



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de
Matemática no Nível Médio.

LUIZ AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE FUNÇÃO
LOGARÍTMICA INSPIRADA NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS A PARTIR DE SITUAÇÕES DA REALIDADE**

BELÉM/PA

2023

Luiz Augusto Oliveira da Silva

**Uma sequência Didática sobre Função Logarítmica inspirada na
resolução de problemas a partir de situações da realidade**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em Ensino de
Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Matemática, Universidade do Estado do
Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o
Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.

BELÉM/PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Luiz Augusto Oliveira da

Uma sequência didática sobre função logarítmica inspirada na resolução de problemas a partir de situações da realidade / Luiz Augusto Oliveira da Silva ; orientador Roberto Paulo Bibas Fialho. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1. Função (Matemática). 2. Problemas, questões, exercícios. 3. Teoria das situações didáticas. I. Fialho, Roberto Paulo Bibas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 510.7

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

LUIZ AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE FUNÇÃO LOGARÍTMICA INSPIRADA
NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE SITUAÇÕES DA REALIDADE.**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Data de aprovação:

23/03/2023 Banca

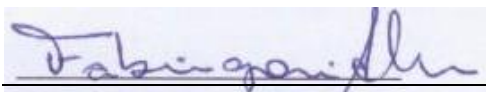
examinadora



_____. Orientador

Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

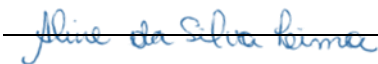
Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará /
UFPA Universidade do Estado do Pará



_____. Examinador Interno

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará /
UFPA Universidade do Estado do Pará



_____. Examinador Externo

Profa. Dra. Aline da Silva Lima

Doutora em Ciências e Matemática – Universidade Federal do
Pará/UFPA Universidade Federal do Pará



_____. Examinador Externo

Prof. Dr. Fernando Cardoso de Matos

Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do
Pará/UFPA Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do
Pará/IFPA

Belém – PA

2023

Aos meus pais, especialmente a dona Nair Nunes, que sempre acreditou em seu filho, para ela sempre fui o seu orgulho de ser professor.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me proporcionar uma das suas maiores dádivas, “A VIDA”, e, por me guiar e fortalecer nos momentos mais difíceis do desenvolvimento deste projeto.

À minha querida e inesquecível Nair Nunes Oliveira da Silva (minha querida mãe) pelos ensinamentos e, sobretudo, pelo o seu “amor de mãe” concedido a mim, que foram fundamentais para minha formação.

Aos meus Pais, Augusto Frota da Silva e Nair Nunes Oliveira da Silva, pelos ensinamentos e por acreditarem em mim, não medindo esforços em oferecer sempre o melhor para minha educação.

À minha esposa Anaildes Gama, por acreditar e incentivar no prosseguimento da minha formação profissional, ações importantíssimas para a concretização deste trabalho.

Ao meu filho, Luiz Augusto Sousa da Silva, pela compreensão das minhas ausências, em momentos de diversão em família, dadas as demandas para a realização deste projeto.

À Universidade do Estado do Pará, pela oportunidade ao meu orientador, professor Dr. Roberto Paulo Bibas, pela parceria e, sobretudo, pela paciência nas orientações deste trabalho. Profissional admirável pela sua competência e dedicação à educação. Meus sinceros agradecimentos pelas significativas contribuições! Sou grato por ter sido seu orientando.

Aos meus colegas de Departamento, que foram os meus professores de cada disciplina, pela paciência e gratidão nas suas aulas remotas, em especial aos professores, Pedro Sá, Carlos Miranda e Ronaldo Pimentel que incentivaram a fazer o mestrado pela Instituição.

Aos colegas de turma, na maioria, professores de Matemática do Ensino Básico da rede pública de ensino do Estado do Pará, Maranhão e Piauí, pela troca de experiências vivenciadas em sala de aula com os estudantes e pelas contribuições importantes para elaboração da Sequência Didática.

Por fim, a todos que, de certa forma, contribuíram diretamente ou indiretamente para a materialização deste valioso trabalho de pesquisa científica na área de Educação Matemática.

Os logaritmos foram criados como instrumentos para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados. Posteriormente verificou-se que a importância dos logaritmos na matemática e nas Ciências em geral era bem maior do que se pensava. Com efeito, diversos fatos matemáticos, bem como vários fenômenos naturais e até mesmo sociais, podem ser expressos quantitativamente por meios dos logaritmos.

Elon Lages Lima

RESUMO

DA SILVA, Luiz Augusto Oliveira. **Uma Sequência Didática sobre Função Logarítmica inspirada na resolução de problemas a partir de situações da realidade**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023. 171f.

Esta pesquisa sugere verificar a utilização de uma sequência didática, na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, elaborada segundo as etapas da Engenharia Didática, com problemas que privilegiam situações reais incentivando à pesquisa e atividades relacionadas ao surgimento dos logaritmos, contribuindo para a construção e compreensão da função logarítmica por parte dos alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática. O estudo está fundamentado na didática da matemática que se preocupa com resultados de experiências em sala de aula. A metodologia utilizada segue os princípios da Engenharia Didática, a qual se justifica pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa e cuja finalidade é analisar as situações didáticas, objeto de estudo da Educação Matemática. As atividades da sequência foram elaboradas com os alunos de graduação do 1º ano, da Universidade Estadual do Estado do Pará, na resolução de problemas através da função logarítmica. Nesse trabalho, foram analisadas as produções de 19 (dezenove) alunos, organizados em duplas e trio. Pode-se inferir a partir das análises a posteriori, que as atividades da sequência contribuíram para compreensão da função logarítmica sendo a inversa da função exponencial. A partir da análise realizada, pôde-se verificar que os alunos participantes da pesquisa obtiveram uma maior compreensão sobre o ensino da função logarítmica por parte do professor-pesquisador. A metodologia para abordagem de conteúdos matemáticos referente ao Ensino Básico na disciplina desse curso, Fundamentos da Matemática I. Desse modo a há um Produto Educacional resultante dessa pesquisa que caracteriza-se como um recurso estratégicos educacionais que favorece a prática pedagógica do professor, é importante que, na licenciatura, o futuro professor formador atue como um facilitador, identificando as dificuldades do aluno, dando sentido ao que ele já sabe e possibilitando-lhe a expansão desse conhecimento, de forma a proporcionar que o futuro professor em formação inicial construa elementos que promova a articulação entre os conteúdos da matemática escolar e da matemática acadêmica.

Palavras-chave: Função logarítmica. Resolução de problemas. Engenharia Didática; Teoria das Situações Didáticas. Sequência Didática.

ABSTRACT

DA SILVA, Luiz Augusto Oliveira. **A Didactic Sequence on Logarithmic Function inspired by solving problems based on real situations**. Dissertation of the Graduate Program in Teaching Mathematics – University of the State of Pará, Belém, 2023. 171f.

This research suggests verifying the use of a didactic sequence, in Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations (TSD), elaborated according to the stages of Didactic Engineering, with problems that focus on real situations, encouraging research and activities related to the emergence of logarithms, contributing to the construction and understanding of the logarithmic function on the part of the freshmen students of the Degree in Mathematics. The study is based on the didactics of mathematics that is concerned with the results of experiences in the classroom. The methodology used follows the principles of Didactic Engineering, which is justified by the fact that it is a concept that gives importance to both the theoretical and experimental dimensions of the research and whose purpose is to analyze didactic situations, the object of study of Mathematics Education. The sequence activities were elaborated with the 1st year graduation students, from the State University of the State of Pará, in the resolution of problems through the logarithmic function. In this work, the productions of 19 (nineteen) students were analyzed, organized in pairs and trio. It can be inferred from the a posteriori analyses, that the activities of the sequence contributed to the understanding of the logarithmic function being the inverse of the exponential function. From the analysis carried out, it was possible to verify that the students participating in the research obtained a greater understanding about the teaching of the logarithmic function by the teacher-researcher. The methodology for approaching mathematical content related to Basic Education in the discipline of this course, Fundamentals of Mathematics I. In this way, there is an Educational Product resulting from this research that is characterized as a strategic educational resource that favors the teacher's pedagogical practice, it is important that, in the degree, the future teacher trainer acts as a facilitator, identifying the student's difficulties, giving sense to what he already knows and allowing him to expand this knowledge, in order to provide that the future teacher in initial training builds elements that promote the articulation between the contents of school mathematics and academic mathematics.

Keywords: Logarithmic function. Problem solving. Didactic Engineering; Theory of Didactic Situations. Following teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Modelo interativo de desenho da pesquisa proposto por Waxwell (2005).....	18
Figura 2 - Método de Napier.....	25
Figura 3 - Folha de rosto da edição de 1619 do <i>Mirifici logarithmorum canonis descriptio</i> de Napier, que também contém o seu <i>Constructio</i>	27
Figura 4 - Tábua de logaritmos Decimais (Mantissas).....	28
Figura 5 – Tábua de logaritmos do trabalho de Briggs (1617).....	29
Figura 6 – Régua de cálculo.....	29
Figura 7: Aproximação da área por meio de retângulos maiores.....	33
Figura 8: O método de Fermat aplicado à hipérbole.....	33
Figura 9: As equações $y = e^x$ e $y = \ln x$ representam funções inversas.....	34
Figura 10 – Esquema de uma Sequência Didática.....	44
Figura 11 – Categorias do domínio cognitivo proposto por Bloom, Englehart, Furst, Hill e Krathwolk, que ficou conhecido como Taxonomia de Bloom.....	56
Figura 12 – Categorização atual da Taxonomia de Bloom proposta por Anderson, Krathwohl e Airasian, no ano de 2001.....	57
Quadro 1 – Demonstração estratégica do exercício 1.....	57
Quadro 2 – Demonstração estratégica do exercício 2.....	58
Figura 13 - Demonstração das características da função logarítmica.....	60
Figura 14 – (A) Triângulo didático convencional e (B) Aprendizagem espontânea (milieu).....	67
Figura 15 - Gráfico representando o sexo do estudante.....	70
Figura 16 - Gráfico da faixa etária dos alunos.....	71
Figura 17 - Gráfico em relação as dificuldades dos alunos ao conceito de logaritmo.....	71
Figura 18 - Gráfico mostrando a comparação dos alunos com relação ao estudo do logaritmo.....	72
Figura 19 - Gráfico representando as dificuldades dos alunos com relação as propriedades das operações com logaritmos.....	72
Figura 20 - Relação das dificuldades dos alunos em interpretar gráficos da função logarítmica.....	73
Figura 21 - Gráfico destacando a dificuldade dos alunos em identificar a função exponencial e a função logarítmica.....	73
Figura 22 - Gráfico delimitando a didática dos professores com relação ao conteúdo de logaritmo.....	74
Figura 23 - Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática das disciplinas científicas e suas possibilidades de análise.....	76
Tabela 1 – Alunos do teste de sondagem, Função Logarítmica.....	80
Quadro 3 – Quadro das sessões da sequência didática.....	83
Tabela 2. Cálculo da Quantidade de Bactérias a cada hora.....	86
Figura 24 – Protocolo da dupla E – Sessão I.....	88
Figura 25 – Protocolo da dupla A – Sessão I.....	89
Figura 26 – Protocolo da dupla D – Sessão I.....	89
Figura 27 – Protocolo da dupla B – Sessão I.....	91
Figura 28 – Protocolo da dupla D – Construção de deslizantes. Sessão I.....	91
Figura 29 - Mapa de população do município de Conceição do Araguaia/Senso-IBGE.....	93
Figura 30 - Gráfico da função $P(t)$, Construção de deslizantes. Sessão 1.....	94
Figura 31 - Gráfico da função $P(t)$, Construção de deslizantes.....	95

Figura 32 – Protocolo da dupla A – Sessão I.....	97
Tabela 3 - Relação de número de horas transcorrido desde a primeira dosagem.....	100
Figura 33 - Protocolo da dupla D - Sessão II.....	102
Figura 34 - Protocolo da dupla D - Sessão II.....	102
Figura 35 - Protocolo da dupla F – Sessão II. 1º Modo (12 h).....	103
Figura 36 - Protocolo da dupla F – Sessão II. 2º Modo (18 h).....	103
Figura 37. Protocolo do trio - Sessão II.....	104
Figura 38 - Protocolo da dupla E – Sessão II.....	107
Figura 39 - Protocolo da dupla F – Sessão II.....	108
Figura 40 – Árvore amazônica.....	109
Figura 41 - Atividade 3, resolução da dupla F – Sessão II.....	111
Figura 42 - Atividade 3, resolução da dupla A – Sessão II.....	112
Figura 43 - Atividade 4, resolução da dupla E – Sessão II.....	115
Figura 44 - Atividade 4, resolução da dupla C – Sessão II.....	115
Figura 45 - Atividade 4, resolução da dupla D – Sessão II.....	116
Figura 46 - Atividade 6, resolução da dupla H – Sessão II.....	119
Figura 47 - Tsunami invadindo rodovia no Japão logo após o terremoto de março de 2011.....	120
Figura 48 - Área de contato entre placas tectônicas.....	121
Figura: 49 - Falha de Santo André - San Francisco - Los Angeles.....	121
Figura 50 - Atividade 1, item (a), resolução da dupla D – Sessão III.....	124
Figura 51 - Atividade 1, item (b), resolução da dupla D – Sessão III.....	124
Figura 52 - Atividade 1, item (c), resolução da dupla D – Sessão III.....	125
Figura 53 - Atividade 1, item (d), resolução da dupla D – Sessão III.....	126
Figura 54- Escala de pH. As cores são baseadas num indicador de pH que muda de cor, assinalando o tipo de substância.....	127
Figura 55 - Atividade 2, resolução da dupla A – Sessão III.....	130
Figura 56 - Atividade 2, resolução da dupla E, itens a, b, c, d – Sessão III.....	131
Figura 57 - Atividade 3, resolução da dupla A – Sessão III.....	133
Tabela 4 – Valores de x e $f(x) = 2^x$	137
Tabela 5 – Valores de x e $g(x) = \log_2 x$	137
Figura 58 - Representação da função exponencial no registro gráfico $g(x) = 2^x$	138
Figura 59 - Representação da função exponencial no registro gráfico $\log_2 x$...	138
Figura 60 - Atividade 1, resolução da dupla E sessão V.....	139
Tabela 6 – Sessões, acertos, erros, brancos das atividades.....	141

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. METODOLOGIA E COLETA DE DADOS.....	18
2.1 Engenharia Didática.....	20
2.2. Coleta de dados.....	25
3. HISTÓRICO, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DOS LOGARITMOS E ANÁLISES PRÉVIAS.....	26
3.1 Desenvolvimento Histórico dos Logaritmos.....	26
3.2 Fundamentação Teórica dos Logaritmos.....	38
4. ANÁLISES PRÉVIAS.....	53
4.1 Relatos de Trabalhos Anteriores.....	53
4.2 Taxonomia de Bloom.....	59
4.3 Funções Logarítmica.....	61
4.4. Teoria das Situações Didáticas.....	67
4.5. A Estruturação do Milieu.....	69
4.6. Teste de Sondagem: (TS).....	71
5. PESQUISA.....	73
5.1. Análise do questionário.....	73
5.2. Análise da sequência de ensino pelas observações do diário de campo..	77
5.3. Análise dos Testes.....	78
5.3.1. Procedimentos das atividades: Função Logarítmica.....	78
5.3.2. Comentários das Análises dos Testes de Sondagem.....	83
5.4. Sequência Didática: Análises dos Testes.....	85
5.4.1. As sessões da sequência didática e as análises a priori e a posteriori das atividades.....	85
5.4.1.1 Sessão I: construindo o conceito de logaritmo.....	86
5.4.1.2 Sessão II: Resolvendo Problemas.....	103
5.4.1.3. Sessão III: Problemas envolvendo escala logarítmica.....	123
5.4.1.4 Sessão IV: A HISTÓRIA E O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS.....	138
5.4.1.5 Sessão V: CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	141
5.5 Síntese dos resultados da aplicação da sequência didática.....	145
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	155
REFERÊNCIAS.....	159
APÊNDICE	167

1. INTRODUÇÃO

A presente dissertação, tem como foco principal, o ensino da função logarítmica aplicados didaticamente em alunos do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática do Campus de Conceição do Araguaia da Universidade do Estado do Pará/UEPA. No estudo dos logaritmos, são diversos os fatores apontados para justificar as dificuldades desses alunos. Considerado pela maioria deles, um conteúdo difícil, exigindo grande necessidade da base da matemática do Ensino Médio e do Ensino Fundamental, constatou-se que, a situação de aprendizagem analisada, atende às prescrições curriculares em termos de habilidades e conteúdo a serem desenvolvidos. Os problemas evidenciam a relação da matemática e, particularmente, dos logaritmos com outras áreas do conhecimento. Observou-se que, essas dificuldades de aprendizagem com a matemática, variava na faixa etária dos alunos, podendo ser maior ou menor, dependendo do domínio de pré-requisitos.

O conteúdo de logaritmos é trabalhado no primeiro ano do Ensino Médio, geralmente de forma mecânica e muito exercícios de repetição. Dessa forma os alunos na maioria das vezes, compreendem o processo a ser feito, mas não conseguem relacionar o conteúdo a nenhuma aplicação no seu cotidiano, e pelo fato de os alunos já possuírem um pouco de conhecimento sobre função logarítmica.

Nesse mesmo contexto, a função logarítmica aparece dentro do estudo de logaritmos. Sendo assim, objetivo principal dessa investigação é proporcionar aos alunos de graduação em Matemática uma aplicação de uma sequência didática de aprendizagem que priorize a construção do conhecimento através de resolução de problemas, além da visualização da utilização do conteúdo matemático no seu dia-a-dia.

A análise dos dados da pesquisa, possibilitou evidenciar alguns aspectos, como as mudanças dos motivos para tornarem-se professores de matemática, a compreensão da formação docente como um processo contínuo, e as mudanças de qualidade da atividade de ensino, que permitiram aos futuros professores se perceberem como sujeitos que se encontram em formação.

Nessa direção. A fim de atender o objetivo da pesquisa, o experimento da aplicação da sequência didática foi organizada de forma a viabilizar condições para que os acadêmicos se apropriassem de conhecimentos relevantes da função logarítmica para desenvolver a atividade de ensino, compreendendo-a como a atividade principal do professor, a partir de um espaço compartilhado de aprendizagem da docência.

Durante a investigação da sequência didática observamos mudanças dos motivos para os licenciandos se tornarem professores de matemática; compreensão da formação docente como um processo contínuo; e mudança de qualidade da atividade de ensino como reflexões que produziram efeitos em vários aspectos do exercício da profissão.

A partir dessa observação, os dados da análise indicaram que, ao se perceberem como sujeitos em formação, os futuros professores vão se apropriando de conhecimentos sobre a docência que lhe permitem atribuir sentidos à atividade docente que coincidem com o seu significado social, comprometido com as aprendizagens dos alunos.

O estudo desta pesquisa, surge da experiência profissional, a necessidade de investigar sobre o conteúdo dos logaritmos, na qual se percebeu algumas dificuldades que os alunos apresentaram sobre a temática. A Resolução de Problemas, considerada como metodologia de ensino, permite a construção do conhecimento matemático, e tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) destaca a importância de se trabalhar com esse método.

A metodologia da pesquisa utilizada foi a qualitativa e documental, com a teoria da sequência didática e aplicações da matemática no cotidiano, através da apresentação de situações-problemas, de modo que, o aluno perceba a importância de aprender determinado conteúdo, relacionando a experiência atribuída na sala de aula com o mundo em que ele vive, a interdisciplinaridade, visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) priorizam a visão de conteúdos além de conceitos, através da interação entre as áreas de ensino, que devem se envolver independente e conjuntamente, a história da Matemática como recurso didático não só informativo, mas também como parte integrante do desenvolvimento do conteúdo.

Desse modo as aulas foram planejadas seguindo uma sequência didática, através de equipes formadas pelos alunos em sala. As aplicações das sequências eram denominadas de atividades, utilizando-se da interdisciplinaridade para contextualizar o conteúdo de matemática, criando relações com o que ocorre em seu meio social. Dessa forma, essa pesquisa objetivou possibilitar aos alunos a utilização dos logaritmos como contextualização na resolução de problemas, possibilitando então, uma melhor compreensão da função logarítmica..

Segundo o PCN (BRASIL, 1998), despertar o interesse pelo estudo é um desafio. Então, buscar aulas mais atrativas é uma constante por parte dos

professores. Significar o ensino, torná-lo mais atraente, despertar a curiosidade são metas que os docentes da atualidade buscam alcançar.

Segundo Rosa (2007, p. 28)

As aprendizagens vão acontecer em função das necessidades do indivíduo; estas tendem a gerar um desequilíbrio, fazendo com que imediatamente surjam motivos; [...] assim podemos dizer que, para que ocorram as aprendizagens é necessário um estado de alerta (moderado), impulso, vontade e desejo de aprender, ou seja, motivação.

Especificamente, de acordo com o PCN (BRASIL, 1998), a didática da Matemática na atualidade sugere utilizar-se, para significar a aprendizagem, da contextualização e da interdisciplinaridade, no intuito de despertar o interesse e a vontade de aprender matemática. Muitas teorias pedagógicas foram desenvolvidas nas últimas décadas, porém destacamos a teoria das situações didáticas de Brousseau (1986). Essa tem sido usada amplamente, pois, ajuda a compreender melhor o fenômeno relativo ao ensino da Matemática, e também por considerar as particularidades do saber matemático. Para Freitas (1999, p.65), essa teoria observa e analisa "as diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático ao aluno", bem como, preocupa-se com o ensino-aprendizagem de Matemática em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático.

Para a metodologia da pesquisa, foi aplicado o método da Engenharia Didática (ED), a qual "se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental, baseado em realizações didáticas em sala, ou seja, sobre a concepção, a realização, observação e análise de sequências de ensino" (ARTIGUE, 1988, p.247)

Desse modo, podemos dizer que nosso objeto de estudo é o processo ensino aprendizagem que auxilie na aprendizagem da matemática, através da resolução de problemas, utilizando estratégias diversificadas, como: A Interdisciplinaridade e a Contextualização na disciplina Fundamentos da matemática I. Dessa forma, o objetivo geral da pesquisa foi investigar uma sequência didática baseada na teoria das situações didáticas, envolvendo a função logarítmica, favorável aos alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, no aprendizado do conceito de logaritmos e função logarítmica, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito, e propor alternativas para minimizar tais dificuldades, bem como desenvolver uma sequência didática organizada de acordo com as etapas da Engenharia Didática, sobre o conteúdo de logaritmo, e aplicá-la em sala de aula. E como objetivos específicos:

- Analisar a relevância, para os alunos de Licenciatura em Matemática, do domínio de conceitos prévios, como conhecer as propriedades dos logaritmos e o seu campo de existência na compreensão conceitual da temática “função logarítmica”.
- Analisar de que forma as sessões organizadas como situações didática, tem como base no trabalho dos sujeitos da pesquisa, estudantes de Licenciatura em Matemática, podem contribuir para a compreensão conceitual da temática “função logarítmica”.
- Elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática para o ensino da função logarítmica propiciando atividades que contemplem as dificuldades dos estudantes, para favorecer estratégia didático-pedagógica de ensino.
- Analisar os resultados da aplicação das atividades utilizando: as estratégias pedagógicas na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (ação, formulação, validação e institucionalização).

A problemática da pesquisa surgiu a partir das necessidades dos alunos não entenderem logaritmos, pois além das dificuldades com relação aos logaritmos, a metodologia foi algo predominante para o processo de formação dos alunos, embora que os alunos pouco estudaram a função logarítmica e apenas tinham conhecimentos da sua inversa. Segundo pesquisas como as de Rossi (2010) e Vidigal (2014), os logaritmos são um grande elo de ligação da matemática com diversas disciplinas que para alguns estudantes podem parecer desconexas da Matemática. A exemplo disso, existem aplicações dos logaritmos no cálculo de pH de substâncias (química), nas escalas de mensuração de terremotos (física/geografia), no cálculo do tempo ou da intensidade de emissão de radioatividade de substâncias (química/física), na gasometria arterial que faz a mensuração dos níveis de gás carbônico (medicina), etc.

Embora os estudos dos logaritmos seja um tipo de conhecimento adquirido na prática pedagógica do professor investigador em sala de aula, a utilização de uma sequência didática pode promover essa aprendizagem por ser útil também para os alunos em formação inicial, possa desenvolver a sua aplicabilidade de uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos voltados para vida real. A função exponencial que é a função inversa da função logarítmica tem como um modelo matemático utilizado para descrever o crescimento ou decrescimento de fenômenos da natureza e no funcionamento de juros compostos. Em relação a função logarítmica, na etapa inicial da pesquisa, foi destacada a aplicação no cálculo da intensidade dos

terremotos, altura de determinadas plantas, pH de soluções químicas, entre outras. Destacamos o seguinte trecho sobre uma das conclusões dos autores:

[...]observa-se que o conteúdo que envolvia as situações-problema despertou o interesse dos estudantes, pois eles não consideravam a possibilidade do logaritmo ser aplicado em diversas situações da vida cotidiana. Essa motivação foi um dos combustíveis para que os alunos percebessem a importância do estudo dos logaritmos na escola. (SILVA *apud* BASSO, 2012)

Mediante o texto acima, os autores constataram que situações-problema que envolvem o cotidiano dos estudantes despertam maior interesse e faz com que a importância do conceito matemático seja percebida. O seguinte trecho complementa a ideia anterior: Segundo Basso *apud* Silva (2012, p. 184-185), o estudo dos logaritmos, juntamente com o desenvolvimento das atividades em grupo, possibilitou uma aula de matemática mais produtiva em termos de construção do conhecimento. Por esse questionamento, percebeu-se que a pesquisa sobre o ensino de conteúdos matemáticos que se diferenciam do método tradicional, apresenta resultados expressivos e demonstram uma melhora no processo de ensino-aprendizagem. As dificuldades referentes aos pré-requisitos que servem de base começam a aparecer, para minimizar tais dificuldades a intervenção do professor pesquisador se faz presente como sujeito de interação do estudo do objeto.

Segundo Vygotsky ZDP:

A distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, caracteriza o que Vygotsky denominou de ZDP, "A Zona de Desenvolvimento Proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão, presentemente, em estado embrionário" (VYGOTSKY, 1984, p. 97).

Neste sentido a justificativa da pesquisa, consiste em verificar a possibilidade em proporcionar aos alunos do 1º ano de licenciatura em matemática, a construção dos estudos de logaritmos a partir de problemas significativos. Sobre o conceito e como resolver os problemas de logaritmos através dos seus conhecimentos matemáticos, pois os alunos que terminam o Ensino Médio apresentam dificuldades de entender este objeto de estudo. Por meio da realização de um estudo sobre suas dificuldades de ensino e aprendizagem, é proposto para os alunos o teste de sondagem que possa estabelecer os conhecimentos prévios dos alunos.

Além disso, o conteúdo de logaritmo é de extrema importância em alguns assuntos abordados no ensino superior, principalmente quando se trata de modelar matematicamente algum fenômeno natural que envolve a variável tempo. O resultado

final desse modelo quase sempre requer o conhecimento sobre logaritmos naturais e suas propriedades. É com esse intuito de motivar os alunos através de problemas de aplicação prática que queremos obter resultados melhores em dois aspectos: 1) A atenção e envolvimento dos alunos com conteúdo e 2) O rendimento dos mesmos através dos resultados de sua aprendizagem:

A justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento, como teremos oportunidade de ver, em quantidade e importância suficientes para justificar o enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia. (RIBEIRO, PRATES, VERGASTA, DOMINGUEZ, FREIRE, BORGES, MASCARENHAS 2009, p.1).

Essa dissertação utiliza a função logarítmica na resolução de problemas, no intuito de rever os estudos dos logaritmos sobre a construção do seu conceito, pois no Ensino Médio, pouco foi demonstrado como ensino-aprendizagem numa forma mais abrangente, sobretudo que os logaritmos abrangem conexões com outras disciplinas. Mediante essa justificativa foi aplicada uma sequência didática como metodologia de ensino referente a esse conteúdo. Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender, é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. Para Pozo e Echeverría (1988, p. 45)

a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos atitude e esforço para buscar suas próprias respostas e seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas busca promover nos alunos o domínio de técnicas, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para resolver situações variáveis e diferentes.

Esta pesquisa utiliza a Teoria das Situações Didáticas como fundamentação teórica e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Está estruturada em cinco seções, essas seções descreve a motivação da pesquisa e enuncia a problemática e os objetivos, tendo as noções da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que serão utilizadas no decorrer das análises das atividades. A Metodologia de pesquisa e Coleta de dados, nela são descritos a Engenharia Didática e dados sobre a aplicação da sequência de atividades e o público-Alvo. As considerações finais em seguida, apresentam-se as referências.

2. METODOLOGIA E COLETA DE DADOS

Com base nos objetivos, esta pesquisa é exploratória, pois proporciona maior familiaridade com o problema, buscando torná-lo mais explícito. Em relação aos procedimentos técnicos utilizados, a pesquisa caracterizou-se como pesquisa bibliográfica, pesquisa de campo e estudo de caso.

A pesquisa bibliográfica procura explicar um problema a partir de referências teóricas publicadas em artigos, livros, dissertações e teses (CERVO, 2007, p. 60).

Pode-se denominar a pesquisa de campo dessa forma, porque a coleta de dados é efetuada em campo, onde ocorrem espontaneamente os fenômenos, uma vez que não há interferência do pesquisador sobre eles (ANDRADE, 2005, p. 217).

Além disso, houve também a necessidade de estudar não apenas os aspectos fundamentais e teóricos da pesquisa e, sim, os cenários específicos da mesma, por isso, realizou-se um estudo de caso. Ainda convém lembrar que, o presente trabalho possui uma abordagem qualitativa como método de pesquisa, propiciando o aprofundamento da investigação de questões relacionadas ao fenômeno de estudo e das suas relações, mediante a valorização do contato direto com a situação estudada (GIL, 1999, p. 56).

Para fazer a análise dos métodos da pesquisa procedemos da seguinte forma: Fizemos inicialmente uma análise quantitativa, com a contagem do número de acertos e do número de erros cometidos pelos alunos em cada atividade da sequência didática. Depois fizemos uma tabela para organizar essa contagem em cada atividade das folhas. Após a contagem e de posse das anotações feitas durante toda a aplicação da sequência didática, fizemos uma análise qualitativa desses dados, percebendo os erros mais comuns dos alunos, que são apresentados logo após a tabela com os dados quantitativos. A pesquisa qualitativa se mostrou mais adequada aos propósitos desta investigação.

Para isso, recorremos à pesquisa qualitativa, proposto por D'Ambrosio (2011, p.93), questão de como trabalhar um problema de investigação na forma de pesquisa qualitativa, o essencial é que ela seja “focalizada no indivíduo, com toda a sua complexidade, e na sua inserção no ambiente sociocultural e natural”. Além disso, o autor indica que “essa modalidade de pesquisa depende muito do pesquisador estar em atividade na sala de aula como professor”. Neste sentido, ainda, argumenta que, em análises qualitativas.

O pesquisador é o instrumento mais relevante nesta modalidade de investigação, sendo o “o ambiente natural” o local de onde surgem, de forma direta os dados de interesse. Mesmo quando do uso de aparelho de registro de falas ou imagens, por exemplo, cabe ao pesquisador o trabalho de revisar as descrições de forma constante. Sendo assim, o contexto é de importância fundamental na pesquisa, influenciando o comportamento das pessoas, o que deve levar o investigador a frequentá-lo, na tentativa de compreendê-lo em suas diversas perspectivas (D’ AMBROSIO, 2011, p.93)

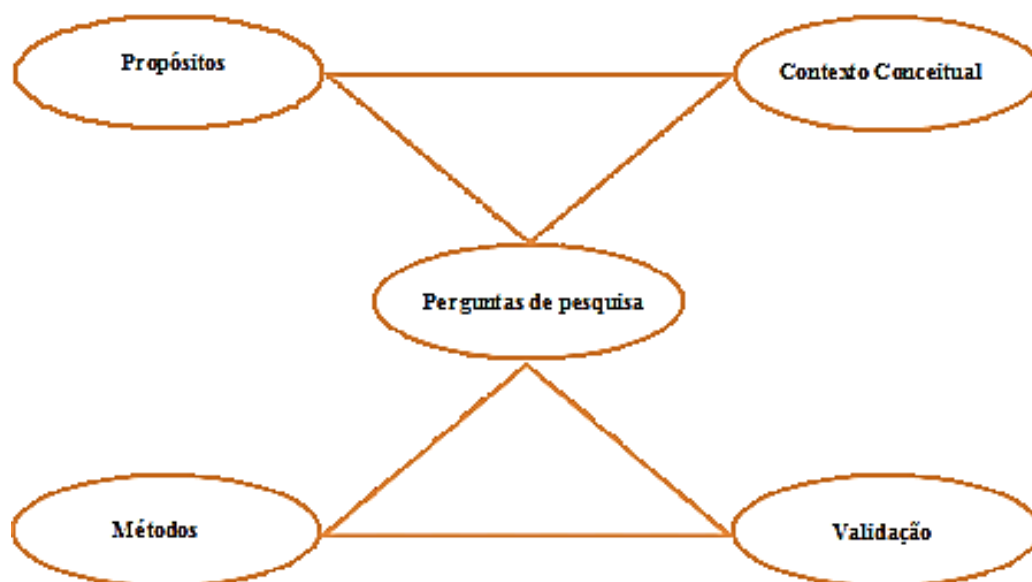
A engenharia didática é uma forma de organizar a pesquisa em didática da matemática, a partir da criação de uma sequência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno investigado. A aplicação se inicia por uma fase de análises preliminares, valorizando experiências anteriores do pesquisador. Ela se caracteriza, também, pelo estudo de casos onde a validação é essencialmente interna, prescindindo, assim, de análises comparativas utilizadas em outras metodologias, utilizando, como fundamento básico, uma confrontação entre uma análise a priori e a posteriori. A engenharia didática consiste em questionar, através de realizações efetivas em classe, as relações supostas pela teoria entre o ensino e a aprendizagem.

Buscar-se-á fundamentar-se, enquanto tipologia, no emprego dos princípios da abordagem da pesquisa exploratória descritiva, entendida como estratégia de levantamento de informações a partir da aproximação do sujeito pesquisador da problemática investigada, de modo a tornar o problema mais claro na construção de hipóteses.

Dessa forma, entende-se que ao aplicar a metodologia mencionada nessa investigação, propõe-se a adoção de uma postura adequada do professor-pesquisador diante dos alunos na sala de aula. Na busca pela compreensão das dificuldades dos alunos na aprendizagem do estudo dos logaritmos, em especial a função logarítmica, as observações feitas sobre como os alunos reagem diante das situações propostas e os métodos pedagógicos utilizados em aula pelo professor-pesquisador, constituem importantes recursos durante o momento da aplicação das atividades propostas e futura análise dos dados coletados.

Maxwell (2005, p.5) resume através de um esquema, conforme mostra a figura 1, os componentes envolvidos na execução de um projeto e além disso, propõe que o conceito de desenho da pesquisa utilizado pelo pesquisador, leve em consideração diferentes abordagens, evitando-se a rigidez no entendimento do que vem a ser uma pesquisa qualitativa durante as etapas envolvidas.

Figura 1: Modelo interativo de desenho da pesquisa proposto por Waxwell (2005)



Fonte: Autor (2022)

A importância do esquema mostrado anteriormente no que diz respeito à construção e elaboração das atividades para ser utilizadas com os alunos. A interatividade proposta por Waxwell (2005) sugere que o professor-pesquisador em suas atividades na sala de aula deve estar constantemente desenvolvendo método para validar os seus questionamentos criados durante o momento de aprendizagem dos seus alunos, numa sequência de atividades envolvendo a função logarítmica.

A metodologia adotada nesta dissertação, está fundamentada na teoria da Engenharia Didática, descrita a seguir. Ao final da seção, são descritos os procedimentos realizados para a coleta de dados.

2.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática, em prática desde a década de 1980, tem por finalidade analisar e propor situações didáticas no âmbito dos estudos da Didática da Matemática e é assim descrita por Artigue:

este termo foi “cunhado” para o trabalho didático como sendo aquele que é comparável ao trabalho do engenheiro que para realizar um projeto preciso se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1988, p. 283).

Ainda segundo Artigue (1988, p. 285), a Engenharia Didática deve ser entendida “como um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino”. Nesse sentido, o autor propõe a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Já Douady (1986) aponta dois tipos de objetivos de pesquisa que se beneficiam da Engenharia Didática: as pesquisas que visam um estudo de processos de aprendizagem de certo conceito e aquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de um domínio preciso.

Segundo Artigue (1996, p. 196), a metodologia de engenharia didática caracteriza-se:

[...] nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados. Serve, também, para os seus propósitos, pois insere o pesquisador na investigação, e diferindo, porém, na validação, que é externa, pois utiliza métodos comparativos para validar seus resultados.

Artigue (1988) afirma também que a Engenharia Didática se apropria dos conceitos da Teoria das Situações Didáticas, na pretensão de controlar as situações didáticas do processo.

Conforme Artigue (1995), a Engenharia Didática proporciona aos professores-pesquisadores a investigação de um determinado problema e uma ação sobre o sistema para resolvê-lo. Ainda conforme a autora, “esta metodologia favorece uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica, possibilitando o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia”.

Segundo Ronize Lampert,

Uma das principais ocupações do professor de matemática é a de estruturar atividades que explorem o domínio de um certo conhecimento. A propósito, estruturar sequências de ensino é também um dos principais objetivos da Engenharia. Optou-se por essa metodologia, pois ela coloca em destaque as relações mútuas entre professor, aluno e um conteúdo matemático. (2006, p.39)

Pensando nos problemas até aqui levantados, e observando que existem possíveis soluções para tornar o aluno capaz de compreender o real significado do conceito da função logarítmica, foi elaborada uma sequência didática, com questões que pudessem justificar o uso de logaritmo e não apenas a aplicação direta de

técnicas para a resolução de problemas. Questões que além de propiciar uma aprendizagem mais relevante, contemplem a construção do conceito de logaritmo.

Acredita-se que o estudo dos logaritmos possa tornar-se mais amplo e não ficar restrito a aplicação direta de propriedades. Que esse conteúdo possa ter uma esfera de atuação maior do que comumente é trabalhado em sala de aula, pois ele tem aplicações em diversas áreas do conhecimento como a física, química, biologia, geografia, etc., e por meio dessa abrangência o aluno possa identificar e aplicar o conhecimento desse conteúdo

Como o próprio nome sugere, a Engenharia Didática envolve concepção, planejamento e execução de um projeto. De acordo com Pais (2002, p.99), trata-se de uma “concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática”, articulando-as e, portanto, atribuindo-lhes maior sentido.

A Engenharia Didática comporta todo o desenvolvimento de um projeto, desde sua criação até a concretização e a análise, em quatro etapas básicas (Pais, 2002, p. 101):

1) Análises preliminares, que incluem levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. As análises preliminares devem conter a descrição das dimensões epistemológica, cognitiva e pedagógica, entre outras do fenômeno a ser analisado, de acordo com a finalidade da pesquisa. Nessa fase o objetivo foi verificar as concepções dos alunos por meio de um teste de sondagem, e também averiguar o ensino atual do conteúdo de logaritmo, com a intenção de propor melhorias com relação a sua aprendizagem. A análise foi realizada para que fosse possível levantar as dificuldades e obstáculos, e a partir de aí intervir para obtenção de um resultado mais satisfatório.

Conforme Artigue (1995), “o objetivo dessa fase é determinar quais seleções de fato permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seu significado”. Além do mais, estas análises se baseiam nas hipóteses que serão validadas ou não mais adiante, na 4ª fase da confrontação.

2) Experimentação, essa fase consiste na aplicação da sequência didática em condições reais de ensino. Com o propósito de localizar as possíveis dificuldades e obstáculos dos alunos, aplicou-se um teste de sondagem em 19 alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática do campus de Conceição do Araguaia, alunos em que, posteriormente, foi aplicada a sequência, na qual incluía questões relativas aos pré-requisitos necessários à construção do conceito de função logarítmica e também

questões de conhecimento geral, a fim de verificar, se os alunos possuíam um conhecimento mínimo necessário para iniciar o estudo de logaritmo. Por meio do teste de sondagem, pode-se observar as concepções dos alunos, suas dificuldades e obstáculos, que consiste na aplicação da sequência didática em condições reais de ensino. Esta etapa foi implementada no período de 10 de novembro de 2020, na Universidade Estadual do Pará, na cidade de Conceição do Araguaia no turno noturno, na qual havia 19 alunos matriculados. Estas análises foram feitas, com vistas a dar subsídios ao desenvolvimento da análise a priori.

3) Análise a priori, cujo objetivo é escolher e determinar as variáveis a serem observadas e/ou controladas no decorrer da aplicação da Sequência Didática. Aplicação de uma Sequência Didática, a qual deve ser, de algum modo que favoreça os objetivos da pesquisa, registrada e observada com atenção. Como reforça Pais (2002, p. 102), as circunstâncias reais da experiência devem ser claramente descritas no relatório final da pesquisa. Busca-se determinar os efeitos das escolhas realizadas e antecipar as possíveis interações dos alunos com o meio (milieu) e seus efeitos em prol da construção do conhecimento pretendido (ARTIGUE, 2002).

Nesta pesquisa, foram elaboradas as atividades que compõe a sequência didática. As atividades foram escolhidas, levando-se em conta as variáveis didáticas empregadas, a problemática e as hipóteses da pesquisa. Foi observado também o conhecimento sobre o assunto em questão e os resultados obtidos com o teste de sondagem. A sequência didática elaborada constituiu-se de situações-problema, visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do conteúdo de logaritmo. O objetivo é fazer com que, os alunos percebam a necessidade dos logaritmos, compreendendo sua utilidade. Importante ressaltar que o processo de validação se inicia desde a fase de concepção e da análise a priori.

Segundo Artigue:

A análise a priori deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.

[...] o objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase (1988 *apud* MACHADO, 1999, p.205)

A aplicação da sequência didática com os 19 (dezenove) alunos do 1º ano da UEPA, teve duração de duas semanas e as sessões foram divididas, levando-se em conta os objetivos específicos da investigação. Essa fase é a da realização da engenharia com certa população de alunos. Nesse momento são estabelecidas algumas regras, tais como:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (descrita em pautas de observação).

Nessa fase da pesquisa, o professor interfere somente quando solicitado, e o aluno deve ser o ator principal, ou seja, o que vale são as considerações e colocações dos alunos acerca das questões propostas na sequência de ensino. O professor deve ser considerado, essencialmente, do ponto de vista das suas relações com a devolução e a institucionalização (ARTIGUE, 1996).

Segundo Ronize Lampert, (2007, p. 45)

Considera-se uma situação de institucionalização aquela em que o professor retoma as questões discutidas e estabelece seus principais resultados, o que ocorre no final de cada sessão. Esse procedimento do professor pode ser explicado pelo fato de que a investigação em didática se constituiu, na França, embasada nas teorias construtivista do conhecimento, ou seja, primeiramente os trios tentam realizar as atividades, discutindo entre eles as possíveis soluções, após a professora faz a institucionalização (Formalização) da sessão, levando-se em conta os questionamentos e considerações dos alunos.

4) Análise a posterior e validação, teve como apoio todos os dados colhidos durante a experimentação constante das pautas de observações realizadas durante cada uma das quatro sessões, das produções dos alunos em sala de aula. Após, confrontar-se-á os dados obtidos na análise a priori e a posteriori validando as hipóteses da pesquisa. Esta análise, deve permitir atribuir sentido aos comportamentos observados e em particular assegurar que os comportamentos esperados se produzam e possam legitimamente ser interpretados como sinais da construção do conhecimento visado (ARTIGUE, 2002)

2.2. Coleta de dados

Na fase de experimentação, foi solicitado que os alunos se dividissem em duplas, de acordo com sua afinidade. Para as equipes experimental, a aplicação dessa sequência foi realizada na sala do laboratório de matemática, num total de dois encontros por semana com 2 horas de aula.

Com relação as equipes, o trabalho foi desenvolvido conforme determinado pelo professor. Foram registrados como sujeito, todos os participantes que se submeteram as duas fases propostas pela sequência didática, ou seja, aqueles que responderam os requisitos das análises a priori e a posteriori, e que não faltaram a nenhum dos encontros em que o professor trabalhou o conteúdo de logaritmos.

Logo, com a proposta de atividades em forma de problemas, buscamos nos afastar das sequências de atividades prontas e que estão disponíveis nos livros didáticos, e atendendo aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), desejamos proporcionar aos alunos uma visão global sobre o assunto.

Os registros que serão apresentados refletem a análise feita pelo grupo de alunos e orientado pelo professor, sobre os problemas que são apresentados, e as respostas dadas por eles são frutos das análises, discussão, construção de esquemas, manipulação dos esquemas, utilizando conceitos em ação, conversão dos esquemas em conceitos, que são apropriados para a aprendizagem.

Para a realização de nossa sequência didática com as equipes, fez-se necessário o uso dos seguintes materiais: papel, lápis, borracha, calculadora científica, avaliação diagnóstica (anexo) e as atividades. Cada dupla e um trio providenciou uma pasta catálogo, na qual foram arquivadas suas produções. Era entregue, às duplas e o trio, apenas uma atividade por vez. As equipes recebiam a atividade seguinte, quando terminasse aquela que tinha sido entregue anteriormente. Ao final de cada aula, as respostas eram analisadas para verificar a necessidade de algum questionamento mais específico para alguma dupla ou trio.

3. HISTÓRICO, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DOS LOGARITMOS E ANÁLISES PRÉVIAS

3.1 Desenvolvimento Histórico dos Logaritmos

A necessidade de se desenvolverem processos que simplificassem cálculos aritméticos tornou-se mais intensa entre os séculos *XVI e XVII* com a evolução do conhecimento científico, proveniente das conquistas da Astronomia, e com o desenvolvimento do comércio, produzido pelas grandes navegações. Os logaritmos, como instrumento de cálculos, surgiram com o objetivo de realizar essas simplificações, pois transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

Achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental[...]. As primeiras tábuas de logaritmos foram publicadas por Napier e Briggs em 1614 e 1620, respectivamente. Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência, basta multiplicar o logaritmo do número pelo índice da raiz. Na terminologia matemática de hoje, uma correspondência como essa estabelecida por meio de uma tábua de logaritmos é o que se chama função (LIMA, 2010, p. 2).

A criação dos logaritmos foi considerada um dos maiores inventos da Matemática, devido a sua importância na simplificação dos cálculos.

Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e preciso crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores (EVES, 2011, p.341).

A palavra *Logarithmos* tem origem grega, *Lógos* (razão) e *Arithmós* (número). O conceito de logaritmo foi apresentado, pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), em princípios do século XVII. O símbolo “log” é atribuído ao astrônomo Johannes Kepler (1571-1630). A ideia essencial de logaritmo, no entanto, é anterior a essa época.

De acordo com Boyer (1974, p.228) Napier trabalhou durante 20 anos na invenção dos logaritmos antes de publicar seus resultados. Ele pensava em sequência

de potências onde as diferenças dos índices correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências como as que foram publicadas no trabalho de Stifel, cinquenta anos antes, e nas obras de Arquimedes.

Nos estudos dos números racionais, Stifel enuncia que para o produto de quaisquer dois termos da progressão geométrica $1, q, q^2, \dots$ o resultado será o mesmo que a soma dos expoentes correspondentes. Assim, tem-se a propriedade $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$. Analogamente, ao dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair os expoentes correspondentes. Dessa forma, Stifel verificou que cada termo da progressão é uma potência de razão comum q e que os expoentes formam uma progressão aritmética. Portanto, relacionou progressões geométricas e aritméticas, prenunciando a invenção dos logaritmos (WENDLAND, 2019, p.22).

Os estudos de Napier tinham o propósito de transformar operações complicadas em operações simples, que facilitassem os cálculos imensos, que eram feitos para construir as tábuas trigonométricas para a navegação e astronomia. “Sua concepção de *Logarithmos* era baseada em uma comparação entre dois pontos em movimento, um dos quais gera uma progressão aritmética e o outro, uma geométrica” (OLIVEIRA, 2005, p. 31).

O método proposto por Napier baseou-se numa propriedade das multiplicações de potências de mesma base, já conhecida naquela época: o produto de duas potências de mesma base é igual a uma nova potência com a mesma base, cujo expoente é a soma dos expoentes das potências multiplicadas. Assim, para obtermos, por exemplo, o produto do número 8 pelo número 1024, basta lembrar que $8 = 2^3$ e $1024 = 2^{10}$ e fazer:

$$8 \times 1024 = 2^3 \times 2^{10} = 2^{(3+10)} = 2^{13}$$

Para entender o método de Napier (figura 2), vamos, inicialmente, construir uma tabela na qual a primeira linha contém expoente e a segunda, as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. O produto 8×1024 pode ser feito diretamente nesta tabela por meio de uma simples adição dos expoentes dessas potências.

Figura 2 - Método de Napier

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Diagram illustrating the method: Arrows show the addition of exponents 3 and 10 to get 13, and the multiplication of 8 and 1024 to get 8192.

Fonte: Antônio Nicolau Youssef

Observe que:

- 8 na segunda linha corresponde ao expoente 3 na primeira;
- 1024 na segunda linha corresponde ao expoente 10 na primeira;
- fazemos $3 + 10 = 13$ e buscamos a potência com expoente 13 na segunda linha;
- obtemos o produto $8 \times 1024 = 8192$;

Essa proposta sobre a comparação entre duas progressões se caracteriza na gênese conceitual dos logaritmos, pois foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII. Inicialmente essa ideia é um dos meios mais adequados para entender o conceito de logaritmo e suas condições de existência (Soares, 2011, p.73).

Porém, esse método só teria utilidade prática se pudesse ser usado também com frações. E isso pode ser feito de duas maneiras: usando expoente fracionários ou escolhendo como base um número suficientemente pequeno, de modo que suas potências cresçam bem lentamente. Como naquela época os expoentes fracionários não eram inteiramente conhecidos, Napier ficou anos decidindo que número utilizar para criar sua tabela (RAMOS, 2015, p.19).

Pensando também na necessidade dos astrônomos, que manipulavam com frequência valores de senos e cossenos, que variam entre 0 e 1, ele propôs um número bem próximo de 1 para servir de base da potência nessa tabela, a saber $1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$. Napier usou ainda a multiplicação por 10^7 em cada potência para evitar decimais, escrevendo então: $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ onde L é o logaritmo do número N . Observe que Napier não desenvolveu o conceito de base de um sistema de logaritmos. Ele apenas fixa uma base com a qual trabalhar. (LOURENÇO, 2013, p.15)

Segundo Eves (2011, p.345), em 1614 Napier publicou sua abordagem sobre logaritmo num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). “Tendo completado sua tarefa monumental, restava a Napier batizar sua criação. A princípio ele chamou o expoente de cada potência de “número artificial”, mas depois se decidiu pelo termo logaritmo, a palavra significando “número proporcional” (MAIOR, 2006, p.22).

O trabalho de Napier teve sucesso imediato e amplo. No ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College

de Londres e posteriormente professor de Oxford, foi ao encontro de Napier para dar reconhecimento ao inventor dos logaritmos.

Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal (EVES, 2011, p.345).

Napier morreu em 1617, por isso coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns em que publicou trabalhos calculando os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, com catorze casas decimais. A obra *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos) (figura 3), foi publicada postumamente por Robert, filho de Napier, em 1619).

Figura 3 - Folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, que também contém o seu *Constructio*.



Fonte: MAOR(2010, p.26)

De acordo com Boyer (1974, apud p.230), após a publicação de seu livro *Arithmética Logarithmica*, o trabalho de Briggs podia ser realizado exatamente como hoje, pois nas suas tabelas, todas as leis usuais dos logaritmos se aplicavam. Nessa mesma obra, aparecem as palavras “característica” e “mantissa”, necessárias para o uso das tábuas de logaritmos (figura 4). “Briggs introduziu a palavra mantissa, que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente “adição” ou “contrapeso” e que, no século XVIII, passou a significar “apêndice”. O termo característica também foi sugerido por Briggs. (EVES, 2011,p.346).

Figura 4 - Tábua de logaritmos Decimais (Mantissas)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898

Fonte: CENTRO CIENTÍFICO CONHECER. DISPONÍVEL em: <<http://WWW.conhec.org.br/download/MATEMAT/MATICA%202.pdf>>. Acesso em 5 de dezembro de 2021.

Para consultar uma tabela de logaritmos decimais, devem ser conhecidos os conceitos de característica e mantissa. As primeiras tábuas de logaritmos costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; só no século XVIII começou a prática de só se imprimir a mantissa (EVES,2011, p. 346).

Quando um número não for potência de 10 (assim seu logaritmo seria a própria potência), seu logaritmo será composto por uma parte inteira e uma parte decimal. A parte decimal é denominada Mantissa e a Característica é dada pelo inteiro determinado pelo número de algarismos da parte inteira do número dado, diminuído de 1 unidade, assim, o logaritmo é composto por Característica + Mantissa. Por exemplo, do $\log 27 = 1,43136$, como 27 possui dois algarismos, podemos dizer que sua Característica é o número $2 - 1 = 1$ e a Mantissa é 43136. (PINTO, 2016, p.20)

Mudanças nos logaritmos contribuíram para que Briggs pudesse desvendar os logaritmos e assim propor uma tábua que continha todos os logaritmos de 1 até 1.000

com 14 casas decimais, sob o título *Logarithmorum Chilias Prima* (Introdução aos logaritmos) sendo publicada em 1617 após a morte de Napier, conforme ilustra a figura 5 abaixo.

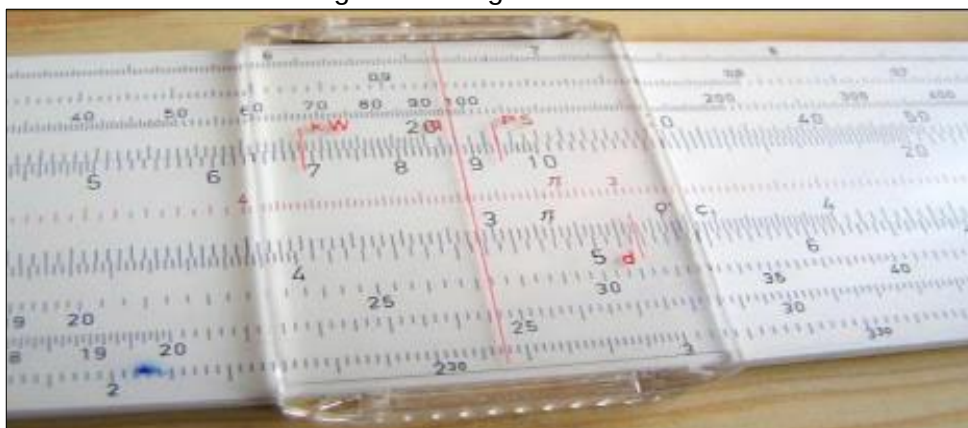
Figura 5 – Tábua de logaritmos do trabalho de Briggs (1617)

2		Logarithmi.			Logarithmi.
1	00000,00000,00000		34	15314,78917,04226	
2	03010,29995,66398		35	15440,68044,35028	
3	04771,21254,71966		36	15563,02500,76729	
4	06020,59991,32796		37	15682,01724,06700	
5	06989,70004,33602		38	15797,83596,61681	
6	07781,51250,38364		39	15910,64607,02650	
7	08450,98040,01426		40	16020,59991,32796	
8	09030,89986,99194		41	16127,83856,71974	
9	09542,42509,43932		2	16232,49290,39790	
10	10000,00000,00000		43	16334,68455,57959	

Fonte: MAOR (2010, p.26)

A partir desse momento, alguns estudiosos se propuseram a traduzir os trabalhos de Napier e Briggs para outros idiomas. Segundo Magalhães (2003), William Oughtred (1575 – 1660), inglês, ministro episcopal, matemático, publicou uma *Clavis Mathematicae* (A chave Matemática). Vale salientar que, foi quem primeiro usou a simbologia de multiplicação (x) e que inventou a régua de cálculo (Instrumento que funcionava como uma calculadora e era útil para os cálculos dos logaritmos, raiz quadrada, raiz cúbica entre outros cálculos), ver figura 6 abaixo.

Figura 6 – Régua de cálculo



Fonte: EVOLUÇÃO DOS COMPUTADORES. Disponível em: <<https://evolvedup.weebly.com/reacutecua-de-calculo.html>> Acesso em 5 de dezembro 2021.

Segundo MAOR (2006, p.31)

A régua de cálculo, em suas muitas variedades, foi a companheira fiel de todos os cientistas e engenheiros durante os 350 anos que se seguiram, sendo dada de presente pelos pais a seus filhos e filhas, quando se graduavam no ginásio. Então, no início da década de 1970 apareceram no mercado as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e no espaço de dez anos a régua de cálculo tornou-se obsoleta. (Em 1980, uma das principais indústrias de instrumentos científicos dos Estados Unidos, Keuffel & Esser, deixou de fabricar suas réguas de cálculo, pelas quais era famosa desde 1891). Quanto às tabelas de logaritmos, elas se saíram um pouco melhor: ainda podemos encontrá-las no final dos livros de álgebra, silenciosa lembrança de uma ferramenta que sobreviveu à sua utilidade. Mas não vai demorar muito tempo antes que também sejam uma coisa do passado.

A definição de logaritmo que prevalece até os dias atuais foi apresentada por Leonhard Euler (1707-1783), com o cálculo de logaritmos em qualquer base. “Foi Euler quem nos deu a definição moderna de logaritmo: se $y = b^x$, onde b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = \log_b y$ (leia-se como “logaritmo de y na base b ”).(MAOR,2006,p.229)

Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada, sendo o maior responsável pela linguagem e notação que usamos hoje. Foi o primeiro a tratar os logaritmos como expoentes, apresentou a ideia correta sobre logaritmo de números negativos e empregou a letra e como base do sistema de logaritmos naturais (BOYER,1974, p.326)

Os trabalhos que Euler escreveu sobre os logaritmos, contendo importantíssimas inovações na forma de tratá-los, foram escritos, ao que tudo indica e pelo menos parcialmente, sob a influência da discussão do assunto que teve por correspondência com Bernoulli entre 1727 e 1729 e da leitura das cartas trocadas por Leibniz e Bernoulli, que foram publicadas em 1745. No célebre *Introductio in analysin infinitorum*, seu primeiro tratado de análise, escrito entre 1743 e 1744 e publicado em 1748, os logaritmos foram pela primeira vez apresentados sistematicamente como exponenciais, de uma forma muito semelhante àquela que é adotada atualmente (CARVALHO,2015, p.42).

Foram transcorridos cerca de 140 anos, desde a sua invenção, para que os logaritmos fossem definidos em termos algébricos na forma de expoentes. O avanço da álgebra, o desenvolvimento da simbologia matemática do século XVII e do cálculo infinitesimal proposto por Newton foram decisivos para que Euler caracterizasse o logaritmo em termos algébricos (SOARES, 2011, p. 72).

Segundo Maor (2006, p.229) o problema de encontrar a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ foi um dos principais problemas matemáticos do século XVII. A descoberta de que esta área envolve logaritmos mudou o foco do papel original dos logaritmos, como uma ferramenta de cálculo, para as propriedades da função logarítmica.

A ligação entre logaritmos e equação ou função exponencial exigiu, no plano histórico, muito tempo e esforço para ser estabelecida. No início do séc. XVIII, o conceito de função estava apenas no início de seu processo de desenvolvimento. Somente após perceber que os logaritmos além de instrumento facilitador de cálculos aritméticos, podiam expressar analiticamente e quantitativamente fenômenos naturais envolvendo a variação de duas grandezas interdependentes, é que essa noção começou a ser vista como uma equação, como uma função e como uma expressão analítica (OLIVEIRA, 2005, p.45)

No século XIX, os logaritmos começam a ser representados como função. Essa proposta começa a aparecer em livros didáticos de matemática, seguindo como referência os trabalhos de Napier e de outros autores. Sendo assim, essa nova concepção preponderou para um novo direcionamento de logaritmo, figurando sob a forma de representação simbólica e formal (SOARES, 2011, p.44)

A concepção aritmética dos logaritmos é definida da análise comparativa entre duas progressões. Inicialmente essa ideia é um dos meios mais adequados para se entender o conceito de logaritmos e suas devidas condições de existência porque foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII para definir os logaritmos. A concepção algébrica-funcional dos logaritmos é abordada através da ideia de potência e do estudo de funções exponenciais. Essa concepção é apresentada nos livros didáticos do século XX. Esse recurso foi devido ao surgimento da álgebra e de algumas reformas na educação. Tal concepção explora os logaritmos em termos de duas variáveis (incógnitas) sendo ainda definidas em termos exponenciais e representadas graficamente pelo estudo de função que recebe o nome de função logarítmica. (SOARES, 2011, p. 73)

A relação da Quadratura da Hipérbole com a Função Logarítmica é o método utilizado para encontrar a área de uma linha poligonal fechada é conhecido como quadratura. Segundo Maor (2006) a palavra quadratura é uma forma de expressar em termos de unidade de área, que são quadrados. Se quisermos encontrar a área de um retângulo de lados a e b e se este retângulo deve ter a mesma área de um quadrado de lado x então teremos: $x^2 = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$. Com o passar do tempo, a demonstração geométrica de um problema de quadratura abriu caminho para uma abordagem mais computacional, ou seja, a construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária, desde que fosse possível demonstrar que tal construção poderia ser feita. Contudo, com a introdução dos processos infinitos na

matemática, em meados de 1600, o problema da quadratura passou a ser puramente computacional.

Maor (2006) relata que uma das formas que resistiam a todas tentativas da quadratura era a hipérbole. Esta curva é obtida quando um cone é cortado por um plano num ângulo maior que o ângulo existente entre a base do cone e seu lado, e possui um par de linhas retas associadas a ela, suas duas linhas tangentes no infinito. Ao mover ao longo de cada ramo, afastando-se do centro, é possível aproximar cada vez mais dessas linhas, sem ser nunca alcançadas. Essas linhas são definidas como assíntotas da hipérbole (palavra grega “não se encontrando”); que são manifestações geométricas do conceito de limite.

Dentre os matemáticos destacados por Maor (2006) que tentaram resolver o problema da quadratura da hipérbole estão Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650) e Blaise Pascal (1623-1662). Em 1637 Descartes publicou a obra *La Géométrie* que teve influência em várias gerações de matemáticos, e apresentou ao mundo a Geometria Analítica. Este fato colocou um fim na geometria grega clássica, na qual era fundamental a construção geométrica e a prova, e a geometria tornou-se uma parte inseparável da álgebra, e depois ao cálculo.

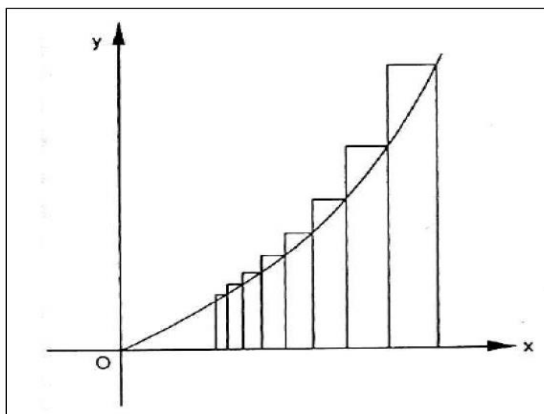
Pierre de Fermat interessou-se na quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ onde n é um número positivo. Tais curvas são chamadas de parábolas generalizadas. Fermat fez um trabalho semelhante ao método de exaustão de Arquimedes sem recorrer a uma série infinita. O matemático fez aproximação da área sob cada curva por meio de retângulos e as bases desses retângulos formam uma progressão geométrica.

O trabalho de Fermat foi um avanço significativo, pois a quadratura envolveu uma família de curvas fornecida pela $y = x^n$ para valores inteiros, positivos de n .

Além disso, ao modificar ligeiramente seu procedimento, Fermat mostrou que a equação $y = x^n$ permanece válida mesmo quando n é um inteiro negativo, desde que agora calculemos a área de $x = a$ (onde $a > 0$) até o infinito. Quando n é um inteiro negativo, digamos $n = -m$ (onde m é positivo), obtemos a família de curvas $y = x^{-m}$, chamadas frequentemente de hipérboles generalizadas. Que a fórmula de Fermat funcione nesse caso é um tanto notável, já que as equações $y = x^m$ e $y = x^{-m}$ apesar de sua aparente semelhança representam tipos bem diferentes de curvas: as primeiras são contínuas em toda a parte, enquanto as últimas se tornam infinitas em $x = 0$ e em consequência possuem uma “quebra” (assíntota vertical) neste ponto. (MAOR, 2006, p.92)

O problema da quadratura da hipérbole foi solucionado pelos gregos que foram os pioneiros há 2.000 anos, mas ainda ficam em aberto a fórmula que fornece a área sob a hipérbole como uma função de variável, t (Figura 7).

Figura 7: Aproximação da área por meio de retângulos maiores.

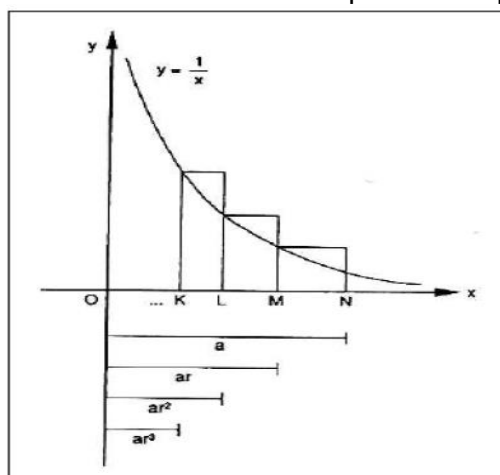


Fonte: MAOR(2006, p.91)

Contudo, a fórmula de Fermat não funcionou para a curva $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Segundo o autor, não há certeza de quem de fato trabalhou neste caso particular, devido ao atraso da publicação do trabalho *Opus geometricum quadraturae circuliet sectionm conic* (1647) escrito pelo jesuíta belga Grégoire de Saint-Vicent¹ (1548-1667) que passou maior parte de sua vida trabalhando em vários problemas de quadratura.

Segundo Maor (2006), um dos alunos de Saint-Vicent iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal (MAOR,2006, p. 92), Alfonso de Sarasa (1618-1667), registrou explicitamente que se considerarmos $A(t)$ como a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$, uma das primeiras ocasiões que se fez uso de uma função logarítmica (figura 8), Saint-Vicent percebeu que, quando as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos possuem áreas iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal (MAOR,2006, p. 92), quando até então os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

Figura 8: O método de Fermat aplicado à hipérbole.

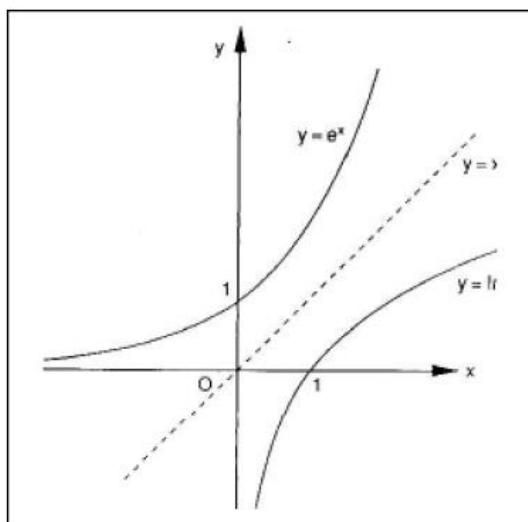


Fonte: MAOR (2006, p. 92)

O processo de encontrar o inverso da função exponencial. Se $y = e^x$ (denominada por função exponencial natural) e considerando y como sendo um valor determinado, o objetivo é resolver esta equação para x , isto é, expressar x em termos de y (figura 9).

Lembramos que o logaritmo comum ou briggsiano de um número $y > 0$ é o número x para o qual $10^x = y$. Exatamente do mesmo modo, o logaritmo natural de um número $y > 0$ é o número x para qual $e^x = y$. E assim como escrevemos $x = \log y$ para o logaritmo comum (logaritmo de base 10) de y , também escrevemos $x = \ln y$ para o logaritmo natural (logaritmo de base e). O inverso da função exponencial é então a função logarítmica natural e sua equação, depois de trocar x e y , é $y = \ln x$. A Figura 2.3 mostra os gráficos de $y = e^x$ e de $y = \ln x$ plotados no mesmo sistema de coordenadas; como acontece com qualquer par de funções inversas, os dois gráficos são reflexos um do outro sobre a linha $y = x$. (MAOR, 2006,p. 142).

Figura 9: As equações $y = e^x$ e $y = \ln x$ representam funções inversas.



Fonte: MAOR (2006, p. 98)

Segundo Maor (2006, p.142)

Com relação à taxa da variação, segundo a notação de Leibniz, a taxa de variação de uma função inversa é recíproca (um dividido por) da taxa de mudança da função original; em símbolo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. No caso da função exponencial se $y = e^x$ e $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ de modo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ ou seja, a taxa de variação de x em função de y é igual a $\frac{1}{y}$ e isso significa que $x = \ln y$ porque $y = e^x$. Se as letras forem trocadas a fórmula será $y = \ln x$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ou seja, $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ e isso significa que $\ln x$ é uma antiderivada de $\frac{1}{x}$; $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$.

A fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, em que C é a constante da integração explica a descoberta de Saint-Vicent de que a área sob a hipérbole segue de uma função logarítmica. Se chamarmos esta área de $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + C$ se o ponto inicial desta área for inicialmente como $x = 1$, terá $0 = A(1) = \ln x + C$, no entanto, $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$ e assim teremos $C = 0$. Podemos concluir que a área sob a hipérbole $y = 1$ de $x = 1$ a qualquer $x > 1$ é igual a $\ln x$. Este resultado dá ao número **e** um significado geométrico que o relaciona com a hipérbole: $A = \ln x \rightarrow A = 1$ quando $x = e$.

O avanço da álgebra e o desenvolvimento da simbologia matemática do século XVII e do cálculo infinitesimal proposto por Newton foram incisivos para que Leonard Euler (1707 – 1783) caracterizasse o logaritmo e demonstrasse o sistema de logaritmos realizado por Napier em termos algébricos.

Foi a partir do uso proposto por Euler que os logaritmos receberam uma nova caracterização lógica, principalmente, no que se refere à sua fundamentação conceitual que ficaram reconhecidos como Número de Euler ou número **e** em homenagem a Euler. Consequentemente, o desenvolvimento dessas novas tábuas foi aparecendo, seguindo a mesma ideia sugerida por Napier e Briggs, tomando como referência um número reduzido de casas decimais.

Assim, de acordo com que tem sido abordado até agora sobre a história dos logaritmos, da sua origem até a sua implementação nos livros didáticos, procurarei focar as três concepções básicas: a geométrica, a aritmética e a algébrico-funcional. Desse modo, como funciona e como é definida cada uma dessas concepções.

De acordo com Miguel e Miorim (2004, p.84),

- A concepção geométrica dos logaritmos é definida através de uma experiência prática de Napier recebe esse nome porque ele definiu os logaritmos em termos de medidas envolvendo duas semi-retas.
- A concepção aritmética dos logaritmos é definida da análise comparativa entre duas progressões. Inicialmente essa ideia é um dos meios mais adequados para se entender o conceito de logaritmos e suas devidas condições de existência porque foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII para definir os logaritmos.
- A concepção algébrico-funcional dos logaritmos é abordada através da ideia de potência e do estudo de funções exponenciais. Essa concepção é apresentada nos livros didáticos de Matemática do século XX. Esse recurso foi

devido ao surgimento da álgebra e de algumas reformas na educação. Tal concepção explora os logaritmos em termos de duas variáveis (incógnitas) sendo definidas ainda em termos exponenciais e representadas graficamente pelo estudo de função que recebe o nome de função logarítmica.

Os logaritmos contribuíram de maneira decisiva para o desenvolvimento da ciência, e hoje, depois de mais de quatro séculos de sua invenção, ainda continuam necessários. Atualmente sua importância se dá sobre certas propriedades da função logarítmica com aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento.

Contudo, se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a função logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. Ela aparece em uma variedade de aplicações que abrangem a química, biologia, psicologia, arte e música (MAOR, 2006, p.31).

3.2 Fundamentação Teórica dos Logaritmos

A resolução de problemas no ensino de Matemática tem sido uma das tendências atuais, como uma metodologia de ensino eficaz de se trabalhar com conteúdos matemáticos, levando em consideração aplicações e situações do cotidiano, que podem incentivar a compreensão e a utilização adequada de conceitos matemáticos.

O ensino da Matemática no início do século XX estava baseado na tendência formalista clássica e priorizava a memorização e repetição mecânica de algoritmos e técnicas e os estudantes eram avaliados, preponderantemente, por meio de testes, sendo a conclusão de que sabiam algo obtida pela observação do potencial de reprodução do que o professor havia mostrado (FIORENTINI, 1995). Anos depois, uma nova orientação direcionava o processo no sentido de que os estudantes aprendessem Matemática por compreensão, ou seja, o estudante deveria entender o que o professor falava, porém, o mesmo não participava da construção dos conceitos, era um mero expectador (ONUCHIC, 1999). Essas formas de ensino não representaram o sucesso esperado quanto à aprendizagem, sendo poucos os estudantes que tiveram êxito em compreender a Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).

A resolução de problemas sempre esteve presente na história da humanidade como atividade, porém enquanto teoria ou prática de sala de aula faz parte de uma história recente, que remonta ao século XX. Uma das primeiras referências vem de

Polya, em seu livro *a Arte de Resolver Problemas* (1944/1995), em que o autor enfatiza quatro passos necessários para a resolução de um problema.

Primeiro temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 1995, p.3-4)

Na compreensão do problema, o aluno deve verificar se o enunciado está claro e não deixa dúvidas, identificando a(s) incógnitas (s) e os dados fornecidos. Para estabelecer o plano, ele deve procurar se recordar de problemas semelhantes já resolvidos e estabelecer conexões entre os dados fornecidos no problema. Durante a execução desse plano, é preciso manter uma sequência de passos ordenadamente, de modo que seja fácil verificar a qualquer momento se aquele passo está correto. Por último, o retrospecto deve examinar se a solução obtida satisfaz o enunciado proposto e, no caso, de mais de uma solução, se todas elas são válidas.

Para Allevato e Onuchic (2014, p. 37) o ensino sobre resolução de problemas “corresponde a considerá-la como um novo conteúdo”, pois são abordadas etapas, regras e processos para a resolução de um problema, não necessariamente matemático, o que remete a abordagem dada à resolução de problemas por Polya. As mesmas autoras descrevem o ensino para resolução de problemas como uma abordagem diferente da anterior, onde o foco não está mais na resolução de problemas enquanto método, mas está na aplicação do conteúdo matemático. “Nessa visão, a matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo” (ALLEVATO;ONUCHIC, 2014, p.38).

Na teoria desenvolvida por Brousseau (Apud 1986), preocupa-se com a aprendizagem matemática em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático. Utilizar-se-á da teoria da situação didática, pois acredita-se que esse, enquanto estratégia pedagógica para o ensino da matemática num ambiente contextualizado, possa garantir aprendizagens significativas.

De acordo com Brousseau (1986), as situações didáticas são definidas como:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (apud PARRA; SAIZ, 2001, p.28)

Por sua vez, Brousseau apostou em outra perspectiva teórica que permitisse compreender as interações sociais desenvolvidas na sala de aula entre alunos, professor e o saber. Para Brousseau (1978), a relação didática é potencialmente conflitiva, pois nela se busca propiciar interações do aluno com o objeto de conhecimento, aprofundando e ampliando as relações e significações acerca desse objeto. Daí emergem questões sobre as situações didáticas e a-didáticas. Para ele as situações didáticas se enquadram em um sistema formado pelos binômios aluno-meio e aluno-professor. A interação entre aluno e professor, em relação ao binômio aluno-meio envolve uma regulação da produção do conhecimento em que o professor desenvolve mecanismos didaticamente interferentes e valida as situações de aprendizagem. Já na situação a-didática, o aluno independe de tantas interferências para a promoção de sua aprendizagem, pois consegue caminhar por si na construção do conhecimento e na busca de soluções.

Segundo Onuchic e Allevato (2004, p.223-224) são convincentes nesse sentido quando argumentam que:

- Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o 'dar sentido. Ao resolver problemas os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema;
- Resolução de problemas desenvolve o "poder matemático". Os estudantes ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos nos Standards 2000: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
- Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela solução, ele diz aos estudantes: ' Eu acredito que vocês' podem fazer isso! Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;
- É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo 'ensinar dizendo'. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos;
- A formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feito pelo professor no final da atividade, faz mais sentido".

Logo, a utilização de resolução de problemas em sala de aula é uma ferramenta que procura oferecer subsídios ao aluno, de forma a permitir que ele seja capaz de elaborar e desenvolver estratégias pessoais de identificação e resolução de

problemas nas principais áreas de conhecimento através de alguns hábitos de raciocínio sistematizado.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata as competências como sendo uma “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e sócio emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p.8). Destaca ainda, que essas competências devem desenvolver no estudante, durante a Educação Básica e, em especial no Ensino Fundamental, a capacidade do Letramento Matemático:

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2017, p.264).

Segundo a BNCC (COMPETÊNCIA ESPECÍFICA) – Esta, propõe que os estudantes interpretem e construam modelos matemáticos, resolvam e formulem problemas envolvendo os conceitos, definições e procedimentos inerentes a matemática, aplicados em situações diversas, possibilitando ao estudante que possa resolver problemas ao longo da sua vida, através de situações reais, pois verificam-se nelas, maior significância ao aprendizado discente.

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.35)

Em relação a resolução de problemas, eles precisam identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários. Em seguida, devem aplicá-los e executá-los, para compartilhar em seguida dos resultados obtidos, relacionando com o problema inicial, verificando e comunicando sua solução através de argumentação consistente e linguagem adequada.

Ressalta-se que na resolução de problemas existem processos distintos de obtenção das soluções, permitindo de acordo com cada problema, que o estudante faça adaptações e/ ou utilize maior grau de abstração e interpretação. Aliada a esse contexto, destaca-se o uso das tecnologias, permitindo que o estudante possa “raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínio e de construir argumentações”. (BNCC, 2018, p.536).

Segundo a BRASIL (2018, p.536-537), as habilidades das funções logarítmicas são as seguintes:

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, PH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Nesse contexto, a matemática deve ampliar e aprofundar as habilidades construídas durante o ensino médio, promovendo conjecturação e abstração de processos mais elaborados, possibilitando que os estudantes possam resolver problemas em diferentes contextos, favorecendo sua autonomia e capacidade criativa. Assim, torna-se preponderante que os estudantes desenvolvam habilidades relativas ao processo de investigação, construção de modelos, resolução de problemas, sendo necessário que eles desenvolvam modos próprios de raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

Neste sentido, faz-se imprescindível repensar as práticas pedagógicas, “adotando práticas reflexivas, estimulando o trabalho em equipe e implementando a construção e desenvolvimento do ensino por meio de projetos e pela resolução de problemas” (ALLEVATO, 2014, p.210). Desse modo, o professor passa a atribuir ao aluno o papel de protagonista do processo de aprendizagem, para que tenha capacidade de se adaptar a novas situações, tenha persistência e criatividade na busca por soluções de vários tipos de problemas, tanto da escola como da vida.

O conhecimento histórico da Matemática desperta o interesse do aluno pelo conteúdo matemático que lhe está sendo ensinado. A história para descrever como foi desenvolvido o conceito, propriedades e relações envolvendo os logaritmos, tendo como meta o ensino e a aprendizagem da Matemática. Miguel e Miorim (2004) comentam porque os historiadores da Matemática e os investigadores em Educação Matemática defendem o uso da história dessa maneira.

Desse modo, Miguel e Miorim (2004, p.61) apresentam alguns argumentos de natureza epistemológica:

- Fonte de seleção e constituição de sequências adequadas de tópicos de ensino;
- Fonte de seleção de métodos adequados de ensino para diferentes tópicos da matemática escolar;
- Fonte de seleção de objetos adequados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar;
- Fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da matemática escolar;
- Fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade;
- Fonte de identificação de obstáculos epistemológicos de origem epistemológica para se enfrentar certas dificuldades que se manifestam entre os estudantes no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar;
- Fonte de identificação de mecanismos operatórios cognitivos de passagem a serem levados em consideração nos processos de investigação em Educação matemática e no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar.

No estudo histórico e epistemológico dos logaritmos, tendo em vista as necessidades práticas e sociais que frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas, assim como a percepção, por parte do professor, da natureza e do papel desempenhado pela abstração e generalização na história da Matemática.

Mediante a isso voltando-se especificamente para o ensino de Matemática, na perspectiva de organizar um trabalho no qual os alunos sejam colocados diante de situações que realmente os desafiem e que os auxiliem no desenvolvimento da autonomia intelectual, de forma que os conhecimentos adquiridos na escola possam lhes proporcionar condições para compreender e participar do mundo.

Em geral, o ensino de matemática precisa estar interligado e contextualizado junto às outras áreas do conhecimento, de forma a criar um paralelo com as situações práticas do cotidiano. Logo, os conceitos matemáticos no processo de aprendizagem devem ser abordados explicitando sua origem e finalidade, contribuindo assim para a formação integral do aluno. Conforme diz Bassanezi (2002) *“a aplicação correta da matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo”*. Assim, é possível ver o quão participativa a matemática é do cotidiano das pessoas. Contudo, também se sabe da importância sobre as aplicações do conhecimento matemático, conhecimento este que pode ser adquirido pelo aluno por meio da resolução de problemas, onde:

As aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender, e também que relata a conexão entre a abstração e a realidade. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraentes das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar (LIMA, 2003, p.184).

É possível estruturar, aplicar e analisar uma sequência didática em qualquer nível de ensino, considerando as especificidades dos envolvidos e os objetivos a serem adquiridos. Assim, a sequência didática é um modelo, segundo o qual deve-se considerar, o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em processo de constituição. Segundo Brousseau (1986) acredita que a forma didática em que se assenta a estruturação de uma sequência didática pode influenciar o aluno em relação aos significados, de modo que ele consiga interiorizar os conteúdos subjacentes, quando a situação didática lhe é apresentada, permitindo, dessa forma, uma intervenção preparada. Para Brousseau situação didática é:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos (BROUSSEAU, 1986, p.8).

Com base nesses argumentos, pode-se dizer que a Teoria das Situações Didáticas apresenta novos desafios para a busca de mecanismos que propiciem a melhoria nos processos de ensino-aprendizagem da matemática. Segundo Brousseau seria uma teoria de aprendizagem, que pode ser desenvolvida através de uma situação formada pelas múltiplas relações pedagógicas, estabelecidas pela tríade professor-aluno-saber, cuja finalidade é desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conhecimento específico.

Sabe-se que no decorrer da aprendizagem haverá algumas variações em que o professor não conseguirá exercer qualquer controle, mas em outras, razoavelmente terá o controle por meio da ação didática. Dessa forma, espera-se que o aluno reconheça que aquela atividade elaborada pelo professor foi preparada para que ele ampliasse seu conhecimento. Assim, ele poderá perceber a importância desse saber 'que é justificado pela conexão da situação e, desse modo, poderá construí-lo sem

recorrer a razões didáticas. Nesse sentido, o aluno só terá adquirido esse saber quando for capaz de aplicá-lo, por si próprio, às situações enfrentadas fora do contexto de ensino e na ausência de qualquer indicação intencional. Silva (2008) lembra que, para Brousseau, o planejamento de uma situação didática precisa ter momentos em que o aluno se encontre sozinho diante do problema a resolver, sem a intervenção do professor. Desse modo, o aluno se torna responsável pela construção de seu conhecimento, que não será transmitido unicamente pelo professor, mas que deverá ser construído pelo aluno com auxílio do professor caso haja necessidade.

Diante disso, Brousseau confirma que uma situação adidática

é representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem. Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática (BROUSSEAU, 1986).

Nesse sentido as sequências didáticas são instrumentos de ensino-aprendizado que permitem incluir as três fases da prática pedagógica do professor: planejamento, aplicação e avaliação. Elas representam, em seu bojo, a unidade indissociável existente no processo educativo, de marcado neste caso, por um começo, meio e fim, ou seja, demarcando o processo de forma clara para alunos e professores (CABRAL, 2017).

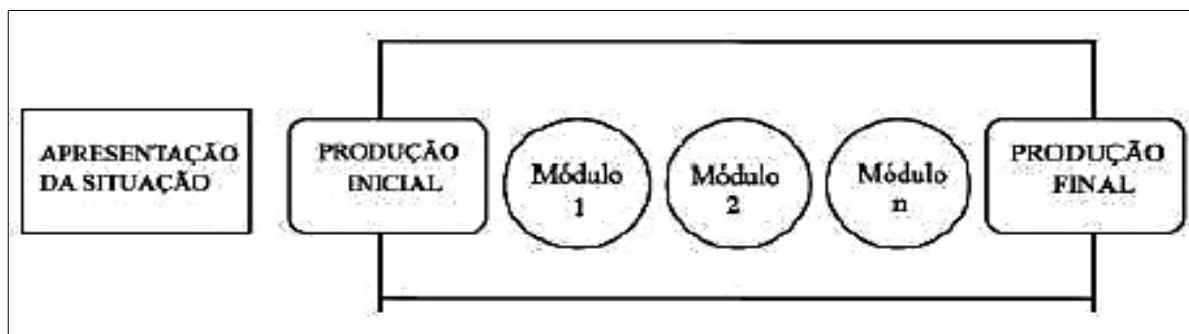
De acordo com Peretti e Costa (2013, p. 6), sequência didática é

um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.

As atividades que compõem a sequência didática devem ser cuidadosamente escolhidas pelo professor, de forma a tornar o processo de aprendizado dos conteúdos previstos o mais encadeado possível. Por isso, o primeiro cuidado a se tomar ao organizar uma sequência didática é o planejamento da mesma. É importante em uma sequência didática, trabalhar o conteúdo com várias ferramentas diferentes, além é claro, trabalhar nos alunos a noção de que eles não devem esperar passivamente pelas respostas do professor, mas atuar ativamente na construção dos próprios saberes (LIMA, 2018, p. 35).

Uma sequência didática, de forma bem simplificada, possui uma apresentação; uma produção inicial; desenvolvimento e a produção final (Figura 10).

Figura 10 – Esquema de uma Sequência Didática



Fonte: Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004)

As sequências didáticas surgem nos moldes da Engenharia Didática, que nasceu a partir da Didática da Matemática no início dos anos 80.

A Engenharia Didática foi inicialmente concebida como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa. Ela possui duas funções: ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática e ser utilizada para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula (CARVALHO, 2017, p. 55).

Tal qual um engenheiro planejando a construção de um prédio, o professor deve planejar a construção do saber junto com o aluno. Contudo, não basta planejar se o professor não souber como trabalhar o tema dentro da sequência didática. É aconselhável que o professor utilize diferentes materiais concretos para a elaboração de sequências didáticas, de forma a tornar o aprendizado mais significativo (PERETTI; COSTA, 2013).

Nesse contexto, esta pesquisa tem por base a educação matemática, que está voltada para os estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem da matemática na sala de aula, buscando organizar um trabalho em que os alunos são colocados diante de situações que realmente os desafiem e que os auxiliem no desenvolvimento de autonomia intelectual de forma que os conhecimentos adquiridos, na escola, possam lhes proporcionar condições para compreender e participar do mundo.

A educação matemática no contexto mundial é considerada como,

[...] área educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino-aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em uma dimensão teórica ou prática (PAIS, 2002, p.10)

Esta pesquisa fundamenta-se, ainda, na educação matemática, que é uma área de pesquisa em matemática e tem por fim o estudo das situações didáticas, ou seja, uma área do conhecimento ligada ao ensino da matemática, mais precisamente

interessada na pesquisa dos fenômenos relativos ao ensino da matemática, sendo seu fim, a “determinação das condições nas quais se produz a apropriação do saber, por parte dos alunos” (GALVEZ,1996, p.31).

Nesse sentido faz-se necessário que o professor possa controlar tais condições, seguindo as fases de uma engenharia didática.

Conforme Pais:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2002, p.10).

Dessa forma, pode-se entender que a didática da matemática, permiti resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, para que os educadores de modo geral possam indicar propostas pedagógicas com a finalidade de contribuir não somente, para uma melhor aprendizagem da matemática, mas para a melhoria de seu ensino.

Nesse sentido, objetivou-se estabelecer as noções didáticas que deram base à pesquisa. Utilizou-se algumas contribuições da Didática da Matemática Francesa que, segundo Pais (2002, p.9), “tem como uma de suas características a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas”. Algumas dessas constatações são identificadas na ideia de Situação Didática, Transposição Didática, Obstáculos Epistemológicos, Contrato Didático e Formação de Conceitos. Esses conceitos são importantes para a compreensão de questões educacionais relativas ao fenômeno da aprendizagem da matemática.

Entre as diversas teorias pedagógicas, desenvolvidas nas últimas décadas, será utilizada como referência, a teoria das situações didáticas, como foi citadas as suas constatações, que segundo A teoria da Transposição Didática de Chevallard, (1991, p, 56), preocupa-se com as modificações por que passam os conteúdos da educação matemática, desde sua constituição como saber científico produzido pela comunidade científica até sua transformação em saber escolar, com reflexos nos saberes que constituem o currículo escolar. O termo utilizado por Chevallard “Transposição” dar o sentido de alteração e evolução.

A transposição dos saberes está integrada à expressão Transposição Didática, que é compreendida como modificação e evolução das ideias, em uma situação mais ampla da evolução do saber. Contudo, partindo da ideia da construção de um plano

por um indivíduo, o qual assume um caráter pessoal e subjetivo, passa a conotar uma transposição do conhecimento. Esse conceito é observado dentro de um ponto de vista da aprendizagem caracterizando uma cognição relativa à evolução do conhecimento ao qual está vinculada a necessidade de aplicação de conhecimentos anteriores para que se dê a aprendizagem de novos conceitos. Sendo assim, para toda produção de um determinado conhecimento, existe um processo que se assinala o conceito de transposição.

O termo conhecimento tem na sua epistemologia e sentido da palavra diferenças com o termo saber. Segundo D'Amore, (2007, p.3), "[...] entende-se por saber como um conjunto de conhecimento ou atitudes que podem ser reproduzidos, adquiridos por meio de estudo ou experiência". Nesse entendimento, os saberes são uma construção social e são produzidos para atenderem às necessidades de uma determinada sociedade, interpassando pelos valores e cultura dos grupos aos quais estão submetidos. No âmbito da psicologia cognitiva, D'Amore faz distinção entre saberes e os conhecimentos afirmando que:

Os saberes são dados, conceitos, procedimentos ou métodos que existem no exterior de cada sujeito que conhece e que são geralmente codificados em obras de referência, manuais, enciclopédia, dicionários; os conhecimentos são indissociáveis de um sujeito que conhece; isto é, não existe um conhecimento a-pessoal; uma pessoa que interioriza um saber, tomando consciência, transforma-se esse saber em conhecimento. (D'AMORE, 2007, p.3).

Dessa forma, entende-se que o saber se apresenta relativamente associado a um contexto científico, histórico e cultural. Para Machado, (2015), o saber matemático é considerado uma ciência que tem seu ponto de vista pautado numa conjuntura própria, enquanto o conhecimento se refere ao contexto individual, perpassando pela subjetividade do indivíduo, em experiência direta e pessoal, assumindo um caráter experimental.

A Teoria da Transposição Didática encarrega-se de estudar os processos seletivos aos quais estão submetidos os conteúdos que atendem aos currículos dos programas escolares que constituem o saber escolar. A origem de tal saber escolar está em um saber científico proveniente de um processo evolutivo (CHEVALLARD, 1991, p, 39).

Assim sendo, a seleção dos conteúdos configura-se resultado dos caminhos a serem seguidos para o estabelecimento de sugestões de conteúdo que atenda à educação escolar, bem como às demandas sociais do sistema de ensino, tais como valores, métodos, objetivos. Segundo Machado (2015, p, 44), a noção de transposição

didática era estudada pelos matemáticos apenas como uma ferramenta de resolução de problemas. A partir de sua inclusão no currículo e nos programas do sistema de ensino, assumiu a posição de um objeto de estudo em si, mesmo ocorrendo o fenômeno da transposição didática, quando ocorre o tratamento didático.

Em relação a Teoria dos Obstáculos epistemológicos de Bachelard trata dos obstáculos que surgem no processo de ensino-aprendizagem, no qual, por vezes, os estudantes têm dificuldade de adquirir novos conhecimentos por resistirem a novas ideias, por abrigarem conhecimentos cristalizados. Quando os saberes antigos acabam prejudicando a nova aprendizagem, é necessária uma ruptura para que o novo conhecimento se torne harmonioso com o antigo.

Nesse sentido, Bachelard (2002, p. 78) desenvolveu o conceito de obstáculos epistemológicos, presentes no ato de conhecer, realçando que este se dá contra um conhecimento anterior e que destrói conhecimentos anteriores mal estabelecidos. Os obstáculos epistemológicos, segundo Bachelard (2002, p. 78), aparecem na essência do próprio ato de conhecer, no qual podem ser detectadas causas de estagnação, regressão ou de inércia.

Para Bachelard (1996, p. 14) “a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação”. Há um grande número de obstáculos epistemológicos que, independente de sua natureza, necessitam ser identificados e retificados. Segundo Lopes,

os obstáculos e entraves não devem ser compreendidos apenas como algo falho ou como aspectos pontuais de alunos com dificuldades; eles são importantes à aprendizagem e para que esta ocorra satisfatoriamente é necessário que haja, além de questionamentos e críticas, ruptura entre conhecimento comum e científico, construindo este e desconstruindo aquele (LOPES, 1993 apud GOMES, 2006, p.4)

No Contrato Didático, estudam-se regras e condições de funcionamento da educação escolar em um plano específico, o da sala de aula, em que são analisadas as obrigações e suas respectivas quebras entre professor e educando quando estes se reúnem em torno de um saber em ambiente de aprendizagem. O teórico Guy Brousseau (1986) traz as discussões sobre o contrato didático, analisa o estabelecimento de relações implícitas e explícitas entre educando e professor e as influências que ocorrem sobre o ensino e aprendizagem do saber matemático.

Segundo Pais (2002, apud, p. 67) estudos mostram que o contrato didático é mais claramente percebido, quando suas regras não são observadas pelo professor ou pelo próprio aluno, ou seja, quando as regras desse contrato não são seguidas. O

contrato didático refere-se a uma situação de ensino que leva em conta a relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Não se pode esclarecer todas as normas que regem um contrato didático, porém existem certas atitudes do professor que são esperadas pelos alunos e vice-versa. Se por alguma razão, houver uma ruptura do contrato por parte do aluno, seria interessante verificar as causas que levaram a esta ruptura para que houvesse continuidade do processo educativo.

De acordo com Brousseau (1986, apud PAIS, 2002), encontram-se três exemplos de contrato didático, relacionando professor, aluno e conhecimento. Com relação ao primeiro exemplo de contrato, pode-se caracterizá-lo como uma metodologia tradicional na qual só o professor detém o conhecimento. Além de elaborar sozinho suas aulas, acredita que somente através da sua exposição dá-se a aprendizagem do conteúdo. Geralmente, nesse tipo de contrato, o professor resolve alguns problemas aparentemente fáceis aos olhos dos alunos, mas quando estes vão tentar resolvê-los sozinhos eles parecem mais difíceis.

No segundo exemplo de contrato didático, destaca-se a relação do aluno com o saber, e o professor acompanha à distância. O aluno é que tem a obrigação de estudar e acaba construindo sua própria concepção, nesse sentido, há um pequeno ou nenhum controle pedagógico do processo ensino-aprendizagem. Aqui, segundo Brousseau, confundem-se o saber cotidiano que flui de maneira mais espontânea e o saber escolar.

No terceiro exemplo de contrato didático, o professor intervém de forma mais compromissada, tanto com os grupos de alunos como com o aluno individualmente. Aqui, ele elabora as situações didáticas com o objetivo de controlar possíveis erros e a preocupação maior é com o aluno e o saber.

Nesta pesquisa procurou-se seguir os passos do terceiro exemplo de contrato didático, na qual o professor elaborou uma sequência didática relativo ao conteúdo de logaritmos e função logarítmica, com situações-problemas. Partindo dessa compreensão, o contrato didático pode ter outras vertentes e gerar efeitos. Entretanto, se impõe a todos e não pode ser explicado pelo mau desempenho de professores ou alunos. O contrato didático torna-se unânime nas relações que se estabelecem e, portanto, deve estar bem definido quando professores e alunos interagem em torno de um saber em ambiente de aprendizagem. Deste modo, as discussões até aqui desenvolvidas nos permitem compreender, em diferentes aspectos, o que acontece quando professor, aluno e saber se envolvem no processo educacional. A partir do olhar da Didática da Matemática é possível uma modelização do trabalho dos

professores de Matemática que contribua com suas práticas e desenvolvimento de saberes.

Assim sendo, essa pesquisa foi desenvolvida para melhor entender as atividades didáticas desenvolvidas em sala de aula, à luz da Teoria das Situações Didáticas, proposta pelo teórico Guy Brousseau (1986). Segundo Michele Artigue (1988, p. 23), a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas. A teoria das situações surgiu a partir do questionamento e crítica de uma série de tendências de influenciar o ensino da matemática. Perrin-Glorian e Bellemain (2016) apresentam seu contexto de surgimento:

A teoria das situações didáticas surgiu no contexto da renovação do ensino da matemática, inicia do nos anos 1960 em particular pelo trabalho do CIEAEM (Comissão Internacional para o estudo e aperfeiçoamento da educação matemática), que abordava a necessidade de reestruturar o ensino de matemática após a redefinição da própria matemática por matemáticos (PERRIN GLORIAN; BELLEMAIN, 2016, p. 8)

Considerado como pai da teoria das situações didáticas, Guy Brousseau (2004) buscou compreender como acontecem as relações entre alunos, professores e o saber em sala de aula, propondo situações que foram experimentadas e analisadas cientificamente. Acerca da metodologia, aponta Brousseau (2004):

A teoria das situações didáticas é uma abordagem e um método de pesquisa entre muitos outros, mas dá uma excelente base para o estudo do que eu chamo de micro didática, por referência à microeconomia. Des tina se a prever as condições em que as trocas entre uma instituição e um meio ou entre duas instituições dependerão de um determinado conhecimento (BROUSSEAU, 2004, p. 24).

Em síntese, pode-se concluir que o objetivo da teoria das situações didáticas consiste em evidenciar um processo de aprendizagem, tendo como base uma série de situações que se reproduzem, acarretando em mudanças de comportamentos dos alunos. Esta teoria traz reflexões da forma como podemos arquitetar e expor o conteúdo Matemático aos educandos, de maneira a se obter uma educação que tenha sentido e contexto para o estudante. Uma situação didática é estabelecida quando ocorrem relações pedagógicas entre a tríade professor, aluno e o conhecimento matemático em situação de aprendizagem, levando em consideração o meio. Nessa teoria se discute as metodologias em que um determinado conteúdo é apresentado aos alunos, sempre que o professor tem a intenção de proporcionar aos mesmos a

aprendizagem estruturada em uma sequência didática planejada, estabelecendo se, assim, um contrato didático.

Nesse acordo bilateral aluno e professor são pautadas as relações que vigoram na relação didática entre os mesmos, criando condições favoráveis para a aprendizagem. Sendo assim, adotar a teoria das situações didáticas nesta pesquisa teve por objetivo contribuir com o ensino por parte dos discentes de graduação em licenciatura em matemática na aprendizagem através da função logarítmica.

4. ANÁLISES PRÉVIAS

4.1 Relatos de Trabalhos Anteriores

O tema logaritmo tem sido pesquisado sob diferentes perspectivas tais como: propostas de ensino com a criação e desenvolvimento de atividades; abordagem em livros didáticos; situações de aprendizagem nas quais os conceitos foram elaborados pelos estudantes com a construção de materiais e investigações que privilegiaram a história da matemática.

Com relação às propostas e sobre a abordagem nos livros didáticos, destacam-se os trabalhos de Lima (2008), Queiroz (2013), Rossi (2010), Ferreira (2006), Silvio Tadeu Teles da Silva (2013), Rodrigo Sychocki da Silva (2012), Saddo Ag Almouloud (2011). O artigo de Lima (2008) apresentou alguns itens que foram parte de sua dissertação de mestrado. O tema funções logarítmicas foi desenvolvido por três professores e suas respectivas turmas de alunos com o acompanhamento e observação do pesquisador, e teve como objetivo analisar quais os aspectos didáticos considerados pelo professor ao abordar o tema logaritmo, como poderiam ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem que, explorassem contextos do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática, e que contemplassem uma trajetória construtivista, visando um melhor caminho para a aprendizagem.

A pesquisa de Queiroz (2013) apresentou um recorte sobre como o tópico de logaritmos está inserido em alguns livros didáticos. A análise foi realizada a partir da reflexão sobre a resolução de problemas com eixo articulador do ensino da matemática. Esse estudo, teve o propósito de revelar qual a abordagem está sendo dada ao ensino médio e, se está em consonância com os atuais paradigmas do ensino de matemática.

O pesquisador mostrou que, nos exemplares indicados, os autores apresentavam problemas na abordagem do conteúdo, com uma apresentação formalista clássica. As atuais propostas para este ensino, propõem abordagens contextualizadas, fundamentadas na resolução de problemas, como um meio de superar os métodos tradicionais que focam exercícios repetitivos e sem significados. A abordagem dos logaritmos fundamentada nessas propostas, ainda não se concretizou nos exemplares pesquisados. Tal fato, pode se constituir num obstáculo à aprendizagem de uma ciência que tem a resolução de problemas como o elemento responsável pelo desenvolvimento de suas ideias.

Os logaritmos foram desenvolvidos para facilitar os cálculos extensos inerentes à astronomia e navegação, no século XVI e, ainda hoje, são utilizados na teoria da informação. Com o intuito de contribuir para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da matemática, o estudo foi realizado verificando se a abordagem deste conteúdo está em consonância com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, PCN (1998) e as tendências da educação matemática, que recomendam uma apresentação contextualizada através de resolução de problemas.

Na dissertação de Rossi (2010) a finalidade foi descrever o trabalho realizado na elaboração de material didático que tornasse o ensino de logaritmos mais significativo para os estudantes do Ensino Médio. Para isso foi desenvolvida uma sequência didática com o objetivo de facilitar a construção do conceito de logaritmo e de função logarítmica, incluindo formas de representação, estudos de propriedades e aplicações a fenômenos abordados por outras ciências. Para organizar essa pesquisa foram utilizados os princípios da Engenharia Didática, mais especificamente na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau. Para este, as situações didáticas devem produzir modificações no comportamento dos estudantes pela aquisição dos conhecimentos e de uma aprendizagem significativa através do meio que deve ser criado e organizado pelo professor. A sequência foi aplicada para 42 estudantes de duas turmas de primeira série do Ensino Médio, em uma escola da cidade de Araraquara, SP. A autora considera que os objetivos foram alcançados, pois as atividades foram desenvolvidas com sucesso e a análise a posteriori mostrou que a sequência aplicada contribuiu para o aprendizado dos estudantes.

Na dissertação de Ferreira (UNIFRA, 2006), propõe verificar a utilização de uma sequência didática, no ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática. O objetivo é a utilização de uma sequência didática privilegiando situações reais e o surgimento dos logaritmos, para contribuir com a construção do conceito de logaritmos. A metodologia utilizada segue os princípios da Engenharia Didática, a qual se justifica pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa e cuja finalidade é analisar as situações didáticas, objeto de estudo da educação matemática. A sequência foi aplicada no Colégio Militar de Santa Maria – RS para 27 estudantes organizados em trios. Ela foi elaborada a partir de uma avaliação diagnóstica feita com os estudantes.

A sequência tem atividades relacionadas com a retomada da função exponencial e construção do modelo matemático de cada situação descrita nos

diversos problemas apresentados; traz também a relação entre o gráfico da exponencial e de sua inversa, a função logarítmica; relação entre as propriedades dessas duas funções e a utilização dessas propriedades na resolução de problemas; construção de escalas logarítmicas e utilização de software para construção de gráficos.

De acordo com Ferreira, com a aplicação da sequência didática os estudantes mostraram uma melhor compreensão do conceito de logaritmo. Com isso considerou atingido o objetivo da pesquisa.

A dissertação de Silvio Tadeu Teles da Silva (2013), apresentou os resultados de um estudo que teve como objetivo avaliar a potencialidade do ensino das funções exponencial e logarítmica por meio de atividades. A metodologia de pesquisa foi a engenharia didática. A partir das informações obtidas das análises preliminares, foi elaborada uma sequência didática com quinze atividades, jogos e testes diagnósticos que foram analisados a priori, aplicados a 21 alunos do 1º ano de uma escola pública estadual da cidade de Belém do Pará, sendo desenvolvidos em dez sessões. As análises a posteriori evidenciaram que é possível os alunos descobrirem modelos matemáticos associados às Funções Exponencial e Logarítmica sem que o professor os apresente e que o desempenho dos alunos na realização das leituras e construções gráficas foi mais eficiente que o desempenho quando ensinado da maneira clássica. A comparação entre os resultados dos pré e pós-testes indicou que ocorreu aumento significativo do percentual de acerto. O mesmo ocorreu da comparação entre os resultados do teste aplicado aos alunos egressos do 1º ano que recebeu ensino pautado na exposição oral seguida de exemplos e exercícios. Tais resultados permitiram concluir que a sequência didática proposta favoreceu o aprendizado e contribuiu para que habilidades úteis ao desenvolvimento dos alunos fossem despertadas e/ou aprimoradas, implicando, no melhor desempenho dos alunos participantes da pesquisa.

No artigo de Rodrigo Sychocki da Silva (2012), a intenção foi apresentar o desenvolvimento de uma pesquisa em nível de mestrado, envolvendo funções, funções exponenciais e logarítmicas, através do uso de situações problema em sala de aula. A proposta parte da hipótese que a investigação dos problemas cotidianos que são modelados, envolvendo o estudo dessas funções, proporciona aos alunos melhor compreensão dos conceitos e definições matemáticas envolvidos. A partir da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e da teoria das Representações Semióticas de Duval, foram buscados os subsídios necessários para analisar as

sequências didáticas proposta dos alunos e, com isso, justificar a escolha metodológica para aplicação das atividades.

No artigo de Saddo Ag Almouloud, as transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo, o autor propõe que para ensinar uma noção científica em dado nível de escolaridade, é necessário que ela seja acessível aos alunos. Portanto, precisa-se transformá-la a partir de um saber de referência que é, em geral, o saber dos especialistas da disciplina (o saber sábio). No seu trabalho, são apresentadas ferramentas teóricas da didática da matemática para estudar as transformações do saber científico em saber ensinado. É tomado como objeto matemático de estudo o logaritmo. A função logaritmo é uma das noções mais importantes das que integram o currículo do Ensino Médio. Ela tem várias aplicações em diversas áreas de conhecimento tais como: física, química, economia, astronomia, o que justifica sua manutenção nas propostas curriculares de vários países.

A seguir, são caracterizadas as pesquisas que trataram do conceito de logaritmo ou da construção desse conceito utilizando história da matemática, com ênfase nas investigações de Ferreira e Bisognin (2007), Cergoli (2017), Vidigal (2014), Adriana Salete (2021)

O trabalho de Ferreira e Bisognin (2007) descreveu os resultados de uma pesquisa que teve como propósito verificar a eficácia da utilização de uma sequência didática, para o estudo de logaritmos, partindo de problemas relacionados com o cotidiano dos estudantes e com o propósito de auxiliá-los a construir seus próprios conhecimentos. Utilizou-se a teoria das situações didáticas de Brousseau. Essa teoria preocupa-se com o ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático. Nessa pesquisa, priorizaram-se as investigações que visavam à análise dos processos de aprendizagem do conceito de logaritmo. Dessa forma, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito, foram propostas alternativas para minimizar tais dificuldades, e desenvolvida uma sequência didática sobre este conteúdo, aplicando-a em sala de aula.

O trabalho de Cergoli (2017) apresentou duas propostas de sequências didáticas para o ensino de logaritmo. Uma delas foi destinada ao aperfeiçoamento de professores de Matemática e a outra, para estudantes do Ensino Médio. Estas foram desenvolvidas com base em pesquisas realizadas sobre o processo de investigação matemática por João Pedro da Ponte. O qual mostra que no processo investigativo o aluno é colocado diante de alguns desafios, sendo provocado a reconhecer padrões,

transitar entre diferentes formas de representação de modo a ter um aprendizado sólido e eficaz.

Tais investigações são coordenadas e supervisionadas pelo professor, cujo papel é fundamental no processo de construção do conhecimento. As atividades para os professores foram aplicadas no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, USP Já para os alunos foram aplicadas em uma escola da rede estadual situada no município de São Paulo, SP. As propostas didáticas tiveram como ponto de partida o resgate das ideias originais da criação do conceito de logaritmo por meio da observação das propriedades comuns a várias tabelas, cada uma contendo uma progressão geométrica ao lado de uma progressão aritmética. Tais propriedades caracterizam o que virá a ser definido como logaritmo. A introdução ao conceito de logaritmo que diferente da usual, que se baseia na solução de uma equação exponencial, fez com que os participantes se propusessem a ensinar e aprender o assunto de forma diferenciada, privilegiando a investigação matemática.

As sequências didáticas têm como ponto de partida a observação das propriedades comuns a várias tabelas, cada uma contendo uma progressão geométrica ao lado de uma progressão aritmética. Tais propriedades caracterizam o que virá a ser definido como logaritmo. Essa introdução ao conceito de logaritmo é diferente da usual, que se baseia na solução de uma equação exponencial.

O processo de investigação matemática visa a um aprendizado eficaz por parte do aluno, proporcionado por atividades que conduzam o aluno, de forma gradual, a fazer descobertas, formular conjecturas e buscar validações. Tais investigações são coordenadas e supervisionadas pelo professor, cujo papel é fundamental no processo de construção do conhecimento.

A dissertação de Vidigal (2014) propôs analisar a utilização de uma sequência de atividades que incentivasse a investigação matemática e contribuísse para a ressignificação do conceito de logaritmo bem como para a compreensão de algumas aplicações por parte dos estudantes. O autor apontou que muitas das dificuldades apresentadas nesse conteúdo estão relacionadas a não aquisição de habilidades prévias como, por exemplo: dificuldades com potenciações; a dificuldade e/ou defasagem no estudo da função exponencial, dúvidas referentes ao conceito de operações inversas e defasagem de conteúdos da álgebra do Ensino Fundamental. Dessa forma, a pesquisa realizada teve a intenção de contribuir para a aprendizagem

de logaritmo, tendo como foco a resolução de problemas com o apoio das ideias do matemático George Polya.

A estratégia de trabalho em dupla, baseada na proposta de investigação matemática de Ponte, mostrou-se um facilitador de aprendizagem, permitindo ao aluno que ao revisar um conteúdo já estudado, obtivesse uma melhor compreensão do mesmo. Neste trabalho, foram analisadas as produções de doze duplas de alunos da disciplina de Cálculo I de diversos cursos de engenharia de uma instituição de ensino superior de Belo Horizonte, MG. O produto final é um caderno com uma sequência de seis atividades que visa proporcionar ao aluno a reconstrução do conceito de logaritmo de forma interdisciplinar, com foco nas principais propriedades dos logaritmos a serem utilizadas no decorrer de um curso de engenharia, bem como na utilização da calculadora para o cálculo de logaritmos.

O trabalho de Adriana Salete (2021), sugeriu que os logaritmos ocupam lugar de destaque na história da matemática como algoritmo de cálculo e como função. Atualmente, são aplicados em diferentes áreas da ciência, por isso, têm importância fundamental na formação dos estudantes. Ensinar logaritmos, no entanto, tem sido um grande desafio, devido às dificuldades de aprendizagem. A implementação de atividades de ensino mecânicas, sem explorar o raciocínio dos estudantes, prioriza penas a resolução de equações com uma quantidade excessiva de manipulações, em detrimento da conceituação, como também de aplicações.

Nesse sentido, o problema dessa pesquisa é investigar como os alunos elaboram os significados do conceito e das propriedades de logaritmo e quais são os obstáculos de aprendizagem presentes nesse processo. Uma sequência de atividades foi elaborada e aplicada no modo on-line em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. O conteúdo das manifestações escritas, na forma de arquivos digitais e as orais registradas em diário de bordo, foram analisados qualitativamente, mediante um quadro de categorias elaborado com base na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Teoria dos Obstáculos à Aprendizagem de David Ausubel e Jean-Pierre Astolfi, respectivamente. Foram identificados obstáculos psicológicos, tais como problemas de atenção, percepção, concentração e epistemológicos, associados à compreensão do significado de subsunçores necessários ao conceito de logaritmo, tais como potenciação, álgebra do ensino fundamental, equações, função exponencial e a consequente dificuldade na interpretação de enunciados. A superação desses obstáculos ocorreu com a mediação da professora, em ações de reflexão sobre os registros escritos e falados, recuperando os significados através de organizadores

prévios e com isso, qualificando os subsunçores, os quais viabilizaram a construção do conceito e das propriedades dos logaritmos.

Após a leitura e reflexão de todos os trabalhos citados neste capítulo, percebe-se que as pesquisas sobre o ensino de conteúdos matemáticos que se diferenciaram do método tradicional, apresentaram resultados expressivos e demonstraram uma melhora no desenvolvimento do ensino e aprendizagem.

4.2 Taxonomia de Bloom

A Taxonomia de Bloom é definida como um instrumento “cuja finalidade é auxiliar a identificação e a declaração dos objetivos ligados ao desenvolvimento cognitivo” (FERRAZ; BELHOT, 2010, p. 421). Ela é dividida em três categorias de domínio: cognitivo, afetivo e psicomotor. Apesar de pesquisadores discutirem os três domínios, o domínio cognitivo é o mais utilizado e conhecido (FERRAZ; BELHOT, 2010). Considerando a categoria de domínio cognitivo, o modelo original proposto por Bloom é resumidamente descrito na Figura 11.

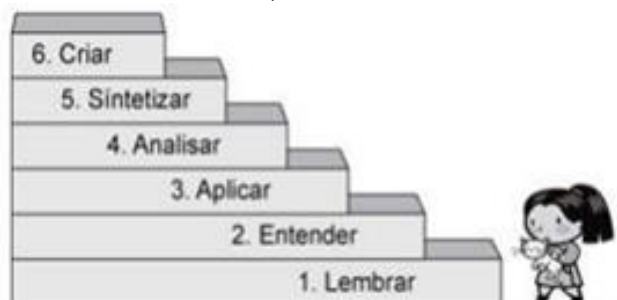
Figura 11 – Categorias do domínio cognitivo proposto por Bloom, Englehart, Furst, Hill e Krathwolk, que ficou conhecido como Taxonomia de Bloom.



Fonte: Ferraz e Belhot (2010, p. 424)

Entretanto, em 2001 houve uma revisão desse modelo - novas descobertas na área de ensino e aprendizagem contribuíram para essa revisão. A figura 12 descreve essas mudanças.

Figura 12 – Categorização atual da Taxonomia de Bloom proposta por Anderson, Krathwohl e Airasian, no ano de 2001.



Fonte: Ferraz e Belhot (2010, p. 427)

A partir da literatura da Taxonomia de Bloom foi elaborado dois exemplos onde foram classificadas as questões presentes nessa pesquisa. Note que, com essa classificação, “lembrar”, “sintetizar” e “criar”, não se enquadra nas características dos dois exemplos mencionados, mas se enquadrou na categoria “aplicar”.

- **Exemplo 1: CALCULAR** o valor de um logaritmo utilizando a definição de logaritmos, propriedades operatórias e valores aproximados de logaritmos dados. Ver o quadro 1 abaixo, com a demonstração do exercício 1.

Dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,85$, determine: $\log 14$

$\log 14 = \log(2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 = 0,30 + 0,85 = 1,15$

Quadro 1 – Demonstração estratégica do exercício 1

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer qual das propriedades dos logaritmos deve utilizar e executá-las de forma correta: $\log_b(m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$	Utilizar informações dadas pelo exercício de forma apropriada: $\log 14 = \log 2 \cdot 7$ $= \log 2 + \log 7 =$ $= 0,30 + 0,85$ Nesse item, é possível a utilização da fatoração, para após isso, utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos para calcular o valor do logaritmo solicitado.	Determinar o valor numérico aproximado do logaritmo, utilizando terminologia e notação apropriadas: $\log 14 = 1,15$

- **Exemplo 2: ANALISAR** o valor de uma variável encontrada a partir de um sistema de inequações de primeira ordem, formado a partir das condições de existência do logaritmo para a base e para o logaritmando. Ver o quadro 2, com a demonstração do exercício 2.

Determine o conjunto dos valores reais de x para que seja possível definir:

$$\log_x(x - 3)$$

$$\text{Condição 1: } x > 0$$

$$\text{Condição 2: } x \neq 1$$

$$\text{Condição 3: } x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

$$\{x \in R/x > 3\}$$

Quadro 2 – Demonstração estratégica do exercício 2

Conhecimento matemático	Estratégias, processos e modos de pensar	Comunicação matemática
Reconhecer quais são as condições de existência dos logaritmos: $\log_a N$ existe quando e somente quando $N > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.	Identificar qual condição de existência é usada em cada caso, usar dados relevantes para resolução e indicar a estratégia apropriada para resolução: Condição 1: $x > 0$ Condição 2: $x \neq 1$ Condição 3: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$ Além do uso das propriedades dos logaritmos, é necessário que os estudantes saibam realizar cálculos de inequação.	Usar terminologia e notação apropriadas e a possibilidade de utilizar diagramas ou representações como suporte para seus argumentos: $\{x \in R/x > 3\}$ Nesse item são várias as possibilidades de comunicar a resposta: pode ser com uma reta numérica ou com a notação de intervalos com colchetes, por exemplo.

4.3 Funções Logarítmica

Para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: R \rightarrow R^+, f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre R e R , crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a: R^+ \rightarrow R$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o logaritmo de x na base a . Por definição de função inversa, tem-se $a^{\log_a x} = x$ e $\log(a^x) = x$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x , ou seja, $y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$.

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$, ou seja $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo. Entretanto, a função logaritmos continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações. (Matemática do Ensino Médio, Volume 1, p:191, SBM)

Essa importância é permanente, jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

A função $\log_a: R^+ \rightarrow R$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \rightarrow a^x$ somente assume valores positivos.

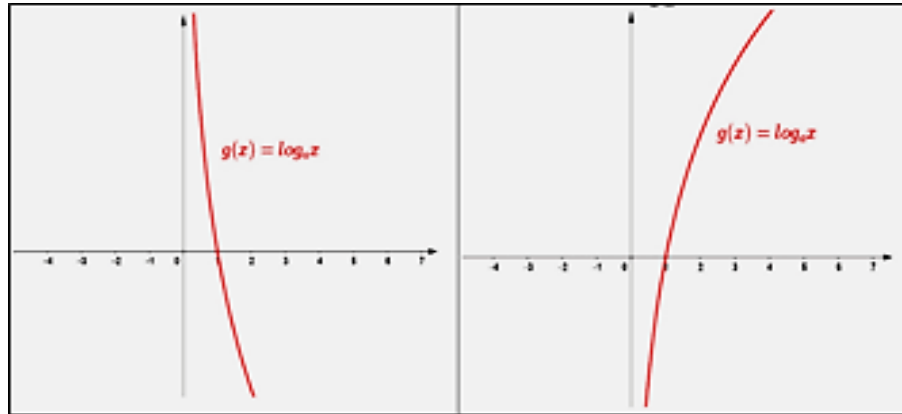
É possível verificar os próximos teoremas, onde cada resultado caracteriza uma propriedade que envolve a função logarítmica. O resultado do primeiro teorema possibilita demonstrar os demais resultados considerando como hipótese a função $g(x) = \log x$ em vez de $g(x) = \log_a x$ com uma base arbitrária a .

Teorema 1: Dadas duas funções logarítmicas $K, N: R^+ \rightarrow R$ existe uma constante real $c > 0$ tal que $N(x) = c \cdot K(x)$ para qualquer $x \in R^+$.

• Principais características

A partir, da definição de Dante (2010), podemos pontuar que a definição da função logarítmica, possui duas características principais que estão representadas na figura 13 a seguir.

Figura 13 - demonstração das características da função logarítmica



Fonte: Adaptação do autor

Função logarítmica $0 < a < 1$ Domínio = $\mathbb{R}^+$ Contradomínio = $\mathbb{R}$ g é injectiva

$$g(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$$

 g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^*$

A função é estritamente decrescente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

 $x = 0$ é assíntota vertical**Função Logarítmica $a > 1$** Domínio = $\mathbb{R}^+$ Contradomínio = $\mathbb{R}$ g é injectiva

$$g(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$$

 g é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$

A função é estritamente crescente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

 $x = 0$ é assíntota vertical

- Elementos da Teoria dos Logaritmos**

Geralmente, os logaritmos podem ser calculados usando a série de potências ou a média aritmética-geométrica, ou serem retirados de uma tabela de logaritmos pré-calculada, a qual oferece uma precisão definida.

Por se mostrar um método eficaz, as aplicações dos logaritmos se dão dentro e fora da matemática como em escalas logarítmicas, na psicologia humana, em probabilidade e estatística, na música, entre outras.

- Definição de logaritmo de um número**

Considere a seguinte questão. A que número x se deve elevar o número 2 para se obter 8?

A resposta para esta questão pode ser obtida por através de uma simples conta, ou seja, $2^x = 8$ ou equivalentemente $2^x = 2^3$ e, portanto, a resposta é $x = 3$. Esse valor 3 denomina-se logaritmo do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$.

- **Definição de logaritmo de um número**

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \neq 1$. O logaritmo de um número real $b > 0$ na base a é o número x tal que $a^x = b$. O número b é chamado de logaritmando, a é a base e x é o logaritmo.

A notação utilizada para representar o logaritmo de b na base a é dada por:

$$\log_a(b) = x \leftrightarrow a^x = b$$

- **Notações particulares**

Se a base a for igual a **10**, a mesma não aparece na notação: $\log_{10}(b) = \log(b)$

Se a base for o número e , a notação utilizada é a seguinte: $\log_e(b) = \log_{\ln}(b)$.

- **Propriedades dos logaritmos**

Demonstração da Propriedade de Logaritmo $\log_a a = 1$. Todo logaritmo de base e logaritmando iguais tem como resultado uma unidade, isto é

$$\log_a a = 1, \text{ para } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

As condições $a > 0$ e $a \neq 1$ vêm da definição de logaritmo. Utilizar a definição de logaritmo como expoente, isto é,

$$\log_x M = y \leftrightarrow x^y = M$$

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$, então

$$\log_a a = b \leftrightarrow a^b = a \leftrightarrow a^b = a^1 \leftrightarrow b = 1$$

E como b é o resultado de um logaritmo de base e logaritmando iguais a um mesmo número real arbitrário a , a propriedade vale para todos os reais positivos.

Demonstração da Propriedade de Logaritmo $\log_x y^n = n \cdot \log_x y$. O cálculo do logaritmo de logaritmando escrito em forma de potência é equivalente ao produto entre o expoente do logaritmando inicial e o logaritmo de mesma base do logaritmo inicial com logaritmando igual à base do logaritmando inicial, isto é

$$\log_x y^n = n \cdot \log_x y, \text{ para } y > 0, x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

Demonstração:

As condições $y > 0, x > 0$ e $x \neq 1$ vêm da definição de logaritmo. Fazendo pela definição de logaritmo como expoente, temos:

$$x^p = y \quad (1)$$

Elevando ambos os membros de (1) ao expoente n , obtemos:

$$(x^p)^n = y^n \leftrightarrow x^{pn} = y^n \quad (2)$$

Aplicando a definição de logaritmo como expoente em (2), vêm

$$\log_x y^n = n.p(3)$$

Substituindo $p = \log_x y$ em (3), provamos que

$$\log_x y^n = n.\log_x y$$

Demonstração da Propriedade de Logaritmo. O logaritmo de logaritmando escrito em forma de potência, com a base dessa potência igual à base do logaritmo, tem como resultado o expoente do logaritmando, isto é

$$\log_b b^n = n, \text{ para } b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Demonstração:

As condições $b > 0$ e $b \neq 1$ vêm da definição de logaritmo. Pela propriedade imediatamente anterior, temos que

$$\log_b b^n = n.\log_b b$$

Mas $\log_b b = 1$ (propriedade demonstrada anteriormente)

Então $\log_b b^n = n.1 = n$, como queríamos demonstrar.

Demonstração da Propriedade de Logaritmo. O cálculo do logaritmo de logaritmando escrito em forma de produto de dois termos é equivalente à soma de dois logaritmos na mesma base inicial, o primeiro com logaritmando igual a um dos termos do logaritmando inicial e o segundo com logaritmando igual ao outro termo do logaritmando inicial, isto é

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y, \text{ para } x > 0, y > 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Demonstração:

As condições $x > 0, y > 0, b > 0$ e $b \neq 1$ vêm da definição de logaritmo.

Fazendo $\log_b x = p$ e $\log_b y = q$, pela definição de logaritmo como expoente, temos

$$b^p = x \text{ e } b^q = y$$

$$\text{Então } b^p \cdot b^q = xy \leftrightarrow b^{p+q} = xy \quad (1)$$

Aplicando a definição de logaritmo como expoente em (1), obtemos

$$\log_b xy = p + q \quad (2)$$

Substituindo $p = \log_b x$ e $q = \log_b y$ em (2), provamos que

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

Demonstração da Propriedade de Logaritmo. O cálculo do logaritmo de logaritmando escrito em forma de quociente de dois termos é equivalente à diferença de dois logaritmos na mesma base inicial, o minuendo com logaritmando igual ao

dividendo do logaritmando inicial e o subtraendo com logaritmando igual ao divisor do logaritmando inicial, isto é

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \text{ para } x > 0, y > 0, y \neq 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Demonstração:

As condições $x > 0, y > 0, b > 0$ e $b \neq 1$ vêm da definição de logaritmo. Fazendo $\log_b x = p$ e $\log_b y = q$, pela definição de logaritmo como expoente, temos:

$$b^p = x \text{ e } b^q = y$$

$$\text{Então } \frac{b^p}{b^q} = \frac{x}{y} \leftrightarrow b^{p-q} = \frac{x}{y} \quad (1)$$

Aplicando a definição de logaritmo como expoente em (1), obtemos

$$\log_b \frac{x}{y} = p - q \quad (2)$$

Substituindo $p = \log_b x$ e $q = \log_b y$ em (2), provamos que

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Demonstração da Propriedade de Logaritmo. Todo logaritmo é equivalente à razão entre dois logaritmos de uma mesma base arbitrária: o antecedente igual ao logaritmo na base arbitrária escolhida e logaritmando igual ao logaritmando inicial e o consequente igual ao logaritmo de mesma base arbitrária e logaritmando igual à base do logaritmo inicial, isto é

$$\log_x y = \frac{\log_c y}{\log_c x}, \text{ para } y > 0, x > 0, c > 0, x \neq 1 \text{ e } c \neq 1$$

Demonstração:

As condições $y > 0, x > 0, c > 0, x \neq 1$ e $c \neq 1$ vêm da definição de logaritmo. Fazendo $\log_x y = p, \log_c y = q$ e $\log_c x = r$, pela definição de logaritmo como expoente, temos:

$$x^p = y, c^q = y \text{ e } c^r = x$$

Pela propriedade transitiva da igualdade: $c^q = y$ e $x^p = y \leftrightarrow c^q = x^p$ (1)

Substituindo $x = c^r$ em (1); obtemos: $c^q = x^p = (c^r)^p = c^{rp}$ (2)

De (2), $c^q = c^{rp} \leftrightarrow q = rp$ (como $c \neq 0$ e $c \neq 1$, pela igualdade de potências de mesma base)

Podemos então escrever que $p = \frac{q}{r}$ e substituindo

$$p = \log_x y, q = \log_c y \text{ e } r = \log_c x \text{ nesta identidade, provamos que } \log_x y = \frac{\log_c y}{\log_c x}$$

4.4. Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), é um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes.

Segundo Michele Artigue (1988), a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas. Desse modo, a Engenharia Didática é uma metodologia que, segundo Artigue (1988, p. 236), visa “etiquetar uma forma do trabalho didático”. Esta etiquetagem é um meio para abordar as questões sobre as relações entre a investigação e a ação, no sistema de ensino, e sobre o papel que as realizações didáticas poderiam desempenhar em sala de aula, tendo em vista as metodologias da investigação didática.

Segundo Brousseau (2007, p. 21), a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional”. Gerenciar os dispositivos (peças de um jogo, um problema, um experimento, um exercício) como parte da situação didática visando à aprendizagem do aluno é o principal desafio do pesquisador/professor que pretende estudar os fenômenos de aprendizagem oriundos das ações em sala de aula.

A teoria proposta por Brousseau considera que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação que a caracteriza.

Pais (2002) destaca que:

A Didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental de prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2002, p.157).

Silva (2015) ressalta que a teoria é considerada como um instrumento científico e que o foco central é a situação didática, onde ocorre o processo de interação entre alunos, professores, o meio e o saber matemático, favorecendo a aprendizagem.

Para Brousseau (1986):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos (BROUSSEAU, apud TEIXEIRA, PASSOS, 2013, P. 157).

Brousseau (1986) desenvolveu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática:

- **Situação de ação:** a situação onde o aluno realiza procedimentos mais imediatos para resolver um problema sem se preocupar com a teoria utilizada. Trata-se de um conhecimento mais experimental e intuitivo, pois o aluno consegue encontrar a solução do problema, mas não consegue explicitar os argumentos que ele utilizou na sua elaboração. Nesta situação predomina o aspecto experimental. O aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o milieu, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
- **Situação de formulação:** a situação onde o aluno utiliza algum esquema de natureza teórica na resolução de um problema, uma estratégia mais elaborada, sem, contudo, se preocupar com a validade de suas proposições. Nessa situação o aluno explicita os procedimentos realizados, mas não existe a intenção de julgar a validade do conhecimento utilizado. Ocorre troca de informação entre o aluno e o milieu, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar;
- **Situação de validação:** a situação em que o aluno utiliza o saber já elaborado com a finalidade de realizar demonstrações e provas essencialmente teóricas para o

problema proposto. Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador.

- **Situação de institucionalização:** a situação em que se estabelece convenção social relativa ao conhecimento produzido. Nesta situação, o professor tenta auxiliar o aluno a proceder à passagem do conhecimento do plano individual e particular para a dimensão histórica e cultural do saber científico. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. Há, portanto, uma real aprendizagem, reconhecida pelo professor. Brousseau (2008, p. 21) pondera que o papel da institucionalização é “prover sentido de um saber”.

O foco sobre a Teoria das Situações Didáticas deve privilegiar os procedimentos adotados dentro das situações de devolução, de ação, de formulação, de validação e, finalmente, de institucionalização. O professor, obedecendo àqueles procedimentos, não fornece, ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. O aluno pode, então, desenvolver novos saberes com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio.

4.5. A Estruturação do Milieu

Para Almouloud (2007), a situação adidática é a parte essencial da situação didática, em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas é imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a estas condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. Esta noção da TSD, introduzida por Guy Brousseau, e chamada de estruturação do milieu, garante que o aluno aprende adaptando-se a um (meio) que é uma fonte de contradições, dificuldades, desequilíbrio, de uma forma um pouco semelhante como a humanidade tem feito. Segundo Brousseau (2002), este conhecimento é decorrente da adaptação do aluno,

manifestando-se por meio de novas respostas que fornecem evidências de aprendizagem.

O milieú é concebido e sustentado por uma intencionalidade didática. Um milieú sem intenções didáticas é insuficiente para induzir no aluno todo o conhecimento cultural que se deseja que ele adquira (BROUSSEAU, 2002). As interações entre o aluno e o milieú são descritos em termos de conceito teórico de situação didática, que modela a atividade do aluno de produção de conhecimento, independentemente da mediação do professor. Segundo Almouloud (2007 apud), a escolha de uma situação didática deve levar em consideração as possíveis posições de um sujeito à relação didática, sendo imprescindível identificar essas posições em relação a outras, assim como suas articulações.

De acordo com Almouloud:

Na TSD, o milieú é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o milieú adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão ao respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (AMOULOUD, p. 35, 2007).

Conforme Brousseau (apud TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 160): “um mecanismo deve ser disposto em ação para que uma pessoa ensine um conhecimento e controle a sua aquisição. Tal dispositivo compreende um milieú material: peças de um jogo, uma prova, um problema, uma ficha de preceitos e interações do aprendiz com aquele determinado mecanismo, nesse caso, o jogo propriamente dito”.

Sabendo disso, toda vez que um trabalho ou atividade forem escolhidos um dispositivo deve ser acionado para ajudar o aluno, pois esse dispositivo irá contribuir na resolução do problema, estruturando caminhos que levem ao resultado da atividade proposta.

Fazendo um comparativo temos a figura 14 a seguir:

Figura 14 – (A) Triângulo didático convencional e (B) Aprendizagem espontânea (milieú)



Fonte: Silva e Almouloud(2006)

O que temos na figura 11-A é o Triângulo didático convencional, onde contém a transposição didática como sendo um instrumento do conhecimento científico para o conhecimento escolar, assim como o sistema educativo que correspondem às estruturas sendo as instituições e/ou entidades públicas e privadas, onde nesse sentido em se tratando do educando que participa e frequenta determinado curso é o que condiz ao processo de ensinar e aprender.

Por outro lado, na figura 11-B, na Aprendizagem espontânea temos o milieu como já foi citado acima, como o meio de desafio no que corresponde o conhecimento, tão certo como a aprendizagem que se refere às experiências, competências, habilidades, comportamentos e valores adquiridos ou modificados com o resultado do estudo, temos também o aprendiz com a conotação de quem sempre está aprendendo e o conhecimento que é onde se concretiza com o perceber, com o compreender por meio da razão e da experiência.

Em toda estrutura de aprendizagem Brousseau propõe que há uma relação entre cada etapa, elas não são processos isolados, e sim cíclicos, ou seja, o aluno atinge níveis de aprendizagem durante a situação didática. Em sua teoria Brousseau (2008) também descreve sobre os tipos de contratos didáticos em sua teoria, que regula as relações e objetivos implícitos do professor perante a situação didática, nele contendo as responsabilidades de cada participante, as formas de avaliação e os compromissos implícitos ou não do aluno em relação ao professor e o conhecimento.

Almouloud (2007) comenta que o contrato didático não é composto apenas por regras de convívio ou lista de combinados, mas também, como um contrato pedagógico. O contrato didático seria referente ao processo de ensino e de aprendizagem, geralmente não escrito, mas formado por relações que o professor espera do aluno e das atitudes que o aluno espera do professor, de um modo geral, o que é explicitado em contrato didático são questões sobre avaliações e como as atividades serão feitas.

4.6. Teste de Sondagem: (TS)

Durante as aulas foi possível introduzir os pré-requisitos necessários da base para o conteúdo que estava sendo investigado. Foi realizado uma amostra de um teste de sondagem, com a finalidade de fazermos uma sondagem sobre os conhecimentos prévios dos alunos, no intuito de diagnosticar o nível de conhecimento referente ao conteúdo sobre logaritmos.

Com o intuito de identificar dificuldades dos alunos em relação a aprendizagem da função logarítmica, realizamos uma consulta por meio de questionários contendo perguntas referentes a informações sócios-culturais, e dez situações-problema envolvendo a temática de função logarítmica.

O teste de sondagem teve a duração de duas horas e foi solicitado aos alunos que respondessem às questões sempre justificando suas respostas. Os objetivos do teste eram analisar o nível de conhecimento que os alunos possuíam em relação ao conceito de logaritmos, verificar se os discentes reconheciam as diferentes propriedades dos logaritmos, bem como a sua equivalência fundamental e o seu campo de existência através do seu domínio no campo dos reais.

Esse teste foi respondido pelos 19 alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, turno noturno onde será aplicada a sequência em Conceição do Araguaia. A respeito sobre o conteúdo de logaritmos e da sua inversa a exponencial, quase 85% dos alunos não tinham estudado no Ensino Médio nenhum assunto a respeito dos logaritmos, haja visto que esses alunos são oriundos da zona rural da cidade de Conceição do Araguaia, apenas assuntos preliminares da sua função inversa.

A essa altura, espera-se que os alunos consigam resolver boa parte delas. Os que não forem possíveis de serem resolvidos, seja por dificuldade dos alunos, seja por esgotamento do tempo previsto, serão entregues aos alunos uma folha impressa com as atividades propostas.

Neste estudo desenvolvemos uma pesquisa diagnóstica, do tipo qualitativa, em que buscamos descrever os resultados obtidos com base na aplicação de um questionário, onde a metodologia aplicada foi a análise de dificuldades da função logarítmica. Para Rudio (2007, p.71) o objetivo da pesquisa descritiva é descobrir e observar fenômenos, tentando descrever, classificar e interpretá-los sem interferir nos fatos observados. Sendo assim, ele coloca a pesquisa diagnóstica como sendo parte da pesquisa descritiva.

Anexo ao questionário está o teste de sondagem com uma questão subjetiva e 7 situações-problema, das quais 5 dissertativas e 2 objetivas, de modo que os alunos justificassem com seus cálculos necessários.

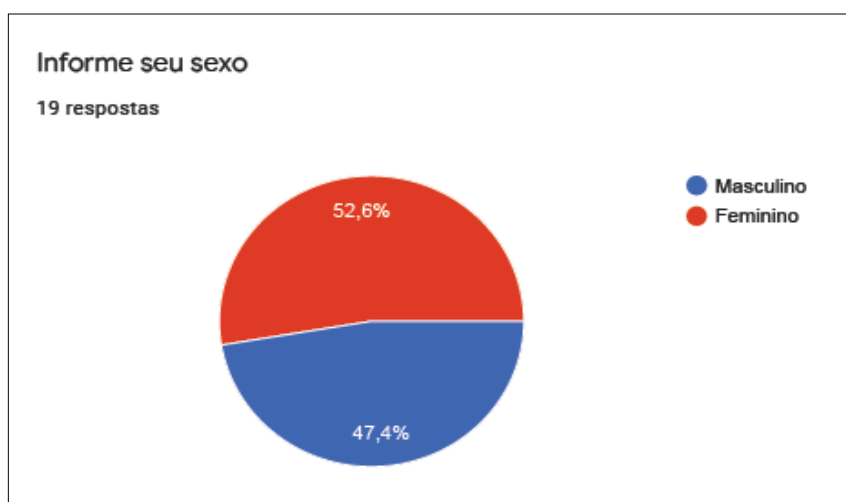
5. PESQUISA

A análise dos dados foi realizada em 2 etapas: 1) análise do questionário do diário de campo e 2) análise dos testes. Estas etapas estão interligadas, por isso, neste trabalho as observações, respostas e dados quantitativos.

5.1. Análise do questionário

No dia 06/06/2022 foi aplicado um questionário com a turma que era composta por 19 alunos, das observações registradas no diário de campo, percebeu-se que em nossa amostra, o sexo feminino era em maior número, obtendo 52,6%, enquanto o sexo masculino perfazia os 47,4% do total de alunos participantes (Figura 15). Em geral, a turma apresentou grande dificuldade de aprendizagem na matemática. Entre outras, dificuldade para interpretar situações-problema e defasagem na matemática do Ensino Médio. Apesar de apresentarem dificuldades, existiu um grupo que dominou o conteúdo, que se destacaram por gostar e conseguiram aprender de maneira efetiva a matemática. Dessa forma, buscou-se organizar os grupos de maneira que, os alunos que apresentavam facilidade no aprendizado, pudessem ajudar os que demonstravam maior dificuldade.

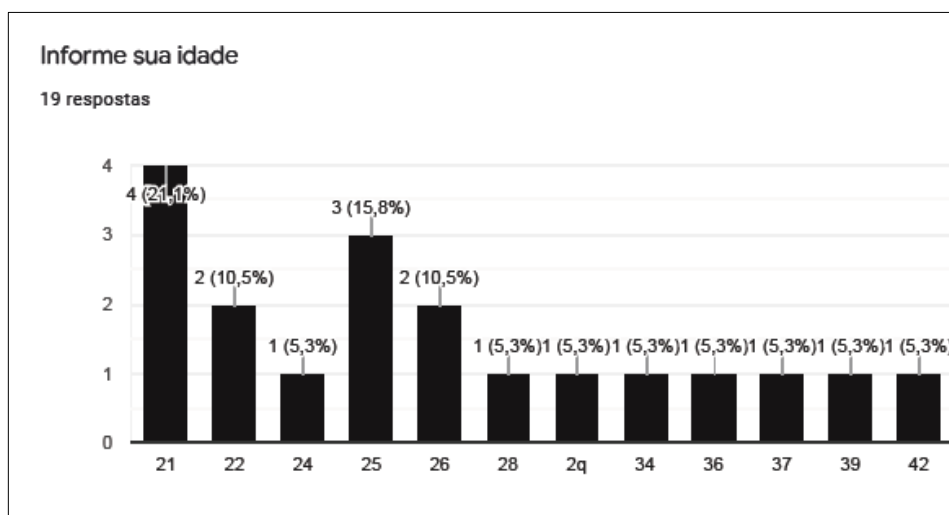
Figura 15 - Gráfico representando o sexo do estudante



Fonte: Autor (2022)

A figura 16, mostra a relação à faixa etária dos alunos, onde 10 alunos estão na faixa de 21 a 25 anos, com 52,7% correspondendo mais jovens da turma, enquanto 47,3%, ou seja, 9 dos alunos estão na faixa etária de 26 a 42 anos, correspondendo a um alunado mais maduro na idade, e que provavelmente já ficaram muito tempo sem entrar em contato com estudos.

Figura 16 - Gráfico da faixa etária dos alunos



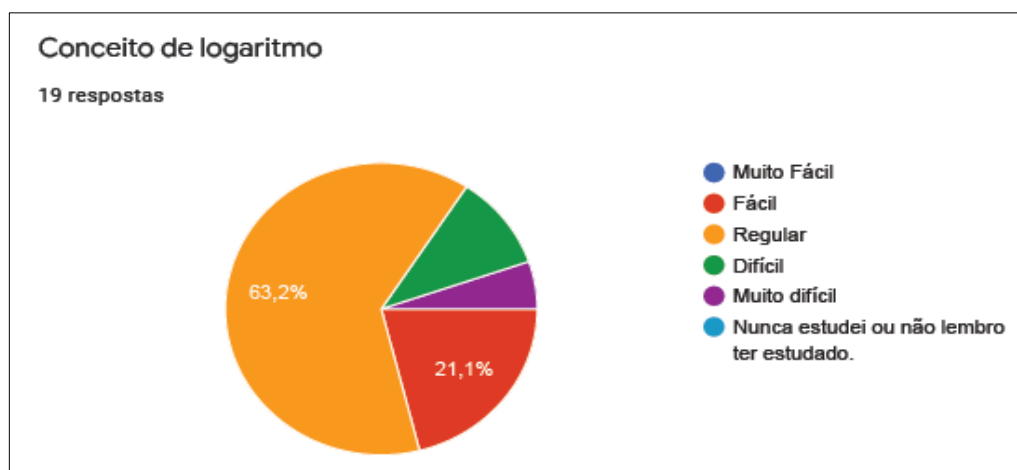
Fonte: Autor (2022)

Nesta seção apresentou-se a categorização e análise das respostas dos alunos ao questionário aplicado. Um dos instrumentos de coleta de dados utilizado neste estudo é o diário de campo que é:

“E um dos instrumentos mais ricos de coleta de informação. Tem como objetivo registrar de maneira detalhada e sistematizada, os acontecimentos, as rotinas e as conversas que contribuíam no processo de análise das ocorrências observadas” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.118).

Quando perguntado se sentiram algum tipo de dificuldade em relação ao conceito de logaritmo, a maioria dos alunos (63,2%) disseram que os seus conhecimentos eram regulares, apesar de um número significativo ter dito que era fácil, correspondendo a 21,1% (Figura 17). Esses dados mostram o que geralmente acontece nas aulas de matemática. De uma maneira geral, temos um grande número de alunos com pelo menos um tipo de dificuldade, neste caso o número foi até abaixo do esperado, se tratando do conteúdo de logaritmos.

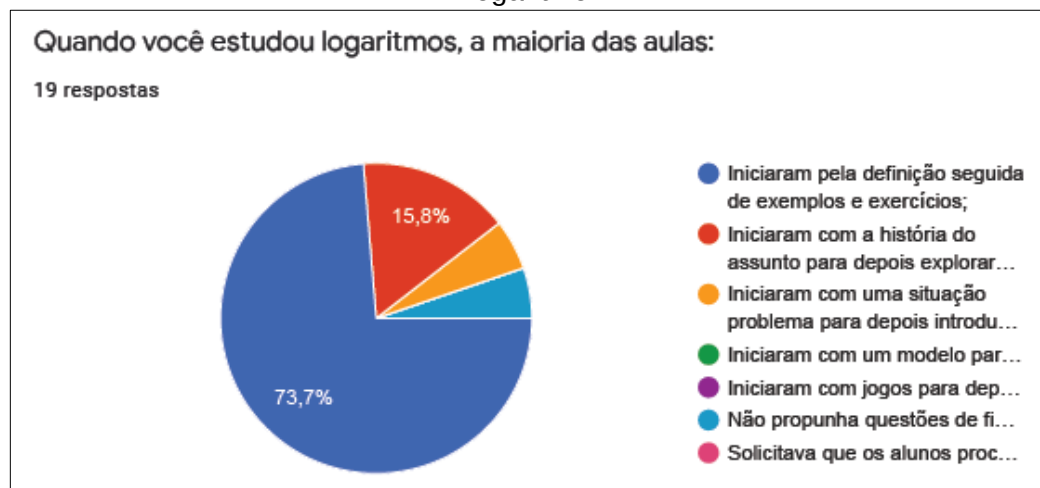
Figura 17 - Gráfico em relação as dificuldades dos alunos ao conceito de logaritmo.



Fonte: Autor (2022)

A figura 18 mostra a comparação da quantidade de atividades propostas na resolução de problemas. Com a quantidade de atividades realizadas habitualmente, pediu-se aos alunos para fazerem um comparativo, onde 73,7% dos alunos iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios, enquanto 15,8% iniciaram com a história do assunto, para depois explorar.

Figura 18 - Gráfico mostrando a comparação dos alunos com relação ao estudo do logaritmo.

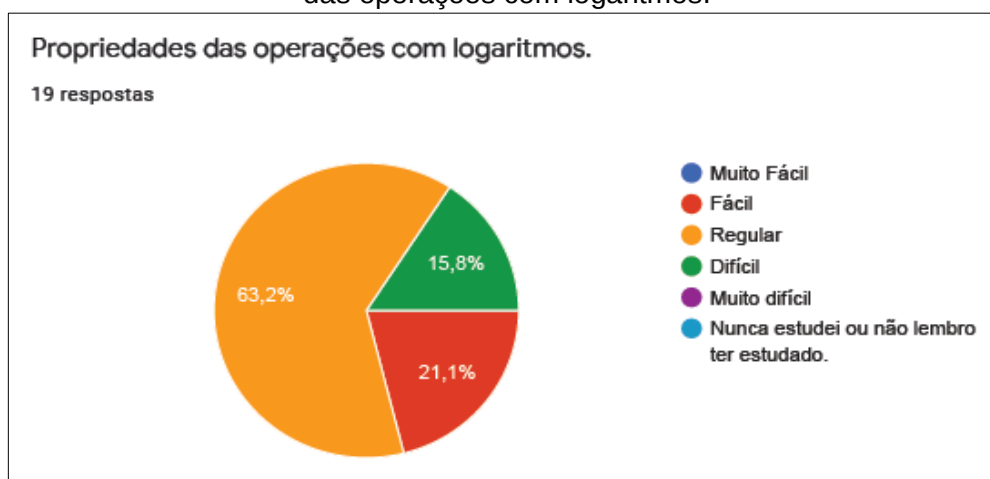


Fonte: Autor (2022)

Quando se perguntou aos alunos, se sentiram algum tipo de dificuldade em relação as propriedades das operações com logaritmos, a maioria dos alunos (63,2%) disseram que os seus conhecimentos eram regulares, apesar de um número significativo ter dito que era fácil (22,1%) e outro grupo terem dito que era difícil (15,8%).

Esses dados mostram o que geralmente acontece nas aulas de matemática (Figura 19).

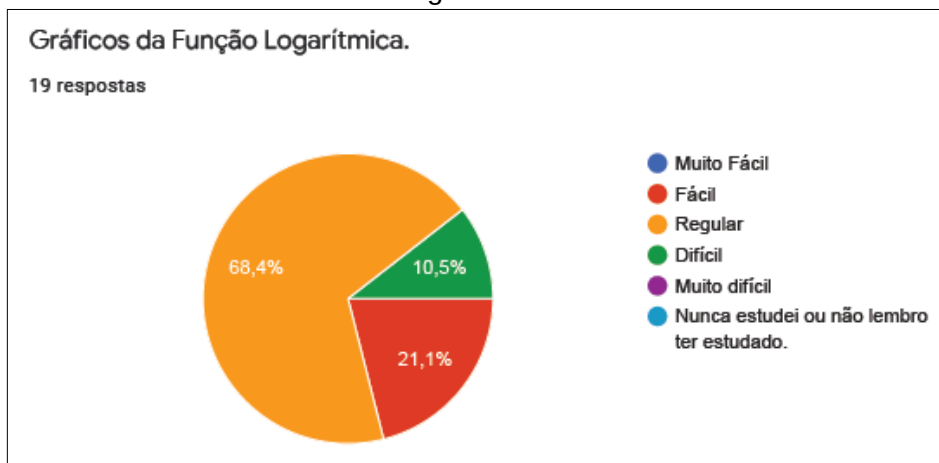
Figura 19 - Gráfico representando as dificuldades dos alunos com relação as propriedades das operações com logaritmos.



Fonte: Autor (2022)

A figura 20, representa a pergunta feita aos alunos sobre as dificuldades em relação aos gráficos da Função Logarítmica, percebe-se que na opinião dos alunos 68,4% foram regulares, enquanto 21,1% acharam fácil e 10,5% acharam difícil. É comum os alunos apresentarem dificuldade em interpretar gráficos, segundo Dante (2010) os alunos têm dificuldades em distinguir o significado de palavras de uso corrente e seus significados matemáticos.

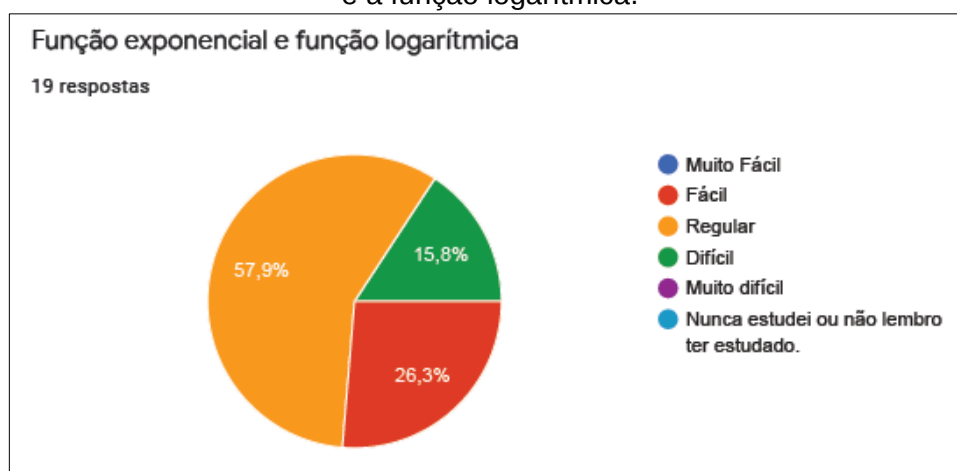
Figura 20 - Relação das dificuldades dos alunos em interpretar gráficos da função logarítmica.



Fonte: Autor (2022)

Uma das perguntas solicitava que, os alunos destacassem sobre a Função exponencial e função logarítmica, a maioria dos alunos (57,95) disseram que os seus conhecimentos eram regulares, enquanto 26,3% confirmaram que era fácil e 15,8% dos alunos decretaram que era difícil. Então, eles apontaram a falta de conhecimentos preliminares. Com relação aos tipos de questionamentos de ser fácil e difícil, apesar da diferença não ser tão pequena, as respostas apareceram nas quantidades apresentadas no diagrama apresentado na figura 21.

Figura 21 - Gráfico destacando a dificuldade dos alunos em identificar a função exponencial e a função logarítmica.



Fonte: Autor (2022)

Com base nas informações produzidas pela nossa amostra, verificamos que a maioria dos professores, 94,7% ensinam o conteúdo de função logarítmica apresentando uma lista de exercícios, iniciando com uma situação problema para depois introduzir o assunto (Figura 22). O perfil destes professores que ensinam o conteúdo, iniciando com uma situação problema para depois introduzir o assunto, segundo os dados da pesquisa, não pode ser delineado de maneira específica, por conta de que a alternativa foi escolhida independente de faixa etária, de graduação acadêmica, e da instituição que atua.

Figura 22 - Gráfico delimitando a didática dos professores com relação ao conteúdo de logaritmo.



Fonte: Autor (2022)

5.2. Análise da sequência de ensino pelas observações do diário de campo

Neste encontro predominaram as situações problemas e uma vez definida a função logarítmica, os alunos foram visados previamente, antes da realização das atividades deste encontro, foi feita uma breve revisão, uma intervenção de maneira expositiva, sobre a temática.

Para Ronize Lampert Ferreira et al. (2007).

[.....]aspecto destacado na análise prévia, foi verificar as concepções dos alunos por meio de um teste diagnóstico, no qual incluía questões relativas aos pré-requisitos necessários à construção do conceito de logaritmo e também questões de conhecimento geral, a fim de verificar se os alunos possuíam um conhecimento mínimo necessário para iniciar o estudo de logaritmo com a intenção de propor melhorias com relação a sua aprendizagem. A análise foi realizada para que fosse possível levantar as dificuldades e obstáculos e a partir daí intervir para obtenção de um resultado mais satisfatório.

UARC's (Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual), são conhecimentos prévios os quais o aluno já deve ter para aprender um determinado conteúdo matemático. Cabral (2017), refere-se a relação UARC's e conhecimento

“novo”. Para o autor o conhecimento é como um piso S formado por conhecimentos menos já existentes que os chama de s, faz uma analogia com um piso e lajotas, o piso todo lajotado é o S, o s é cada lajota que cobre esta superfície, portando faz-se necessário a avaliação do aluno e seus conhecimentos prévio.

O objetivo da aplicação do teste de sondagem foi o de identificar a Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP dos alunos, ou seja, averiguar quais conhecimentos acerca do conceito de logaritmos eles traziam consigo depois de ter estudado o assunto na primeira série, o desenvolvimento atual, para depois organizar o ensino, na zona de desenvolvimento proximal, visando avançar, em direção à zona de desenvolvimento potencial.

Ao tratar a ZDP, L. V. Zankov lembra que o ensino deve atuar não em funções já maduras (zona de desenvolvimento atual), mas sobre aquelas ainda em processo de maturação (zona de desenvolvimento potencial), criando-se, assim, uma zona de desenvolvimento resultado da distância entre a atual e a potencial (zona de desenvolvimento proximal). Na ZDP, ocorrem processos internos e externos, ambos relevantes para o desenvolvimento. Além disso, queríamos verificar em suas falas, vestígios de como foi sua apreensão do caráter geral do conceito dos logaritmos e função logarítmica, a experiência com o conteúdo e o professor, as emoções experimentadas neste processo, bem como suas impressões sobre a organização do ensino utilizada na ocasião, e, ainda, a importância do assunto para suas vidas.

5.3. Análise dos Testes

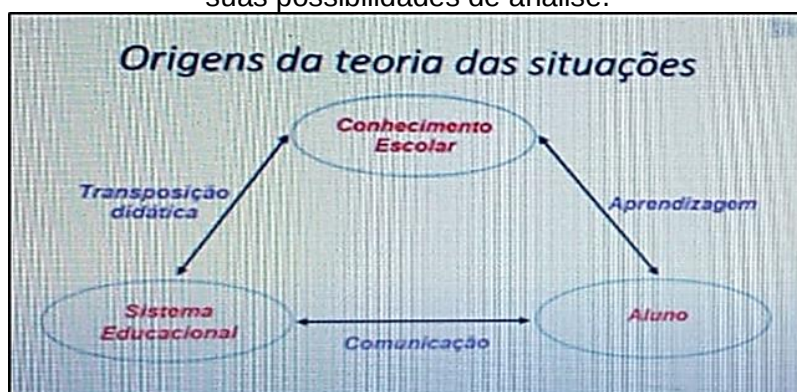
5.3.1. Procedimentos das atividades: Função Logarítmica

O ensino sempre foi concebido como relação entre o Sistema Educacional e o aluno, nessa transmissão de conhecimento, e o professor inserido nesse Sistema Educacional, então a gente chama de Comunicação. O professor organiza esse conhecimento escolar de uma maneira que ele possa transmitir para o aluno uma série de conhecimentos, essa organização que o professor faz quando ele modifica esses conteúdos, passando de um saber científico para um saber escolar, é chamado de Transposição Didática, e a partir do momento que o aluno organiza esse conhecimento escolar, tomando para si o que ele deve adquirir ele está constituindo aí a aprendizagem.

A relação triangular que envolve professor-aluno-saber, entre o conhecimento escolar, o sistema educacional e aluno é a Transposição Didática, comunicação e aprendizagem onde elas caminham simultaneamente (Figura 23). Podemos refletir

que o triângulo, como figura geométrica, apresenta uma característica interessante, que confere a essa relação uma importante análise: todos os vértices se “comunicam”, inter-relacionando-se de maneira dinâmica. Ou seja, analisando a referida triangulação, temos relações que se estabelecem entre professor-aluno; entre aluno-saber, e entre professor-saber, relações estas que precisam ser estudadas para que possamos compreender o processo de ensino-aprendizagem de um dado saber escolar, no nosso caso, o saber algébrico.

Figura 23 - Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática das disciplinas científicas e suas possibilidades de análise.



Fonte: Autor (2022)

Antes da procedência das atividades, aos alunos foram determinadas algumas especificações, entre elas: Definir e estudar a função logarítmica; aplicar o conceito de função logarítmica para resolver problemas de aplicação; ler, interpretar e resolver problemas do cotidiano que envolvem logaritmos; aplicar as propriedades dos logaritmos na resolução dos problemas e interpretar gráficos de função logarítmica para resolver problemas. Cada aluno recebeu uma folha que foram respondidas individualmente e cujas respostas foram socializadas no grupo e no seu celular usar a calculadora se for necessária. Foram inseridas 7 atividades, sendo três objetivas, quatro discursivas.

Antes do teste de sondagem perguntas aos participantes: No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os logaritmos. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo? Relate aqui, o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudado? Qual (is) sua(s) aplicação(s) ? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

Trechos dos principais registros realizados pelos participantes, referentes às perguntas levantadas:

Aluno 1: O logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmo e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando devemos descobrir seu valor. Sua estrutura

tem algo como $\log = x$, porém não me recordo muito bem como era a estrutura e como organizar ela para achar o resultado. Ligado a ele também aprendemos a função logarítmica, em geral estudá-la foi bem repetitivo, o professor que na época ensinava, repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de certa forma eficiente. Em relação a sua aplicação prática sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrada nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

Aluno 2: O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído do logaritmando e do logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como ... fração, ... o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base, expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho...

Aluno 3: As aplicações, suponho que podem ser usadas na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como a Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a "fórmula" do logaritmo e a terminando, com um ou outro exercício mais complexo.

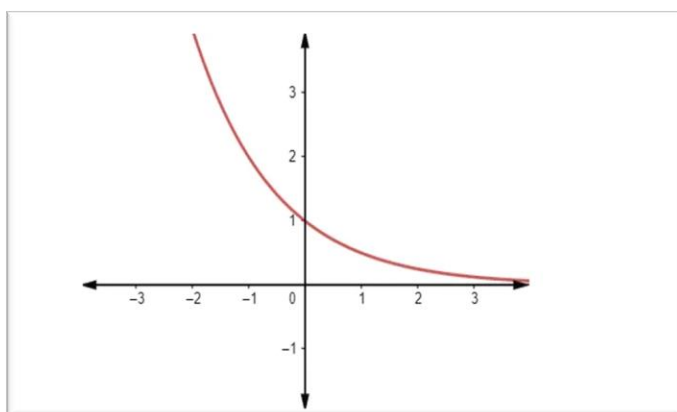
Aluno 4: As aulas eram voltadas para resolução de exercícios, principalmente de vestibulares, não lembro de ter visto quais sejam suas aplicações na vida real e qual sua importância, mas sei que tem grande importância nos vestibulares.

Aluno 5: No curso supletivo não tínhamos tempo para aprofundar nenhuma matéria.

Aluno 6: A única Matemática que aprendi foi no ensino fundamental. No Ensino Médio quase não tinha professor na escola pública, não lembro ter estudado logaritmo.

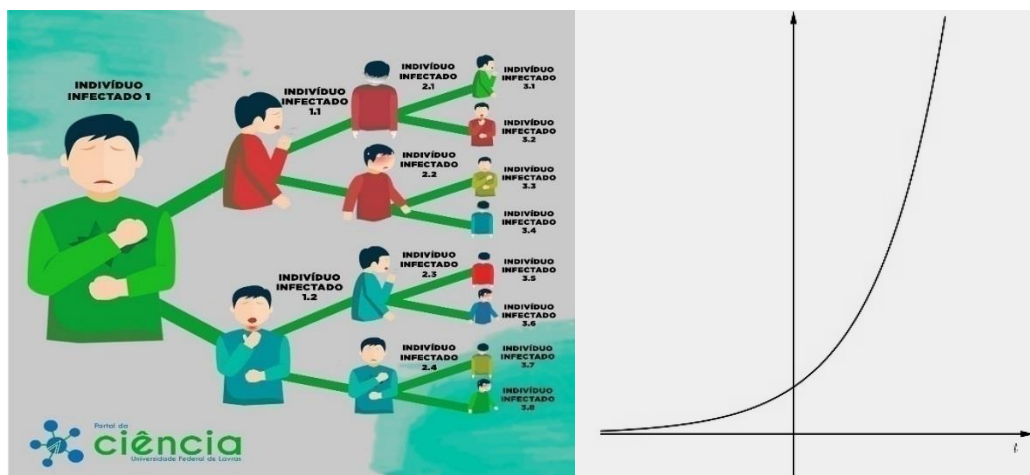
Aluno 7: Aqui na Universidade, as coisas caminham devagar, pois a maioria de minha turma precisa que o professor retome os conteúdos do Ensino Básico a toda hora.

ATIVIDADE 1ª): (Adaptado PUC-SP) O gráfico a seguir, representa uma função exponencial definida por $f(x) = k^x$. Então pode-se afirmar que:



- a) ☐ $k > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$
- b) ☐ $0 < k < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- c) ☐ $k > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- d) ☐ $0 < k < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$

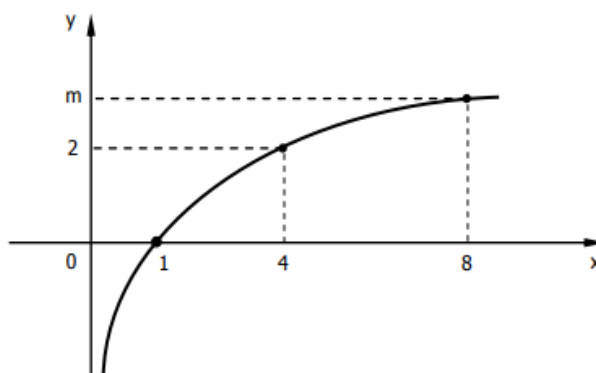
ATIVIDADE 2ª): (PORTAL DA CIÊNCIA – Universidade Federal de Lavras) Em epidemias de fácil contágio, como ocorre com o coronavírus, cada pessoa pode transmitir o vírus para diversas outras pessoas. Se toda a população for suscetível ao contágio e se cada infectado contagiar m novos casos em média, sendo m uma constante maior do que 1 , o crescimento é exponencial.



Fonte: Esquema de propagação da Covid-19 e gráfico da função exponencial

Por exemplo, se cada indivíduo infectado transmite a doença para duas pessoas, $m = 2$, temos o seguinte esquema de propagação: Para saber a relação entre o tempo e o número de infectados, os matemáticos propõem modelos matemáticos que têm o objetivo de retratar a situação real. Qual é esse modelo matemático? E qual a sua inversa?

ATIVIDADE 3ª): Em baixo, está representado o gráfico de uma função logarítmica do tipo $f(x) = \log_a x$. Encontre o valor de m .



ATIVIDADE 4ª): (ENEM) Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta. O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x , e dado pela expressão algébrica $F = C (1 + x)^n$, em que C representa o capital

inicial aplicado. O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R\$ 100.000,00 duplique sem outros depósitos ou retiradas. Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

y	$\log y$
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é.

- a) 156 b) 125 c) 100 d) 10 e) 1,5

ATIVIDADE 5ª): Uma população de bactérias dobra a cada minuto. Se inicialmente havia 300 bactérias, após quantos minutos será constituída de 2516582400 indivíduos? Considere $\log 2 \cong 0,3010$.

ATIVIDADE 6ª): (Adaptado PUC-SP)

A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log_{10}(I/I_0)$, com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de I_0 . Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000xI_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo.

Dado: use a aproximação $\log_{10} 2 \cong 0,30$.

ATIVIDADE 7ª): Resolva a equação:

$$\log(2x^2 - 4) = \log(7x)$$

5.3.2. Comentários das Análises dos Testes de Sondagem

Espera-se que o teste de sondagem possa contribuir para o ensino significativo de logaritmo. Apresenta nove atividades, a partir delas foram introduzidos os conceitos, propriedades e gráficos, temos o anseio de que, partindo de um problema e da necessidade de resolver essa situação, podemos mostrar a necessidade de aprender esses conteúdos, que foi ensinado no Ensino Médio.

Observou-se também, que a aplicação do teste de sondagem, o encontro foi marcado pela espontaneidade dos alunos, o que foi determinante para aplicação do teste, proporcionando aos participantes um ambiente favorável para a aprendizagem.

Pode-se ver por meio desse teste, que o professor pesquisador identificou dificuldades no ensino de logaritmos, especialmente, em pré-requisitos, portanto, formas diferenciadas e aplicar o estudo de logaritmos são necessárias.

Portanto, mediar esse processo, discutindo os tópicos matemáticos que devem ser explicados, de modo a facilitar o entendimento que o aluno possui em relação à situação-problema que está sendo estudada.

Para Smole (2010, p.165), “o projeto exige cooperação, esforço pessoal, desenvolvimento de estratégias, planejamento e execução. Também auxilia o aluno a ganhar experiência, a obter informação”, a trabalhar de modo autônomo, organizar e apresentar suas ideias.

Em síntese, a partir desse diagnóstico, podemos inferir que os alunos participantes se aproximam da compreensão de elementos presentes no conceito dos logaritmos, porém com a presença de marcas evidentes de um conhecimento empírico, baseado em elementos externos. Pela análise de seus registros e falas, constatamos que os alunos se apropriaram de partes do conceito, não tendo atingido, ainda, uma visão de totalidade, de síntese.

A tabela 1 abaixo, representa a quantidade de acertos, erros e questões em branco em relação à quantidade de alunos.

Tabela 1 – Alunos do teste de sondagem, Função Logarítmica

Situações-problema envolvendo Função Logarítmica				
Questão	Acertos	Erros	Alternativas em Branco	Total
1	15	4	-	19
2	14	5	-	19
3	10	4	5	19
4	18	1	-	19
5	17	2	-	19
6	17	2	-	19
7	3	16	-	19

Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar, através dos dados da tabela que a maioria dos alunos atingiu os objetivos com relação à primeira questão, apesar de nem todos terem justificado. Pode ter feito esta escolha apenas pela leitura do valor presente no gráfico,

sem identificar que este valor corresponde a um ponto no eixo $y = 1$, isto indica dificuldade do aluno na leitura e interpretação do gráfico.

Com relação à segunda atividade mais da metade dos alunos acertaram e o restante tiveram dificuldades no modelo matemático, principalmente, por não saberem interpretar o problema de modo correto, indicando o valor da expressão, fez uso da função exponencial, mas errou ao calcular a expressão que caracteriza a sua função inversa.

A terceira questão, apresentou um grande índice de dificuldades, entre elas salienta-se:

- Quatro alunos não conseguiram acertar por dificuldades de não saber interpretar os eixos cartesianos contidos no gráfico.
- Cinco alunos optaram por não fazer a questão.
- Do contrário aproximadamente 50% dos alunos souberam realizar os procedimentos de correspondência diante do gráfico e aplicar a definição do logaritmo necessários à solução.

Na quarta atividade, a maioria dos alunos não tiveram dificuldades em resolver. Ao contrário de alguns alunos que não conseguiram entender a questão embora que o modelo matemático fazia presente.

Com relação a quinta questão, os alunos de modo geral não tiveram dificuldades na realização dos cálculos, porém dois alunos calcularam errado o modelo matemático.

Na sexta atividade, a maioria dos alunos, respondeu afirmativamente, porém desconheciam o modo de medir a intensidade dos terremotos, conheciam a escala Richter na revisão que o professor pesquisador comentou.

Na sétima atividade, aproximadamente 70% dos alunos erraram na elaboração das condições de existência com relação ao domínio da função, a maioria dos alunos muitas vezes não verifica isso. Isso serviu de equívoco, pois tem que obedecer suas restrições como condições de existências, que se um algoritmo é seguido corretamente, apenas respostas corretas resultarão. Conferindo se as duas raízes da equação quadrática satisfazem a equação original. Pode-se observar por meio deste teste diagnóstico, que os alunos chegam à 1ª série da graduação com várias dificuldades, obstáculos que terão de transpor para uma boa compreensão do conceito de logaritmo e função logarítmica. Quanto a análise das respostas dos alunos apontou que os ingressantes não tinham construído ideias matemáticas essenciais, como as noções de função exponencial e função logarítmicas, temos estes

indispensáveis para seu trabalho na Educação Básica. Além disso, os alunos demonstravam não ter desenvolvido as capacidades de estabelecer relação, de usar informações dados, de compreender o enunciado das questões. Obstáculos esses que foram formados ao longo das séries anteriores e agora faz-se necessário que sejam esclarecidos. Cabe, portanto, o professor-pesquisador elaborar uma sequência didática que viabilize essa transposição.

5.4. Sequência Didática: Análises dos Testes

Nesta seção, apresentamos as atividades propostas na sequência didática, que tinha por finalidade a compreensão do conteúdo de logaritmo.

Por sequência didática, entendemos um conjunto de atividades devidamente ordenadas, com uma finalidade específica, como afirmam Teixeira e Passos (2013, p.162):

Uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado.

A teoria das Situações Didáticas (TSD) pressupõe que o aluno tenha um papel ativo frente à sua aprendizagem. Para isso, Brousseau indica a proposição de algumas dialéticas, a saber: de ação, formulação e validação. Para garantir a aquisição do saber matemático sistematizado, o autor prevê a etapa de institucionalização, momento no qual toda a investigação realizada pelo estudante deveria analisar, discutir, confrontar a veracidade de uma afirmação e escrever sobre suas percepções.

5.4.1. As sessões da sequência didática e as análises a priori e a posteriori das atividades.

A sequência didática foi composta em cinco sessões e aplicada em uma turma de 2022 no turno da noite com dezenove alunos do 1º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, na cidade de Conceição do Araguaia no bairro Vila Cruzeiro . Os alunos trabalharam em duplas e um trio reunidos segundo suas afinidades. Ao final de cada sessão, foi realizada a formalização dos conteúdos, como demonstra o quadro 3 abaixo.

Quadro 3 – Quadro das sessões da sequência didática

SESSÕES	FICHAS DE ATIVIDADES
Sessão I - 07/06/2022 (3ª feira)	Atividade 1: (a),(b),(c),(d),(e),(f) e (g) Atividade 2: (a),(b),(c),(d),(e) e (f)
Sessão II - 09/06/2022 (5ª feira)	Atividade 1: (a),(b),(c) e (d) Atividade 2: (a),(b),(c) e (d) Atividade 3: (a),(b) e (c) Atividade 4: Atividade 5
Sessão III - 14/06/2022 (3ª feira)	Atividade 1: (a),(b),(c),(d) e (e) Atividade 2: (a),(b),(c) e (d) Atividade 3: (a),(b) e (c)
Sessão IV - 16/06/2022 (5ª feira)	Atividade 1
Sessão V - 21/06/2022 (3ª feira)	Atividade 1

Fonte: Autor (2022)

5.4.1.1 Sessão I: construindo o conceito de logaritmo.

O objetivo dessa sessão, foi por meio de situações-problema, dando ênfase à ciência biológica (Número de bactérias), envolvendo a existência em uma cultura numa determinada hora. São ao todo da sessão duas atividades desmembradas em itens, dos quais constituídas por problemas envolvendo a relação entre grandezas, através de tabela numéricas e representações gráficas. Nos problemas de interpretação gráfica, o objetivo que os alunos obtenham informações sobre crescimento e decrescimento dos fenômenos.

Com essas atividades propostas os objetivos que os alunos possam revisar a relação entre o conceito da função exponencial e da função logarítmica e formalizar a lei que descreve o fenômeno. Cada aluno pode compartilhar a sua opinião de modo a colaborar com a dupla e o trio na execução das atividades. O papel do professor-pesquisador ao longo das atividades foi o de orientar as duplas e o trio na execução dos problemas, e quando solicitado na dúvida dos alunos, ele deveria saber direcionar os alunos ao raciocínio dedutivo, evitando fornecer as respostas dos problemas.

Atividade 1ª: O crescimento bacteriano em laboratório fornece um exemplo excelente de crescimento exponencial. No crescimento **exponencial**, a taxa de crescimento populacional aumenta ao longo do tempo, em proporção ao tamanho da população.

Vamos ver como isso funciona. Bactérias se reproduzem por fissão binária (se dividem ao meio), e o tempo entre as divisões é cerca de uma hora para a maioria das espécies de bactéria. Para ver este crescimento exponencial, vamos começar colocando 1.000 bactérias em um frasco, com um suprimento ilimitado de nutrientes.

Então nessa cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Considere que essa quantidade de bactérias no frasco no início da experiência. Com base nestas informações, responda as questões propostas.

- a) Qual será o número de bactérias após uma hora?
- b) Quantas bactérias haverá após duas?
- c) Após três horas, qual será a quantidade de bactérias na cultura?
- d) Chamando de $Q(x)$ o número Q de bactérias em função do número x de horas de experiência, é possível estabelecer uma lei de formação que modela esta função.
- e) Baseado na lei que modela a função no item d. Após quantas horas será constituída de 5.000 indivíduos? Considere $\log 2 \cong 0,3010$.
- f) Se o número de elementos de uma determinada espécie de bactérias diminui à taxa de 10% ao ano. Em quantos anos ficará reduzido à metade? Indique o número inteiro mais próximo (Use $\log 2 \cong 0,301$ e $\log 3 \cong 0,4771$)
- g) Esses dados poderiam ser representados em um gráfico? De que forma?

- **Concepção e análise a priori da atividade 1ª – Sessão I**

Objetivo da análise a priori: determinar como as escolhas realizadas permitem controlar os comportamentos do aluno e o sentido desses comportamentos. A análise a priori tem uma parte de descrição e outra de previsão

- Que problema cada aluno tem para resolver?
- O que o aluno precisa saber para compreender o problema?
- O que o aluno precisa saber para resolver o problema?
- Que tipo de controle o aluno tem sobre sua ação?

O objetivo dessa atividade era propiciar reflexão sobre os conceitos de logaritmos e função logarítmica, bem como conhecer as concepções (Para Brousseau 2009, p.27), concepção é “ Cada maneira organizada, mas particular, de considerar uma noção matemática”. Propõe-se o trabalho em duplas e um trio, pois favorece a discussão e o confronto entre concepções dos estudantes. Cada participante possui um modelo mental para os objetos nessas atividades e, nesse confronto, espera-se que, pelos menos na dupla e um trio, haja uma uniformidade em relação ao significado de tais conceitos. As dialéticas de ação e formulação se fazem presentes nesta etapa, pois os alunos deverão confrontar o que pensam sobre cada um dos termos e, ao mesmo tempo, confrontar as respostas para, de comum acordo, emitir um posicionamento coletivo.

Uma dificuldade que pode surgir nessas atividades é justamente a necessidade de escrever sobre conceitos que, em geral, em sala de aula, são tratados mecanicamente. Entretanto, ao responder ao questionamento da atividade, os alunos começarão a refletir sobre elementos essenciais à compreensão da Função Logarítmica. As atividades que envolvem esse confronto são citadas por Santos (2014, p.59), que afirma:

As situações didáticas ainda podem ser trabalhadas por meio da abordagem socrática que valoriza os conhecimentos prévios dos alunos, os quais deverão surgir por meio de perguntas apropriadas. Esse método pode ser aperfeiçoado, permitindo uma evolução de seus conhecimentos.

Em relação as atividades que serão apresentadas para os alunos uma proposta situação-problema no registro da língua natural e os dados do problema são apresentados por meio de uma tabela, para que ao final os alunos possam generalizar que a variável está no expoente. As potências e o crescimento exponencial: a função exponencial tem como objetivo consolidar as noções da potenciação como um recurso para a apresentação da função exponencial $y = a^x$ ou $f(x) = a^x$ sendo **a** base a um número positivo e diferente de **1**. Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução, tem como objetivo apresentar os logaritmos como um expoente e para esboçar o gráfico das funções exponenciais em um mesmo sistema de eixo cartesiano ortogonal a partir de sua expressão algébrica, com o objetivo de observar o crescimento e decrescimento em cada caso.

Isso faz parte dos conhecimentos prévios, pois os alunos já estudaram esses conceitos em anos anteriores, e deve servir de base para discussões mais proveitosas, pois, ainda sobre a utilização dos conhecimentos prévios dos alunos, Silva afirma:

[...] devem ser considerados, no que concerne à relação entre o saber escolar e o aluno, os conhecimentos prévios sobre o que se quer ensinar, as hipóteses relacionadas ao novo saber, o progresso do aluno mediante a aquisição do conhecimento ensinado, entre outros aspectos. É buscada, pois, conexão entre o que já se conhece e o novo saber (SILVA, 2015, p.70).

A análise a priori é concebida como uma forma de “controle das ações dos alunos” através das variáveis escolhidas. Assim preveem-se as possíveis soluções para as atividades propostas e quais os comportamentos esperados pelas duplas e o trio. Esta fase da engenharia didática está fundamentada nas hipóteses levantadas para essa pesquisa, e a confirmação destas, ou não, sendo verificada na 4ª fase, ou seja, na fase da análise a posteriori.

Para a solução da 1ª atividade, os alunos podem construir uma tabela, como a descrita a seguir (Tabela 2), estabelecendo a relação entre o tempo e a quantidade de bactérias para responder as questões (a), (b) e (c).

Tabela 2. Cálculo da Quantidade de Bactérias a cada hora

Horas	Potências de 2	Quantidade de bactérias
0	$1.000 \cdot 2^0$	1.000
1	$1.000 \cdot 2^1$	2.000
2	$1.000 \cdot 2^2$	4.000
3	$1.000 \cdot 2^3$	8.000
4	$1.000 \cdot 2^4$	16.000
6	$1.000 \cdot 2^6$	64.000
8	$1.000 \cdot 2^8$	256.000
10	$1.000 \cdot 2^{10}$	1.024.000
.....		
x	$1.000 \cdot 2^x$	$1.000 \cdot 2^x$

Fonte: Dante, 2010 p,23

A partir da construção da tabela, espera-se que os alunos concluam que a quantidade é de 2.000 bactérias no item (a), no item (b) devem ser motivados a concluir que haverá 4.000 bactérias e os alunos devem chegar a conclusão de que após três horas a população será de 8.000 bactérias.

Para responder ao item (d) após a análise da tabela, espera-se que os alunos possam concluir que a função que relaciona “horas” com “quantidade de bactérias” é $Q(x) = 1.000 \cdot 2^x$, onde $Q(x)$ representa a quantidade de bactérias e x representa o tempo medido em horas.

No item (e) é esperado que os alunos formalizem a lei e posteriormente resolva a função exponencial e aplicar o logaritmo para a sua resolução.

$$Q(x) = 1.000 \cdot 2^x$$

$$5.000 = 1.000 \cdot 2^x$$

$$5 = 2^x$$

$$\log 5 = \log 2^x \quad (\log \text{ em ambos os lados da equação})$$

$$\log \frac{10}{2} = x \log 2 \quad (\text{usando as propriedades do quociente e da potência})$$

$$\log 10 - \log 2 = x \log 2 \quad (\text{substituindo})$$

$$1 - 0,3010 = x \cdot 0,3010$$

$$0,6990 = x \cdot 0,3010$$

$$x \cong 2,3222 \text{ hs}$$

No item (f) o objetivo é retomar a aplicação do logaritmo dentro de uma situação contextualizada. Para a sua resolução, o aluno deveria interpretar o problema,

determinar a função matemática que representava a situação, manusear uma função exponencial e aplicar o logaritmo para a sua resolução.

$$P = P_0 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^t$$

$$\frac{P_0}{2} = P_0 (1 - 0,1)^t$$

$$\frac{1}{2} = (0,9)^t \quad (\log \text{ em ambos os lados da equação})$$

$$\log \frac{1}{2} = \log (0,9)^t$$

$$\log 1 - \log 2 = t \left(\log \frac{9}{10} \right)$$

$$-\log 2 = t(2\log 3 - 1) \quad (\text{substituindo os valores de log})$$

$$-0,301 = t(2,0,4771 - 1)$$

$$t = 6,57 \text{ anos}$$

Para responder ao item (g), o professor-pesquisador auxiliou os alunos a concluírem que sim, pois há uma relação biunívoca entre o número de horas e a quantidade de bactérias. Dito de outra forma, os valores referentes ao número de horas e à quantidade de bactérias formam pares ordenados que podem ser usados no plano cartesiano, representando desta forma um gráfico. Como argumenta Brousseau (2008, p. 73), “o professor não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá que fazer diante de um problema, sem tirá-lo, ao fazê-lo, a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente”.

- **Análise a posteriori e validação da atividade – Sessão I**

O objetivo é explorar as características da função exponencial e da função logarítmica, suas condições de existência representadas por meio de tabelas e possibilitar mudanças de representações. Acreditamos na importância de os alunos compreenderem o conceito de variável por uma abordagem funcional e compreender o conceito de função. Assim, as análises e avaliações posteriores dependem das ferramentas técnicas e teóricas utilizadas com as quais a coleta dos dados permitirá a construção dos resultados da pesquisa. Os resultados serão avaliados pelo professor-pesquisador e as informações resultantes serão confrontadas com a análise prévia realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos previamente e concluir se houver a aprendizagem dos alunos referente ao assunto abordado na sequência didática.

Nota-se que nesse tipo de metodologia utilizada, a validação dos resultados obtidos ocorre apenas com o confronto de hipóteses envolvidas na investigação e os resultados da experimentação que serão obtidos na análise posteriori que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos sobre as condições na transmissão do saber. Como previmos em nossa análise a priori as duplas e o trio não tiveram dificuldades em responder os itens (a), (b) e (c), pois era questões que necessitavam apenas fazer manipulações aritméticas no tratamento numérico e reconhecer que a variável dependente estava no expoente, como também compreender a situação-problema, apenas a dupla C teve dificuldade de entender e montar a tabela. A dupla E (figura 24) foi a primeira a iniciar a resolução dos itens (a), (b) e (c). Logo após lerem o enunciado, perguntaram sobre o tamanho da tabela a ser construída. O professor orientou que calculassem a quantidades de bactérias em determinadas horas, se fosse necessário, ampliassem essa tabela posteriormente. Construída a tabela, os alunos não tiveram dificuldades para responder os itens.

Figura 24 – Protocolo da dupla E – Sessão I.

Número inicial de bactérias: 1000	Dobra a cada h	
Número de bactérias após x hora	$1000 \cdot 2^x$	1000
- (1) - 1 hora	$1000 \cdot 2^1$	2000
- (2) - 2 horas	$1000 \cdot 2^2$	4000
- (3) - 3 horas	$1000 \cdot 2^3$	8000

Fonte: Autor (2022)

Segundo Dominoni (2005), toma por objeto matemático a função exponencial e exibe exemplos nos seguintes tipos de registros: em língua natural, tabular, gráfico e o registro de expressões algébricas, onde cada exemplo que será mostrado nos tópicos a seguir:

- I. **Registro em língua natural:** É a linguagem utilizada para comunicar, transmitir e informar. Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcule quantas bactérias existirão após x horas.

II. Registro Tabular: Trata-se de uma representação numérica onde os dados são distribuídos em linhas e colunas onde se relacionam através de uma regra.

No item (d), a dupla C cometeu um erro bastante comum, é imaginar que, se a população de bactérias dobra a cada hora, após x horas a população será de $2x$ bactérias. Com os resultados dos itens anteriores o professor-pesquisador fez uma intervenção, traçou um paralelo com as possíveis respostas para $2x$, concluindo assim que está não é a correta solução, então o professor ajudou a compreensão da interpretação da questão ajudando os discentes estabelecendo o raciocínio apresentado na tabela.

Vale ressaltar que nesse sentido para Duval (2003 apud THIEL, 2013, p. 64)

“[...] mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. [...]”. No momento em que o aluno consegue coordenar diversos registros ou mesmo através de um conseguir elaborar outro(s) diz-se que o processo de tratamento e conversão foi compreendido.

O item (e) só foi resolvido como o modelo matemático, embora tenha encontrado o valor correto do expoente para a variável t , a dupla A (figura 25), escreveu da seguinte maneira:

Figura 25 – Protocolo da dupla A – Sessão I.

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= 1000 \cdot 2^t \\
 5000 &= 1000 \cdot 2^t \\
 5 &= 2^t \\
 \log 5 &= \log 2^t \\
 \log \frac{10}{2} &= t \cdot \log 2 \\
 \log 10 - \log 2 &= t \cdot \log 2 \\
 1 - 0,3010 &= t \cdot 0,3010 \\
 t &= 2,3222 \text{ hr}
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

A dupla concluiu que o logaritmo é o expoente, mas não percebeu que o item (e) era o inverso do que eles fizeram nos itens (a), (b) e (c). Os restantes das duplas tiveram dificuldade em interpretar a questão, pois não sabiam o significado da frase: “após quantas horas”, após várias tentativas e discussões, percebeu que era desenvolver o logaritmo por meio de uma divisão.

Nessa Sessão, a dupla D (figura 26), apresentou várias dificuldades nos procedimentos numéricos e algébricos presentes nos protocolos.

Figura 26 – Protocolo da dupla D – Sessão I.

$$2^x = 1000 \cdot 2^x$$

$$5.000 = 1000 \cdot 2^x$$

$$\boxed{15 = 2^x}$$

Fonte: Autor (2022)

A partir desse momento, os alunos pediram ajuda ao professor.

- ❖ *Dupla G: professor, como eu acho o valor de x? Se no comando do enunciado eu tenho o valor do log de 2.*
- ❖ *Professor: porque vocês não tentam resolver a situação do log de 5 mesmo que no enunciado não foi mencionado.*
- ❖ *Dupla G: como assim professor?*
- ❖ *Professor: vocês podem observar o log de 5 usando uma das propriedades para que possa justificar os logs de 10 e de 2.*
- ❖ *Dupla G: vai ser difícil!*
- ❖ *Dupla E: Já entendemos.*

De acordo com Duval (2006), a utilização dos diferentes registros de representação semiótica de um objeto matemático contribui para uma reorganização do pensamento do discente e influencia a atividade cognitiva da pessoa que a utiliza. Nesta perspectiva a aprendizagem de conceitos matemáticos implica na coordenação de pelo menos dois registros de representação, manifestada pela possibilidade de efetuar de tratamentos (transformações com a permanência no mesmo registro) e, especialmente, de conversões (transformações de representação de um mesmo objeto no qual se transita de um tipo de registro para outro).

Para responder ao item (f), a maioria das duplas não conseguiu registrar em linguagem matemática e a outra deixou em branco. Verificou-se que uma das duplas apresentou dificuldades de interpretação para iniciar a construção do modelo matemático. A taxa de bactérias diminui foi das dificuldades, pois trabalharam com ela na forma de porcentagem e não na forma decimal. Para três duplas e um trio houve necessidade de o professor intervir para a construção do modelo.

Uma das duplas apresentou dificuldades na parte algébrica. Considerou-se um obstáculo epistemológico, com problemas de linguagem na representação simbólica e deficiência de conhecimentos prévios. Portanto, foi necessário trabalhar de forma individual com essa dupla.

Levando em consideração as lacunas nesse tópico, o professor procurou auxiliar na compreensão da simbologia envolvida. Assim, as duplas e o trio estiveram expostos de exemplos simples para ilustrar as explicações. A superação e os obstáculos foram alcançados através da resolução de alguns exercícios propostos, bem como a interação e a troca de ideias, em que as duplas conseguiram escrever cada uma das propriedades em linguagem matemática.

No registro apresentado na figura 27 é utilizada a definição de logaritmo e a noção de função, além desses, é resolvida uma equação com logaritmo. Isso mostra o domínio da linguagem matemática, das habilidades algébricas e o nível de entendimento dos significados dos termos usados nas aplicações.

Segundo Artigue (1996), esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

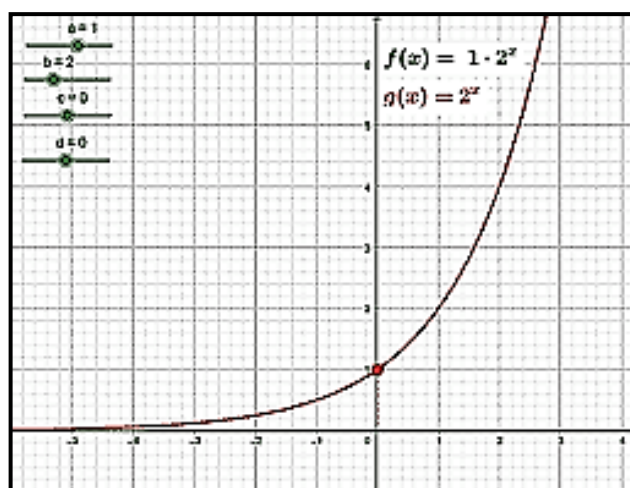
Figura 27 – Protocolo da dupla B – Sessão I.

$$\begin{aligned}
 P &= F_0 (1 - 0,1)^t \\
 \frac{1}{2} \cdot F_0 &= F_0 (1 - 0,1)^t \\
 \frac{1}{2} &= (0,9)^t \\
 \log \frac{1}{2} &= \log (0,9)^t \\
 \log \frac{1}{2} - \log 2 &= t \cdot \log (0,9) \\
 - \log 2 &= t \cdot [\log 0,9] \\
 - \log 2 &= t \cdot [\log 9 - \log 10] \\
 - \log 2 &= t \cdot [2 \log 3 - 1] \\
 - 0,301 &= t \cdot [2 \cdot 0,477 - 1] \\
 &= t \cdot 0,554 \\
 t &= 0,54
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

Para responder ao item (g) o gráfico da função, obtido com o auxílio do Geogebra, é descrito na figura 28 a seguir. Nele destaca-se a quantidade de bactérias em função do tempo.

Figura 28 – Protocolo da dupla D – Construção de deslizantes. Sessão I.



Fonte: Autor (2022)

Fazendo uso dos deslizantes, a dupla esboçou o gráfico solicitado e presumiu as possíveis soluções que envolvem duas variáveis na função exponencial.

Durante a implementação dessa atividade, percebeu-se troca de ideias entre as duplas e um trio, comparando respostas e analisando qual era a melhor, “mais certa”, confirmando a importância do trabalho em equipe, pois as respostas apresentadas foram oriundas das trocas de discussões entre os alunos, nas duplas e um trio que estavam inseridos e também do contato com outras duplas. Além disso, o desconforto de escrever as respostas a partir do diálogo entre a dupla e o trio foi desaparecendo, o que nos indica que se o professor de matemática adotar essa estratégia em sala poderá ter bons resultados de aprendizagem.

As diferenças e dificuldades observadas nos momentos de discussão dos conceitos indicaram a necessidade de revê-los, antes de prosseguir com a atividade. Nesse momento, o professor pesquisador, em um ambiente coletivo, retomou os conceitos com maior divergência (diferença entre a função logarítmica, assim como sua inversa, a função exponencial, são instrumentos para relatar matematicamente a evolução de grandezas, nas quais o crescimento ou decrescimento são proporcionais à quantidade dessa grandeza em um determinado tempo), buscando analisar os comentários e registros deles em face ao saber sistematizado, explicitando os detalhes que não foram destacados pelos alunos, como, por exemplo, a possibilidade da função proposta na atividade, de concluir que o comportamento da função é crescente, a respeito do crescimento de bactérias em um tempo dado. Cabe destacar que neste momento de revisão e adequação dos conceitos está associada à etapa de institucionalização, pois o conhecimento errôneo que estava sendo construído pelos estudantes foi direcionado para o saber matemático sistematizado.

No primeiro dia de atividades os alunos foram organizados em equipes e um trio, de acordo com a afinidade que há entre eles. Todas as atividades da sequência foram disponibilizadas impressas em folhas guardadas dentro de uma pasta, que é a pasta de atividades da equipe e do trio. A pasta serviria para armazenar os dados coletados da turma, uma vez que todos os alunos estão envolvidos com as atividades.

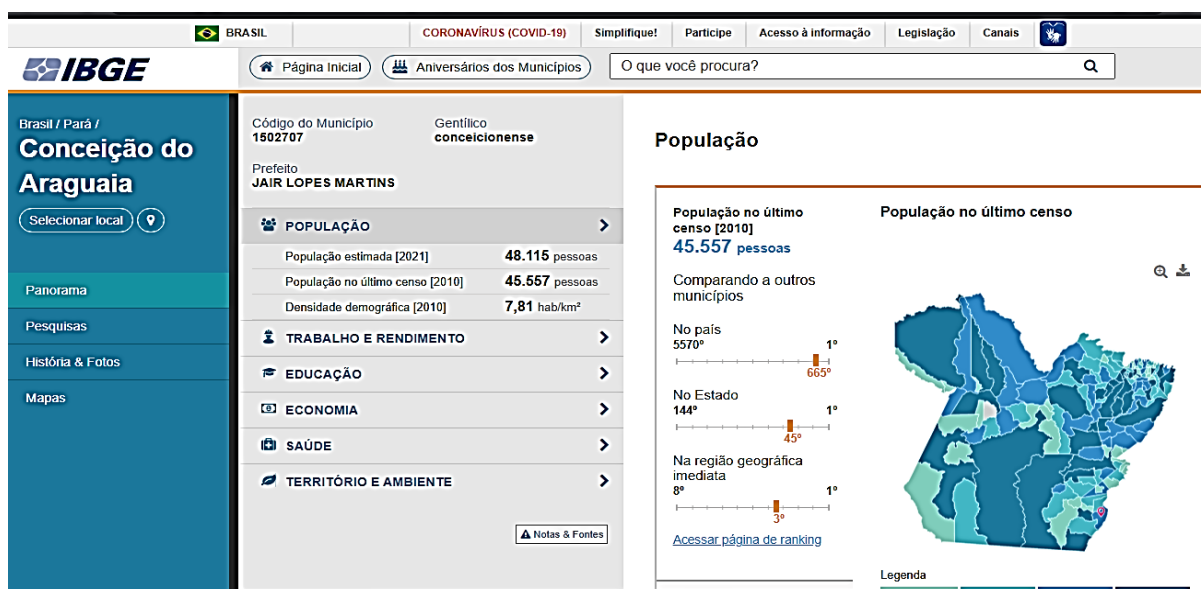
O tempo de 60 minutos para cada atividade dessa sessão, foi suficiente para quase todas as duplas e o trio. A dupla C ainda precisou de cinco minutos a mais. Ao término desse tempo, o professor recolheu uma folha de atividade de cada dupla e o trio e passou-se à socialização dos resultados.

Atividade 2ª: As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sociodemográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento a dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Conceição do Araguaia no ano 2010 era de aproximadamente 45.557 (Fonte: IBGE). Ver a figura 29 abaixo, e está crescendo a uma taxa média anual de 1,5%. Pergunta-se:

- a) Qual era a população estimada da cidade em 2011? Em 2013? Em 2015? Para 2016, 2018 e 2020 qual será a população estimada?
 - b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.
 - c) Represente graficamente a função obtida na letra (b)
 - d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
- Considere $\log 1,015 \cong 0,0064$ e $\log 2 \cong 0,3010$.
- e) Quando a população da cidade será de aproximadamente 47.540 mil habitantes
 - f) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

Figura 29 - Mapa de população do município de Conceição do Araguaia/Senso-IBGE



Fonte: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/conceicao-do-araguaia>

- **Concepção e análise a priori da atividade 2ª – Sessão I**

Para solucionar os problemas da 2ª atividade, os alunos devem observar que a população inicial P_0 , em 2010, é de aproximadamente 45.557 (Quarenta e cinco e quinhentos e cinquenta e sete mil habitantes) e como a taxa média de crescimento anual é de 1,5% ou, em número decimal 0,015, então a população em 2011 será:

População de 2011 = $(1 + 0,015) \cdot \text{população de 2010}$. Com esse raciocínio constrói-se uma tabela com os valores da população da cidade de Conceição do Araguaia em cada ano, iniciando com a população $P_0 = 45.557$ mil em 2010. Em 2011, após 1 ano, haverá então:

$$P_1 = 1,015 \cdot P_0 = 1,015 \cdot 45.557 \cong 46.240 \text{ mil habitantes.}$$

Em 2012, para $t = 2$, à população P_2 será: $P_2 = 1,015 \cdot P_1 = 1,015 \cdot (1,015 \cdot P_0) = (1,015)^2 \cdot P_0 = P_2 = (1,015)^2 \cdot 45.557 \cong 46.933$ mil habitantes

Em 2013, para $t = 3$, a população P_3 será:

$$\begin{aligned} P_3 &= 1,015 \cdot P_2 = 1,015 \cdot (1,015)^2 \cdot P_0 = \\ &= (1,015)^3 \cdot P_0 = (1,015)^3 \cdot 45.557 \cong 47.637 \text{ mil habitantes.} \end{aligned}$$

Em 2015, para $t = 5$, a população P_5 será: $P_5 = 1,015 \cdot P_4 = 1,015 \cdot (1,015)^4 \cdot P_0 = (1,015)^5 \cdot P_0 = (1,015)^5 \cdot 45.557 \cong 49.077$ mil habitantes.

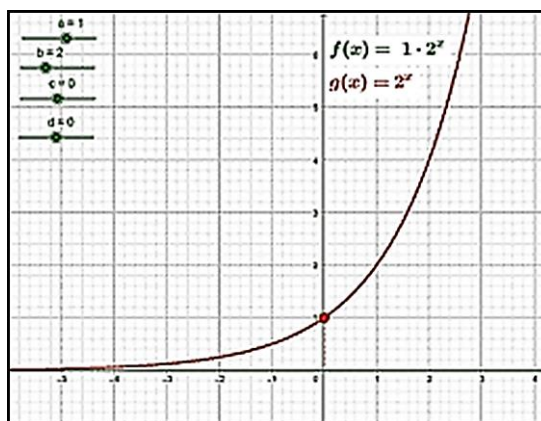
Seguindo esse raciocínio obtém-se a lei de formação:

$$P(t) = P_0 \cdot (1,015)^t = 45.557 \cdot (1,015)^t$$

Nessa lei, “ t ” é a variável tempo e P_0 a população inicial da cidade. Esse modelo matemático facilitará o cálculo para as populações de 2016, 2018 e 2020 solicitadas

no item (a) e possibilitará o cálculo da população em qualquer ano. O gráfico da função $P(t) = 45557 \cdot (1,015)^t$ pode ser esboçado com a utilização do aplicativo Geogebra, como na ilustração da figura 30 abaixo.

Figura 30 - Gráfico da função $P(t)$, Construção de deslizantes. Sessão 1



Fonte: Autor (2022)

Para responder ao item (d), isto é, em quanto tempo a população da cidade será duplicada, os alunos podem analisar o gráfico e obter uma resposta aproximada. Por exemplo, o dobro da população é $2 \cdot 45.557 = 91.114$ mil habitantes, portanto os alunos devem resolver a equação $45.557 \cdot (1,015)^t = 91.114$. Fazendo a divisão $(1,015)^t = \frac{91114}{45557} = 2$. Colocando log em ambos os lados da equação exponencial temos, $\log(1,015)^t = \log 2$, usando a propriedade da potência e substituindo os logs, o tempo necessário é de 47 anos.

Espera-se que os alunos possam resolver o item (e), após a definição de logaritmo decimal, utilizando uma calculadora científica, a seguinte expressão:

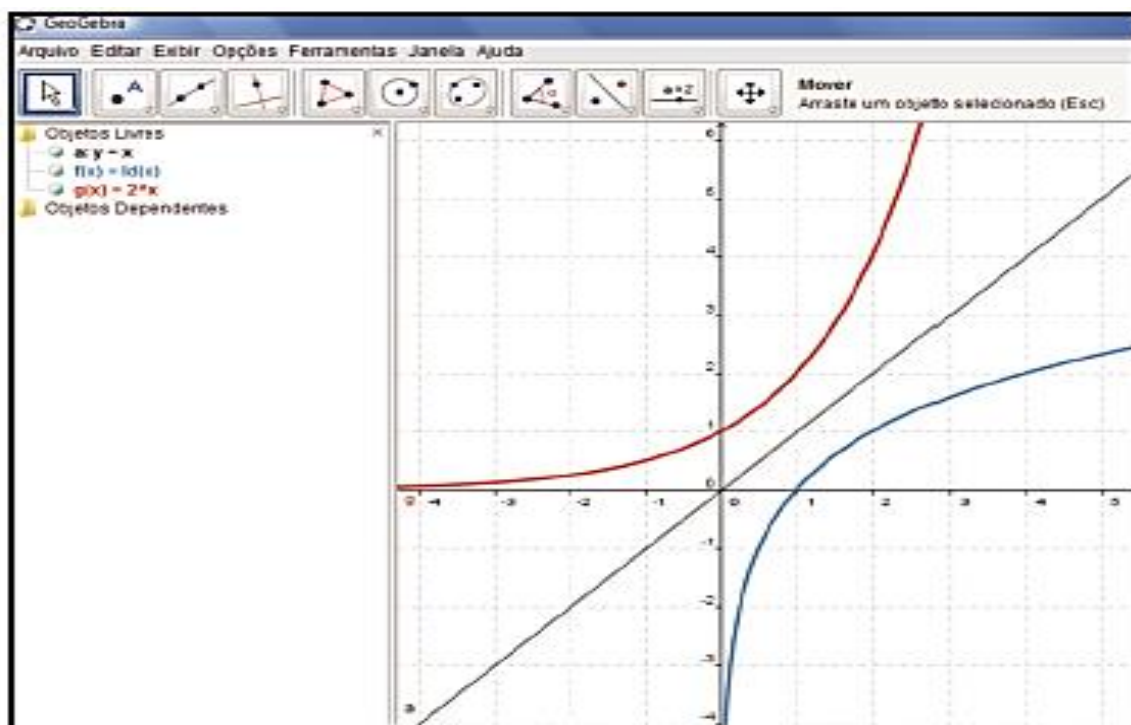
$47540 = 45557 \cdot (1,015)^t$, então $1,043 = (1,015)^t$, aplicando logaritmo decimal em ambos os membros se tem:

$$\log 1,043 = \log (1,015)^t, \text{ logo } 0,0182 = t \cdot 0,0064 \text{ e, portanto,}$$

$$t \cong 3 \text{ anos}$$

Para a solução do item (f), os alunos podem novamente utilizar o software geogebra, obtendo o gráfico abaixo, conforme a ilustração 31.

Figura 31 - Gráfico da função $P(t)$, Construção de deslizantes



Fonte: Autor (2022)

A presença das funções exponenciais e logarítmicas no mesmo aplicativo é necessário já que uma é a inversa da outra. Isso permitirá a percepção da relação intrínseca dessas duas funções em diversas aplicações, pois na função exponencial o domínio é o expoente e na função logarítmica o seu domínio é a potência. Isso permitirá a aproximação dessas duas funções, já que em muitos livros didáticos o seu estudo é segmentado, tornando mais difícil a percepção da correlação didática de ambas.

- **Análise a posteriori e validação da atividade 2ª – Sessão I**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Assim, as análises e avaliações posteriores dependem das ferramentas técnicas e teóricas utilizadas com as quais a coleta dos dados permitirá a construção dos resultados da pesquisa. Os resultados serão avaliados pelo professor-pesquisador e as informações resultantes serão confrontadas com a análise prévia realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos previamente e concluir se houver a aprendizagem dos alunos referente ao assunto abordado na sequência didática.

Nota-se que nesse tipo de metodologia utilizada, a validação dos resultados obtidos ocorre apenas com o confronto de hipóteses envolvidas na investigação e os resultados da experimentação que serão obtidos na análise posteriori que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos sobre as condições na transmissão do saber.

Apresentar as resoluções das duplas e do trio e enumerar as observações, destacam-se os seguintes pontos.

- Com relação à elaboração do modelo matemático, cinco duplas e um trio (68,42% dos alunos) não tiveram dificuldades. Essa desenvoltura é atribuída ao fato de os alunos já terem praticado esse tipo de problema no teste de sondagem envolvendo a função exponencial.
- Para três duplas (31,58% dos alunos), houve necessidade de o professor intervir para que conseguissem iniciar a construção do modelo matemático. A taxa de crescimento foi uma das dificuldades, pois trabalharam com ela na forma de porcentagem e não na forma decimal.
- Das oito duplas e um trio, quatro duplas conseguiram esboçar o gráfico sem problemas e com um trio e três duplas, houve a necessidade de interferência, pois marcaram corretamente os pontos no gráfico, porém tiveram dúvidas com relação à escala e conseqüentemente quanto ao esboço da curva. Para realizarem os cálculos, os alunos trabalharam nessa com uma calculadora científica por dupla e trio. As dificuldades com relação a construção do gráfico foram recuperadas com a utilização do aplicativo, havendo necessidade de se trabalhar com escalas diferentes nos eixos cartesianos para ajustar a janela do gráfico, o que possibilitou uma melhor visualização da curva. Esse aplicativo permite alterar as escalas dos eixos, de maneira que se possa visualizar a situação desejada.

Para a solução do item “d”, as duplas e o trio de um modo geral apresentaram dificuldades. Cinco duplas e um trio chegaram à seguinte equação (figura 32):

Figura 32 – Protocolo da dupla A – Sessão I

$$45557 \cdot (1,015)^t = 2 \cdot 45557$$

$$(1,015)^t = 91114$$

$$(1,015)^t = 2$$

Fonte: Autor (2022)

A partir desse momento, os alunos pediram ajuda ao professor.

Eles assim expressaram-se:

- *Dupla B: professor, como eu encontroo valor de "t"? Nós não sabemos que número devemos elevar o 1,015 para obter o 2.*
- *Professor: por que vocês não tentam resolver a situação graficamente? Localizem no gráfico onde está o dobro da população.*
- *Dupla A: professor como assim?*
- *Professor: vocês podem observar a interseção da função $P(t) = 91114$, que representa o dobro da população com a curva $P(t) = 45557 (1,015)^t$, que representa o crescimento dessa população, para isso basta esboçar o gráfico dessas funções no mesmo plano cartesiano.*
- *Dupla B: vai ser trabalhoso!*
- *Dupla C: Já entendemos.*

Esse item não ocorreu conforme previsto na análise a priori. Quatro duplas e um trio das oito duplas (57,89% dos alunos) encontraram a resposta certa para o valor de "t" que satisfaz $45557(1,015)^t = 91114$ com o auxílio de uma calculadora, encontrando o valor de "t" por tentativas. As demais duplas sentiram dificuldades na resolução dessa atividade. Na aula seguinte, as cinco duplas que haviam encontrado o valor de "t", utilizaram este valor, no aplicativo, e encontraram a imagem de t, através do gráfico da função $P(t) = 45557(1,015)^t$.

Para a resolução do item (f), os alunos utilizaram-se do gráfico esboçado no item c, encontrando o gráfico da inversa por simetria à bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Seis duplas das oito duplas e um trio não tiveram dificuldades em encontrar a inversa. Porém demoraram um pouco para achar a escala conveniente. A dificuldade nesse

item foi somente com relação ao ajuste da janela do gráfico, utilizando os eixos x e y na mesma escala.

Nessa aula foi realizada a formalização dessa atividades da 1ª sessão, isto é, dos conteúdos trabalhados na sessão anterior, dando ênfase nos itens “d” e “e” da 2ª atividade, em que as duplas e o trio sentiram mais dificuldades. Posteriormente, foi traçado o gráfico da inversa da função exponencial, obtendo-se o gráfico da função logarítmica. Nesse momento, foi definida a função logarítmica pelo professor como sendo a inversa da função exponencial, cuja base é 10. Foi colocado aos alunos que o logaritmo de um número x na base 10 é o expoente que deve ser elevada a base 10, para se obter x, isto é, $\log_{10} x = y$ é equivalente a $10^y = x$, onde essa equivalência foi explorada graficamente.

Para a realização do item “e”

Para a formalização dos conteúdos trabalhados nessa atividade da 1ª sessão, foram utilizados 60 minutos. Após uma conversa com os alunos para retomada do contrato didático, iniciou-se a discussão com o professor, sendo corrigidas as atividades no quadro. Na primeira atividade, a discussão ficou centrada na escala utilizada para a construção do gráfico. Na segunda atividade, o professor obteve ajuda da turma na construção do modelo, pois estes utilizaram uma calculadora científica para construção de tal modelo.

Santos (1997) afirma que o processo de ensino-aprendizagem se dá através de dois procedimentos inseparáveis: a atividade construtiva por parte do próprio aluno e a ajuda e o suporte oferecido pelos outros (colegas, professores). Portanto, acredita-se que a aprendizagem de um conteúdo ou a resolução de um problema, conjuntamente, onde os alunos tenham a oportunidade de explicitar o seu conhecimento e confrontar o seu ponto de vista com o de outros colegas, pode vir a ser uma situação favorável para que os participantes se ajudem mutuamente, no sentido de superarem as dificuldades que encontram ou os erros que cometem durante a realização da tarefa.

Após as discussões e observando-se que os alunos não tinham mais dúvidas a aula foi encerrada. Então, o professor alertou aos alunos quanto à importância da compreensão da função logarítmica e da definição de logaritmo pois trabalhariam com esta definição na próxima aula.

5.4.1.2 Sessão II: Resolvendo Problemas

Após a realização das atividades do primeiro dia, os alunos neste segundo e terceiro dia foram colocados diante de situações-problemas que envolve o uso de resolução-problemas. Foram organizados nos grupos de trabalho definidos na primeira aula, com o objetivo de compartilhar as suas ideias.

O objetivo dessa sessão é que o aluno compreenda a definição e a utilização da função logarítmica, bem como a aplicação de algumas propriedades logarítmicas através da resolução de problemas. São ao todo da sessão seis atividades, cada aluno pode compartilhar a sua opinião de modo a colaborar com a dupla e o trio na execução das atividades. O papel do professor-pesquisador ao longo das atividades foi o de orientar as duplas e o trio na execução dos problemas, e quando solicitado na dúvida dos alunos, ele deveria saber direcionar os alunos ao raciocínio dedutivo, evitando fornecer as respostas dos problemas.

Através de problemas práticos, foi mostrado aos alunos que a relação que existe entre a função logarítmica e a função exponencial é chamada de inversa. Com os problemas propostos, tem como objetivo que os alunos percebessem que a função logarítmica está presente em situações do cotidiano e que o estudo desse assunto na disciplina de matemática é fundamental para compreender os fenômenos que os cercam no cotidiano.

Objetivo é destaca-se para os alunos que a função exponencial é utilizada na modelagem de algumas formas de crescimento ou decrescimento presentes em alguns fenômenos da natureza, como também no funcionamento dos juros compostos, importantes na matemática financeira e na altura de determinadas plantas.

Atividade 1: Uma pessoa decidiu tomar um medicamento vendido em comprimidos de 500 mg, cuja bula informava possuir meia-vida de 6 horas e que as dosagens deveriam respeitar esse período. Com base nessas afirmações e fazendo uso, quando necessário, de uma calculadora científica, responda as seguintes perguntas:

- a) Complete a tabela abaixo que indica a evolução da quantidade do medicamento no organismo.
- b) É possível construir uma lei de uma função que seja representativa da situação da dosagem única? Qual?
- c) Tendo a pessoa tomado apenas uma única dose em quanto tempo a quantidade caiu a oitava parte da quantidade inicial? E a quarta parte?

d) Em quanto tempo, após a ingestão de uma única dose, a quantidade foi de 300mg? E 100mg ?

- **Concepção e análise a priori da atividade 1 – Sessão II**

O objetivo da construção da tabela abaixo é fazer com que o aluno perceba como a quantidade da droga ao longo do tempo vai sendo absorvida pelo organismo e também incrementada com novas dosagens. Por isso a escolha de se mostrar separadamente a quantidade proveniente de cada nova dose. A tabela deve ser analisada como um todo e não só a última linha do somatório, para não dar a errada impressão de que só existem acréscimos desconsiderando a absorção.

Os alunos podem construir uma tabela, como a descrita a seguir (Tabela 3), estabelecendo a relação de número de horas transcorrido desde a primeira dosagem.

Tabela 3 - Relação de número de horas transcorrido desde a primeira dosagem

Número de horas transcorridos desde a primeira dosagem										
Doses	0 horas	6 horas	12 horas	18 horas	24 horas	30 horas	36 horas	42 horas	48 horas	54 horas
1ª	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125	0,9765625
2ª		500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125
3ª			500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625
4ª				500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125
5ª					500	250	125	62,5	31,25	15,625
6ª						500	250	125	62,5	31,25
7ª							500	250	125	62,5
8ª								500	250	125
9ª									500	250
10ª										500
Q(mg)	500	750	875	937,5	968,75	984,375	992,1875	996,09375	998,0469	999,02344

Fonte: AAP 2020

Para responder o item (b) é esperado que as duplas possa estabelecer uma lei de formação cuja tabela tem o período de meia vida de t horas, e será possível de se tratar de uma função do tipo exponencial com $Q(0) = 500$ e $a = 0,5$, considerando a função referente à primeira dose:

$$Q = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}, t \text{ em horas.}$$

Nos itens (c) e (d) com o modelo já modelado no item (b) os alunos podem chegar aos resultados: No item (c) Resolvendo a equação:

$$Q(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}, t \text{ em horas}$$

$$\frac{500}{4} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} = 2 \rightarrow$$

$$t = 12 \text{ horas} \quad \text{e}$$

$$\frac{500}{8} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{1}{8} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} = 3 \rightarrow$$

$$t = 18 \text{ horas}$$

No item (d) Resolvendo a equação:

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 300 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{300}{500} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 0,6 \rightarrow \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \log 0,6 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} \log \left(\frac{1}{2}\right) = -0,222 \rightarrow \frac{t}{6} = \frac{-0,222}{-0,301} \rightarrow$$

$$t = 4,425 \text{ horas}$$

e

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 100 \rightarrow$$

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \log \left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} \log \left(\frac{1}{2}\right) = -0,699 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} = \frac{-0,699}{-0,301} \rightarrow$$

$$t = 13,933 \text{ horas}$$

• Análise a posteriori e validação da atividade 1 – Sessão II

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

No item (a) todas as duplas acertaram, demonstrando que compreenderam os números de horas transcorridos desde a primeira dosagem. No item (b), 6 duplas e um

trio acertaram e 2 duplas não fizeram, pois não perceberam que este item pedia um modelo matemático. De fato, falta de raciocínio algébrico na modelagem da função referente a primeira dose. Já outras duplas consideram a função referente à primeira dose. Questão resolvida de uma das duplas (dupla D), como mostra a figura 33 abaixo.

Figura 33 - Protocolo da dupla D - Sessão II.

A massa radioativa do elemento químico, após um período t de meia-vida, pode ser dada pela expressão:

$$M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

$$M = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

Fonte: Autor (2022)

Já no item (c) e (d), sete duplas acertaram, em nossas observações, não percebemos nenhuma dificuldade para que as duplas conseguissem expressar as propriedades dos logaritmos na forma algébrica. Percebemos que estas duplas (dupla D) (figura 34), relacionaram as propriedades das potências com as propriedades dos logaritmos.

Figura 34 - Protocolo da dupla D - Sessão II.

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 300$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{300}{500}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 0,6$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \log 0,6$$

$$\frac{t}{6} (\log 1 - \log 2) = -0,222$$

$$\frac{t}{6} (-0,301) = -0,222$$

$$t = 4,425 \text{ h}$$

Fonte: Autor (2022)

Com relação ao item (c) a dupla F, indagou ao professor que após o preenchimento da tabela perceberam que a quantidade cairá para a quarta parte em 12 horas (figura 35) e para a oitava parte em 18 horas (figura 36), contadas desde a dose única, não necessariamente usar a equação exponencial. Em particular, esta dupla forneceu uma concepção particular resolvendo de dois modos:

Figura 35 - Protocolo da dupla F – Sessão II. 1º Modo (12 h)

Pares	0 horas	6 horas	12 horas	18 horas	24 horas
1ª	500	250	125	62,5	31,25

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{6}} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$500 \cdot \frac{1}{4} = 125$$

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{18}{6}} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 62,5$$

Fonte: Autor (2022)

Figura 36 - Protocolo da dupla F – Sessão II. 2º Modo (18 h)

$$\begin{aligned} 500 &= 500 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \\ \frac{500}{4} &= 500 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \\ \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \\ t &= 12 \text{ h} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} 500 &= 500 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \\ \frac{500}{8} &= 500 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} &= \frac{1}{8} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ t &= 18 \text{ h} \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

Segundo (CABRAL, 2017) a *Intervenção Reflexiva* (Ir) é o momento que o aluno realiza reflexões. O papel do professor é estimular essas reflexões por meio de perguntas que estimulem o aluno a perceber alguns aspectos relacionados ao objeto matemático em construção. Nessa ocasião, o aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências, em geral, por meio de um problema, um quebra-cabeças, um jogo com regras, um desafio.

Duas duplas não fizeram e o trio chegaram a solução de uma maneira um pouco estranha, como a que segue na figura 37, representando um pouco da dificuldade que alguns alunos tem de organizar suas resoluções:

Figura 37. Protocolo do trio - Sessão II.

$$500 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{I}{6}} = 100 \div 500$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{I}{6}} = \log \frac{1}{5}$$

$$\frac{I}{6} - \log 2 = -\log 5$$

$$I = 13,933 \text{ h}$$

Fonte: Autor (2022)

Analizando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

Com relação ao item (a), 60% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 40% dos alunos, não resolveram.

Com relação o item (b), 55% dos alunos resolveram corretamente, 30% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão e 15% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação.

Com relação ao item (d), 70% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 10% dos alunos, não resolveram, 20% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve a necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão. Almouloud (2007, p. 45), alude que “[...] dentro dessa evolução sugerida pela estruturação do milieu, o sujeito aprende a partir de sua ação, sendo, portanto, responsável por sua aprendizagem”.

Atividade 2: Riscos do uso do paracetamol: O paracetamol principalmente a marca Tylenol, é um dos medicamentos mais populares do mundo. Estudo realizado pelo Instituto IMS Health revela que no Brasil a venda do medicamento teve um crescimento de 80%, aumentando de cerca de 20,6 milhões de unidades para 37,2 milhões, correspondendo a um faturamento de R\$ 507.000.000,00 em 2012. Muito desse sucesso de vendas é baseado no fato de que no Brasil não existe nenhuma exigência de receita e nem um limite na quantidade que pode ser comprada.

Agrega-se a isso o fato de se ter pouca informação nas embalagens quanto ao risco do uso equivocado, o que faz parecer se tratar de um medicamento totalmente seguro. A realidade, porém, é outra, o paracetamol pode causar graves danos ao

fígado se tomado em dosagem acima da recomendada ou em concomitância com bebidas alcóolicas e outras substâncias que tenham ação no fígado como vemos na bula do medicamento (Laboratório Medley).

ABIFARMA: Associação Brasileira da indústria farmacêutica: Este medicamento é contraindicado para menores de 12 anos.

Baseado no texto resolva os seguintes questionamentos dos itens abaixo:

A quantidade referente à primeira dosagem é dada pela função $c(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, onde $c(t)$ indica a quantidade em mg do medicamento decorridas t horas. Supondo que a pessoa tomou apenas uma dose desse medicamento. Então:

- Em quanto tempo a quantidade decaiu a oitava parte da quantidade inicial?
- considerando $\log 2 = 0,301$, determine quanto tempo levou para que a quantidade fosse de 128 mg?
- Em quanto tempo a quantidade atingiu 40 mg ?
- Qual a quantidade após 50 horas ? Deve ser utilizada uma calculadora científica.

- Concepção e análise a priori da atividade 2 – Sessão II**

Para resolver a segunda atividade é esperado que os alunos possam interpretar a situação problema uma vez que a função já está modelada.

$$\frac{400}{8} = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Como a função exponencial é injetiva temos que:

$$\frac{t}{8} = 3$$

$$t = 24 \text{ horas.}$$

O esperado é que os alunos resolvam a equação considerando $\log 2 = 0,301$, pra determinar o tempo que levou a quantidade de 128 mg.

$$400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 128$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{128}{400}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{32}{100}$$

$$\log 2^{-\frac{t}{8}} = \log \left(\frac{32}{100}\right)$$

$$\frac{-t}{8} \log 2 = \log 2^5 - \log 10^2$$

$$\frac{-t}{8} (0,301) = 5 \log(2) - 2$$

$$\frac{-t}{8} 0,301 = 5(0,301) - 2$$

$$t = 13,16 \text{ horas}$$

Os alunos possam interpretar em quanto tempo a quantidade atingiu 40 *mg*, o esperado é que resolvendo a equação cheguem no resultado final.

$$400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 40$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{10}$$

$$\log 2^{-\frac{t}{8}} = \log 10^{-1}$$

$$\frac{-t}{8} \log 2 = -1$$

$$\frac{-t}{8} (0,301) = -1$$

$$t = 26,58 \text{ horas}$$

Após a manipulação dos logaritmos em situações mais simples é esperado que os alunos envolvam cálculos sobre a quantidade total. Calculando a quantidade após 50 horas.

$$\begin{aligned} Q(50) &= 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{8}} \\ &= 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{25}{4}} \\ &= 400 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{400}{64} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 5,26 \text{ mg} \end{aligned}$$

• Análise a posteriori e validação da atividade 2 – Sessão II

Figura 38 - Protocolo da dupla E – Sessão II.

$$\begin{aligned}
 Q(50) &= 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \\
 50 &= 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \\
 \frac{50}{500} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \\
 \frac{1}{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \\
 \log \frac{1}{10} &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\
 \log \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\
 t &= 241
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

A dupla E cometeu um erro de caráter processual, pois desconhece as propriedades que ajudam a encontrar os valores dos logaritmos (figura 38). Dessa forma não conseguiu diferenciar a base do logaritmando, igualando a $Q(50)$, sendo que na verdade era pra substituir na variável Q . A dupla E, por não ter domínio do processo, optou de maneira desnecessária usar as propriedades que a equipe conhece. Substituiu $Q(50)$ por 50, em seguida, igualou a $400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, isso porque usou erroneamente a propriedade logarítmica $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$.

Percebemos claramente que, segundo Santos e Buriasco (2008), apoiados nas ideias de Radatz (1979), a dupla E cometeu equívoco de linguagem, pois não compreende bem o que lhe é proposto, ao se confundir com algumas notações, como por exemplo, o cancelamento de $\log 1/2$ por $1/2$. O aluno também cometeu erros por fazer associações incorretas, visto que realizou a substituição indevida de $Q(50)$ por 50. Houve erro por rigidez de pensamento, pois o aluno usou a técnica de resolver equações algébricas ao invés de usar propriedade de logaritmo. Assim acreditamos que resolver equações está muito presente na mente (pensamento) do aluno, fazendo com que ele aplique técnicas equivocadas na resolução da atividade 2.

Figura 39 - Protocolo da dupla F – Sessão II.

$$\begin{aligned}
 128 &= 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \\
 \frac{128}{400} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \\
 \log \frac{32}{100} &= \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \\
 \log 32 - \log 100 &= \frac{t}{2} \log 1 - \log 2 \\
 5 \log 2 - 2 &= -\log 2 \\
 6 \log 2 &= 2 \quad \text{Não está encontrando} \\
 &\quad \text{t. ???}
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

Considerando tal dificuldade, buscando melhor organizar as informações necessários para a resolução dessa atividade, a dupla F (Figura 39) de maneira equivocada cometeu um erro de caráter processual, através não percebeu que quando aplicou a propriedade do logaritmo da potência, uma outra propriedade distributiva da multiplicação permitia pela solução algébrica encontrar a variável tempo (t). Em relação a tal dificuldade, segundo Brandt (2005, p. 146), “[...] os fracassos dos alunos são devido à falta da mobilização de dois registros diferentes que lhes possibilite reconhecer o mesmo objeto através de duas representações”. E, quando o tipo de problema não é comum em sala de aula, os fracassos tendem a ampliar. Analisando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

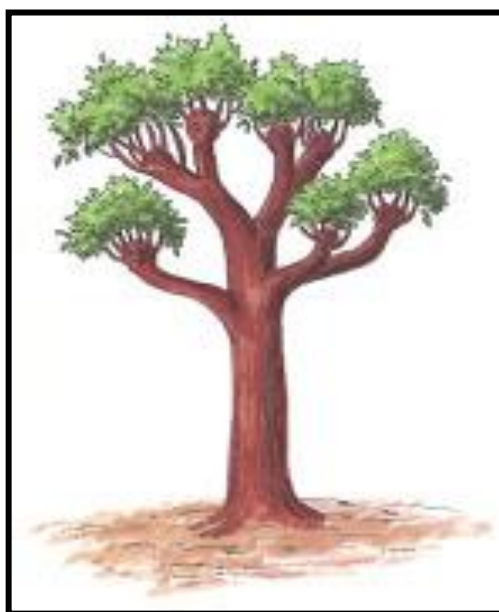
Com relação ao item (a), 97% dos alunos identificaram a expressão como sendo a de uma função e logo encontraram o tempo, enquanto apenas 3% não responderam à pergunta.

Com relação o item (b), 65% dos alunos resolveram corretamente, 24% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão e 10% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação.

Com relação ao item (d), 65% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 15% dos alunos, não resolveram, 20% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve a necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão.

Atividade 3: Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore na Amazônia (figura 40), modelou o crescimento dela de acordo com a relação $C(t) = 2 + 0,4 \log_4(t - 3)$, onde t representa o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros.

Figura 40 – Árvore amazônica



Fonte: [HTTP://omundodsarvorestga.blogspot.com](http://omundodsarvorestga.blogspot.com)

Pergunta-se:

- a) É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.
- b) Qual o domínio matemático dessa função?
- c) Obtenha a altura da árvore quando $t = 19$ e $t = 67$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

- **Concepção e análise a priori da atividade 3 – Sessão II**

Nesta atividade há um exemplo onde foi apresentado um método que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que serviu de base para a resolução das perguntas.

É esperado que Todas as duplas e um trio respondem corretamente as questões. No item (a) foi perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, as duplas e o trio tenho em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deveria ser zero. Segue o modelo da resolução.

$$a) C(0) = 2 + 0,4 \log_4(0 - 3)$$

$$C(0) = 2$$

$$(b)$$

$$b) t - 3 > 0$$

$$t > 3$$

$$(c)$$

$$C(t) = 2 + 0,4 \log_4(t - 3)$$

$$C(19) = 2 + 0,4 \log_4(19 - 3)$$

$$C(19) = 2 + 0,4 \log_4(16)$$

$$C(19) = 2 + 0,4 \log_4 4^2$$

$$C(19) = 2 + 0,4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$C(19) = 2,8$$

$$C(t) = 2 + 0,4 \log_4(t - 3)$$

$$C(67) = 2 + 0,4 \log_4(67 - 3)$$

$$C(67) = 2 + 0,4 \log_4(64)$$

$$C(67) = 2 + 0,4 \log_4 4^3$$

$$C(67) = 2 + 0,4 \cdot 3 \cdot 1$$

$$C(67) = 3,2$$

- **Análise a posteriori e validação da atividade 3 – Sessão II**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Atividade apresentada da sequência didática envolvia uma modelagem utilizando a função logarítmica para acompanhar a evolução da altura de um tipo de árvore. Destacamos a solução proposta por duas duplas, pois consideramos que as soluções apresentam por parte dos alunos o domínio de esquemas e relação entre as representações semióticas distintas.

A dupla F (figura 41), apresentou a conclusão para o item (a) após ter surgido uma impossibilidade algébrica no cálculo do logaritmo solicitado. Nota-se que a impossibilidade da dupla avançar no cálculo é decorrência das representações estabelecidas e da presença dos teoremas em ação envolvidos na situação. Na resolução do item (c) a dupla F recorreu para outra forma de esquema conceitual para obter o logaritmo, uma vez que já havia sido utilizada essa técnica no problema anterior. Destaca-se nessa resolução que a dupla conseguiu alcançar as expectativas esperadas e se apropriou dos conceitos matemáticos envolvidos.

Figura 41 - Atividade 3, resolução da dupla F – Sessão II

$C(t) = 2 + 0,4 \log_4(t-3)$
 $C(t) = 2 + 0,4 \log_4(-3)$
 Não dá para ir adiante a frente, pois o $\log_4$ é negativo, não tendo como obter o logaritmo.

$t - 3 > 0$

(C) $C(19) = 2 + 0,4 \log_4(19-3)$ e $C(67) = 2 + 0,4 \log_4(67-3)$
 $C(19) = 2 + 0,4 \log_4(16)$ $C(67) = 2 + 0,4 \log_4(64)$
 $C(19) = 2 + 0,4 (16 = 4^x)$ $C(67) = 2 + 0,4 (64 = 4^x)$
 $C(19) = 2 + 0,4 (4^2 = 4^x)$ $C(67) = 2 + 0,4 (4^3 = 4^x)$
 $C(19) = 2 + 0,4 \cdot 2$ $C(67) = 2 + 0,4 \cdot 3$
 $C(19) = 2 + 0,8$ $C(67) = 2 + 1,2$
 $C(19) = 2,8 \text{ m}$ $C(67) = 3,2 \text{ m}$

A altura da árvore aumenta, pois é calculada em relação direta ao tempo, ou seja, se o tempo aumenta, a altura aumenta também.

Fonte: Autor (2022)

Em comparação com a resolução apresentada pela dupla F está a proposta elaborada pela dupla A. Essa dupla conseguiu mobilizar estruturas cognitivas necessárias para responder os dois primeiros itens sendo considerado desnecessários explicitar o cálculo matemático. Porém observa-se na resolução do item (c) que a execução dos teoremas em ação falha após a dupla já ter feito o cálculo de cada logaritmo.

Com isso, eles recorreram para outras formas conceituais com a finalidade de obter o valor do logaritmo, na qual exigiu a formação de outras representações para a compreensão desse conceito. No momento de retornar ao esquema que já vinha sendo desenvolvido, a dupla se equivocou ao realizar a operação numérica entre os valores, sendo que eles fazem primeiro a soma para após multiplicar o resultado.

Brousseau (1986) na tipologia de situação didática de ação, o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o milieu, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;

Uma possível justificativa para esse equívoco é que a representação da soma estava mais visível que a representação da multiplicação, logo a dupla A (figura 42) concebeu que a operação de soma deveria ser efetuada antes da operação de multiplicação. Não houve consulta aos esquemas e registros já apropriados para a execução das operações matemáticas elementares, implicando o erro da dupla na etapa final da resolução.

Figura 42 - Atividade 3, resolução da dupla A – Sessão II

Não é possível calcular, pois o valor do logaritmando será negativo impedindo o cálculo.

(b) domínio matemático está onde está a variável independente, ou seja o (t) terá que ser maior que três.

$$C(19) = 2 + 0,4 \log_4(16) = x$$

$$4^x = 16$$

$$4^x = 4^2$$

$$x = 2$$

$$2,4 \cdot 2 = 4,8$$

$$C(67) = 2 + 0,4 \log_4(64) = x$$

$$4^x = 64$$

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

$$2,4 \cdot 3 = 7,2$$

A altura aumenta com o passar dos anos.

Fonte: Autor (2022)

Analisando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

Com relação ao item (a), 95% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 5% dos alunos, não resolveram.

Com relação o item (b), 80% dos alunos resolveram corretamente, 15% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a atividade e 5% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação.

Com relação ao item (c), 80% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades, 9% dos alunos não resolveram e 11% erraram.

Considerar-se que pelo fato que o professor pesquisador ter conduzido a sequência didática, realizando todas as observações, essa tenha minimizado a quebra do contrato didático, já existente pela própria situação de estudo proposta aos alunos.

Atividade 4: Mudanças de abacaxi. O projeto 'Transferência e Difusão da Produção Integrada de Abacaxi no Estado do Pará' foi implantado nos municípios de Floresta do Araguaia, mesorregião do Sudeste do Pará, microrregião de Conceição do Araguaia, e Salvaterra, mesorregião do Marajó e microrregião do Arari. É coordenado pela Embrapa Amazônia Oriental e executado em parceria com a Secretaria de Estado de Agricultura do Pará (SAGRI), Serviço de Política e Desenvolvimento Agropecuário/Superintendência Federal de Agricultura (SEPDAGPA/ SFA/MAPA), Agência de Defesa Agropecuária do Estado do Pará (ADEPARÁ), Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural do Estado do Pará (EMATER-PA), Prefeitura Municipal de Floresta do Araguaia e iniciativa privada (abacaxicultores).

O Estado do Pará ocupava a primeira posição entre os estados produtores de abacaxi do Brasil com uma área plantada de 15.462 há e a produção de 389.971.000 frutos, entretanto, a previsão de safra 2009 com 10.358 ha (IBGE, 2009a) coloca o Pará na terceira posição. A produção de Salvaterra abastece o mercado de Belém, mas é no sudeste paraense que se concentra a maior produção do Estado (HOMMA ET AL., 2002). Floresta do Araguaia, com uma produção em 2007 de 194.000 mil frutos, variedade Pérola (IBGE, 2009b), é o principal produtor nacional com a característica da produção de frutos no período da entressafra brasileira (HOMMA ET AL., 2002).

Se um produtor da cidade de Floresta do Araguaia decidiu investir no plantio de mudas de abacaxi. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou X mudas de abacaxi. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes a quantidade inicial? (Considere $\log 2 = 0,3$)

- **Concepção e análise a priori da atividade 4 – Sessão II**

Ao lerem o texto, esperamos que os alunos percebam a relação entre a quantidade inicial de mudas e a razão de crescimento por ano ao decorrer do tempo. E que associem, o termo “duplicar” com o termo “dobro”. Ainda assim, alguns alunos

tenham dificuldade para construir a expressão matemática (lei de formação) que relaciona o número de mudas em função do tempo. Pretende-se superar esta dificuldade com o auxílio do modelo matemático, que será construído pelo aluno, buscando a relação entre as variáveis através dos registros. A ideia central, é que, o aluno perceba a relação exponencial transformada pela sua inversa.

É esperado a sua resolução:

$$TM \text{ (total de mudas)} = 20x$$

$$x \text{ (Quantidade inicial de mudas)} = x$$

$$R \text{ (Razão de crescimento por ano)} = 2 \text{ anos}$$

$$N \text{ (tempo } t \text{ em anos)} = t$$

$$\text{Lei de formação: } TM = C \cdot R^N$$

Aplicação:

$$20x = x \cdot 2^t \text{ (representação exponencial)}$$

$$20 = 2^t \text{ (aplicar log em ambos aos lados)}$$

$$\log 20 = \log 2^t$$

$$\log 2 + \log 10 = t \cdot \log 2$$

$$0,3 + 1 = t \cdot 0,3$$

$$t = 4,333 \dots \text{ anos } (4 + 0,333 \dots)$$

$$\text{Fazendo: } 0,3333 \dots \times 12 \text{ meses} = 4 \text{ meses}$$

Logo temos: 4 anos e 4 meses.

• Análise a posteriori e validação da atividade 4 - Sessão II

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Nessa atividade a dupla E (figura 43), teve dificuldade em interpretar a questão, pois não sabia o significado da frase “dobraria a cada ano”, após várias tentativas e discussões, percebeu que era desenvolver o logaritmo de uma potência por meio de uma multiplicação usando as propriedades. A maior dificuldade foi escrever a expressão no registro algébrico.

Figura 43 - Atividade 4, resolução da dupla E – Sessão II

$$\log 2x = \log 20$$

$$\log 2 + \log x = \log 10 + \log 2$$

??

Fonte: Autor (2022)

Já a dupla C (figura 44), chegou à seguinte equação: $x = x_{\text{inicial}} \cdot 2^t$ e comentaram entre si, como vamos transformar o número 20 em potência de base 2? A aluna da dupla concluiu que a variável T (tempo) pode ser encontrada aplicando o logaritmo em ambos os lados da igualdade, pois na atividade é considerado o $\log 2 = 0,3$ e logo encontraram o valor do expoente e acharam a solução do problema. Ressaltamos que a dupla se mostrou entusiasmada para encontrar o número desconhecido e quando encontrou, o entusiasmo aumentou.

Figura 44 - Atividade 4, resolução da dupla C – Sessão II

$$x = x_0 \cdot 2^t$$

$$20 x_0 = x_0 \cdot 2^t$$

$$\log 20 = \log 2^t$$

$$\log 2 + \log 10 = t \cdot \log 2$$

$$0,3 + 1 = t \cdot 0,3$$

$$t = \frac{1,3}{0,3} = \frac{13}{3}$$

1x12 | 4 ANOS e 4 meses

10

Fonte: Autor (2022)

Não previmos em nossa análise a priori que, alguma dupla utilizasse como estratégia para resolução da atividade os conteúdos de Progressão Geométrica que eles estudaram no 1º ano do Ensino Médio para solucionar a situação-problema. A dupla D (figura 45), justificou que, após chegar ao valor da potência, foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência. A fala dos alunos da dupla.

Aluno 1: Professor o senhor pode tirar uma dúvida?

Professor: Qual?

Aluno 2: O valor inicial será a_1 e o valor a_n será 20 vezes do valor inicial?

Professor: Correto.

Aluno 1: O senhor pode lembrar a forma geral da PG, pois esquecemos.

Professor: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Aluno 2: Obrigado! Uma pergunta a razão será 2?

Professor: Porquê?

Alunos 1 e 2: Perceba: $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$

Professor: Muito bem!

Figura 45 - Atividade 4, resolução da dupla D – Sessão II

Quantidade inicial plantada = x , então com o passar do tempo temos uma PG de razão 2.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$20x = 2x \cdot 2^{n-1}$$

$$\log 10 = \log 2^{n-1}$$

$$\log 10 = (n-1) \cdot \log 2$$

$$1 = (n-1) \cdot 0,3$$

$$1 = 0,3n - 0,3$$

$$1,3 = 0,3n$$

$$n = \frac{1,3}{0,3} = 4 \text{ anos e } 4 \text{ meses}$$

Fonte: Autor (2022)

Para essa atividade acredita-se que, pelo fato do professor pesquisador ter conduzido a sequência das falas dos alunos, realizando todas as observações, essa tenha minimizado a quebra do contrato didático, já existente pela própria situação de pesquisa proposta aos alunos.

Segundo, Brousseau(1986, *apud* Silva, 2008, p.50)

“Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro”.

Atividade 5: Durante o primeiro semestre você economizou R\$ 800,00 e agora quer aplicar num fundo de aplicação que rende, em média, 25% a.m. Em quantos meses, você terá no mínimo R\$ 32.000,00? (Utilize uma calculadora científica para realizar os cálculos necessários).

- **Concepção e análise a priori da atividade 5 – Sessão II**

Para a solução da quinta atividade, os alunos devem encontrar o modelo matemático que permita calcular o montante com passa do tempo. Inicialmente tem-se R\$ 800,00.

Espera-se que os alunos percebam, com relação à taxa de juros, que $25\% = \frac{25}{100} = 0,25$. Para encontrar o modelo matemático, observa-se que:

Após 1 mês, será $800 + 800 \cdot 0,25 = 800 \cdot (1 + 0,25) = 800 \cdot 1,25$.

Após 2 meses, será $800 \cdot 1,25 + 0,25 \cdot (800 \cdot 1,25) = (800 \cdot 1,25) \cdot (1 + 0,25) = 800 \cdot (1,25)^2$.

Após 3 meses, será $800 \cdot (1,25)^2 + [800 \cdot (1,25)^2] = 800 \cdot (1,25)^2 \cdot (1 + 0,25) = 800 \cdot (1,25)^3$, logo, após "t" meses, o montante será dado por:

$$M(t) = 800 \cdot (1 + 0,25)^t$$

Portanto para que se atinja a quantia de R\$ 3.200,00, deve-se obter o valor de tal que:

$$3200 = 800(1 + 0,25)^t, \text{ então}$$

$$4 = (1,25)^t, \text{ logo}$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros e utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência vem que:

$$\log 4 = \log(1,25)^t, \text{ usando a calculadora científica obtém-se,}$$

$$0,6020 = t \cdot \log(1,25)$$

$$0,6020 = t \cdot 0,0969$$

$$t = \frac{0,6020}{0,0969} \cong 6,21 \text{ portanto, em aproximadamente } 6 \text{ meses.}$$

- **Análise a posteriori e validação da atividade 5 - Sessão II**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Com relação à quinta atividade, as duplas e o trio tiveram uma melhor atuação, sendo que as intervenções estavam mais relacionadas à construção do modelo matemático. Duas duplas trabalharam com a taxa em porcentagem, dificultando muito seus cálculos.

Após encontrarem o modelo, as intervenções foram no sentido de alertá-los para quais propriedades de logaritmos, eles poderiam usar para resolver a função logarítmica, a propriedade está trabalhada na primeira sessão.

Atividade 6: Se você ganhar na loteria R\$ 900,00 e aplicou num banco com juros compostos à taxa anual de 15%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 600,00?

- **Concepção e análise a priori da atividade 6 - Sessão II**

Para a solução da terceira atividade, os alunos devem observar que para se obter juros no valor de R\$ 600,00, seu montante será de R\$ 1.500,00. Lembrando que a taxa de juros é 15% ao ano, deve-se calcular o tempo tal que:

$$1.500 = 900 \cdot (1 + 0,15)^t, \text{ ou}$$

$$\frac{15}{9} = (1,15)^t$$

Pode-se aplicar a propriedade do quociente de um logaritmo, conforme os dados no enunciado ou utilizar a calculadora científica para obter-se:

$$\log 1,6666 = t \cdot \log 1,15$$

$$0,2218 = t \cdot 0,0606, \text{ portanto}$$

$$t = 3,6600$$

E concluir que daqui a 3 anos e 6 meses aproximadamente, serão obtidos juros no valor de R\$ 600,00.

- **Análise a posteriori e validação da atividade 6 - Sessão II**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Para a sexta atividade, as duplas e o trio foram rápidos, sendo que quatro duplas visualizaram o modelo matemático de imediato. O entusiasmo foi grande.

Dupla A: professor posso fazer os cálculos direto?

Trio: sobre a porcentagem nós temos que dividir por 100 né?

Dupla F: não vamos precisar fazer todas aquelas contas e....

Já a dupla H, pelos argumentos apresentados, demonstrou saber muito bem o que deveria fazer para resolver essa atividade, porém se confundiu em uma das substituições de valores numéricos na expressão interpretada e não soube seguir na resolução com valores numéricos, embora soubesse a que atividade era de juros compostos. A resolução da dupla H na figura 46 abaixo.

Figura 46 - Atividade 6, resolução da dupla H – Sessão II

$$\begin{aligned}
 M &= C \cdot (1 + i)^t \\
 1500 &= 600 (1 + 0.15)^t \\
 \frac{15}{6} &= (1.15)^t \\
 \lg \frac{15}{6} &= \lg (1.15)^t \\
 0.3979 &= t \cdot 0.05 \\
 t &= \frac{0.3979}{0.05} \\
 t &= 2.1739
 \end{aligned}$$

Fonte: Autor (2022)

Para essas atividades foi utilizado um período de 50 minutos e após realizou-se a formalização do conhecimento, chamando a atenção para a aplicação das propriedades operatórias dos logaritmos e também para o manuseio da calculadora científica que nem todas as duplas e o trio tinham domínio.

5.4.1.3. Sessão III: Problemas envolvendo escala logarítmica.

O objetivo é resolver problemas utilizando a definição de escala logarítmica para compreender e medir a intensidade de terremotos, a intensidade do som e pH de soluções, propiciando aos alunos uma oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problemas, os alunos serão conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação.

A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problema, os alunos foram conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema com o objetivo de obter uma resposta satisfatória. Nessa sessão ao todo são três atividades propostas realizadas no quarto e no quinto dia.

Atividade 1: Aplicação em terremotos - Um terremoto, ou sismo, ocorre quando rochas da litosfera submetidas a altas tensões se acomodam (sismo). As ondas sísmicas, causadas pelo choque, partem em todas as direções a partir de um ponto chamado foco ou hipocentro. O ponto situado na superfície exatamente acima do foco é chamado de epicentro do terremoto. A partir desse ponto, as ondas de choque fazem com que o solo se mova em movimentos cíclicos que geram “ondas” forçando o solo para cima e para baixo, e de um lado para o outro. Quando o epicentro está abaixo de um mar ou oceano, ele pode criar um maremoto ou um tsunami, uma onda gigante, como na figura 47 abaixo.

Figura: 47 - Tsunami invadindo rodovia no Japão logo após o terremoto de março de 2011.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

A maior parte dos terremotos ocorre nas áreas de contato entre placas tectônicas, ou em falhas entre dois blocos rochosos, como mostra a figura 48.

Figura: 48 - Área de contato entre placas tectônicas.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

O comprimento de uma falha pode variar de alguns centímetros até centenas de quilômetros, como é o caso da falha de Santo André (ou San Andreas), na Califórnia, Estados Unidos, conforme mostra a figura 49 abaixo.

Figura: 49 - Falha de Santo André - San Francisco - Los Angeles.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

Só nos Estados Unidos, ocorrem de 12 mil a 14 mil terremotos anualmente (ou seja, aproximadamente 35 por dia). De acordo com registros históricos de longo prazo, aproximadamente 18 grandes terremotos (de 7 a 7,9 na escala Richter) e um terremoto gigante (8 ou acima) podem ser esperados num ano.

O maior terremoto já registrado foi o grande terremoto do Chile, em 1960, que atingiu 9,5 na escala Richter, seguido pelo da Indonésia, em 2004, que atingiu 9,3 na

mesma escala. A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro.

A intensidade I de um terremoto é um número que varia de $I = 0$ até $I = 9,5$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E , é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ kwh}$..

Tomando como base o texto e seus conhecimentos teóricos a respeito de função exponencial e logarítmica, análise e responda às questões: Explorando a lei da função logarítmica. Calcule a intensidade na escala Richter para as seguintes energias liberadas:

- $E = 7 \cdot 10^9 \text{ kwh}$ e $E = 7 \cdot 10^7 \text{ kwh}$
- Se a energia liberada é cada vez maior nos terremotos, o que ocorre com o valor da sua escala Richter? Justifique a sua resposta.
- Determine o domínio, a imagem e a intersecção da função com o eixo horizontal.
- Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?
- Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

• Concepção e análise a priori da atividade 1 – Sessão III

Tendo sido dado o valores de $E = 7 \cdot 10^9 \text{ kwh}$, $E = 7 \cdot 10^7 \text{ kwh}$ e $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kwh}$, o aluno deve concluir que a expressão que calcula a intensidade do terremoto ficará $I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, substituirá os valores e posteriormente encontrar os resultados.

Inicialmente o professor pesquisador retoma os conteúdos a respeito de domínio e imagem da Função Logarítmica, bem como revisa também o significado geométrico do ponto de intersecção da função com o eixo horizontal. A partir de então, os alunos podem concluir que o domínio desta função é R^+ e a imagem é R . Assim como os discentes devem lembrar que o ponto onde o gráfico intercepta o eixo horizontal tem como ordenada o valor $y = 0$, neste caso em que $I = 0$. Logo, é possível desenvolver o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ \frac{0}{\frac{2}{3}} &= \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ 0 &= \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \end{aligned}$$

A partir daí, utilizando a definição de logaritmos, tem-se:

$$\begin{aligned} 10^0 &= \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \\ 1 &= \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \\ x &= 7 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Assim, a função que representa a intensidade do terremoto intercepta o eixo x no ponto 0,007.

Como é esperado que todos os alunos possam encontrar a energia liberada de um terremoto de 8 na escala Richter, usando a fórmula:

$$\begin{aligned} 8 &= \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ E &= 7 \cdot 10^9 \text{ kwh} \end{aligned}$$

Será aumentada.

- **Análise a posteriori e validação da atividade 1 – Sessão III**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Uma aplicação bastante conhecida dos logaritmos é a Escala Richter, que mede a intensidade dos terremotos. A atividade 1 se inicia quando o epicentro está abaixo de um mar ou oceano, ele pode criar um maremoto ou um tsunami, uma onda gigante, que causou a morte de várias pessoas, o pesquisador fornece uma breve explicação para a escala Richter e uma fórmula para calcular a intensidade dos terremotos usando essa escala.

De forma geral, todas as duplas e um trio apresentaram uma solução satisfatória para o problema da medição da escala Richter do terremoto. Os cálculos desenvolvidos pelas duplas e um trio demonstraram a organização dos conceitos e teoremas em ação necessários para a execução das questões. Apresentou-se a resolução do problema proposto pela dupla D, destacando que as etapas de cálculo apresentadas demonstram a organização conceitual e a transição entre esquemas ocorre utilizando conceitos e teoremas em ação. Com os cálculos apresentados no item (a) (figura 50) e os argumentos no item (b) (figura 51) da dupla D, chegaram a seguinte resolução:

Figura 50 - Atividade 1, item (a), resolução da dupla D – Sessão III

a) $E = 7 \cdot 10^9 \text{ KWK}$ e $E = 7 \cdot 10^7 \text{ KWK}$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{7 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^3} \right) =$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{10^9}{10^3} \right)$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} 10^{12}$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \log_{10} 10$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 1$$

$$I = \frac{24}{3} = 8$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{7 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^3} \right)$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} 10^4$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \log_{10} 10$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1$$

$$I = \frac{8}{3} = 2,66$$

Fonte: Autor (2022)

Figura 51 - Atividade 1, item (b), resolução da dupla D – Sessão III

B) R= Quanto maior for a energia liberada no terremoto, maior será a escala Richter, devido os cálculos acima.

Fonte: Autor (2022)

Já no item (c) (figura 52) esta constatação, esperada pela nossa análise a priori, foi incorporada na situação didática que aplicamos. Dentro desse enfoque, com os conteúdos retomados a respeito de domínio e imagem as duplas e o trio não tiveram obstáculos de entender e resolver, segue a resolução da dupla D.

Figura 52 - Atividade 1, item (c), resolução da dupla D – Sessão III

c)

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E}{E^0} \right)$$

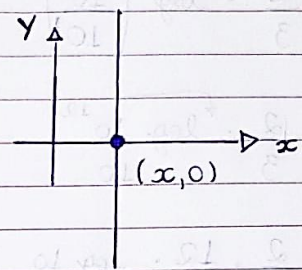
$$0 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$\frac{0}{\frac{2}{3}} = \log_{10} \left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$0 = \log_{10} \left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$10^0 = \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \quad x = 7 \cdot 10^{-3} \times 1$$

$$x = 7 \cdot 10^{-3} \text{ KWh}$$

$$1 = \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} \quad 1 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = x$$


Fonte: Autor (2022)

Porém as duplas A e E cometeram o mesmo erro: consideraram zero o valor de $x(E)$ na fórmula, e resolveram a equação criada para descobrir o valor de $y(I)$. O professor chamou a atenção dos alunos para esse fato, sugerindo que eles relesem o enunciado e prestassem mais atenção no significado de cada variável. As duplas, então, seguiram o sugerido e perceberam que estavam substituindo as variáveis de maneira equivocada. Desmancharam os cálculos incorretos e refizeram corretamente.

No item (d) (figura 53), o aluno é levado a comparar a quantidade de energia liberada por um terremoto de intensidade 8 na escala Richter e no item (e) a intensidade aumenta a unidade e a energia liberada fica multiplicada $10\sqrt{10}$. Os cálculos da intensidade e da energia liberada e foi feito corretamente pela dupla D. Segue a resolução.

Figura 53 - Atividade 1, item (d), resolução da dupla D – Sessão III

D) $I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$	E) $I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right)$
$8 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$	$(I+1) = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$
$8 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$	$\frac{3(I+1)}{2} = \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$
$8 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$	$\frac{3I}{2} + \frac{3}{2} = \log_{10} \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \right)$
$\frac{8}{\frac{2}{3}} = \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{24 : 2}{2 : 2}$	$10^{\frac{3I}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$
$12 = \log_{10} \left(\frac{7 \cdot 10^3}{E} \right)$	$E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{3I}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}}$
$10^{12} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$	$E = 10^{\frac{3}{2}} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{3I}{2}}$
$10^{12} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$	$E = \sqrt{10^3} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{3I}{2}}$
$E = 10^{12} \cdot 7 \cdot 10^{-3}$	$E = \sqrt{10^2 \cdot 10} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{3I}{2}}$
$E = 7 \cdot 10^9 \text{ KWh}$	$E = 10 \sqrt{10} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{\frac{3I}{2}}$

Fonte: Autor (2022)

Analisando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

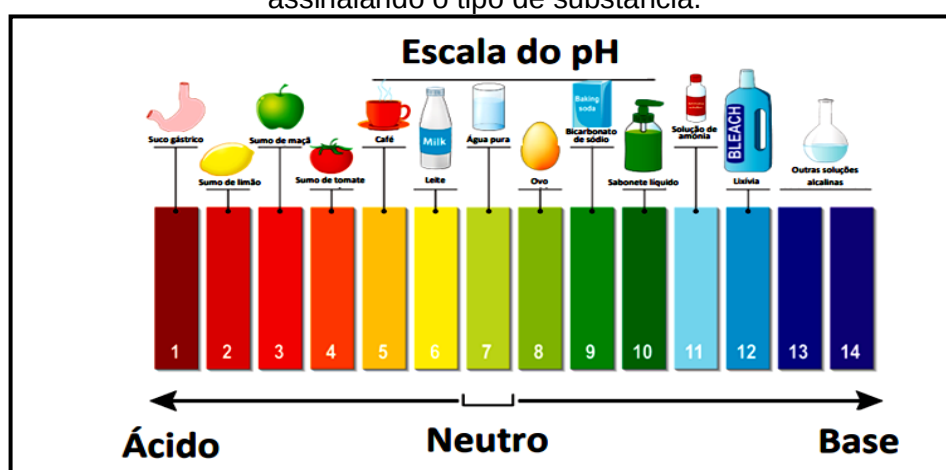
Com relação ao item (a), 65% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 35% dos alunos, não resolveram. Com relação o item (b), 60% dos alunos resolveram corretamente, 30% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão e 10% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação. Com relação os itens (d) e (e), quase todos os alunos tiveram as mesmas porcentagens de acertos e erros e 4% dos alunos desses itens não resolveram o item (e).

Atividade 2: pH (ácidos e base): Em Química, a acidez de uma solução líquida é medida pela concentração de íons de hidrogênio na solução (a unidade de medida, a título de informação, é de "moles por litro"). A concentração de hidrogênio é denotada por $[H^+]$. Como tais concentrações geralmente envolvem expoentes negativos de 10, ordens de grandeza negativas são usadas para comparar níveis de acidez. A medida de acidez usada é pH e é o oposto do logaritmo na base 10 da concentração de hidrogênio: $P[H^+] = -\log[H^+]$.

Soluções mais ácidas têm concentrações de íons de hidrogênio mais altos e valores de pH mais baixos. (texto extraído do site: www.pearson.com.br).

O cálculo matemático para determinar o pH de uma solução aquosa é dado pela relação $P[H^+] = -\log_{10}[H^+]$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \leq pH \leq 14$. (figura 54). Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

Figura 54- Escala de pH. As cores são baseadas num indicador de pH que muda de cor, assinalando o tipo de substância.



Fonte: <https://universidadejunior.up.pt>

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Vermelha	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

- Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, justifique com os seus cálculos necessários.
- Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrôniônica? Justifique a sua resposta.
- Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio da cor Azul é maior que da cor Laranja?
- Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

• Conceção e análise a priori da atividade 2 – Sessão III

É esperado que os alunos possam desenvolver os cálculos verificando os conhecimentos adquirido sobre pH a partir das informações contidas na situação problema.

a) $H^+ = 10^{-8} = \text{Básica}$

$H^+ = 10^{-4} = \text{Ácida}$

$H^+ = 10^{-7} = \text{Nêutra}$

$H^+ = 10^{-12} = \text{Básica}$

b) é esperado que os alunos apresentem a potência de 10^{-4} .

c) $\frac{\text{Cor Azul}}{\text{Cor laranja}} = \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10^4$

d) A concentração de íons de hidrogênio da cor azul tem sua ordem de grandeza 4 vezes maior que a da cor laranja, exatamente a diferença entre os níveis de pH.

• Análise a posteriori e validação da atividade 2 – Sessão III

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese de trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

De acordo com a análise a priori, esperava que os alunos da pesquisa percebessem a existência de concentrações de íons de hidrogênios de quatro tipos e organizassem seus resultados, de modo a viabilizar a determinação de todas as soluções inteiras, vivenciando uma situação que implicitamente representava tal característica da concentração de hidrogênio.

A prática empregada envolvendo a contextualização, despertou interesse e curiosidade nos alunos em saber sobre o tema pH, sobretudo em relação a identificação de substância ácida, neutra e/ou básica presentes no cotidiano. Com a estratégia da sequência didática, foi possível promover a construção do conhecimento dos estudantes a respeito do assunto abordado, proporcionando para o ensino uma estratégia diferenciada de abordagem ao tema pH, onde a relação do assunto com o cotidiano do aluno passa a ser a principal forma de construir conceitos científicos.

Apresentamos a resolução proposta pela dupla A da atividade 2 (figura 55), destacando as principais características observadas na resolução. Quando a dupla A identificou a relação matemática para as duas concentrações de íons de hidrogênio, iniciou os cálculos para descobrir quanto valia cada concentração de cada substância proposta. Para cada uma das substâncias dadas a dupla A evidencia as notações $[H^+] = 10^{-8}$, $[H^+] = 10^{-4}$, $[H^+] = 10^{-7}$ e $[H^+] = 10^{-12}$. Observa-se nessa ação que a dupla A associa de forma correta a variável independente da função, calculando o valor da concentração de cada solução.

A ocorrência de teoremas em ação é frequente na resolução proposta pela dupla A, pois são utilizadas a definição dos logaritmos na resolução dos cálculos. Após obter valores de pH para cada substância, a dupla soube classificá-las de acordo com a definição do ponto de vista da química. Para realizar a classificação das substâncias percebe-se que já estava formado o conceito de ordenação pelos alunos, pois eles deveriam classificar observando as desigualdades $>$ (maior) e $<$ (menor).

Destacamos ainda a necessidade da dupla em mudar o esquema conceitual envolvido no cálculo do logaritmo. Quando o cálculo exigiu que os alunos soubessem o valor de $\log_{10}(10)$, eles recorreram para a equação exponencial $10^x = 10$ obtendo $x = 1$ para a resposta. Isso mostra a fluência entre os esquemas e representações desenvolvidas pelos alunos perante o problema, onde eles recorrem para outras formas de representação, que podemos considerar semióticas, com o objetivo de obter uma solução para o cálculo de logaritmo.

Quanto ao item (b) da atividade 2 destacamos que ao apresentar os números 10^{-12} e 10^{-4} na sua forma decimal utilizando a transição entre representações semióticas distintas, a dupla procurou desenvolver uma forma para poder comparar essas duas quantidades. Ao transformar $10^{-12} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = 0,1^{12} = 0,000000000001$ a cada sinal de igual observa-se a mudança na forma de representação semiótica para a quantidade 10^{-12} . Os alunos realizaram essas mudanças com o objetivo de visualizar qual o melhor critério de comparação que eles podiam usar. Quando eles representaram na forma decimal cada uma das quantidades puderam comparar satisfatoriamente os dois valores entre si e deduzir uma conclusão. Resolução da dupla A dos itens (a),(b),(c) e (d).

Figura 55 - Atividade 2, resolução da dupla A – Sessão III

a)

$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ $P(H^-8) = -\log_{10}(10^{-8})$ $P(H^-8) = -(-8) \cdot \log_{10} 10$ $P(H^-8) = 8 \cdot 1 = 8$ Azul é básica	$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ $P(H^-4) = -\log_{10}(10^{-4})$ $P(H^-4) = -(-4) \cdot \log_{10} 10$ $P(H^-4) = 4 \cdot 1 = 4$ Azul é básica Vermelha é ácida
$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ $P(H^-7) = -\log_{10}(10^{-7})$ $P(H^-7) = -(-7) \cdot \log_{10} 10$ $P(H^-7) = 7 \cdot 1 = 7$ Verde é neutro	$P(H^+) = -\log_{10}(H^+)$ $P(H^{-12}) = -\log_{10}(10^{-12})$ $P(H^{-12}) = -(-12) \cdot \log_{10} 10$ $P(H^{-12}) = 12 \cdot 1 = 12$ Laranja é básica

b)

$$10^{-12} = \left(\frac{1}{10}\right)^{12} = (0,1)^{12} = 0,000000000001$$

menor pois tem menor
cosz de H^+ .

$$10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = (0,1)^4 = 0,0001$$

maior pois tem mais cosz de H^+ .

c)

$$\frac{[H^+] \text{ da cor Azul}}{[H^+] \text{ da cor laranja}} = \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10^{-8-(-12)} = 10^{-8+12} = 10^4$$

d) A da cor azul é 4 vezes maior que a cor laranja.

Fonte: Autor (2022)

Diferentemente da dupla A, a resolução apresentada pela dupla E (figura 56), para do pH envolve a observação de outras características. Nota-se que a dupla E não recorre para outra forma de esquema conceitual para o cálculo de $\log_{10} 10$, uma vez que eles já haviam aprendido como obter o valor desse tipo de logaritmo escrito em base 10 em aulas anteriores à sequência didática.

Para a resolução do item (b), a dupla E, estabelece uma comparação entre expoentes, sendo, portanto, considerado desnecessário a comparação entre as quantidades através de outras formas de representação. Isso demonstra a capacidade da dupla A em deduzir uma conclusão utilizando menos representações semióticas

do que a dupla A. Esse fenômeno é comum em sala de aula, pois cada aluno desenvolve a quantidade de representações semióticas que considerar mais adequado para efetuar as conversões entre os esquemas o mais natural possível, tornando eficaz a sua apropriação dos conceitos.

Figura 56 - Atividade 2, resolução da dupla E, itens a, b, c, d – Sessão III

a) $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log_{10} 10^{-8} = 8.1 = 8$ BÁSICA
 $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log_{10} 10^{-4} = 4.1 = 4$ ÁCIDA
 $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log_{10} 10^{-7} = 7.1 = 7$ NEUTRA
 $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log_{10} 10^{-12} = 12.1 = 12$ BÁSICA

b) É a substância com a maior concentração hidrogênio-ionica é a vermelha e com a menor é a substância laranja por que -12 é o menor número e -4 é a maior.

$$\frac{\text{Cor Azul}}{\text{Cor Laranja}} = \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10^{-8+12} = 10^4$$

A cor Azul é 4 vezes maior que a cor laranja

Fonte: Autor (2022)

Analisando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

Com relação ao item (a), 85% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 15% dos alunos, não resolveram. Com relação o item (b), 60% dos alunos resolveram corretamente, 30% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade de o professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão e 10% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação. Com relação os itens (c), todos os alunos tiveram as mesmas porcentagens de acertos. Com relação ao item (d), 90% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 10% dos alunos, não resolveram.

Atividade 3: Entendendo os decibéis - O decibel (dB) é uma unidade logarítmica que indica a proporção de uma quantidade física (geralmente energia ou intensidade) em relação a um nível de referência especificado ou implícito. Uma relação em decibéis é igual a dez vezes o logaritmo de base 10 da razão entre duas quantidades de energia (THE INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERING, 2000). Um decibel é um décimo de um bel, uma unidade raramente usada, uma vez que apresenta valores muito elevados, pouco práticos de serem utilizados com relação à audição humana. Apesar de poder ser definido a partir de diferentes grandezas físicas, como por exemplo a pressão sonora, utilizaremos para efeito desse trabalho a definição que trabalha com intensidade sonora.

Definimos intensidade sonora (I) como sendo a razão entre a potência sonora e a área da superfície considerada, isto é, $I = \frac{P}{A}$. Esta razão serve principalmente para avaliar se um som é forte ou fraco tendo como unidade (watt/m^2). No entanto, a utilização da intensidade sonora apresenta grandes dificuldades, por trabalhar com valores decimais muito pequenos. Portanto, ao trabalharmos com decibel, temos uma vantagem operacional muito grande.

A partir da definição de decibel e da escolha por utilizar intensidade sonora podemos escrever a fórmula:

$$I_{db} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ onde } I_0 = 10^{-12} \text{ watt/m}^2.$$

O nível de intensidade sonora é medido em decibéis, indicado por db. Como o nível de intensidade varia em escala logarítmica, os sons cuja intensidade são 10^n vezes maior do que a intensidade mínima I_0 , são percebidos com nível de intensidade “n” vezes maior.

- De acordo com os dados, o nível de intensidade no limiar da audição é 0 db. Calcule qual é a intensidade (I_0) do som correspondente a esse nível de intensidade?
- O nível de intensidade de uma conversação normal (a 1 m de distância) é de 60 db. Calcule qual é a intensidade (I_{60}) sonora correspondente a este nível de intensidade?
- Cientistas afirmam que a partir de 120 db, o som provoca dor e a partir de 160 db pode haver ruptura do ouvido humano. Calcule qual é a intensidade sonora (I_{120}) db?

- **Concepção e análise a priori da atividade 3 – Sessão III**

Como o nível de intensidade sonora é dado por $I_{db} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ tem-se que:

$$0 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 10^0 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ logo } 10^{-12} = I_0$$

Espera-se que os alunos cheguem a conclusão de que para um nível de intensidade mínimo de 0 db, a intensidade inicial seja $I_0 = \frac{10^{-12} W}{m^2}$.

Para o item (b), segue-se o mesmo raciocínio, para um nível de intensidade de 60 db, tem-se:

$$60 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ portanto, } 10^6 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 10^6 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 10^6 \cdot 10^{-12} = I$$

$$\text{Logo, } 10^{-6} = I, \text{ portanto, a intensidade sonora } I_{60} = \frac{10^{-6} W}{m^2}.$$

Para o item (c), segue que para um nível de intensidade de 120db resulta:

$$120 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 12 = \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ logo, } 10^{12} = \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou, } 10^{12} \cdot 10^{-12} = I,$$

$$\text{Logo } 10^0 = I \text{ portanto } I_{120} = 10^0 = 1 W/m^2.$$

- **Análise a posteriori e validação da atividade 3 – Sessão III**

Esta fase tem como objetivo de apoiar no conjunto de dados recolhidos durante a Experimentação confrontando com tudo que foi levantado na segunda fase da metodologia, bem como validando, ou não, a hipótese do trabalho do professor pesquisador e fornecendo material para responder à questão que norteia a pesquisa.

Apresentamos a seguir as análises dos resultados das duplas A, B e o trio para cada uma das atividades propostas durante a aplicação letra (a).

Observamos durante a aplicação da sequência que a Dupla A (figura 57) utilizou como estratégia da resolução de equação, envolvendo a intensidade sonora dada, como nos prevemos em nossa análise a priori.

Figura 57 - Atividade 3, resolução da dupla A – Sessão III

Handwritten mathematical work on a piece of paper showing the derivation of the reference intensity I_0 from the decibel scale. The work includes the formula $I_{db} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ and several steps of algebraic manipulation to solve for I_0 when $I_{db} = 0$, resulting in $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Para responder os itens b e c, a partir das informações da atividade para os níveis de intensidades de 60 db e 120 db, as duplas F e D e os restantes das duplas e o trio, através da função logarítmica associados ao nível de intensidade sonora, não tiveram dificuldades de responder, sendo que foi esperado em nossa análise a priori.

Esta abordagem dessa atividade mostra didaticamente como é possível construir a função $I = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, a fim de que o aluno possa atribuir significado ao uso da função logarítmica e dos logaritmos nos cálculos associados ao nível de intensidade sonora.

Ao relacionar todos os itens a, b e c, percebeu-se que apenas uma dupla pediu ajuda ao professor pesquisador, a dificuldade era encontrar a base da função. Assim o logaritmo de um número x , na base 10, é o expoente da base 10, necessário para se obter x , isto é:

$$\log_{10} x = y \text{ é equivalente a } 10^y = x$$

Analisando as resoluções apresentadas pelas duplas e o trio, pode-se destacar as seguintes observações:

Com relação ao item (a), 99% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldade, uma dupla pediu ajuda.

Com relação o item (b), 90% dos alunos resolveram corretamente, 8% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade do professor intervir para que os alunos pudessem concluir a questão e 2% dos alunos, calcularam corretamente porém não conseguiram interpretar a situação.

Com relação os itens (c), todos os alunos tiveram as mesmas porcentagens de acertos.

5.4.1.4 Sessão IV: A HISTÓRIA E O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS

O objetivo dessa sessão foi usar a História da Matemática para mostrar a construção e evolução do conceito de logaritmo de um número. Utilizando a ideia de Napier que tornou-se o primeiro homem a desvendar os logaritmos, a sua análise lógica sobre esse procedimento ajudou a desenvolver melhor os cálculos tornando-se útil para o desenvolvimento científico e para estudos posteriores.

Um dos meios mais utilizados para se compreender o significado lógico dos logaritmos são as progressões geométricas e progressões aritméticas. Para desenvolver os logaritmos, Napier apropriou-se das progressões aritméticas e geométricas, estabelecendo uma relação entre elas. Pode-se observar:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	(Progressão Geométrica)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Progressão Aritmética)

A sua primeira observação apontou que o produto de dois termos da primeira progressão está associado com a soma dos dois termos correspondentes da segunda progressão.

Atividade 1ª : Foi distribuído aos alunos o texto a seguir:

A história da Matemática relata que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente os relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos já vinham tentando achar um processo que permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Burgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Napier ao comparar os termos de duas sequências, por exemplo:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024 ...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...

Notou que existem números que podem ser expressos como produto de outros números. Ao observar as sequências acima, Napier percebeu que para multiplicar dois termos da primeira sequência, bastava somar os seus correspondentes na outra sequência e ver qual o termo da primeira sequência que corresponde a essa soma. Ele também observou que para realizar o produto de $4 \cdot 8$ bastava somar $2 + 3 = 5$, ou seja, os seus correspondentes na segunda sequência e encontrar o termo da primeira que corresponde ao 5. Neste caso, é o 32. Com esse raciocínio John Napier e Jobst Burgi, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Observando as sequências abaixo,

3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683 ...
1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...

E usando as ideias de Napier, pergunta-se:

- Qual é o produto de 9 por 81? E o de 27 por 243? Justifique sua resposta.
- Qual é a divisão de 19683 por 2187? Justifique sua resposta com base no método de Napier.
- Qual é o resultado de 27 elevado ao quadrado? Justifique sua resposta.

- **Concepção e análise a priori da atividade 1 – Sessão IV**

Segundo as ideias de Napier e com base no exemplo dado, para realizarem o 9.81, localizados na primeira sequência, os alunos devem perceber que somando os elementos correspondentes a esses números na segunda sequência, ou seja, $2 + 4 = 6$, identificando na primeira sequência o número 729. Para o produto $27 \cdot 243$, também da primeira sequência, basta que aos alunos somem os números correspondentes de 27 e de 81, na segunda sequência, no caso. $3 + 5 = 8$ e identifique o termo da primeira sequência que corresponde a essa soma, no caso 6561.

Como justificativa do item (a), espera-se que os alunos percebam que a regra acima enumerada nada mais é do que a conhecida regra para multiplicar potências de mesma base, ou seja, para 9.81, equivale a $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$. Para o outro caso o raciocínio é equivalente.

No item (b), para a divisão de 19683 por 2187, espera-se que os alunos percebam que basta subtrair os termos correspondentes a 19683 e 2187 na segunda sequência, ou seja, $9 - 7 = 2$ e identifique o termo da primeira sequência que corresponde a essa subtração, no caso 2. E para a justificativa, a resposta esperada é que utilizem as propriedades de potência de mesma base, isto é, $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$.

Com relação ao item (c), o raciocínio é semelhante, basta observar que $(27)^2 = 27 \cdot 27 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$ e identificar o termo da primeira sequência que corresponde ao número 6, que nesse caso é o número 729.

- **Análise a posteriori e validação da atividade 1 – Sessão IV**

A maioria das duplas e o trio, pelos menos 79,2% alunos, não teve dificuldades para resolver essa atividade. Inicialmente os alunos dispuseram de um tempo de aproximadamente quarenta minutos para a realização da atividade.

Das oito duplas e um trio, duas duplas (20,8% dos alunos), apresentaram dificuldades com relação à justificativa dos itens, sendo que uma delas, a dupla C, após a intervenção do professor, conseguiu finalizar a atividade, enquanto a dupla D, efetuou os cálculos, porém não justificou.

No final da atividade foi feita uma explanação, pelo professor, referente aos problemas que impulsionaram o surgimento dos logaritmos e foi feita uma análise da evolução histórica desse conceito e das necessidades do uso do logaritmo para efetuar os cálculos.

5.4.1.5 Sessão V: CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O objetivo dessa sessão é construir o gráfico da função logarítmica, com o auxílio do software Geogebra e identificar essa função como sendo a inversa da função exponencial, determinar o domínio e o conjunto imagem da função logarítmica, bem como as condições para que a função seja crescente ou decrescente.

1ª) Atividade: Considere as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

a) Construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e uma tabela para a função $g(x)$ para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.

b) Compare os valores de "x" da primeira tabela e os valores de $g(x)$ da segunda tabela e os valores de "x" da segunda tabela e os valores de $f(x)$ da primeira tabela. Quais são suas conclusões? Justifique.

c) Use o aplicativo para traçar o gráfico das duas funções no mesmo plano cartesiano.

d) Trace onde se localiza a bissetriz do 1º quadrante, no gráfico das funções f e g , e identifique os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ das tabelas construídas no item (a).

d_1) Esses pontos são simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante?

d_2) Os gráficos das funções f e g são simétricos em relação a bissetriz do 1º quadrante? Justifique.

e) Analisando o gráfico determine o domínio e o conjunto imagem das funções $f(x)$ e $g(x)$.

f) Verifique se as funções $F(x)$ e $g(x)$ são crescentes.

• Concepção e análise a priori da atividade 1 – Sessão V

Tabela 4 – Valores de x e $f(x) = 2^x$

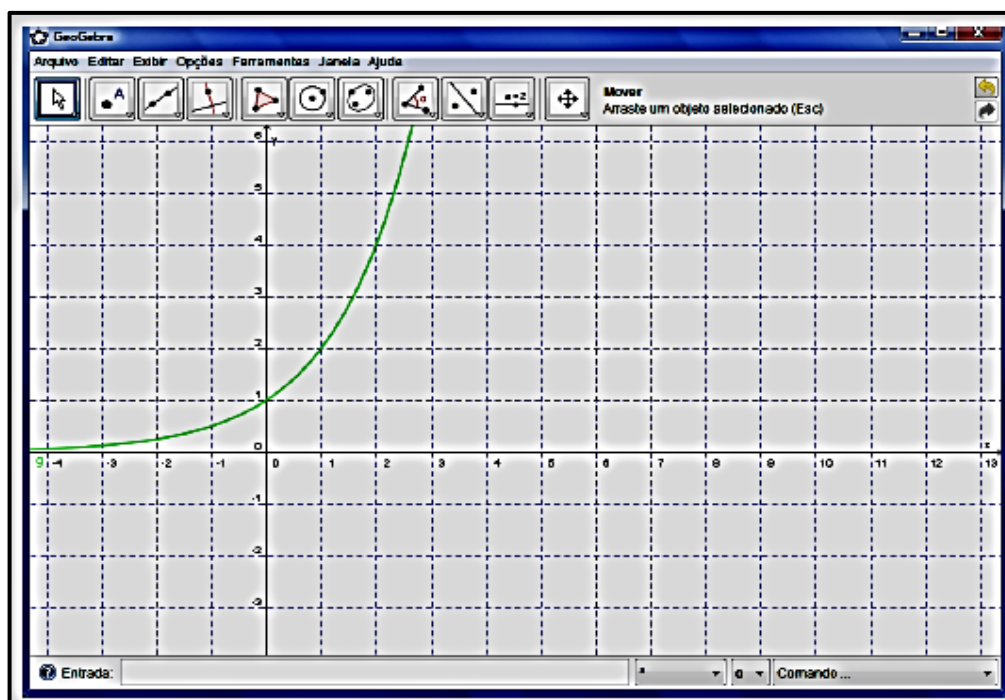
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Tabela 5 – Valores de x e $g(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3

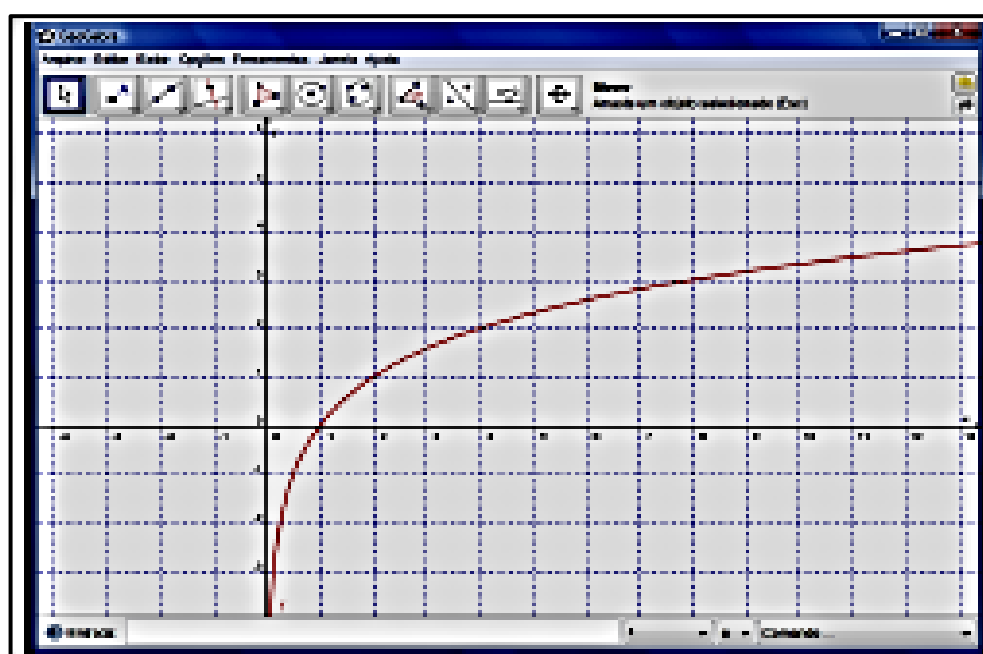
Espera-se que ao construírem as tabelas, os alunos percebam a igualdade entre os valores de x da primeira tabela e $g(x)$ na segunda tabela e justifiquem essa igualdade, usando a equivalência entre as equações $y = \log_2 x$ e $x = 2^y$. O traçado dos gráficos será feito usando o software Geogebra (figuras 58 e 59).

Figura 58 - Representação da função exponencial no registro gráfico $g(x) = 2^x$



Fonte. Autor (2022).

Figura 59 - Representação da função exponencial no registro gráfico $\log_2 x$



Fonte. Autor (2022).

O item (d) foi elaborado com o objetivo de que os alunos percebam que os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ são simétricos, pois tem a mesma distância em relação à bissetriz do primeiro quadrante e que os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação à essa bissetriz.

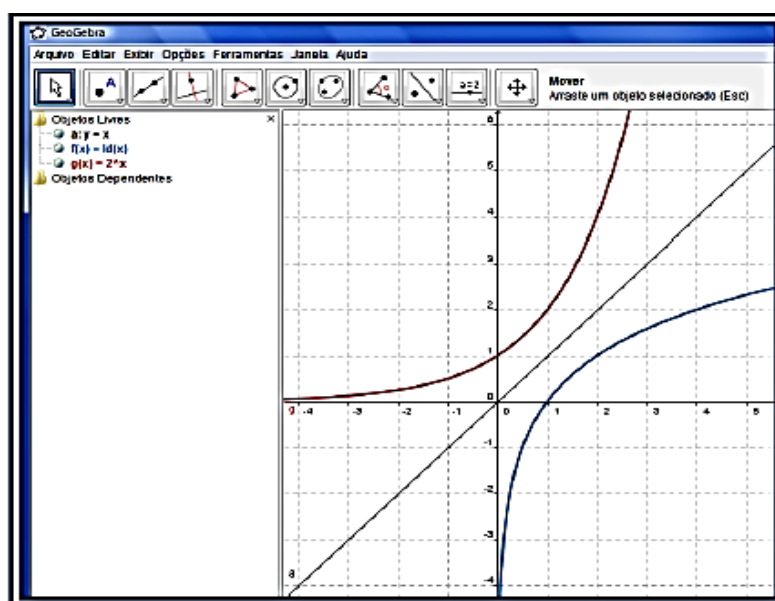
Com relação ao item (e), espera-se que os alunos constatem que o domínio da função " f " é o conjunto dos números reais e a imagem dessa função é o conjunto dos números reais positivos e igualmente para a função g , tem-se que o domínio é o conjunto dos números reais positivos e a imagem é o conjunto dos números reais.

Para o item (f), espera-se que os alunos percebam que aumentando o valor de " x " o valor de " y " também aumenta, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 < y_2$ para todo x_1, x_2 pertencente ao domínio das funções, o que caracteriza que as funções são crescentes.

- **Análise a posteriori e validação da atividade 1 – Sessão V**

Em nossa análise a priori, prevíamos que os alunos observassem por meio da tabela que se os pares ordenados (x, y) da tabela referente pertencem a função $f(x)$ definida por $f(x) = \log_2 x$ são os mesmos (y, x) que pertencem a função g definida por $g(x) = 2^x$ e, portanto, são funções inversas. Essa característica de “Pensar ao contrário” não é automático [...]. (BROLEZI; BARUFI, 2007 p.28).

Figura 60 - Atividade 1, resolução da dupla E sessão V



Fonte. Autor (2022).

E desta forma a dupla E (figura 60), não percebeu inicialmente, mas a abstração do conceito da função inversa tornou-se possível quando utilizou o software Geogebra pois digitou duas funções na janela de entrada do software em um mesmo sistema cartesiano e concluiu que uma função é inversa da outra. *Comentários das duplas:*

Dupla A: Através do gráfico professor, podemos concluir que o domínio da função $f(x) = \log_a x$ é o conjunto R_+^ e o conjunto imagem da função $f(x) = \log_a x$ é o conjunto R dos números reais.*

Dupla C: O domínio da função $g(x) = a^x$ é o conjunto R dos números reais e o conjunto imagem da função $g(x) = a^x$ é o conjunto R_+^ .*

Professor: Correto. Observamos que o domínio da função exponencial é igual ao conjunto imagem da função logarítmica e que o domínio da função logarítmica é igual ao conjunto imagem da função exponencial. Isto ocorre porque as funções são inversas.

Percebemos que as duplas B e C conseguiram fazer as atividades com o uso de estratégias diferentes, e não previstas por nossa análise a priori. As duplas F e G relacionaram as coordenadas dos pontos de uma função, com as coordenadas da sua inversa. Este fato ocorreu apenas quando estiveram observando o comportamento da função logarítmica e a exponencial que foi a estratégia esperada em nossa análise a priori.

Relatando as considerações mais relevantes que foram observadas e registradas.

- Seis duplas e o trio construíram a tabela de valores solicitada no item (a). Apenas duas duplas precisaram de auxílio (2,1% dos alunos).
- Na solução do item (b), o trio e as duplas perceberam a simetria entre os pontos, porém não souberam se expressar corretamente. Ao observarem as tabelas, perceberam que os valores de " x " da 1ª tabela e os valores de $g(x)$ na 2ª tabela eram iguais e que os valores de " x " da 2ª tabela eram iguais aos valores de $f(x)$ da 1ª tabela, porém, para justificar usaram a expressão "inversos", a maioria das duplas fez a mesma justificativa, por isso optou-se por delimitar esta análise como um acerto parcial.
- De modo geral, houve certa demora na realização dessa atividade, porém a demora está ligada ao fato de os alunos não saberem justificar seus raciocínios.

- O trio e uma dupla, (26,3% dos alunos), justificaram o item (d) relatando que “os pontos têm a mesma distância até a bissetriz” (não souberam expressar claramente que pontos, provavelmente os pontos simétricos).
- Outra análise importante foi a do domínio e a imagem das funções. Cinco duplas (71,6% dos alunos), precisaram de auxílio para determinar o domínio e o conjunto imagem. Portanto, percebeu-se que os alunos ainda não dominam esses conceitos, porém pôde-se notar que a análise gráfica facilitou a compreensão por parte de algumas duplas.

5.5. Síntese dos resultados da aplicação da sequência didática

A tabela 6 abaixo, representa a quantidade de acertos, erros e questões em branco em relação à quantidade de alunos por sessões de cada atividade da sequência didática.

Tabela 6 - Análise Quantitativa

Sessão	Acertos S/justificativas	Acerto C/justificativas	Erros	Erros Graves	Brancos
Sessão I					
Atividade 1 ^a	54,6%	36,6%	8,8%	-----	-----
Atividade 2 ^a	-----	49,8%	44,5%	1,0%	4,7%
Sessão II					
Atividade 1 ^a	44,4%	37%	7,4%	3,7%	-----
Atividade 2 ^a	44,4%	22,2%	14,8%	11,1%	3,7%
Atividade 3 ^a	18,5%	11,1%	44,4%	14,8%	11,1%
Atividade 4 ^a	11,1%	-----	48,1%	22,2%	18,6%
Atividade 5 ^a	-----	59,3%	18,5%	7,4%	14,8%
Atividade 6 ^a	33,3%	55,5%	7,4%	-----	3,7%
Sessão III					
Atividade 1 ^a	11,1%	40,7%	11,1%	-----	37,0%
Atividade 2 ^a	35,5%	54,6%	9,9	-----	-----
Atividade 3 ^a	12,7%	45,8%	5,6	12,4	23,5
Sessão IV					
Atividade 1 ^a	-----	99%	1,0%	-----	-----
Sessão V					
Atividade 1 ^a	52,63	26,3%	-----	21,1%	-----

Fonte: Autor 2022

Pode-se observar, através dos dados estatísticos que a maioria dos alunos atingiu os objetivos com relação à primeira atividade da sessão I, apesar de nem todos terem justificado.

Com relação à segunda atividade da sessão II metade dos alunos acertaram e metade tiveram dificuldades na resolução, principalmente, por não saberem trabalhar com potência de expoente fracionário. Um erro grave identificado foi o de um aluno que chegou a colocar a expressão toda na base “2” e adicionar os expoentes.

A maioria dos alunos não tiveram dificuldades com relação ao item (c) e com relação a esse item dúvidas de alguns alunos colocarem a oitava parte e quarta parte da dose inicial, mais na maioria dos alunos encontraram a resposta esperada, observando os itens dessa sessão da terceira atividade, alguns alunos sentiram dificuldades de compreender a situação da interpretação um método que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo “inicial”, tratava-se do tempo zero e também pelo fato de que desconheciam estar diante de uma função exponencial.

A terceira sessão, apresentou um grande índice de dificuldades, entre elas salienta-se:

- três alunos não conseguiram determinar a intensidade na escala Richeter;
- oito alunos sentiram dificuldades e ficaram por conta da transformação de potência de dez da função que modela a situação;
- aproximadamente 50% dos alunos confundiram o domínio da função com o conjunto imagem;
- A maioria dos alunos respondeu afirmativamente, porém desconheciam o modo de medir a intensidade dos terremotos e não conheciam a escala Richter.
- As atividades dessa sessão uma parte dos alunos desconheciam notações científicas “Potência de dez”;

Com relação à quarta sessão da atividade os alunos de modo geral não tiveram dificuldades na interpretação do comando da questão e nem nos cálculos, 99% dos alunos acertaram essa atividade.

Na quinta sessão, dez dos 19 (dezenove) alunos que responderam a sequência acertaram, porém não justificaram claramente seu raciocínio, cinco alunos justificaram a interpretação gráfica e os seus cálculos necessários. Mesmo assim percebemos que a maioria dos alunos não têm noção de função inversa. Também não utilizaram conhecimentos anteriores, como por exemplo, como proceder no caso de uma outra função conhecida para achar o esboço de sua inversa. Um erro que foi considerado grave, a metade dos alunos não sabe que uma função é inversa da outra através do gráfico que formam a simetria. Tiveram a compreensão quando o utilizaram o software Geogebra.

Para a análise dos resultados descrevemos nove categorias de erros mais presentes nos protocolos dos alunos, com o objetivo de identificar os principais raciocínios e procedimentos que conduziram os alunos ao insucesso e evidenciar os possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos. Essas categorias foram denominadas por:

E1: Dificuldade nas manipulações algébricas;

E2: Problemas na concepção de potências;

E3: Problemas na concepção de função exponencial;

E4: Dificuldades de se expressar na forma escrita;

E5: Problemas de interpretação;

E6: Problemas na técnica de cálculo do logaritmo;

E7: Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (tabelas ou calculadora) para o cálculo de logaritmo;

E8: Erros predominantemente processuais sobre função logarítmica.

E9: Erros predominantemente conceituais sobre função logarítmica.

Na maioria das atividades das sessões I e II estavam acertos s/justificativas e das atividades resolvidas os erros frequentes foram as categorias E1, E3, E4 e R6. Enquanto as sessões III e IV houve um bom índice de acertos com resoluções justificadas. Os erros mais frequentes foram “dificuldade em se expressar na forma escrita”, “erro decorrente de problemas na concepção de potência e “erro decorrente de problemas de interpretação”. São erros secundários, não específicos do conceito de logaritmo, mas que dificultaram as resoluções das atividades. As potências, a exponencial e o logaritmo pertencem ao mesmo campo conceitual, logo as dificuldades na construção do conceito de logaritmos. O trabalho com o teste de sondagem trabalhamos com os alunos a revisão de potência e enfatizando-se a linguagem matemática para explorar mais a simbologia na definição matemática de logaritmo.

Ressaltou-se que, os trabalhos se iniciaram com a participação de 19 alunos, sendo desmembrados em duplas e trio, e os mesmos apresentaram suas frequências em dias, possibilitando a análise precisa dos registros escritos das suas atividades, consequentemente tiveram seus resultados incluídos desta pesquisa.

As atividades foram aplicadas durante o primeiro semestre de dois mil e vinte dois, sendo ministrado em duas aulas semanais, três às terças e duas às quintas-feiras, totalizando 5 encontros com 2 horas de aulas. Desenvolveu-se uma sequência

de ensino avançando no ritmo apresentado pelos alunos, precisando que reformulássemos nosso planejamento, retomando, quando se fez necessário, atividades já trabalhadas em sessões anteriores. Vale destacar que os alunos se mostraram receptivos ao Contrato Didático negociado e à resolução das questões propostas nas cinco sessões.

O trabalho realizado esteve pela fundamentação teórica adotada. Oportunizamos que os grupos se envolvessem num processo de busca de estratégias de resolução dos problemas, confrontação de hipóteses, comunicação de soluções, devolução de informações e validação de resultados, cada aluno considerando o problema como seu (BROUSSEAU, 1996). Ao final de cada sessão houve um momento de discussão entre aluno-aluno e professor-aluno, em seguida, fizemos as institucionalizações dos conhecimentos.

Durante o desenvolvimento destas atividades, os alunos frequentemente nos interpelavam para saber se o que haviam escrito era compreensível e se estava correto, “quebrando” uma das cláusulas do nosso Contrato. Tal fenômeno vem sendo observado e estudado por vários pesquisadores em todos os níveis educativos. Isto se evidencia nas palavras de Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.50-60) “[....] os alunos tendem a delegar ao professor a responsabilidade pela validade de suas respostas, como se o único objetivo de sua atuação fosse responder às perguntas do professor[....]”

Como intuito de analisar os processos cognitivos ocorridos no ensino-aprendizagem da função logarítmica, fizemos a coleta de dados a partir da observação em sala de aula, da avaliação dos registros escritos que recolhemos e das produções em transparências apresentadas pelos alunos.

Os registros verbais orais e escritos dos alunos da pesquisa, indicam a busca de apoio em situações socioculturais e escolares. Isto é, para solucionar os problemas propostos, os participantes procuraram estabelecer relação entre os dados e as informações presentes nos enunciados dos problemas com a função logarítmica.

No que diz respeito aos registros de representação semiótica (Durval, 2003), os participantes deste estudo fizeram uso, principalmente, de registros de representação semiótica numéricos, com destaque para os registros aritméticos e para tabela de números proporcionais foi utilizado pelas duplas e o trio de alunos na sequência didática, o que nos levou a acreditar que estes participantes percebem que existe uma relação entre as quantidades e as variáveis presentes no enunciado. Na elaboração das atividades foram encontrados registros escritos em que a incógnita foi

simbolizada por uma letra de nosso alfabeto (x), o que pode ser visto no registro escrito (registro de representação semiótica na forma de tabela de números proporcionais) da solução da atividade 1. Isso denota que o processo de escolarização amplia a gama de conhecimento dos alunos, permitindo que eles passem a utilizar registros de representação semiótica mais elaborados, como, por exemplo, registros algébricos na forma de equação ou função.

No registro de representação por função logarítmica, pode ser visto como um modelo matemático. Neste caso, o procedimento utilizado leva o sujeito a tratar com as regras de significado e funcionamento do tratamento dispensado à função. O sujeito que o executa consegue estabelecer as devidas relações entre os dados e as informações contidas no enunciado do problema, delimitando generalizações que o permitem operar algebricamente, inclusive estabelecendo um modelo matemático.

Seguindo as etapas de nossa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática, a análise a posteriori, na qual há a confrontação dos dados colhidos na fase anterior, a experimentação, com os resultados obtidos na análise a priori.

A partir dos resultados obtidos podemos perceber, principalmente nas questões que envolviam conceitos de função logarítmica, que se o aluno não possuir os conhecimentos básicos sobre o objeto matemático abordado, a questão, seja ela de contexto matemático, interdisciplinar ou cotidiano, não será resolvida de maneira completamente correta. Em outras palavras, não havendo conhecimentos básicos matemáticos, as hipóteses por nós apontadas, os estudantes podem, assim como a BNCC - sugere em suas habilidades: "(EM13MAT305), resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos Sísmicos, pH, radioatividade, matemática Financeira, entre outras.

Considerar-se que pelo fato que o professor pesquisador ter conduzido a sequência didática, realizando todas as observações, essa tenha minimizado a quebra do contrato didático, já existente pela própria situação de estudo proposta aos alunos. Levando-se em consideração, a análise do conteúdo de logaritmos no ensino atual, e o resultado de teste de sondagem, elaborou-se uma sequência didática, composta de situações-problemas e outras atividades, pretendendo proporcionar aos alunos condições para construção da função logarítmica.

A análise dos resultados da aplicação da sequência didática mostrou uma melhor compreensão do conceito de logaritmo, também da função logarítmica por parte dos alunos. Ao aplicarmos a primeira sessão, pôde-se perceber que os alunos

apresentaram interesse pelas atividades, pois a partir do momento em que eles compreendem a ligação do conteúdo a ser estudado como o contexto compreensível por eles, estes se sentiram mais dispostos a encarar os desafios de sala de aula.

Ao confrontarmos a análise a priori com a análise a posteriori da primeira sessão, pode-se observar que os alunos realizaram as duas atividades corretamente. Também se observou que ao utilizar o software Geogebra para a construção dos gráficos dos modelos matemáticos encontrados, esse proporcionou uma visualização favorável com relação aos pontos simétricos das funções logarítmicas e exponencial, uma vez que muitos alunos não lembravam do conceito de simetria.

Ao comparar a análise a priori da segunda sessão com a análise a posteriori, pôde-se observar que os objetivos também foram atingidos, as atividades propostas provocaram as aprendizagens almejadas. Ao serem comparadas as análises a priori e a posteriori da segunda sessão, pôde-se verificar uma grande autonomia por parte das duplas e o trio com relação a resolução dos problemas, isto é, as duplas e o trio empenharam-se na busca de um modelo matemático, os alunos envolveram-se em uma tarefa cooperativa. Houve conflitos por parte de alguns membros das duplas, durante a resolução das situações-problemas, porém essas divergências favoreceram a evolução das representações e dos conhecimentos. Pôde-se observar também que a partir do momento em que se trabalha com problemas reais, os alunos participam mais ativamente das discussões, fazendo inferências e tomando decisões.

Ao compararmos a análise a priori e a análise a posteriori da terceira sessão, percebeu-se que os objetivos foram alcançados, pois os alunos resolveram as atividades com bastante propriedade, justificando corretamente todos os itens solicitados.

A utilização da escala logarítmica ficou clara e os estudantes perceberam que em certas situações, se os logaritmos não forem utilizados, haverá inúmeras dificuldades na representação das mesmas devido ao crescimento exponencial dos números.

Após a análise da quarta sessão, verificou-se que a segunda hipótese foi confirmada, relativa à história do surgimento dos logaritmos. Percebeu-se o quanto foi importante colocar nossos alunos a par das dificuldades da época, das tentativas e erros para se chegar a esta matemática de hoje que nos parece trivial. Com certeza, essa sessão favoreceu a compreensão do conceito de logaritmos.

Com relação à quinta sessão proposta, comparando-se as duas análises, foi possível verificar a existência de obstáculos à aprendizagem da função logarítmica, que era uma das questões de pesquisa a que nos propusemos verificar. O fato de os alunos confundirem o conceito de simétrico e inverso, configurou-se em um obstáculo epistemológico, mas que foi imediatamente sanado com a utilização do software Geogebra em que os alunos puderam visualizar o conceito de simetria. Contudo, acreditamos que nosso objetivo foi alcançado, pois gostaríamos de mostrar que a função logarítmica é a inversa da exponencial e algumas duplas demonstraram ter abstraído essa noção, entretanto, sabemos que o conceito de função inversa é um conteúdo complexo e deve ser mais explorado ao longo do Ensino Médio, priorizando a conversão entre os registros da representação.

As situações apresentadas nestas atividades fizeram com que os estudantes percebessem que os logaritmos modelam fenômenos e têm utilidade em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Química e na Geologia. Assim, neste momento da sequência didática nosso objetivo de mostrar aos estudantes a utilidade e aplicação os logaritmos foi alcançada.

A sequência apresenta uma abordagem diferente e direcionada à 1ª série do Ensino Médio, que além de introduzir o logaritmo como sendo necessário na resolução de equações exponenciais, também mostrou a necessidade desse conceito na construção de escalas logarítmicas.

Quando eram solicitados a escrever uma lei de formação como resposta a uma questão da sequência, mobilizando a linguagem natural, algumas duplas apresentaram dificuldades em fazê-lo. Alguns optaram por responder tais atividades em língua natural aliada a relação numérica. As respostas apresentadas por algumas duplas necessitavam de mais clareza e rigor. Acreditamos que não estavam habituados a atividades em que suas respostas deveriam ser apresentadas em linguagem natural.

Ressaltamos que a dupla A utilizou os cálculos abaixo como uma confirmação da veracidade da fórmula encontrada da sessão II. Um tal recurso sugere-nos a tentativa de validação da expressão estabelecida.

$$Q(t) = 500. \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$$

Nessa sessão identificamos as fases de uma situação didática, que podem ser assim resumidas:

Situação de ação: em que os alunos vão fabricar estratégias de resolução do problema. Por exemplo, fazendo tentativas; atribuindo valores para a variável independente e, assim, determinando os valores correspondentes da variável dependente.

Situação de formulação: em que os alunos vão fazer uso de uma linguagem própria, expressando suas concepções em relação aos conceitos e procedimentos de resolução da atividade, de maneira que todos compreendam. Os alunos trocam ideias, informações entre si, de modo que “descobrem a importância de discutir e definir estratégias” (BROUSSEAU,2008). Por exemplo, expressando verbalmente as ideias de uma lei de formação, uma possível fórmula para a função e em seguida, formalizá-la.

Situação de validação: em que os alunos vão discutir sobre a veracidade das afirmações formuladas nas fases anteriores, propondo e acionando mecanismos de provas. Por exemplo, durante os debates com as duplas e o trio puderam comunicar, comparar, fazer inferências para enfim, chegar uma resposta precisa. Esta fase, também pode ser percebida da produção da dupla A, ao atribuírem o valor da quarta parte da quantidade inicial que terá o tempo de 12 horas.

Situação de Institucionalização: em que o professor vai organizar o novo conhecimento. Nesse caso, o papel do professor é importante, pois é a partir das discussões por ele mediadas que o conhecimento se tornará universal. Por exemplo, ao término da atividade realizamos uma discussão dos métodos de resolução apresentados, dos conceitos acionados, das expressões algébricas encontradas, até chegarmos a uma resposta aceita, ou mesmo em outras situações. Esta tem sido a nossa prática em todas as sessões dessa pesquisa.

Ao final da análise na produção feita pelos alunos, destacamos alguns aspectos positivos e negativos que ocorreram durante a aplicação da sequência.

- ✓ A participação integral dos alunos em todas as atividades propostas;
- ✓ A sequência didática proporcionou aos alunos uma visão mais ampla da importância do estudo das funções logarítmicas, através da resolução de problemas;
- ✓ Ao realizar as tarefas em grupos, promovemos o diálogo entre os alunos durante o momento da aula, a fim de expor as suas hipóteses e confrontar com as ideias dos demais colegas;

- ✓ As atividades propostas destacaram para o grupo de alunos as competências e habilidades individuais de cada um, evidenciando o momento dos alunos “dando conta” do que está aprendendo;

Já nos aspectos negativos:

- ✓ Devido ao interesse demonstrado pela turma na proposta, o número de aulas para a aplicação das atividades deveria ser maior, sendo possível explorar mais situações-problema envolvendo os conceitos abordados;
- ✓ A prática dos docentes de matemática se molda quase totalmente em aulas consideradas tradicionais, no modelo que considera o professor um transmissor do conhecimento para os alunos;
- ✓ Após trabalhar com os problemas apresentados, os alunos poderiam participar juntamente com o professor na criação de situações envolvendo o uso das funções logarítmicas.

Destacamos os aspectos positivos e negativos dessa sequência ao final da produção dos alunos. Na realidade a nossa análise serviu para apresentar uma nova abordagem para a função logarítmica na Universidade, evidenciando que as dificuldades apresentadas pelos alunos muitas vezes estão associadas à metodologia utilizada pelo professor em sala de aula, na qual se prioriza a transmissão de conhecimento e se evita que os alunos desenvolvam atividades em grupo com o objetivo de aprender matemática.

Finalmente, ao repensar nos critérios para seleção dos conteúdos matemáticos, envolvendo logaritmos e função logarítmica de Ensino Básico que devem ser desenvolvidos no curso de Licenciatura e no tratamento que deve ser dado a eles, não podemos perder de vista o perfil do profissional que a instituição se propõe a formar: um professor de matemática para atuar no Ensino Básico e não um pesquisador dessa área do conhecimento. O perfil do professor que se quer formar, sob o ponto de vista de Tardif (2002, pag,12) envolve várias fontes de saberes provenientes da história de vida pessoal, da sociedade, da instituição escolar, de outros atores educativos, do lugar de formação.

Após a investigação da sequência didática, os alunos que compõem essa pesquisa, o seu aprendizado durante o processo da sequência, sua percepção sobre a função logarítmica no curso de licenciatura, contribuíram para fortalecer o futuro professor de Matemática. É preciso estar atento para que o futuro professor tenha “domínio conceitual” desse conteúdo, é preciso não esquecer as contribuições de

educadores matemáticos que investigam o ensino e a aprendizagem e que são essenciais no desempenho da tarefa de ensinar. Em contextos de formação, o futuro professor deve lidar com situações concretas, realizar análises críticas e produzir conhecimentos experiências que sejam fontes de sustento à sua prática.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que vem sendo difundida no Brasil desde 1996. Nesta pesquisa, buscou-se apresentar uma possibilidade de utilização desta metodologia de forma clara e concisa para os alunos e principalmente professores que se interessem pela aplicação em suas salas de aula, foram elaboradas fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau.

A metodologia tem quatro fases, a fase preliminar em que fizemos o levantamento da literatura, leitura dos documentos oficiais, sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos que participaram da pesquisa, como análise a priori, fizemos um estudo das possíveis estratégias de solução que os alunos poderiam utilizar e dificuldades que poderiam aparecer. Realizamos a fase da aplicação, e confrontamos os resultados das análises a posteriori com a análise a priori.

Em relação aos documentos oficiais que fizemos a leitura, estes sugerem que o ensino da função logarítmica seja apresentado como a função inversa da exponencial, e possibilite aos alunos uma discussão das características destes modelos exponenciais e logaritmos, o crescimento apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Não é recomendado o trabalho exaustivo dos logaritmos e das equações exponenciais. É proposto o trabalho com situação-problema de aplicação em outras áreas do conhecimento, como a Química, Física, Matemática Financeira (BRASIL,2006).

Os resultados das atividades e os relatos das discussões das produções dos alunos, apresentados na análise a posteriori, revelam que a sequência didática aplicada e a metodologia adotada foram adequadas aos objetivos propostos. A confrontação, a comunicação e a validação de concepções dos alunos e a socialização de suas produções, apresentando-as em transparências, em cada sessão da sequência, validando os resultados encontrados.

Os resultados da pesquisa confirmam a hipótese de que escutar as falas, notações ou registros de representação efetuados pelos alunos pode nos auxiliar a compreender como os participantes articulam os dados e as informações de modo a solucionar os problemas de matemática que lhes são propostos em sala de aula, o que pode nos permitir uma aproximação contínua entre o ensino e a aprendizagem.

Durante a elaboração da sequência didática, precisei reformular diversas vezes as questões e a estrutura da atividade, para que cada questão proporcionasse aos alunos a possibilidade de trabalhar com diversos registros conforme buscavam explicar suas compreensões. Ao realizar a análise dos dados, foi possível observar que essa mobilização de diferentes representações de fato ocorreu por grande parte dos alunos. Assim, analisar as construções dos alunos a partir do referencial teórico, possibilitou a conclusão de quais etapas da atividade podem ser futuramente mais bem exploradas.

Assim, a estratégia de um trabalho em grupo, baseado na proposta de investigação matemática de Ponte (2003), mostrou-se um facilitador da aprendizagem, permitindo que o aluno, ao revisitar um assunto já estudado, obtivesse uma melhor compreensão dele buscando transformar o conceito. Os resultados apresentados evidenciaram que tal estratégia contribuiu para que os alunos adotassem uma perspectiva mais reflexiva e investigadora na construção do próprio conhecimento matemático, à medida que buscavam estratégias para resolver os problemas propostos.

Houve momentos em que precisamos socializar entre os alunos, as estratégias de resolução acionadas por eles. Os debates coletivos, realizados após a conclusão de cada atividade, viabilizaram a superação de eventuais dúvidas ou dificuldades e as institucionalizações dos conceitos trabalhados, e representaram um recurso didático pertinente para o bom desempenho dos alunos. Averiguamos aqui um resultado importante desta investigação: a discussão das produções das duplas e do trio e a reflexão da validade dos resultados encontrados por eles provocaram progressões cognitivas significativas na compreensão dos conceitos dos logaritmos e da função logarítmica.

A aprendizagem está relacionada nessa sequência didática com o que Brousseau chama de devolução do problema, proporcionando uma mudança de atitude diante da responsabilidade na percepção do saber matemático. Consequentemente, permitir um avanço significativo nas concepções sobre função logarítmica e no conceito de logaritmos, no sentido de que propiciou uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Observamos isso quando, no desenvolver das atividades, os alunos eram solicitados a converter uma situação em linguagem natural para a linguagem algébrica.

Na nossa primeira sessão da pesquisa, percebemos que inicialmente os alunos desconheciam noções sobre tabelas e relataram que só havia estudado as funções

afim e quadrada. No decorrer das sessões percebemos que as duplas e o trio foram evoluindo, as discussões entre os alunos favoreceram o levantamento de hipóteses sobre a construção de tabelas envolvendo a função logarítmica e sua inversa. Na sessão II as estratégias da dupla D nos surpreenderam, pois foi diferente do que prevíamos em nossas análises a priori, que alguma dupla utilizasse como estratégia para resolução da atividade os conteúdos de Progressão Geométrica que eles estudaram no 1º ano do Ensino Médio para solucionar a situação-problema. A dupla D, justificou que, após chegar ao valor da potência, foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência.

Acreditamos que a partir do momento que usamos a calculadora científica para testar hipóteses e utilizamos o software Geogebra facilitou a compreensão desses conceitos. O uso do software Geogebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem destes alunos e a sua importância da visualização do gráfico da função no software.

De modo geral podemos dizer que as duplas mais assíduas às sessões de nossa pesquisa, apresentaram um desempenho que apontou para um crescimento na compreensão do conceito de função logarítmica. Desse modo, acreditamos que a nossa hipótese foi validada. A aplicação de uma sequência didática elaborada a partir do estudo de resolução de problemas, apresentados em linguagem natural, que permita a articulação deste registro com os demais e a compreensão da relação entre as variáveis dependente e independente por parte dos alunos, tem papel fundamental no ensino do conceito de logaritmos.

Como reflexão da nossa prática, ao realizar esta pesquisa, percebemos o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. É necessário que o professor escolha situações-problema que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e assim tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Esperamos assim ter contribuído para a comunidade acadêmica e para os professores em matemática com um trabalho voltado para a sala de aula, cuja concretização se faz no Produto Educacional desenvolvido como parte fundamental para a conclusão do Mestrado, envolvendo temas atuais como resolução de problemas em função logarítmica e objetos matemáticos importantes para a formação do aluno. Com isso, acreditamos ter colaborado, com propostas teóricas e práticas para o desenvolvimento das pesquisas em Educação matemática.

Dessa forma, verificou-se que existe uma necessidade de levar o aluno a refletir que todo aquele conhecimento adquirido vai ser necessário para a resolução de problemas que farão parte das avaliações, das atividades das aulas seguintes, das técnicas matemáticas de outras disciplinas e, conseqüentemente, da sua vida profissional.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALLEVATO, N S G Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. VIDYA EDUCAÇÃO, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, jun. 2014.

ALLEVATO, N. S. G. ONUCHIC, L. de L. R. Ensino Aprendizagem Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L de L. R (Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALMOULOUD, S. A. (2011) As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. Educar em Revista. Curitiba-PR/Brasil. n. Especial 1/2011, p. 191-210, Editora UFPR.

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução à Metodologia do Trabalho Científico: Elaboração de trabalho na graduação**. 7ª Ed. São Paulo: Atlas, 2005.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1988.

_____, 1995 Epistémologia et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.10, nº23, pp.241-286.

_____, Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 9 nº3, pp. 281 – 308, Grenoble: La pensée Sauvage éditions, 2002.

BACHELARD, Gastón. A Formação do Espírito Científico: Contribuições Para Uma Psicanálise do Conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

_____, **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contra-ponto, 1996.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma Nova Estratégia. 3ª Ed. São Paulo: Contexto. 2002.

BICUDO, Maria A. V (Org.). **Educação Matemática**. São Paulo: Moraes, 1993.

BLOOM, B. S. et al. Taxonomy of educational objectives. New York: David Mckay, 1956. 262 p. (v. 1)

BONFIM, Elias Angelo. Avaliação da aprendizagem em fases: uma proposta para o ensino de logaritmos - São Paulo: IFSP, 2016. 147f.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 1974.

BRANDT, C. F. Contribuições dos Registros de Representação Semiótica na Conceituação do Sistema de Numeração. 2005. 246p. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: bases legais. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: Acesso em: 22/02/ 2019.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC, Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Base Nacional Comum Curricular**, 2018.

_____, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: Mec (SEFM, 1998).

BROLEZZI, A. C; BARUFI, M.C.B. **História da Matemática e ensino de cálculo: reflexão sobre o pensamento reverso**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

BROUSSEAU, Guy Des dispositifs d'apprentissage aux situations didactiques en mathématiques. CONFERENCE A L'UNIVERSITE DE GENEVE, 2004. Disponível em http://guy_brousseau.com/wp-content/uploads/2012/12/Des_dispositifs_d'apprentissage_aux_situations_didactiques.pdf . Acesso em: 25 fev. 2020.

BROUSSEAU, G. (1996) Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 1. pp. 35-113.

_____, **Fondements et méthodes de La didactique des mathématiques**. In: **Recherches de Didactique des Mathématiques**, vol. 7, nº 2. Grenoble, 1986.

_____, Premières notes sur l'observation des pratiques de classes. **Journée VISA**, INRP, 2007. In: (acesso, 06/07/2020)

_____, L'observation des activités didactiques. **Revue française de pédagogie**, n.45, 1978.

_____, Introdução a teorias das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

_____, Introdução a teorias das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2002.

CABRAL, N. F. Sequências didáticas: estrutura e elaboração. Belém - PA: SBEM, 2017.

CARVALHO, E. de S. Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Tocantins, Arraias - TO, 2017.

CARVALHO, D.L de. **A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar**,1995.. Tese (Doutorado) – UNICAMP, Campinas,1995.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino; SILVA, Roberto da. Metodologia científica. 6. ed São Paulo: Prentice Hall, 2007.

CHEVALLARD, Yves. As perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica IN: Didáticas da Matemática. Conceitos Fundamentais da Didática: Direção de Jean Brun. 1991.

CORRÊA, SAMARA DA SILVA. Uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de proporcionalidade no ensino. Dissertação (Mestrado) Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

_____, BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1ª Ed. vol1. São Paulo: Ática, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática:elo entre as tradições e a modernidade.4 ed.Belo Horizonte: Autêntica,2011.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Bolema. Boletim de Educação Matemática. Vol. 20, nº28, 1179-205. INSS:0103-636X. 2007.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. Londrina – PR. 2005.

DORNELAS, Julienne Jane Barbosa Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim / Julienne Jane Barbosa Dor -nelas. -- 2007. 181 f.: il.

DOUADY, Régine. 1986. Jeux de cadres et dialectique outil – objet. *Recherches em didactique des mathématiques*, vol.7, nº2, pp.5-31.

DUVAL,R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A.D. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. pp. 11-34.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011. Tradução: Hygino H. Domingues.

_____. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2004.

FERRAZ, A. P. C. M., & BELHOT, R. V. (2010). Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para a definição de objetivos instrucionais. São Carlos: UFSCAR.

FERREIRA, RonizeLampert; BISGNIN, Eleni.(2007). **O Estudo De Logaritmo Por Meio De Uma Sequência De Ensino: A Engenharia Didática Como Apoio Metodológico**. Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. Zetetiké. Campinas, SP: UNICAMP, Ano 3, n. 4, 1995.

FONSECA. M. da C.F.R. **Discurso, memória e inclusão**: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental. 2001. (Tese de doutorado) – UNICAMP. Campinas SP 2001.

FORTUNATO, Raquel et. al. Interdisciplinaridade nas escolas de educação básica: da retórica efetiva ação pedagógica. **Revista educação Ideal**. Vol. 8 janeiro a junho 2013. Disponível em: https://www.ideal.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/28_1.pdf acesso:

FREITAS, L.C. Ciclos, Sieriação e Avaliação: Confronto de Lógicas. São Paulo:Moderna,1999.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. [orgs.]. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Tradução: Juan AcuñaLlorens. Porto Alegre: Artmed, 1996, p. 31 – 47.

GIL, Antônio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5ª Edição. Atlas, 1999.

GOMES, M. G. **Obstáculos na aprendizagem matemática**: Identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica.Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

HOMMA, A.K.O.; CARVALHO, R.A.; PINTO, L.P.; SOUZA, A.F.; DIAS, A.R.; GLÓRIA, R.F.D. Custo de produção de abacaxi no Sudeste Paraense. Belém: Embrapa Amazônia Oriental, 2002. 35p. (Embrapa Amazônia Oriental. Documentos, 130).

IEZZI, Gelson; DOLCE, Ovaldo e MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar [Livro]. São Paulo: Atual,1993, - Vol. 2.

LIMA, Elon. L. **Logaritmos**. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 4a edição, Rio de Janeiro, (2010).

_____, Livro Matemática e Ensino (Coleção do Professor de Matemática) – 2ª.edição.SBM: Rio de Janeiro,2003.

LIMA, D. F. A importância da sequência didática como metodologia no ensino da disciplina de física moderna no ensino médio. Revista Triângulo, v. 11, n. 1, p. 151–162, jan. abr. 2018.

LOURENÇO, Emanuel Gomes. **O Geogebra como ferramenta de ensino de logaritmo**. 2013, 58 f. Dissertação – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Mossoró, 2013.

MACHADO, S. Engenharia Didática. In: **Educação Matemática** uma Introdução, MACHADOS, (org) São Paulo: Ed.PUC-SP, 1999, p. 197-209.

MAGALHÃES, G. N. Trabalho monográfico sobre logaritmos. Rio de Janeiro: Ed. Fundação Biblioteca Nacional, 2003.

MAOR, Eli. **e: A História de um número**. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro, Record, 2006.

MIGUEL, António. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zeiéíké, Campinas, CEMPEM, v. 5, n. 8, p.73-105, jul./dez., 1997.

MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. Os logaritmos na cultura escolar brasileira. Natal: SBHMat, 2004.

OLIVEIRA, Andréia Julio de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. 2005, 123 f. Dissertação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte (Centro de Ciências Exatas e da Terra). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2005.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, A.V.; BORBA, M.C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Ed. Cortez, p.213-224, 2004.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Parâmetros Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília; MEC, 2006.

PARRA, Cecília. SAIZ, Irma. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Trad. Juan Acuna L. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. da. Sequência didática na matemática. **REI - Revista de Educação do Ideau**. v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.

PERRIN GLORIAN, Marie-Jeanne ; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar L'Ingenierie Didactique entre Recherche et Ressource pour L'Enseignement et la Formations des Maitres. In: SIMPÓSIO LATINO AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA , 1 . 2016. Anais [...]. Disponível em www.ppgedcm.ar.ufscar.br . Acessado em: 25 fev. 2019.

PINTO, Michael de Lima Balzana de Melo. **O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar**. 2016, 100f.. Dissertação- Universidade Federal do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2016.

POLYA, G. A. A arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático; Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimp. -Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. Autêntica Editora, 2003.

POZO, J. I; ECHEVERRÍA, M.P.P. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. [S.l.]: Artes Médicas, 1988.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. **Logaritmos: uma abordagem didática**. 2015, 110f. Dissertação - Universidade Federal do Paraná. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2015.

ROSA, J. L. (ORG.). Psicologia e Educação: o significado do aprender. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. **Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática** / Patrícia Rodrigues da Silva Rossi. -- São Carlos : UFSCar, 2010. 219 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010. Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas –PPGECE

RIBEIRO, A. et al. **Uma Razão para Logaritmos**. [S.l.; s.n], 2009.

RUDIO, F. V. Introdução ao projeto de pesquisa. 34. ed. Petrópolis - RJ: Vozes, 2007.

SANTOS, B. S. Interacción entre iguales y procesos de aprendizaje mediatizados por ordenador. Análisis e intervención en contexto escolar. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Barcelona, 1997.

SANTOS, Neusa de Oliveira. O ensino de Potenciação por meio de atividades. 2016. 99 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016.

SANTOS, P.R. Um Estudo sobre a Trigonometria no Triângulo Retângulo .2014. 111 f. São Paulo, 2014. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Universidade do Cruzeiro do Sul. São Paulo.2014.

SCHOENFELD, H.A. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.), New York: MacMillan, 1992.

SILVA, Maria Regina Gomes da. Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática. Bolema, Rio Claro, UNESP, ano 11, n 12, p. 13-27. 1996. Disponível em: Acesso em: 28 dez. 2020.

SILVA, F.L.C.F. da. Analisando Contribuições da Teoria das Situações Didáticas no Ensino e na Aprendizagem da Estatística e das Probabilidades no Ensino Fundamental. 2015. 195 f. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOU, Saddy Ag. Didática e Teoria das Situações Didáticas em Matemática. 2006. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/TSDMF4_Brousseau_2006.pdf>. Acesso: 02 ago. 2021.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; BASSO, Marcos Vinicius de Azevedo. Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 163-186, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p163/23459>. Acesso em: 14 jan. 2021.

SILVA, Silvio Tadeu Teles da. 2013. 219f. O Ensino das Funções Exponencial e Logarítmica por atividade. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática: Ensino Médio volume 1. 1ª série/Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOARES, Evaristo Costa. Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Natal, 2011.

TEIXEIRA, M. J. Paulo; PASSOS, M. C. Claudio. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/jun 2013. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br>>. Acesso em: 02 ago. 2020.

TARDIF, M. Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis: Vozes, 2002.

UJIEE, N.T. et al. **Os Conhecimentos Prévios de Matemática de Estudantes do Ensino Fundamental: O Que é Matemática? De Onde Ela Veio? Como Seria um Mundo sem Matemática?** ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 10, n.1, p. 57-73, maio 2017. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/viewFile/1982-5153.2017v10n1p57/34218>>. Acesso em 16 jun. 2017

VASCONCELOS, Maria Betânia Fernandes de; RÊGO, Rogério G. do. **A Contextualização como recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática.** Disponível em: Acesso em: 20 fev. 2012.

VIDICAL, Carlos Eduardo Ladeira. **(Re)significando o conceito de logaritmo** / Carlos Eduardo Ladeira Vidigal. Belo Horizonte, 2014. 133f.: Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

VIGOTSKY, L. S. (1984). **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes.

WENDLAND, Caroline Vanessa. Logaritmos e história da matemática: elaboração de um material paradidático. 2019, 153 f. Dissertação- Universidade do Estado de Santa Catarina .Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. Matemática: Ensino Médio. São Paulo: Scipione, v. único, 2005.

ZANELLA, Andréia Vieira. Zona de desenvolvimento proximal: análise teórica de um conceito em algumas situações variadas. Temas psicol. vol.2 no.2 Ribeirão Preto: ago. 1994.

APÊNDICE

I SESSÃO: CONSTRUINDO O CONCEITO DE LOGARITMO

Objetivo: Que os alunos possam revisar a relação entre o conceito da função exponencial e da função logarítmica e formalizar a lei que descreve o fenômeno.

Atividade 1ª: O crescimento bacteriano em laboratório fornece um exemplo excelente de crescimento exponencial. No crescimento exponencial, a taxa de crescimento populacional aumenta ao longo do tempo, em proporção ao tamanho da população.

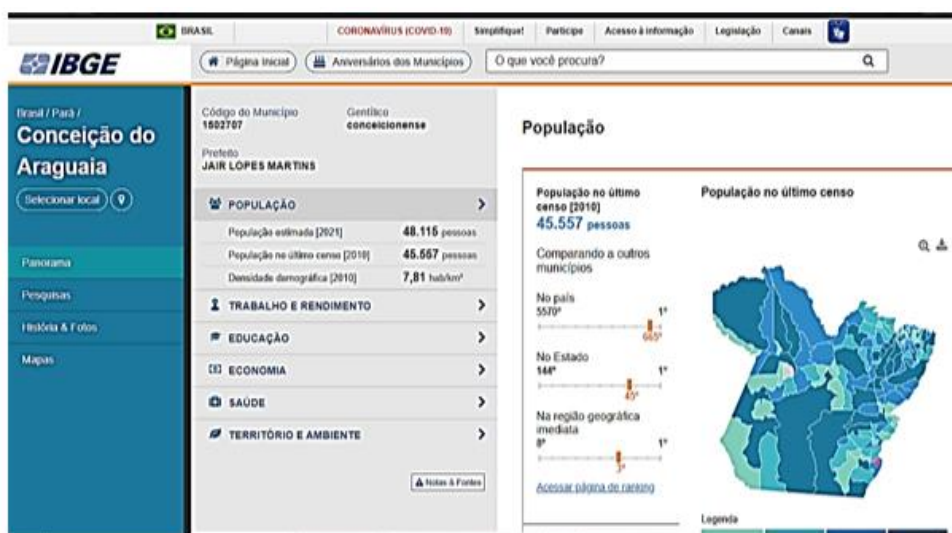
Vamos ver como isso funciona. Bactérias se reproduzem por fissão binária (se dividem ao meio), e o tempo entre as divisões é cerca de uma hora para a maioria das espécies de bactéria. Para ver este crescimento exponencial, vamos começar colocando 1.000 bactérias em um frasco, com um suprimento ilimitado de nutrientes.

Então nessa cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Considere que essa quantidade de bactérias no frasco no início da experiência. Com base nestas informações, responda as questões propostas.

- a) Qual será o número de bactérias após uma hora?
- b) Quantas bactérias haverá após duas?
- c) Após três horas, qual será a quantidade de bactérias na cultura?
- d) Chamando de $Q(x)$ o número Q de bactérias em função do número x de horas de experiência, é possível estabelecer uma lei de formação que modela esta função.
- e) Baseado na lei que modela a função no item d. Após quantas horas será constituída de 5.000 indivíduos? Considere $\log 2 \cong 0,3010$.
- f) Se o número de elementos de uma determinada espécie de bactérias diminui à taxa de 10% ao ano. Em quantos anos ficará reduzido à metade? Indique o número inteiro mais próximo (Use $\log 2 \cong 0,301$ e $\log 3 \cong 0,4771$)
- g) Esses dados poderiam ser representados em um gráfico? De que forma?

Atividade 2ª: As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sócio demográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento a dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

Mapa de população do município de Conceição do Araguaia/Senso-IBGE



Fonte: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/conceicao-do-araguaia>

A população da cidade de Conceição do Araguaia no ano 2010 era de aproximadamente 45.557 (Fonte: IBGE) , e está crescendo a uma taxa média anual de 1,5%. Pergunta-se:

- Qual era a população estimada da cidade em 2011? Em 2013? Em 2015? Para 2016, 2018 e 2020 qual será a população estimada?
 - É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.
 - Represente graficamente a função obtida na letra (b)
 - Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
- Considere $\log 1,015 \cong 0,0064$ e $\log 2 \cong 0,3010$.
- Quando a população da cidade será de aproximadamente 47.540 mil habitantes
 - Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

II SESSÃO: RESOLVENDO PROBLEMAS

Objetivo: Que o aluno compreenda a definição e a utilização da função logarítmica, as propriedades logarítmicas através da resolução de problemas.

Atividade 1ª: Uma pessoa decidiu tomar um medicamento vendido em comprimidos de 500 mg, cuja bula informava possuir meia-vida de 6 horas e que as dosagens deveriam respeitar esse período. Com base nessas afirmações e fazendo uso, quando necessário, de uma calculadora científica, responda as seguintes perguntas:

- Complete a tabela abaixo que indica a evolução da quantidade do medicamento no organismo.
- É possível construir uma lei de uma função que seja representativa da situação da dosagem única? Qual?

- c) Tendo a pessoa tomado apenas uma única dose em quanto tempo a quantidade caiu a oitava parte da quantidade inicial? E a quarta parte?
- d) Em quanto tempo, após a ingestão de uma única dose, a quantidade foi de $300mg$? E $100mg$?

Atividade 2: Riscos do uso do paracetamol: O paracetamol principalmente a marca Tylenol, é um dos medicamentos mais populares do mundo. Estudo realizado pelo Instituto IMS Health revela que no Brasil a venda do medicamento teve um crescimento de 80%, aumentando de cerca de 20,6 milhões de unidades para 37,2 milhões, correspondendo a um faturamento de R\$507.000.000,00 em 2012. Muito desse sucesso de vendas é baseado no fato de que no Brasil não existe nenhuma exigência de receita e nem um limite na quantidade que pode ser comprada.

Agrega-se a isso o fato de se ter pouca informação nas embalagens quanto ao risco do uso equivocado, o que faz parecer se tratar de um medicamento totalmente seguro. A realidade, porém, é outra, o paracetamol pode causar graves danos ao fígado se tomado em dosagem acima da recomendada ou em concomitância com bebidas alcoólicas e outras substâncias que tenham ação no fígado como vemos na bula do medicamento (Laboratório Medley). *BIFARMA: Associação Brasileira da indústria farmacêutica: Este medicamento é contraindicado para menores de 12 anos..*

Baseado no texto resolva os seguintes questionamentos dos itens abaixo:

A quantidade referente à primeira dosagem é dada pela função $c(t) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, onde $c(t)$ indica a quantidade em mg do medicamento decorridas t horas. Supondo que a pessoa tomou apenas uma dose desse medicamento. Então:

- a) Em quanto tempo a quantidade decaiu a oitava parte da quantidade inicial?
- b) considerando $\log 2 = 0,301$, determine quanto tempo levou para que a quantidade fosse de $128 mg$?
- c) Em quanto tempo a quantidade atingiu $40 mg$?
- d) Qual a quantidade após 50 horas? Deve ser utilizada uma calculadora científica.

Atividade 3: Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore na Amazônia modelou o crescimento dela de acordo com a relação $C(t) = 2 + 0,4 \log_4(t - 3)$, onde t representa o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros.

Árvore amazônica



Fonte: [HTTP://omundodsarvorestga.blogspot.com](http://omundodsarvorestga.blogspot.com)

Pergunta-se:

- É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.
- Qual o domínio matemático dessa função?
- Obtenha a altura da árvore quando $t = 19$ e $t = 67$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

Atividade 4: Mudras de abacaxi. O projeto 'Transferência e Difusão da Produção Integrada de Abacaxi no Estado do Pará' foi implantado nos municípios de Floresta do Araguaia, mesorregião do Sudeste do Pará, microrregião de Conceição do Araguaia, e Salvaterra, mesorregião do Marajó e microrregião do Arari. É coordenado pela Embrapa Amazônia Oriental e executado em parceria com a Secretaria de Estado de Agricultura do Pará (SAGRI), Serviço de Política e Desenvolvimento Agropecuário/Superintendência Federal de Agricultura (SEPDA/GPA/ SFA/ MAPA), Agência de Defesa Agropecuária do Estado do Pará (ADEPARÁ), Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural do Estado do Pará (EMATER-PA), Prefeitura Municipal de Floresta do Araguaia e iniciativa privada (abacaxicultores).

O Estado do Pará ocupava a primeira posição entre os estados produtores de abacaxi do Brasil com uma área plantada de 15.462 ha e a produção de 389.971.000 frutos, entretanto, a previsão de safra 2009 com 10.358 ha (IBGE, 2009a) coloca o Pará na terceira posição. A produção de Salvaterra abastece o mercado de Belém, mas é no sudeste paraense que se concentra a maior produção do Estado (Homma et al., 2002). Floresta do Araguaia, com uma produção em 2007 de 194.000 mil frutos, variedade Pérola (IBGE, 2009b), é o principal produtor nacional com a característica da produção de frutos no período da entressafra brasileira (Homma et al., 2002).

Se um produtor da cidade de Floresta do Araguaia decidiu investir no plantio de mudas de abacaxi. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou X mudas de abacaxi.

Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes a quantidade inicial? (Considere $\log 2 = 0,3$)

Atividade 5: Durante o primeiro semestre você economizou R\$ 800,00 e agora quer aplicar num fundo de aplicação que rende, em média, 25% a.m. Em quantos meses, você terá no mínimo R\$ 32.000,00? (Utilize uma calculadora científica para realizar os cálculos necessários).

Atividade 6: Se você ganhar na loteria R\$ 900,00 e aplicou num banco com juros compostos à taxa anual de 15%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 600,00?

III SESSÃO: PROBLEMAS ENVOLVENDO ESCALA LOGARÍTMICA

Objetivo: Que os alunos possam resolver problemas utilizando a definição de escala logarítmica para compreender e medir a intensidade de terremotos, a intensidade do som ou o pH de soluções.

Atividade 1: Aplicação em terremotos - Um terremoto, ou sismo, ocorre quando rochas da litosfera submetidas a altas tensões se acomodam (sismo). As ondas sísmicas, causadas pelo choque, partem em todas as direções a partir de um ponto chamado foco ou hipocentro. O ponto situado na superfície exatamente acima do foco é chamado de epicentro do terremoto. A partir desse ponto, as ondas de choque fazem com que o solo se mova em movimentos cíclicos que geram “ondas” forçando o solo para cima e para baixo, e de um lado para o outro. Quando o epicentro está abaixo de um mar ou oceano, ele pode criar um maremoto ou um tsunami, uma onda gigante, como na figura abaixo.

Tsunami invadindo rodovia no Japão logo após o terremoto de março de 2011.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

A maior parte dos terremotos ocorre nas áreas de contato entre placas tectônicas, ou em falhas entre dois blocos rochosos.

Área de contato entre placas tectônicas.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

O comprimento de uma falha pode variar de alguns centímetros até centenas de quilômetros, como é o caso da falha de Santo André (ou San Andreas), na Califórnia, Estados Unidos, conforme abaixo.

Falha de Santo André - San Francisco - Los Angeles.



Fonte: <http://www.lemas.furg.br>

Só nos Estados Unidos, ocorrem de 12 mil a 14 mil terremotos anualmente (ou seja, aproximadamente 35 por dia). De acordo com registros históricos de longo prazo, aproximadamente 18 grandes terremotos (de 7 a 7,9 na escala Richter) e um terremoto gigante (8 ou acima) podem ser esperados num ano.

O maior terremoto já registrado foi o grande terremoto do Chile, em 1960, que atingiu 9,5 na escala Richter, seguido pelo da Indonésia, em 2004, que atingiu 9,3 na mesma

escala. A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro.

A intensidade I de um terremoto é um número que varia de $I = 0$ até $I = 9,5$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E , é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7.kmh..$

Tomando como base o texto e seus conhecimentos teóricos a respeito de função exponencial e logarítmica, analise e responda às questões: Explorando a lei da função logarítmica. Calcule a intensidade na escala Richter para as seguintes energias liberadas:

- $E = 7.10^9 kmh$ e $E = 7.10^7 kmh$.
- Se a energia liberada é cada vez maior nos terremotos, o que ocorre com o valor da sua escala Richter? Justifique a sua resposta.
- Determine o domínio, a imagem e a intersecção da função com o eixo horizontal.
- Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?
- Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

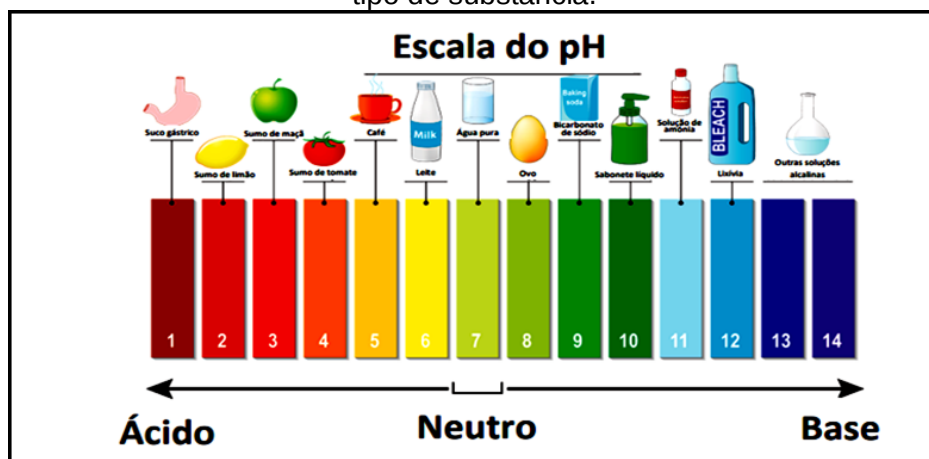
Atividade 2: pH (ácidos e base): Em Química, a acidez de uma solução líquida é medida pela concentração de íons de hidrogênio na solução (a unidade de medida, a título de informação, é de "moles por litro"). A concentração de hidrogênio é denotada por $[H^{+1}]$. Como tais concentrações geralmente envolvem expoentes negativos de 10, ordens de grandeza negativas são usadas para comparar níveis de acidez. A medida de acidez usada é pH e é o oposto do logaritmo na base 10 da concentração de hidrogênio:

$$P[H^{+}] = -\log[H^{+}]$$

Soluções mais ácidas têm concentrações de íons de hidrogênio mais altos e valores de pH mais baixos. (texto extraído do site: www.pearson.com.br).

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P[H^{+}] = -\log[H^{+}]$ onde H^{+} representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \leq pH \leq 14$. Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

Escala de pH . As cores são baseadas num indicador de pH que muda de cor, assinalando o tipo de substância.



Fonte: <https://universidadejunior.up.pt>

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Vermelha	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

- Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, justifique com os seus cálculos necessários.
- Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidrôniônica? Justifique a sua resposta.
- Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio da cor Azul é maior que da cor Laranja?
- Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

Atividade 3: Entendendo os decibéis - O decibel (db) é uma unidade logarítmica que indica a proporção de uma quantidade física (geralmente energia ou intensidade) em relação a um nível de referência especificado ou implícito. Uma relação em decibéis é igual a dez vezes o logaritmo de base 10 da razão entre duas quantidades de energia (The Institute of Electrical and Electronics Engineering, 2000). Um decibel é um décimo de um bel, uma unidade raramente usada, uma vez que apresenta valores muito elevados, pouco práticos de serem utilizados com relação à audição humana. Apesar de poder ser definido a partir de diferentes grandezas físicas, como por

exemplo a pressão sonora, utilizaremos para efeito desse trabalho a definição que trabalha com intensidade sonora.

Definimos intensidade sonora (I) como sendo a razão entre a potência sonora e a área da superfície considerada, isto é, $I = \frac{P}{A}$. Esta razão serve principalmente para avaliar se um som é forte ou fraco tendo como unidade ($watt/m^2$). No entanto, a utilização da intensidade sonora apresenta grandes dificuldades, por trabalhar com valores decimais muito pequenos. Portanto, ao trabalharmos com decibel, temos uma vantagem operacional muito grande.

A partir da definição de decibel e da escolha por utilizar intensidade sonora podemos escrever a fórmula:

$$I_{db} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ onde } I_0 = 10^{-12} \text{ watt}/m^2$$

O nível de intensidade sonora é medido em decibéis, indicado por db . Como o nível de intensidade varia em escala logarítmica, os sons cuja intensidade são 10^n vezes maior do que a intensidade mínima I_0 , são percebidos com nível de intensidade “ n ” vezes maior.

- De acordo com os dados, o nível de intensidade no limiar da audição é 0 db . Calcule qual é a intensidade do som correspondente a esse nível de intensidade?
- O nível de intensidade de uma conversação normal (a 1 m de distância) é de 60 db . Calcule qual é a intensidade (I_{60}) sonora correspondente a este nível de intensidade?
- Cientistas afirmam que a partir de 120 db , o som provoca dor e a partir de 160 db pode haver ruptura do ouvido humano. Calcule qual é a intensidade sonora (I_{120}) db ?

IV SESSÃO A HISTÓRIA E O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS

Objetivo: Usar a história da matemática para mostrar a construção e evolução do conceito de logaritmo de um número.

Atividade 1ª : Foi distribuído aos alunos o texto a seguir:

A história da Matemática relata que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente os relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos já vinham tentando achar um processo que permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Burgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Napier ao comparar os termos de duas sequências, por exemplo:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024 ...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...

Notou que existem números que podem ser expressos como produto de outros números. Ao observar as sequências acima, Napier percebeu que para multiplicar dois termos da primeira sequência, bastava somar os seus correspondentes na outra sequência e ver qual o termo da primeira sequência que corresponde a essa soma. Ele também observou que para realizar o produto de $4 \cdot 8$ bastava somar $2 + 3 = 5$, ou seja, os seus correspondentes na segunda sequência e encontrar o termo da primeira que corresponde ao 5. Neste caso, é o 32. Com esse raciocínio John Napier e Jobst Burgi, publicaram as primeira tábuas de logaritmos.

Observando as sequências abaixo,

3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

E usando as ideias de Napier, pergunta-se:

- Qual é o produto de 9 por 81? E o de 27 por 243? Justifique sua resposta.
- Qual é a divisão de 19683 por 2187? Justifique sua resposta com base no método de Napier.
- Qual é o resultado de 27 elevado ao quadrado? Justifique sua resposta.

V SESSÃO CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Objetivo: Construir o gráfico da função logarítmica, com o auxílio do software geogebra e identificar essa função como sendo a inversa da função exponencial.

Atividade 1ª : Considere as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

- Construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e uma tabela para a função $g(x)$ para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.
- Compare os valores de " x " da primeira tabela e os valores de $g(x)$ da segunda tabela e os valores de " x " da segunda tabela e os valores de $f(x)$ da primeira tabela. Quais são suas conclusões? Justifique.
- Use o aplicativo para traçar o gráfico das duas funções no mesmo plano cartesiano.
- Trace onde se localiza a bissetriz do 1º quadrante, no gráfico das funções f e g , e identifique os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ das tabelas construídas no item (a).
 - Esses pontos são simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante?
 - Os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação a bissetriz do 1º quadrante? Justifique.
- Analisando o gráfico determine o domínio e o conjunto imagem das funções $f(x)$ e $g(x)$.
- Verifique se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são crescentes.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem