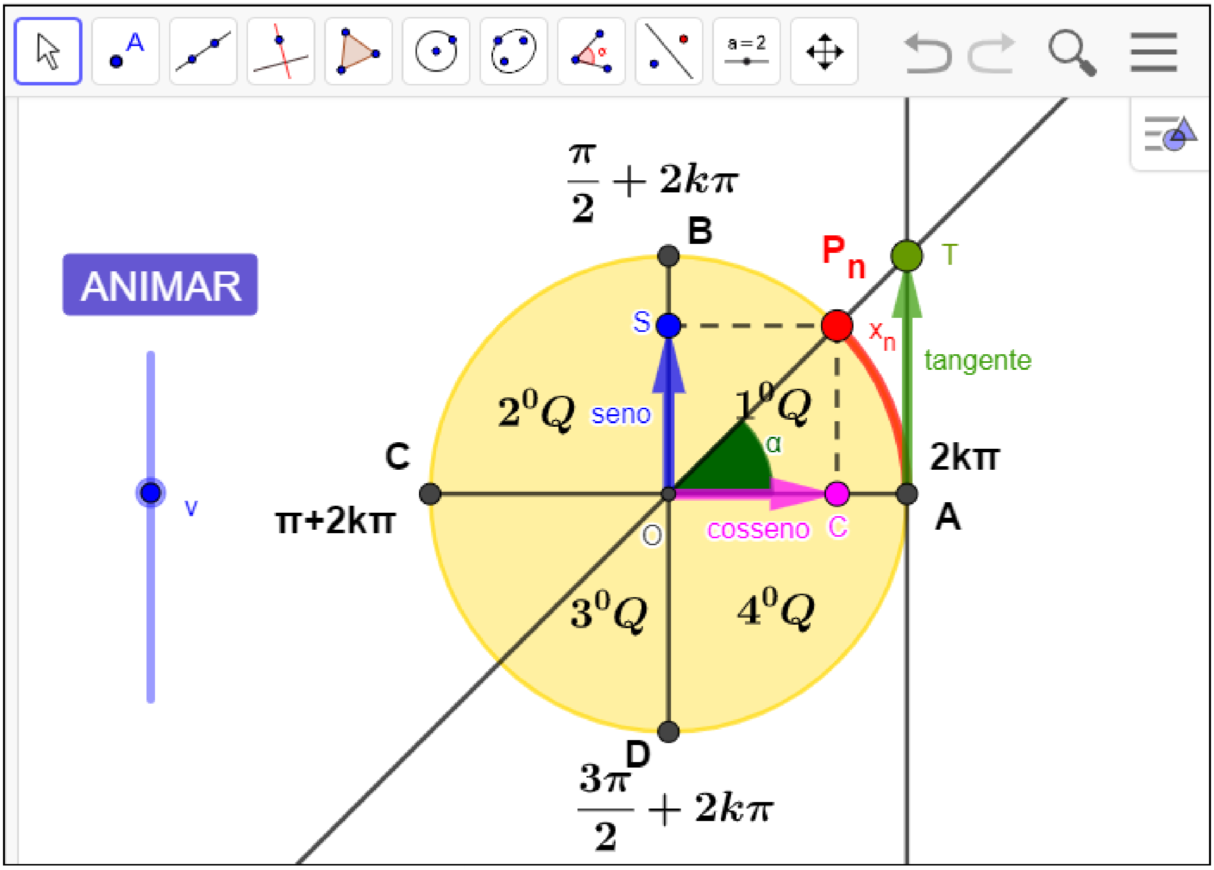
SOUSA, Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de**. SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT** - Universidade Federal do Maranhão, 2018. p.62 .2018. Disponível em:https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/tede/2564. Acesso em 07 de fevereiro de 2022.

# 9. ANEXOS

**PRODUTO EDUCACIONAL**


**JOSÉ HENRIQUE PEREIRA**

**FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES**


**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**

**ATIVIDADES PARA O ENSINO DO SENO, COSSENO E TANGENTE**

BELÉM/PA

2023

**Diagramação e Capa:** Os Autores
**Revisão:** Os Autores



---

PEREIRA, José Henrique Pereira

Funções trigonométricas, Ensino do seno, cosseno e tangente: Atividades para o ensino das razões trigonometria no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente / José Henrique Pereira, Fábio José da Costa Alves. - Belém, 2023.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de seno, cosseno e tangente em ambientes dinâmicos” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Fábio José da Costa Alves ( Orientador).

---

## 1. APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é parte integrante da pesquisa de Mestrado e tem como objetivo socializar uma sequência de atividades para o ensino das funções trigonométricas por meio do uso do software GeoGebra. A referida pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – IFMA Campus Monte Castelo em São Luís com estudantes do segundo ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico de Eletrônica.

O interesse por esta pesquisa surgiu a partir de reflexões e angústias sobre as queixas dos meus alunos do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas na resolução de problemas que envolvem funções seno, cosseno e tangente, e além de precisarem assimilar os temas que são próprios deste assunto, ainda precisam lembrar outros temas anteriormente estudados, tais como circunferência, arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico, que exercerá como pré-requisitos para introduzir este conteúdo.

Este produto educacional é sugerido de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos.

Neste produto educacional, apresentaremos 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, analisando seu domínio, imagens, amplitude e período, faremos também uma análise dos parâmetros utilizando o aplicativo Geogebra, *cujo propósito principal era introduzir o estudo das funções trigonométricas, fazendo uso do software GeoGebra*

À medida que os alunos interagem com o computador, dependendo da sua manipulação, eles visualizam imediatamente o que está acontecendo, assim a utilização da informática no ensino da Matemática, o aluno se deparará com situações em que ele necessite de utilizar, os conceitos, propriedades e definições matemáticos para ser aplicados nas funções seno, cosseno e tangente. Portanto, o software Geogebra foi escolhido para este trabalho pelos seguintes motivos: ele é

Um software de geometria dinâmica de fácil manipulação, também é um software livre e de fácil acesso, pode ser instalado no seu computador pessoal.

O software geogebra possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

**2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Neste Capítulo apresentaremos 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, analisando seu domínio, imagens, amplitude e período, faremos também uma análise dos parâmetros utilizando o aplicativo Geogebra.

Esta sequência didática é sugerida de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos.

As atividades e os aplicativos desenvolvidos no Geogebra podem ser encontrados no endereço que será postado no desenvolvimento das atividades.

. Iniciaremos as atividade nesta sequência didática relembrando um pouco das definições das razões trigonométricas estudadas no ensino fundamental, utilizando o aplicativo Geogebra, serão feitas algumas recomendações para o manuseio do aplicativo, para o entendimento e a aprendizagem dos conteúdo.

No desenvolvimento dessa experiência didática, foram criadas algumas atividades no Geogebra, que será entregue para os alunos/participantes, isto é, uma cópia para cada aluno, e solicitar que seja feita sua leitura, depois que ele abra o aplicativo Geogebra já estruturado no link solicitado, para estudar as questões, de razões trigonométricas no triângulo retângulo, as funções trigonométricas,

A primeira atividade, foi pensada para fazer o estudo os conteúdos que são estudados no Ensino Fundamental, e tem a finalidade de relembrar esses conteúdos, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, denominado de Razões trigonométricas, onde é possível explorar as razões trigonométricas do triângulo retângulo de forma dinâmica.

## 2.1 ATIVIDADE 1 - AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

**Objetivo.**

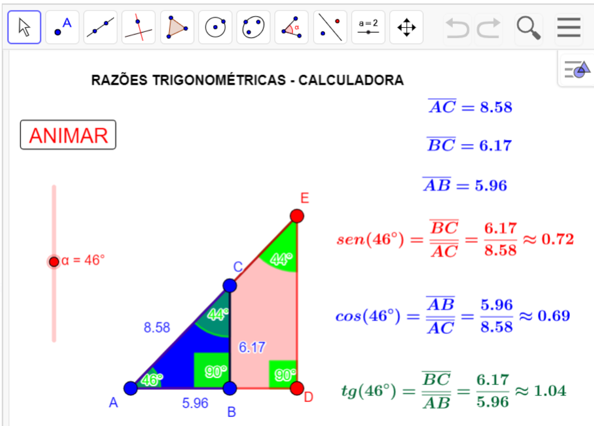
Esta atividade de experimento didático, tem como objetivo consolidar os conceitos, definições das razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

**Lista de atividades**

Nesse sentido propomos uma lista de exercícios que retrata as relações trigonométricas no triângulo retângulo, que deverão ser desenvolvidas com o auxílio do software GeoGebra, e averiguar a veracidade do resultado junto ao programa Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf. Responda.

Aluno: ______________________________________________________

Figura - 1 Razões trigonométricas




Fonte: Do próprio autor

**EXERCÍCIOS**

1º) O valor do sen($30^0$), é aproximadamente ?

2º) Na figura acima o cos($46^0$) é aproximadamente?

3º) Na figura acima o sen($60^0$), é aproximadamente?

4º) Na figura acima, a tg($29^0$) do triângulo retângulo, é aproximadamente?

**2.1.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no entendimento das razões trigonométricas.**

O aluno, de posse do aplicativo online geogebra – Aplicativos Matemáticos, https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf, explora as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo) a partir da manipulação desse aplicativo

No experimento, clique no Botão <Animar>, arraste o controle deslizante <a>, para escolha do ângulo e façam anotações do que observaram das medidas dos lados do triângulo retângulo em seguida, determine as razões entre os lados.

**2.1.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo**

a) Manuseando o aplicativo Identificar as características fundamentais das relações trigonométricas no triângulo retângulo (Medidas dos lados), isto é, pode utilizar um instrumento para medir o segmento ou utilizar as medidas do aplicativo que está exposto na tela de visualização.

b) Depois sugerir que os participantes encontrem o seno, cosseno e tangente dos ângulos das seguintes razões trigonométricas .

$\cos(30^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ ,

$\operatorname{sen}(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ,

$\operatorname{tg}(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\operatorname{sen}(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,

$\cos(60^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ ,

$\operatorname{tg}(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

c) Verifique se as razões trigonométricas no Triângulo retângulo, dependem somente de um ângulo fixo.

d) Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação das razões trigonométricas (algébrico, geométrico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

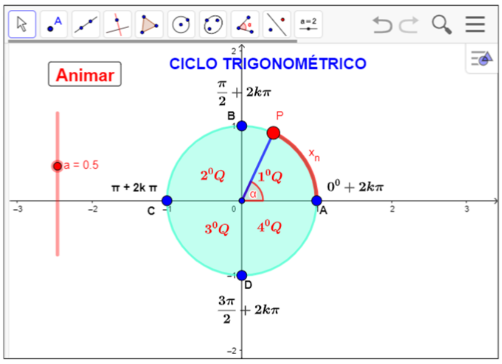
Ao realizar suas atividades, os alunos terão a oportunidade de argumentar sobre os resultados obtidos e, a partir das suas observações argumentativas, tirar conclusões sobre as propriedades das razões trigonométricas. Assim sendo, abre-se um espaço para a constituição de um ambiente em que os alunos se envolvem na discussão matemática, expondo e defendendo suas ideias, comentando as ideias dos colegas e levantando questionamentos sobre os resultados obtidos.

A segunda atividade, trabalha a circunferência trigonométrica de forma dinâmica, tem a finalidade de facilitar a compreensão deste conteúdo de trigonometria, utilizando o software Geogebra onde é possível explorar os quadrantes, imagens, ângulos, medidas de ângulos, congruência, determinação positiva e negativa, periodicidades, etc.

A CIRCUNFERÊNCIA OU CICLO TRIGONOMÉTRICO

Em um primeiro momento será apresentado o ambiente, onde os alunos irão trabalhar o aplicativo já estruturado (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px). Solicitar aos alunos que, usando os recursos do software geogebra, o botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, respostas às questões, interagindo com o aplicativo.

Figura - 2 - Ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Na segunda atividade vamos continuar o experimento no aplicativo Geogebra, desenvolvendo o conteúdo, círculo trigonométrico, O estudo da Trigonometria se inicia no final do Ensino Fundamental quando se apresentam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, mas é no Ensino Médio que esses conceitos se extrapolam para o ciclo trigonométrico, em que se estudam os arcos e os ângulos em uma ou mais volta na circunferência trigonométrica, além da introdução do radiano como outra unidade de medida de ângulos.

## 2.2 ATIVIDADE - 2 - ENTENDENDO A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA.

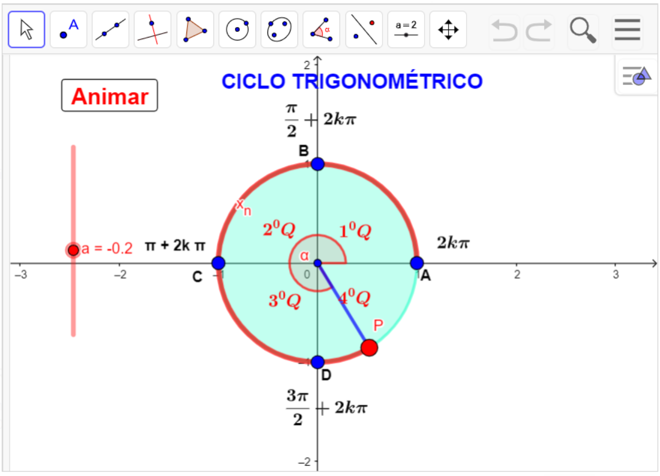
Nome do aluno: ______________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade tem como objetivo consolidar os conceitos do ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições e propriedades do ciclo trigonométrico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 3.

Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/yvqs25px, e Responda

Figura - 3 -Ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

**Questões**:

1º) A circunferência é dividida em quantas partes iguais, e como são denominadas?

2º) O ponto P, fazendo um percurso de $245^0$, no sentido anti-horário, vai está em qual quadrante?

3º) O ponto P, fazendo um percurso de $-\ 1024^0$ , no sentido horário, vai está em qual quadrante?

4º) Representar, no ciclo trigonométrico, as imagens do conjunto de números A = $\left\{x \epsilon R / x = k\frac{\pi}{2} \text{ , } k \epsilon Z\right\}$.

5º) Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{4}$, $12\pi$ ,$-\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{8}$.

### 2.2.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no ciclo trigonométrico.

Na atividade 2, vai ser feito um experimento para o entendimento do ciclo trigonométrico, usando o aplicativo já estruturado, encontrado no Geogebra.org.

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < Animar > e < a >.

2º) Se clicar no botão < Animar >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

4º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a < 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido horário.

5º) O nosso experimento é uma circunferência de raio unitário, isto é, (R = 1), divida em quatro partes de medida iguais, denominada de quadrante.

Sugestões para explorar o aplicativo no ciclo trigonométrico

1. De posse do aplicativo, se clicarmos no botão < Animar > e o controle deslizante < a >, com a > 0, o ponto P se movimentará no sentido anti-horário, partindo do ponto A(1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.
2. Se clicarmos no botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, com a < 0, o ponto P se movimentará no sentido horário, partindo do ponto A (1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.

### 2.2.2 Os quadrantes no ciclo trigonométrico

Observando o aplicativo do Geogebra, a circunferência unitária, está dividida em quatro partes iguais, de $90^0$, ou $\frac{\pi}{2}$ radianos, Se o ponto P percorrer todos os quadrantes, isto é o ponto P se deslocará do ponto A, até o ponto B, percorrendo o primeiro quadrante, continuando o seu deslocamento até o ponto C, então o ponto P, fará o percurso no segundo quadrante, se o ponto P, continuar percorrendo até o ponto D, ele percorrerá o terceiro quadrante, se o ponto P, continuar se deslocando do ponto D até o ponto A, deslocou-se no quarto quadrante, então o ponto P completou uma volta completa que equivale ao comprimento da circunferência, que é C = $2\pi R$.

Logo chegaremos à conclusão que:

**Primeiro quadrante**: são os ângulos que estão entre $0^0$ a $90^0$, ou $o^0$, a $\frac{\pi}{2}$

**Segundo quadrante**: são os ângulos que estão entre $90^0$, a $180^o$, ou $\frac{\pi}{2}$ a π .

**Terceiro quadrante:** ângulos que estão entre 180º e 270º ou π e $\frac{3\pi}{2}$radianos;

**Quarto quadrante:** ângulos que estão entre 270º e 360º ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radiano

### 2.2.3 Imagens na circunferência no sentido anti-horário

Se o ponto $P_n$ está associado ao número $x_n$ , dizemos que $P_n$ é a imagem de $x_n$

Quando a cada número real $x_1$, associado a um único ponto $P_1$, na circunferência. Se $x_1$ > 0, então realizamos a partir de A, um percurso de comprimento $x_1$, no sentido anti-horário, e marcamos $P_1$ como ponto final do percurso, logo a imagem do número $x_1$, na circunferência é o ponto $P_1$.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$ , no ciclo trigonométrico, é o ponto B.

A imagem de $-\frac{\pi}{2}$ , no ciclo trigonométrico é o ponto D.

A imagem de π no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de $-$ π, no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de $10\pi$, no ciclo trigonométrico é o ponto A.

Notamos que se $P_1$, é a imagem do número $x_1$, então também é a imagem dos números, $x_1$+2π, $x_1$+4π, $x_1$+6π, ...São chamados de ângulos congruentes.

### 2.2.4 Imagens na circunferência no sentido horário

Se $x_2$ < 0,então realizamos a partir de A um percurso de comprimento de $x_2$ no sentido horário, marcamos $P_2$ como ponto final do percurso, notamos que $P_2$ é imagem de $x_2$. Logo também será de $x_2$- 2π, $x_2$-4π, $x_2$-6π, …

Foi construído um aplicativo no Geogebra, para que pudéssemos manusear e visualizar a transposição das imagens da circunferência para o plano cartesiano, por ser uma importante condição para continuarmos o nosso experimento.

2.3 ATIVIDADE - 3 - ENTENDENDO A TRANSPOSIÇÃO DAS IMAGENS DO CICLO TRIGONOMÉTRICO PARA O PLANO CARTESIANO

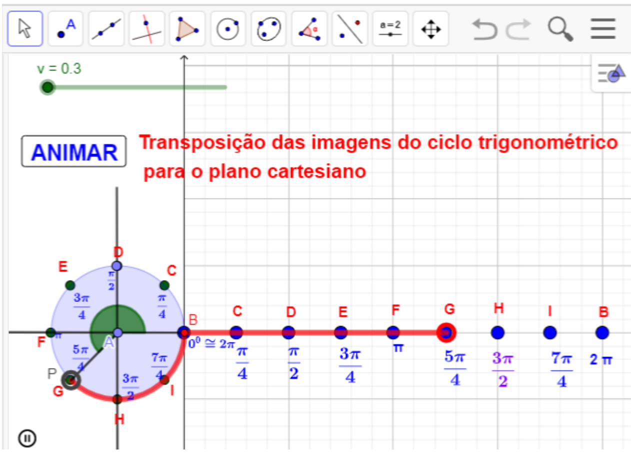
NOME DO ALUNO:______________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos e definições da transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico Geogebra.

Abra o aplicativo (https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9) e Responda.

Figura - 4 -Transposição das imagens do ciclo para o plano




Fonte: Do próprio autor

**Questões**

1º) Se α e β são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$ c) $\alpha = \beta + 2.360^0$ e) $\alpha = \beta + k.360^0, k\epsilon Z.$

b) $\alpha = \beta + 360^0$ d) $\alpha = \beta - 2.360^0$

2º) Manipulando o aplicativo, e observando as animações que representam as transposições das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, responda:

As imagens do seguinte conjunto. E= $\{x\epsilon R/\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ?

a) A, B b) D, H c) C, G d) B, F e) C, D

3º) Qual a imagem de um arco de $2700^0$ ?

a) A b) C c) D d) E e) F

### 2.3.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo na transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para v > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

Ao clicar no botão < ANIMAR > o aplicativa fará a transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é como se tivéssemos cortado a circunferência e esticado levando todas as propriedades da circunferência, mas na reta real, no eixo x do plano cartesiano. Vejamos alguns exemplos:

A imagem de $0^0$, é o ponto **B** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{4}$ é o ponto **C** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$ é o ponto **D** no eixo x.

A imagem de $\frac{3\pi}{4}$ é o ponto **E** no eixo x.

A imagem de $\pi$ é o ponto **F** no eixo x.

A imagem de $\frac{5\pi}{4}$ é o ponto **G** no eixo x

A imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é o ponto **H** no eixo x.

A imagem de $\frac{7\pi}{4}$ é o ponto **I** no eixo x.

A imagem de $2\pi$ é o ponto **B** no eixo x.

Como o gráfico é periódico, as imagens do gráfico se repetem, isto é, são as mesmas de acordo com os seus ângulos congruentes.

A imagem de $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, é o ponto **D** no eixo x, o ponto P, poderia ter dado várias voltas que a sua imagem, seria também o ponto **D** no eixo x.

A quarta atividade, trabalha o cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender a definição, conceitos, e propriedades sinais da função cosseno, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

## 2.4 ATIVIDADE - 4 - ENTENDENDO A FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

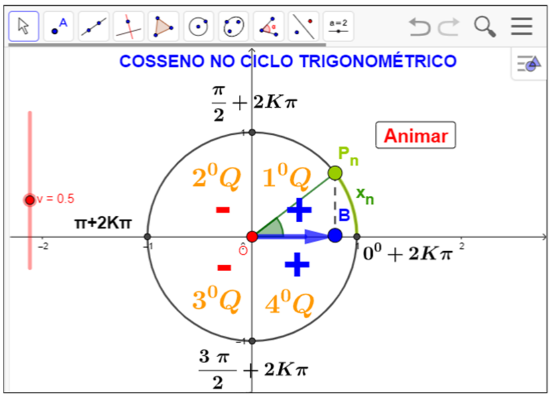
Aluno______________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e propriedades da função cosseno no ciclo trigonométrico, manuseando e visualizando as animações no geogebra, figura 5.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/nafgjakq`` e Responda.

Figura - 5 - Função cosseno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

**Questões**

1º) Em quais quadrantes o cosseno é positivo?

2º) Qual o valor da imagem do cosseno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

3º) Faça uma tabela que contenha os arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens.

4º) Manuseando o aplicativo, podemos encontrar o cossenos dos arcos, girando o ponto $P_n$, no sentido anti-horário. Qual é domínio e a imagem de f(x) = cos(π) ?

5º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes a circunferência de comprimento 2 $\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=cos(6π)?

6º) O ponto $P_n$, deslocando de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas. O cosseno neste local é ?

### 2.4.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função cosseno

1º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

2º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para v > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário, se arrastar o controle deslizante v < 0 ,vai aumentando sua velocidade, no sentido horário

Definição da função cosseno no aplicativo Geogebra

O ponto $P_n$, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico, a sua projeção em relação a abcissa OB, será o cosseno de $x_n$, isto é: OB = cos($x_n$).

### 2.4.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo

1. O ponto $P_n$, fará o percurso de $x_n$, a projeção do ponto sairá do ponto A=(1,0), e irá diminuindo até a origem da circunferência O=(0,0), logo diminuirá, ou seja, na origem o cosseno é zero. Portanto, no primeiro quadrante a função cosseno é decrescente.

2. O ponto $P_n$, continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem O=(0,0), e se deslocará até π, a medida desse deslocamento é 1(um), tamanho do raio (R = 1). Mas este deslocamento está no lado esquerdo dos eixos coordenados, pois, assume valores negativo, logo, $cos(\pi) =- 1$. Portanto a função no segundo quadrante é decrescente.

4) O ponto $P_n$, continuará o percurso no terceiro quadrante, saindo de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas O = (0,0), que corresponde a zero, pois a sua numeração aumenta, portanto, a função cosseno no terceiro quadrante é crescente.

5º) O ponto $P_n$, continuará o percurso no quarto quadrante, saindo de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$ , a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem O = (0,0) e se deslocará até 2π, pois assume valores positivos, logo, $\cos(2\pi) = 1$. Portanto a função é crescente.

A quinta atividade da função cosseno no ciclo trigonométrico, pode proporcionar ao aluno o entendimento da construção dos conceitos, definição, domínio, imagem, sinais, periodicidade de forma dinâmica.

## 2.5 ATIVIDADE - 5 - .ENTENDENDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO NO PLANO.

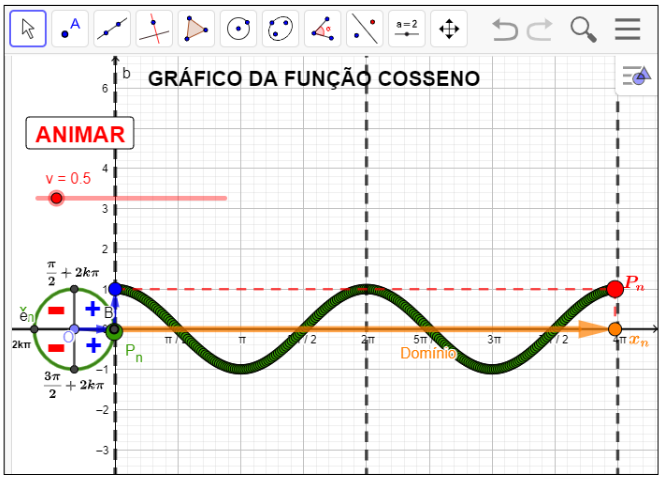
Aluno______________________________________________________________

**Objetivo:**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição, periodicidade, domínio imagem e amplitude do gráfico da função cosseno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico, figura 6.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz e Responda.

Figura - 6 - Cossenóide




Fonte: Do próprio autor

**Questões:**

1º) Qual a imagem da função cosseno?

2º) Quais quadrantes a função cosseno é positiva e quais são negativa,

3º) Quais os valores da função cosseno dos seguintes arcos:

a) $2k\pi$

b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\pi + 2k\pi$

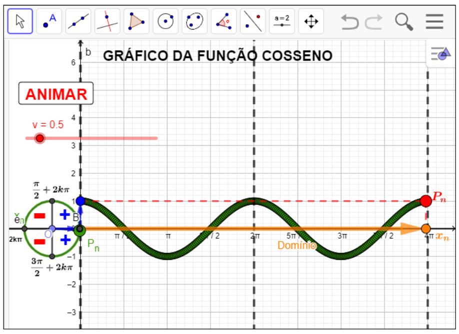
d) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

e) $-1470^0$

**2.5.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para a construção do gráfico da função cosseno.**

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz e execute o mesmo no Geogebra. Iniciaremos a manusear o arquivo clicando no botão < ANIMAR > e arrastando o controle deslizante < v > .para v > 0, a animação fica mais rápida.

Figura - 7 - Função cosseno no plano cartesiano




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante para v > 0, a animação fica mais rápida

O ponto $P_n$, se movimenta no ciclo trigonométrico, no sentido anti-horário, este deslocamento do ponto $P_n$, será transportado para o eixo das abscissas, passando a ser o domínio da função cosseno.

- Domínio é $R$, e a Imagem é o intervalo [−1, 1]
- .A função cosseno é periódica e seu período é 2$\pi$, pois $x_n$ e $x_n$ + 2k têm a mesma imagem $P_n$ no ciclo trigonométrico, é positiva no primeiro e quarto quadrante, é negativo no segundo e terceiro quadrante.
- A amplitude é a média aritmética entre os valores máximo e mínimo da função cosseno.

Na sexta atividade, estudaremos os parâmetros da função cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender, as modificações das construções dos gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), tendo como referência a função f(x) = cos(x), para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

## 2.6 ATIVIDADE - 6 - .ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO COSSENO NO GEOGEBRA

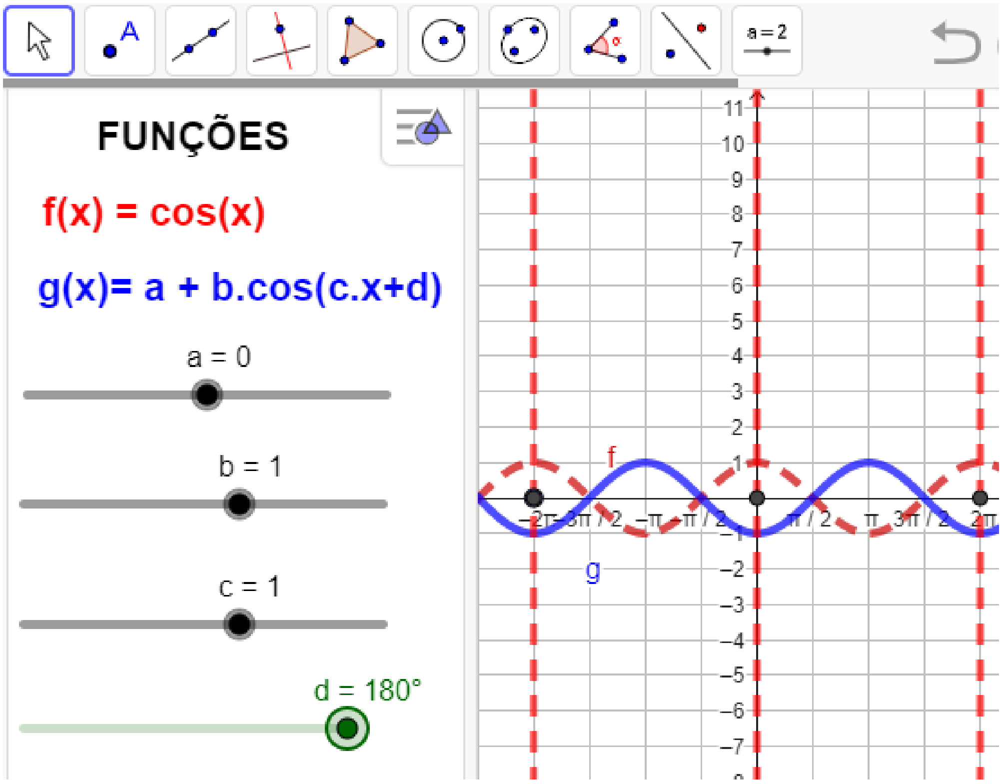
Aluno____________________________________________________________

Objetivo:

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo consolidar a construção dos gráficos da função cosseno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, visualizando as animações no aplicativo de forma dinâmica.

Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/pdzqgkra, e responda.

Figura - 8 - Parâmetros do cosseno,




Fonte: Do próprio autor

**Questões:**

1º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2cos(x)?

2º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=-2cos(x)?

3º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+2 cos(x)?

4º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+3 cos(2x)?

5º) Descreva o que você observa na função cosseno dada por f(x) = a+b.cos(c.x +d), Para b=1, c=1, d=0 , quando você arrasta o controle deslizante ´´a`` de zero até -3?

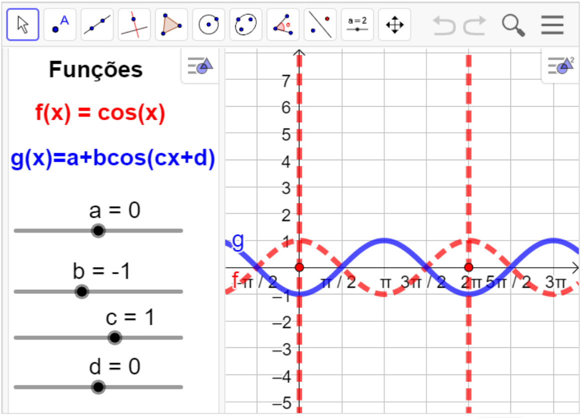
### 2.6.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função cosseno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/classic/w6gdzwwq

2º) Arraste os parâmetros da função ´´g(x)`` para se movimentar.

3º) faça a comparação das funções g(x) e f(x), figura 9.

Figura - 9 - Os Parâmetros da função cosseno,




Fonte: Do próprio autor

Procedimentos para construir o gráfico da função cosseno no aplicativo geogebra.

Essa atividade destina-se à comparação dos gráficos das funções f(x)=cos(x) e g(x)=a+b.cos(c.x+d), utilizando o aplicativo já estruturado no GeoGebra.

Para manusear é necessário arrastar os parâmetros a, b, c, d, constantes, na tela de visualização, e observar as modificações dos gráficos da função g(x) = a+b.cos(c.x+d).

### 2.6.2 Estudo dos parâmetros da função cosseno

Vamos fazer um experimento didático com os parâmetros das funções trigonométricas do tipo f(t)=a+b.cos(c.t+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros.

**Variação do parâmetro a**

Observando as construções de gráficos da função g(x)=a+cos(x) no aplicativo com variações do parâmetro ´´a``, temos como resultado um deslocamento vertical, da seguinte maneira.

No sentido positivo do eixo das ordenadas (para cima), se o valor do parâmetro ´´a`` for positivo, ou seja, a > 0;

No sentido negativo do eixo das ordenadas (para baixo), se o valor do parâmetro ´´a`` for negativo.

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros ´´a``, variando de -1≤ $a$ ≤3, b=1, c=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x) = a+b.cos(c.x+d).

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções, tabela 1.

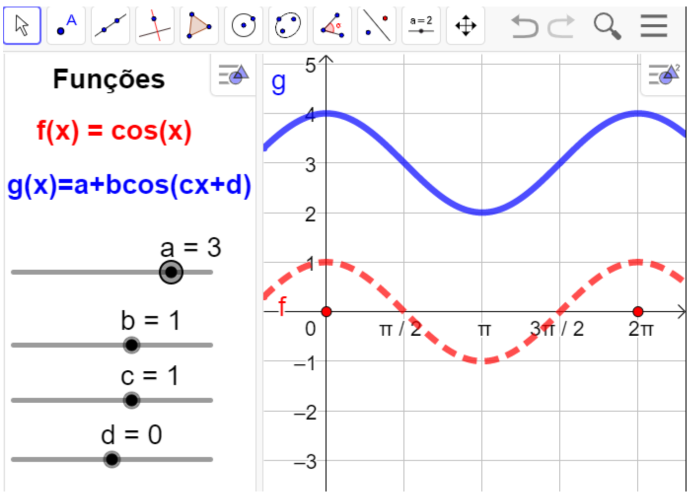
Tabela 1 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =a+cos(x), a∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [-1,1] | 1 | 2π |
| s(x)=1+cos(x) | R | [0,2] | 1 | 2π |
| g(x)=2+cos(x) | R | [1,3] | 1 | 2π |
| h(x)=3+cos(x) | R | [2,4] | 1 | 2π |
| p(x)=-1+cos(x) | R | [0,-2] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor

Visualizando a construção do gráfico da função g(x)=3+cos(x) no aplicativo, tendo como referência a função f(x)=cos(x). Figura - 10.

Figura - 10 - Gráficos, f(x) = $a + cos(x)$




Fonte: Do próprio autor

Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.

**Variação do parâmetro b:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros, variando $-5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.cos(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro ´´b``, chegamos a conclusão que o gráfico tem um deslocamento vertical.

Na tabela 2, apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $bcos(x)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-3 \leq b \leq 3$, b∈Z.

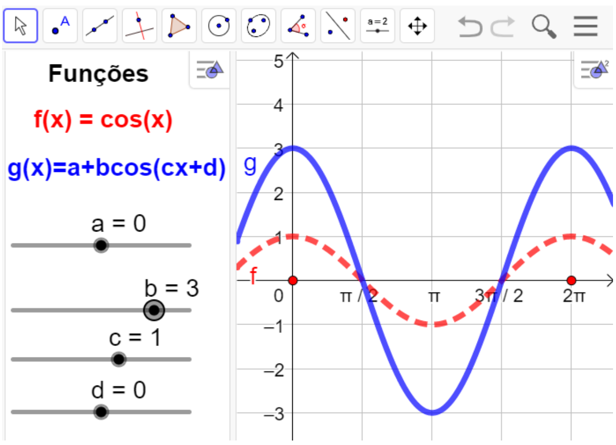
Tabela 2 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bcos(x), b∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x) = cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x) = 2cos(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| h(x) = 3cos(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |
| p(x) = - cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x) = -2cos(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| r(x) = -3cos(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3cos(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 12.

Figura - 11 - h(x) = 3cos(x)




Fonte: Do próprio auto

Observando a construção do gráfico da função h(x)=3.cos(x), temos:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 3 ≤ y  ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função cosseno. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui até próximo de zero, a amplitude do gráfico também diminui.

chegamos a conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

**Variação do parâmetro c:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -3 até 3, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções  f(x) =cos(x), g(x) =cos(2x), h(x) =cos(3x).

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$cos(c.x + d)$, $-3 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos(2x) e h(x) = cos(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos. Tabela 3.

Tabela- 3 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), 1 ≤ c ≤  3, c  $\in Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(2x) | R | [ -1, 1] | 1 | π |
| h(x)=cos(3x) | R | [ -1, 1] | 1 | $\frac{2\pi}{3}$ |

Fonte: Do próprio autor

Observando os gráficos construídos no Geogebra, há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1

Quando aumenta-se o valor de c > 1, o período diminui com relação ao valor inicial. Quando 0 < c < 1,  a função tem seu período aumentado

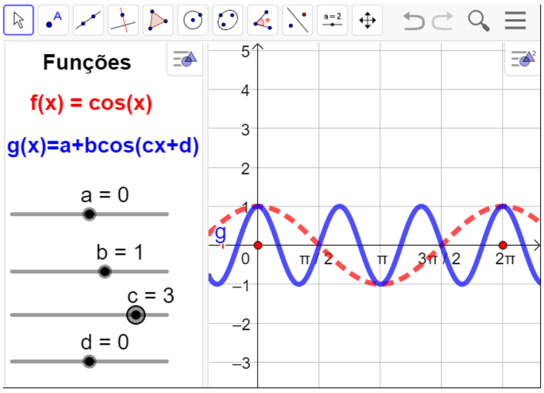
Quando −1 < c < 0, o período diminui

Quando c < -1, o período aumenta.

Conclusão: O parâmetro c altera o período da função cosseno

Construindo o gráficos da função h(x)=cos(3x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 12.

Figura - 12 - h(x) = cos(3x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=cos(3.x) no aplicativo

O gráfico construído no Geogebra, há uma compressão horizontal.

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico h(x)=cos(3.x) tem uma compressão horizontal.

Construindo os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d) no aplicativo Geogebra, haverá um alongamento horizontal se valor do parâmetro ´´c``, estiver entre 0 e 1.

Observando os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), e manipulando os parâmetros a=0, b=1, 0 < c < 1, e d=0, construídos no aplicativo do Geogebra, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos($\frac{1}{2}$x) e h(x)=cos($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $cos(c.x)$, $0 < c < 1$, c∈R, identificando, o domínio, imagem, amplitude e período, tabela 4.

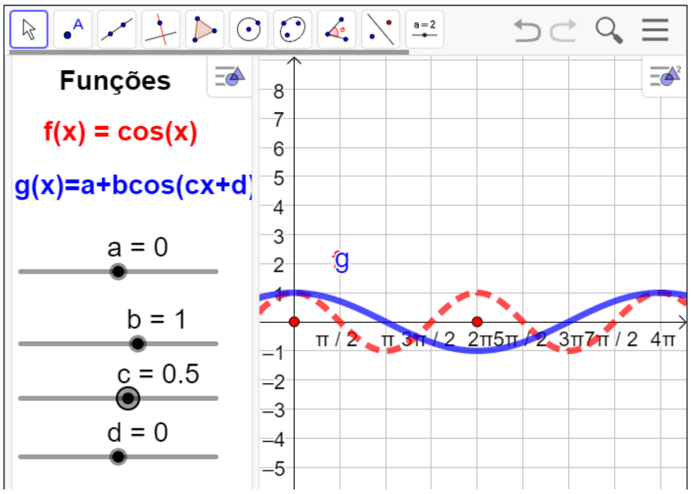
Tabela- 4 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), 0 < c < 1, c $\in R$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos($\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=cos($\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=cos($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 13.

Figura - 13 - Gráficos, f(x) = cos(cx), $0 < c < 1$.




Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=cos($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal

Vamos analisar o parâmetro ´´c``, variando de -1 < c < 0.

Analisando os gráficos da função g(x)=cos(c.x), se o valor do parâmetro ´´c``, estiver entre - 1 e 0, ou seja, -1 < c < 0. Os alunos deverão chegar a conclusão que, haverá um alongamento composto com reflexão em relação ao eixo vertical, Construindo os seguintes gráficos no aplicativo do Geogebra e observando as suas modificações f(x)=cos(cx), isto é, g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$), h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$), em relação a função f(x)= cos(x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos.

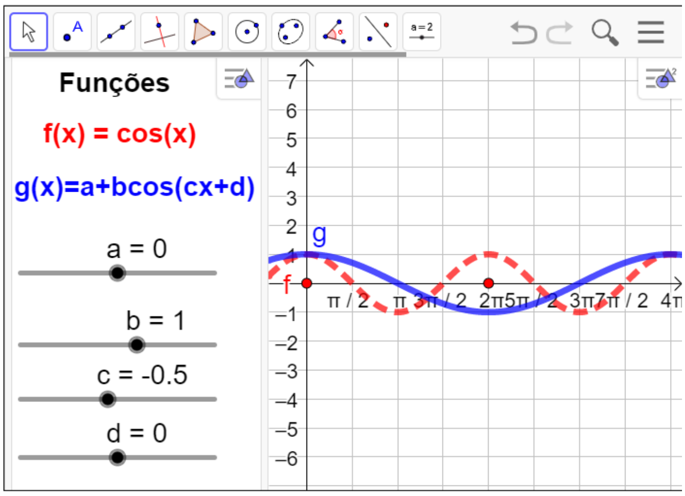
Tabela - 5 - Domínio, imagens, Amplitude e período, f(x)=cos(cx), $-1 < c < 0$.

| Funções | Domínio | Imagens | Amplitudes | Períodos |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 14.

Figura - 14 - Gráficos de g(x)= cos($-\frac{1}{2}$x), -1< c < 0.




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p = $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{2}|} \rightarrow p = 2\pi.|2| \rightarrow p = 4\pi$
- haverá um alongamento do gráfico, no eixo horizontal.

Observando os gráficos construídos no aplicativo do Geogebra, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1. há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

Construindo os seguintes gráficos g(x)=cos($-2x$), h(x)=cos($-4x$) no aplicativo, e observando as suas modificações, em relação a função f(x)= cos(x), encontraremos domínio, imagem, amplitude e período, tabela 5.

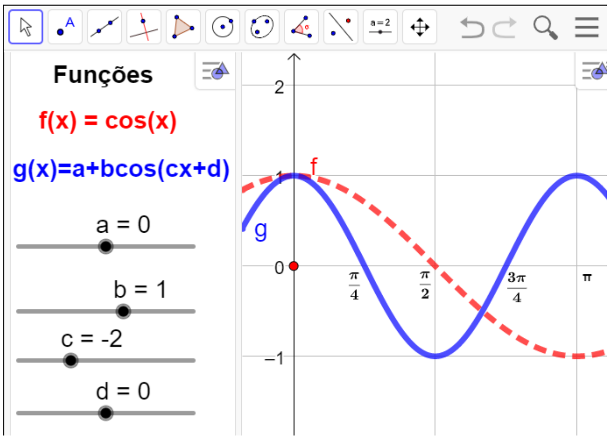
Tabela - 6 - O domínio, imagem, amplitude e período de f(x)=cos(c.x)., c=-2, c=-4.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(-2x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | π |
| h(x)=cos(-4x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | $\frac{\pi}{2}$ |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos($-$ 2x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$-$ 2, a=0, b=1 e d=0, temos figura 15.

Figura - 15 - Gráfico f(x) = cos(cx), c = - 2,




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y  ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1

- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{|-2|} \rightarrow p = \pi$
- Na construção do gráfico, há uma compressão horizontal.

**Variação do parâmetro d**

O experimento didático serve para os alunos observarem, o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função, g(x)=a +b.cos(c.$x + d$).

Construídos os gráficos das funções g(x), arrastando os parâmetros $-\pi \leq d \leq \pi$, observe-se que:

O parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

O parâmetro ´´d`` determina uma translação horizontal no sentido positivo do eixo x (para a direita), se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo, ou seja, d < 0.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = a+b.$cos(c.x + d)$, devido às alterações dos parâmetros, isto é, f(x) = cos(x ), g(x) = (x + $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos( x+ π), g(x) = cos(x - $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos(x - π), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos, na tabela 7,

Tabela - 7 - Funções f(x) = a+b.cos(c.x + $d$), a=0, b=1, c=1, $-\pi \leq d \leq \pi$.

| Funções | Domínios | Imagens | Amplitudes | Períodos |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=cos(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(x+$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=cos(x+π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x)=cos(x-$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=cos(x-π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

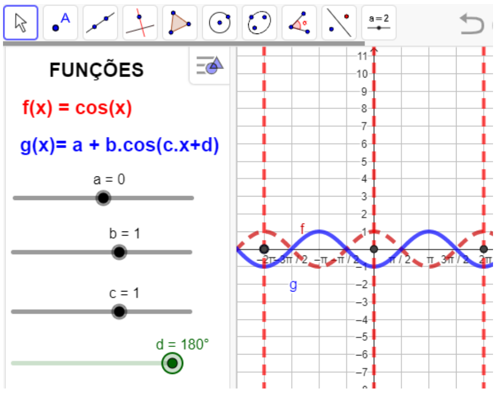
Fonte: do próprio autor

Visualizando os gráficos construídos observe-se que, o parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0. Determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

No experimento didático, vamos construir os gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d), alterando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d variando de -π, até π, no aplicativo do geogebra, para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, em relação a função, f(x)=cos($x$).

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x+π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e d=π, temos a figura 16.

Figura - 16 - Gráfico g(x)=cos(x+π), a=0, b=1, c=1 e d=$180^0$

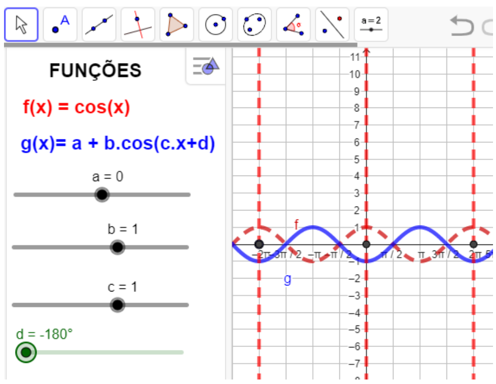



Fonte: Do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), porque d>0.

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x-π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e $d =-\ \pi$, temos figura 17.

Figura - 17 - Gráfico g(x)=cos(x-π), a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 180^0$




Fonte: do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), porque o parâmetro ´´d`` é negativo, isto é, d < 0

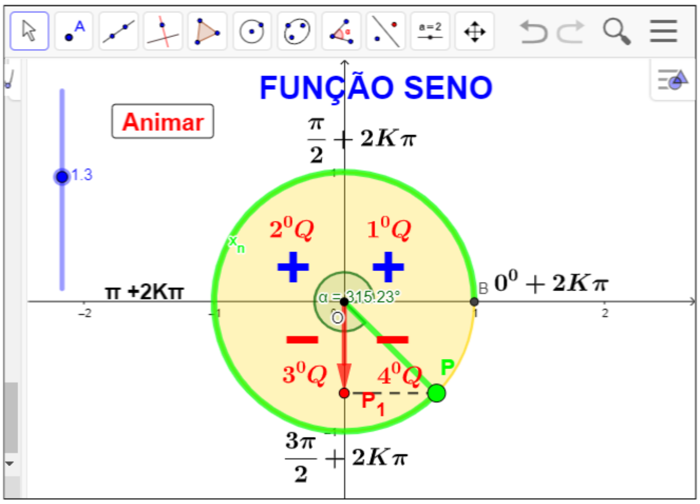
## 2.7 ATIVIDADE - 7 - ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno______________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e propriedades da função seno no ciclo trigonométrico figura 18. Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8 e responda.

Figura - 18 - Função seno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quais quadrantes o seno é positivo ?

2º) Quais quadrantes o seno é negativo ?

3º) Qual o valor da imagem do seno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

4º) Faça uma tabela que contenha os seno dos arcos, $0^0$, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$, com suas respectivas imagens.

5º) Qual o seno de 20π rad ?

6º) Quando o ponto $P_n$ gira várias vezes na circunferência de comprimento $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=sen(6π)?

7º) O ponto $P_n$, deslocando de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá de -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, O seno neste local é ?

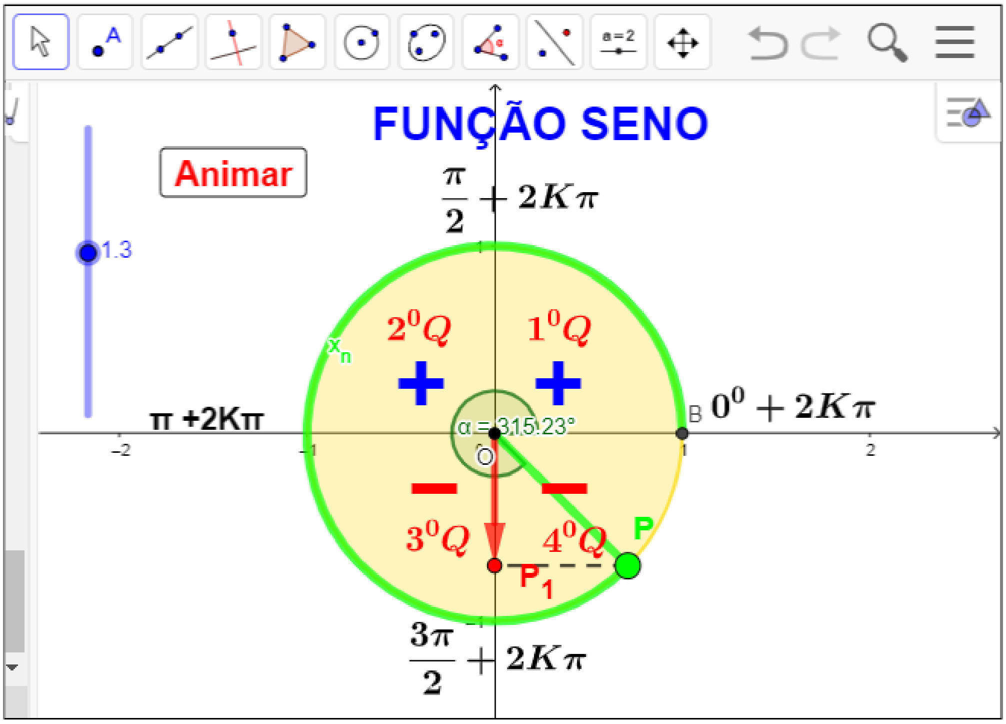
### 2.7.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função seno

De posse do aplicativo https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8, abra aplicativo, clique no botão < Animar > e arraste o controle deslizante.

O ponto P se movimenta no sentido anti-horário, se clicar no botão < Animar > e arrastar o controle deslizante para valores positivos.

Se arrastar o controle deslizante para valores negativos, o ponto P, movimento no sentido horário, figura 19.

Figura - 19 - Função seno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

### 2.7.2 Sugestões para o desenvolvimento do aplicativo

Ao clicar no botão < Animar >, e arrastar o controle deslizante, os alunos serão convidado a observar:

O ponto $P$, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico no sentido anti-horário, então a sua projeção em relação a ordenada, é o ponto $P_1$, então o segmento $\overline{OP_1}$, será a definição da função seno do arco $x_n$, isto é:

$\overline{OP_1}$ = sen($x_n$).

Sobre os seus quadrantes, valores negativos, nulos ou positivos crescentes ou decrescentes.

1. O ponto P, sairá da origem O=(0,0), portanto, neste local o valor do seno do arco $x_n$, que está na origem é zero, isto é: sen($0^0$)= 0.

2. O ponto P irá até o ponto B=(0,1), a sua projeção o ponto $P_1$, terá como medida o raio, (R = 1) ou seja, o seno do arco de medida $\frac{\pi}{2}$ é igual a 1(um), isto é: sen($\frac{\pi}{2}$)= 1, portanto, no primeiro quadrante, a função seno é CRESCENTE.

3. O ponto $P$ , continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \pi$ , a projeção do ponto $P$ , sairá do ponto B=(0,1), e se deslocará até a origem O=(0,0), logo o sen do arco de medida (π) é 0(zero), isto é sen(π)=0. Portanto no segundo quadrante a função seno é decrescente.

4. O ponto P, continuará o percurso no **terceiro** quadrante, a projeção do ponto P em relação a ordenada, se deslocará de zero (origem) até −1, portanto, o seno do arco de medida $\frac{3\pi}{2}$ é -1, isto é: sen($\frac{3\pi}{2}$) = -1, e a função é decrescente.

5. O ponto P, continuará o percurso no **quarto** quadrante, a projeção do ponto P, em relação a ordenada, se deslocará de -1 até a origem, O = (0,0), quando à medida que o arco $x_n$ se desloca de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$, então do seno de um arco de medida 2π, é igual a zero, isto é: sen(2π) $= 0$, e a função é crescente.

Manuseando o aplicativo Geogebra ao clicar no botão < Animar > podemos observar:

- Se o ponto $P$ estever, no primeiro ou segundo quadrantes, a sua projeção será positiva, então o seno nestes quadrante será POSITIVO.
- Quando o ponto P estiver, no terceiro ou quarto quadrante a sua projeção será negativa, o seno nestes quadrantes será NEGATIVO.

A função seno é limitada, ela varia de -1 até 1, isto é: a sua imagem varia de $-1 \leq y \leq 1$.

Se o ponto P girar várias vezes no ciclo trigonométrico que vamos denominar de K, então os números reais $x_n$ e $x_n + 2k\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e, portanto, sen($x_n$)= sen ($x_n + 2k\pi$), k ∊ Z.Assim,a função seno é periódica e seu período é 2π.

2.8 ATIVIDADE -.8 -.ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E NO PLANO CARTESIANO

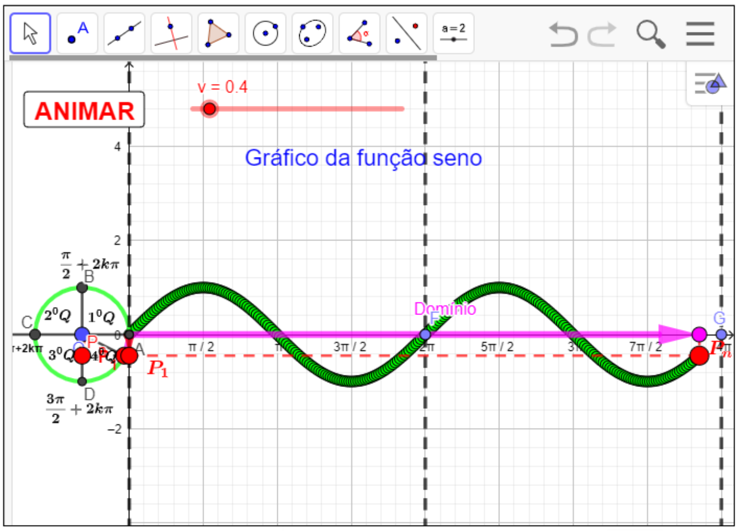
Aluno________________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e construção do gráfico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 20.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc`` e responda.

Figura - 20- Gráfico da função seno




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função seno?

2º) A função seno assume valores positiva e negativa no intervalo $0 < x < 4\pi$, quais intervalos no plano cartesiano, correspondente esta situação ?

3º) O valor da expressão $\text{sen}(0^0) + \frac{3}{5}\text{sen}(\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(4\pi)$?

4º) Construa o gráfico e identifique domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x)=sen(x)

**2.8.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para construção do gráfico da função seno.**

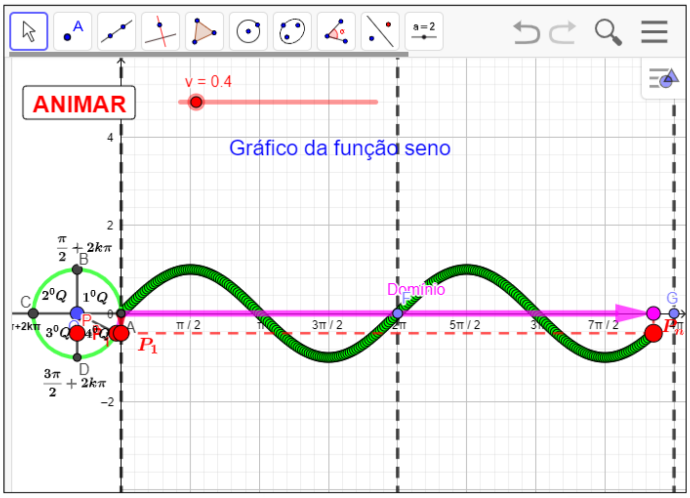
1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação.

O aplicativo visualiza a construção do gráfico da função seno, associado ao ciclo trigonometria, figura 21.

Figura - 21 - Gráfico da função seno




. Fonte: Do próprio autor

Para continuar a nossa experiência, vamos lembrar se algumas propriedades características importante da função f(t) = sen(t),

- A função é **positiva para os ângulos do 1° e 2°** quadrantes(projeções na reta y acima da origem);
- A função é **negativa para os ângulos do 3° e 4°** quadrantes (projeções na reta y abaixo da origem).
- A função seno é **crescente no 1° e 4°** quadrantes;
- A função seno é **decrescente no 2° e 3°** quadrantes
- Domínio é $R$, e a Imagem é o intervalo [−1, 1].
- A função seno é periódica e seu período é $2\pi$, pois t e t + 2k têm a mesma imagem P no ciclo, então, $sen$(t) = sen (t + $2k\pi$).

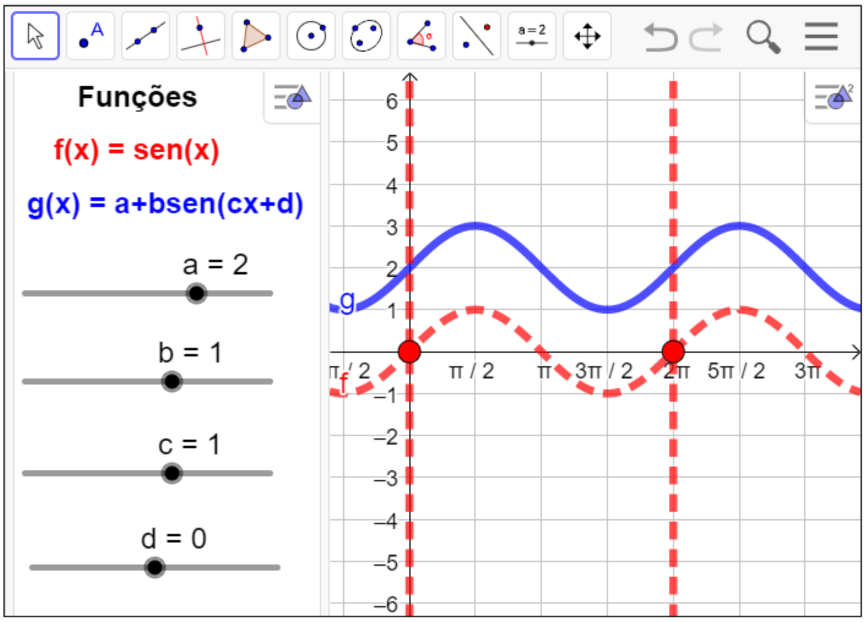
## 2.9 ATIVIDADE - 9 - ESTUDO DOS PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo consolidar a construção dos gráficos da função seno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, e visualizar as animações no aplicativo figura 22.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq. e responda

Figura - 22 - Parâmetro da função g(x) = $a + bsen(cx + d)$




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Construa o gráfico da função f(x) = 2+sen(x), e identifique o domínio, imagens, amplitude e período?

2º) Construa o gráfico da função f(x) = 3sen(x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

3º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(-2x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

4º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

5º) Construa o gráfico da função f(x) = 2 + 3 sen(-2x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

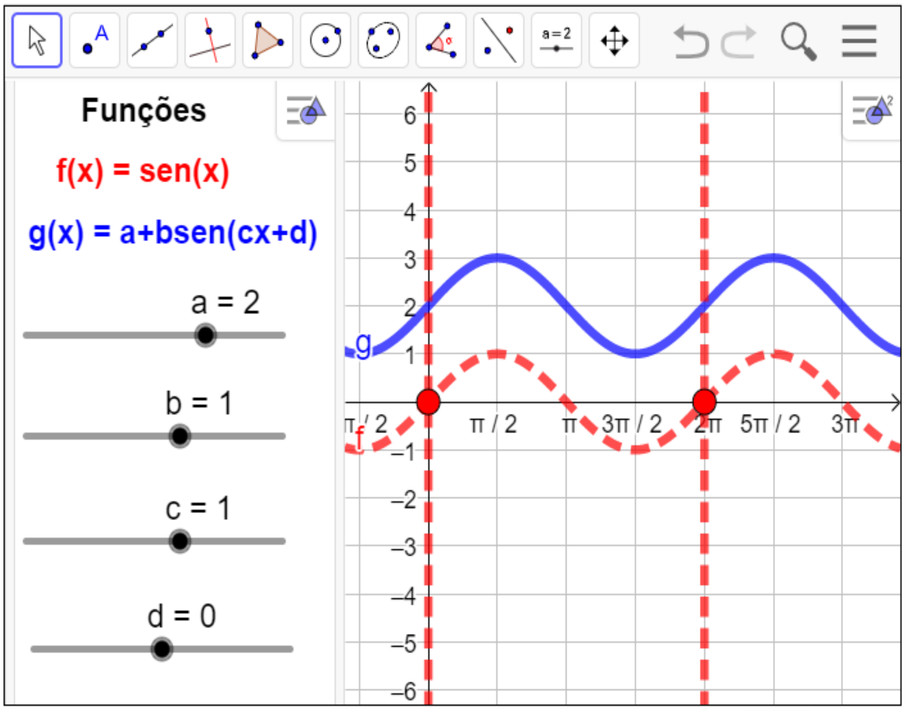
### 2.9.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função seno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq.

2º) Arraste os parâmetros para a função ´´g`` se movimentar.

Vamos fazer um experimento didático com as funções trigonométricas f(x)=sen(x) e g(x)=a+b.sen(c.x+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros, figura 23.

.Figura - 23 - Parâmetros da função seno




Fonte: Do Próprio autor

### 2.9.2 Estudo dos parâmetros da função seno

**Variação do parâmetro a:**

Observando as construções dos gráficos da função f(x)=a+sen(x) no aplicativo do Geogebra, com variações do parâmetro´´a``, chegamos a conclusão que o parâmetro ´´a`` é a soma das ordenada de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, temos como resultado um deslocamento vertical.

Vamos fazer um experimento com a função do tipo g(x)=$a + sen(x)$, a seguir apresentaremos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x)=a+bsen(cx+d), fixando os parâmetros, b=1, c=1, d=0 e $-3 \leq a \leq 3$, b∈Z, isto é, f(x)=sen(x), t(x)=1+sen(x), h(x)=2+sen(x), r(x)=3+sen(x), s(x)=-1+sen(x), p(x)=-2+sen(x), q(x)=-2+sen(x), para análise do domínio, imagem, amplitude, período das funções, tabela 8.

Tabela - 8 - f(x) = $a$ + sen(x), com -3 ≤ a ≤ 3, a ∈ Z.

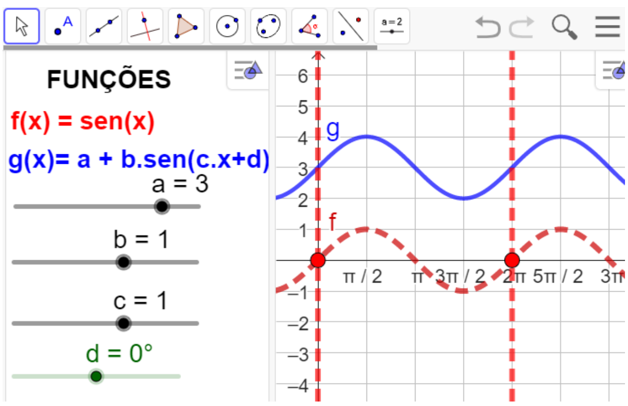
| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| t(x)=1+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=2+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| r(x)=3+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| s(x)=-1+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| p(x)=-2+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x)=-3+sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor

Observa-se que não houve variação no domínio, imagens, amplitude e período das funções. Houve um deslocamento dos gráficos para cima ou para baixo.

Construindo o gráfico da função g(x)=3+sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=3, b=1 e d=0, para analisar do parâmetro ´´a`` da função, f(x) = $3 + sen(x)$figura 24.

Figura - 24 - Gráfico da função f(x)=3+sen(x).




Fonte: Do próprio autor

- Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.
- Imagem da função, Im(g)={y$\epsilon R/2 \leq y \leq 4\}$.
- Domínio são os números reais.
- Período é 2π.

**Variação do parâmetro b:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, manipulando os parâmetros, $-5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.sen(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.sen(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro´´b", chega-se à conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

Na tabela, a seguir apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+ $bsen(cx + d)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-3 \leq b \leq 3$, b∈Z, a=0, c=1 e d=0, tabela 9.

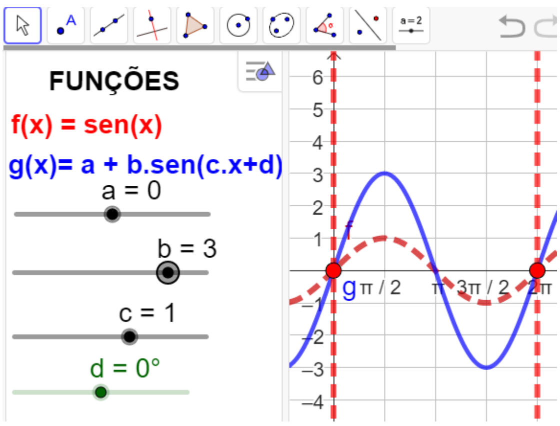
Tabela 9 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bsen(x), b∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x) = sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| g(x) = 2sen(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| h(x) = 3sen(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |
| p(x) = - sen(x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| q(x) = -2sen(x) | R | [ -2, 2 ] | 2 | 2π |
| r(x) = -3sen(x) | R | [ -3, 3 ] | 3 | 2π |

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 25.

Figura - 25 - Gráfico h(x)=3sen(x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função  h(x)=3.sen(x), temos:

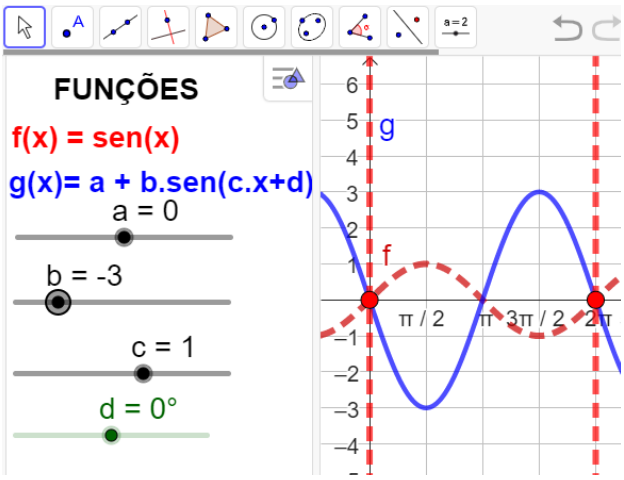
- Domínio da função seno, são todos os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 3 ≤ y  ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

Modificando o parâmetro b, neste caso, além da imagem ser alterada, a amplitude do gráfico também muda.

A função seno tem sua flutuação quando b > 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser crescente, decrescente, decrescente e crescente.

Construindo o gráficos da função r(x)=-3 sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros $b\ =\ 3$, a=0, c=1 e d=0, temos  como imagem a figura 26.

Figura - 26 - Gráfico da função r(x)=-3sen(x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função  r(x)= -3.sen(x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 3 ≤ y  ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

A função seno tem sua flutuação invertida quando b < 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

**Variação do parâmetro c:**

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -5 até 5, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x)=a+b.sen(c.x+d), e comparar com a função f(x)=sen(x)

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

Vamos fazer um experimento didático no Geogebra, para analisar o parâmetro ´´c`` das funções f(x) = $sen(cx)$, onde, $-5 \leq c \leq 5$, c ϵ $Z$.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, $1 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=sen(x), g(x)=sen(2x) e h(x) = sen(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos para c > 0, tabela 10.

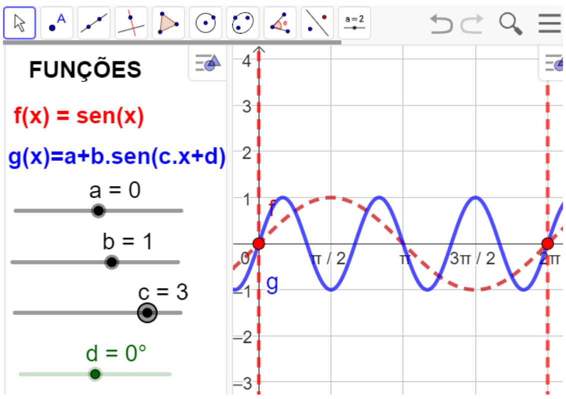
Tabela-10- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), 1 ≤ c ≤ 3, c ∈ $Z$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| f(x)=sen(x) | R | [ -1, 1] | 1 | 2π |
| g(x)=sen(2x) | R | [ -1, 1] | 1 | π |
| h(x)=sen(3x) | R | [ -1, 1] | 1 | $\frac{2\pi}{3}$ |

Fonte: Do próprio autor

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c = 3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 27.

Figura - 27 - Gráfico da função h(x)=sen(3x)




Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=sen(3x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

A construção do gráfico h(x)=sen(3x), houve uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, $-3 \leq c \leq -1$, c∈Z, isto é, vamos construir uma tabela para analisarmos o domínio, imagem, amplitude, período das funções f(x)=sen(x), g(x)= sen(-x), h(x)=sen(-2x), p(x)=sen(-3x).

Tabela -11 - função f(x) = sen(c.x), com -3 < c < -1.

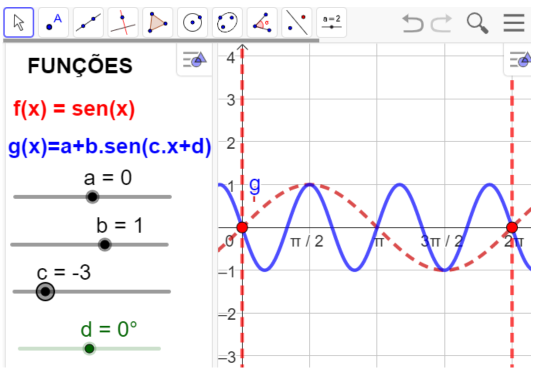
| Função | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| g(x)= sen(-x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=sen(-2x), | R | [ -1, 1 ] | 1 | π |
| p(x)=sen(-3x) | R | [ -1, 1 ] | 1 | $\frac{3\pi}{2}$ |

Fonte: Do próprio autor

Observando na tabela que consta a função seno, variando o parâmetro ´´c``, chega-se à conclusão que há variação do período.

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(-3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c = -3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 28.

Figura - 28 - Gráfico da função p(x)=sen(-3x)




Fonte: Do próprio autor

A função p(x)=sen(-3x), tem sua flutuação invertida quanto ao gráfico da função h(x)=sen(3x), ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

Construindo os gráficos g(x)=a+b.sen(c.x+d), arrastando os parâmetros $0 < c < 1$, a=0, b=1, d=0. no Geogebra, haverá um alongamento horizontal.

Observando os gráficos construídos no Geogebra, na tela de visualização, isto é, g(x)=sen($\frac{1}{2}$x) e h(x)=sen($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos, identificando, o seu domínio, imagem, amplitude e período, tabela 12.

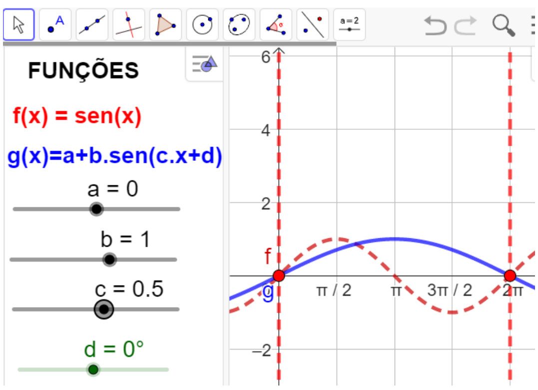
Tabela-12- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), 0 < c < 1, c $\in R$.

| Funções | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| g(x)=sen($\frac{1}{2}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 4π |
| h(x)=sen($\frac{1}{3}x$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 6π |

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=sen($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 29.

Figura - 29 - Gráfico g(x)=sen($\frac{1}{2}x$)



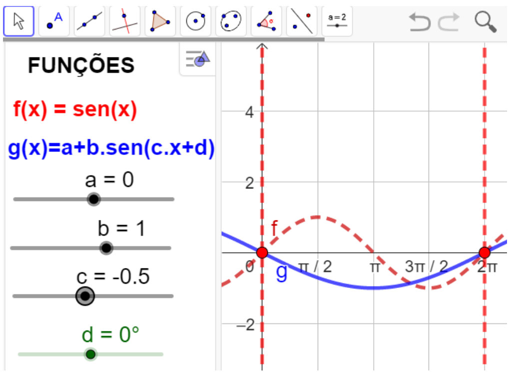

Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Chega-se à conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=sen($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, figura 30.

Figura - 30 - Gráfico g(x)=sen(-$\frac{1}{2}x$)




Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de ajustados os parâmetros no aplicativo, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Os alunos chegaram à conclusão de que o gráfico da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}x$), haverá um alongamento no eixo horizontal.

**Variação do parâmetro d:** `.

Este experimento didático é para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função g(x)=a+b.sen(c.x+d),em relação à função, f(x)=sen(x), sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq \pi$.

Depois de construídos os gráficos no aplicativo Geogebra, os participantes serão convidados a analisar o parâmetro ``d`.

A seguir, temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq 0$.

Vamos construir, os gráficos das funções g(x)= sen(x-$\frac{\pi}{2}$), h(x)=sen(x-π). para analisarmos o domínio, imagem, amplitude e período, para d < 0, tabela 13.

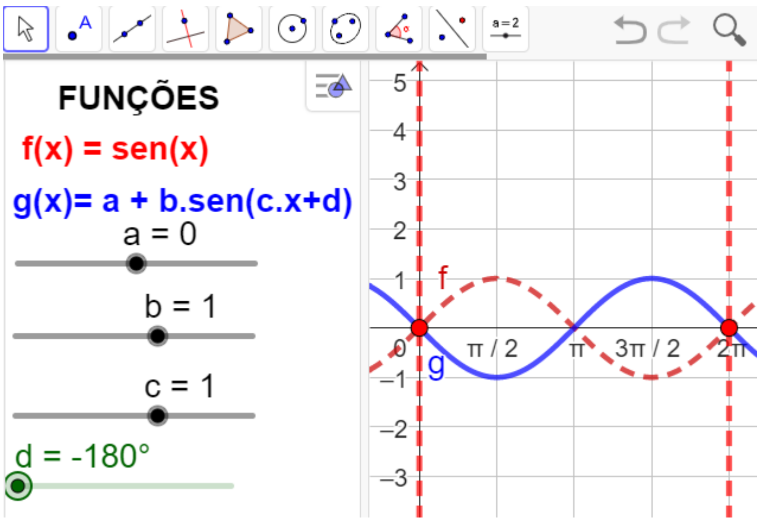
Tabela -13 - Domínio, imagens, amplitude e período, g(x) = sen(x - d), $-\pi \leq d \leq 0$.

| Função | Domínio | Imagem | Amplitude | Período |
|---|---|---|---|---|
| p(x)=sen(x-$\frac{\pi}{2}$) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |
| h(x)=sen(x-π) | R | [ -1, 1 ] | 1 | 2π |

Fonte: Do próprio autor.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x-π) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=$-\pi$, temos como imagem a figura 31.

Figura - 31 - Gráfico da função, h(x)=sen(x-π)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

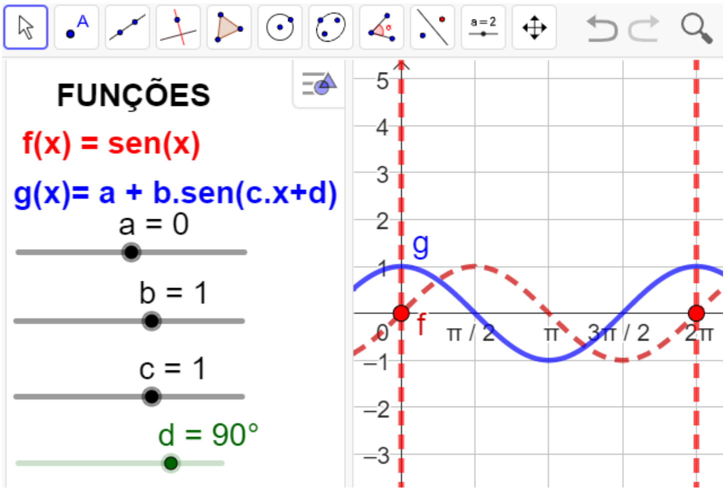
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x - \pi$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a direita), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser negativo, ou seja, d < 0.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x+$90^0$) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=$90^0$, temos como imagem a figura 32.

Figura - 32 - Gráfico da função, h(x)=sen(x+$90^0$)




Fonte: do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x + 90^0$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser positivo, ou seja, d > 0.

Visualizando os gráficos construídos no Geogebra, chega -se à conclusão que o parâmetro ´´d``. determina uma translação horizontal no gráfico das funções trigonométricas seno, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), ou (para a direita) se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo.

## 2.10 ATIVIDADE - 10 - ENTENDENDO A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

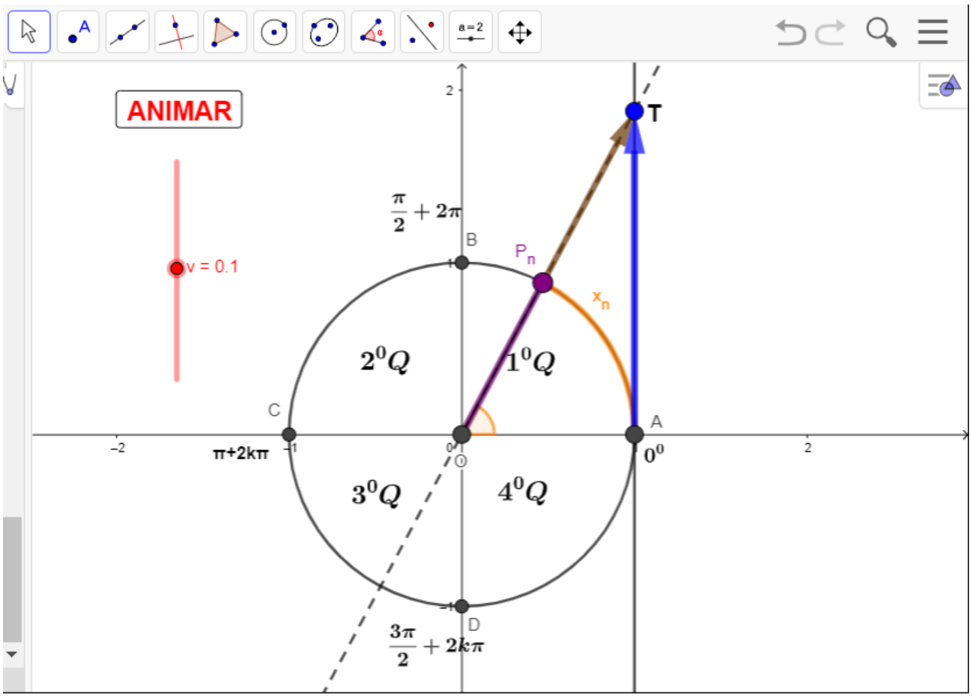
Aluno_______________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar a função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições no ciclo trigonométrico, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 33.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc, e responda.

Figura - 33 - Função tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quanto vale a tangente de $\pi + 2k\pi$ ?

2º) Em quais quadrantes a tangente é positiva ?

3º) Em quais quadrantes a tangente é negativa ?

4º) Quanto vale a tangente de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ?

5º) Determine o domínio da função f(x) = tg(x)?

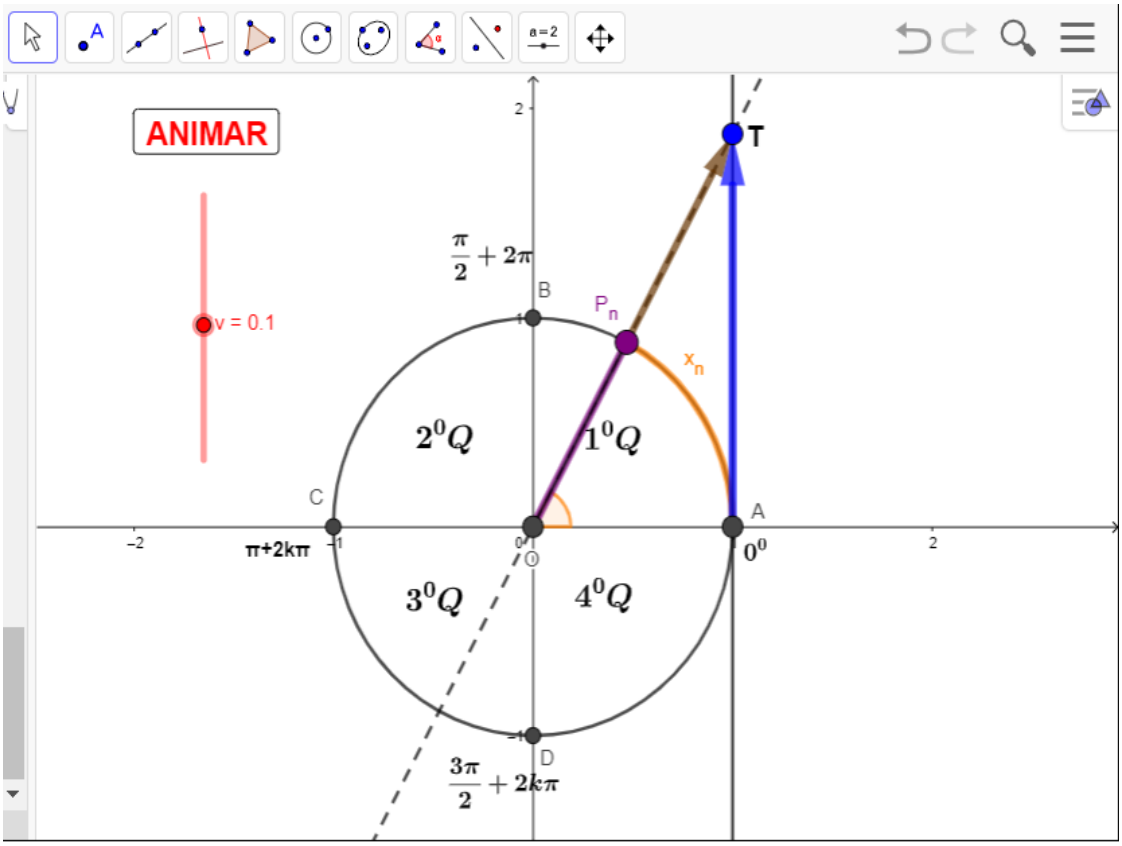
6º) Determine o período da função f(x) = tg(x) ?

7º) Determine a imagem da função f(x) = tg(x) ?

**2.10.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função tangente.**

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 34.

Figura - 34 - Função tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade e a direção da animação.

- Se v > 0, o ponto $P_n$, se desloca na circunferência, no sentido anti-horário.
- Se v < 0, o ponto $P_n$, se desloca na circunferência no sentido horário.
- Para obter a tangente de um arco, devemos observar um terceiro eixo que tangencia a circunferência no ponto A=(1,0).
- O ponto $P_n$ e a reta que passa pela origem da circunferência O=(0,0), e que intercepta a reta perpendicular ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo y, que passa pelo ponto A=(1,0) no eixo das abcissas.

- Ao unirmos a extremidade do arco $x_n$, (ponto $P_n$), ao centro O=(0,0) e prolongando o raio da circunferência, ele intercepta o eixo das tangentes no ponto T.

**Definição da função tangente**

A tangente de $x_n$, é a medida do segmento $\overline{AT}$, obtido pela interseção do prolongamento do raio $\widehat{OP_n}$, com o eixo das tangentes.

**Propriedades da função tangente**

1. Para $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ o valor da tangente de $x_n$ cresce à medida que $P_n$se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente.
2. Para $\frac{\pi}{2} < x_n < \pi$, a tangente de $x_n$, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de $x_n$, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
3. Para $x_n = \pi$, a tangente está na origem do eixo da tangente, então tg$(\pi) = 0$.
4. Para $\pi < x_n < \frac{3\pi}{2}$ o valor da tangente de $x_n$ cresce à medida que $P_n$se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente
5. Para $x_n = \frac{3\pi}{2}$ , a tangente não existe, porque a reta que passa pelo centro não intercepta o eixo da tangente.
6. Para $\frac{3\pi}{2} < x_n < 2\pi$, a tangente de $x_n$, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de $x_n$, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
7. A tangente é positiva no $1^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.
8. A tangente é negativa no $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ quadrantes.

**2.10.2 Conjunto imagem da função tangente**

9. O conjunto imagem da função tangente é Im = ] -∞, ∞[ , ou seja o conjunto dos números reais.

**2.10.3 Domínio da função tangente**

10. O domínio da função tangente é D = $\{x_n \in R / x_n \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$

**2.10.4 Período da função tangente**

11. A função tangente se repete a cada intervalo de π, então o período é p = π.

## 2.11 ATIVIDADE - 11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

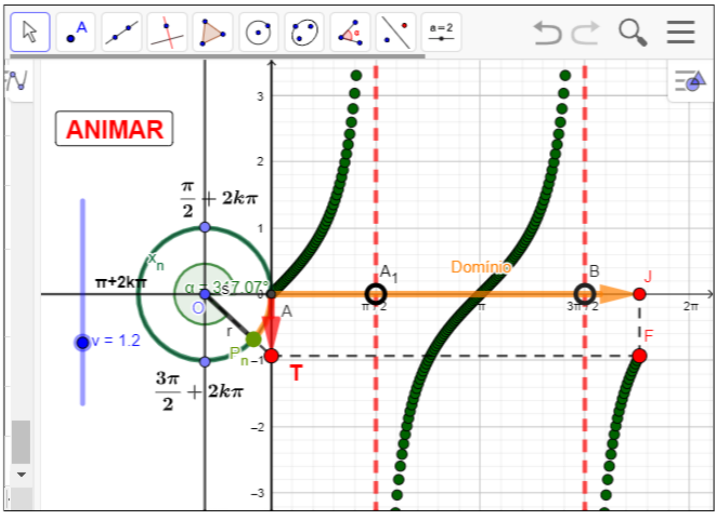
Aluno______________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo, consolidar a construção do gráfico da função tangente no plano cartesiano, a partir do círculo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 35.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/epppy3xh`` e responda.

Figura - 35 - Gráfico da função tangente.




**Fonte: Do próprio autor**

Questões:

1º) Qual a imagem da função tangente?

2º) Durante a análise de uma função, Kárita encontrou uma função trigonométrica, e ficou em dúvida entre as funções f(x) = sen(x); f(x) = cos(x); e f(x) = tg(x).

I → A função possui imagem [-∞, ∞].

II → A função é trigonométrica  possui período igual a π.

III → O valor numérico da função f(π/2) = não existe

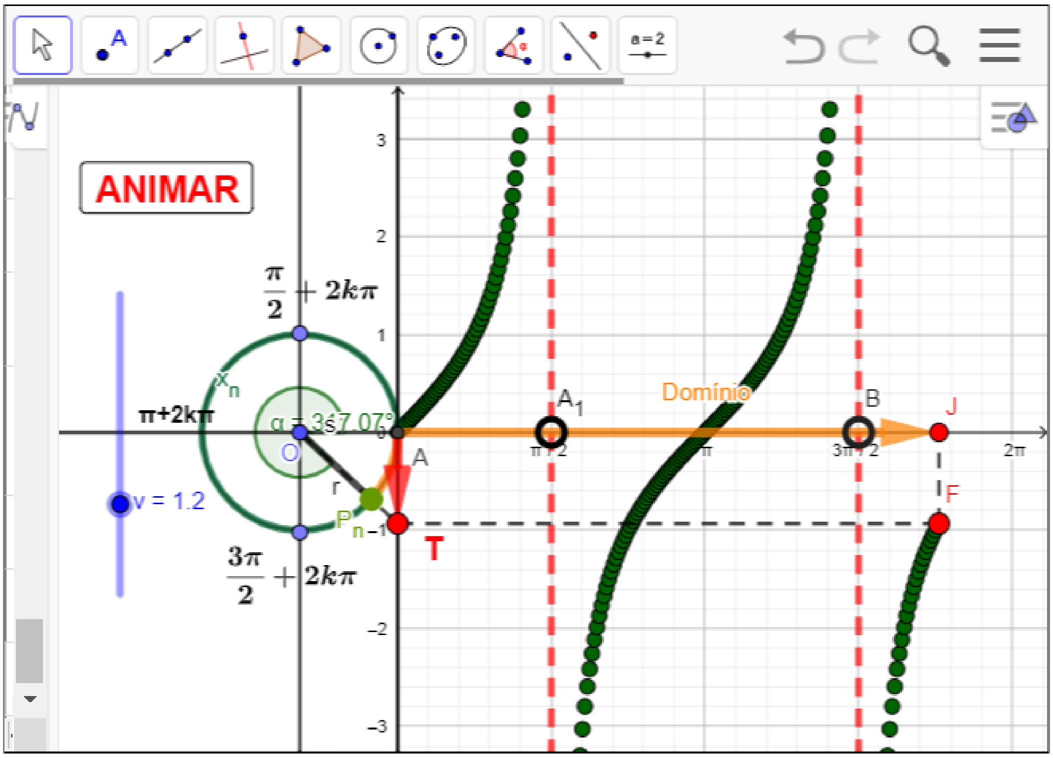
A função descrita por ela é:

3º) Construa o gráfico e identifique o domínio, imagem e o período da seguinte função,  f(x) = tg(x).

### 2.11.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da construção do gráfico da função tangente.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/epppy3xh e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 36.

Figura - 36 - Gráfico da função tangente.




Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação no sentido anti-horário.

### 2.11.2 Definição da tangente utilizando o ciclo trigonométrico.

Ao clicar nos botões < Animar > e < v>, os alunos serão convidado a observar

A movimentação do ponto $P_n$ no sentido anti-horário, existe uma reta passando pela origem do ciclo trigonometria O=(0,0), e o ponto $P_n$, interceptando no ponto T, na reta tangente ao círculo trigonométrico, no ponto A=(1,0). A medida do segmento $\overline{AT}$, será a tangente do ponto $P_n$ na circunferência trigonométrica.

Transposição da tangente do ciclo trigonometria, para o plano cartesiano.

A medida do segmento $\overline{AT}$, na circunferência trigonométrica, é a tangente do ponto $P_n$, que passa a ser a imagem da função tangente, situada no eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Usando as informações que já tínhamos sobre a tangente na circunferência trigonométrica, e lembrando que no ponto A(1,0), é a origem da tangente no ciclo trigonométrico. Vamos dar uma volta completa no ciclo e relacionar com o plano cartesiano.

**2.11.3 Construção do gráfico da função tangente no primeiro quadrante**

A medida que o ponto $P_n$, se desloca no primeiro quadrante de $0^0$ para $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, o comprimento do arco $x_n$ no ciclo trigonométrico, corresponde ao domínio no plano cartesiano, observa-se que a tangente do ponto $P_n$ cresce, esse valor fica ainda maior, quanto mais o domínio se aproxima de $\frac{\pi}{2}$. Dizemos, nesse caso, que o valor da tangente de $x_n$, tende a mais infinito (+∞), ou seja, aumenta indefinidamente.

Visualizando a manipulação do aplicativo do gráfico da função tangente, às retas onde a função não existe são chamadas de assíntotas. Ou seja, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ são assíntotas.

**2.11.4 Domínio da função tangente**

Logo o domínio da função tangente será todos os valores reais retirando os valores das assíntotas, isto é, D={x$\epsilon R / x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ com\ k\epsilon Z$}.

**2.11.5 Período da função tangente de $x_n$.**

É bom ressaltar que o gráfico nunca toca nas retas das assíntotas, no entanto, a função tangente se repete a cada intervalo π, logo a função tangente, f(x) = tg(x) também é periódica de período π.

**2.11.6 Propriedade**

A função tangente assume valores positivos no 1º e 3º quadrantes, e valores negativos no 2º e 4º quadrantes, e visualizando o gráfico da função tangente, que é crescente em todos os quadrantes.

A função tangente é crescente em todos os quadrantes.

2.12 ATIVIDADE - 12 - ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO TANGENTE

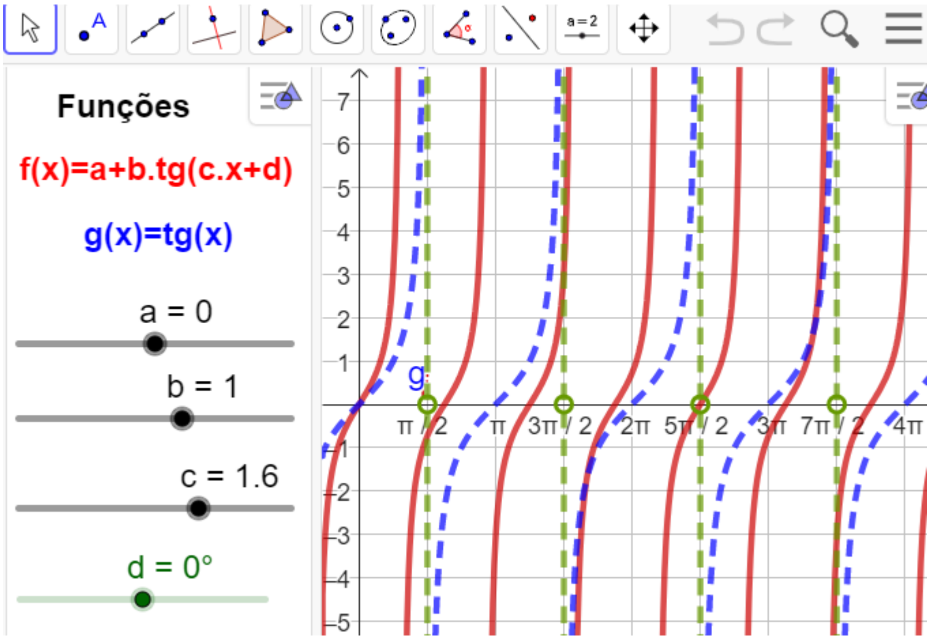
Aluno________________________________________________________________

**Objetivo**

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar a construção do gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno as construções dos gráficos, identificar domínio, imagem, período no plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy e responda

Figura - 37 - Parâmetros da função, f(x) = a + b.tg(c.x+d).




Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) O que acontece se o valor do parâmetro a > 0, b=1, c=1 e d=0 ?

2º) O que acontece se o valor de a=0, b < 0, c=1 e d=0 ?

3º) O que acontece quando o valor de a=0, b=1, c = $-4$ e d=0 ?

4º) que acontece quando o valor de a=0, b=1, c=1 e d = $-\frac{\pi}{2}$ ?

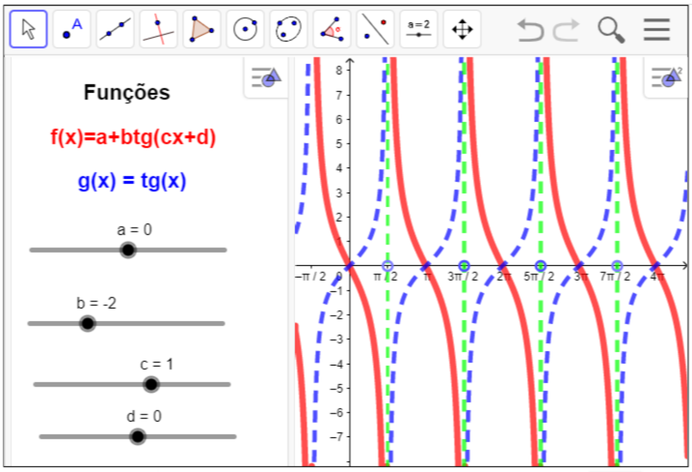
5º) Descreva o que você observa na função f(x) = a +b.tg(c.x), quando a = 0, b=1 e c=0 e d=0.

6º) Descreva o que você observa na função f(x)=a + b tg(x), quando a = 0, c=1, d=0 e quando o controle deslizante ´´b``, desliza de 0 até 5 ?

### 2.12.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função tangente.

1º) Abra o arquivo(https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy) e execute o mesmo no Geogebra, e arraste os controles deslizantes (a, b, c, d), para observar as alterações do gráfico, figura 38.

Figura - 38 - Parâmetros da função tangentes f(x) = a + b.tg(cx + d).




Fonte: Do próprio autor

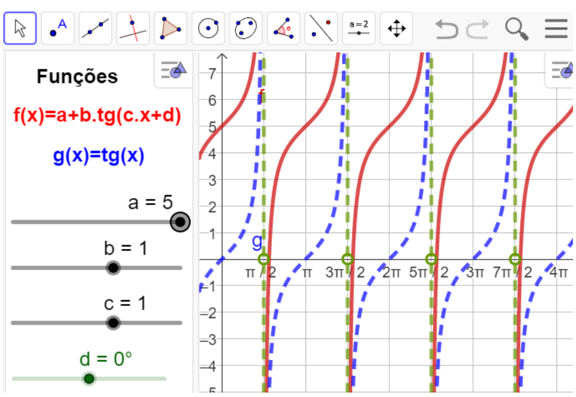
Ao abrir o aplicativo aparece no lado esquerdo os controles deslizantes com as letras a, b, c, e d, que são chamadas de parâmetros ou coeficientes, que arrastados provocará alterações no gráfico, da seguinte maneira.

**Parâmetro ´´a``** , responsável por um deslocamento vertical no gráfico

- Se arrastar o parâmetro, a > 0, teremos um deslocamento vertical para cima

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=5, b=1, c=1 e d=0, figura 39.

Figura - 39 - gráfico f(x)=5+tg(x)




Fonte: Do próprio autor

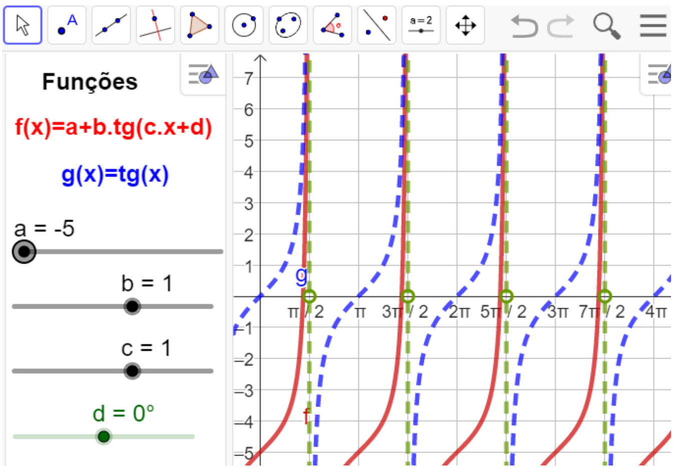
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg($x$), haverá um alongamento no eixo vertical, para cima.

Se arrastar o parâmetro a < 0, teremos um deslocamento vertical para baixo

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=-5, b=1, c=1 e d=0, figura 40.

Figura - 40 - Gráfico f(x) =-5+tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

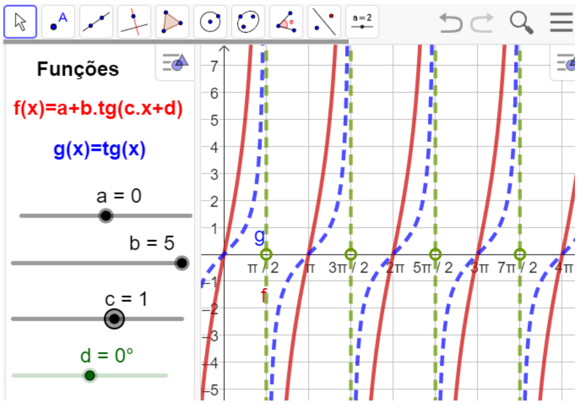
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg($x$), haverá um alongamento no eixo vertical, para baixo.

**Parâmetro ´´b``**, responsável pela variação da inclinação do gráfico em crescente ou decrescente.

- Se arrastar o parâmetro b > 1, o gráfico será esticado e crescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=5, c=1 e d=0, figura 41.

Figura - 41 - Gráfico f(x)=5 tg(x)




Fonte: Do próprio autor

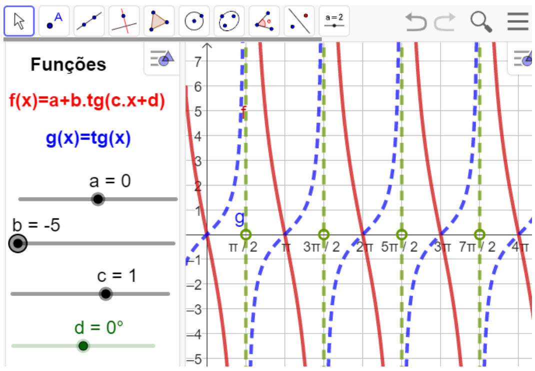
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5tg($x$), haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será crescente.

Se arrastar o parâmetro b < -1, o gráfico será esticado e decrescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-5, c=1 e d=0, figura 42.

Figura - 42 - Gráfico f(x)=-5 tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando

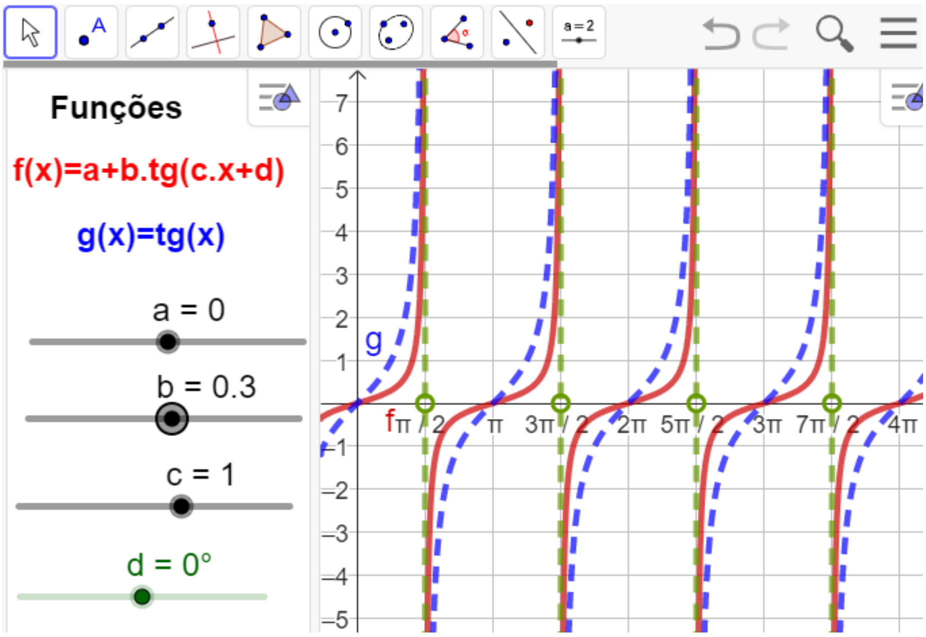
as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=-5tg$(x)$, haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será decrescente.

Se arrastar o parâmetro 0 < b <1, o gráfico será comprimido e crescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=0.3, c=1 e d=0, figura 43.

Figura - 43 - Gráfico f(x)=0.3tg(x)




Fonte: Do próprio autor

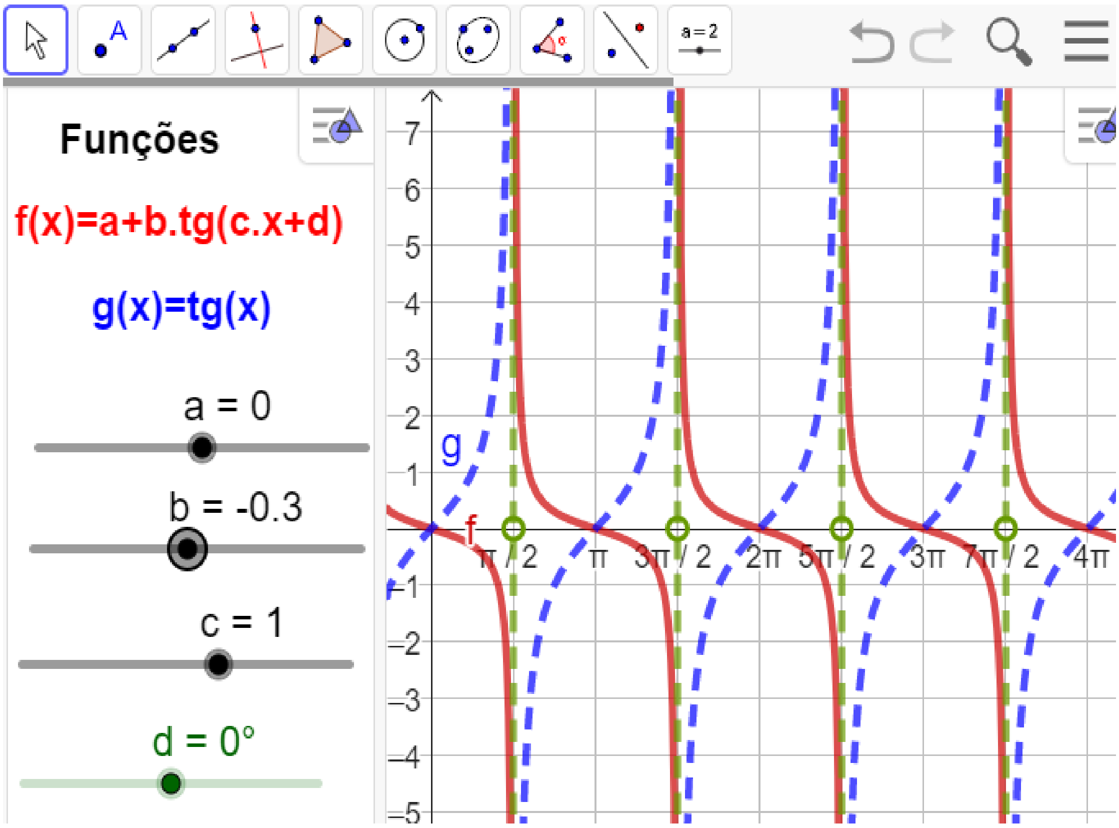
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=0.3tg$(x)$, o gráfico será comprimido e crescente.

Se arrastar o parâmetro -1 < b <0, o gráfico será comprimido e decrescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-0.3, c=1 e d=0, figura 44.

Figura - 44 - Gráfico f(x)= - 0.3tg(x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

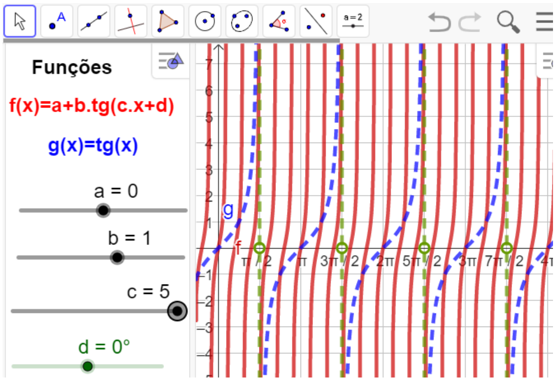
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- A construção da tangentóide da função g(x)=-0.3tg$(x)$, o gráfico será comprimido e decrescente.

**Parâmetro ´´c``**, modifica o período da função. Esse novo período pode ser calculado por: P = $\frac{\pi}{|c|}$.

Se arrastar o parâmetro $c > 1$, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=5 e d=0, figura 45.

Figura - 45 - Gráfico f(x)=tg(5x)




Fonte: Do próprio autor

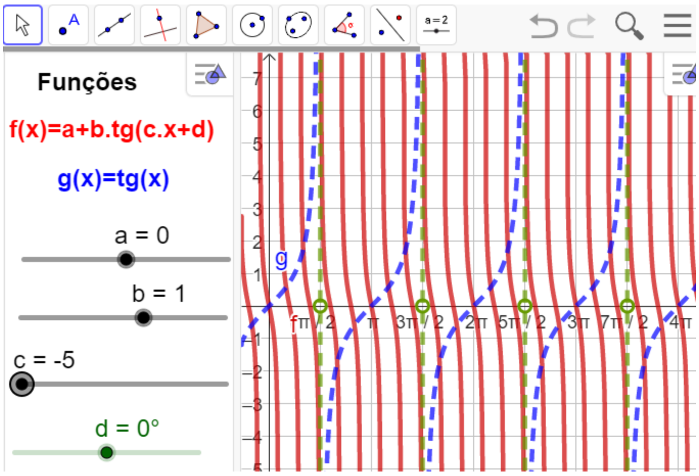
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|}$$\Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($5x$), o gráfico será comprimido horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro c < - 1, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(-5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-5 e d=0, temos a figura 46.

Figura - 46 - Gráfico f(x)=tg(-5x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando

as modificações da função f(x) em relação a função g(x),  a conclusão é:

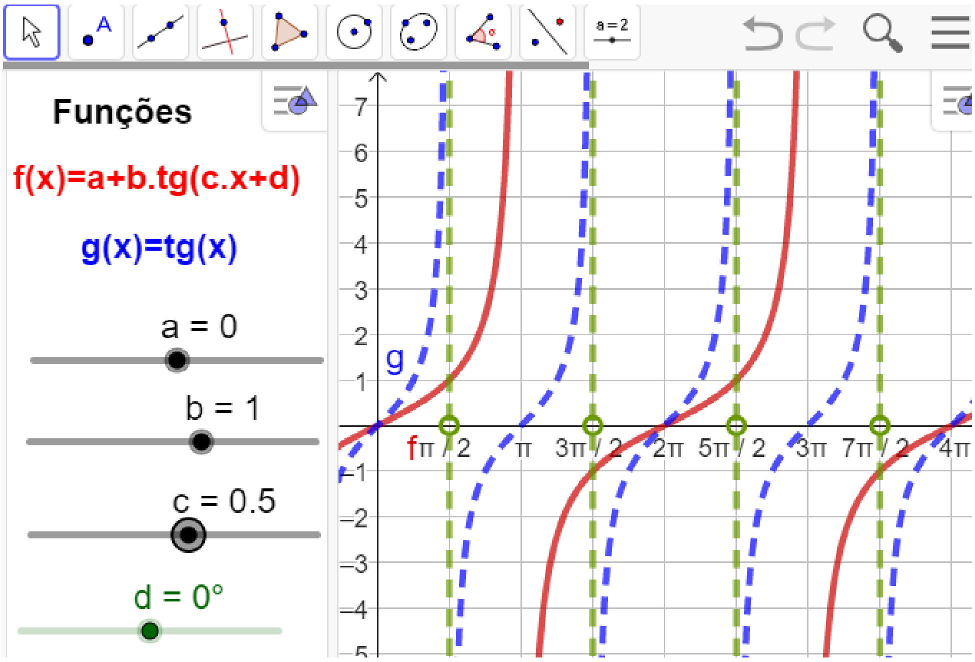
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - ∞ ≤ y  ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($-5x$), o gráfico será comprimido horizontalmente e decrescente.

  Se arrastar o parâmetro 0 < c < 1, então o período da função aumenta.

  Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($\frac{1}{2}$x) no aplicativo

geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 47.

Figura - 47 - Gráfico f(x)=tg($\frac{1}{2}$x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x),  a conclusão é:

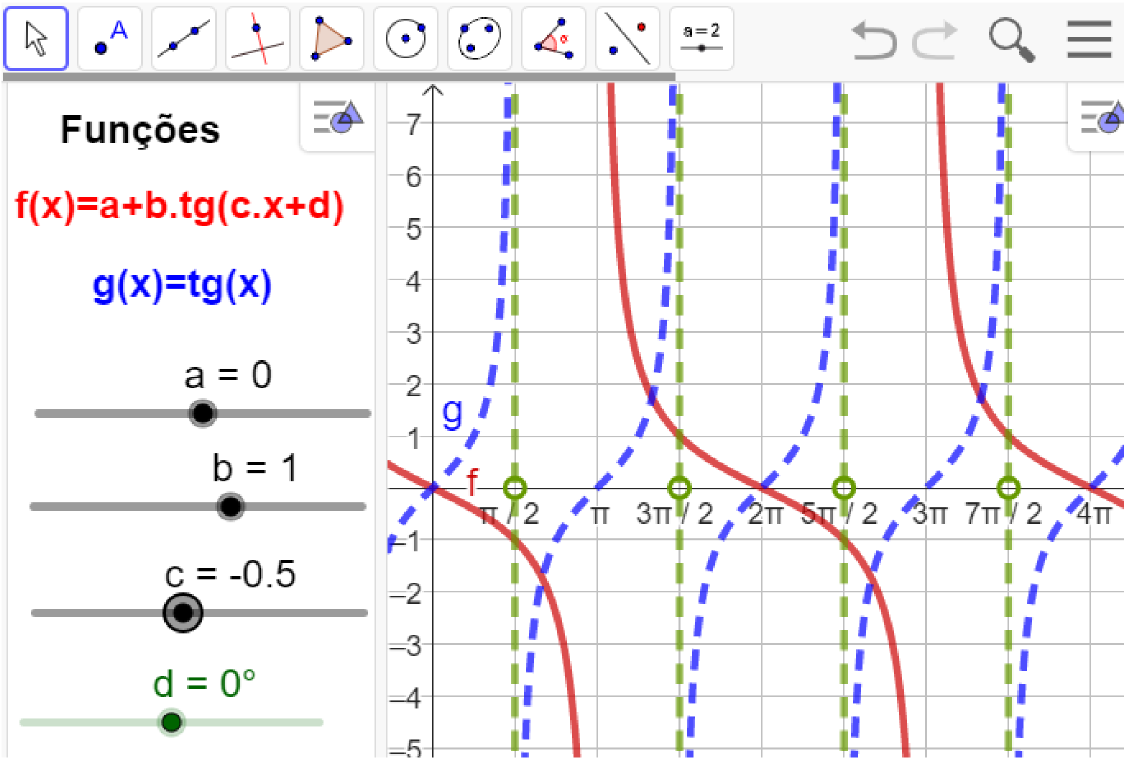
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R$/ - ∞ ≤ y  ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado

horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro -1 < c < 0, então o período da função aumenta.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 48.

Figura - 48 - Gráfico f(x)=tg(-0.5x)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

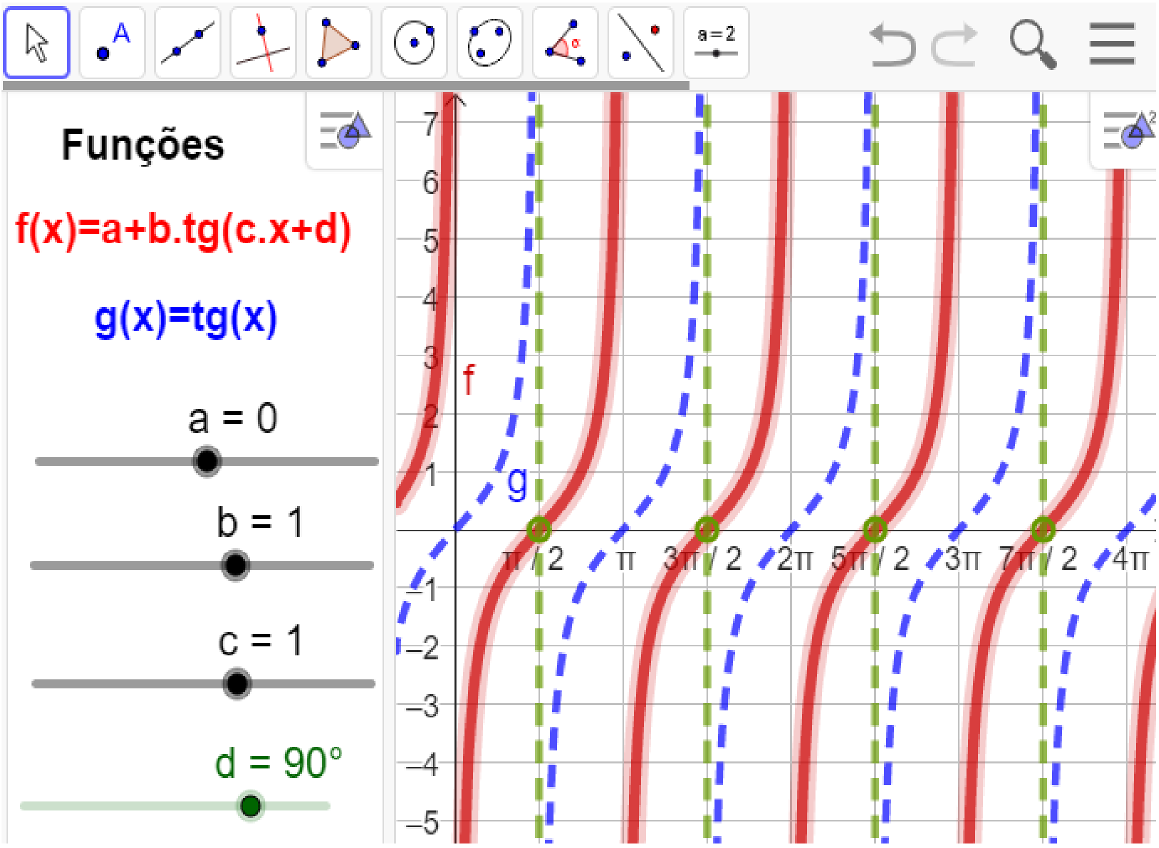
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(-$\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado horizontalmente e decrescente.

**Parâmetro ´´d``**, responsável por um deslocamento horizontal no gráfico.

Se arrastar o parâmetro d > 0, haverá um deslocamento do gráfico para a esquerda do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+$90^0$) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=$90^0$figura 49.

Figura - 49 - Gráfico f(x)=tg(x+$90^0$)




Fonte: Do próprio autor

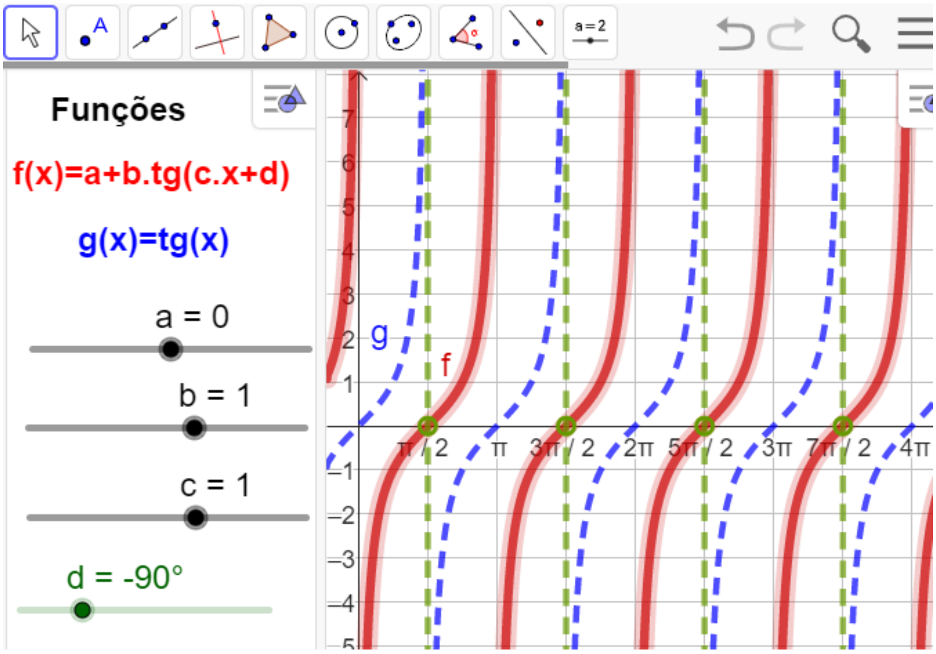
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p = π
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(x+$90^0$), haverá um deslocamento para a esquerda do eixo horizontal.

Se arrastar o parâmetro d < 0 haverá um deslocamento do gráfico para a direita do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+$90^0$) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 90^0$Figura 50.

Figura - 50 - Gráfico f(x)=tg(x-$90^0$)




Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π

Resumindo o que foi aprendido até aqui sobre os parâmetros das funções trigonométricas, temos:

- Parâmetro a: desloca no eixo y
- Parâmetro b: altera a amplitude
- Parâmetro c; altera o período
- Parâmetro d: desloca no eixo x

Optamos por apresentar apenas as funções seno, cosseno e tangente, mas as demais funções trigonométricas - cotangente, secante e cossecante - também podem ser estudadas de maneira análoga.

Assim sendo, esperamos que as atividades de trigonometria com os recursos do *software* GeoGebra, presentes em nosso produto educacional, possam contribuir para resgatar a autoestima daqueles que demonstram dificuldades nesses conteúdos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto & Aplicações.** Volume 2. 1.ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Manual Pedagógico do Professor. Livro Matemática: **contexto e aplicações**, volume 2. 1 Ed. São Paulo: Ática, 2010

PAIVA, Manoel. Coleção base: matemática: **volume único**. 1 Ed. São Paulo: Moderna, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Fundamento de matemática elementar**. 9a edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006, v.3.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. v.1. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

## FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Na fundamentação matemática, foram introduzidos os conteúdos de trigonometria, principalmente as funções trigonométricas e seus gráficos, que servirá de suporte para o entendimento do desenvolvimento das pesquisas. A Trigonometria surgiu a partir das necessidades ligadas à Astronomia e, posteriormente, à Navegação e Topografia. Sua origem é um tanto imprecisa, porém desde os antigos egípcios e babilônios já se tinha indícios de seus estudos, tendo em vista que teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos por esses povos (BOYER, 2003).

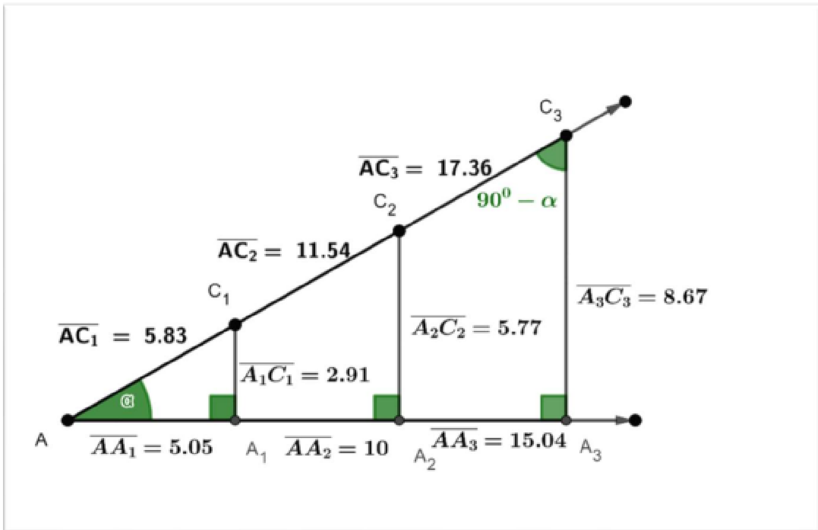
Nesta seção, apresentaremos as relações trigonométricas do triângulo retângulo como suporte matemático necessário para melhor compreensão do objeto de estudo. Além disso, abordaremos como objeto de ensino.

## 3.1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO

Considere a figura a seguir, em que a medida do ângulo $\alpha$ é igual a $30^0$ e A o seu vértice. Sobre um dos lados do ângulo $\alpha$ tomamos arbitrariamente os pontos, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...e, por esses pontos, traçamos perpendiculares ao lado $\overline{AB}$, que encontram o outro lado do ângulo nos pontos $C_1$, $C_2$, $C_3$,...,respectivamente.

Obtemos assim os triângulos retângulos $AA_1C_{1,}$ $AA_2C_2$, $AA_3C_3$,.... todos semelhantes entre si (pois têm ângulos respectivamente congruentes: $\alpha$, $90^0$ , $90^0 -$ $\alpha$). Podemos, então, estabelecer as igualdades entre as razões, figura 1:

Figura - 1 - Razões trigonométricas




Fonte do próprio autor no Geogebra

O número $K_1$, assim obtido, é chamado de seno do ângulo agudo $\alpha$.

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{A_2C_2}{AC_2} = \frac{A_3C_3}{AC_3} = K_1.$$

O número $K_2$, assim obtido, é chamado de cosseno do ângulo $\alpha$.

$$\frac{AA_1}{AC_1} = \frac{AA_2}{AC_2} = \frac{AA_3}{AC_3} = K_2$$

O número $K_3$, assim obtido, é chamado de tangente do ângulo agudo $\alpha$.

$\frac{A_1C_1}{AA_1} = \frac{A_2C_2}{AA_2} = \frac{A_3C_3}{AA_3} = K_3$

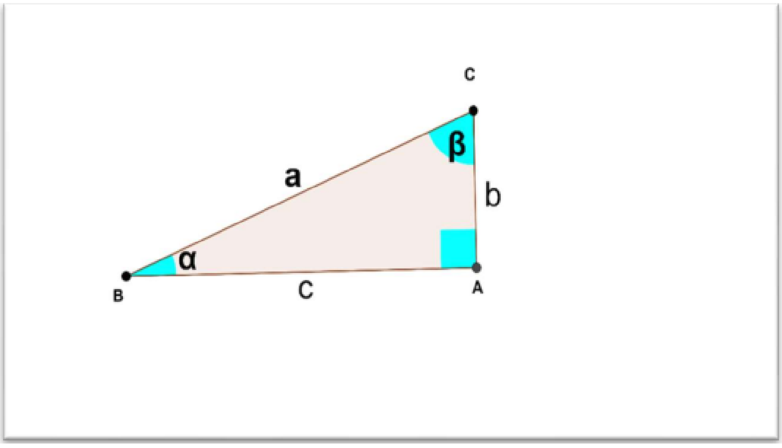
Os números sen($\alpha$), cos($\alpha$), tg($\alpha$) são chamadas razões trigonométricas do ângulo agudo $\alpha$ e não depende dos pontos A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, …

Os números sen(α), cos(α) e tg(α) só varia, quando varia o ângulo e, portanto, independem do tamanho do triângulo.

3.2 RAZÕES TRIGONOMÉTRICA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos o triângulo retângulo ABC, indicado na figura abaixo, figura 2:

Figura - 2 - Triângulo retângulo




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

$\overline{BC}$: hipotenusa, BC = a

$\overline{AC}$: Cateto oposto a $\alpha$ é adjacente a $\beta$, AC = b

$\overline{AB}$: Cateto oposto a $\beta$ é adjacente a $\alpha$, AB = c

α + β = $90^0$

Considerando as definições das razões trigonométricas de um ângulo agudo, temos:

**3.2.1 Razão 1 – Seno de um ângulo agudo**

**sen(**$\alpha$) $= \frac{cateto\ oposto}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$

**sen(**$\beta$) $= \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}$

Portanto, no triângulo retângulo, teremos. Seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa.

Para o cosseno temos:

### 3.2.2 Razão 2 – Cosseno de um ângulo agudo

$$\cos(\alpha) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{C}{a}$$

$$\cos(\beta) = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

Portanto chegamos à conclusão que:

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa Para a tangente temos:

### 3.2.3 Razão 3 – Tangente de um ângulo agudo

$$tg(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

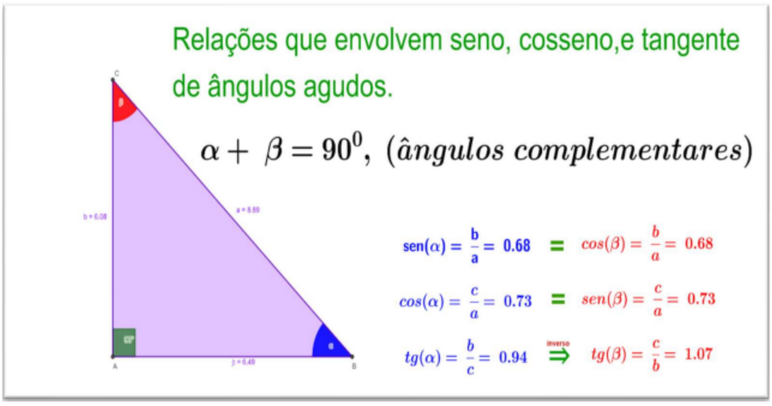
$$tg(\beta) = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$$

Portanto, no triângulo retângulo, teremos:

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo, figura 3.

### 3.2.4 Relações que envolvem seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Figura - 3 - Ângulo complementares




Fonte do próprio autor no Geogebra

Observamos que $\alpha + \beta = 90^0$ são ângulos complementares, logo, $\alpha = 90^0 - \beta$ e $\beta = 90^0 - \alpha$, são ângulos agudos. Devidos as razões trigonométricas, teremos as relações:

O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento.

$sen(\beta) = \cos(\alpha) \rightarrow sen(\beta) = \cos\,(90^0 - \beta)$

O cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento.

$\cos(\beta) = sen(\alpha) \rightarrow \cos(\beta) = \cos(90^0 - \beta)$

A tangente de um ângulo é igual ao inverso do seu complemento

$tg(\beta) = \frac{1}{tg(\alpha)} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{1}{tg(90^0 - \beta)}$

Então, para ângulos agudo $\alpha$ e $\beta$ do triângulo retângulo, são denominados de ângulos complementares, tais que, $\alpha + \beta = 90^0$. Vimos que o significado dos números $sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $tg(\alpha)$, em que $\alpha$, β são as medidas dos ângulos agudo que a sua soma, varia apenas de $0^0$ até $90^0$.

## 3.3 O CICLO TRIGONOMÉTRICO

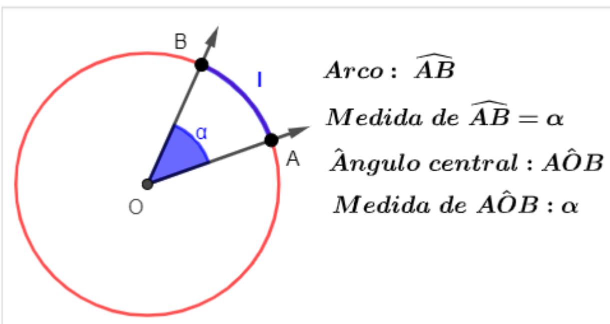
Dando continuidade faremos um estudo mais abrangente de seno cosseno e tangente, neste novo contexto, o triângulo retângulo é insuficiente para as definições necessárias e precisamos estabelecer um novo ambiente para a trigonometria na circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

Para que essas noções sejam ampliadas para outros valores reais de $\alpha$, há necessidade de algumas informações que serão dadas neste capítulo (Arcos, ângulos, radiano, comprimento da circunferência, circunferência trigonométrica.

### 3.3.1 Arco de circunferência

Arco de uma circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos. Note que a todo arco $\widehat{AB}$, corresponde um ângulo central $A\hat{O}B$, isto é, a medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente, figura 4.

Figura - 4 - Arco de circunferência




Fonte do próprio autor no Geogebra

É bom ressaltar que a medida de um arco não representa a medida do comprimento desse arco.

Medida e comprimento de um arco: considerando um ponto A sobre uma circunferência de raio R e centro O. Deslocando-se o ponto A sobre a circunferência, ele percorre uma distância l ao mesmo tempo que gira um ângulo $\alpha$ em torno do centro O. Esse movimento do ponto A descreve um arco de circunferência de medida $\alpha$ e comprimento l.

Unidades: para as medidas dos ângulos usam-se geralmente unidades como o grau e o radiano. Para o comprimento dos arcos usam-se em geral unidades como metros, centímetro, quilômetro, etc.

Grau: quando é dividido uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um grau ($1^0$). A divisão em 360 partes congruentes se deu pela influência do sistema sexagesimal (sistema de base 60) e pela associação do movimento de translação da terra, que dura aproximadamente 360 dias; com isso a circunferência foi dividida em 360 partes, ou seja, 360 gradus, na linguagem atual 360 graus.

O grau foi dividido em 60 partes menores chamadas minutae prime (primeira parte pequena), o que originou a palavra minuto ($1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{¨}$).

O minuto foi dividido também em 60 partes menores chamadas minutae secundae (próxima parte pequena). Daí a origem da palavra segundo ($1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$).

### 3.3.2 Radiano

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio r da circunferência que contém o arco a ser medido.

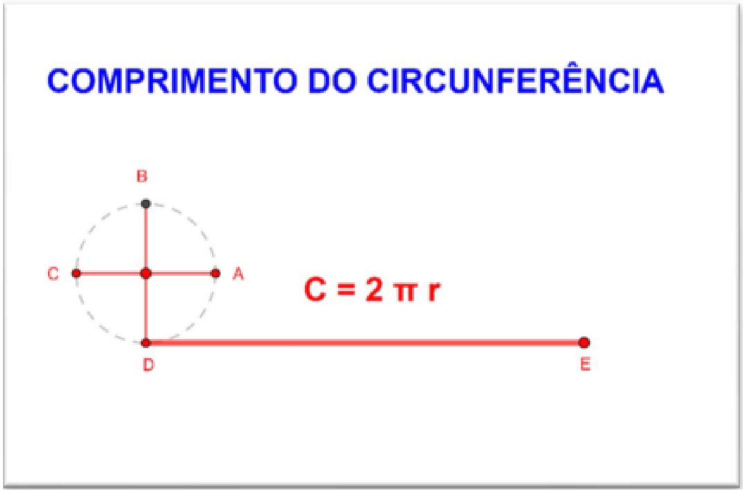
Um arco de medida 1 radiano (indicamos 1 rad) corresponde a um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.

Se temos um ângulo central de medida $\alpha$ radianos, então ele subtende um arco de medida l radianos e comprimento de r raios. Assim, se a medida $\alpha$ do arco for dada em radianos, teremos l=$\alpha r$.

### 3.3.3 Comprimento da circunferência

Qual é o comprimento da circunferência? Para compreender o que é o comprimento da circunferência, é importante lembrar a diferença entre círculo e circunferência. O círculo é a região formada por todos os pontos que estão a uma distância menor ou igual ao raio do círculo, a circunferência é o conjunto de pontos que estão a uma distância r do centro, ou seja, é o contorno do círculo, figura 5.

Figura - 5 - Comprimento da circunferência




Fonte do próprio autor no Geogebra

Supondo que pudéssemos cortar uma circunferência e esticá-la, retificando-a, obteríamos um segmento de reta $\overline{DE}$. O comprimento C desse segmento é denominado comprimento da circunferência

O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma das "sobras".

Para determinar a medida do comprimento de uma região circular, utilizamos a medida de seu raio, mas somente isso não é suficiente. Em qualquer região circular basta dividirmos o comprimento da mesma, pela medida do diâmetro, que encontraremos o valor correspondente a 3,14 aproximadamente.

Se multiplicarmos o raio da circunferência por 2, encontraremos a medida do diâmetro (segmento de reta que intercepta dois pontos da circunferência passando pelo centro. Com base nessa descoberta, o comprimento de uma região limitada por uma circunferência será:

Assim: $\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = D.\pi \Rightarrow$ mas $D = 2r \Rightarrow C = 2r\pi \Rightarrow \boldsymbol{C = 2\pi}$r.

Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede 6,283184... rad (número batizado com o nome de 2pi)

Partindo do comprimento da circunferência, isto é, C = 2πr, mas l = $\alpha\, r \Rightarrow$

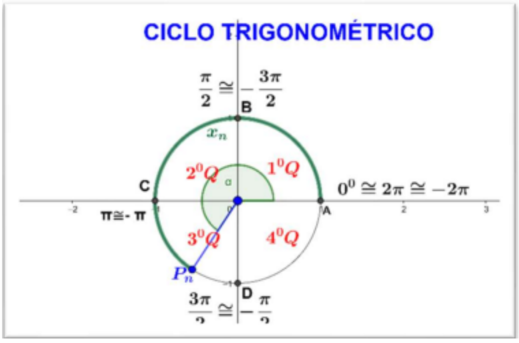
$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2\,\pi\, r}{r} \Rightarrow \alpha = 2\,\pi \Rightarrow \alpha = 2\,(\,3,14159) \Rightarrow \alpha \simeq 6,28318$$

Logo concluímos que o comprimento da circunferência é **C = 2** π $R$

3.4 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO NO PLANO CARTESIANO

Círculo trigonométrico (também denominado de ciclo trigonométrico) é uma circunferência orientada usada para representar ângulos e possui raio 1 e centro no ponto O, esse centro é colocado no plano cartesiano O = (0,0) , cada ponto dessa circunferência P=(x,y), está associado a um número real, figura 6.

Figura - 6 - Ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Analisando o ciclo, temos que:

O ciclo trigonométrico nada mais é uma circunferência de Raio = 1, com dois eixos ortogonais que passam pelo seu centro. Estes eixos dividem o ciclo trigonométrico em 4 quadrantes.

**Primeiro quadrante**: ângulos que estão entre 0 a 90º ou 0 e π/2 radianos;

**Segundo quadrante**: ângulos que estão entre 90º e 180º ou π/2 e π radianos;

**Terceiro quadrante**: ângulos que estão entre 180º e 270º ou π e 3 π/2 radianos;

**Quarto quadrante**: ângulos que estão entre 270º e 360º ou 3π/2 e 2π radianos.

Convencionou-se que na circunferência orientada em 0 é a origem na marcação de arcos e por conta disso arbitrou-se que o sentido positivo é o sentido anti-horário e o sentido horário será o negativo.

Definição: Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal xOy. Consideremos a circunferência C, de centro O, e raio r = 1.

Notamos que o comprimento desta circunferência é igual a $2\pi$.

Vamos definir uma relação de $\mathbb{R}$ sobre C, isto é, vamos associar a cada número real $x_n$, um único ponto $P_n$ da circunferência C, do seguinte modo:

Se $x_n$ = 0, então $P_n$ coincide com A.

Se $x_n$ > 0, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $x_n$, no sentido anti-horário, e marcamos $P_n$ como ponto final do percurso.

Se $x_n$ < 0, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x_n|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é $P_n$.

Se o ponto $P_n$ está associado ao número $x_n$ dizemos que o ponto $P_n$ é a imagem do percurso $x_n$ no ciclo trigonométrico.

Em resumo, $P_n$ é a imagem dos elementos do conjunto: $P_n$ = {$x_n \in \mathbb{R} \,/\, x_n = x_n$ ± $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, n∈ $N$}.

Se o ponto $P_n$ está associado ao número $x_n$ dizemos que $P_n$ é a imagem de $x_n$ no ciclo. Assim, por exemplo, temos:

i. A imagem de $\frac{\pi}{2} \cong -\frac{3\pi}{2} \cong \cdots$ , é $o\ ponto\ B$.

ii. A imagem de $\pi \cong -\pi \cong \cdots$ , é $o\ ponto\ C$.

iii. A imagem de $\frac{3\pi}{2} \cong -\frac{\pi}{2} \cong \cdots$ , é $o\ ponto\ D$.

iv. A imagem de $0^0 \cong 2\pi \cong -2\pi$, …, é o ponto A

## 3.5 A FUNÇÃO DE EULER

Leonhard Euler (1707- 1783), matemático sueco, entrou aos 14 anos na Universidade da Basiléia sob a docência de Johann Bernoulli.

Concretizou uma vasta gama de análises e pesquisou praticamente todos os ramos da matemática pura até então conhecida, aprimorando-as nos detalhes, adicionando provas e rearranjando-as numa forma consistente e mais trabalhada. Usou frequentemente séries infinitas em seu trabalho, em 1748, Introduction in analysin infinitorum para desenvolver novos métodos ou para modelar problemas aplicados.

Denotamos por C o círculo unitário (ou círculo trigonométrico). Temos, portanto C = {(x, y) ∈ $\mathbb{R}$ / $x^2 + y^2$ = 1}. Observemos que as coordenadas de todo ponto em C estão entre −1 e 1, ou seja, se $(x, y) \in C$, então $-1 < x < 1$ e $-1 < y < 1$.

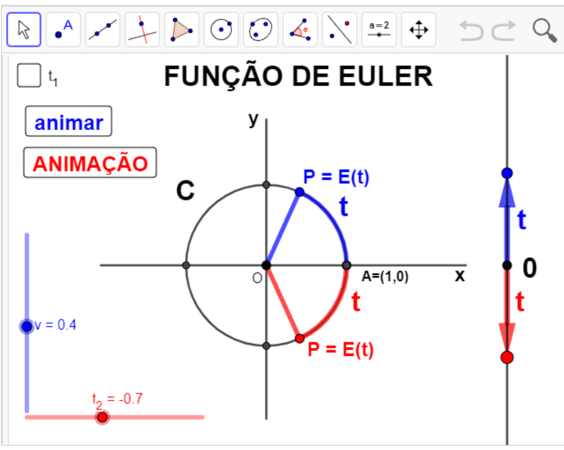
A função de Euler $E : R \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

$E(0) = (1, 0)$, coincida com o ponto $A = (1,0)$ de C.

Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto (1, 0), um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum). O ponto final do caminho será chamado E(t).

Se $t < 0$, E(t) será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto (1, 0) e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual), figura 7.

Figura - 7 - Aplicativo da Função de Euler




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

A função de Euler $E: IR \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em IR caia sobre o ponto $A = (1, 0)$ em C. Escrevendo $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e, para cada t, em IR, $P= (x, y) = E(t)$, dizemos neste caso que o ângulo $A\widehat{O}P$ mede t radianos.

### 3.5.1 A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Para não confundir: Se $A = (1, 0)$ e $B = E(\pi)$

- o comprimento do arco AB é π unidade de comprimento.
- A medida do ângulo AOB é π rad.

A função de Euler é uma função $E: \mathbb{R} \to C$ e faz corresponder a todo número real t o ponto (x, y) de C, de tal forma que:

Por definição, quando um ponto descreve na reta um intervalo de comprimento t, sua imagem E(t) percorre sobre o círculo unitário C um arco de igual comprimento t.

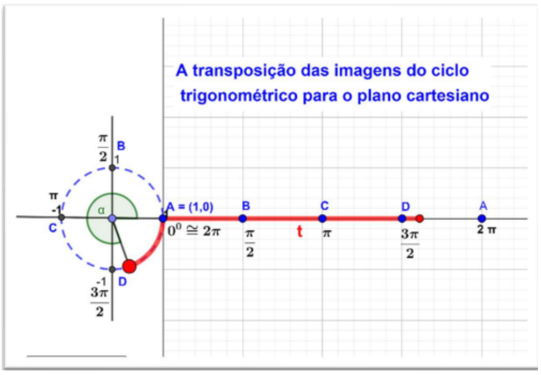
Como o círculo unitário C tem comprimento igual a 2π, quando o ponto descreve na reta um intervalo de comprimento 2π, sua imagem E(t) dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo t ∈ R, tem-se E(t + 2π) = E(t) e, mais geralmente, para todo k ∈ Z, tem-se E(t +2kπ) = E(t), seja qual for t ∈ R. A função é periódica de período $2\pi$.

A função de Euler é uma função periódica com período 2π, e E(t +2kπ), k ∈ Z, são as várias imagens de t ∈ R, ou seja, E(t) = E(t + 2kπ) $K \epsilon \mathbb{Z}$. Isto é:

Então quando um ponto varia de $0^0$ até 2k$\pi$, $K \in \mathbb{Z}$ , sua imagem E(t) se desloca sobre C, no sentido positivo dando um número $|K|$ de volta e retornando ao ponto de partida. A distância percorrida sobre C é igual a 2kπ. Logo, E(t) = E(t +2kπ), $K \in \mathbb{Z}$, já que, o comprimento percorrido por E(t) é igual à distância percorrida por t sobre a reta R.

A transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é como se tivéssemos cortado a circunferência e esticado levando todas as propriedades da circunferência, mas na reta real, no eixo x do plano cartesiano.

Figura - 8 - Transposição das imagens




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Vejamos alguns exemplos:

A imagem de $0^0$, é o ponto A no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$, é o ponto B no eixo x.

A imagem de $\pi$, é o ponto C no eixo x.

A imagem de $\frac{3\pi}{2}$, é o ponto D no eixo x.

A imagem de $2\pi$, é o ponto A no eixo x.

A imagem de $\frac{5\pi}{2}$ = $\boldsymbol{2\pi}$ + $\frac{\pi}{2}$ , isto quer dizer que, foi dada uma volta e deslocou um comprimento de $\pi/2$, logo a imagem é o ponto B no eixo x.
Devido a função ser periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$.

A imagem de $\frac{15\pi}{2}$= $\frac{12\pi}{2}$ + $\frac{3\pi}{2}$ = $6\pi$ + $\frac{3\pi}{2}$ = $3(\boldsymbol{2\pi})$ + $\frac{3\pi}{2}$ , isto quer dizer que, foi dada 3 voltas e deslocou um comprimento de $\frac{3\pi}{2}$, logo a imagem é o ponto D no eixo x. Devido a função ser periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$.

3.6 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

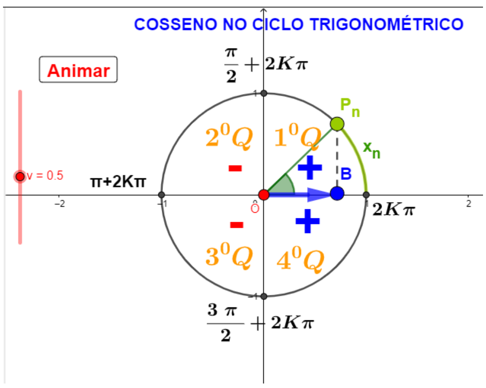
Para definirmos a Função de Euler, a partir dela, as Funções Trigonométricas, utilizaremos o círculo trigonométrico, que consiste de uma circunferência de raio unitário, dividido pelos eixos das abscissas (eixo X) e ordenadas (eixo Y) em quatro quadrantes. para medição de ângulos no sentido anti-horário e horário.

As funções cos : R → R e sen : R → R, chamadas de função cosseno e de função seno respectivamente, são definidas para cada t ∈ R,a partir da função de Euler, ou seja, E(t) = (cos(t),sen(t)), onde cos(t) = x e sen(t) = y.

3.7 FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Definição: Dado um número real $x_n \in [0, 2\pi]$, seja $P_n$ sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de $x_n$ (indicamos cos ($x_n$)) a abscissa da projeção do ponto $P_n$, em relação ao sistema xOy, FIGURA 9.

Figura - 9 Cosseno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

### 3.7.1 Definição e propriedades da função cosseno no Geogebra

Procedimento para explicar à definição da função cosseno no geogebra**:**

1. O ponto $p_N$, que está no primeiro quadrante, vai girando no ciclo trigonométrico,
a sua projeção em relação a abcissa OB, será o cosseno de $x_n$,isto é:
OB = cos ($x_n$).

**2.** O ponto $P_n$, fará o percurso de $x_n$ , a projeção do ponto $P_n$ sairá do ponto A, e irá diminuindo até a origem da circunferência, logo diminuirá, ou seja, na origem o cosseno é zero. Portanto, no primeiro quadrante a função cosseno é DECRESCENTE.

3. O ponto $P_n$, continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2}$→π, a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem e se deslocará até $\boldsymbol{\pi}$, a medida desse deslocamento é 1, tamanho do raio. Mais este deslocamento está no lado esquerdo dos eixos coordenados, pois assume valores negativos, logo, o cosseno de $\boldsymbol{\pi}$ é -1. Portanto a função no segundo quadrante é DECRESCENTE.

4. O ponto $P_n$, continuará o percurso no terceiro quadrante, saindo de π→ $\frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$, sairá de -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, que corresponde a zero, pois a sua numeração aumenta, portanto, a função cosseno no terceiro quadrante é CRESCENTE.

5. O ponto $P_n$, continuará o percurso no quarto quadrante, saindo de $\frac{3\pi}{2}$ →2π, a projeção do ponto $P_n$, sairá da origem e se deslocará até 2π, a medida desse deslocamento é 1, tamanho do raio, está no lado direito dos eixos coordenados, pois assume valores positivos, logo, o cosseno de 2π é 1. Portanto a função no segundo quadrante é CRESCENTE.

6. Seguindo nesse procedimento no aplicativo geogebra, e observando o ponto $P_n$, girando no ciclo trigonométrico e relacionando com a sua projeção, em relação ao eixo das abscissas, o segmento que parte do centro e vai até a interseção da projeção do ponto $P_n$ com o eixo das abscissas, será o cosseno do

ângulo que o forma.

**3.7.2 Características da função cosseno**

Como o círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, a imagem da função cosseno está no intervalo [−1, 1], isto é, −1 ≤ cos(x) ≤ 1;

Considere a função f:$R \to R$ que associa cada número real x ao cos(x).O domínio e a imagem de f são respectivamente os conjuntos:

D(f) = R

Im = { y $\epsilon\, R\ /\ -1 \le y \le 1\}$

Período p = 2π.

**3.7.3 Propriedade do cosseno**

Se $P_n$ está no primeiro ou quarto quadrante, a projeção do ponto $P_n$ está na parte positiva do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que o cos($x_n$) será positivo;

Se $P_n$ está no segundo ou terceiro quadrante, a projeção do ponto $P_n$ está na parte negativa do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que o cos($x_n$) será negativo.

3.8 GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

A representação gráfica de uma função real é o lugar geométrico de todos os pontos de coordenadas (x, f(x)) no Plano cartesiano. O gráfico de uma função fornece, de uma forma bastante eficiente, uma ideia global do comportamento dessa função em todo o seu domínio.

O gráfico da função cosseno é o conjunto dos pontos do plano cartesiano de coordenadas ($x_n$, cos($x_n$)), com $x_n$ ∈ R.

**3.8.1 Definição**

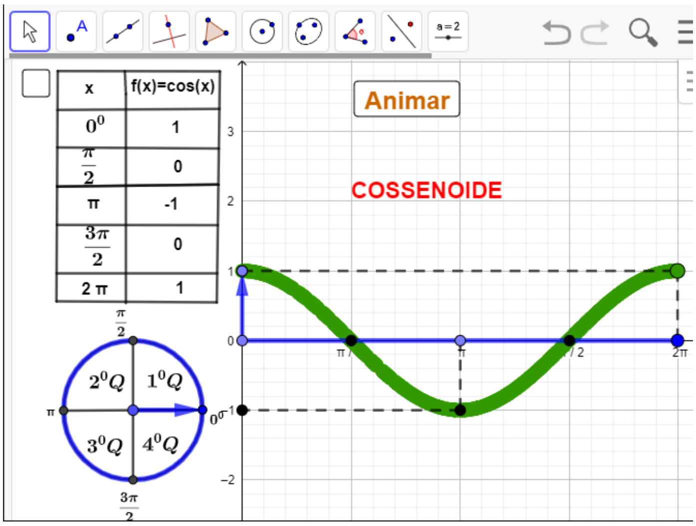
Dado um número real $x_n$, seja $P_n$ sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de $x_n$ (e indicamos cos($x_n$)) a abscissa OB do ponto $P_n$ em relação ao sistema xOy.

Denominamos função cosseno a função f: R ➞ R que associa a cada real $x_n$, o real OB = cos($x_n$), isto é, f($x_n$) = cos( $x_n$).

Fazendo um diagrama com x representando as abscissas e f(x) = cos(x)

Representando as ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, da cossenoide, conforme a figura 10.

Figura - 10 - Cossenóide




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

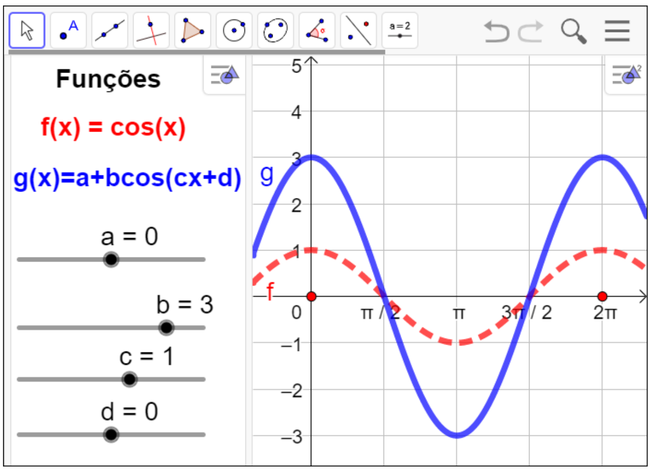
Parâmetros das funções trigonométricas.

São quatro parâmetros (a,b,c e d) que influenciam na função cosseno, seno e tangente:

### 3.8.2 Parâmetros da função cosseno

A função cosseno tem sua forma geral representada por f(x) = cos(x) podendo ser modificada para g(x) = a + b.cos(c.x + d) em que a, b, c e d são números reais (parâmetros) passíveis de alterações e modificam a aparência do gráfico da função.

Figura - 11 - Parâmetros da função cosseno




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

**Parâmetro a:**

Ao modificar este parâmetro percebe-se que a função sofre um deslocamento vertical.

- Quando a > 0, o gráfico da função é deslocado para cima.
- Quando a < 0, o gráfico da função é deslocado para baixo.
- É bom ressaltar que, o parâmetro desloca o gráfico em relação ao eixo y, isso faz com que a imagem da função seja alterada.

**Parâmetro b:**

Modificando o parâmetro b, neste caso, além da imagem ser alterada, a amplitude do gráfico também muda.

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função cosseno. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui, a amplitude do gráfico também diminui.

Este parâmetro multiplica todos os valores do gráfico pelo seu valor em relação ao eixo y.

**Parâmetro c:**

Quando aumenta-se o valor de c > 1, o período diminui com relação ao valor inicial. Quando 0 < c < 1, a função tem seu período aumentado. Quando −1 < c < 0, o período diminui. Quando c < -1, o período aumenta.

**Parâmetro d:**

Para o parâmetro d, tem-se que a função sofre um deslocamento horizontal.

Quando d > 0,o gráfico da função desloca-se para a esquerda, e quando d < 0 , desloca-se para a direita.

3.9 FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Definição: Dado um número real $x_n$∈ [0, 2π], seja $P_n$ sua imagem no ciclo. Denominamos seno de $x_n$ (indicamos sen ($x_n$)) a ordenada da projeção do ponto $P_n$, em relação ao sistema xOy.

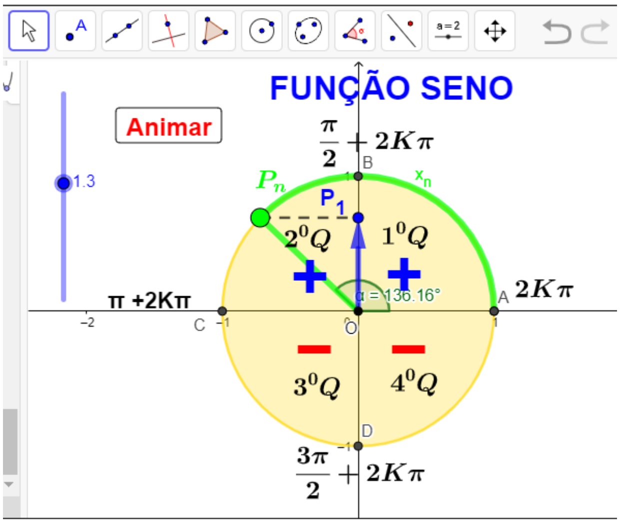
**3.9.1 Definição da função seno no Geogebra**

Procedimento para explicar à definição da função seno no geogebra:

1. O ponto $P_n$, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico, a sua projeção em relação a ordenada $OP_1$, será o seno de $x_n$, isto é, o segmento

$\overline{OP_1}$ = sen ($x_n$). Figura 12.

Figura - 12 Função seno no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

### 3.9.2 Propriedades:

**1.** O ponto $P_n$, no primeiro quadrante fará o percurso de $0^0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$ sairá do ponto O, na origem, e irá aumentando até o ponto B, em $\frac{\pi}{2}$, logo aumentará, ou seja, o seno de $\frac{\pi}{2}$ é 1. Portanto, no primeiro quadrante a função seno é CRESCENTE.

2. O ponto $P_n$, continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2}\rightarrow\pi$, a projeção do ponto $P_n$, sairá do ponto B,a medida desse deslocamento é 1, tamanho do raio e se deslocará até 0, logo, o seno de $\boldsymbol{\pi}$ é 0. Portanto a função no segundo quadrante é DECRESCENTE.

3. O ponto $P_n$, continuará o percurso no terceiro quadrante, saindo de $\pi\rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto $P_n$, sairá de zero, e se deslocará até o ponto D, tamanho do raio, nos eixos das coordenadas, que corresponde a -1, pois a sua numeração diminui, portanto, a função seno no terceiro quadrante é DECRESCENTE.

4. O ponto $P_n$, continuará o percurso no quarto quadrante, saindo de $\frac{3\pi}{2}\rightarrow 2\pi$, a projeção do ponto $P_n$, sairá do ponto D e se deslocará até a origem,pois a sua

numeração aumenta, logo, o seno de 2π é zero. Portanto a função no quarto quadrante é CRESCENTE.

## 3.10 GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

A representação gráfica de uma função real é o lugar geométrico de todos os pontos de coordenadas no ($x_n$, sen($x_n$)), com $x_n$ ∈ R, no plano cartesiano.

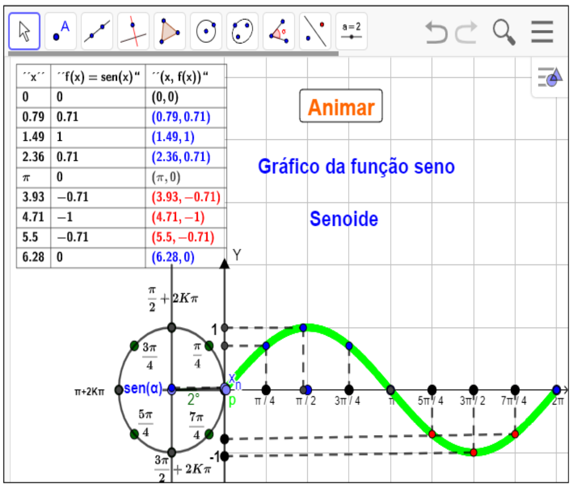
Definição: Dado um número real $x_n$ ∈ [0, 2π], seja $P_n$ sua imagem no ciclo. Denominamos seno de $x_n$ (indicamos sen ($x_n$)) a ordenada da projeção do ponto $P_n$ em relação ao sistema xOy.

Como construir o gráfico da função seno?

Procedimentos para a montagem do gráfico da função seno.

- **1°Passo:** faça uma tabela com duas colunas x e y;
- **2° Passo:** estipule valores para colocar em x e anote na tabela;
- **3° Passo:** resolva a função para cada valor de x e anote o resultado do y encontrado na tabela. Sugerimos usar os valores dos principais ângulos do ciclo (0°, 90°, 180°, 270° e 360°) ;
- **4° Passo:** agora você já tem pares ordenados para traçar no plano. Marque todos os pontos;
- **5° Passo:** ligue os pontos com uma linha e veja a imagem do gráfico se forma.

Figura - 13 - Senóide




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

### 3.10.1 Domínio da função seno

O domínio da função seno, que são os possíveis valores de x, serão infinitas possibilidades de números reais, Isso porque há infinitos valores de ângulos possíveis.D = R

### 3.10.2 Imagem da função seno

A Imagem da função seno, que são os possíveis valores de y, serão números entre 1 e -1. Isso porque o raio do ciclo trigonométrico é 1.

Considere a função f:$R \rightarrow R$ que associa cada número real x ao sen(x). A imagem de f será: Im = { y ϵ $R$ / $-1 \leq y \leq 1$}.

### 3.10.3 Período da função seno

Conhecemos como período o menor intervalo em que acontece a repetição do gráfico. Podemos notar que a função seno é periódica, ou seja, o gráfico se repete a cada 2π, isto é, o período da função seno é 2π.

### 3.10.4 Amplitude da função seno

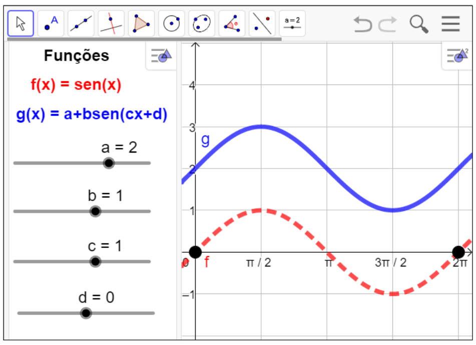
Amplitude é a medida de quanto o valor de y varia acima ou abaixo do eixo x

A amplitude também pode ser definida como metade da distância entre o valor máximo e o valor mínimo da função.

### 3.10.5 Parâmetros da função seno

A função seno tem sua forma geral representada por f(x) = sen(x) podendo ser modificada para g(x) = a + b.sen(c.x + d) em que a, b, c e d são números reais (parâmetros) passíveis de alterações e modificam a aparência do gráfico da função, figura 14.

Figura - 14 - Parâmetros da função seno




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

**Parâmetro a.**

Ao modificar este parâmetro percebe-se que a função sofre um deslocamento vertical.

Quando a > 0, o gráfico da função é deslocado para cima.

Quando a < 0, o gráfico da função é deslocado para baixo.

É bom ressaltar que, o parâmetro desloca o gráfico em relação ao eixo y, isso faz com que a imagem da função seja alterada.

**Parâmetro b**

Modificando o parâmetro b, neste caso, além da imagem ser alterada, a amplitude do gráfico também muda.

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função seno. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui, a amplitude do gráfico também diminui.

Este parâmetro multiplica todos os valores do gráfico pelo seu valor em relação ao eixo y.

**Parâmetro c**

Quando aumenta-se o valor de c > 1, o período diminui com relação ao valor inicial,

- Quando 0 < c < 1,  a função tem seu período aumentado
- Quando −1 < c < 0, o período diminui
- Quando c < -1, o período aumenta.

**Parâmetro d**

Para o parâmetro d, tem-se que a função sofre um deslocamento horizontal.

Quando d > 0,o gráfico da função desloca-se para a esquerda, e quando d < 0 , desloca-se para a direita..

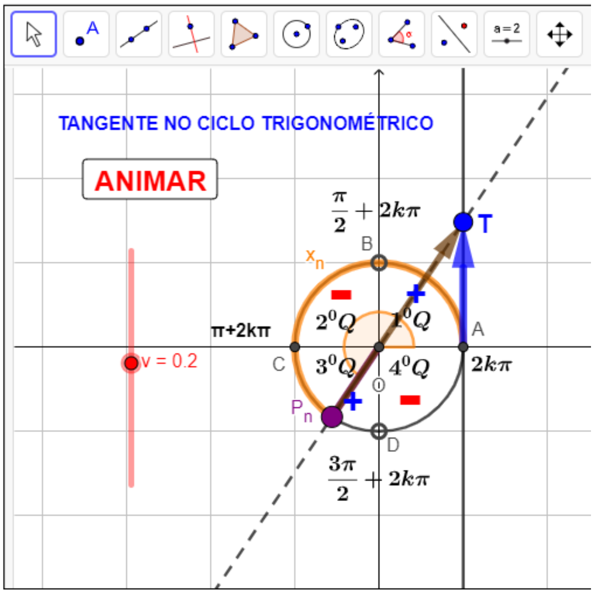
A função tangente possui um comportamento diferente das funções anteriores. Ela não é limitada como a função seno e a função cosseno. Os valores da tangente correspondem a uma reta passando pela origem do sistema, e também por um ponto do ciclo trigonométrico pertencente à circunferência, levado na direção do eixo das tangentes.

3.11 FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

A medida da tangente de um ângulo no ciclo trigonométrico é definida a partir de uma reta tangente ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo y.

Traçamos uma reta que liga o ponto do ciclo e a origem do sistema; vemos onde esta reta cruza a reta tangente; a tangente do ângulo será a distância (considerando sinal) deste ponto de cruzamento até o eixo horizontal, isto é, a medida do segmento $\overline{AT}$, figura 15.

Figura - 15 - Tangente no ciclo trigonométrico




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

**3.11.1 Definição:**

Dado um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, seja $P_n$ sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $OP_n$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de $x_n$ (e indicamos tg$(x_n)$) a medida algébrica do segmento AT.

A lei de formação da função tangente é f(x) = tg(x).

**3.11.2 Domínio da função tangente**

Definimos como domínio os possíveis valores que a função pode toma no eixo x, então a função y=tg(x), com x representando os possíveis ângulos do ciclo trigonométrico, terá todos os reais, menos os pontos os quais o raio que define o ângulo no ciclo é paralelo ao eixo das tangentes, ou seja, os ângulos 90°, 270°, 450°… . Generalizando, D={x ∈ R / x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k ∈ Z}.

**3.11.3 Imagem da função tangente**

Definimos como imagem os possíveis valores que uma função pode tomar no eixo y, então a função y=tg(x) será delimitada por todos os reais, pois a projeção dos ângulos no eixo das tangentes cobre os infinitos valores que ela possui. Generalizando, Im={y ∈ R}.

**3.11.4 Período**

A função tangente é periódica, então dizemos, tg(x) = tg(x+kπ)=y, ∀k∈Z, isto é, o gráfico repetirá a mesma imagem no ciclo trigonométrico. Seu período é o menor valor positivo de kπ, isto é, π.

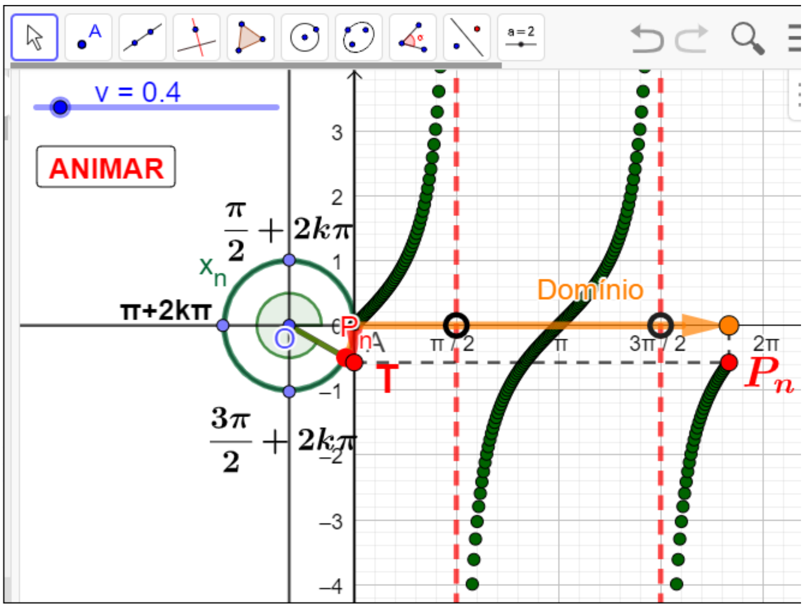
**3.11.5 Paridade da função tangente**

A função tangente é ímpar, pois tan(– x) = – tan(x).

3.12 GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE

Primeiro vamos analisar as propriedades do tópico anterior que limita nosso domínio, e mostra que nossa imagem pode ser qualquer real. Para o domínio, a função y=tg(x) não pode estar definida nos valores de $\{x \ \varepsilon\ R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, como mostra a figura 16

Figura - 16. Gráfico da função tangente




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Se observamos a relação existente entre os ângulos e os seus correspondentes no eixo das tangentes notamos que não é diretamente proporcional, havendo sempre uma curvatura em relação aos pontos e seus correspondes. Deste modo, podemos aumentar a quantidade de pontos e observar que o gráfico toma um formato de curva.

### 3.12.1 Imagem da função tangente

Definimos como imagem os possíveis valores que uma função pode tomar no eixo y, então a função f(x) = tg(x) será delimitada por todos os reais, pois a projeção dos ângulos no eixo das tangentes cobre os infinitos valores que ela possui, isto é, Im = { y∈ $R$ }

### 3.12.2 Domínio da função tangente

São os possíveis valores, que a função pode assumir no eixo das abscissas, então a função f(x)=tg(x), com **x** representando os possíveis ângulos no ciclo trigonométrico, portanto, o domínio será todos os reais, menos os pontos os quais o raio que define o ângulo no ciclo é paralelo ao eixo das tangentes, isto é:

D={x∈ $R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$}

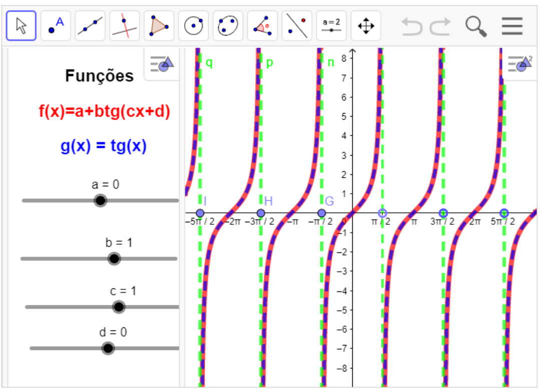
### 3.12.3 Período da função tangente

O período da função tangente é π. Então dizemos: tg(x)=tg(x+kπ), ∀k∈Z, terá a mesma imagem no ciclo trigonométrico, para cada período.

### 3.12.4 Parâmetro da função tangente

Queremos analisar como é o gráfico de uma função tangente mais geral, f(x) = a + b.tg(c.x +d), quando comparado ao gráfico de g(x) = tg(x), a partir das transformações sofridas pelo gráfico dessa função, Figura 17.

Figura - 17 - Parâmetros da tangente




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Cada um dos parâmetros da função tangente {a,b,c,d}, afeta diferentes características do gráfico resultante.

**O parâmetro a:**

Determinar o alongamento vertical da função tangente

Se {a} for maior que 1, o gráfico será esticado e se A estiver entre 0 e 1, o gráfico será comprimido.

**O parâmetro b**

O parâmetro {b} na forma geral afeta o período da função.

Quando o valor de {b} é maior que 1, a função é crescente e o período é menor que π, então a função é comprimida horizontalmente.

Quando o valor de {b} é maior que zero e menor que 1, a função é crescente e o período é maior que π, então a função é esticada horizontalmente.

Quando o valor de {b} é menor que zero, a função é ´´desacelerada``, decrescente e o período é menor que π, então a função é esticada horizontalmente

**O parâmetro c**

O gráfico é deslocado para a direita crescente quando {c} é maior que zero.

O gráfico é deslocado para a esquerda decrescente quando {c} é menor que zero.

**O parâmetro d**

Determinar o deslocamento horizontal da função tangente.

Se tivermos um valor positivo de {d}, o gráfico é deslocado para a esquerda.

Se tivermos um valor negativo de {d}, o gráfico é deslocado para a direita.

Resumindo o que foi aprendido sobre os parâmetros das funções trigonométricas, temos ;

Parâmetro a: desloca no eixo y

Parâmetro b: altera a amplitude

Parâmetro c: altera o período

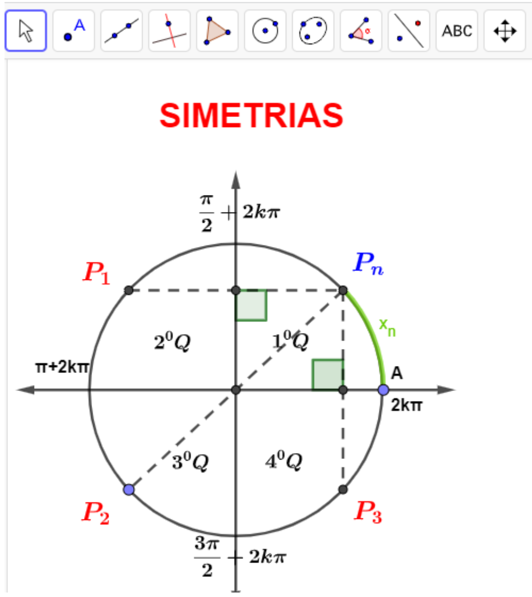
Parâmetro d: desloca no eixo x.

3.13 SIMETRIA

É muito útil sabermos relacionar medidas de arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois ajudará a calcular o seno cosseno e tangente dos arcos.

Vamos considerar um ponto $P_n$ a imagem do arco de medida $x_n$ no ciclo trigonométrico. Pelo ponto $P_n$ tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas, essas retas interceptam a circunferência nos pontos $P_1$, $P_2$, $P_3$, respectivamente.Figura 18.

Figura - 18 - Simetrias




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Reduzir um arco ao primeiro quadrante significa determinar um arco no primeiro quadrante cujas funções trigonométricas tenham o mesmo valor absoluto.

Seja um arco $\widehat{AP_n}$ de medida $x_n$ no primeiro quadrante e seus pontos simétricos $P_1$, $P_2$ e $P_3$.

a) Em relação ao eixo Oy, temos o arco $\widehat{AP_1}$ de medida $\pi - x_n$, e imagem $P_1$, no segundo quadrante.

a) Em relação ao centro do ciclo trigonométrico, temos o arco $\widehat{AP_2}$ de medida $\pi + x_n$, e imagem $P_2$, no terceiro quadrante.

Em relação ao eixo Ox, temos o arco $\widehat{AP_3}$ de medida $2\pi - x_n$ e imagem $P_3$, no quarto quadrante.

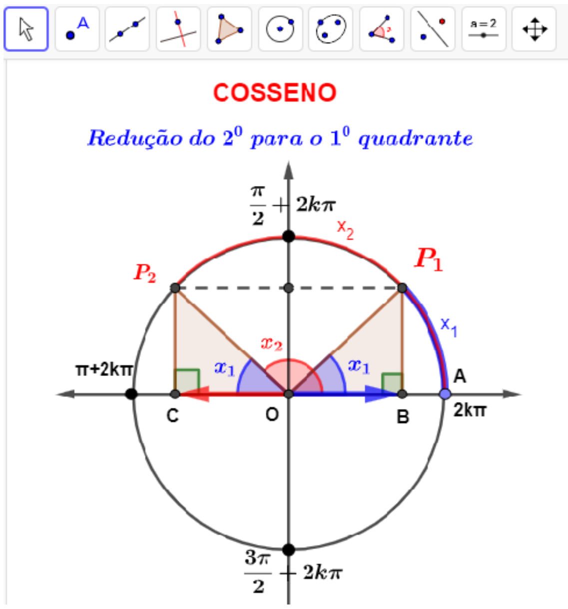
### 3.13.1 Simetria do cosseno

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO VERTICAL (COSSENO)

Simetria em relação ao eixo vertical: Quando dois pontos são diametralmente opostos em relação ao eixo das ordenadas, como $P_1$ $\boldsymbol{e}$ $P_2$ da figura, é possível afirmar que o número real com imagem em $x_1 + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\pi}$ é o ponto $P_1$ em $x_2 + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\pi}$, é $P_2$ pois os ângulos assinalados na figura possuem imagens simétricas.

Do segundo ao primeiro quadrante foi construído um exemplo com $P_2$ no segundo quadrante, isto é, com $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$. Veja que, neste caso, temos cos( $x_2$) < 0. Denotando por C o pé da perpendicular baixada de $P_2$ ao eixo x, temos: $\overline{OC} =- cos(x_2)$. Figura 19.

Figura - 19 –Redução do 2ª pará o 1º quadrantes




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Vamos escolher o ponto $P_1$ como sendo o simétrico de $P_2$ em relação ao eixo y, sendo $x_1 = \widehat{AP_1}$ também temos $x_2 = \widehat{AP_2}$. A simetria entre $P_2$ e $P_1$ em relação ao eixo y assegura a simetria de C e B em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OP_2C$ e $OP_1B$ são congruentes, pelo caso “lado, lado, lado”. Logo, $P_2\hat{O}C = P_1\hat{O}B$. Por outro lado, $\widehat{AP_2} = \pi - x_1$. Portanto,

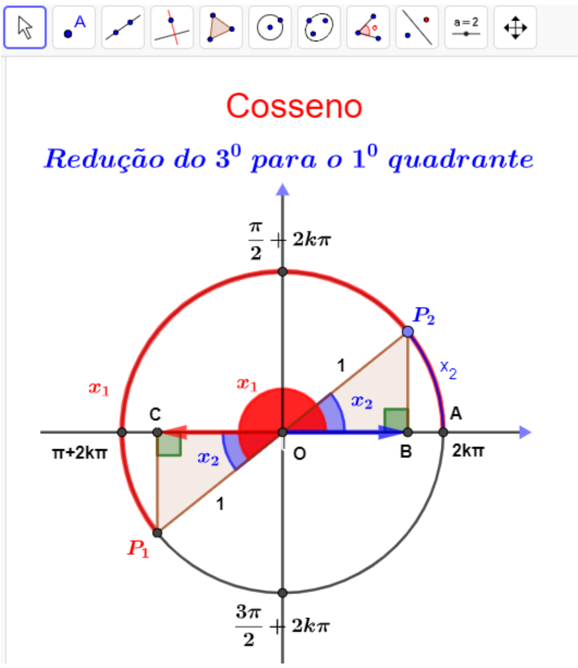
$\widehat{x_1} = \widehat{AP_1} = P_1\hat{O}B = \widehat{AP_2} = \pi - x_1$..

Então concluímos que $-\ sen(\pi - x_1) = sen(x_1)$, multiplicando as equações por (-1), teremos, $sen(\pi - x_1) =- sen(x_1)$.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO CENTRO, (COSSENO)

Quando o ponto $P_1$ está no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}$. Assim sendo, temos $cos(x_1) < 0$. Logo, para o ponto C sendo o pé da perpendicular baixada de $P_1$ ao eixo x, temos $\overline{OC} =- cos(x_1)$. Figura 20.

Figura - 20 - redução do 3º pará o 1º quadrantes




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Vamos escolher $P_2$ como sendo o simétrico de $P_1$ em relação à origem do plano cartesiano. Em particular, o ponto $P_2$ pertence ao primeiro quadrante e os pontos $P_2$ , O e $P_1$ são colineares.

Sendo $x_2 = \widehat{AP_2}$, também temos $x_1 = \widehat{AP_1}$, send a simetria entre $P_1$ e $P_2$ em relação a origem assegura a simetria de C e B em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OP_1C$ e $OP_2B$ são congruentes, pelo caso “lado, lado, lado”. Logo, $P_2\widehat{O}C = P_1\widehat{O}B$, são ângulos opostos pelo vértice. Por outro lado, $\widehat{AP_1} = x_1 - \pi$.

Portanto, $\widehat{x_2} = C\widehat{O}P_1 = P_2\widehat{O}B = \widehat{AP_1} = x_1 - \pi$.

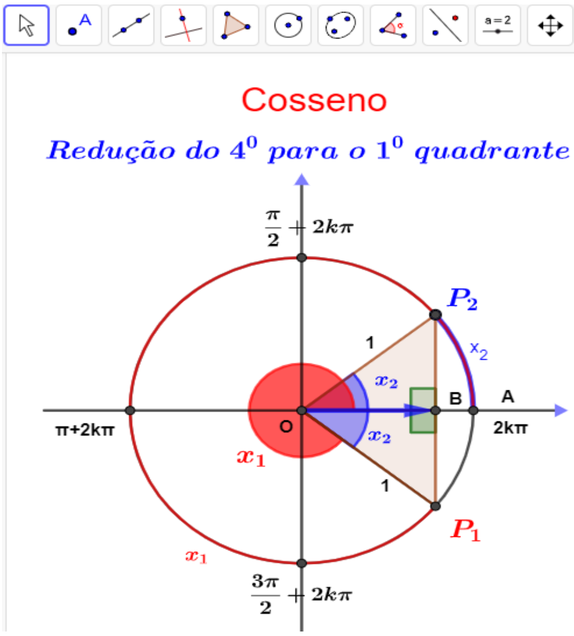
Então concluímos que, simetria em relação ao centro: Quando dois pontos são diametralmente opostos, como $P_1$ $\boldsymbol{e}$ $P_2$, é possível afirmar que o número real com imagem em $x_1$ + $\boldsymbol{2K\pi}$ é $P_1$ em $x_2$ + $\boldsymbol{2K\pi}$ é $P_2$, pois os ângulos assinalados são opostos pelos vértices, isto é, são congruentes. Portanto as projeções dos pontos em relação aos eixos das abscissas B e C, são simétricos, então , $cos(x_1 - \pi) =- cos(x_1)$.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO HORIZONTAL, (COSSENO)

Do quarto para o primeiro quadrante

Quando o ponto $P_1$ está no quarto quadrante, isto é, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Assim sendo, temos $\overline{OB} = cos(x_1)$.

Figura - 21- Redução do 3º pará o 1º quadrantes




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Escolhendo o ponto $P_2$ como o simétrico de $P_1$, em relação ao eixo x, temos $P_2$ situado no primeiro quadrante. Neste caso, o pé da perpendicular baixada de $P_2$ ao eixo x coincide com o ponto B. Então, os triângulos $OP_2B$ e $OP_1B$ são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P_1\widehat{O}B = P_2OB$ . Por outro lado, $P_1\widehat{O}B$ = $2\pi - x_2$.

Portanto $x_2 = \widehat{AP_2} = P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}B = 2\pi - x_2$. concluímos, pois, que

$cos(x_2) = cos(2\pi - x_2)$.

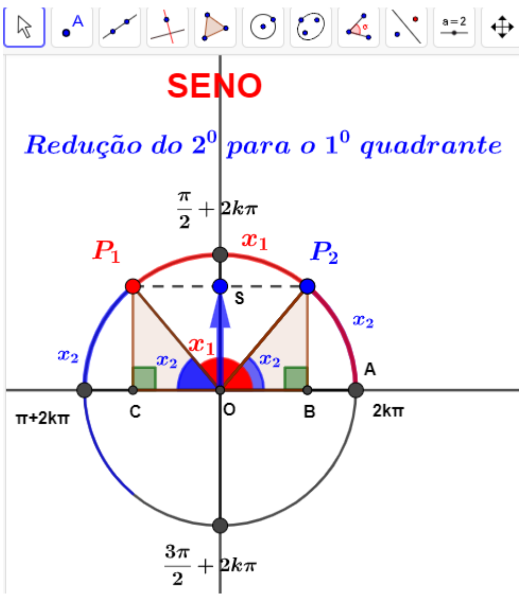
### 3.13.2 Simetria do seno

Vamos visualizar e demonstrar as relações existentes entre seno de arco do segundo, terceiro e quarto quadrantes, com os arcos correspondentes do primeiro quadrante

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO VERTICAL, (SENO)

Simetria em relação ao eixo vertical: Quando dois pontos são diametralmente opostos em relação ao eixo das ordenadas, como $P_1$ $\boldsymbol{e}$ $P_2$ da figura, é possível afirmar que o número real com imagem em $x_1 + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\pi}$ é o ponto $P_1$ em $x_2 + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\pi}$, é $P_2$ pois os ângulos assinalados na figura possuem imagens simétricas, figura 22.

Figura - 22 - Redução do 2º para o 1º quadrante




Fonte ; Do próprio autor no Geogebra

Vamos escolher o ponto $P_2$ como sendo o simétrico de $P_1$ em relação ao eixo y, sendo $x_1 = \widehat{AP_1}$ também temos $x_2 = \widehat{AP_2}$. A simetria entre $P_1$ e $P_2$ em relação ao eixo y assegura a simetria de C e B em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OP_1C$ e $OP_2B$ são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo, $P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}C$. Por outro lado, $\widehat{AP_2} = \pi - x_1$.

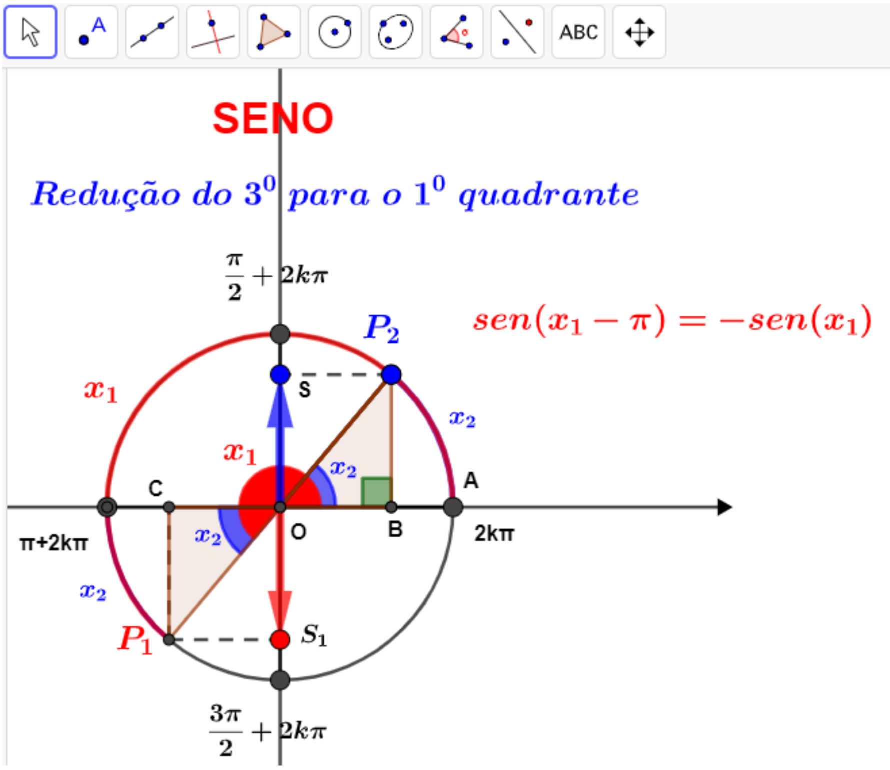
Portanto, $\widehat{x_1} = \widehat{AP_1} = P_1\widehat{O}C = \widehat{AP_2} = \pi - x_1$.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO CENTRO, (SENO)

Quando o ponto $P_1$ está no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ Assim sendo, temos $sen(x_1) < 0$. Logo, para o ponto C sendo o pé da perpendicular baixada de $P_1$ ao eixo x, temos $\overline{OS_1} =- sen(x_1)$

Vamos escolher $P_2$ como sendo o simétrico de $P_1$ em relação à origem do plano cartesiano. Em particular, o ponto $P_2$ pertence ao primeiro quadrante, figura 23.

Figura - 23 - Redução do 3º para o 1º quadrante




Fonte: Do primeiro autor no Geogebra

Sendo $x_2 = \widehat{AP_2}$, também temos $x_1 = \widehat{AP_1}$, sendo a simetria entre $P_1$ e $P_2$ em relação a origem assegura a simetria de C e B em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OP_1C$ e $OP_2B$ são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo, $P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}C$, são ângulos opostos pelo vértice. Por outro lado, $\widehat{AP_1} = x_1 - \pi$.

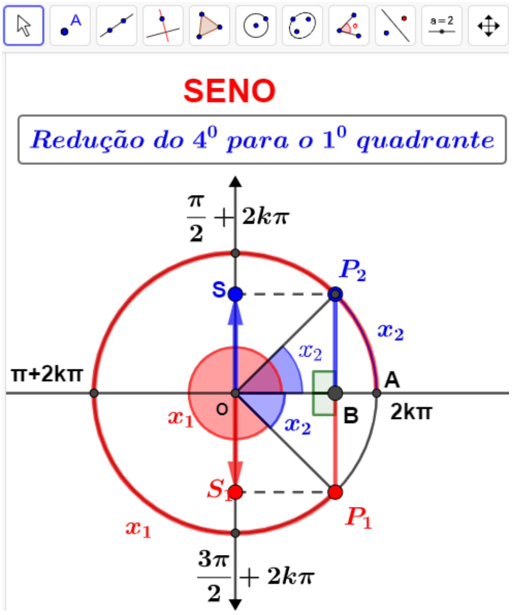
Portanto, $\widehat{x_2} = P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}C = \widehat{AP_1} = x_1 - \pi$.

Então concluímos que, simetria em relação ao centro: Quando dois pontos são diametralmente opostos, como $P_1$ ***e*** $P_2$, então os ângulos assinalados são opostos pelos vértices, isto é, são congruentes. Portanto as projeções dos pontos em relação aos eixos das ordenadas S e $S_1$, são simétricos, então , $sen(x_1 - \pi) =- sen(x_1)$.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO X, (SENO)

Seja o ponto $P_2$ simétrico do ponto $P_1$ em relação ao eixo x, temos $P_1$ situado no quarto quadrante, isto é, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, e $x_2 = \widehat{AP_2}$. Figura 24.

Figura - 24 - Redução do 4º para o 1º quadrante




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Neste caso, o pé da perpendicular baixada de Q ao eixo x coincide com o ponto B. Então, os triângulos $OP_2B$ e $OP_1B$ são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}B$ . Por outro lado, $P_1\widehat{O}B = 2\pi - x_2$.

Portanto, $x_2 = \widehat{AP_2} = P_2\widehat{O}B= P_1\widehat{O}B = 2\pi - x_2$ .

Concluímos, pois, que $sen(x_2) =- sen(2\pi - x_2)$

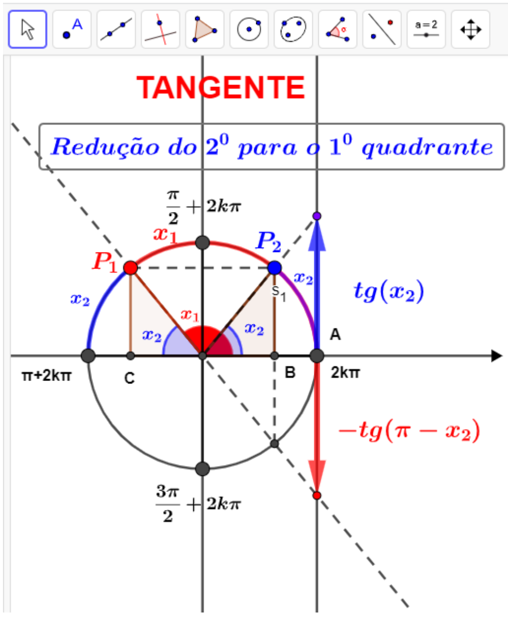
### 3.13.3 Simetria da tangente

Vamos visualizar e demonstrar as relações existentes entre tangentes de arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes, com os arcos correspondentes do primeiro quadrante.

Reduzir um arco dado ao primeiro quadrante é determinar um arco do primeiro quadrante cujas funções trigonométricas sejam iguais em valor absoluto às do arco dado.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO VERTICAL, (TANGENTE)

Figura - 25 - Redução do 2º parao 1º quadrante




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Vamos escolher o ponto $P_2$ como sendo o simétrico de $P_1$ em relação ao eixo y, sendo $x_2 = \widehat{AP_2}$ também temos $x_1 = \widehat{AP_1}$. A simetria entre $P_1$ e $P_2$ em relação ao eixo y assegura a simetria de C e B em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OP_2B$ e $OP_1C$ são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo,

$P_2\hat{O}B = P_1\hat{O}C$. Por outro lado, $\widehat{AP_1} = \pi - x_2$.

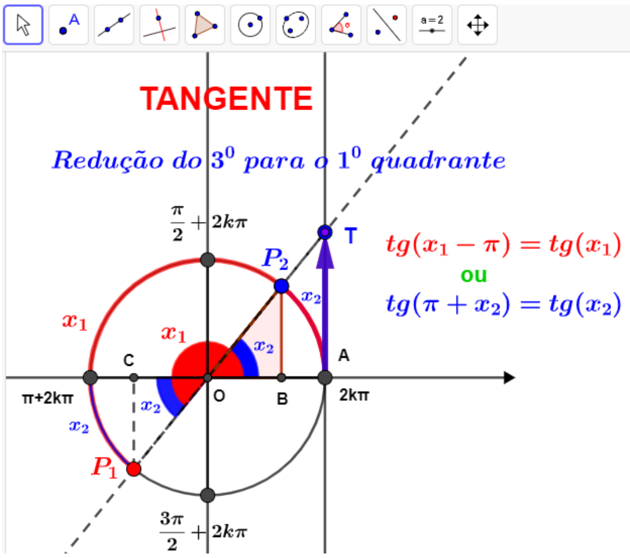
Portanto, $\widehat{x_2} = \widehat{AP_2} = P_1\hat{O}C = \widehat{AP_1} = \pi - x_2$.

Então concluímos que $-\ tg(\pi - x_2) = tg(x_2)$, multiplicando as equações por (-1), teremos, $tg(\pi - x_2) =-\ tg(x_2)$.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO CENTRO, (TANGENTE)

Quando o ponto $P_1$ está no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Assim sendo, temos $tg(x_1) > 0$. Logo, para o ponto C sendo o pé da perpendicular baixada de $P_1$ ao eixo x, temos $\overline{AT} = tg(x_2) = tg(x_1)$. Figura 26.

Figura - 26 - Redução do 3º para o 1º quadrante




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Seja o ponto $P_2$ simétrico de $P_1$ em relação à origem do plano cartesiano, o ponto $P_2$ pertence ao primeiro quadrante e os pontos $P_1$ O e $P_2$ são colineares, e os seus arcos são, $\widehat{AP_2} = x_2$, $\widehat{AP_1}=x_1$, e as suas respectivas tangentes, tg($x_1$) $= tg(x_2)$.

Na imagem $P_2$, temos o ponto B o pé da perpendicular de $P_2$, traçada no eixo Ox e a imagem $P_1$, temos o ponto C o pé da perpendicular de $P_1$, traçada no eixo Ox, então os ângulos $P_1\widehat{O}C = P_2\widehat{O}B$, pois estes são opostos pelo vértices, de medidas $x_1 - \pi$. mas $x_2 = \widehat{AP_2} = P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}C = x_1 - \pi$,. Então chegamos a conclusão que $x_2 = x_1 - \pi$. fazendo as respectiva substituições teremos tg($x_1$) $= tg(x_1 - \pi)$

Uma outra maneira de demonstrar é sabendo que $x_1 = \pi + x_2$, fazendo a substituição em $x_1$, isso também é equivalente a tg($\pi + x_2$) $= tg(x_2)$.

Outra maneira, é usar as relações trigonométricas do triângulo retângulo no ciclo trigonométrico, isto é, $tg(x_1) = \frac{sen(x_1)}{cos(x_1)}$, teremos:

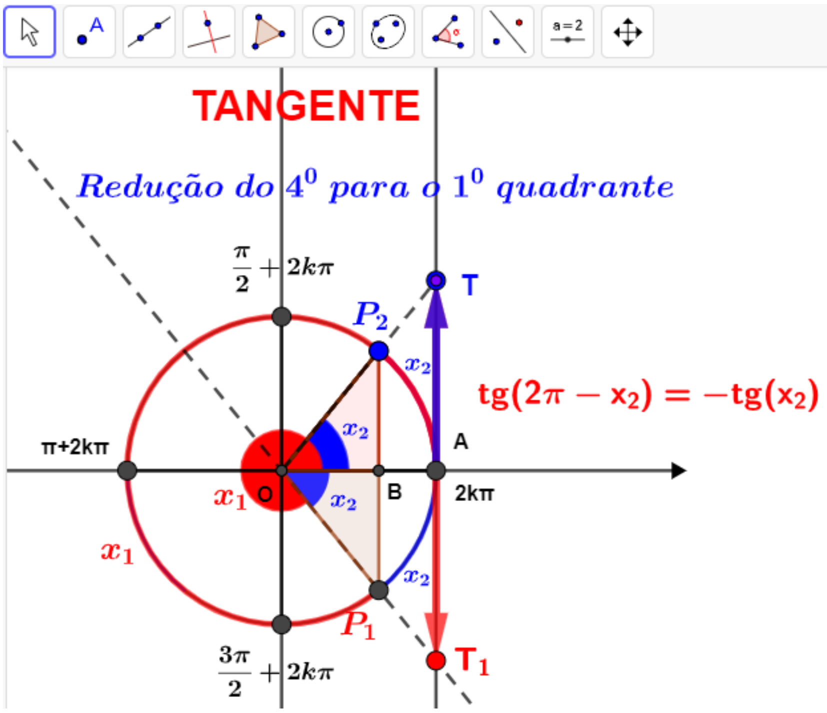
$tg(x_1) = \frac{-sen(x_1-\pi)}{-cos(x_1-\pi)} \Rightarrow tg(x_1) = tg(x_1 - \pi)$, paro o cosseno

$cos(x_1) \neq 0\ e\ cos(x_1 - \pi) \neq 0.$

Redução do quarto para o primeiro quadrante

Escolhendo o ponto $P_2$ no ciclo trigonométrico como o simétrico de $P_1$, em relação ao eixo x, temos $P_2$ situado no primeiro quadrante. Neste caso, o pé da perpendicular baixada de $P_2$ ao eixo x coincide com o ponto B. Então, os triângulos $OP_2B$ e $OP_1B$ são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P_1\widehat{O}B = P_2OB$ . Por outro lado, $P_1\widehat{O}B$ = 2π $- x_2$, figura 27.

Figura - 27 - Redução do 4º para o 1º quadrante




Fonte: Do próprio autor no Geogebra

Portanto $x_2 = \widehat{AP_2} = P_2\widehat{O}B = P_1\widehat{O}B = 2\pi - x_2$. concluímos, pois, que $tg(2\pi - x_2) =- tg(x_2)$.

Outra maneira, é usar as relações trigonométricas do triângulo retângulo, isto é, $tg(x_2) = \frac{sen(x_2)}{cos(x_2)}$, teremos: $tg(x_2) = \frac{-sen(2\pi - x_2)}{cos(2\pi - x_2)} \Rightarrow tg(x_2) = tg(2\pi - x_2)$, para cosseno $cos(x_2) \neq 0 \; e \; cos(2\pi - x_2) \neq 0$.

O trabalho desenvolvido, possibilita a utilização de uma sequência didática, através de atividades desenvolvidas no software Geogebra, como um instrumento de apoio ao ensino das funções trigonométricas cosseno, seno e tangente.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem