

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática
no Nível Fundamental



NATALI DE JESUS FERREIRA DE MIRANDA

**O ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES POR
MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

BELÉM/PA
2023

Natali de Jesus Ferreira de Miranda

**O ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE
ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos.

Co-Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

**BELÉM/PA
2023**

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Miranda, Natali de Jesus Ferreira de

O ensino de adição e subtração de fração por meio de atividades experimentais / Natali de Jesus Ferreira de Miranda; orientadora, Maria de Lourdes Silva Santos.- Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. - Belém, 2023.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Ensino por atividades. I. Santos, Maria de Lourdes Silva (orient.). II. Título.
CDD 23 ed. 510.7

Natali de Jesus Ferreira de Miranda

**O ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE
ATIVIDADES EXPERIMENTAIS**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos.

Co-Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data de aprovação: 30/06/2023

Banca examinadora



. Orientadora

Prof. Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos

Doutora em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará



. Examinador Interno

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Universidade do Estado do Pará



. Examinador Externo

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Universidade Federal do Oeste do Pará

Ao meu Deus que é meu refúgio e fortaleza, socorro sempre presente nas tribulações. A meus pais, Raimundo Nonato e Maria Rosemira. Minhas irmãs Carla e Carmem. Meu amor Hermógenes Neto. E aos queridos estudantes que participaram dessa pesquisa.

AGRADECIMENTO

Agradeço imensamente a Deus por toda proteção, sabedoria e força concedida a todo momento.

A meus pais Raimundo Nonato e Maria Rosemira por me proporcionar, apesar de toda dificuldade, a oportunidade de estudar e me tornar a pessoa que sou hoje.

A minha amada irmã Carla Miranda por me incentivar e me ajudar a ingressar no mestrado, pois se não fosse ela não teria conseguido concluir a última etapa de avaliação.

A minha querida irmã Carmem Miranda pela ajuda ao revisar este texto com carinho e atenção, pelo cuidado e amor para comigo.

Agradeço ao meu amor Hermógenes Neto por dividir comigo as batalhas diárias, pelo incentivo constante, por me apoiar sempre, por toda ajuda, cuidado e amor.

Agradeço ao Ednaldo e Josiane por me acolherem com todo carinho em sua casa no início desse mestrado.

Aos colegas da turma de 2020, especialmente a irmã que o mestrado me deu, Betânia Prestes, pela parceria desde o início do curso. Obrigada por estar ao meu lado e compartilhar seus conhecimentos durante as atividades realizadas. E ao Marcos por ser nosso parceiro em todos os trabalhos.

Agradeço, também, as amigas Adrielle Coutinho e Brenda Gonçalves, pela paciência em me aguentar estudar até de madrugada.

Eu agradeço de maneira muito especial a minha orientadora Prof^a. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos e coorientador Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, pelos ensinamentos, orientações e todo conhecimento, por me conduzirem carinhosamente para construir este trabalho. Obrigada por tudo!

A Universidade do Estado do Pará pela oportunidade.

Agradeço aos docentes do PPGEM por todo ensinamento.

Aos membros da banca avaliadora, pelas orientações no texto da qualificação, pois foram de suma importância para o desenvolvimento desta pesquisa.

A direção da escola E.M.E.F São Felipe por permitir a aplicação da Sequência Didática e a professora Maria Lucinda por liberar a turma com toda boa vontade.

A todos os docentes que participaram e contribuíram ao responder os questionários.

E por último, meus agradecimentos aos discentes que participaram dos momentos de experimentação, eles foram fundamentais para conclusão desse trabalho.

Obrigada a todos que me apoiaram e torceram por mim!

.

RESUMO

Esta dissertação apresenta os resultados de uma pesquisa cujo objetivo central foi analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais de estudantes do 6º ano do ensino fundamental. No processo de realização do trabalho empreendemos esforços para responder a seguinte questão norteadora: como se dão os efeitos da aplicação de uma sequência didática sobre aprendizagens conceitual e procedimental de adição e subtração de frações, quando trabalhada junto a estudantes do 6º ano do ensino fundamental? A metodologia adotada foi a Engenharia Didática de Artigue (1996), abordando todas as suas fases (análises prévias, análises a priori, experimentação e análises a posteriori e validação), e como Tendências da Educação Matemática, optamos pelo Ensino de Matemática por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas. A investigação ocorreu no ano de 2022, em uma escola pública no município de Tailândia/PA com uma turma do 6º ano do ensino fundamental e contou com a participação de 29 estudantes. Para a análise dos resultados consideramos os registros das observações e conclusões realizadas pelos estudantes nas atividades aplicadas, o desempenho na resolução de questões do pré-teste e pós-teste e questionário educacional aplicado aos estudantes. Dentre os principais resultados temos: nos aspectos conceituais, os estudantes conseguiram compreender as regras operatórias para adição e subtração de frações; nos aspectos procedimentais os discentes apresentaram superação das dificuldades de interpretação dos problemas e, conseqüentemente, conseguiram modelar uma resolução corretamente, além disso, demonstraram aceitação à nova metodologia de ensino. A finalização da pesquisa nos permite concluir que a sequência didática é viável para o ensino do conteúdo matemático abordado e pode ser adotada por professores. Constatamos que o processo de ensino de adição e subtração de frações por meio de atividades experimentais proporcionou aos estudantes aprendizagens significativas. Com base nos resultados da dissertação elaboramos um produto educacional intitulado “Adição e subtração de frações por atividades experimentais: sequência didática”, cuja intenção é que o material possa auxiliar tanto professores quanto estudantes no processo de ensino aprendizagem de adição e subtração de frações. O referido produto está disponível no site: <https://ccse.uepa.br/ppgem/>, na aba dissertações 2023.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Adição e subtração com fração. Engenharia didática. Ensino por atividade. Sequência didática.

ABSTRACT

This dissertation presents the results of a research whose main objective was to analyze the effects of applying a didactic sequence, based on experimental activities and problem solving, on the teaching of addition and subtraction of fractions regarding the learning of conceptual and procedural aspects of 6th grade elementary school students. In the process of carrying out the work, we made efforts to answer the following guiding question: how are the effects of applying a didactic sequence on conceptual and procedural learning of addition and subtraction of fractions, when worked with students of the 6th year of elementary school ? The methodology adopted was Artigue's Didactic Engineering (1996), addressing all its phases (prior analyses, a priori analyses, experimentation and a posteriori analyzes and validation), and as Trends in Mathematics Education, we opted for Teaching Mathematics through Experimental Activities and Problem Solving. The investigation took place in the year 2022, in a public school in the city of Thailand/PA with a class of the 6th year of elementary school and had the participation of 29 students. For the analysis of the results, we considered the records of the observations and conclusions made by the students in the applied activities, the performance in solving pre-test and post-test questions and the educational questionnaire applied to the students. Among the main results we have: in the conceptual aspects, the students were able to understand the operative rules for adding and subtracting fractions; in the procedural aspects, the students overcame the difficulties of interpreting the problems and, consequently, were able to model a resolution correctly, in addition, they demonstrated acceptance of the new teaching methodology. The completion of the research allows us to conclude that the didactic sequence is viable for teaching the mathematical content addressed and can be adopted by teachers. We found that the process of teaching addition and subtraction of fractions through experimental activities provided students with significant learning. Based on the results of the dissertation, we developed an educational product entitled "Addition and subtraction of fractions through experimental activities: didactic sequence", whose intention is that the material can help both teachers and students in the teaching-learning process of addition and subtraction of fractions. Said product it is available website: <https://ccse.uepa.br/ppgem/>.

Keywords: Mathematics Teaching. Addition and subtraction with fraction. Didactic engineering. Teaching by activity. Following teaching.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01 - Variação, desde 2014 até 2021, dos percentuais de trabalhos com e sem ED no evento	39
Gráfico 02 - Faixa etária dos docentes	97
Gráfico 03 - Escolaridade dos docentes	98
Gráfico 04 - Tempo de serviço dos docentes	98
Gráfico 05 - Como os docentes costumam iniciar suas aulas de Matemática	100
Gráfico 06 - Do que os docentes mais sentem falta quando ministram suas aulas de Matemática	101
Gráfico 07 - A partir de que os docentes selecionam os conteúdos de Matemática.....	101
Gráfico 08 - As formas de avaliação mais utilizadas pelos docentes	102
Gráfico 09 - O que o docente costuma fazer para fixar o conteúdo ministrado	103
Gráfico 10 - Formação continuada oferecida pela rede de ensino	104
Gráfico 11 - Participação do docente nas formações continuadas quando ofertadas pela rede de ensino.....	105
Gráfico 12 - Se o docente considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada	105
Gráfico 13 - Visão docente quanto ao gosto de seus alunos em relação a matemática.....	106
Gráfico 14 - As maiores dificuldades dos alunos nas aulas de matemática de acordo com os docentes	106
Gráfico 15 - O bloco de conteúdos da matemática considerado mais importante pelos docentes	107
Gráfico 16 - Frequência do ensino dos tópicos do conteúdo de fração pelos docentes	109
Gráfico 17 - Opinião dos docentes em relação ao grau de dificuldade dos alunos	112
Gráfico 18 - Distribuição dos estudantes por gênero	158
Gráfico 19 - Distribuição dos alunos por idade	159
Gráfico 20 - Escolaridade do responsável masculino	160
Gráfico 21 - Escolaridade do responsável feminino	161
Gráfico 22 - Dependência dos alunos	162

Gráfico 23 – Gosto dos estudantes pela Matemática	163
Gráfico 24 - Ajuda nas tarefas de matemática	164
Gráfico 25 - Frequência de estudo da matemática fora da escola	165
Gráfico 26 -Frequência de compreensão das explicações dadas nas aulas de matemática	166
Gráfico 27 - Recursos mais utilizados para avaliação em Matemática	167
Gráfico 28 - Interesse nas aulas de Matemática	168
Gráfico 29 - Rendimento nas avaliações de Matemática	169
Gráfico 30 - Atitude metodológica da professora para início das aulas de matemática segundo os discentes	170
Gráficos 31 - Ferramentas utilizadas pela professora para praticar o conteúdo de matemática segundo os discentes	171
Gráfico 32 – Desempenho por questões no pré-teste e pós-teste	197
Gráfico 33 - Desempenho por estudante nos testes aditivos de fração	199
Gráfico 34 - Faixas de acerto por estudante nos testes aditivos de fração	200
Gráfico 35 - Quantitativo de cada tipo de erro	210
Gráfico 36 - Dispersão: Gosto pela Matemática	222
Gráfico 37 - Dispersão: Quem ajuda nas tarefas de matemática	223
Gráfico 38 - Dispersão: diferença das notas nos testes e o estudo de Matemática fora da escola	225
Gráfico 39 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o interesse nas aulas	226
Gráfico 40 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino	228
Gráfico 41 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino	229

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 - Relação de trabalhos que possuem a Engenharia Didática como Metodologia em relação ao ano de suas edições, seus GD e quantidade de frequência da Engenharia Didática (ED) e o Total (T) em cada ano	32
Quadro 02 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XVIII EBRAPEM em 2014	33
Quadro 03 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XIX EBRAPEM em 2015	34
Quadro 04 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XX EBRAPEM em 2016	36
Quadro 05 - Relação de trabalhos que possuem a Engenharia Didática como Metodologia em relação ao ano de suas edições, seus GD e quantidade de frequência da Engenharia Didática (ED) e o Total (T) em cada ano	37
Quadro 06 - Informações numéricas sobre o total de trabalhos e número de trabalhos com ED em cada ano desde 2014 até 2021.....	39
Quadro 07 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXI EBRAPEM em 2017	40
Quadro 08 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXII EBRAPEM em 2018	41
Quadro 09 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXIII EBRAPEM em 2019	41
Quadro 10 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXIV EBRAPEM em 2020	43
Quadro 11 - Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXV EBRAPEM em 2021.....	44
Quadro 12 - Possíveis misconceptions ¹ referentes a adição de fração	71
Quadro 13 - Misconceptions no ensino de adição e subtração com fração	72
Quadro 14 - Causas de Misconceptions em adição e subtração de fração	75
Quadro 15 - Ensino sobre fração e as operações de adição e subtração	78
Quadro 16 – Estratégias para o ensino de frações (DIONIZIO, 2019)	84

¹ Termo inglês que significa equívocos. É utilizado para descrever as concepções errôneas apresentadas pelos alunos no momento em que precisam resolver um determinado problema ou situação.

Quadro 17 - Elementos da TCC para a Estrutura Aditiva utilizados por Mack (1990)	87
Quadro 18 - Frequência do ensino dos tópicos do conteúdo de fração pelos docentes	108
Quadro 19 - Opinião dos docentes em relação ao grau de dificuldade dos alunos	110
Quadro 20 - Opinião dos docentes sobre as dificuldades quanto ao ensino de adição e subtração de fração	113
Quadro 21 - Dificuldade apresentada pelos estudantes no processo de aprendizado de adição e subtração de fração segundo a opinião dos docentes	114
Quadro 22 - Momentos de uma aula de matemática por meio de Atividade Experimental de conceituação ou de redescoberta segundo Sá (2019; 2020).	119
Quadro 23 - Atividade para adição de frações com denominadores iguais	127
Quadro 24 - Previsão de observações da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores iguais	129
Quadro 25 - Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores iguais	130
Quadro 26 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 1	130
Quadro 27 - Atividade para subtração de frações com denominadores iguais	132
Quadro 28 - Previsão de observações da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores iguais	135
Quadro 29 - Previsão de conclusões da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores iguais	135
Quadro 30 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 2	136
Quadro 31 - Atividade para adição de frações com denominadores diferentes	137
Quadro 32 - Previsão de observações da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferentes	141
Quadro 33 - Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferente	141
Quadro 34 - Atividade de aprofundamento da atividade 3	142
Quadro 35 - Atividade para subtração de frações com denominadores diferentes	144
Quadro 36 - Previsão de observações da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores diferentes	147
Quadro 37 - Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferente	148

Quadro 38 - Atividade de aprofundamento da atividade 4	148
Quadro 39 - Pré e pós-teste proposto para adição e subtração de fração	150
Quadro 40 - Cronograma da experimentação	155
Quadro 41 - Distribuição dos estudantes por gênero	157
Quadro 42 - Distribuição dos estudantes por idade	158
Quadro 43 - Escolaridade do responsável masculino	160
Quadro 44 - Escolaridade do responsável feminino	161
Quadro 45 - Dependência dos alunos	162
Quadro 46 – Gosto dos estudantes pela Matemática	163
Quadro 47 - Ajuda nas tarefas de matemática	164
Quadro 48 - Frequência de estudo da matemática fora da escola	165
Quadro 49 - Frequência de compreensão das explicações dadas nas aulas de Matemática	166
Quadro 50 - Recursos mais utilizados para avaliação em Matemática	167
Quadro 51 - Interesse em aprender os conteúdos ministrados	168
Quadro 52 - Rendimento nas avaliações de Matemática	169
Quadro 53 - Atitude metodológica para início das aulas de matemática segundo os discentes	170
Quadro 54 - Ferramentas utilizadas pela professora para praticar o conteúdo de matemática segundo os discentes	171
Quadro 55 - Resultado do pré-teste	173
Quadro 56 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 1	175
Quadro 57 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 1	175
Quadro 58 - Validade das conclusões da atividade 1	176
Quadro 59 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 2	178
Quadro 60 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 2	178
Quadro 61 - Validade das conclusões da atividade 2	179
Quadro 62 – Desempenho dos estudantes na atividade de aprofundamento da atividade 1	180
Quadro 63 – Desempenho na atividade de aprofundamento da atividade 2	181
Quadro 64 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 3	184
Quadro 65 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 3	185
Quadro 66 - Validade das conclusões da atividade 3	186
Quadro 67 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 4	189

Quadro 68 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 4	190
Quadro 69 - Validade das conclusões da atividade 4	190
Quadro 70 - Participação dos estudantes nas atividades	193
Quadro 71 – Desempenho por questões no pré-teste e pós-teste	196
Quadro 72 - Desempenho por estudante nos testes aditivos de fração	198
Quadro 73 - Faixas de acerto por estudante nos testes aditivos de fração	200
Quadro 74 - Tipos de erros cometidos nas questões do Pós-teste	202
Quadro 75 - Resumo de erros questão 01	202
Quadro 76 - Resumo de erros nos problemas aditivos de frações com denominadores iguais	205
Quadro 77 - Resumo de erros nos problemas aditivos de frações com denominadores iguais	208
Quadro 78 - Misconceptions constatadas nos testes aditivos de frações	212
Quadro 79 - Misconceptions diferentes constatadas nos testes aditivos de frações.	215
Quadro 80 - Relação gosto pela matemática x quem ajuda nas tarefas	217
Quadro 81 - Relação gosto pela matemática x frequência do estudo desta fora da escola	218
Quadro 82 - Relação gosto pela matemática x interesse nas aulas	219
Quadro 83 - Legenda Coeficiente de Pearson	220
Quadro 84 - Parâmetros para correlação	221
Quadro 85 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o gosto por matemática.....	221
Quadro 86 - Parâmetros para correlação	222
Quadro 87 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e quem ajuda nas tarefas de matemática	223
Quadro 88 - Parâmetros para correlação	224
Quadro 89 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o estudo de Matemática fora da escola	224
Quadro 90 - Parâmetros para correlação	226
Quadro 91 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o interesse nas aulas	226
Quadro 92 - Parâmetros para correlação	227
Quadro 93 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino	227

Quadro 94 - Parâmetros para correlação	228
Quadro 95 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino	229
Quadro 96 - Resultados da Correlação Linear de Pearson	230
Quadro 97 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 01	231
Quadro 98 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 02	232
Quadro 99 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 03	232
Quadro 100 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 04	233

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Esquema das fases da Engenharia Didática	31
Figura 02 - Resolução de adição de frações com denominadores diferentes.	64
Figura 03 - Resolução de subtração de frações com denominadores diferentes.....	65
Figura 04 - Possíveis causas de misconceptions para adição e subtração de frações em livros didáticos	74

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	21
2. ENGENHARIA DIDÁTICA	25
3. ANÁLISES PRÉVIAS	48
3.1 - ASPECTOS HISTÓRICOS	48
3.2 - ASPECTOS CURRICULARES	50
3.2.1 - Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)	51
3.2.2 - Base Nacional Comum Curricular (BNCC)	58
3.3 - ASPECTOS MATEMÁTICOS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES	62
3.3.1 - Adição e subtração com denominadores iguais	63
3.3.2 - Adição e subtração com denominadores diferentes	64
3.4 - MISCONCEPTIONS QUE ENVOLVEM ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÃO	69
3.4.1 - Possíveis causas das Misconceptions	73
3.5 - REVISÃO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÃO	78
3.5 - Estudos Diagnósticos	80
3.5.1.1 - Primeiro estudo	80
3.5.1.2 - Segundo estudo	81
3.5.1.3 - Terceiro estudo	82
3.5.1.4 - Quarto estudo	82
3.5.2 - Estudos Teóricos	83
3.5.2.1 - Primeiro Estudo	83
3.5.2.2 - Segundo estudo	85
3.5.2.3 - Terceiro estudo	86
3.5.3 - Estudos Experimentais	90
3.5.3.1 - Primeiro estudo	90
3.5.3.2 - Segundo estudo	91
3.5.3.3 - Terceiro estudo	93
3.5.3.4 - Quarto estudo	94
3.5.3.5 - Quinto estudo	95
3.6 - ENSINO APRENDIZAGEM DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÃO SEGUNDO OS DOCENTES	96
4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	117

4.1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	117
4.1.1 - Ensino de Matemática por Atividades Experimentais	117
4.1.2 - Resolução de Problemas	121
4.1.3 - Teoria dos Registros de Representação Semiótica	123
4.2 - APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES PARA A ABORDAGEM DO ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES	126
4.3 - OS TESTES PROPOSTOS	150
4.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	153
5. EXPERIMENTAÇÃO	154
5.1 - PRIMEIRO ENCONTRO	157
5.1. 2 - Perfil dos estudantes	157
5. 1. 3 - Pré-teste	172
5.2 - SEGUNDO ENCONTRO	174
5.3 - TERCEIRO ENCONTRO	176
5.4 - QUARTO ENCONTRO	179
5.5 - QUINTO ENCONTRO	182
5.6 - SEXTO ENCONTRO	182
5.7 -SÉTIMO ENCONTRO	183
5.8 - OITAVO ENCONTRO	186
5.9 - NONO ENCONTRO	187
5.10 - DÉCIMO ENCONTRO	191
5.11 - DÉCIMO PRIMEIRO ENCONTRO	191
5.12 - DÉCIMO SEGUNDO ENCONTRO	192
5.13 - FREQUÊNCIA DOS DISCENTES NO EXPERIMENTO	193
5.14 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A REALIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO	194
6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	196
6.1 - RESULTADOS E ANÁLISES DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE	196
6.2 - ANÁLISE DE ERROS NO PÓS-TESTE	201
6.3 – ANÁLISE DE MISCONCEPTIONS NO PRÉ-TESTES E PÓS-TESTE	211
6.4 - CORRELAÇÃO ENTRE AS NOTAS DOS TESTES E QUESTÕES SOCIOEDUCACIONAIS	216
6.5 - COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON DOS TESTES	220
6.6 - ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES PROPOSTAS E VALIDAÇÃO	230

7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	235
8. REFERENCIAS	238
APÊNDICES	245

1. INTRODUÇÃO

O homem vive desafiado cotidianamente a solucionar situações problemas que, por sua vez quase sempre possuem relações diretas com a Matemática. Cabe aqui a reflexão de que como vivemos em um século onde conhecimento e produção de bens e serviços andam juntos, torna-se ainda maior a necessidade de se entender e ser capaz de usar os conhecimentos matemáticos para além do âmbito escolar, ou seja, a Matemática utilizada como ferramenta eficaz para ajudar a solucionar problemas do cotidiano. Essa somatória de observações empíricas tem estimulado mais pesquisadores a investigarem sobre Educação Matemática com o objetivo de buscar resultados que possam proporcionar melhorias no processo de ensino e aprendizagem da disciplina em sala de aula, a exemplo disso temos, dentre outros, DIONIZIO et al, 2019; PEREIRA, 2017; ALVES, 2018; GODOY e SANTOS, 2012; MELLO, 2014.

Como parte integrante e importante do currículo matemático para o 6º ano existe o assunto fração que, pessoalmente, consideramos difícil tanto por docentes no momento do ensino desse conteúdo quanto para os discentes em sua aprendizagem, principalmente, as operações aditivas e mais ainda quando as frações apresentam denominadores diferentes. Diante desse contexto, consideramos fundamental que o ensino deste objeto matemático seja desenvolvido por meio de metodologias que proporcionem aos estudantes real conhecimento do assunto.

Como professora de Matemática no Ensino Fundamental observo diariamente dificuldades vivenciadas por muitos de nós docentes, quando ensinarmos os conhecimentos matemáticos. Práticas vinculadas com abordagens mecanizadas e avaliações tradicionais ainda são presentes em muitas salas de aulas brasileiras, de modo que na maioria das vezes não conseguimos despertar a atenção do aluno e este, por sua vez, não tem interesse ou gosto pelas aprendizagens em matemática. Esse contexto tem nos incomodado e como professora senti vontade de intervir de alguma forma.

Ao ingressar no Mestrado profissional em Ensino de Matemática, optamos pela linha de pesquisa Metodologias de Ensino para o Ensino Fundamental, daí as lembranças de nossa trajetória estudantil nesse nível de ensino nos ajudaram a refletir sobre como a matemática era temida pelos colegas de turma e como alguns conteúdos não foram apreendidos e sim memorizados para passarmos na prova.

As lembranças dos tempos de estudante nos remeteram à época da quinta série do ensino fundamental (6º ano atualmente) e recordar que o assunto fração foi bastante complexo para compreendermos, principalmente, as operações aditivas e mais ainda quando as frações apresentavam denominadores diferentes. Recordamos que em outro momento de nossa formação, naquele momento na graduação, também observamos colegas de classe que diziam ter dificuldades em resolver problemas que envolvessem cálculo com frações.

Após concluir o curso de Licenciatura em Matemática, passamos a ministrar aulas da referida disciplina na rede pública municipal de Tailândia/PA. Nossa experiência de lecionar a disciplina no ensino fundamental nos possibilitou vivenciar realidades bem semelhantes das quais havíamos passado, pois os estudantes sentiam dificuldades de compreender as regras de resolução para operações aditivas de frações. Além disso, ouvíamos constantes queixas de outros colegas professores relatando as mesmas dificuldades em relação ao ensino de fração em suas turmas.

As reflexões e memórias nos motivaram a fazer essa dissertação abordando o ensino de fração, e mais especificamente adição e subtração de frações. A escolha do referido objeto matemático se justifica por nosso interesse em investigar tanto as dificuldades dos professores em ensinar o assunto curricular, quanto as dificuldades de aprendizagens dos estudantes.

Assim, partimos da seguinte questão norteadora: Como se dão os efeitos da aplicação de uma sequência didática sobre aprendizagens conceitual e procedimental de adição e subtração de frações, quando trabalhada junto a estudantes do 6º ano do ensino fundamental?

A partir da questão norteadora definimos como objetivo geral para a pesquisa analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais de estudantes do 6º ano do ensino fundamental.

Para atingir o objetivo geral estabelecemos os seguintes objetivos específicos.

- 1) Identificar aspectos históricos e curriculares sobre fração;
- 2) Estudar misconceptions no ensino de adição e subtração de frações;
- 3) Realizar uma revisão de estudos sobre o ensino de frações;
- 4) Realizar uma consulta a docentes sobre os aspectos de sua formação e do ensino de frações;

- 5) Elaborar uma sequência didática para o ensino de adição e subtração de frações;
- 6) Verificar os efeitos e as contribuições desta sequência para a aprendizagem deste conteúdo;
- 7) Identificar o desempenho dos estudantes em atividades experimentais para o ensino de frações;
- 8) Avaliar a participação dos estudantes da amostra nas aulas de Matemática durante o desenvolvimento da sequência didática e após a aplicação da mesma sequência.

No intuito de responder à questão norteadora, aplicamos - a partir dos objetivos propostos - a parte experimental do estudo em uma escola pública no município de Tailândia/PA com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, junto a uma amostra de 29 estudantes. Como metodologia, adotamos as etapas da Engenharia Didática pois, acreditamos que os métodos de pesquisa utilizados por essa metodologia oportunizam o professor repensar sobre suas práticas de ensino e questionar a respeito do aprendizado que seus alunos estão obtendo sobre determinado conteúdo, e assim, planejar, criar e executar uma sequência didática voltada para o tema almejado e, até mesmo, modificar e alterar a sequência caso fosse necessário.

Conforme Artigue (1996), a Engenharia Didática é uma metodologia de investigação com caráter experimental, cujos resultados são obtidos por meio de aplicações didáticas na sala de aula. Essa metodologia divide a pesquisa em quatro fases a saber: análises prévias; concepção e análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação. Nossa pesquisa foi desenvolvida seguindo as referidas etapas.

Na primeira etapa - análises prévias - apresentamos os aspectos matemáticos, históricos e curriculares sobre fração. Em seguida, a revisão realizada sobre estudos voltados ao ensino aprendizagem de fração, mais especificamente, adição e subtração de frações, assim como, uma consulta a discentes do ensino fundamental sobre o ensino e aprendizagem desse tema. Também, apresentamos o embasamento teórico para esse estudo que são: Ensino de matemática por atividades Experimentais (SÁ, 2009; 2019; 2020); Resolução de problemas (SÁ, 2006; MENDONÇA, 1999 apud Sá, 2006; 2009; POLYA, 1977 apud Sá, 2006) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2009; 2010).

Na segunda etapa da pesquisa, concepção e análise a priori, esboçamos a sequência didática produzida para desenvolver o conteúdo de adição e subtração de frações, seguida da análise a priori de cada atividade. Expomos, também, o pré e pós-teste com suas respectivas análises a priori, e para finalizar, trazemos as atividades de aprofundamento da sequência didática juntamente com suas análises a priori.

Na terceira etapa da pesquisa, a experimentação, descrevemos como realizamos a aplicação da sequência didática construída e como instrumento de produção das informações utilizamos os testes, o questionário socioeconômico, anotações em diário de campo e fichas de acompanhamento produzidas por Sá (2018).

Na quarta e última etapa da pesquisa, a análise a posteriori e validação, apresentamos as técnicas de sistematização das informações produzidas durante a experimentação; as técnicas quantitativas e qualitativas de análise das informações que foram utilizadas e as estratégias de validação das atividades desenvolvidas.

Em nossas considerações finais expressamos os resultados encontrados ao finalizar a investigação e uma descrição do produto educacional que foi elaborado com a intenção de produzir um recurso didático na forma de sequência didática baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, que pode servir como alternativa para favorecer o processo de ensino e aprendizagem de adição e subtração de frações de modo mais dinâmico e significativo proporcionando aos estudantes maior autonomia, participação, habilidades para construir o próprio conhecimento e resolver problemas.

2. ENGENHARIA DIDÁTICA

A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa que teve sua origem na Escola Francesa de Didática da Matemática.

Sobre o surgimento da engenharia didática, Bittar (2017) afirma que na década de 1970, na França, surgiram diversos estudos sobre o desenvolvimento da aprendizagem Matemática. Tais estudos buscavam analisar a aplicação de sequências didáticas em sala de aula. Porém, nessa época, não havia uma metodologia que atendesse a necessidade dos pesquisadores em preparar e analisar um conjunto de atividades destinadas ao ensino e aprendizagem de matemática, pois as quais eram advindas do campo da Educação “não atendiam às especificidades que emergiam dos trabalhos em desenvolvimento: era preciso algo que considerasse, ao mesmo tempo, a especificidade do conteúdo matemático e questões didáticas” (Bittar, 2017, p. 101).

As investigações sobre essa temática deram origem, segundo o autor acima citado, à Didática da Matemática, encontrada nos trabalhos de Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Raymond Duval, Michele Artigue, Régine Douady, Aline Robert, dentre outros.

Com o desenvolvimento da Didática da Matemática, surge os primeiros trabalhos sobre engenharia didática ainda em 1970 e começa a ser estruturado e utilizado por Guy Brousseau, Yves Chevallard e Régine Douady no início dos anos 80. No final dessa década o conceito de engenharia didática é sistematizado, desenvolvido e divulgado por Michèle Artigue e caracterizada pela autora como procedimentos metodológicos que se assemelham ao trabalho do engenheiro ao realizar um projeto arquitetônico (ARTIGUE, 1996). Segundo Pais (2019), essa relação de semelhança do trabalho do pesquisador em didática com o trabalho do engenheiro, trata-se da concepção, planejamento e execução de um projeto, pois, para poder iniciar uma construção, o engenheiro primeiramente cria e planeja, para depois colocar em prática sua ideia.

Ou seja, é necessário que na realização de um projeto de ensino haja a compreensão plena de como ocorrerá todo o processo, isto é, está ciente dos desafios apresentados tanto nas fases de concepção, planejamento e implantação de um plano de ensino no caso do educador ou um projeto de pesquisa quando se tratar de um pesquisador (PAIS, 2019).

Outra característica importante dessa metodologia diz respeito ao aspecto experimental que ela possui, pois é constituída de aplicações didáticas em sala de aula. Almouloud e Coutinho (2008) acrescentam que

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (Almouloud & Coutinho, 2008, p. 66).

Pais (2019), também reforça essa característica experimental da Engenharia Didática ao citar Artigue (1996)

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação, e a análise de sequências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p.247 apud PAIS, 2019, p.102)

Sendo assim, a Engenharia Didática oferece ao professor caminhos para criar, planejar e executar uma sequência didática experimental dentro da sala de aula que possibilite uma investigação, reflexão, avaliação e redefinição de suas metodologias de ensino. Partindo dessa lógica, pode-se compreender e até mesmo visualizar com maior exatidão quais as necessidades, dúvidas e dificuldades que os alunos possuem, e com isso, criar meios para detectar as causas dos obstáculos de aprendizagem com objetivo de superá-los e conseqüentemente, elaborar situações didáticas que proporcionem uma aprendizagem significativa dentro da sala de aula.

De modo geral, a Engenharia Didática “busca contemplar a dimensão teórica e a dimensão experimental da pesquisa em didática da matemática” (SÁ; ALVES, 2011, p. 145). Por isso, sua utilização como metodologia de pesquisa se faz por meio da execução de quatro fases consecutivas que são: (1) **análises prévias**; (2) **concepção e análise a priori das situações didáticas da engenharia**; (3) **experimentação** e (4) **análise a posteriori e validação**.

A seguir descreveremos em que consiste cada uma destas fases.

(1) Análises prévias

Nessa primeira fase se realizam as análises preliminares. Segundo Lopes, Palmas e Sá (2018, p. 163) ao citar Artigue (1996, p. 198), as análises prévias

Compreende a análise epistemológica dos conteúdos constantes no plano de ensino; o ensino habitual e seus efeitos/consequências; a compreensão dos estudantes e das dificuldades e obstáculos que pontuam seu desenvolvimento; o campo de sujeição no qual se estabelecerá a realização didática e os objetivos da pesquisa.

Logo, entende-se que nessa primeira fase realiza-se um estudo teórico sobre o objeto que será trabalhado, como o mesmo tem sido abordado, quais foram os resultados desse ensino, como tem sido a compreensão dos alunos, quais suas dificuldades e obstáculos no processo de ensino e aprendizagem. Nessa análise, também estão incluídos o espaço físico no qual o aluno se encontra e por fim, construção dos objetivos almejados nessa pesquisa.

Porto (2019) afirma que nas análises prévias é realizado um levantamento sobre o objeto matemático que será estudado, e essas análises são desenvolvidas considerando o quadro teórico didático em que o pesquisador se fundamenta e os conhecimentos didáticos já obtidos a respeito do tema em estudo. Também é feita uma análise epistemológica dos conteúdos envolvidos no ensino; avaliação de como vem sendo desenvolvido o ensino atual do referido assunto e suas implicações, faz-se uma análise sobre a compreensão dos alunos, das dificuldades e obstáculos que se mostram diante do saber apresentado.

Pais (2019) enfatiza que, para melhor organizar a análise preliminar, recomenda-se ter como ponto inicial uma descrição das principais dimensões: epistemológica, cognitiva, pedagógica, entre outras. Justamente porque definem o fenômeno a ser estudado, se relacionam com o sistema de ensino e participam na constituição do objeto de estudo.

Dessa forma, alguns pontos importantes devem ser considerados durante a etapa das análises prévias como:

- Os conhecimentos didáticos que o professor/pesquisador possui sobre o objeto matemático em questão;
- Análise epistemológica e histórica desse objeto matemático que será abordado para o ensino;

- Análise de como se encontra o ensino atual e quais são seus efeitos;
- Análise da concepção dos alunos, da visão dos professores, das dificuldades e dos obstáculos que se fazem presentes no decorrer do ensino e aprendizagem desse objeto.

(2) concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia

Nessa segunda fase os objetivos principais são: elaborar uma sequência didática para o conteúdo em questão e formular hipóteses baseadas nos resultados proporcionados pelas análises prévias. Ou seja, o pesquisador elabora e analisa uma sequência de atividades denominada de sequência didática com base nos resultados obtidos nas análises prévias, produz e seleciona todos os instrumentos que serão necessários durante a aplicação dessas atividades em sala de aula e tem como propósito conduzir os alunos a desenvolverem as competências e habilidades desejadas com relação ao conteúdo investigado.

Contudo, existe duas variáveis que segundo Artigue (1996) precisam ser esclarecidas e bem distinguidas, pois podem servir para alcançar os objetivos esperados no processo de ensino e de aprendizagem se manipuladas corretamente pelo pesquisador. São elas: macrodidáticas ou globais e as microdidáticas ou locais.

As variáveis macrodidáticas são as que dizem respeito à organização global da engenharia. As variáveis microdidáticas são as que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou uma fase, podendo umas e outras ser, por vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático envolvido. (SÁ; ALVES, 2011, p. 153)

Como podemos ver, essas variáveis possuem grande importância para a elaboração da sequência didática, pois, por meio das variáveis globais ou macrodidáticas são analisados e observados todos os aspectos gerais da sequência didática, e através das variáveis locais ou microdidáticas tem-se um planejamento específico e restrito a cada momento da aplicação dessa sequência, ou seja, a cada aula em que ocorrer a aplicação da sequência didática tem-se como objetivo proporcionar aos alunos melhores condições para compreender e construir seu próprio aprendizado.

(3) Experimentação

Essa é a fase da aplicação da sequência didática que foi pensada, elaborada e analisada *a priori* e que tem como *locus* a sala de aula. Nesse momento da experimentação deve-se seguir os seguintes passos: primeiro, esclarecer aos alunos quais serão os objetivos e condições da realização da pesquisa; segundo, estabelecer com eles um contrato didático; terceiro, aplicar o instrumento de pesquisa, que no caso, será uma sequência didática; e quarto, registrar todas as observações feitas no decorrer desta etapa.

Sobre o registro de informações, Lima (2014), relata que o pesquisador precisa estar atento a todas as informações que surgirem durante essas aulas ou sessões para assim poder conhecer e analisar o fenômeno estudado.

É importante que se utilize instrumentos para o registro apurado das atividades, tais como filmagens, cadernos de anotações, e observações diretas para que as circunstâncias reais ocorridas durante as sessões de ensino sejam fidedignas e claramente descritas no relatório final da pesquisa. (LIMA, 2014, p. 37)

E ainda, Pais (2001) destaca que a gravação de voz pode ser suficiente para registrar as informações se os relatos dos estudantes forem suficientes para a análise. Porém, se o comportamento do estudante no decorrer do desenvolvimento de uma atividade for o objeto da pesquisa, a filmagem é o mais indicado pois, possibilita uma análise mais adequada do comportamento.

De um modo geral, a fase da experimentação, se dá com o desenvolvimento de uma sequência didática em um determinado número de aulas ou encontros que também são denominados de sessões e que serve para observar as situações de aprendizagem sobre os conceitos matemáticos que foram conjecturados na pesquisa didática. Essas atividades precisam ser bem planejadas e o pesquisador precisa usufruir de todos os recursos possíveis para poder obter o maior número de registros das observações realizadas durante essa etapa.

Por fim, Sá e Alves (2011) de acordo com suas experiências indicam que durante a experimentação é muito importante que o pesquisador: possua todos os instrumentos necessários para a produção de informações previsto na análise *a priori*; esteja com todo o material que será utilizado devidamente providenciado; não

improvisar nada; esteja teoricamente bem preparado; domine todas as atividades previstas para cada sessão; e que o objetivo da pesquisa esteja sempre norteando cada ação da experimentação.

De modo geral, nessa fase, é possível se obter informações sobre o desenvolvimento cognitivo do estudante, o grau de dificuldade sentida por ele sobre o objeto pesquisado, comportamento e atitude em relação ao trabalho em grupo. E como técnicas para se obter as informações desejadas pode-se utilizar observações, questionário, aplicação de testes de sondagem, diário de campo, as atividades exploratórias desenvolvidas no decorrer da aplicação da sequência didática, uma atividade de avaliação final, um questionário aberto considerando os recursos e metodologia empregados.

A coleta de dados poderá ser feita através de gravações (de vídeo ou áudio), fotografias, caderno de campo, arquivos das atividades realizadas pelos alunos e anotações feitas por eles.

(4) Análise *a posteriori* e validação

A fase da análise, *a posteriori* e validação, é a última etapa da Engenharia Didática. Contudo, como indica Bittar (2017), ela também deve ser feita ao longo da sequência didática e que a partir dessa análise os rumos da sequência didática podem ser redefinidos.

No momento das análises *a posteriori* é realizado o processamento das informações que foram coletadas durante a fase da experimentação, ou seja, na aplicação da sequência didática. Conforme afirma Lima (2014), nesta fase o pesquisador deve

Compilar as informações registradas na experimentação para que a análise atinja a realidade das observações realizadas em sala de aula, e a produção e interação dos alunos, visando conhecer os procedimentos e percurso para a construção do conhecimento e o desenvolvimento do raciocínio sobre o objeto de estudo. Para que a análise *a posteriori* ocorra de forma mais ampla e completa é importante que se complementem os dados obtidos por meio de técnicas que utilizem questionários, entrevistas, caderno de anotações, gravações e filmagens, entre outras que possam assegurar um arcabouço de registros. A validação dos resultados é obtida no confronto entre a análise *a priori* e a *a posteriori*, verificando as hipóteses levantadas na concepção da pesquisa. A validação sob os aspectos metodológicos é a etapa em que a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico da pesquisa. (LIMA, 2014, p. 37-38)

Assim, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) a *análise a posteriori*

Depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada.

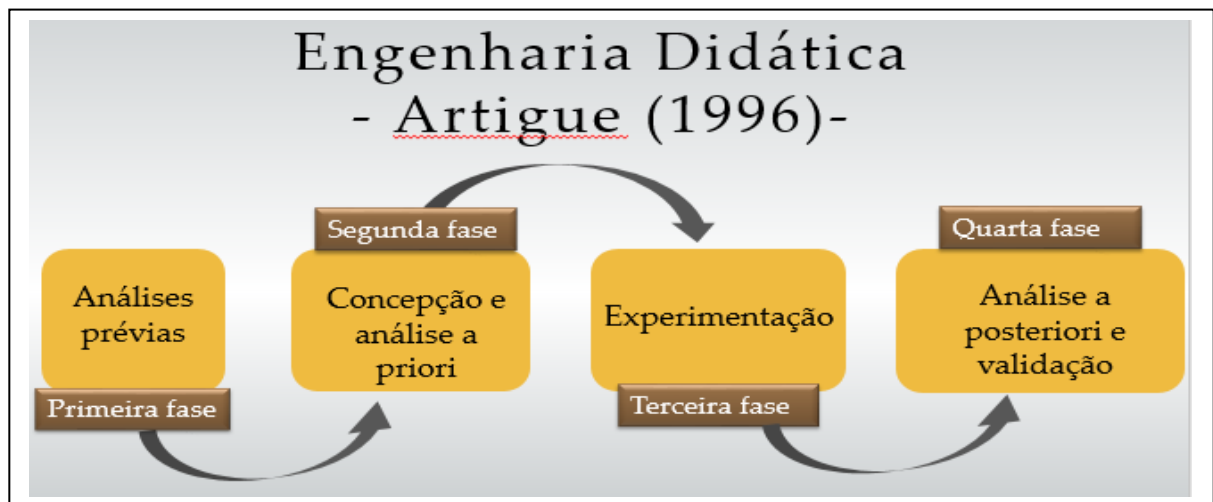
Sendo assim, análise *a posteriori* tem como objetivo verificar os resultados obtidos na experimentação de acordo com os objetivos que foram delimitados na etapa das análises *a priori* e daí identificar e analisar as construções didáticas dos alunos, os comportamentos apresentados por eles, seu desempenho durante a pesquisa e todos os demais registros coletados no decorrer da experimentação.

Para Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) A análise *a posteriori* “não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa”

Nessa fase, também é realizado a validação da sequência didática por meio da confrontação entre a análise *a priori* e os dados obtidos na análise *a posteriori*, isto é, verifica-se a confirmação das hipóteses ocorridas no início da pesquisa.

De modo geral, para melhor compreensão, apresentamos a seguir um esquema que mostra como ocorre as etapas da Engenharia Didática.

Figura 01 – Esquema das fases da Engenharia Didática



Fonte: Adaptado de Artigue (1996)

Portanto, para a análise das informações produzidas durante a experimentação, podem ser utilizadas para uma análise qualitativa, técnicas como descrição e interpretação dos dados coletados e, para uma análise quantitativa, tabelas e quadros.

Para maior embasamento teórico, buscamos por pesquisas realizadas nos últimos dez anos que utilizaram a engenharia didática como metodologia de pesquisa. Nessa busca, encontramos o estudo de Lopes, Palmas e Sá (2018), que objetivou investigar as características dos trabalhos de pesquisas que utilizaram a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, levando em consideração os objetivos das pesquisas que fazem seu uso e classificando-as em Dificuldades de aprendizagem ou Propostas didáticas, este último em duas subclasses, a saber, com utilização de instrumento auxiliar ou sem utilização de instrumento auxiliar.

Para isso, os autores realizaram um levantamento dos trabalhos apresentados no EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática) no período de 2014 a 2016 e puderam, assim, obter um quadro que mostra quantitativamente a utilização da Engenharia Didática como metodologia e, também, qualitativo relacionado aos objetivos em fazer uso da mesma.

Quadro 01 - Relação de trabalhos que possuem a Engenharia Didática como Metodologia em relação ao ano de suas edições, seus GD e quantidade de frequência da Engenharia Didática (ED) e o Total (T) em cada ano

GRUPOS DE DISCUSSÕES		EBRAPEM							
		2014		2015		2016		Total	
		ED	T	ED	T	ED	T	ED	T
GD1	Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental	-	29	-	13	-	16	-	58
GD2	Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental	3	42	2	22	4	24	9	88
GD3	Educação Matemática no Ensino Médio	2	47	2	14		9	4	70
GD4	Educação Matemática no Ensino Superior	-	15	2	8	-	12	2	35
GD5	História da Matemática/Educação Matemática	-	30	-	38	-	33	-	101
GD6	Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância	4	42	2	38	4	43	10	123
GD7	Formação de Professores que Ensinam Matemática	1	93	-	57	-	61	1	211
GD8	Avaliação em Educação Matemática	-	9	-	7	-	7	-	23
GD9	Processos cognitivos e linguísticos em Educação Matemática	-	9	1	6	-	4	1	19

GD10	Modelagem Matemática	-	9	-	13	1	13	1	35
GD11	Filosofia da Educação Matemática	-	7	-	6	-	5	-	18
GD12	Ensino de Probabilidade e Estatística	-	13	1	10	-	9	1	32
GD13	Educação Matemática e Inclusão	-	18	-	15	-	8	-	41
GD14	Resoluções de problemas	-	-	-	5	1	9	1	14
GD15	Educação Financeira	-	-	1	15	1	10	2	25
GD16	Etnomatemática	-	-	-	-	-	14	-	14
Total		10	363	11	267	11	277	32	907

Fonte: Lopes, Palmas e Sá, 2018 (adaptado)

Como podemos observar, de modo geral, nas edições de 2014 a 2016, 32 dos 907 trabalhos submetidos ao evento utilizaram a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, o que representou 3,52% do total dos anais pesquisados.

Podemos observar a seguir que os referidos autores realizaram uma explanação em quadros sobre os objetivos dos trabalhos que utilizaram a Engenharia Didática e classificaram-nos em Dificuldades de aprendizagem ou Propostas didáticas, este último com utilização de instrumento auxiliar ou sem a utilização de instrumento auxiliar.

Quadro 02 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XVIII EBRAPEM em 2014

	GD	Pesquisador	Título	Objetivo da Pesquisa
Dificuldades de aprendizagem	GD 2	SILVA, José Valério Gomes da	Grandezas e medidas: um estudo da transição entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental.	Identificar as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem das noções de área e perímetro de forma a verificar como os estudantes utilizam esses conhecimentos em tarefas contextualizadas quando os mesmos trabalham de forma autônoma utilizando diferentes fontes de ajuda ao estudo.
	GD 6	HALBERSTADT, Fabrício Fernando	A aprendizagem da geometria analítica do Ensino Médio: um olhar a partir das suas representações semióticas no GrafEq.	Estudar o processo de compreensão dos alunos de uma turma do ensino médio de conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio.
	GD 6	SOUSA, Núbia dos Santos de	Do espaço ao plano, da abstração ao registro visual: as cônicas no contexto da aprendizagem colaborativa.	Identificar as dificuldades dos alunos no processo de conversão entre registros de representações analíticas e gráficas da Geometria, no conteúdo de Curvas Cônicas.
Propostas didáticas (Sem)	GD 2	ALMEIDA, Jadilson Ramos de	Contribuições dos problemas de partilha para o desenvolvimento do Pensamento algébrico	Verificar as possíveis contribuições dos problemas de partilha para o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes do 7º ano do ensino fundamental e identificar a

			em iniciantes em álgebra formal.	influência das variáveis envolvidas nos problemas de partilha para o desenvolvimento do pensamento algébrico.
	GD 2	LIMA, Renan Gustavo Araújo de	Estratégias mobilizadas por alunos de um curso de matemática-licenciatura ao resolverem um problema de combinatória.	Realizar uma sequência didática com o intuito de investigar estratégias mobilizadas para resolução de um problema de combinatória, pautados na Engenharia Didática.
	GD 6	SILVA, César Thiago José da	O uso de simulações no ensino de função: uma sequência didática para abordar taxa de variação.	Estudar o uso de simulações no ensino de função.
	GD 6	SANTOS, Ricardo Tiburcio dos	Método de elicitación de requisitos para software educativo: um estudo a partir da prototipação de um software para função em plataformas móveis.	Identificar quais são as potencialidades dos dispositivos móveis na aprendizagem em Matemática, verificando as particularidades que apresenta com um estudo teórico e experimental.
	GD 7	SANTOS, Daniela Batista	Desafios e Possibilidades de um Ensino de Matemática Crítico e Reflexivo: um olhar para o ensino e aprendizagem das operações básicas da aritmética potencializada pela tecnologia.	Desenvolver o conceito das operações básicas da aritmética, adição e subtração, à luz da Teoria das Situações Didáticas, construindo sequências didáticas envolvendo esses conceitos, numa perspectiva crítica e reflexiva.
Propostas didáticas (Com instrumento auxiliar)	GD 2	AZEVEDO NETO, Leonardo Dourado de	Semeando nos jogos Mankalas: explorando o conteúdo divisibilidade com o jogo Awalé.	Analisar possibilidades de explorar o conteúdo divisibilidade nas aulas de matemática dos anos finais do ensino fundamental, por meio dos jogos da família Mankala.
	GD 2	MÁXIMO, Luciana da Silva	Um enfoque no desenvolvimento da visualização geométrica espacial a partir da utilização de um software de geometria dinâmica como ferramenta didática.	Analisar os efeitos de uma sequência didática com o uso de software de Geometria Dinâmica sobre o desenvolvimento da habilidade visual geométrica espacial tridimensional por estudantes do Ensino Normal Médio.

Fonte: Adaptado (LOPES; PALMAS; SÁ, 2018)

Quadro 03 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XIX EBRAPEM em 2015

	GD	Pesquisador	Título	Objetivo da Pesquisa
Dificuldades de aprendizagem	GD 2	KRAKECKER, Liana	Produção de conjecturas e provas de propriedades de ângulos de polígonos: um estudo com alunos do oitavo ano do ensino fundamental.	Analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades, envolvendo ângulos de polígonos, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.
	GD 3	PEREZ, Luis Eduardo Reyes	Função exponencial e as praxeologias matemáticas no ensino médio.	Pesquisar que tipos de praxeologias pontuais surgem quando estudantes foram solicitados a realizar atividades relacionadas à função exponencial.

	GD 4	ALMEIDA, Gladiston dos Anjos	Percurso de Estudo e Pesquisa com alunos da licenciatura em Matemática: uma (re)construção praxeológica no estudo do conteúdo área de polígonos.	Buscar respostas às problemáticas apresentadas a partir da aplicação de um Percurso de Estudo e Pesquisa com alunos da Licenciatura em Matemática.
	GD 12	SENA, Franco Deyvis Lima de	Desenvolvimento do pensamento Estocástico: proposta para sequência didática e viés Lúdico no 6º e 9º ano do ensino fundamental.	Levantar aspectos necessários à reflexão sobre a construção do conhecimento estocástico, no 6º e 9º ano do ensino fundamental.
	GD 15	RASCHEN, Samuel Ricardo	Proposta de sequência didática para o desenvolvimento da educação financeira em escolas.	Buscar atividades em que a matemática assume um papel preponderante no desenvolvimento da crítica financeira e da cidadania.
Propostas didáticas (Sem instrumento auxiliar)	GD 2	GUADAGNINI, Míriam do Rocio	Fatoração polinomial: um estudo sobre sua potencialidade em aplicações intra e extramatemáticas.	Investigar o ensino da fatoração polinomial por meio da análise das praxeologias didáticas e matemáticas desenvolvidas para seu estudo no Brasil.
	GD 3	ARAÚJO, Andreia Sanches de Oliveira	A construção do conhecimento geométrico à luz da teoria de Van Hiele.	Identificar e analisar a construção do conhecimento geométrico com a utilização de atividades pedagógicas diferenciadas.
	GD 9	MIRANDA, Juliene Azevedo	Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional: uma Sequência didática para o sexto ano do Ensino Fundamental.	Analisar uma sequência didática, organizada na forma de situações-problema com mediação, que vise favorecer o estabelecimento das relações de covariação e de invariância de grandezas, necessárias para conceituar razão e proporção e também analisar o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver situações-problema envolvendo o raciocínio proporcional, ao longo da aplicação da proposta didática.
Propostas didáticas (Com instrumento auxiliar)	GD 4	ILVA, Allan Vicente de Macedo	Sistemas de equações lineares: um paralelo entre a álgebra e a geometria.	Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades implantadas num ambiente computacional, com vista a melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear, mais precisamente os sistemas de equações lineares, com o tema central a visualização
	GD 6	SILVA, Helder Lima	Comunicação matemática em torno de noções de funções trigonométricas em dois ambientes de aprendizagem no ensino médio.	Pesquisar os saberes matemáticos acerca de Funções Trigonômicas, e os fenômenos naturais e/ou científicos que podem ser contextualizados com estas funções no 3º ano do Ensino Médio como instituição de referência/aplicação
	GD 6	TEIXEIRA, Igor Roberto Gonçalves	O uso do software GeoGebra nas construções gráficas de Funções Quadráticas.	Investigar as contribuições do software GeoGebra enquanto ferramenta necessária no estudo das relações possíveis entre o

				comportamento de uma função quadrática a partir de seus elementos, com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, nos registros numérico, algébrico e gráfico.
--	--	--	--	--

Fonte: Adaptado (LOPES; PALMAS; SÁ, 2018)

Quadro 04 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XX EBRAPEM em 2016

	GD	Pesquisador	Título	Objetivo da Pesquisa
Dificuldades de aprendizagem	GD 2	MOTA, Cleide Ribeiro	Um estudo sobre a aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.	Investigar dificuldades dos alunos diante de situações envolvendo conceitos de áreas de triângulos e quadriláteros, dispondo de diversos recursos: papel e lápis, malha quadriculada, recortes de figuras, geoplano, tangram, entre outros.
	GD 15	MELLO, Cristiane Neves	As contribuições das tecnologias na discussão sobre o consumo de bens de luxo com alunos do Ensino Médio.	Conhecer as concepções de consumo de bens de luxo que alunos do Ensino Médio possuem e investigar as contribuições que as atividades tecnológicas proporcionam para alterar ou solidificar essa concepção.
Propostas didáticas (Sem instrumento auxiliar)	GD 2	GUIMARÃES, Jailma Ferreira	A inter-relação entre afetividade docente e discente: concepções sobre a Álgebra.	Investigar alunos dos anos finais do Ensino Fundamental no desenvolvimento de atividades que contemplam as concepções da Álgebra propostas por Usiskin (1995) considerando a inter-relação entre o docente e o discente.
	GD 2	BARBOSA, Maria José Fagundes	Teorema de Tales: uma abordagem por do meio da Teoria das Situações Didáticas.	Elaborar e aplicar uma sequência didática sobre o Teorema de Tales, destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental
	GD 2	PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira	Uma Sequência Didática para o ensino de Semelhança de Figuras Planas.	Desenvolver uma sequência didática que contribua para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de semelhança de figuras planas propondo novas ações didáticas para alunos do ensino fundamental.
	GD 10	OLIVEIRA, Jader de	A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Modelagem de Problemas de Programação Linear.	Investigar em que medida o ensinoaprendizagem de Sistemas Lineares para alunos de cursos técnicos pode ser facilitado a partir da utilização de Modelos de Programação Linear.
	GD 14	ALTOÉ, Renan Oliveira	Formulação de Problemas: uma possibilidade didática no ensino de matemática.	Investigar abordagens metodológicas de Formulação de Problemas que possam contribuir no ensino de multiplicação e divisão no 5º ano da Educação Básica
Propostas didáticas (Com)	GD 6	BORSOI, Caroline	GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial.	Provocar o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, nisso tirando-se proveito dos recursos de representação que se tem no software, especialmente aquele que diz respeito a

				interação dinâmica entre as representações do objeto tridimensional
GD 6	BERLANDA, Juliane Carla	As mobilizações de registros de representações semióticas no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do software GeoGebra.	Desenvolver uma sequência de atividades que pretende-se aplicar e analisar, junto à estudantes de uma escola da rede pública estadual de Erechim RS.	
GD 6	PEREIRA, Laís de Almeida	Geometria Dinâmica na resolução de questões da OBMEP.	Elaborar uma sequência didática que utilize a geometria dinâmica como recurso para visualização e resolução de questões, buscando investigar como esse processo ocorre	
GD 6	FRANZOSI, Vito Rodrigues	Multibase Relatório: um protótipo web que transforma dados de um aplicativo móvel em informações didáticas.	Ampliar as potencialidades desse recurso pedagógico a partir de resultados de experiências realizadas com estudantes e professores dos anos iniciais do ensino fundamental.	

Fonte: Adaptado (LOPES; PALMAS; SÁ, 2018)

Diante desses dados, os autores puderam perceber que os trabalhos que utilizam a Engenharia Didática possuem objetivos diferenciados e operam em variados conteúdos relacionados ao ensino de Matemática.

Decidimos então ampliar os estudos de Lopes, Palmas e Sá (2018) e realizamos um levantamento dos trabalhos submetidos no EBRAPEM nos anos seguintes, ou seja, de 2017 a 2021. Nessa pesquisa buscamos por trabalhos que utilizaram a engenharia didática como metodologia de pesquisa, porém não fizemos a classificação dos mesmos quanto a Dificuldades de aprendizagem ou Propostas didáticas. Com os dados levantados construímos quadros para representar os resultados.

Quadro 05 - Relação de trabalhos que possuem a Engenharia Didática como Metodologia em relação ao ano de suas edições, seus GD e quantidade de frequência da Engenharia Didática (ED) e o Total (T) em cada ano

	EBRAPEM											
	2017		2018		2019		2020		2021		Total	
	ED	T	ED	T	ED	T	ED	T	ED	T	ED	T
GD1 - Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental	02	15	-	14	01	20	02	23	-	28	05	100
GD2 -Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental	-	15	01	19	01	21	04	26	01	44	07	125
GD3 - Educação Matemática no Ensino Médio	-	09	-	13	01	16	01	19	03	33	05	90
GD4 - Educação Matemática no Ensino Superior	01	12	-	09	02	16	01	10	01	18	05	65

GD5 - História da Matemática/Educação Matemática	-	26	-	19	-	37	-	20		17	-	119
GD6 - Educação Matemática, Tecnologias e Educação à Distância	02	36	02	50	02	46	01	50	02	81	09	263
GD7 - Formação de Professores que Ensinam Matemática	-	51	-	49	-	93	-	68		85	-	346
GD8 - Avaliação em Educação Matemática	-	07	-	06	-	09	-	10		05	-	37
GD9 - Processos cognitivos e linguísticos em Educação Matemática	-	04	-	12	-	12	-	14		08	-	50
GD10 - Modelagem Matemática	-	12	-	15	-	14	-	21		13	-	75
GD11 - Filosofia da Educação Matemática	-	05	-	05	-	09	-	13		11	-	43
GD12 - Ensino de Probabilidade e Estatística	-	10	02	15	02	29	-	23	01	21	05	98
GD13 - Educação Matemática e Inclusão	01	09	-	06	-	24	01	30		23	02	92
GD14 - Resoluções de problemas	-	03	-	05	-	18	-	17		17	-	60
GD15 - Educação Financeira	-	02	01	07	01	06	-	11		19	02	45
GD16 - Etnomatemática	-	13	-	14	-	12	-	11		15	-	65
GD17 - Currículo, Políticas Públicas e Educação Matemática	-	05	-	09	-	31	-	09		13	-	67
Total	06	234	06	267	10	413	10	375	08	451	40	1.740

Fonte: Anais do EBRAPEM de 2017 a 2020.

Em uma análise geral pode-se observar que o número total de trabalhos submetidos nessas últimas cinco edições do EBRAPEM que utilizaram a engenharia didática em suas pesquisas totaliza 40, isto é, um quantitativo um pouco maior em relação as edições de 2014 a 2016 – até mesmo porque o número de edições analisadas nessa pesquisa é maior que as analisadas por Lopes, Palmas e Sá (2018). É válido destacar que o número total de trabalhos submetidos nas edições de 2017 a 2021 subiu para 1.740.

Também se percebe que a quantidade de trabalhos submetidos em 2017 e 2018 se mantiveram com um total de 06 trabalhos, nos anos de 2019 e 2020 com 10 trabalhos e 2021 com 08 trabalhos. Nesse último ano, o número de trabalhos com ED diminuiu em relação aos dois anos anteriores, enquanto que a quantidade de trabalhos apresentados no total aumentou.

De posse dessas informações, elaboramos um quadro com as informações numéricas sobre o total de trabalhos e número de trabalhos com ED em cada ano desde 2014 até 2021. Nesse quadro podemos observar, de modo geral, a quantidade de trabalhos publicados nesse evento conforme cada ano de publicação e quantos desses totais utilizaram a ED.

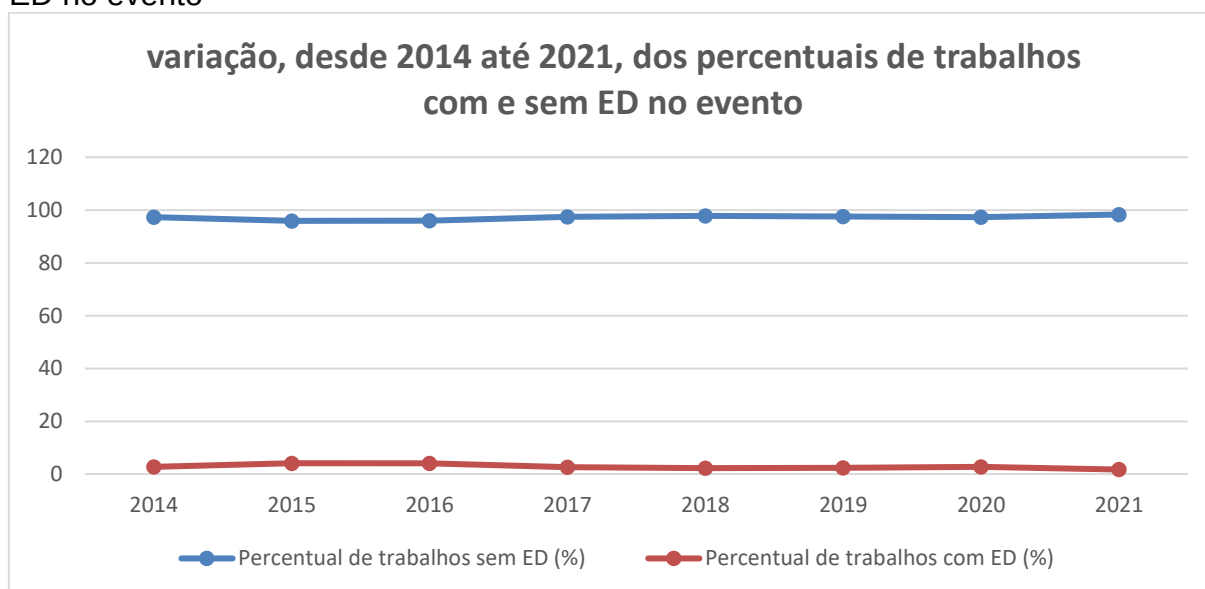
Quadro 06 - informações numéricas sobre o total de trabalhos e número de trabalhos com ED em cada ano desde 2014 até 2021.

Ano	Total de trabalhos	Total de trabalhos sem ED	Total de trabalhos com ED	Percentual de trabalhos sem ED (%)	Percentual de trabalhos com ED (%)
2014	363	353	10	97,3	2,7
2015	267	256	11	95,9	4,1
2016	277	266	11	96	4
2017	234	228	06	97,4	2,6
2018	267	261	06	97,8	2,2
2019	413	403	10	97,6	2,4
2020	375	365	10	97,3	2,7
2021	451	443	08	98,3	1,7

Fonte: Anais do EBRAPEM de 2014 a 2021

A seguir tem-se um gráfico elaborado a partir desses dados que mostra a variação, desde 2014 até 2021, dos percentuais de trabalhos com e sem ED no evento.

Gráfico 01 - variação, desde 2014 até 2021, dos percentuais de trabalhos com e sem ED no evento



Fonte: Informações coletadas nos anais do EBRAPEM de 2014 a 2021

Como podemos observar no quadro e no gráfico, os trabalhos com ED se mantiveram na porcentagem de 2% a 4% entre os anos de 2014 a 2020, porém, na edição de 2021 houve uma diminuição para 1,7% o que torna esse percentual no

patamar das demais edições, haja vista que como já mencionamos, nessa última edição (2021), o número total de trabalhos apresentados foi o maior de todas as edições anteriores. Apesar de ser uma porcentagem baixa em relação ao total de trabalhos em cada ano, consideramos positivo, pois concluímos que em todos os anos esse evento contou com a apresentação de trabalhos que utilizaram a ED como metodologia de pesquisa.

Apresentamos a diante os quadros que contêm a relação dos autores, títulos e objetivos dos trabalhos que envolveram a ED em cada GD do evento, divididos por cada edição do evento de 2017 a 2021.

Quadro 07 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXI EBRAPEM em 2017

GD	PESQUISADOR	TÍTULO	OBJETIVO DA PESQUISA
GD 1	LEAL, Edilene Fernandes	Organização didática para o ensino de operações de adição e de subtração para os anos iniciais do ensino fundamental: proposta fundamentada na teoria das situações didáticas.	Investigar em que termos a Teoria das Situações Didáticas, pode auxiliar na organização do ensino das operações de adição e de subtração no terceiro ano do Ensino Fundamental.
GD 1	PONTES, Julio Silva de	Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do 1º Ciclo: uma proposta para a formação de professores.	Defender a importância do ensino da Geometria nos anos iniciais, vinculando a todos os documentos curriculares de matemática e na formação do professor que atuam nesse ciclo.
GD 4	DENARDI, Vânia Bolzan	Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática.	Investigar as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica na construção e compreensão dos conceitos matemáticos necessários para a formação de professores de matemática.
GD 6	ARAÚJO, José Ronaldo Alves	Proposta de atividades para o estudo de medidas de tendência central com apoio do Geogebra.	Identificar como o GeoGebra pode potencializar o estudo das Medidas de Tendência Central.
GD 6	PAULO, Rafael dos Reis	Aprendizagem móvel: uma possibilidade no ensino dos números complexos.	Implementar um estudo didático da aprendizagem móvel (mobile learning) com o aplicativo GeoGebra no contexto dos números complexos.
GD 13	FLÔRES, Gioconda Guadalupe Cristales	A construção de mosaicos no plano por um aluno com Transtorno do Espectro Autista embasados na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Engenharia Didática.	Mediar a construção de mosaicos com figuras planas, por um aluno com Transtorno do Espectro Autista – TEA.

Fonte: Anais do XXI EBRAPEM em 2017.

Quadro 08 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXII EBRAPEM em 2018

GD	PESQUISADOR	TÍTULO	OBJETIVO DA PESQUISA
GD 2	CALADO, Tamires Vieira	Função afim: ideias base e habilidades mobilizadas por alunos do 9º ano do ensino fundamental.	Investigar as habilidades e ideias base relacionadas ao conceito de função afim mobilizadas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.
GD 6	AMPLATZ, Lisiane Cristina	Registros de representação semiótica da função Afim e o uso de tablets e smartphones nas aulas de Matemática.	Objetivo investigar como o uso de aplicativos para tablets e smartphones pode auxiliar no processo de aprendizagem da Função Afim por meio das diferentes representações semióticas.
GD 6	SANT'ANNA, Viviane Nogueira Ponciano	As concepções de professores acerca da semelhança de figuras: uma proposta de formação com suporte do geogebra.	Identificar qual a contribuição das tecnologias digitais, em especial, o GeoGebra no âmbito de estratégias didáticas.
GD 12	PEREIRA, Fernanda Angelo	Investigando a educação estatística na educação básica: o raciocínio sobre variação.	Investigar o raciocínio sobre variação/variabilidade de alunos egressos da Educação Básica.
GD 12	FIGUEIREDO, Heloisa Almeida de	Desenvolvimento de projetos em educação Estatística para o ensino médio com o uso de pesquisas eleitorais.	Analisar e compreender as possíveis contribuições do trabalho com projetos usando um tema atual, além de compreender como os alunos recebem os dados das pesquisas eleitorais e tomam decisões a partir deles.
GD 15	KUNTZ, Eduardo Ribeiro	A educação financeira no ensino médio: uma Sequência de atividades com o suporte da estratégia didática resolução de problemas.	Desenvolver uma sequência de atividades especificamente sobre Educação Financeira no ensino médio tendo como foco favorecer o Letramento Financeiro.

Fonte: Anais do XXII EBRAPEM em 2018.

Quadro 09 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXIII EBRAPEM em 2019

GD	PESQUISADOR	TÍTULO	OBJETIVO DA PESQUISA
GD 1	RODRIGUES, Carla Larissa Halum	Ideias do conceito de função mobilizadas por alunos do 5ºano do ensino fundamental: uma investigação a partir de problemas mistos.	Analisar conhecimentos relacionados ao conceito de função, mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, mediante problemas mistos, tendo como principal aporte a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.
GD 2	NASCIMENTO, Luiz Henrique do	Uma sequência didática sobre a área de paralelogramos na educação de jovens e adultos.	Investigar possíveis contribuições de uma sequência didática voltada ao ensino e à aprendizagem de área de paralelogramos na Educação de Jovens e Adultos.
GD 3	SILVA, Lucas Teixeira da	Matemática com música enquanto ciência: implicações de um estudo de caso no 2º ano do ensino médio.	Investigar de que forma a contextualização dos conteúdos matemáticos com outras áreas, qualifica o processo de ensino e

			aprendizagem dos mesmos no Ensino Médio.
GD 4	SANTOS, Cláudia Pereira dos	Ingressantes numa faculdade de tecnologia: as dificuldades de aprendizagem da matemática vindas da educação básica.	Contribuir com estudos no processo de aprendizagem do ingressante no curso superior da faculdade de tecnologia.
GD 4	MOTA, Janine Freitas	A construção de sentidos e significados da integral definida na perspectiva do pensamento matemático avançado.	Desenvolver uma alternativa pedagógica que contemple as aplicações, o aprimoramento do conhecimento e do significado da Integral Definida, em contextos intramatemáticos e extramatemáticos.
GD 6	ARAÚJO, José Ronaldo Alves	Tecnologias digitais na construção do pensamento estatístico: um estudo da transnumeração.	Realizar, por meio de sequências de atividades, um estudo das estruturas do pensamento estatístico e da relação dos sujeitos com a tecnologia digital na tentativa de identificar aspectos relacionados à Transnumeração, constituídos a partir da manipulação de dados com suporte da tecnologia digital.
GD 6	JIMENEZ, Jefferson Barbosa	Robótica estrutural: uma proposta para utilização como recurso no ensino de função afim.	Analisar e relatar a utilização da robótica estrutural como um recurso, no ensino de matemática, precisamente o estudo de função afim, além de abordar suas representações e tratamento das representações de diferentes registros (Duval, 2011), e propor uma construção do conhecimento matemático, de forma analítica, prática e significativa.
GD 12	FIGUEIREDO, Heloisa Almeida de	Construção do conhecimento de medidas de tendência central com alunos do ensino fundamental: reflexões sobre uma sequência didática.	Analisar e compreender as possíveis contribuições de uma sequência didática na construção do conhecimento das medidas de tendência central e no desenvolvimento da literacia estatística de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental.
GD 12	CASTILHO, Cristimara Rodrigues de	O ensino de probabilidade baseado na literacia estatística e probabilística para a tomada de decisão.	Identificar modos de ensino para o tema probabilidade por meio de tarefas, com a finalidade de tomada de decisão baseada em resultados probabilísticos por parte dos alunos.
GD 15	BARROSO, Dejair Frank	Educação financeira: potencialidades para a formação inicial do professor de matemática.	Fazer um estudo das concepções dos estudantes da licenciatura sobre o tema educação financeira e criar um ambiente de reflexão e ação, na qual possíveis mudanças nestas concepções possam ocorrer e por fim observar como essas mudanças contribuem na prática de ensino de professores da Educação Básica.

Fonte: Anais do XXIII EBRAPEM em 2019.

Quadro 10 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXIV EBRAPEM em 2020

GD	PESQUISADOR	TÍTULO	OBJETIVO DA PESQUISA
GD 1	DEZILIO, Karina	Invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos iniciais mediante problemas mistos: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais.	Analisar invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos Iniciais, a partir de uma sequência didática envolvendo problemas mistos e ideias de função.
GD 1	CONCEIÇÃO, George Henrique da	Um modelo de organização na formação de professores polivalentes para o estudo dos quadriláteros: uma contribuição em tipos de argumentação, prova e demonstração.	Investigar os modos de organização e os procedimentos teórico-metodológicos relacionados com o ensino e a aprendizagem envolvendo provas e demonstrações em matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, bem como as representações de professores sobre o raciocínio dedutivo.
GD 2	VERNIZZI, Mário Alberto Zambrana	O ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária: formação continuada de professores.	Analisar as concepções que professores de Matemática mobilizam a respeito do ensino de operações com números racionais em sua representação fracionária durante a discussão de uma sequência didática para o sexto ano do Ensino Fundamental.
GD 2	ROSA, Ludiér Mariano	Os inteiros relativos: construindo possibilidades Para a compreensão desse objeto matemático.	Investigar que proposta didática pode ser feita para o ensino dos números inteiros relativos, levando em consideração dificuldades de aprendizagem dos alunos presentes em pesquisas já realizadas.
GD 2	ARAÚJO, Jailson Cavalcante de	Efeitos de uma engenharia didática na aprendizagem do subcampo conceitual da área de paralelogramos: uma construção colaborativa.	Analisar os efeitos da realização de uma sequência didática, construída de maneira colaborativa com os professores, sobre a aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental em relação à área de paralelogramos e suas contribuições para a modelização de um subcampo conceitual.
GD 2	ALVES, Clederson Passos	Introdução do conceito de função nos anos finais do Ensino fundamental por meio de função definida por várias sentenças.	Analisar a construção e significados para função de uma variável real em situações que tratam de funções definidas por várias sentenças matemáticas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.
GD 3	VOLCE, Cílio José	Abordagem geométrica para operações com Números complexos.	Investigar a contribuição da representação gráfica para a aprendizagem das operações com Números Complexos.
GD 4	CAPPELIN, Alcione	O processo de conceitualização da função afim com estudantes do 1º ano do curso de licenciatura em Matemática.	Analisar o processo de conceitualização da Função Afim em estudantes do 1º ano do Curso de Licenciatura em Matemática.
GD 6	OLIVEIRA, Patrícia Benevides de	Análise de um micromundo com um modelo praxeológico de	Criar um modelo praxeológico de tarefas para a análise de um

		tarefas para o ensino do teorema fundamental do cálculo.	micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.
GD 13	SOUZA, Queila Ribas de	Construindo e propondo uma sequência didática para o ensino de divisão em uma sala de aula inclusiva.	Construir uma sequência didática que potencialize o ensino e aprendizagem de divisão em uma sala de aula inclusiva “com” alunos surdos.

Fonte: Anais do XXIV EBRAPEM em 2020.

Quadro 11 – Relação dos autores e títulos das publicações com seus respectivos objetivos de pesquisa na edição do XXV EBRAPEM em 2021

GD	PESQUISADOR	TÍTULO	OBJETIVO DA PESQUISA
GD 2	ARAÚJO, Jailson Cavalcante de	Imbricações entre os campos conceituais da geometria e das grandezas e medidas no ensino e na aprendizagem da área de paralelogramos.	Analisar as contribuições de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido à área e ao conceito de quadrilátero notável no ensino e na aprendizagem dos estudantes do 8º ano do ensino fundamental sobre a área de paralelogramos
GD 3	CAPPELIN, Alcione	Função afim e gráficos cartesianos: uma análise prévia da base nacional comum curricular à luz da teoria dos campos conceituais.	Analisar o processo de conceitualização da função afim por estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, mediante desenvolvimento de uma sequência didática construída a partir de diferentes situações-problema e gráficos cartesianos
GD 3	FILHO, Gilberto Beserra da Silva	Desenvolvimento do pensamento geométrico a partir de conversões de registros de representação semiótica com uso do geogebra: um estudo sobre os poliedros no ensino médio.	Analisar como os diversos registros de representação semiótica utilizados pelos educandos durante o processo de ensino e aprendizagem de conceitos e propriedades elementares de poliedros no Ensino Médio contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico, a partir de uma sequência didática com o uso do GeoGebra.
GD 3	KISNER, Melissa Cardoso Furtado	Visualização de figuras geométricas tridimensionais em sua representação bidimensional.	Investigar tarefas exploratórias que favoreçam a visualização de figuras geométricas tridimensionais em sua representação bidimensional, mediante articulação das apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial, para estudantes do ensino médio
GD 4	SILVA, Júlio Pereira da	A construção dos conceitos das grandezas geométricas perímetro e área por estudantes do curso de licenciatura em pedagogia à luz da teoria das situações didáticas.	Investigar a construção dos conceitos das grandezas geométricas perímetro e área e as relações entre essas grandezas, por estudantes do Curso de Licenciatura em Pedagogia, à luz da Teoria das Situações Didáticas.
GD 6	SANTOS, Tarcisio Rocha dos	Mankala colhe três: análise da produção de uma versão digital do jogo, concebido com o suporte da engenharia didático-informática.	Analisar a produção de uma versão digital do jogo Mankala Colhe Três que se utilizou do modelo de processo de software educativo

			proposto pela Engenharia Didático-Informática (EDI).
GD 6	SILVA, Gabriel Varela Soares da	Potencialidades e limitações dos softwares de geometria dinâmica: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela geometria projetiva.	Efetuar uma análise epistemológica-cognitiva-didáticaainformática para determinar e validar quais requisitos um software educativo de geometria dinâmica deve satisfazer/respeitar para poder abordar situações que envolvem conceitos da Geometria Projetiva.
GD 12	LOPES, Jônathas Primo B.	O uso do software r como complemento para o ensino de probabilidade: uma abordagem por meio da teoria das situações didáticas.	Refletir sobre o uso de softwares estatísticos como complemento para o ensino de probabilidade.

Fonte: Anais do XXV EBRAPEM em 2021.

Em síntese, ao compararmos os resultados que obtemos das edições de 2017 - 2021 com os resultados obtidos com a pesquisa de Lopes, Palmas e Sá (2018) podemos extrair o que se tornou estável e quais foram as mudanças ocorridas. Com relação aos Grupos de Discussões (GD) nas últimas edições foi incluído um novo GD passando a totalizar dezessete e não mais dezesseis como era até a edição de 2016.

Sobre os trabalhos submetidos nesse evento que utilizaram a Engenharia Didática, observamos que os GD 5, GD 8, GD 11 e GD 16 não tiveram nenhum trabalho com essa metodologia tanto nas edições de 2014 -2016 quanto nas de 2017 – 2021. O GD com maior frequência da Engenharia Didática nas primeiras edições citadas foi o GD 6 que obteve 10 publicações, representando 33,31% dos trabalhos com Engenharia Didática e 1,10% de todos os trabalhos publicados. Esse GD 6 também foi o que mais apresentou trabalhos com essa metodologia nas edições 2017 - 2021, com 9 publicações, representando 22,5% dos trabalhos com Engenharia Didática e 0,52% de todos os trabalhos publicados.

Porém, como já foi mencionado anteriormente, o número total de trabalhos submetidos nas edições pesquisadas por Lopes, Palmas e Sá (2018), foram 32 e nas edições que pesquisamos extraímos 40 trabalhos, o que nos leva a concluir que a ED se manteve presente como metodologia de pesquisa em publicações na trajetória desse evento, e também, a constatação de sua importância como metodologia para o desenvolvimento de estudos que objetivam o ensino de Matemática, confirmando com isso que, por meio dessa metodologia tem-se “o estudo do processo de ensino e aprendizagem de um dado conceito e a construção de uma sequência didática com o

intuito de proporcionar ao aluno condições favoráveis à construção e compreensão desse conceito” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 76).

Podemos ainda concluir que a ED é uma metodologia importante e eficiente para se investigar o processo de ensino aprendizagem de matemática e útil para desenvolver novos métodos de ensino. É importante ressaltar que o número de trabalhos submetidos nessas últimas edições aumentou e que a pesquisa com Engenharia Didática se manteve presente nesse evento provando sua importância e utilidade para estudos na área de matemática.

Portanto, a ED é uma metodologia de pesquisa que utiliza experiências em sala de aula para produzir recursos de ensino e aprendizagem.

Através da Engenharia Didática o professor tem a oportunidade de refletir e avaliar a sua ação educativa e é diante desse processo de reflexão que redireciona e resignifica o trabalho que desenvolve. Não existe ninguém melhor que o próprio professor para entender a complexidade dos fatos ocorridos em sala de aula, ninguém melhor para entender as dúvidas e dificuldades que os alunos apresentam, por isso, é ele quem deve buscar entender os motivos que impedem o aprendizado dos alunos investigando e refletindo as próprias ações educativas efetuadas em sala de aula (PANTOJA; SILVA, 2007, p. 08).

Em suma, concordamos com Pantoja e Silva (2007), em relação a importância da utilização da ED como metodologia de pesquisa, pois, as atividades educacionais desenvolvidas produzem significado ao conhecimento que se deseja construir, e ao mesmo tempo trabalha a partir das dificuldades cognitivas dos estudantes, levando estes a produzirem autonomia intelectual.

Dessa forma, Lopes e Sá (2021) destacam ao citar Pais (2011), que a ED possui a característica de organizar de forma particular os procedimentos metodológicos de pesquisa em didática da matemática e de contemplar tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática. Desse modo, ela interliga o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa.

Nessa perspectiva é interessante destacar uma interconexão com a Teoria da Transposição Didática, que é definida por Chevallard (1996) como o processo da transformação de objetos de conhecimento em objetos de ensino e aprendizagem. Uma outra relação que pode ser estabelecida, como feito por Sarrazy (2005), que assinala a abordagem do Contrato Didático na direção da Engenharia Didática, em que a coloca como instrumento de ação

sobre um processo de ensino, bem como um método de pesquisa. (LOPES; SÁ, 2021, pg. 06)

Portanto, seguindo o raciocínio dos autores em destacar a relação da ED com a Teoria da Transposição Didática e com o Contrato Didático, podemos, também, enfatizar a Engenharia Cooperativa como uma ação com interseção com a engenharia didática, pois segundo Brun et al (2018, pg.191) engenharia cooperativa pode ser caracterizada como um processo metodológico no qual “um coletivo de professores e pesquisadores implementa e reimplementa uma unidade de ensino sobre um determinado tema. Um ponto crucial na construção da engenharia cooperativa é, portanto, sua estrutura iterativa”.

Por fim, podemos discorrer que a ED segundo Lopes e Sá (2021), foi e é bastante utilizada em pesquisas que envolvem o ensino de matemática. E que, por ser um método geral, esse modelo metodológico pode ser utilizado com sucesso para pesquisas em outras áreas de conhecimento.

Vale a pena reforçar que essa pesquisa se restringiu somente à trabalhos apresentados no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM) de 2014 a 2021. E que ao se estudar os anais das 5 últimas edições desse evento, pôde-se ter um panorama quanto a utilização dos recursos e procedimentos metodológicos possibilitados pela Engenharia Didática.

Podemos ainda concluir que a ED é uma ferramenta importante e eficiente para se investigar o processo de ensino aprendizagem de matemática e útil para desenvolver novos métodos de ensino, pois, é uma metodologia de pesquisa que utiliza experiências em sala de aula para produzir recursos de ensino e aprendizagem.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Como já mencionamos, a proposta de pesquisa ora apresentada tem como suporte metodológico os pressupostos da Engenharia Didática. Nas subseções seguintes serão apresentados todos os estudos já realizados nesta primeira fase da engenharia, pois, é nessa fase que conhecemos os aspectos relacionados ao assunto abordado, ou seja, sua evolução, características matemáticas, formalidades, como está situado no currículo e como se dá o seu ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, nessa seção, apresentaremos os aspectos históricos, curriculares e matemáticos relacionados ao conteúdo de Fração, e mais especificamente, suas operações de adição e subtração. E também, os estudos realizados anteriormente e pesquisa com docentes sobre o ensino e aprendizagem desse assunto.

3.1- ASPECTOS HISTÓRICOS

Conforme os registros históricos, as frações surgiram no Egito por volta do ano 3.000 a.C., devido a necessidade de se medir os limites dos terrenos que cada agricultor dessa civilização possuía. Sobre isso Costa (2010) relata que nos períodos de inundações do Rio Nilo, muitas terras ficavam submersas e quando as águas baixavam era necessário fazer as remarcações dos limites entre os terrenos de cada proprietário. Para isso cordas com unidades de medidas registradas eram utilizadas, ou seja, esticavam-se tais cordas e verificava-se quantas vezes elas eram necessárias para totalizar os lados dos terrenos.

Porém, como nem sempre uma corda inteira totalizava o tamanho dos lados dos terrenos resultando em partes dela, os números inteiros tornaram-se insuficientes para expressarem medidas de segmentos menores do que a unidade. Foi por essa razão que os egípcios criaram um novo tipo de número: o número fracionário e para representá-los usavam frações.

Contudo as notações de fração foram durante muito tempo, mal fixadas, não homogêneas e inadaptadas às aplicações práticas (SOUZA, 2013, p. 14). Segundo os estudos de Powell (2018), somente há cerca de 5.000 anos é que aparecem as primeiras notações numéricas inequívocas, advindas primeiro da Mesopotâmia e logo

em seguida do Egito. Sobre isso, vale ressaltar que os egípcios criaram um sistema para representar frações que as diferenciava dos números para contar.

Segundo IFRAH (1981/1998 apud POWELL, 2018, p.84), os egípcios antigos utilizavam frações unitárias (frações com numerador igual a 1) para realizar cálculos que necessitavam do uso de frações. Para registrá-las empregavam um símbolo hieroglífico alongado sobre o denominador, exceto na fração $\frac{1}{2}$ que era representada apenas com um símbolo.

The image shows four Egyptian hieroglyphic symbols for fractions, each followed by its modern fractional equivalent. The first symbol consists of three vertical strokes with a horizontal bar above them, representing $\frac{1}{3}$. The second symbol is a single horizontal stroke with a horizontal bar above it, representing $\frac{1}{2}$. The third symbol is a vertical stack of three '3' shapes with a horizontal bar above them, representing $\frac{1}{331}$. The fourth symbol consists of eight vertical strokes with a horizontal bar above them, representing $\frac{1}{8}$.

Além da fração $\frac{1}{2}$, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ também tiveram símbolos hieroglíficos especiais (IFRAH, 1981/1998; ROQUE, 2012 apud POWELL, 2018, p.84).

De acordo com os estudos de Eichenberger Neto (2016, p. 44-45) a fração $\frac{2}{3}$ de um número era calculado da seguinte forma: tirava-se $\frac{1}{3}$ desse número e em seguida dividia-se o resultado pela metade. Por outro lado, as outras frações eram escritas como soma de frações unitárias. Com base nessas análises o autor destaca a possibilidade de que a multiplicação de frações tenha sido a primeira operação entre esses numerais que tomou forma.

Sobre a adição de frações pesquisas indicam que no Papiro Ahmes existe um raciocínio muitas vezes extenso e baseado em somas de frações unitárias já tabeladas para resolver problemas que envolviam esses numerais (EICHENBERGER NETO, 2016, p. 44-45). Pois os egípcios produziram extensas tabelas mostrando resultados prontos com transformações de dobros de frações unitárias. (COSTA, 2010, p. 09).

Além dos mesopotâmicos e egípcios, outras civilizações também faziam uso de frações em seu cotidiano como na China (BOYER, 1993, p.146-147), Grécia e Índia (POWELL, 2018, p.86), porém, foi somente no século XIX que as leis para operar com frações foram formalmente elaboradas. Assim, com o decorrer do tempo e com o aperfeiçoamento desse conceito por outras civilizações, chega-se a representação dos números racionais tal qual a conhecemos hoje e que engloba todos os algarismos na forma de a/b , com $b \neq 0$.

Em relação as frações decimais, de acordo com Bekken (1994), foram originadas há cerca de 953 d.C. entre os povos hindus e árabes. A partir disso se expandiu para outros países por meio das civilizações ocidentais, e assim, houve a descoberta da numeração decimal de posição no outro sentido, ou seja, depois da vírgula.

Em síntese, conhecer a história dos números racionais a partir das necessidades que levaram à sua elaboração e suas primeiras aplicações práticas é essencial para a compreensão deste conceito e para transpormos esta aplicabilidade para o contexto em que vivemos. Desta maneira, o ensino dos números racionais nas instituições escolares não deve ignorar a raiz e a formação do conceito, apresentando apenas as fórmulas prontas. (MOURA, 2001)

Diante do que a história nos conta, percebemos que as frações surgiram há muito tempo, e que possui uma grande importância. Por isso é necessário mostrar e fazer com que os alunos compreendam que muitas situações do cotidiano não poderiam ser resolvidas sem o conhecimento dos números racionais, ou seja, sem o uso das frações.

3.2– ASPECTOS CURRICULARES

Durante décadas, surgem constantemente críticas contra a forma que as escolas trabalham os conteúdos escolares, ou seja, como o currículo está estruturado. Nesse sentido, Godoy e Santos (2012), no artigo intitulado o cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática, afirmam que são grandes as divergências existentes nos currículos quanto aos objetivos da educação Matemática e que as relações entre os procedimentos matemáticos formais e suas raízes socioculturais não são refletidos nos fundamentos e práticas desse currículo, e atentam também, para o fato de que o importante não é desenvolver um currículo sem contradições em seu enunciado e em sua organização, mas sim traçar um planejamento adequado que indique o que fazer, como fazer, quando realizar etc.

Guiomar Namó de Mello (2014, p. 01), define currículo como “tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade”.

Nesse aspecto, faz-se necessário mudar as práticas de ensino usuais, de modo a contextualizar o ensino e, assim, possibilitar ao aluno maior entendimento através de metodologias diversificadas, pois não há “um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino. (PASUCH; BARBOZA; BASSANI, 2013, p. 01-02.).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) tratam da importância da Matemática e norteiam seu ensino de modo que o aluno seja instigado quanto ao interesse, capacidade de raciocínio lógico e de estrutura do pensamento.

Sendo assim, esses documentos foram consultados para a análise das propostas curriculares no ensino de frações. Os resultados dessa pesquisa serão apresentados nas próximas subseções.

3.2.1 - Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

O professor tem um papel importante que é formar cidadãos com consciência social. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) é um documento que possibilita ao educador, rever, analisar e refletir sobre seu planejamento de ensino – objetivos, conteúdos, atividades, avaliação - o que leva a reflexão e desejo para uma prática *pedagógica* coerente com os objetivos propostos. Este documento oficial é voltado para todas as áreas de ensino e está organizado em ciclos que são: 1º ciclo corresponde a 1ª e 2ª série; 2º ciclo a 3ª e 4ª série; 3º ciclo a 5ª e 6ª série; 4º ciclo a 7ª e 8ª série.

Para a área da Matemática o documento contempla o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). Com relação ao nosso objeto de estudo, ele encontra-se no bloco de números e operações.

De acordo com os PCNs, os números racionais, devem ser introduzidos ao currículo escolar a partir do 2º ciclo que corresponde, atualmente, ao 4º e 5º ano com os significados: quociente, parte-todo e razão.

No segundo ciclo, os alunos ampliam conceitos já trabalhados no ciclo anterior (como o de número natural, adição, medida, etc.), estabelecem relações que os aproximam de novos conceitos (como o de número racional, por exemplo) [...] Neste ciclo, são apresentadas aos alunos situações-

problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. (BRASIL, 1997, p. 57)

Isso é afirmado quando dentre os objetivos apresentados para esse ciclo temos:

- Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social;
- Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal;
- Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais. (BRASIL, 1997, p. 55-56)

Logo, segundo as orientações concebidas pelos PCNs, o ensino de fração deve ocorrer desde o 2º ciclo, pois como é indicado, os números racionais devem ser trabalhados nesse ciclo tanto na sua forma decimal quanto fracionária e, também, representá-los em situações-problemas para que os alunos venham a ter a compreensão e percepção de onde podem ser utilizados cotidianamente.

Neste ciclo, são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. (BRASIL, 1997, P. 57)

Nesse contexto, as orientações desse documento sobre o ensino de números racionais, mais especificamente na forma de fração, levam a expectativa de que ao final do 2º ciclo os alunos desenvolvam habilidades, tais como:

- Reconhecer números racionais no cotidiano;
- Ler, escrever, comparar e ordenar representações fracionárias utilizadas frequentemente;
- Reconhecer que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
- Identificar e produzir frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;

- Explorar os diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão;
- Observar que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária;
- Relacionar representações fracionária e decimal de um mesmo número racional;
- Analisar, interpretar, formular e resolver situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.

Tendo em vista tais habilidades, espera-se então que os alunos desenvolvam competências importantes referentes ao ensino de fração como: ler e escrever fração; resolver problemas que envolvam a utilização de conhecimentos relacionados aos números racionais na forma fracionária; produza estratégias próprias de resolução e de procedimentos de cálculo; justifique os processos de solução; e avalie a utilização de estratégias de verificação de resultados, inclusive as estratégias que requerem a utilização de dispositivos eletrônicos como calculadoras (BRASIL, 1997, P. 63).

Por fim, para o alcance dos objetivos propostos, habilidades e competências esperadas sobre o ensino e aprendizagem de fração, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática, fornece orientações didáticas para esse ciclo que devem ser levadas em consideração ao se trabalhar com os números racionais. São elas:

- Explorar situações que levem os alunos perceberem a impossibilidade de serem resolvidas apenas com números naturais, isto é, ao utilizar apenas números naturais não seja possível representar a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, o que leva os alunos identificarem nos números racionais a possibilidade de resposta a novos problemas.
- Iniciar o estudo por determinadas frações que estão mais presentes no cotidiano como as metades, terços, quartos e, não esquecer que são vistas mais pela via da linguagem oral do que das representações.
- Cuidar para que não ocorra o raciocínio sobre os números racionais como se fossem naturais, pois dessa forma os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos.
- Considerar que a relação parte-todo se apresenta, portanto, quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de

elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.

- Explorar o conceito de fração por meio de situações em que está implícita a relação parte-todo como é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais.
- Trabalhar o significado das frações como quociente, ou seja, considerar a ideia de divisão de um natural por outro ($a : b = a / b$; $b \neq 0$).
- Usar a fração como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, interpretá-la como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”.
- Utilizar sorteio para trabalhar o conceito de fração, como por exemplo, sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores (2 em 10).
- Utilizar escalas em mapas (a escala é de 1 cm para 100 m).
- Usar porcentagem (40 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol).

Quanto as operações com números racionais, nesse segundo ciclo, são trabalhadas apenas na forma decimal, pois o documento recomenda que o Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal seja por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais; os procedimentos utilizados nos cálculos com números naturais também sejam utilizados como recursos para realizar cálculos envolvendo números decimais; as atividades de cálculo com números decimais sejam contextualizadas; os alunos desenvolvam uma “boa base em leitura e escrita de números decimais e acompanhem a realização do cálculo escrito, com verbalizações que auxiliem a perceber o valor posicional das ordens que compõem os números com os quais estão operando”; o aluno compreenda os deslocamentos da vírgula, uma, duas, três ordens para a direita ou para a esquerda. (BRASIL, 1997, p.81)

Logo, como foi visto, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, defende que o ensino de números racionais tanto na sua forma decimal quanto fracionária deve ser inserido no currículo escolar desde os anos iniciais, ou seja, 3ª e 4ª series (atualmente 4º e 5º ano). Porém, os cálculos com operações envolvendo frações devem ser trabalhados a partir do próximo ciclo.

Faremos, agora, uma análise sobre os procedimentos sugeridos pelos PCNs para o ensino de números racionais no terceiro ciclo (atualmente 6º e 7º ano). Ao final desse ciclo o documento aponta que o aluno deve conhecer, identificar e construir as representações equivalentes e localizar os números na reta numérica, comparando quantidades na forma decimal e fracionária. Para isso, um dos objetivos dos PCNs para o ensino de Matemática nesse ciclo é que se explorem situações de aprendizagem que leve o aluno a

- Perceber que os números naturais não resolvem determinados problemas.
- Ampliar e construir novos significados para os números — naturais, inteiros e racionais — a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção.
- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemático.
- Selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta (BRASIL,1998, p. 64)

Neste ciclo, as representações fracionárias e decimais dos números racionais recebem atenção especial, pois nele são explorados significados como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. (BRASIL,1998, p. 66). Outro aspecto importante é a resolução de situações-problema com números naturais, racionais e inteiros, pois permite, a ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números. Os PCNs afirmam que pouco se trabalha com esse tipo de atividade em sala de aula tanto nesse ciclo quanto no ciclo seguinte e, com isso, impossibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição/subtração, multiplicação/divisão ou para a potenciação/radiciação.

Referente ao ensino de fração é recomendado pelos PCNs que se utilize como conceitos e procedimentos o

- Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos — cotidianos e históricos — e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
- Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.
- Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações - com números naturais, inteiros e racionais -, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados. (BRASIL, 1998, p. 71)

Portanto, para o ensino de números racionais na sua forma fracionária e também decimal, torna-se importante que os estudantes sejam levados a reconhecer que esses números estão presentes em situações que representem relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador em diferentes contextos (cotidianos e históricos). E que essas situações podem ser analisadas, interpretadas, formuladas e resolvidas por eles.

Na seção dos critérios de avaliação para o 3º ciclo tem-se como critério envolvendo os números racionais: “utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento”. (BRASIL, 1998, p. 75). Por meio desse critério, o professor pode verificar

- Se o aluno é capaz de comparar e ordenar números naturais, inteiros e racionais; reconhecendo suas diferentes formas de expressão como fracionária, decimal e percentual; representar na forma decimal um número racional expresso em notação fracionária.
- Efetuar cálculos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas. (BRASIL, 1998, p.76)

Em suma, os PCNs por meio de suas atribuições de documento educacional oficial trazem indicações significativas para o desenvolvimento do ensino dos números racionais. E nesse 3º ciclo eles intensificam e ampliam essas indicações para que o aluno possa ter a oportunidade de compreender e reconhecer o conjunto dos números racionais tanto em sua representação fracionária quanto decimal, analisar e criar estratégias de resolução quando lhes for requerida.

No 4º ciclo, os objetivos da Matemática que envolvem os números racionais são:

- Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Como observamos, nesse ciclo, o conhecimento de números racionais será apenas ampliado e consolidado por meio de estratégias e procedimentos que envolvam tais números, pois na seção dos Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, indica-se que o professor forneça aos alunos a oportunidade de analisar, interpretar, formular e resolver novas situações-problema que envolvam os números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações (BRASIL, 1998, p. 83).

Portanto, o 4º ciclo já abrange o conhecimento dos números racionais com uma ampliação para os irracionais, nesse ciclo já começa a trabalhar situações-problemas em que as soluções não são dadas por números racionais.

Nas orientações didáticas para os dois ciclos sobre os números racionais, consta que apesar de suas representações fracionárias e decimais já terem sido recomendadas para serem desenvolvidas nos ciclos iniciais, alguns alunos chegam ao terceiro ciclo “sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo” (BRASIL, 1998, p. 95).

Devido a isso, as recomendações de abordagens dos números racionais no terceiro e no quarto ciclos são semelhantes as quais foram propostas nos ciclos anteriores. Isto é, defende-se abordagens por meio de problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números; trabalho com o conceito da relação parte/todo, divisão e razão em diferentes contextos; trabalhar a interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro ($a : b = b \neq 0$); utilizar situações que envolvem probabilidades; situações que abordam escalas

em plantas e mapas; a exploração da porcentagem; e ainda, a interpretação que atribui ao número racional o significado de um operador (BRASIL, 1998, p. 101-102).

Para o ensino aprendizagem de números racionais nesses últimos ciclos o documento (BRASIL, 1998, p. 103) também recomenda:

- O trabalho com situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, uma vez que nelas, a “representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão”.
- Familiarizar o aluno com as representações fracionária, decimal e percentual para que dessa forma ele possa perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado.
- Utilizar o conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números.

No que diz respeito as operações de adição e subtração envolvendo frações (objeto desta pesquisa) é recomendado pelos PCNs (BRASIL, 1998, p. 104) que se utilize as propriedades das frações equivalentes para o cálculo dessas operações com denominadores diferentes.

Com isso podemos concluir a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática, evidenciando que esse documento defende o ensino de frações a partir do segundo ciclo (4º e 5º anos atualmente) com as noções de conceito, leitura, escrita e representações. No terceiro ciclo (hoje 6º e 7º ano) esse estudo é ampliado para o cálculo de operações envolvendo frações. E no quarto ciclo (8º e 9º ano) ocorre um aprofundamento desses conceitos ao serem utilizados em situações-problemas.

3.2.2 – Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento obrigatório voltado exclusivamente à educação escolar e seguido tanto por escolas públicas quanto particulares. Esse documento determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da educação básica. Foi criado para garantir

equidade nos processos de ensino e de aprendizagem nas escolas brasileiras, e com isso, assegurar aos estudantes o direito de aprender um conjunto fundamental de conhecimentos e habilidades comuns nas escolas públicas e privadas, urbanas e rurais de todo o país.

A BNCC já era prevista na Constituição de 1988 e na Lei de Diretrizes e Bases de 1996, porém, foi legitimada pelo pacto interfederativo, nos termos da Lei nº 13.005/2014, que promulgou o PNE. Essa base se inter-relaciona aos demais currículos existentes, ao reconhecerem que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica. E, também, por aprofundar e ampliar alguns dos objetivos dos PCNs, assim como das DCN.

As competências gerais da Matemática na BNCC consistem em: raciocinar; representar; comunicar e argumentar matematicamente; formular e resolver problemas em uma variedade de contextos; utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. Nesse sentido, com relação ao ensino de Fração, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõem uma organização na qual esse conteúdo faz parte de várias etapas do Ensino Fundamental, seguindo uma noção de progressão de complexidade, pois a cada ano, as frações são estudadas e gradualmente aprofundadas. Conforme a BNCC, os primeiros estudos sobre frações devem aparecer no 2º ano e se desenvolver voltado à construção do vocabulário e aos conceitos fundadores das frações até ao 5º ano, sem envolver ainda as operações matemáticas. Somente nos anos finais as operações e as noções mais abstratas serão apresentadas aos alunos.

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que

Os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. [...] nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais [...] Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2017, p. 264-165)

Como foi mencionado, a BNCC orienta que as primeiras ideias sobre o conceito de fração façam parte do currículo escolar desde o 2º ano, pois dentre as habilidades de Matemática para esse ano encontra-se: “resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais (BRASIL, 2017, p. 279, EF02MA08).

Para o 3º ano, é apresentado como objeto de conhecimento o estudo de significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. E como habilidades, espera-se que o aluno possa “associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes” (BRASIL, 2017, p. 283, EF03MA09).

No 4º ano, dentre os objetos de conhecimentos tem-se o estudo de frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$). E a habilidade almejada desse ensino é que o aluno: reconheça as “frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (BRASIL, 2017, p. 287, EF04MA09).

Com relação ao ensino de fração no 5º ano, a BNCC orienta que o mesmo ocorra por meio da representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica; comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência; cálculo de porcentagens e representação fracionária. Com esse ensino almeja-se que o aluno desenvolva habilidades de:

(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso; **(EF05MA04)** Identificar frações equivalentes; **(EF05MA05)** Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica; **(EF05MA06)** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2017, p. 291).

Em relação ao ensino das operações, no 5º ano as quatro operações devem ser ampliadas para os números racionais na forma decimal. A BNCC faz menção aos significados divisão e parte-todo.

No 6º ano, a fração é entendida como parte do conjunto dos números racionais positivos. Há a introdução da soma e subtração das frações e um estudo sobre a ideia de equivalência, conforme indicam os objetos de conhecimentos na unidade temática número para o 6º ano.

Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações; Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais (BRASIL, 2017, p. 296)

As habilidades pretendidas com o ensino de fração no 6º ano é que o aluno possa

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes; **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica; **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora; **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Em continuação a essa abordagem, no 7º ano, os objetos de conhecimentos relacionados ao ensino de fração são:

- Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador;
- Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.

E as habilidades destacadas pela BNCC são:

(EF07MA08) - Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** - Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. **(EF07MA10)** - Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** - Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** - Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais. (BRASIL, 2017, p. 303)

Desse modo, os alunos precisam aplicar aos números negativos os conceitos que estudaram anteriormente. A relação com as frações torna-se mais abstrata para pensar os procedimentos de resolução. Também se aprende a multiplicação e a divisão. Já no 8º ano, não é mencionado fração entre os objetos de conhecimento propostos para essa fase. Porém, os conhecimentos adquiridos a respeito de fração nos anos anteriores serão no 8º ano buscados por meio de outros objetos de conhecimento, isto é, são requeridas habilidades que envolvem o conhecimento de fração. Tais habilidades são:

(EF08MA02) resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário; **(EF08MA05)** reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica (BRASIL, 2017, p. 309)

Como se observa, no 8º ano, os alunos aprendem a transformar a dízima periódica em fração. E assim, finalizam os números racionais e, então, entram nos irracionais.

Em suma, sobre o ensino de frações observou-se que há uma diferenciação de orientação quanto a abordagem dos números racionais na forma fracionária. Segundo os PCNs, esse objeto de conhecimento deve ser inserido no currículo escolar a partir do 4º ano, enquanto que na BNCC sua abordagem inicia mais cedo, logo no 2º ano. No entanto, ambos enfatizam a importância e necessidade de trabalhar o ensino de fração desde os anos iniciais.

3.3- ASPECTOS MATEMÁTICOS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Nesta seção, discorreremos sobre os aspectos matemáticos do objeto adição e subtração de fração, uma vez que, ambas possuem características importantes que são: adição e subtração de frações com denominadores iguais e adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

3.3.1 – Adição e subtração com denominadores iguais

Para essa operação tem-se como definição que:

Para calcular a adição/subtração entre duas frações com denominadores iguais, conservamos um denominador e somamos ou subtraímos os numeradores.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \text{ ou } \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

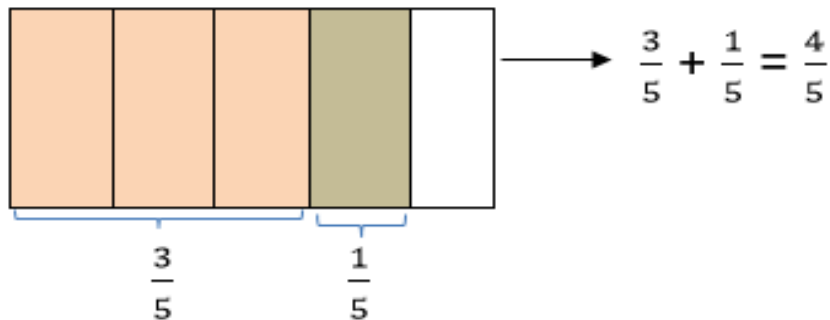
Exemplo 1

Adicione as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{5}$ entre si.

Solução algébrica

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} \longrightarrow \text{conserva o denominador} = \frac{4}{5}$$

Solução geométrica



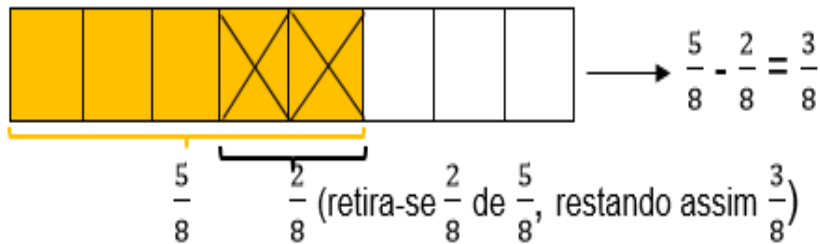
Exemplo 2

Determine $\frac{5}{8} - \frac{2}{8}$

Solução algébrica

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} \longrightarrow \text{conserva o denominador} = \frac{3}{8}$$

Solução geométrica



3.3.2 – Adição e subtração com denominadores diferentes

Nos livros didáticos é mostrado que para calcular a soma ou subtração entre duas frações com denominadores diferentes, deve-se encontrar frações equivalentes às frações iniciais, porém com o mesmo denominador, e somar ou subtrair os numeradores. No entanto, esse processo de equivalência é desenvolvido com a aplicação do Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C).

Exemplo 1

Determine $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

Solução

Encontrar frações equivalentes as dadas encontrando o M.M.C. entre 3 e 5 como é mostrado na figura abaixo. Lembrando que o x no esquema abaixo representa a operação de multiplicação.

Figura 02 – Resolução de adição de frações com denominadores diferentes.



Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/adicao-e-subtracao-de-fracoes/>

$\frac{5+6}{15} \rightarrow$ conserva um denominador e soma os numeradores

$\frac{11}{15} \rightarrow$ fração soma

Vimos então que após encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores 3 e 5, foi dividido o M.M.C. encontrado pelo denominador da fração inicial e multiplicado o resultado pelo numerador, também da fração inicial. O resultado é o numerador da fração equivalente. Esse procedimento é repetido para a segunda fração, ou seja, para $\frac{2}{5}$. Após esse processo, somou-se os numeradores das frações equivalente (5+6) e repetiu-se um denominador (15).

Da mesma forma que foi realizado na adição de frações com denominadores diferentes, no cálculo da subtração com denominadores diferentes, também, deve-se encontrar frações equivalentes às frações iniciais, porém com o mesmo denominador, e subtrair os numeradores. Acompanhe o exemplo 2:

Exemplo 2

Determine $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

Solução

Encontrar frações equivalentes as dadas encontrando o M.M.C. entre 3 e 5 como é mostrado na figura abaixo.

Figura 03 – Resolução de subtração de frações com denominadores diferentes.



Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/adicao-e-subtracao-de-fracoes/>

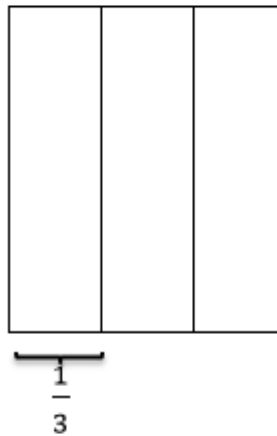
$\frac{10-3}{15} \rightarrow$ conserva um denominador e subtrai os numeradores

$\frac{7}{15} \rightarrow$ fração subtração

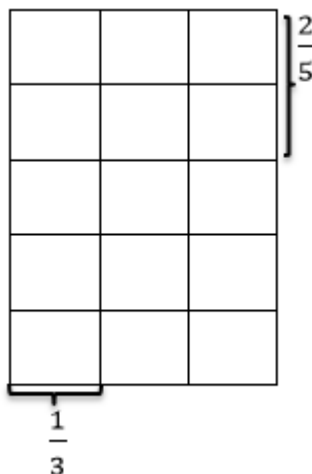
Vimos então que após encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre os denominadores 3 e 5, foi dividido o M.M.C. encontrado pelo denominador da fração inicial e multiplicado o resultado pelo numerador, também da fração inicial. O resultado é o numerador da fração equivalente. Esse procedimento é repetido para a segunda fração, ou seja, para $\frac{2}{5}$. Após esse processo, subtraiu-se os numeradores das frações equivalente ($10 - 3$) e repetiu-se um denominador (15).

Solução geométrica do exemplo 1

Representando a fração $\frac{1}{3}$ geometricamente, obtemos o seguinte desenho:

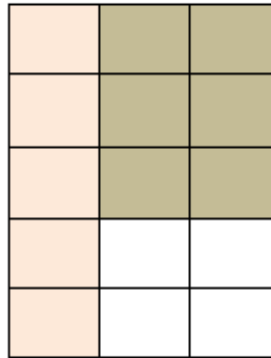


Em seguida, dividindo novamente esse mesmo desenho em traços no sentido horizontal representando a fração $\frac{2}{5}$, temos:



Como podemos observar no desenho acima, a fração $\frac{1}{3}$ corresponde a 5 quadrados do desenho e que $\frac{2}{5}$ corresponde a 6 quadrados do mesmo desenho.

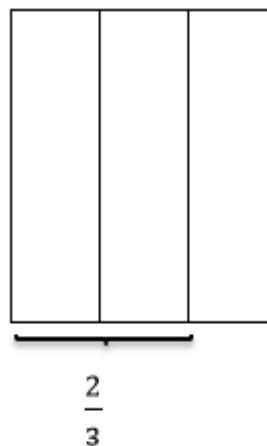
Ao destacar os quadrados correspondentes as duas frações, temos:



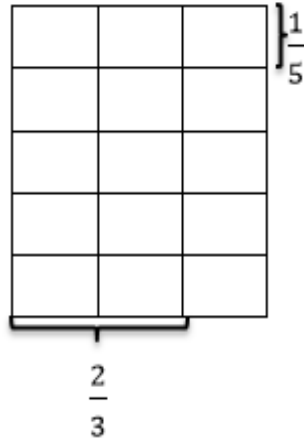
Agora, ao observar o desenho, podemos concluir que $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$, isto é, a união das duas frações representam 11 quadrados do desenho e como o mesmo ficou dividido em 15 quadrados, logo os quadrados marcados equivalem a fração $\frac{11}{15}$.

Solução geométrica do exemplo 2: $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

Representando a fração $\frac{2}{3}$ geometricamente, obtemos o seguinte desenho:

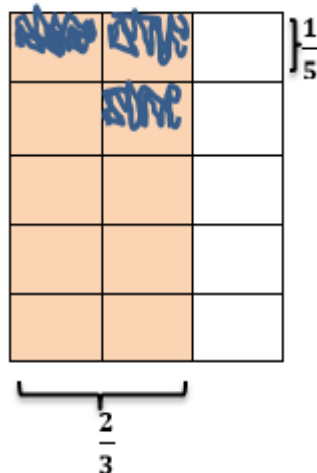


Ao dividir esse desenho, novamente, com traços no sentido horizontal representando a fração $\frac{1}{5}$, temos:



Conforme é possível observar, a fração $\frac{2}{3}$ corresponde a 10 quadrados desse desenho e a fração $\frac{1}{5}$ corresponde a 3 quadrados do mesmo desenho.

Sendo assim, como a operação é uma subtração, significa dizer que $\frac{2}{3}$ menos $\frac{1}{5}$ corresponde a 10 quadrados menos 3 desses quadrados. Ou seja:



Agora, ao observar o desenho, podemos concluir que $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$, isto é, a subtração da primeira fração pela segunda fração representa 7 retângulos do desenho e como este ficou dividido em 15 retângulos, logo temos como resultado a fração $\frac{7}{15}$.

Como vimos, uma solução algébrica pode ser elaborada a partir de uma solução geométrica. À vista disso, acreditamos que o conceito sobre as operações de adição e subtração de frações, tanto com mesmo denominador quanto com denominadores diferentes, terá um significado mais concreto se formulado pelo próprio estudante a partir da resolução geométrica, ou seja, levar o aluno a desenvolver os conceitos operatórios desenhando a situação proposta, para em seguida concluir a solução algébrica. O conceito dessas operações formalizado por meio de construções de soluções geométrica fará mais sentido, terá maior significado e será melhor consolidado. Posto isso, em nossa Sequência Didática será trabalhado a resolução das operações de adição e subtração de frações utilizando os procedimentos de uma solução geométrica.

3.4 - MISCONCEPTIONS QUE ENVOLVEM ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÃO

Abordaremos agora um assunto que afeta o processo de ensino e aprendizagem do objeto em estudo: os equívocos (Misconceptions).

Misconceptions é um termo inglês que significa equívocos. É utilizado para descrever as concepções errôneas apresentadas pelos alunos no momento em que precisam resolver um determinado problema ou situação.

Segundo D Permata, P Wijayanti e Masriyah (2019, p. 2, tradução nossa),

A misconception ou equívoco pode ser interpretado como uma ideia ou visão incorreta de um conceito que alguém tem que não está de acordo com o conceito que é considerado correto pelos especialistas. A misconception é o resultado de uma falta de compreensão ou erro na aplicação de regras matemáticas ou generalizações. A misconception ocorre quando o novo conhecimento não está de acordo com o conhecimento previamente ensinado.

Essas concepções se dão devido a alguma falha na formalização de um conceito, e estas falhas podem ser do professor, do material didático utilizado, assim como do próprio aluno.

Vimos que muitos estudos e pesquisas abordaram e abordam a questão dos equívocos dos alunos em relação ao objeto de conhecimento matemático frações. Pois, os alunos têm apresentado dificuldades em aprender as frações e suas

operações matemáticas. Os estudos de Melo e Andrade (2014), Alghazo e Alghazo (2017), Almeida e Branco (2018), D Permata, P Wijayanti e Masriyah (2019), Deringöl (2019), Prahmana e Fitri (2019), ALKHATEEB (2020), são pesquisas importantes referentes a este assunto.

Com relação as operações de adição e subtração com frações, alguns estudantes acreditam que as mesmas se restringem somente àquelas com denominadores iguais. Assim, eles começam cada operação renomeando as frações correspondentemente. Nesse sentido, ao analisar pesquisas realizadas sobre algumas misconceptions (equívocos) demonstradas por alunos quando se trata em operacionalizar com frações, assim como análise de materiais didáticos, conversa com professores atuantes na área de Matemática e, também, a partir de nossa experiência em sala de aula, podemos chegar a elaboração de misconceptions referentes a adição e subtração com fração, ou seja, concepções errôneas apresentadas pelos estudantes no momento em que precisam elaborar respostas referentes a determinadas situações-problemas.

Nesse sentido os estudos de D Permata, P Wijayanti e Masriyah (2019) surge a partir da análise de uma prática pedagógica, relativa às misconceptions dos alunos sobre o conceito de pré-requisitos algébricos na operação de números inteiros e frações, realizada no SMPN 1 Koba, turma VIII A composta por 32 alunos. Para este trabalho foi aplicado um teste diagnóstico o qual constituía-se de 13 questões sobre o funcionamento de inteiros e frações. Nessa pesquisa os autores tiveram como objetivo descrever as misconceptions dos alunos no conceito de pré-requisitos algébricos, os fatores causais e soluções alternativas.

Dentre os alunos pesquisados foram escolhidos para ser objeto dessa pesquisa, três alunos que, dentre os demais, cometeram várias misconceptions ao completar o teste diagnóstico. Com relação ao assunto de adição e subtração de fração, os autores observaram que alguns alunos da 8ª série do ensino fundamental em Yogyakarta realizam a operação de adição com fração da seguinte maneira (D PERMATA; P WIJAYANTI; MASRIYAH, 2019, p. 3):

$$\frac{47}{9} + \frac{25}{4} = \frac{47}{36} + \frac{25}{36} = \frac{72}{36}$$

$$\frac{47}{9} + \frac{25}{4} = \frac{51}{36} + \frac{34}{36} = \frac{85}{36}$$

E também, observaram alunos do 9º ano em Ohio, USA que completam:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{3+4} = \frac{4}{7} \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$$

Assim, os autores mostram em um quadro as possíveis misconceptions (equívocos) sobre o conceito de pré-requisitos algébricos que ocorrem nos alunos.

Quadro 12 - Possíveis misconceptions referentes a adição de fração

Possíveis misconceptions (equívocos) sobre o conceito de pré-requisitos algébricos que ocorrem nos alunos	
Conceito	Possíveis misconceptions (equívocos) que ocorrem
Adição de frações	1. Adiciona o numerador com o numerador e o denominador com o denominador (sem primeiro igualar os dois denominadores).
	2. Não foi possível encontrar o mínimo múltiplo comum.
	3. Encontra o mínimo múltiplo comum de diferentes denominadores, mas depois disso não altera as frações para uma forma equivalente.
	4. Errado em transformar as frações em uma forma equivalente.
	5. Altera incorretamente os inteiros positivos para a forma $\frac{a}{b}$ ao adicionar os inteiros positivos com frações.

Fonte: D Permata, P Wijayanti e Masriyah (2019, p. 3)

Prahmana e Fitri (2019) realizaram um estudo com objetivo de explorar informações e descrever o erro dos alunos na resolução de problemas com fração. Para o qual foi utilizado uma pesquisa descritiva e foram participantes 30 alunos da sétima série do SMP Negeri Piyungan. O instrumento de pesquisa utilizado foi um teste contendo problemas de fração. Nesse estudo foi mostrado que os alunos ainda cometem erros ao resolver o problema da fração como: reescrever os componentes conhecidos do problema, aplicar o conceito de operação de contagem fracionária o que implica em equalizar o denominador ao adicionar uma Fração e Subtrair as

frações sem igualar o denominador, converter frações mistas em frações ordinárias e vice-versa, transformar inteiros em fração, menos cuidadosos ao executar uma operação de contagem fracionária, classificar o número da fração.

Portanto, embasados nesses e em outros estudos que foram pesquisados podemos formalizar nossa lista de misconceptions no ensino de adição e subtração de frações.

Quadro 13 - Misconceptions no ensino de adição e subtração com fração

Adiciona-se numerador com numerador e também os denominadores semelhantes.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b+b}$
Subtraem-se os numeradores e os denominadores semelhantes.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b-b}$
Somam-se os numeradores e os denominadores em frações com denominadores diferentes.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
Subtraem os numeradores e os denominadores em frações com denominadores diferentes.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$
Adiciona-se o número inteiro diretamente com o numerador da fração e repete o mesmo denominador no resultado.	$a + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$
Confusão com a operação de multiplicação ao realizar a adição, ou seja, somam-se os numeradores e multiplica-se os denominadores.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b * d}$
Confusão com os termos semelhantes no numerador e no denominador, ou seja, cancela os termos semelhantes do numerador com o denominador.	$\frac{a*\cancel{b}+c}{\cancel{b}} = \frac{a+c}{b}$

Fonte: Pesquisa Bibliográfica (2021)

De modo geral, no que se refere à adição e subtração de fração, verifica-se que: há dificuldades nos alunos em compreender a relação entre numerador e denominador, quando na adição de frações apresentam como resultado apenas a soma dos numeradores; os alunos cometem menos erros quando as frações têm igual denominador do que quando um denominador é múltiplo de outro; os alunos parecem compreender o numerador e o denominador como se os mesmos tratassem de dois números, não compreendendo a noção de equipartição associada ao denominador; e o principal erro na operação é o de adicionarem tanto numerador como denominador para obter o numerador e o denominador do resultado. Sobre isso Renz (2011, apud

MELO; ANDRADE, 2014, p. 54) afirma que a maior dificuldade dos alunos “é operar com frações de denominadores diferentes, uma vez que nesses casos, a resolução passa pela equivalência das frações, geralmente por meio do mínimo múltiplo comum (mmc) para reduzi-las ao mesmo denominador.

3.4.1 - Possíveis causas das Misconceptions

Deringöl (2019) afirma que “como os alunos pensam que as características das frações são iguais às de outros números, eles tentam aplicar a mesma regra, o que leva ao desenvolvimento de suas misconceptions” (p.30, tradução nossa). O assunto de fração é ministrado na maioria das vezes após o conjunto dos naturais e suas operações no 6º ano do ensino fundamental e após o conjunto dos números inteiros no 7º ano. Como as frações possuem características diferenciadas, os alunos tendem a confundir com os conhecimentos anteriormente adquiridos sobre conceito de números. E com isso, muita das vezes, consideram uma fração como se fosse dois números inteiros como já mencionamos aqui.

Outra razão para equívocos nos alunos é a abordagem instrucional de seus professores (DERINGÖL, 2019). E uma dessas características é o fato de o professor não levar em consideração os conhecimentos preliminares dos alunos, o que torna-se uma deficiência dentro do processo de ensino-aprendizagem.

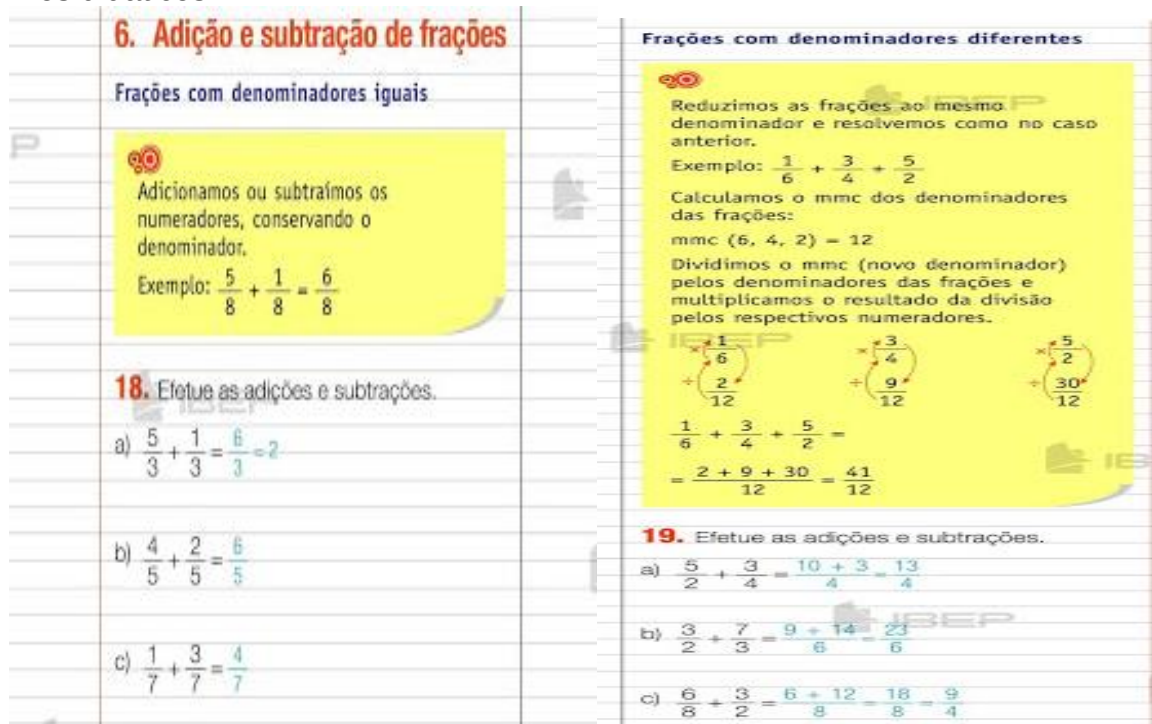
Como relata Alkhateeb (2020, v. 19, p. 2, tradução nossa)

“De acordo com o Conselho Nacional de Pesquisa e Treinamento Educacional (NCERT, 2008 apud Alkhateeb 2020), as dificuldades no aprendizado das frações podem ser por vários motivos. Por exemplo, o uso de conhecimento prévio sobre os inteiros por alunos quando eles aprendem as frações, a tendência dos livros escolares e a forma do professor ensinar o conteúdo de frações e operações de uma maneira que não tenha efeito sobre o aluno na vida real [...] Esses e outros obstáculos dificultam a compreensão do conceito das frações e as operações relacionadas”

Portanto, podemos classificar como uma das causas de misconceptions de fração, assim como, de suas operações como adição e subtração, a forma como o professor ensina este conteúdo. Ou seja, se o professor desenvolve um ensino fora do contexto real do qual o aluno está inserido, pode ser que este aluno desenvolva misconceptions, isto é, concepções erradas sobre seus conceitos e suas resoluções.

Como bem colocou o referido autor, a tendência dos livros escolares também propicia em algumas situações o desenvolvimento de misconceptions pelos alunos sobre o assunto de frações. Como exemplo dessas tendências podemos citar a abordagem desse conteúdo no livro didático de Matemática para o 6º ano do Ensino Fundamental Caderno do Futuro (2013) da editora IBEP, pois como podemos observar o assunto é introduzido diretamente a partir de um conceito já estabelecido no qual os alunos serão levados a memorização dessa regra. Portanto, não é feita nenhuma aplicação do conteúdo a realidade do aluno e não o instiga a compreender o significado das operações com frações.

Figura 04 – Possíveis causas de misconceptions para adição e subtração de frações em livros didáticos



Fonte: Caderno do Futuro (2013)

Nesse caso em que a resolução das operações com frações de denominadores diferentes, passa pela equivalência das frações por meio da aplicação do mínimo múltiplo comum (mmc) para reduzi-las ao mesmo denominador, pode não fazer sentido algum para os alunos. Pois acreditamos que seria viável a utilização de recursos visuais, como figuras e exemplos práticos para explicar o significado da equivalência das frações.

Outra causa geradora de misconceptions em relação a esse tópico de ensino é a dificuldade dos alunos em relação à aprendizagem do conceito de álgebra. Sobre isso, D Permata, P Wijayanti e Masriyah (2019), afirmam que “a falta de compreensão apresentada pelos alunos em relação aos conceitos de álgebra pode levar a misconceptions” (tradução nossa). Esses autores ainda destacam que outros fatores se constituem em causas de misconceptions como: preconceito – o aluno diz não gostar desse assunto ou que não consegue aprender e com isso desenvolve um aprendizado parcial dos conceitos; pensamento associativo – como já mencionamos, o aluno tende a associar as frações com outros conjuntos de números e acredita que as mesmas regras operatórias de um, são válidas para todos; raciocínio incompleto ou incorreto; intuição e habilidade errada.

Portanto, após a realização de pesquisas sobre o assunto abordado elencamos na tabela a baixo algumas causas de misconceptions no ensino aprendizagem de adição e subtração de frações.

Quadro 14 - Causas de Misconceptions em adição e subtração de fração

Causa	Descrição
Passagem da adição de frações com denominadores semelhantes para a adição de frações com denominadores diferentes.	A transição do conceito de resolução de uma para a outra, geralmente, cria conflitos cognitivos para os alunos pois ele terá que “desaprender” o que foi aprendido anteriormente. Ou seja, exige que os alunos entendam os diferentes cenários e façam ajustes.
Conhecimento conceitual incorreto ou incompleto.	Alguns estudantes acreditam que as adições e subtrações com frações se restringem somente àquelas com denominadores iguais. Assim, eles tendem a somar os numeradores das frações antes de torna-las equivalentes.
Memorização de regras	Alguns alunos provavelmente memorizam as regras e quando chega a hora de resolver um problema, essas regras memorizadas podem não ser apropriadas para a tarefa em questão, pois requer conhecimento conceitual.
Falta de orientação	Sem orientação um aluno pode aplicar a regra inadequada ao problema atual e, assim, resultar em mais mal-entendidos.
Dificuldades em realizar operações matemáticas	O aluno não consegue ou consegue com dificuldade realizar as quatro operações básicas.

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2021)

Nos estudos de Nunes e Santana (2017) as causas de erros, ou seja, as misconceptions podem ser discutidas na vertente da perspectiva epistemológica as quais são apontadas pelos autores segundo a perspectiva de Graeber e Johnson (1990) denominadas por: supergeneralização (*overgeneralization*), superespecialização (*overspecialization*), tradução errônea (*mistranslation*) e concepções limitadas (*limitedconception*). Segundo Graeber e Johnson (1990, p. 4-6 apud NUNES; SANTANA, 2017):

- Na **supergeneralização**, se um estudante toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende a outra classe, então ele está supergeneralizando.
- Na **categoria superespecialização** as concepções errôneas dos alunos impõem a uma classe toda uma propriedade de alguma subclasse. Ou, se um aluno adiciona alguma restrição a um conceito, a um princípio ou a um procedimento que não é uma característica da classe toda, então ele está superespecializando.
- Sobre **traduções errôneas**: Muitos erros acontecem enquanto os estudantes traduzem determinadas formas tais como palavras, símbolos ou fórmulas, tabelas e gráficos. Tais traduções são frequentemente encontradas, e cada tipo de tradução (por exemplo, palavras para símbolos) tem dificuldades associadas a ela.
- Sobre **concepções limitadas**: Se a concepção errônea de um estudante é notada pela falta de um conceito, de um procedimento ou de um princípio ou, se o estudante tem apenas uma noção limitada daquele conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada, consideradas “concepções fracas” (pontos de vista limitados) ou “concepções perdidas” (quando os estudantes são capazes apenas de recuperar pedaços e partes da concepção), ou ainda “conhecimento frágil” (conhecimento que cai quando a capacidade de processamento das pessoas é imposta).

Com relação ao que foi discutido nos parágrafos anteriores, percebemos que muitas dessas misconceptions estão enraizadas e eliminá-las não é fácil. Pois, o aluno possui concepções assumidas e carregadas durante toda a sua escolaridade, é envolvido com uma série de obstáculos cognitivos, epistemológicos e didáticos, sobretudo, na construção de novos conceitos e de novos conteúdos. Porém, como professores de matemática temos o papel e o desafio de influenciar o aluno a superar suas concepções errôneas.

Almeida e Branco (2018, p.96), afirmam que “no 2.º ciclo do ensino básico, os alunos aprofundam os conhecimentos sobre números racionais”. Porém, esses números ocasionam inúmeras dificuldades, pois conforme Campos e Rodrigues (2007, p. 69, apud, MELO; ANDRADE, 2014, p. 52):

(...) sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio, pois, embora esse conjunto numérico seja uma extensão dos naturais, as tentativas de estabelecer paralelos entre procedimentos relativos aos dois conjuntos ora são válidas, ora não são, deixando desorientados os alunos que procuram estabelecer esses paralelos, sem uma reflexão mais aprofundada.

Concordamos com Alghazo e Alghazo (2017) quando destacam que:

Um dos conceitos que os alunos têm dificuldade são as frações. Para entender o conceito de frações, os alunos precisam ter uma compreensão clara das propriedades fracionárias. Os alunos geralmente constroem conhecimento fracionário a partir de conhecimento já existente. Se o conhecimento existente estiver contaminado com equívocos conceituais, isso afetará sua aprendizagem futura relacionada ao conceito. (ALGHAZO; ALGHAZO, 2017, tradução nossa)

E essas dificuldades também podem estar relacionadas ao “ato de partição de “algo” que se toma como inteiro o que leva as crianças a interpretarem as frações como um par de números naturais e não como um único número que também representa uma quantidade” (SILVA (1997, apud RENZ, 2011, p.14, apud MELO; ANDRADE, 2014, p. 52-53). E também, pelo fato de muitas vezes o aluno não enxergar significado e sentido para a representação de frações e com isso apenas memoriza regras para serem seguidas, ou seja, sem a devida compreensão do conceito.

A aprendizagem depende da vinculação do conhecimento prévio que o aluno possui, o que pode ajudar (ou dificultar) o processo de compreensão. Pode consistir em conhecimento prévio incorreto denominado conceitos errôneos, que causam uma incapacidade de compreender os novos conceitos. Isso pode ser devido a vários motivos, como a incapacidade do aluno de vincular o que já está presente ao novo, interpretando erroneamente os novos conceitos para corresponder ao conhecimento anterior; ou pela falta de conhecimento prévio sobre o conceito. (ALKHATEEB, 2020, v. 19, p. 292, tradução nossa)

Portanto, a obtenção de um bom conhecimento conceitual faz-se necessário para os alunos resolverem as operações com frações corretamente, uma vez que, a elaboração de estratégias de resolução depende da compreensão de quais recursos serão utilizados, ou seja, se os mesmos serão apropriados ou não para determinada situação.

Com relação as operações de adição e subtração com frações, alguns estudantes acreditam que estas se restringem somente àquelas com denominadores iguais. Assim, eles começam cada operação renomeando as frações correspondentemente. E dessa forma, para estudantes com conhecimento conceitual incorreto ou incompleto sobre características do problema, estratégias como essa, provavelmente prevalecerá.

Nesse sentido, vários estudos foram desenvolvidos com o objetivo de analisar o ensino de frações e as dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem do mesmo como veremos na próxima seção.

3.5 – REVISÃO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÃO

Para esse momento da pesquisa investigamos bibliograficamente estudos já realizados a respeito do ensino de fração e, mais especificamente, as operações de adição e subtração. Procuramos por registros disponíveis como artigos científicos, dissertações e teses que se enquadrassem em nossa busca. Foram considerados doze estudos sobre a problemática do processo de ensino-aprendizagem das frações. Desses estudos: quatro possuem aspecto diagnóstico; três teóricos; e cinco experimentais. Sobre esses estudos analisamos a metodologia de pesquisa adotada, as ferramentas utilizadas, o local de pesquisa, público alvo, em que cenários e contextos estão inseridos, os objetivos propostos, as intervenções possíveis e demais fatos importantes para o estudo de ensino de frações com foco nas operações de adição e subtração.

A seguir apresentamos um quadro com os resultados de estudos sobre o ensino de frações, mais particularmente sobre a adição e a subtração.

Quadro 15 – Ensino sobre fração e as operações de adição e subtração

Tipo de estudo	Autor(es)	Ano	Título do trabalho	Categoria	Instituição / Evento
Estudos Diagnóstico	ALKHATEEB	2020	Correcting Misconceptions in Fractions Using Interactive Technological Learning Activities.	Artigo	International Journal of Learning, Teachin and Educational Research

	DERINGÖL	2019	Misconceptions of primary school students about the subject of fractions.	Artigo	IJERE (International Journal of Evaluation and Research in Education)
	CARNEIRO & ARAMAN	2017	Concepções de professores da educação básica sobre o ensino de frações: considerações preliminares.	Artigo (apresentação em evento)	EPEM (Encontro Paranaense de Educação Matemática)
	MELO & ANDRADE	2014	Análise de erros em questões de adição e subtração com frações.	Artigo	Revista WEB-MAT
Estudos Teóricos	DIONIZIO et al	2019	Abordagens de frações no ensino fundamental: um levantamento nos anais do ENEM e EPREM.	Artigo	EM TEIA (Revista em Educação Matemática e tecnológica Iberoamericana)
	BRANDÃO & RIBEIRO	2016	O estudo das adições de frações com denominadores diferentes através das representações gráficas.	Artigo (apresentação em evento)	ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática)
	ZANELLA et al	2013	Um estudo teórico de problemas da estrutura aditiva de Números racionais na representação fracionária.	Artigo (apresentação em evento)	ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática)
Estudos Experimentais	ALVES	2018	O ensino de frações por atividades.	Dissertação	UEPA (Universidade do Estado do Pará)
	PEREIRA	2017	Uma sequência didática para o ensino de adição de frações.	Dissertação	UFT (Universidade Federal do Tocantins)
	LIMA	2017	A adição e subtração de frações com denominadores diferentes com o uso do conceito de frações equivalentes.	Trabalho de Conclusão de Curso – TCC	IFG (Instituto Federal Goiano-campus morrinhos)
	MELO; COSTA; PONTES	2016	Ensino de fração: uma experiência com o frac-soma 235.	Trabalho em evento – relato de experiência	ENEM (encontro nacional de educação matemática)

	SÀ et al	2010	Adição e subtração de frações com calculadora virtual.	Artigo	ENEM (encontro nacional de educação matemática)
--	----------	------	--	--------	---

Fonte: Autora (2022)

3.5.1- Estudos Diagnósticos

Os estudos seguintes são diagnósticos, pois, seus autores buscaram investigar as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, fatores que levam os alunos desenvolverem equívocos no momento das atividades de fração/adição e subtração, e como se dá o ensino desse objeto matemático em sala de aula. São realizadas por meio da aplicação de questionários, testes para avaliar o desempenho, observação e entrevistas.

3.5.1.1- Primeiro estudo

Alkhateeb (2020), em seu estudo sobre correção de equívocos em frações usando atividades de aprendizagem tecnológica interativa, teve como objetivo diagnosticar os equívocos nos tópicos de fração apresentados por alunos da quarta série e identificar o efeito do uso de atividades interativas para corrigir os equívocos que os alunos vivenciam no ensino de frações. Para essa pesquisa o autor aplicou um pré-teste que visou diagnosticar os equívocos nas frações. Em seguida, foi testada a possibilidade de corrigir equívocos por meio de atividades tecnológicas interativas que foram construídas à luz da teoria construtivista e do modelo de Posner. E por fim, o mesmo teste foi repetido após o uso das atividades tecnológicas interativas no ensino do tema frações, para identificar seus efeitos na correção desses equívocos.

A amostra do estudo consistiu de 85 alunos da quarta série na Jordânia. Os resultados revelaram um conjunto de equívocos nos assuntos de frações. No que diz respeito às operações de adição e subtração com frações, os resultados do pré-teste diagnóstico mostraram que a maior porcentagem (88,2%) foi para o equívoco de subtrair frações não equivalentes, pois realizaram a subtração dos dois numeradores e subtraíram os dois denominadores, como $\frac{3}{8} - \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$. Outro equívoco com grande percentual (80%) foi sobre a adição de uma fração com um número inteiro, uma vez que, os alunos pesquisados adicionaram o inteiro à fração mantendo o denominador

como estava, como $5 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$. O equívoco sobre a adição de duas frações não equivalentes resultou em 74%, em que adicionaram os dois numeradores entre si, assim como os denominadores, como $\frac{5}{7} + \frac{3}{2} = \frac{8}{9}$. Outro equívoco com considerável porcentagem (56,5%) foi sobre adicionar duas frações com denominadores equivalentes, bem como adicionar dois numeradores, como $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{7}{14}$. E também, na subtração de duas frações com denominadores semelhantes com equívoco correspondendo à 52,9%, como $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{0}$.

3.5.1.2 - Segundo estudo

Deringöl (2019), realizou um estudo com o objetivo de investigar o atual conhecimento de professores do ensino fundamental e futuros professores sobre as misconceptions (equívocos) dos alunos do ensino fundamental a respeito do assunto de frações. Os participantes da pesquisa foram 26 professores primários empregados em três escolas primárias diferentes em Istambul, Turquia e 73 futuros professores que cursavam o 3º e 4º anos numa faculdade de educação na mesma província e que estavam fazendo estágio no âmbito do curso de Prática de Ensino. A autora utilizou a pesquisa qualitativa com estudos de casos. Os dados foram coletados por meio de dois formulários semiestruturados, ou seja, um formulário para os professores e outro para os futuros professores.

No formulário do professor a autora buscou conhecer quais equívocos dos alunos seriam apontados pelos professores conforme sua experiência. Para isso foi pedido que os mesmos fornecessem três situações que consideravam como erradas por parte de seus alunos sobre o assunto de fração. O mesmo foi pedido no formulário dos futuros professores. E como resultado de suas experiências e observações os participantes da pesquisa afirmaram que os alunos confundem o numerador e o denominador, o conceito de frações não foi totalmente estabelecido, os alunos pensam nas frações como números inteiros. E sobre misconceptions referentes a adição e subtração de frações, os professores e futuros professores afirmaram que os

alunos cometem erros nessas operações, uma vez que, esses alunos adicionavam numeradores e denominadores separadamente, assim como, tinham dificuldades em operações que tinham denominadores diferentes.

3.5.1.3 – Terceiro estudo

Carneiro e Araman (2017) apresentam em seu artigo um estudo sobre o ensino de frações a partir de concepções de professores da educação básica, atuantes em escolas públicas no município de Cornélio Procopio, no estado do Paraná. Essa pesquisa foi desenvolvida com duas professoras com o objetivo de compreender o modo como abordam o conteúdo de frações e para buscar elementos que proporcionem a reflexão das práticas que adotam.

Os autores concluíram no decorrer da pesquisa que as professoras investigadas apesar de conhecerem outras maneiras de ensino ainda utilizam metodologias tradicionais de ensino em suas práticas. E quanto ao ensino de adição e subtração de fração “revelam que empregam o mínimo múltiplo comum para ensinar operações com frações” (CARNEIRO; ARAMAN, 2017)

3.5.1.4 – Quarto estudo

O estudo de Melo e Andrade (2014) buscou identificar e analisar os erros cometidos por alunos no que se refere às operações de adição e subtração com frações. A pesquisa foi do tipo diagnóstica, na qual os autores buscaram descrever os resultados obtidos com base na aplicação de um teste diagnóstico e foi desenvolvida em uma turma do 6º ano de uma escola da rede particular de Belém do Pará. Como instrumento de pesquisa utilizou-se um teste composto de 8 questões sobre as operações de adição e subtração de frações.

Os resultados colhidos com a aplicação desse teste possibilitaram aos autores observar que as questões com maior número de erros foram as que envolviam adição e subtração de frações com denominadores diferentes. E, também, erros em decorrência de má formação do conceito de fração, interpretação de problemas e erros nas operações fundamentais com inteiros.

3.5.2 - Estudos Teóricos

Os estudos teóricos são pesquisas realizadas em documentos, livros, revistas, ou seja, são estudos que analisam resultados de pesquisas que já foram realizadas sobre o objeto em questão. Os estudos teóricos não interveem imediatamente na realidade, mas seu papel é decisivo na criação de condições para a intervenção. Os estudos teóricos a seguir apresentam o processo de investigação dos resultados de trabalhos que obtiveram implicações satisfatórios nos aspectos conceituais sobre o ensino de fração/adição e subtração.

3.5.2.1 – Primeiro Estudo

Dionizio et al (2019) desenvolveram um estudo com a seguinte questão: de que forma as pesquisas abordam propostas para o ensino de frações no Ensino Fundamental? Nesse sentido, os autores realizaram uma busca por artigos que contemplassem o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém, devido à dificuldade de localizar trabalhos para o nível de ensino assinalado, a pesquisa foi ampliada também para os anos finais da etapa de ensino. Para tanto, foi realizado um levantamento de trabalhos publicados nos anais das 12 edições do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e das 14 edições do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), realizadas até o ano de 2017 e disponíveis na internet. Foram considerados os trabalhos publicados como Comunicação Científica e como Relato de Experiência nos dois eventos. Para a análise de seus resultados tiveram as contribuições teóricas de Walle (2009), Gravina e Basso (2010), Kishimoto (2011), Pires (2012), Magina e Malaspina (2013) e Luckesi (2014).

Ao realizar a pesquisa nos anais do ENEM, foram localizados 24 trabalhos ao todo, entre Relatos de Experiência e Comunicação Científica. E nos anais das edições do EPREM obtiveram 14 trabalhos. Desse total de 38 trabalhos, os autores constataram que há 19 pesquisas que apresentam sugestões e estratégias para o ensino de frações no Ensino Fundamental. Outras 19 pesquisas abordam o uso de livros didáticos, entrevistas com professores e acadêmicos, pesquisas bibliográficas etc.

Para a pesquisa em questão Dionizio et al (2019) pela análise e classificação dos temas contemplados nas Comunicações Científicas e nos Relatos de Experiências das 19 pesquisas localizadas nos anais dos dois eventos, ENEM e EPREM, que discorrem sobre estratégias para o ensino das frações. E assim, descreveram os materiais e/ou as estratégias e classificaram os trabalhos em três categorias: jogo, uso de softwares, outras estratégias. Podemos observar o resultado dessa classificação na imagem 02 a seguir que mostra o quadro de estratégias para o ensino de frações elaborado pelos autores.

Quadro 16 – Estratégias para o ensino de frações (DIONIZIO, 2019)

Fonte	Formato	Autores	Materiais/estratégias	Jogos	Uso de softwares	Outras estratégias
ENEM	RE	Nascimento, Nascimento e Oliveira (2016)	Dobraduras			X
		Parnoff, Alves, Fantinel e Alves (2016)	Discos fracionários			X
		Silva, Wolf e Burigato (2013)	Discos fracionários			X
		Zabel, Munhoz (2013)	Tangram e receita.	X		X
EPREM	RE	Eberhardt e Scibor (2014)	Dobradura, material cuisenaire e frascos com líquidos			X
		Chott, Góes e Cruz (2015)	Régua de frações, quebra-cabeças	X		X
		Foss e Araújo (2017)	Fitas de papel cartão e canudos plásticos			X
		Turra, Novaes e Largo (2017)	Literatura			X
		Dobzinski, Neves e Matumoto (2017)	Tangram	X		X
ENEM	RE	Lopes, Patricio (2013)	Bafrão, Dominó de frações equivalentes e	X		
			Papa todas			
EPREM	RE	Silva e Giacobbo (2015)	Baralho das frações	X		
ENEM	CC	Moreira, Sá, Alves e Neto (2010)	Calculadora de frações, dominó e trilha da corrida das frações	X	X	
EPREM	RE	Antunes <i>et al.</i> (2017)	Palavras cruzadas no site Hot potatoes	X	X	
		Araújo e Rezende (2014)	Jclie		X	
	CC	Belinelli, Antunes e Dalto (2015)	Equivalência		X	
		Scherer, Rizz e Rizzi (2017)	Sistema de Tutoria (EAD)		X	
ENEM	CC	Sá, Jesus, Neto, Alves, Rodrigues (2010)	Máquina de calcular digital e Baralho das frações	X	X	
	RE	Bernardi, Megid (2016)	Livro “Frações sem Mistérios” escrito por Luzia Faraco Ramos, Material dourado, Tangram e Jogo da Pizza com Frações e Jogo online Enigma das Frações	X	X	X
		Pasuch, Barboza e Bassani (2013)	Chocolate e discos fracionários e Dominó das frações	X	X	X

Fonte: Dionizio et al (2019)

A partir da análise desses trabalhos, Dionizio et al (2019) observaram os autores e avaliaram positivamente as estratégias de ensino desenvolvidas, uma vez que, visualizaram nas mesmas uma forma para ajudar os alunos a superar suas dificuldades nas atividades com frações.

A respeito dos anos iniciais do Ensino Fundamental, foram localizados apenas 5 trabalhos que abordam estratégias para o ensino de frações, dentre as 19 pesquisas relatadas. Diante disso, consideramos poucas as pesquisas voltadas ao estudo de frações para os anos iniciais do Ensino Fundamental, se compararmos com o total de trabalhos localizados.

Os outros 19 trabalhos pesquisados que foram classificados com outras abordagens dizem respeito a trabalhos que analisam livros didáticos, relatos, intervenções pedagógicas sem descrever os procedimentos utilizados, pesquisas realizadas por meio da aplicação de formulários, questionários e entrevistas com alunos e professores do Ensino Fundamental e da Educação de Jovens e Adultos (EJA), e temas mais específicos como formação continuada dos professores, a etnomatemática, uma discussão filosófica e um resgate histórico sobre as frações. E desses, apenas 06 são voltados para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em suma, foi constatado pelos autores desse estudo que, há pesquisas que abordam as frações no Ensino Fundamental a partir de estratégias diversificadas e outras que apresentam considerações sobre diferentes fatores relacionados a esse conteúdo. Porém, foram encontrados poucos relatos de práticas consolidadas para efetivação do ensino das frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que evidencia que ainda há necessidade de mais trabalhos que ressaltem esses aspectos.

3.5.2.2 – Segundo estudo

Brandão e Ribeiro (2016) discutem sobre a docência no tocante à adição de frações com denominadores diferentes e propõem, em seu trabalho, atividades que possam servir como introdução ao assunto. Os problemas sugeridos nessas atividades buscam a compreensão do assunto na expectativa de que o próprio aluno encontre a saída utilizando às técnicas operacionais através da resolução de desenhos e equivalências com a ajuda do professor sem precisar memorizar fórmulas.

Dessa forma, os autores mostram uma outra forma de abordar esse assunto diferentemente do método tradicional comumente utilizado pelos docentes em suas

aulas, pois nesse estudo eles mostram a abordagem do cálculo das frações com denominadores diferentes através do desenho de retângulos. E concluíram que o estudo por meio de representações gráficas no ensino de adição de frações com denominadores diferentes permite o docente refletir sobre a importância de trabalhar esse assunto sem que haja memorizações na sala de aula. E segundo os autores “estas representações, a análise das figuras e as frações equivalentes pode ser potencializada, favorecendo a aprendizagem dos conceitos que realmente importam neste processo, como o estudo das frações equivalentes, adição de frações, multiplicação de um número pela fração e a multiplicação de uma fração pelo número”. (BRANDÃO; RIBEIRO, 2016, p. 11)

3.5.2.3 - Terceiro estudo

A pesquisa de Zanella et al, (2013) publicada em forma de artigo no ENEM 2013, teve como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud. Nesta pesquisa os referidos autores objetivaram investigar por meio da pesquisa bibliográfica a presença de elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, por meio da releitura do artigo Learning fractions with understanding: building on informal knowledge, de Nancy Mack (1990), que realizou atividades com crianças, sobre as estruturas aditivas de números racionais em sua representação fracionária.

Para que os autores optassem pela releitura desse artigo eles levaram em consideração alguns aspectos importantes como: tema, público alvo, tipo de atividades realizadas na pesquisa e tipo de pesquisa. Pois buscavam um tema que envolvesse números racionais na representação fracionária; um público alvo que fosse alunos do ensino fundamental ou acadêmicos de Licenciatura em Matemática; que as atividades desenvolvidas na pesquisa fossem realizadas com as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) de números racionais na forma fracionária; e um tipo de pesquisa que mostrasse o diálogo ocorrido entre alunos, entre professor/pesquisador e alunos ou que apresentassem todo o percurso dos alunos durante a resolução de uma atividade, ou seja, os símbolos, escritas, desenhos e diagramas.

A partir desses critérios o artigo de Nancy Mack (1990) foi selecionado pelos autores para se fazer a releitura. Nesse artigo a autora descreve a pesquisa realizada

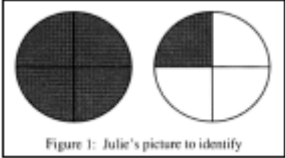
durante seis semanas com oito alunos que cursavam a 6ª série em uma escola na cidade de Madison, Wisconsin, EUA. O objetivo do estudo de Marck (1990) foi examinar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre os números racionais na representação fracionária a partir de duas perspectivas: (i) desenvolver o conhecimento informal dos estudantes sobre os números racionais na representação fracionária – nomeado simplesmente por frações pela autora e (ii) investigar as formas que os alunos são e não são capazes de construir o conhecimento informal para dar sentido a símbolos da fração e procedimentos. Para o desenvolvimento das atividades os alunos trabalharam em grupos. E a coleta dos dados se deu por meio da transcrição de registros de filmagens e observações realizadas no decorrer do trabalho em sala de aula.

Para a aplicação das situações problemas dessa pesquisa, a autora optou por apresentá-las aos estudantes de maneira mais verbal do que somente escritas, pois assim, os alunos seriam provocados a dialogar sobre como resolveram suas atividades e, também, explanar dúvidas e descobertas surgidas no decorrer da resolução da atividade. Para auxílio nas resoluções, foram utilizados materiais concretos, por exemplo, tiras e círculos de papel. Durante as sessões de ensino a pesquisadora buscou privilegiar as atividades que: representassem situações do mundo real, para aproximar a quantidade representada por materiais concretos; utilizassem as respostas por estimativa para resolver adição e subtração entre frações.

O Quadro a seguir é parte dos resultados da pesquisa de Mack (1990, apud ZANELLA et al, 2013, pg. 09-10) em que são apresentadas situações, invariantes e representações em problemas da estrutura aditiva de racionais na representação fracionária.

Quadro 17 – Elementos da TCC para a Estrutura Aditiva utilizados por Mack (1990)

Estrutura Aditiva de Números Racionais na Representação Fracionária			
Mack (1990)	Elementos da TCC		
Atividade	Situação	Invariante	Representação
1ª	1ª categoria: Composição de medidas. Suponha que você tenha duas tortas de limão e você come $\frac{1}{5}$ de uma das tortas, quanto da torta de limão sobrou?	Conceito em ação O aluno identifica que a pizza foi dividida em 5 partes iguais, $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Assim, tem $1 + \frac{4}{5}$ de torta.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

2 ^a	Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho, e você deseja cortar uma das pizzas em seis pedaços iguais. A outra pizza você deseja cortar em oito pedaços iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, qual destes pedaços será maior?	Conceito em ação Quanto maior o número de divisões de uma pizza, menor será a área de cada uma de suas partes.	Linguagem escrita.
		Teorema em ação $\frac{1}{8} > \frac{1}{6}$, pois $8 > 6$. Enumeração de naturais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
3 ^a	1^a categoria: Composição de medidas  Figure 1: Julie's picture to identify Quanto é a parte hachurada?	Conceito em ação Identifica a unidade dividida em 4 partes. Logo, representa 1 pizza inteira e $\frac{1}{4}$.	Representação pictórica Relacionou a figura à pizzas (linguagem do cotidiano).
		Teorema em ação Na adição entre frações somar numeradores e, somar denominadores. Compreende a unidade dividida em 8 partes.	Representação pictórica.
4 ^a	$4 - \frac{7}{8} = ?$	Conceito em ação $1 = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$, desta forma: $\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$, mais 3 unidades inteiras: $3 + \frac{1}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
		Teorema em ação $4 - \frac{7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$, Erro cometido: $4 = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
5 ^a	$4\frac{1}{8} - 1\frac{5}{8} = ?$	Conceito em ação Subtraiu os inteiros: $4 - 1 = 3$, e então, $(2\frac{8}{8} - \frac{5}{8}) + (\frac{1}{8}) = 2\frac{4}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
6 ^a	$\frac{7}{8} + \frac{5}{6} = ?$	Teorema em ação Somar numeradores e, somar denominadores (proveniente da adição de naturais).	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
7 ^a	1^a categoria: Composição de medidas Se você tivesse $\frac{3}{8}$ de uma pizza e eu te desse mais $\frac{2}{8}$ de uma pizza, quanto de pizza você teria?	Conceito em ação Interpretação parte-todo: unir as parcelas (numeradores) de um mesmo todo, indica que o estudante compreende a unidade dividida partes iguais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

Fonte: Zanella et al (2013).

Com os resultados obtidos na pesquisa de Mack (1990), Zanella et al (2013) puderam concluir que:

- Os erros mais cometidos pelos estudantes são referentes aos procedimentos incorretos que utilizam para resolução das operações aritméticas entre frações;
- Os alunos não apresentam grandes dificuldades em compreender as operações de adição e subtração com números fracionários de mesmo denominador, e sim, quando os denominadores são diferentes;
- Nas operações de adição e subtração de frações foi notório a utilização de invariantes operatórios pelos alunos, e o principal foi o teorema em ação “somar numerador com numerador e, denominador com denominador”;
- As principais representações utilizadas na forma fracionária são por meio de desenhos (representação pictórica – formato circular ou de pizza), em linguagem natural escrita e a representação $\frac{a}{b}$;
- Em situações problemas que representaram ações da vida cotidiana, os alunos obtiveram êxito e conseguiram resolver adequadamente as atividades;
- Com relação aos elementos da TCC identificados no trabalho de Mack (1990), Zanella et al (2013) destacam que

as situações, na perspectiva adotada por Vergnaud (1993), devem ser propostas em variedade e em diferentes níveis de generalidade, pois as operações de adição e subtração devem ser usadas com uma variedade de atividades modeladas de tal modo que os estudantes possam compreender a natureza do processo em que se relacionam aspectos do mundo real e as estruturas matemáticas. (ZANELLA et al, 2013, pg. 13)

- Os teoremas em ação que foram identificados nas respostas dos alunos investigados por Mack (1990) para a estrutura aditiva de racionais na representação fracionária, indicam um meio para que se possa analisar os procedimentos criativos adotados pelos alunos na resolução de atividades e a partir dessa análise tentar criar meios para ajudá-los na formalização do conhecimento.
- “Estes teoremas também nos encaminham para diagnosticar o conhecimento dos estudantes, o que sabem e o que ainda não sabem,

de modo que possamos oferecer-lhes situações para a compreensão de determinados conceitos matemático”. (ZANELLA, 2013, pg. 13)

3.5.3 - Estudos Experimentais

Nos estudos experimentais as pesquisas desenvolvidas utilizam-se de meios para que os alunos possam compreender a teoria, participar do processo de construção do conhecimento e estar mais próximo da realidade. A seguir temos estudos que propõem e realizam atividades para o ensino de fração/adição e subtração com o objetivo de minimizar as dificuldades apresentadas no processo de ensino-aprendizagem deste objeto matemático.

3.5.3.1 – Primeiro estudo

Em Alves (2018) temos os resultados de uma pesquisa sobre o ensino de frações por atividades no qual foi analisado o processo de ensino e aprendizagem do número racional em sua forma fracionária. A pesquisa teve como objetivo avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada no ensino por atividades, para o Ensino de Frações, sobre alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública de Belém, nas aulas de matemática e sobre o desempenho de resolução de questões envolvendo este conteúdo. Esse estudo foi fundamentado na metodologia de pesquisa Engenharia Didática, e assim, desenvolvido em quatro fases.

Em sua pesquisa Alves (2018) realizou um levantamento sobre: a evolução histórica do conteúdo de fração; o Ensino de Fração na Escola Básica; o ensino de frações, por meio de questionário aplicados a cem professores e cem discentes para obter informações sobre ensino de Fração, quais metodologias de ensino utilizam, quais os obstáculos de ensino e o grau de dificuldade em aprender que os alunos apresentam, e também, para verificar qual a percepção dos discentes com relação ao conteúdo de Fração, suas possíveis dificuldades; Fração no Ensino de Matemática, e a Revisão dos Estudos acadêmicos acerca do processo de ensino e aprendizagem de Fração.

De posse dessas pesquisas, a autora construiu sua Sequência Didática a qual contou com 10 atividades relacionadas ao estudo de Fração e com o emprego de

materiais manipuláveis, denominados pela autora como “kit de Frações” que consiste em um conjunto com 137 peças em papel que representam as frações. O objetivo da elaboração e utilização desse kit foi conceder aos alunos condições para obterem uma melhor compreensão sobre os conceitos e regras referentes ao conteúdo de frações.

Alves (2018) aplicou essa Sequência Didática numa escola pública da rede estadual de ensino do município de Belém do Pará, cujo sujeitos foram 25 estudantes de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental em 12 encontros dedicados ao desenvolvimento do conteúdo de Fração a partir dos seguintes tópicos: Conceito, representação, equivalência, adição e subtração de frações com mesmo denominador; adição e subtração de frações com denominadores diferentes; multiplicação de frações e divisão de frações.

Os resultados da pesquisa de Alves (2018) apontam, que a Sequência Didática proporcionou desempenho aos estudantes em relação ao conteúdo de Frações, sendo que esse desempenho foi ainda maior na resolução de questões por parte destes alunos, a autora também observou avanços em relação a linguagem e simbologia matemática ao conhecer as variadas operações e significados pertinentes a este assunto.

3.5.3.2 – Segundo estudo

O estudo de Pereira (2017), foi desenvolvido tendo como base os princípios da Engenharia Didática, com objetivo principal de elaborar uma Sequência Didática com vistas à compreensão do conceito de adição de frações por estudantes da Educação Básica, considerando o conjunto dos números racionais não-negativos Q^+ .

Para esse estudo, o autor procurou investigar sobre: o desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao ensino de frações; o desempenho dos estudantes em provas oficiais; a contribuições da utilização de Sequência Didática para construção do conhecimento; e como livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental tratam o conceito de adição de frações.

A Sequência Didática elaborada foi composta de 3 fases. Fase diagnóstico, foi organizado em 8 tarefas para verificar o conhecimento dos estudantes sobre frações, ou seja, se os mesmos possuíam conhecimentos sobre significados de frações, frações equivalentes, comparação de frações e adição. Fase experimentação,

constituída de 3 Atividades, cada uma delas subdivididas em tarefas que tinham como objetivos principais:

- A compreensão do conceito de frações equivalentes;
- A compreensão do método de adição de frações de mesmo denominador (nessas tarefas os autores utilizaram o Tabuleiro de Xadrez, o Tangram, situações que envolviam diferentes significados de frações, quantidades contínuas e discretas, de natureza intensiva e extensiva);
- E fazer a redução de frações a um mesmo denominador para assim adicioná-las;

E a fase da avaliação, contida de 11 tarefas teve como objetivo verificar se os estudantes compreenderam o conceito de adição de frações. Nessa pesquisa, em cada fase, as tarefas foram organizadas considerando graus de complexidades cada vez maiores.

Para a conclusão do estudo, Pereira (2017) aponta que após análise dos livros didáticos, concluiu que o ensino de adição de frações se mostra de modo engessado nos mesmos e desse modo chega até a sala de aula, ou seja, os estudantes recebem um modelo pronto e acabado e não desfrutam de um novo método, modelo ou prática para aprender e desenvolver seu aprendizado sobre frações, acarretando como consequências, índices insatisfatórios nas avaliações de desempenho.

Com relação a Sequência Didática, o autor afirma que ao usá-la em sua pesquisa a mesma lhe proporcionou uma nova experiência e ao mesmo tempo provocou discussões em relação à possibilidade de se utilizar novas metodologias de ensino e aprendizagem de matemática, em especial, para o ensino de frações. E também, conclui que o referencial teórico utilizado para o desenvolvimento do estudo apontou e desenvolvimento do trabalho confirmou que “ a Sequência Didática pode e deve ser usada como alternativa no ensino de matemática, agregando assim novas possibilidades ao dia a dia da sala de aula”. (PEREIRA, 2017, pg. 93).

De modo geral, os resultados da Sequência Didática elaborada e aplicada por Pereira (2017), seguindo os pressupostos da Engenharia Didática, mostrou-se bastante proveitoso, pois coloca para o professor o desafio de elaborar atividades pensando nas diferentes perspectivas que um dado conceito contempla, e ao

estudante, o papel de agente ativo no processo de aprendizagem. Assim, tem-se mais uma possibilidade metodológica para o ensino de adição de frações.

3.5.3.3 – Terceiro estudo

Lima (2017) desenvolveu um estudo sobre como se dá a aprendizagem de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, usando a equivalência de frações. Para tanto, o objetivo geral foi compreender como é possível inserir esse conteúdo sem o uso do m.m.c., mas sim com o uso do conceito de equivalência. E para fugir do modo tradicional de ensino desse objeto matemático, a autora escolheu trabalhar com material manipulativo, chamado de “régua de frações”, este é um material colorido e de fácil manuseio que usa a equivalência de frações para o trabalho com as operações.

A pesquisa foi de caráter qualitativo e foi elaborado uma sequência didática para ser aplicada em uma turma de quarto ano do ensino fundamental com 28 alunos de uma escola pública da cidade de Morrinhos. Foram usadas observações, fotos, e gravações contidas no diário de campo da pesquisadora para que se pudesse buscar as compreensões acerca dos resultados. Em sua pesquisa Lima (2017) escolheu por ressaltar dois momentos, sendo eles: A Equivalência de Frações Usando Material Manipulativo e As Operações de Adição e Subtração de Frações com o Uso de Material Manipulativo.

No primeiro momento foram utilizadas as “régua de fração”, para mostrar a equivalência de fração e como é possível sobrepor uma fração a outra, e também, demonstrar que se pode substituir uma fração por outra para facilitar a resolução das equações. A autora, inicialmente, procurou despertar a curiosidade das crianças usando ao máximo as régua e mostrando com elas as medidas iguais, sobrepondo as fichas, pois com isso, elas podiam constatar na prática o que lhes era falado. Segundo Lima (2017, pg. 47-48), “mostrar na prática a diferença entre igualdade e equivalência foi muito proveitoso, pois as crianças observaram que a equivalência se faz em partes representadas de forma diferente, mas que também representam a mesma parte de um todo”. O segundo momento foi iniciado com a soma e subtração de fração de mesmo denominador no qual foi mostrado na régua de frações como seria. Após isso foi trabalhado a soma e subtração de fração com denominadores

diferentes pois os alunos já estavam usando as tiras, e a régua de fração, manipulando e vendo a equivalência.

Com os resultados dessa pesquisa, Lima (2017, pg. 57) considera que “trabalhar com equivalência de frações mostra para o aluno que existem maneiras diferentes e mais simples de se aprender uma disciplina que muitos dizem ser complexa”. Portanto, a autora afirma que os materiais concretos e lúdicos podem e devem ser utilizados para o ensino em sala de aula, e especificamente nessa pesquisa, é defendido o uso da equivalência de fração para o ensino do conceito de fração e operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Considera-se que tanto pesquisador quanto aluno envolveu-se na pesquisa de forma criativa dando o melhor de si, produzindo resultados favoráveis ao uso do material manipulável em sala de aula neste contexto escolhido.

3.5.3.4 – Quarto estudo

O estudo de Melo, Costa e Pontes (2016) descreve a aplicação de uma sequência didática elaborada no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, no Subprojeto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte em Natal/RN. O objetivo principal foi incentivar a aprendizagem do conteúdo de frações de forma lúdica e dinâmica, utilizando o material didático manipulativo denominado Frac-Soma 235. A elaboração de suas atividades foi proposta conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e apoiada em Tendências da Educação Matemática (TEM), em foco, a utilização de materiais didáticos manipuláveis. Sua aplicação ocorreu em uma turma do projeto Mais Educação, composta por alunos de diferentes séries do ensino fundamental com duração de três encontros semanais.

No primeiro encontro ocorreu a construção do material didático manipulável Frac-Soma 235 e indagações sobre o conceito de fração a partir da construção do material. Tais indagações foram feitas através de duas questões diretas e objetivas: “O que você está fazendo com as folhas de EVA?” e “O que é fração?”.

O segundo encontro ocorreu com a retomada do que foi visto no primeiro encontro, através de breve explanação dos conteúdos vistos e do que foi construído. Os alunos puderam socializar quais relações haviam identificado entre as peças e, com isso, construir o conceito de frações equivalentes, mesmo sem perceberem.

Nesse momento, foi apresentado aos alunos como se escrevem as frações correspondentes a algumas peças do material e solicitado a eles um esquema, no caderno, de todas as frações existentes do material construído.

No terceiro encontro ocorreu a experiência de somar e subtrair fração utilizando o material, o que despertou ainda mais o interesse dos alunos para realizar essas “contas” com esse material.

Com o Frac-Soma 235, foram trabalhados o conceito de fração, operações de adição e subtração através do método de frações equivalentes, em que, para a realização das operações os alunos não precisaram usar o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Esse material após ser construído, foi usado por meio da resolução de alguns problemas. Após a aplicação da atividade, os autores aplicaram uma avaliação junto com os alunos envolvidos na sequência didática. Com essa avaliação eles puderam perceber a mudança de visão com relação à Matemática e em especial em relação às frações, bem como interesse e motivação em trabalhar com o material.

Portanto, os resultados do estudo de Melo, Costa e Pontes (2016) apontam que os estudantes da turma obtiveram um desenvolvimento satisfatório diante das avaliações que foram realizadas durante as atividades e, também, demonstraram entusiasmo em realizar uma atividade diferenciada das quais estão acostumados a fazer. Logo, os autores concluíram que quando se utiliza uma sequência didática bem estruturada e com materiais manipulativos que possibilite o aluno obter seus próprios conhecimentos e confrontar os mesmos com situações problemas, dá oportunidade aos alunos de encontrarem novas oportunidades nas aulas de matemática e também de obter novos conhecimentos.

3.5.3.5 – Quinto estudo

Nos estudos de Sá et al (2010), o objetivo foi avaliar os resultados do ensino de adição e subtração de frações desenvolvido por meio de atividades mediadas por uma calculadora virtual para frações. A pesquisa foi realizada em uma turma de 4ª série de uma escola estadual de ensino fundamental e médio, localizada no bairro do Telégrafo, em Belém-Pará, cuja pretensão foi propor uma metodologia de ensino de frações mediada pela utilização de recursos tecnológicos (a máquina de calcular virtual), apresentar e analisar os resultados de sua aplicação em sala de aula.

Com a aplicação do pré-teste – para realizar um diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos sobre as operações de adição e subtração com frações - foi possível ser verificado pelos autores que a maioria dos estudantes não conseguiu resolver corretamente as questões de adição e subtração de frações. Para as análises foram elaboradas quatro atividades de redescoberta, um jogo de baralho sobre adição e subtração de frações com o mesmo denominador e outro envolvendo as duas operações com denominadores iguais e diferentes. Os autores, após análises, afirmam que em todas as questões houve um aumento significativo na porcentagem de acertos no pós-teste, em comparação com o pré-teste, apesar de alguns alunos ainda terem feito certas confusões entre procedimentos de resolução.

3.6 – ENSINO APRENDIZAGEM DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÃO SEGUNDO OS DOCENTES

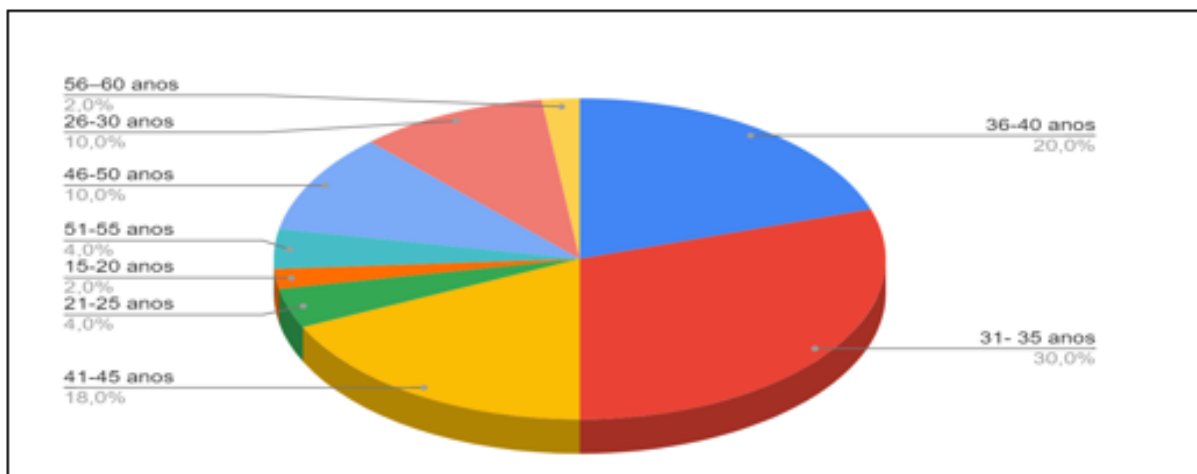
O objetivo deste tópico é apresentar o resultado de uma pesquisa de campo que realizamos no período do mês de novembro ao mês de dezembro de 2020 com professores de Matemática sobre o ensino de frações. Vale apenas ressaltar que essa pesquisa faz parte de nosso estudo investigativo. Tais professores lecionavam ou já tinham lecionado para estudantes do 6º ano do ensino fundamental. O estudo contou com a participação de 50 (cinquenta) professores de Matemática que atuam na rede pública do estado do Pará. O instrumento para coleta das informações foi um questionário composto de 21 perguntas das quais 19 foram fechadas e 2 abertas.

As questões abordaram o processo de ensino de Matemática, a metodologia de ensino desenvolvida em sala de aula para o conteúdo de fração, as dificuldades dos alunos observadas pelo professor em relação ao aprendizado de fração e indagações relacionadas as operações de adição e subtração de fração.

Com os resultados obtidos nessa pesquisa foi possível identificarmos a idade e o sexo dos professores, a sua experiência enquanto docente, a metodologia utilizada para o ensino de matemática, sua percepção sobre o ensino de frações e as dificuldades dos alunos para aprender este conceito e, também, questões voltadas especificamente para o ensino de adição e subtração de fração. As informações coletadas a partir da aplicação deste questionário nos possibilitaram traçar o perfil destes docentes.

Quanto ao sexo, foram 24 homens que corresponde à 48% e 26 mulheres, isto é 52%. Com relação a faixa etária desses professores é possível observar conforme o gráfico abaixo que a maior porcentagem se refere a professores que possuem entre 31 e 45 anos, ou seja, 68% dos entrevistados. Os demais subdividem-se entre 15 a 30 anos e entre 46 a 60 anos. Isso significa, segundo Lima (2014), um quadro no qual as idades são diversificadas, o que proporciona a troca de experiências e sugestões de melhorias para as práticas de ensino de Matemática por meio da inter-relação no momento da construção dos projetos políticos pedagógicos nas escolas.

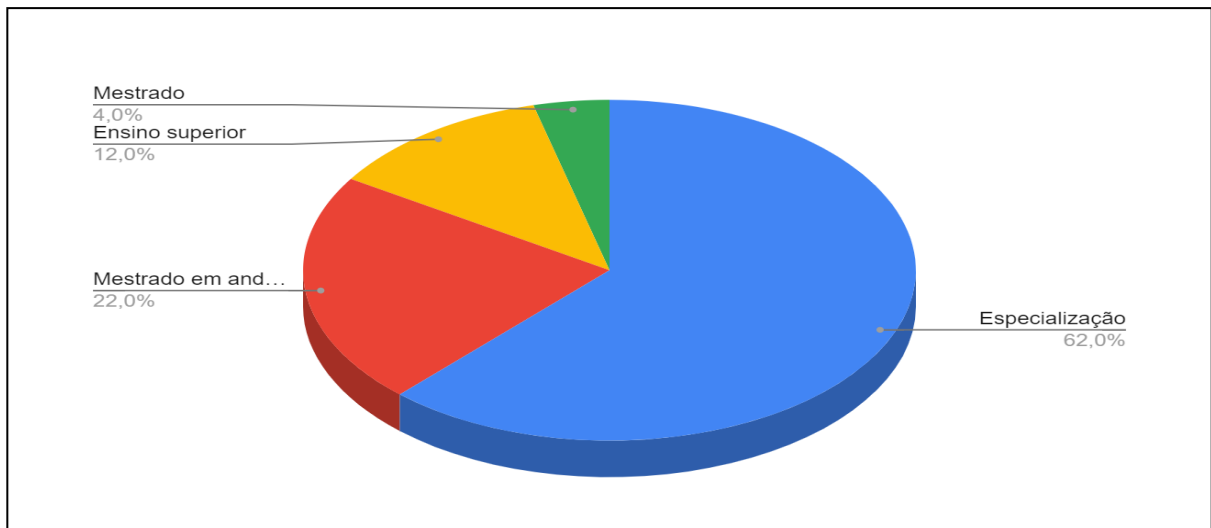
Gráfico 02 - Faixa Etária Dos Docentes



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

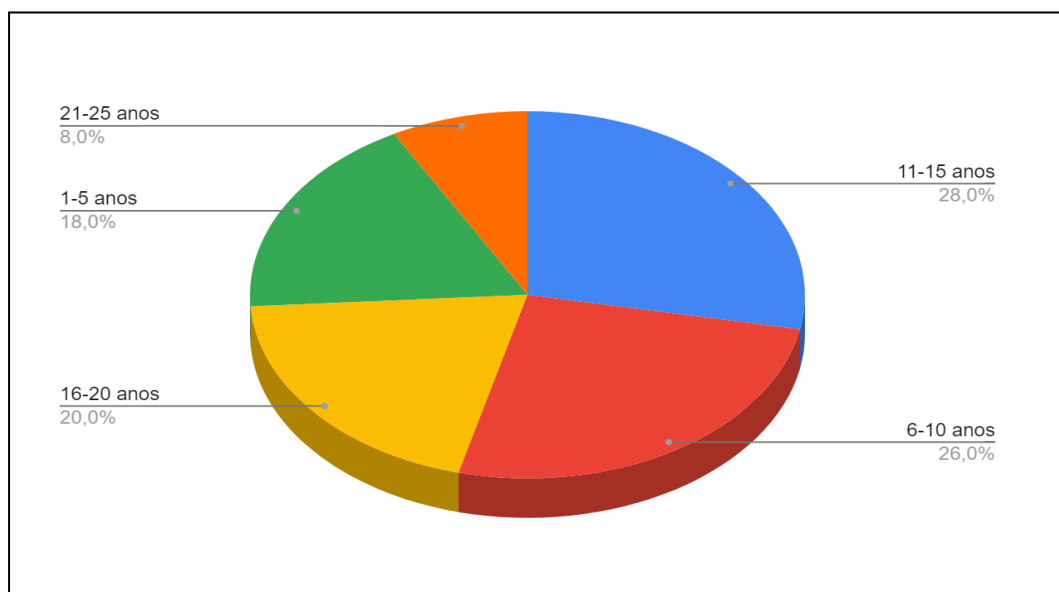
Os resultados encontrados a respeito da formação dos professores mostram que 6 possuem apenas a graduação (12%), 31 já cursaram uma especialização o que totaliza 62%, 11 indicaram está cursando mestrado (22%), e 2 já concluíram o mestrado (4%). Diante desse cenário concordamos com Alves (2018) ao afirmar que

A população consultada apresenta um relevante nível de formação, estando em sua maioria em processo de formação continuada, o que nos permite indicar uma maior apropriação de técnicas e teorias relacionadas ao campo da educação, ao processo de ensino e aprendizagem. (ALVES, 2018, p. 79)

Gráfico 03 – Escolaridade Dos Docentes

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

O gráfico 03 nos mostra os resultados da pesquisa quanto ao tempo de serviço dos professores consultados o que nos possibilitou observar e ter uma noção sobre a experiência desses docentes em sala de aula, pois a maior porcentagem 28% refere-se a professores que possuem atuação de 11 a 15 anos, 26% já atuam entre 6 a 10 anos, 20% entre 16 e 20 anos, 18% lecionam de 1 a 5 anos e 8% possuem de 21 a 25 anos de atuação no magistério.

Gráfico 04 – Tempo de Serviço dos Docentes

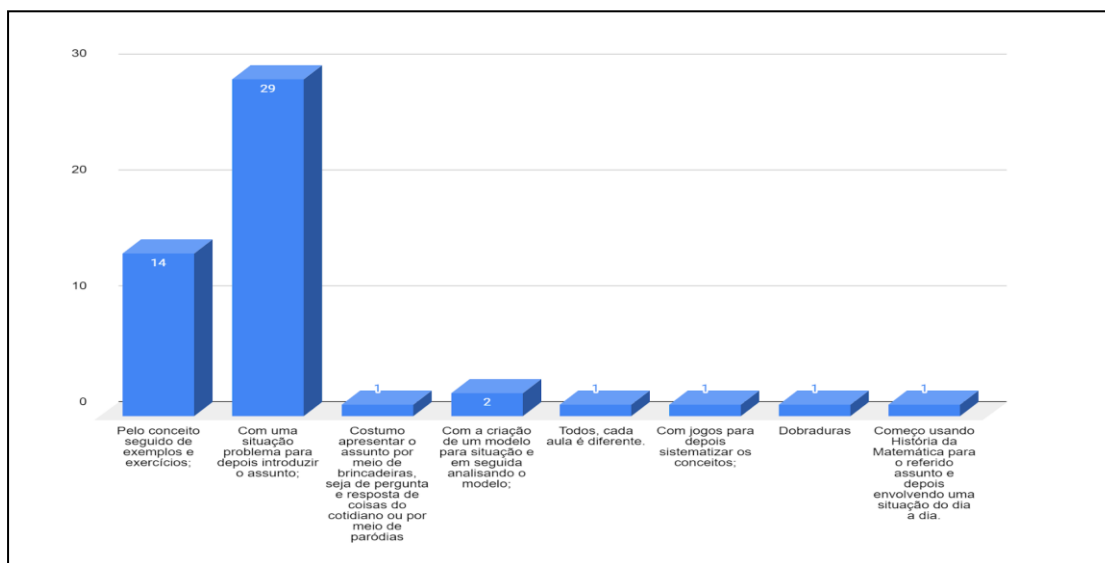
Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

De acordo com Silva (2007 apud LIMA, 2014.), a experiência de ensino desses docentes possibilita uma reflexão mais apurada sobre os entraves e desafios que dificultam o ensino e a aprendizagem da Matemática. Porém, há uma necessidade de que os professores com mais anos de experiência busquem atualizações e formações continuadas para então acompanhar as necessidades acadêmicas dos discentes e o aparato tecnológico advindo do convívio social, uma vez que os docentes são desafiados a proporcionar estratégias de ensino que possam chamar a atenção dos discentes e romper as dificuldades, assim como, tornar a aprendizagem mais significativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978 apud, LIMA, 2014).

Indagamos como esses professores costumam iniciar suas aulas de matemática e como resultado obtemos que 58% utilizam uma situação problema para depois introduzir o assunto conforme é mostrado no gráfico 04. Nota-se com isso, um aspecto positivo quanto a metodologia usada por esses docentes, uma vez que, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada [...] (BRASIL, 1998a, p. 40-41).

Nesse sentido, o uso de situações problemas pela maioria dos professores pesquisados demonstra a experiência docente e o grau de formação que estes possuem. Dos demais professores, 28% costumam iniciar suas aulas pelo conceito seguido de exemplos e exercícios, ou seja, de maneira tradicional; 4% com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo; 2% costuma apresentar o assunto por meio de brincadeiras, seja de pergunta e resposta de situações do cotidiano ou por meio de paródias; 2% utiliza jogos para depois sistematizar os conceitos; 2% inicia sua aula com o uso da História da Matemática e em seguida apresenta uma situação do dia a dia; 2% faz uso de dobraduras; e 2% diz usar todas as formas, pois cada aula é diferente.

Gráfico 05 - Como os docentes costumam iniciar suas aulas de matemática

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

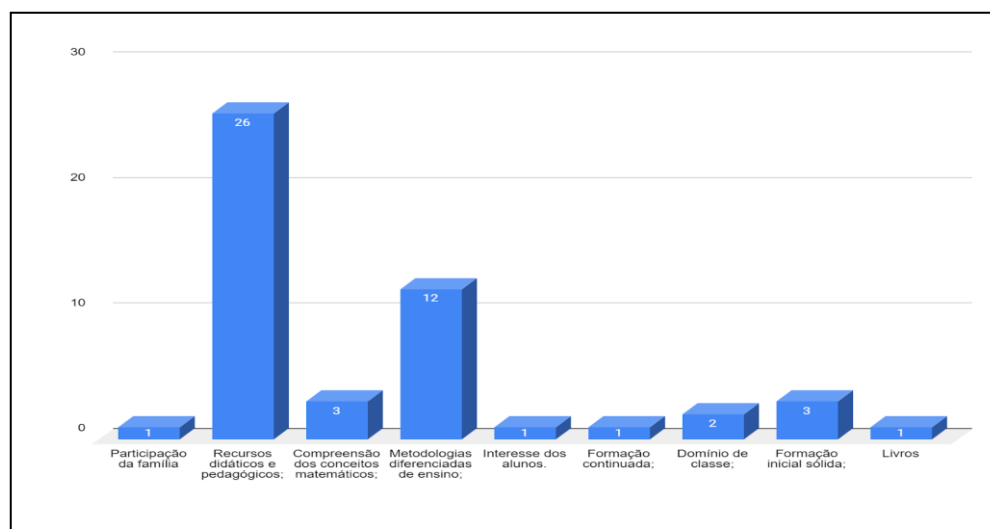
Sobre essas metodologias diferenciadas, Godoy e Santos (2012, p. 270), afirmam que “apesar do fato de que a resolução de problema é o eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem da Matemática no ensino fundamental, outros caminhos são destacados como importantes para se trabalhar a Matemática escolar”. Dentre esses recursos “destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem oferecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução” (BRASIL, 1998a, p. 42 apud, GODOY; SANTOS, 2012, p.270).

Ao perguntar do que os docentes mais sentem falta quando ministram suas aulas de matemática, 52% responderam que sentem falta de recursos didáticos e pedagógicos; 24% de metodologias diferenciadas de ensino; 6% de formação inicial sólida; 6% de compreensão dos conceitos matemáticos; 4% de domínio de classe; 2% da participação da família; 2% de interesse dos alunos; 2% de formação continuada; e 2% de livros.

Tais dificuldades apontadas pelos docentes refletem na qualidade de ensino uma vez que o próprio Plano Nacional de Educação (2014 -2024), estabelece metas para a legalização da qualidade educacional as quais abrange o acesso à recursos didáticos e pedagógicos, metodologias diferenciadas de ensino, formação inicial sólida, formação continuada, etc. Dentre essas metas tem-se:

Incentivar o desenvolvimento, selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio e incentivar práticas pedagógicas inovadoras que assegurem a melhoria do fluxo escolar e a aprendizagem, assegurada a diversidade de métodos e propostas pedagógicas, com preferência para softwares livres e recursos educacionais abertos, bem como o acompanhamento dos resultados nos sistemas de ensino em que forem aplicadas (BRASIL, 2014, p. 60 apud SANTOS, 2018, p. 136)

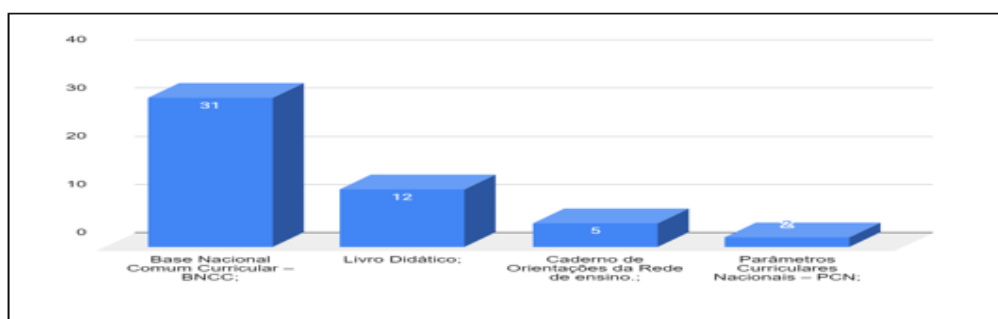
Gráfico 06 - Do Que Os Docentes Mais Sentem Falta Quando Ministram Suas Aulas De Matemática



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Foi indagado aos entrevistados como eles selecionam os conteúdos de matemática, isto é, a partir de qual material ou documento. Vejamos o gráfico 07 a baixo:

Gráfico 07 – A partir De Que Os Docentes Selecionam os conteúdos de Matemática



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

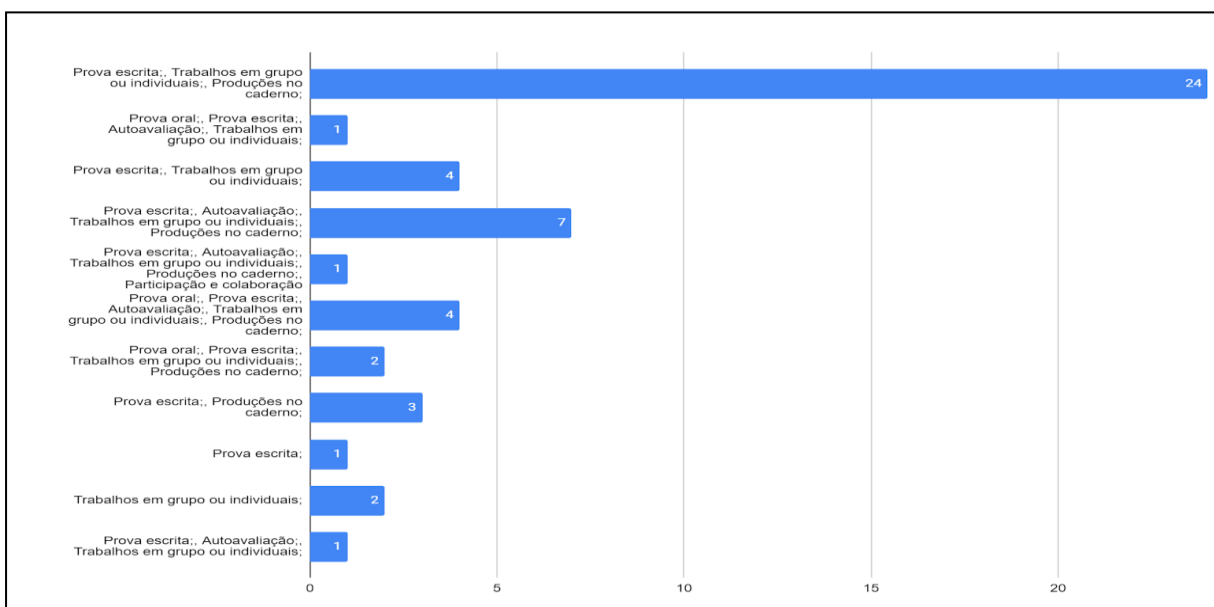
Conforme é mostrado, 62% dos professores, que corresponde ao número de 31 pesquisados, selecionam os conteúdos ministrados a partir da Base Nacional

Comum Curricular (BNCC) o que observamos como positivo pois, segundo Santos (2018),

Os conteúdos apresentados na BNCC são organizados visando as muitas possibilidades de aparelhamento do conhecimento escolar em unidades temáticas, e cada unidade temática contempla um leque (maior ou menor) de objetos de conhecimento. (SANTOS, 2018, p. 134 e 135)

No gráfico 08 é apresentado os resultados quanto as principais formas de avaliação que os professores investigados costumam aplicar/ utilizar.

Gráfico 08 - As Formas De Avaliação Mais Utilizadas Pelos Docentes



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Os professores poderiam marcar mais de uma forma de avaliação, com isso, podemos observar que 48 professores (96%) utilizam prova escrita, 46 docentes (92%) também avaliam por meio de trabalhos em grupo ou individuais e 41 entrevistados (82%) consideram as produções no caderno como forma de avaliar seus alunos. Os demais docentes utilizam além desses métodos, a autoavaliação (7 professores), prova oral (4 professores), participação e colaboração (1 professor).

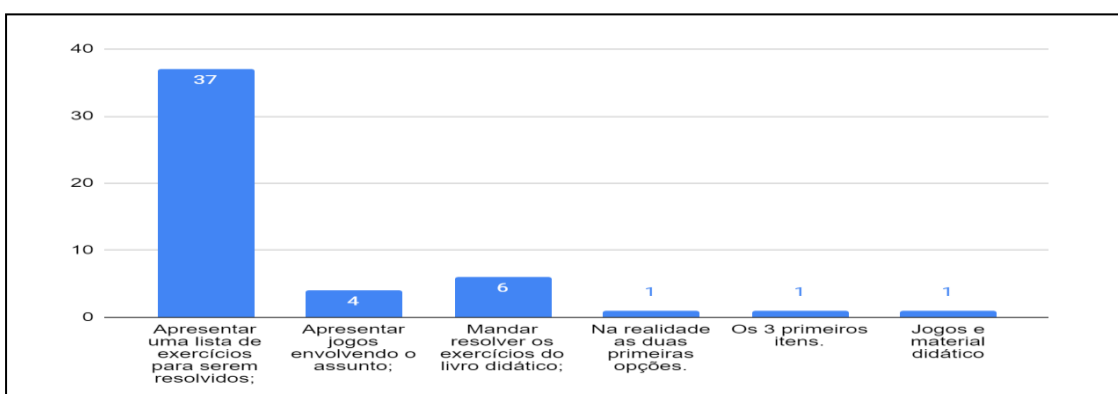
De modo geral, quase 100% dos professores utilizam mais de uma forma de avaliação, com exceção, de 2 professores que avaliam apenas por meio de trabalhos em grupo ou individuais e um professor que tem a prova escrita como única forma de avaliação.

Esses resultados evidenciam o que Moraes e Demartini (2015, p. 200) afirmam em seu artigo intitulado a concepção da avaliação escolar em matemática a partir dos desenhos de alunos, pois segundo eles “as práticas avaliativas da aprendizagem em Matemática são feitas, em geral, através de aplicação de provas escritas e trabalhos (individuais ou em grupo) apenas como um processo de verificação de conhecimento” cujo objetivo é “[...] apurar o domínio das operações fundamentais e o desembaraço no cálculo [...]” (PINTO, 2008, p. 60 apud MORAES; DEMARTINI, 2015, p. 200). Ou seja, dessa forma, acredita-se que

Poucos educadores e educandos tenham consciência de que a Avaliação em Matemática, assim como qualquer outra, é um processo contínuo. A prática pedagógica da Avaliação em Matemática tem tradicionalmente sido centrada nos conhecimentos específicos e na contagem de erros [...] Com isso, ocorre uma prática de avaliação totalmente somativa, na qual só se seleciona os estudantes em função das notas obtidas. (MORAES; DEMARTINI, 2015, p. 200)

Ao investigarmos com os docentes sobre como desenvolviam a fixação do conteúdo ministrado, a maioria expôs a maneira tradicional como a forma mais frequente de fixação, isto é, apresentam uma lista de exercícios para serem resolvidos pelos alunos. Nesse sentido o gráfico 08 apresenta que as principais escolhas estão entre apresentar uma lista de exercícios (74%) e pedir que os alunos resolvam exercícios do livro didático (12%). Os demais, 8% apresentam jogos envolvendo o assunto, 2% apresenta uma lista de exercícios e jogos envolvendo o assunto, 2% além da lista de exercícios e jogos, também manda resolver exercícios do livro didático, e 2% costuma utilizar jogos e material didático.

Gráfico 09 - O que o docente costuma fazer para fixar o conteúdo ministrado

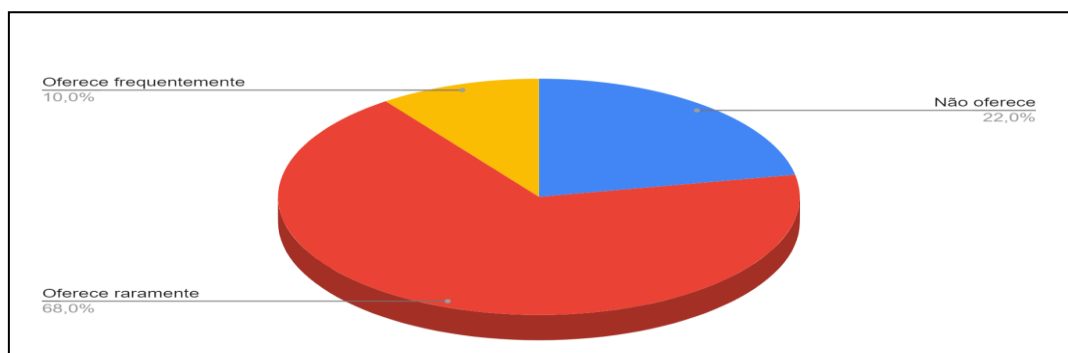


Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Esses dados conforme Alves (2018) demonstram pouca variedade na utilização de recursos didáticos para o desenvolvimento do ensino do conteúdo de Matemática. E ainda, estes resultados, demonstram os únicos recursos didáticos possivelmente disponíveis para os professores das Escolas Públicas do Estado do Pará.

Perguntamos aos entrevistados se a rede de ensino onde atuam oferece formação continuada. Porém, eles responderam, em maioria (68%), que lhes é oferecido raramente; 22% dizem que não lhes é oferecido; e 10% recebem formação continuada com frequência.

Gráfico 10 – Formação continuada oferecida pela rede de ensino



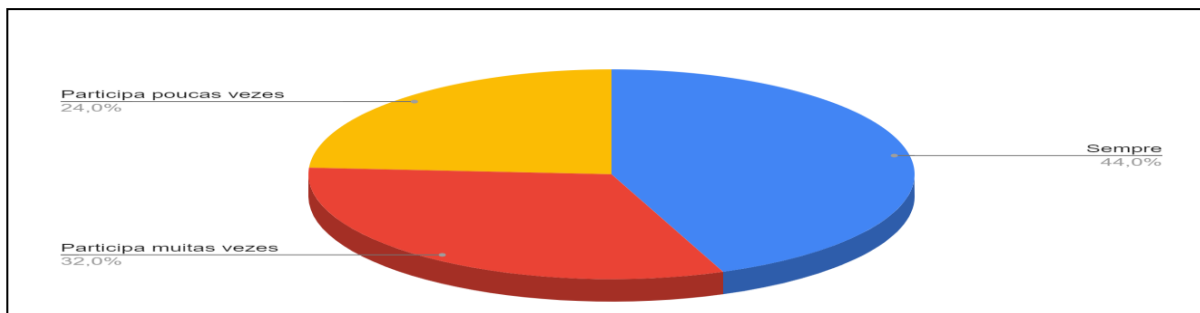
Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Observou-se assim, que a oferta de formação continuada aos professores que trabalham na rede pública de ensino é muito baixa quando deveria ser o contrário, pois,

A formação continuada de professores se faz necessária em razão das limitações da formação inicial. Nesse sentido, teria como principal função, suprir tais lacunas, uma vez que estas repercutem fortemente no trabalho docente. [...] considerada importante pelo fato de o campo educacional ser muito dinâmico, por exigir permanentemente a produção de novos conhecimentos sobre o processo de ensino-aprendizagem e por cobrar dos professores a expansão e o aprimoramento constante de sua base conceitual e de suas habilidades pedagógicas. (DAVIS et al., 2011, p. 829)

Indagamos aos docentes se participam das formações continuadas quando são ofertadas pela rede de ensino onde trabalham ou ainda por outras instituições. 44% participa sempre; 32% responderam que participam muitas vezes; e 24% participa poucas vezes.

Gráfico 11 – Participação do Docente nas Formações Continuidas Quando ofertadas Pela Rede de Ensino

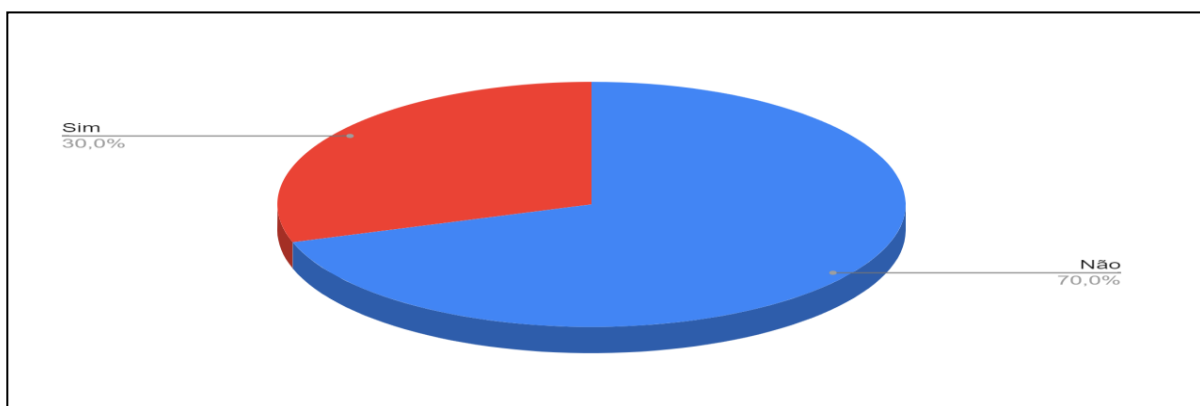


Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Nota-se a partir desses dados uma efetiva participação dos docentes nas poucas formações continuadas que lhe são ofertadas.

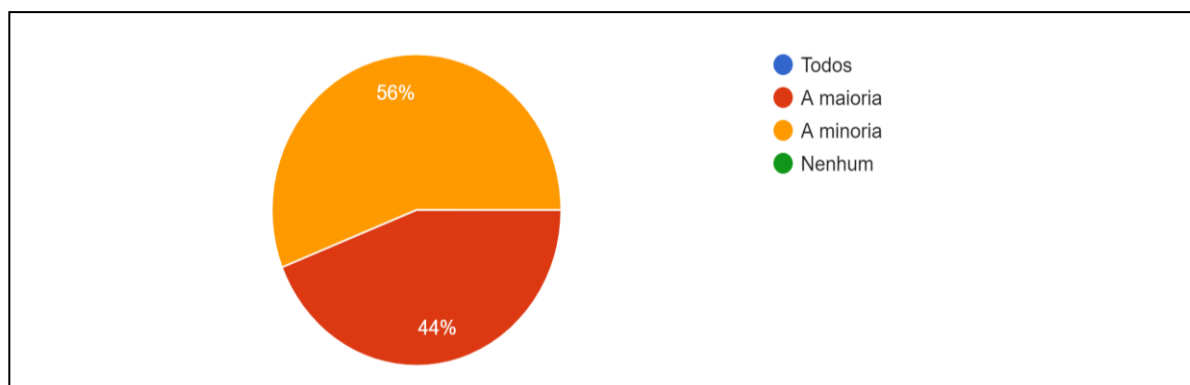
Com relação a dificuldade do ensino de Matemática, a maioria respondeu que não considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada, ou seja, 70% dos entrevistados conforme mostra o gráfico 12. Apenas 30% considera difícil ensinar Matemática.

Gráfico 12 – Se o docente considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada



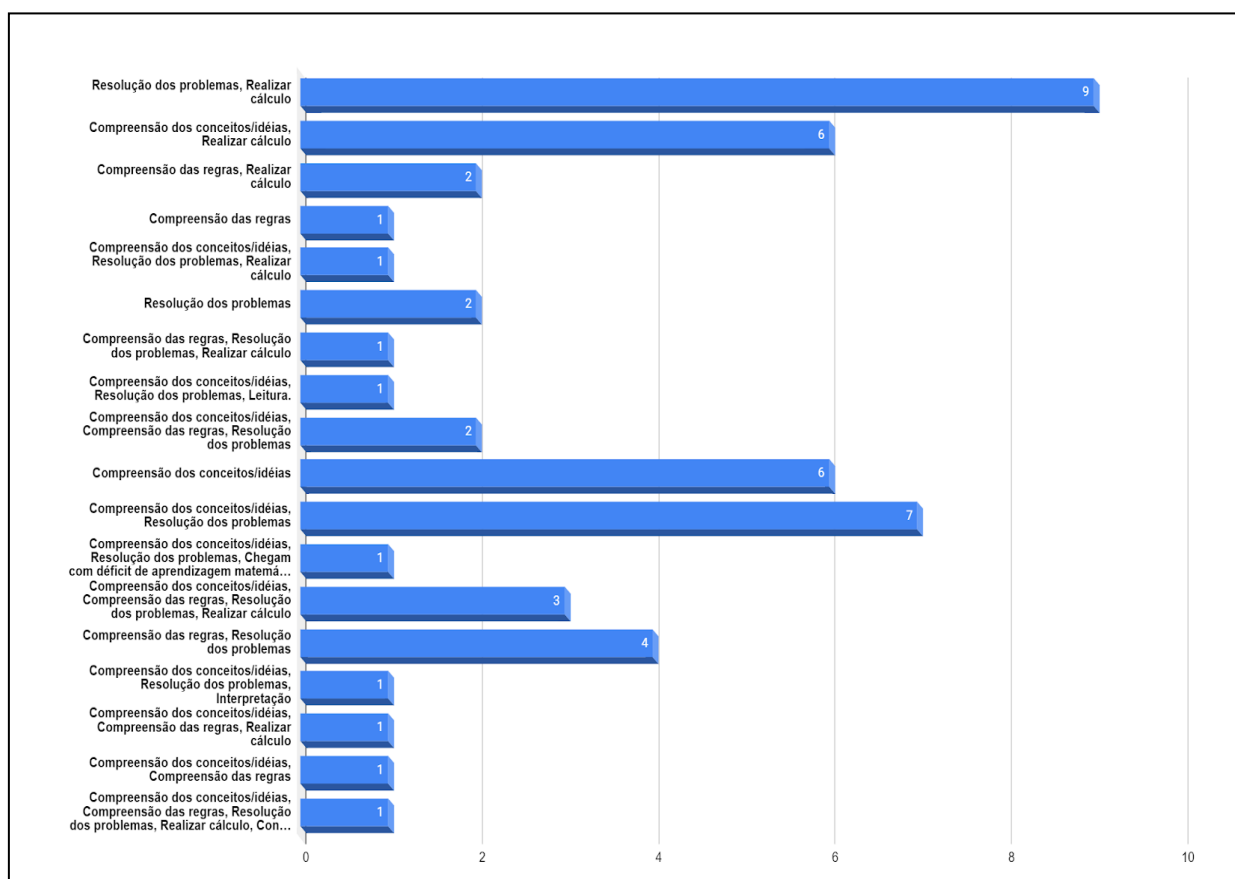
Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Perguntamos aos professores se seus alunos gostam de Matemática. 56% responderam que dentre os seus alunos apenas a minoria gosta de matemática e, por outro lado, 44% dizem que a maioria de seus alunos gosta de Matemática. Portanto, de acordo com o gráfico 13, a maioria dos professores concordam que são poucos os alunos que gostam de Matemática.

Gráfico 13 – Visão docente quanto ao gosto de seus alunos em relação a matemática

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

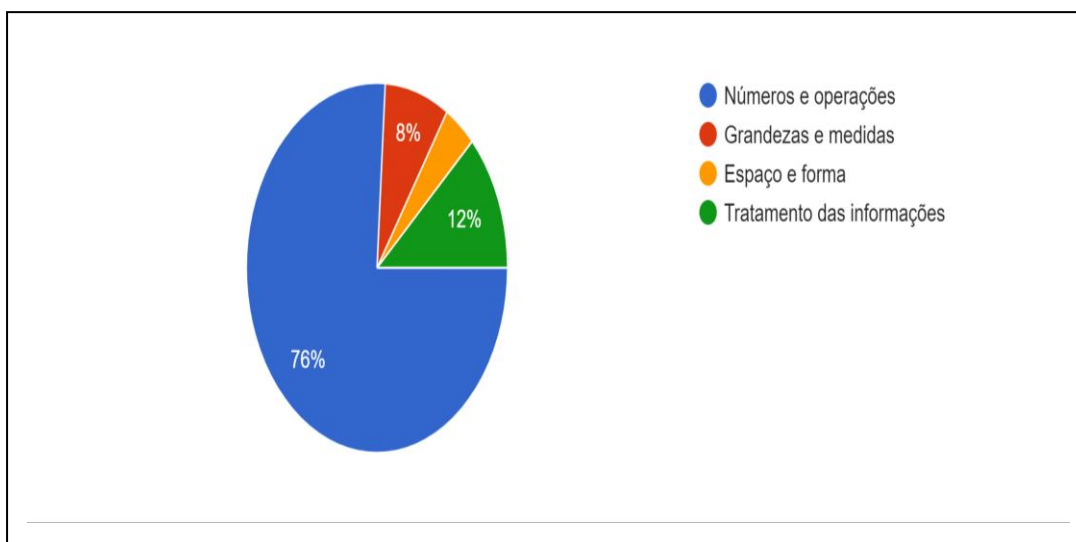
A respeito das maiores dificuldades dos alunos nas aulas de matemática, os docentes destacam a resolução de problemas, realização de cálculos, compreensão dos conceitos/ideias e compreensão das regras. Pois como podemos observar no gráfico 14, todos os docentes citam tais dificuldades.

Gráfico 14 - As maiores dificuldades dos alunos nas aulas de matemática de acordo com os docentes

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Com relação ao bloco de conteúdos da Matemática que os professores consideram mais importantes em suas aulas, destacaram números e operações com 76%. Pedimos para justificar suas respostas e obtivemos dentre outras respostas o seguinte: *“Números e operações é a base fundamental que o aluno deve ter para resolver os demais conteúdos da disciplina de matemática” (P2); “Pois esse assunto é base para os demais que são apresentados posteriormente. Compreender os números e as operações são essenciais” (P5); “Se o estudante dominar números e operações pode facilitar muito o desenvolvimento dos outros conteúdos” (P15).*

Gráfico 15 – O bloco de conteúdos da matemática considerado mais importante pelos docentes



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Buscamos conhecer como os professores avaliam o aprendizado dos estudantes em relação ao assunto de fração, como se dá o ensino desse conteúdo e, principalmente, obter uma visão geral das dificuldades dos alunos por meio das observações realizadas pelos docentes. Para isso, elaboramos dois quadros que demonstram os resultados obtidos.

No quadro 18 temos uma amostra da relação entre os conteúdos que envolvem fração e se o professor costuma ou não ensiná-los em suas aulas. Para essa análise, perguntamos se o docente costuma ensinar sempre, raramente ou não ensina determinado tópico do conteúdo do ensino de Fração.

Quadro 18 – Frequência do ensino dos tópicos do conteúdo de fração pelos docentes

Item	Conteúdo	Costuma ensinar esses assuntos?		
		Ensino Sempre (%)	Ensino Raramente (%)	Não Ensino (%)
01	Conceito de fração	98	0	2
02	Representação de fração	96	2	2
03	Equivalência de frações	90	8	2
04	Comparações de frações	88	10	2
05	Tipo de frações	90	6	4
06	Escrita de frações	94	4	2
07	Leitura de frações	94	4	2
08	Simplificação de frações	96	2	2
09	Adição de frações com mesmo denominador	98	0	2
10	Subtração de frações com mesmo denominador	96	2	2
11	Adição de frações com denominadores diferentes	94	4	2
12	Subtração de frações com denominadores diferentes	94	4	2
13	Potência de fração	74	20	6
14	Resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte	88	8	4
15	Resolução de problemas nos quais se conhece uma parte se deseja conhecer um todo	80	18	2
16	Resolução de problemas em que se conhece uma parte se deseja conhecer outra parte	74	24	2
17	Expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração	68	28	4
18	Problemas que envolvam adição ou subtração com frações	94	4	2

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020).

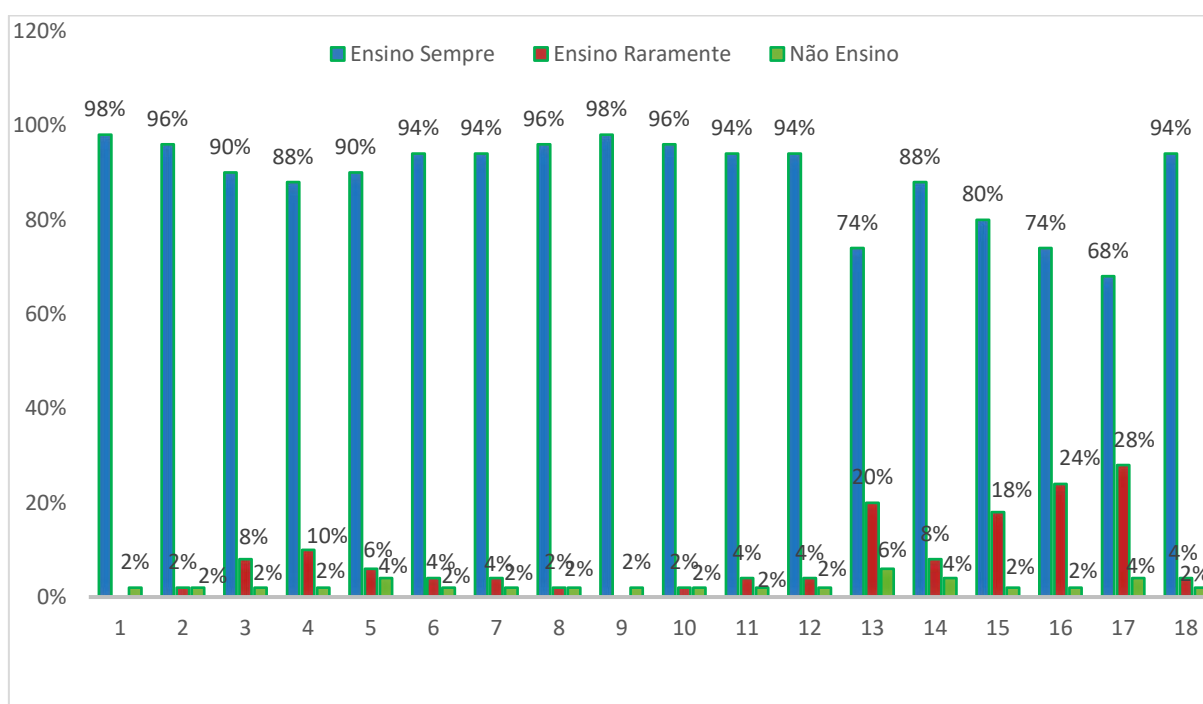
Com os dados mostrados nesse quadro é possível observar que os conteúdos do ensino de fração mais ensinados pelos docentes, são: Conceito de fração, representação de frações, equivalência de frações, tipos de fração, escrita de frações, leitura de frações, simplificação de frações, adição de frações com mesmo denominador, subtração de frações com mesmo denominador, adição de frações com denominadores diferentes, subtração de frações com denominadores diferentes e problemas que envolvam adição ou subtração com frações, todos com alcance de 90%, embora, alguns estejam acima desse percentual. Os assuntos comparação de frações, resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte e resolução de problemas nos quais se conhece uma parte se deseja conhecer um todo apresentam um ensino entre 80% e 88%.

Os conteúdos menos ensinados pelos docentes em suas aulas são: potência de fração (74%), resolução de problemas em que se conhece uma parte se deseja conhecer outra parte (74%), expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração (68%), ou seja, este último item é qual os professores mais costumam

deixar de ensinar. Nesse sentido, concordamos com Alves (2018, p. 90) quando afirma que “ainda que o docente possua uma formação bastante ampla em conhecimentos matemáticos, se faz necessário que o professor de matemática tenha domínio das especificidades do conteúdo de Fração”. Dessa maneira, Cunha (2007 apud ALVES, 2018, p. 90) explicita que “os saberes dos professores aprendidos durante a formação inicial (saberes das disciplinas e saberes da formação profissional) irão ser reformulados e se reconstruindo no dia-a-dia da sala de aula”.

O Gráfico 16 mostra os dados apresentados acima sobre qual a frequência que os docentes costumam ensinar os tópicos que fazem parte do assunto de fração.

Gráfico 16 - Frequência do ensino dos tópicos do conteúdo de fração pelos docentes



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Diante do que foi exposto pelos docentes notamos que há uma necessidade de se trabalhar o ensino de frações envolvendo potências, resoluções de problemas e expressões algébricas.

Em sequência, apresentamos as opiniões dos docentes quanto ao grau de dificuldades para os alunos aprenderem os tópicos do conteúdo de fração. Para isso montamos uma tabela com os mesmos tópicos da tabela acima para melhor descrever os dados coletados. Vejamos:

Quadro 19 – Opinião dos docentes em relação ao grau de dificuldade dos alunos

Item	Conteúdo	Grau de dificuldade para os alunos aprenderem			
		Muito fácil %	Fácil %	Difícil %	Muito Difícil %
01	Conceito de fração	34	56	10	0
02	Representação de fração	22	68	10	0
03	Equivalência de frações	10	46	42	2
04	Comparações de frações	6	42	46	6
05	Tipo de frações	14	70	16	0
06	Escrita de frações	24	68	4	4
07	Leitura de frações	26	68	6	0
08	Simplificação de frações	10	46	40	4
09	Adição de frações com mesmo denominador	20	70	10	0
10	Subtração de frações com mesmo denominador	20	68	12	0
11	Adição de frações com denominadores diferentes	6	12	66	16
12	Subtração de frações com denominadores diferentes	2	14	68	16
13	Potência de fração	4	44	42	10
14	Resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte	4	16	68	12
15	Resolução de problemas nos quais se conhece uma parte se deseja conhecer um todo	4	14	70	12
16	Resolução de problemas em que se conhece uma parte se deseja conhecer outra parte	4	12	68	16
17	Expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração	4	10	68	18
18	Problemas que envolvam adição ou subtração com frações	2	14	68	16

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Conforme o Quadro 19, acerca do primeiro item que trata o conceito de fração, os professores fornecem sua opinião sobre o grau de dificuldade dos discentes em relação aos conhecimentos desse assunto, pois, 34% consideram muito fácil, 56% acham que é fácil, e 10% acreditam ser um conteúdo difícil.

No que diz respeito às representações de frações, os docentes declararam que este conteúdo é: 22% muito fácil, 68% fácil e 10% difícil. Para o conteúdo de equivalência de frações as opiniões foram: 46% afirmaram ser fácil, 42% consideram difícil, apenas 10% acreditam ser muito fácil e somente 2% classificaram como muito difícil.

As porcentagens com relação ao conteúdo de comparação de frações são: 42% dos docentes avaliaram este conteúdo como fácil; 46% como difícil, 6% como muito fácil e 6% como muito difícil. Referente aos tipos de fração, como mostra o quadro 02, 70% dos professores afirmaram que o grau de dificuldade à aprendizagem deste

conteúdo é considerado fácil, 14% muito fácil e somente 16% afirmaram ser um conteúdo difícil.

Sobre a escrita de fração a maioria dos docentes (68%) consideram um assunto de nível fácil, 24% muito fácil, 4% difícil e 4% muito difícil. O mesmo acontece em relação leitura de fração, 68% fácil, 26% muito fácil e 6% difícil. O conteúdo de simplificação de frações foi considerado pelos docentes como: 10% muito fácil, 46% fácil, 40% difícil e 4% muito difícil.

Em relação à operação de adição de frações com o mesmo denominador, 70% dos docentes avaliaram como um conteúdo fácil, 20% como muito fácil e 10% como difícil. Porém, para adição de frações com denominadores diferentes, 66% avaliou como difícil, 16% como muito difícil, 12% como fácil e 6% como muito fácil.

Quanto à operação de subtração de Frações com o mesmo denominador, 68% dos docentes apontaram que este conteúdo é considerado fácil; 20% como muito fácil e 12% como difícil. Por outro lado, em relação à operação de subtração com denominadores diferentes, os resultados dos docentes são: 68% difícil; 16% muito difícil; 14% fácil; e 2% muito fácil.

Investigamos a opinião dos docentes sobre a resolução de três tipos de problemas que envolvem fração. O primeiro foi resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte. Como resposta para essa indagação obtivemos que 68% dos professores consultados declararam ser um conteúdo difícil; 12% disseram ser muito difícil; 16% proferiu ser fácil e 4% disse ser muito fácil.

Na segunda situação que foi a resolução de problemas nos quais se conhece uma parte e deseja conhecer um todo, 70% dos docentes disseram ser um conteúdo difícil; 14% fácil; 12% muito difícil e 4% muito difícil. E para o terceiro tipo que foi resolução de problemas em que se conhece uma parte e deseja conhecer outra parte, os professores declaram ser difícil (68%), muito difícil (16%), fácil (12%) e muito difícil (4%).

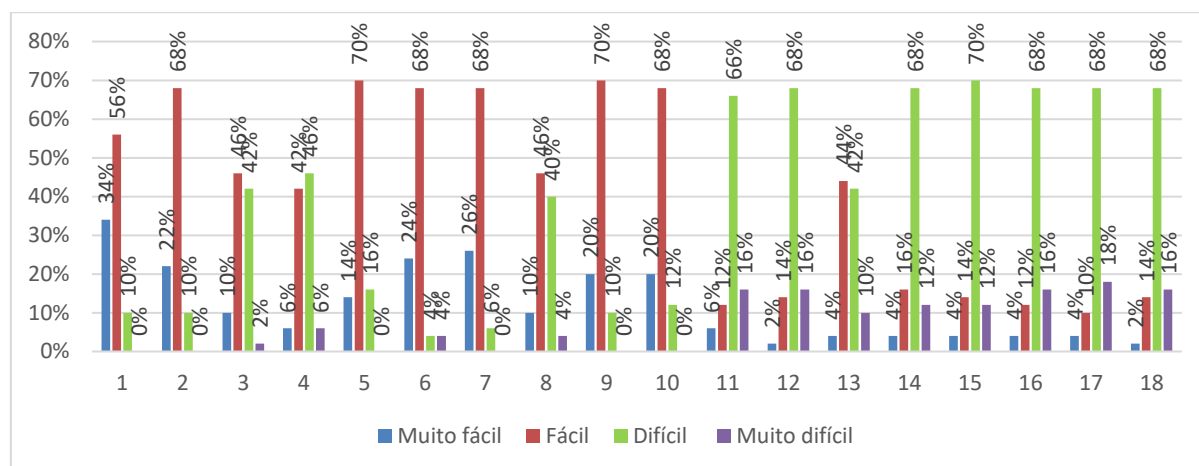
Para as expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração, os docentes julgaram um nível de dificuldade: difícil (68%); muito difícil (18%); fácil (10%) e muito fácil (4%). Para problemas que envolvam adição ou subtração de fração os docentes apontaram como: 68% difícil; 16% muito difícil; 14% fácil e apenas 2% dos docentes declararam ser um conteúdo considerado muito fácil.

Ao observarmos esses dados concordamos com Alves (2018) quando afirma que

Apesar de alguns conteúdos relacionados à Fração serem considerados difíceis, ou até mesmo nem serem abordados pelos docentes, devem ser mais valorizados em sala de aula para que o aluno, tendo o contato com esses tópicos possa ter oportunidades de compreendê-los para a promoção da aprendizagem, caso contrário, estará sendo cerceado seu acesso a esse conhecimento tão fundamental para a sua vida escolar e cotidiana. (ALVES, 2018, p. 94)

Nesse sentido, avaliamos ser necessário que se trabalhe o ensino de frações com maior atenção às atividades que envolvam adição e subtração de frações com denominadores diferentes, potência de fração, a resolução de problemas que envolva o conceito de parte-todo e expressões numéricas nas quais necessitem de conhecimento sobre adição e subtração de fração. Enfatizamos assim, “a importância da formação docente, tanto inicial como continuada, trazendo os saberes necessários para atuação em sala de aula, para sanar ou amenizar estas dificuldades encontradas nos professores e alunos”. (ALVES, 2018, p. 94)

Gráfico 17 - Opinião dos docentes em relação ao grau de dificuldade dos alunos



Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Na última parte do questionário, tivemos como objetivo obter informações dos docentes sobre o ensino e aprendizado, especificamente, do assunto adição e subtração de fração. Assim, perguntamos se na opinião deles existe algum tipo de dificuldade quanto ao ensino de adição e subtração de frações.

De acordo com o que é demonstrado no quadro 18 abaixo, 50% dos professores relataram que a maior dificuldade em se desenvolver o ensino de adição

e subtração de fração, consiste em trabalhar com denominadores diferentes e, conseqüentemente, no cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). Isso pode ser evidenciado na fala do P10, um dos docentes pesquisados:

Creio que a maior dificuldade é de compreender o conceito de múltiplo comum, para a resolução de questões desse tipo, pois como eles estão acostumados a somar e subtrair de forma direta, a compreensão de que precisa-se tirar o MMC para resolver questões de fração com denominadores diferentes leva um pouco mais de tempo.

Outro professor P9, também relata que “a maior dificuldade é a adição e subtração de frações com denominadores diferentes, a maioria dos alunos não lembram do MMC”.

Foram relatadas outras dificuldades além dessas como: Dificuldade de efetuar cálculos (2,5%); A falta de materiais manipuláveis na escola (5%); Falta de interesse do aluno (7,5%); Necessidade de mais números de aulas para desenvolver esse assunto (2,5%); Compreensão do conceito parte – todo (2,5%); Falta de material didático (5%); Dificuldade na leitura e interpretação (2,5%); Dificuldade nas quatro operações (7,5%); e 10% dos docentes julgaram não haver nenhuma dificuldade no ensino desse assunto.

Quadro 20 – Opinião dos docentes sobre as dificuldades quanto ao ensino de adição e subtração de fração

Item	Dificuldades Quanto ao Ensino de Adição e Subtração de Fração	Docentes
01	Dificuldade de efetuar cálculos.	2,5%
02	Compreensão de denominador e numerador.	5%
03	A falta de materiais manipuláveis na escola.	5%
04	Trabalhar com denominadores diferente e cálculo de MMC.	50%
05	Falta de interesse do aluno.	7,5%
06	Necessidade de mais números de aulas para desenvolver esse assunto.	2,5%
07	Compreensão do conceito parte – todo.	2,5%
08	Falta de material didático.	5%
09	Dificuldade na leitura e interpretação.	2,5%
10	Dificuldade nas quatro operações.	7,5%
11	Nenhuma dificuldade.	10%

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Questionamos se os docentes apontavam alguma dificuldade apresentada pelos estudantes no processo de aprendizado de adição e subtração de fração. Sugerimos algumas alternativas para os mesmos apontarem e poderiam apontar

mais de uma dificuldade. Como podemos observar no quadro 20, os docentes foram quase unânimes (43 professores dos 50 pesquisados) em apontar que os estudantes apresentam dificuldades no cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, para transformar tais frações com denominadores iguais.

Dificuldade para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) foi a segunda dificuldade mais destacada (37 professores). Em seguida temos que 30 docentes também apontaram a dificuldade na leitura e interpretação de situação problema. 22 professores citaram, além de outras, a dificuldade de aplicar o conhecimento do conteúdo em diferentes situações. E somente um professor acredita não existir nenhuma dificuldade de aprendizado do aluno em relação a esse assunto.

Quadro 21 - Dificuldade apresentada pelos estudantes no processo de aprendizado de adição e subtração de fração segundo a opinião dos docentes

Item	Dificuldade apresentada pelos estudantes no processo de aprendizado de adição e subtração de fração segundo a opinião dos professores	Docentes (nº)
01	Dificuldade de aplicar o conhecimento do conteúdo em diferentes situações	22
02	No cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, apresentam dificuldade para transformar tais frações com denominadores iguais	43
03	Dificuldade na leitura e interpretação de situação problema	30
04	Dificuldade para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.)	37
05	Os alunos não apresentam nenhuma dificuldade	1

Fonte: Pesquisa de Campo (Dezembro/2020)

Essas dificuldades são constatadas também nos estudos de Santos e Fonseca (2019) ao afirmar que

[...] identificamos que os alunos possuíam dificuldades nas operações que envolviam frações, tanto por falta de entendimento do conceito, quanto por barreiras na resolução das quatro operações básicas, pois eles ficavam a todo o momento perguntando como resolver a operação de soma com denominadores diferentes entre outras inquietações. Além disso, percebemos nas respostas que alguns alunos não calcularam as operações corretamente. (SANTOS; FONSECA, 2019, p. 58)

Observamos, assim, que as mesmas dificuldades que os professores apresentam em ensinar o assunto de adição e subtração de fração é, também, apresentada pelos alunos quanto ao seu aprendizado, principalmente, quando se trata de trabalhar com denominadores diferentes e assim, o cálculo de mmc. Em relação a dificuldade na leitura e interpretação de situação problema, essa foi evidenciada também na pesquisa de Santos e Fonseca (2019, p.58), uma vez que, “os alunos

apresentaram dificuldade na leitura e interpretação da situação problema, pois durante a aplicação do exercício ficaram pedindo para que fosse repetido o enunciado diversas vezes”. E se tratando da dificuldade para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.), os mesmos autores afirmaram; “constatamos que os erros mais frequentes estavam relacionados a simplificação, multiplicação e determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.)”. (SANTOS; FONSECA, 2019, p. 59)

Por fim, perguntamos aos docentes que sugestões dariam relativas a elaboração de um material didático específico para o ensino de adição e subtração de fração. Muitos dos professores pesquisados suggestionaram a criação de materiais manipuláveis e jogos, como podemos observar na fala de um professor, o qual, chamamos de P26: *“materiais manipuláveis, jogos e algo que esteja destinado principalmente a esclarecer essa dúvida nas frações com denominadores diferentes, o MMC”*. O professor P40 declara: *“acredito que um software, ou aplicativo, que ajude os alunos através das tecnologias seria interessante”*. Já o professor P44 diz: *“trabalhar de forma interdisciplinar como o uso da música (teoria musical)”*. Na visão do professor P20 é necessário a elaboração de um material *“que seja inovador e atrativo para o aluno. Que leve ele a descobrir sozinho o método de resolução”*.

No decorrer desta pesquisa, procuramos investigar com os docentes como se dá o ensino de adição e subtração de fração na rede pública do Estado do Pará, assim como, as dificuldades apresentadas pelos estudantes no aprendizado desse assunto segundo a opinião dos docentes. Diante das respostas obtidas por meio do questionário, podemos concluir que, apesar dos professores possuírem grande experiência na docência, e assim, conhecerem outros métodos de ensino de frações, raramente os exploram em sala de aula, visto que, a maioria inicia suas aulas com uma situação problema para depois introduzir o assunto e, muitos ainda costumam iniciar suas aulas pelo conceito seguido de exemplos e exercícios.

Foi possível perceber que os docentes conhecem outros métodos para ensinar frações, mas não os adotam argumentando, que a realidade cotidiana da escola pública é o principal impedimento para o emprego desses métodos e com isso utilizam-se de lista de exercícios para serem resolvidos como forma de fixação do conteúdo, prova escrita, trabalhos em grupos ou individuais e produções no caderno como principais formas de avaliação.

Outro ponto a ser destacado diz respeito a pouca, ou quase nenhuma, oferta de formação continuada por parte da rede de ensino em que trabalham. Isso é

considerado um fator negativo, uma vez que, o professor precisa estar em constante atualização para então poder proporcionar um ensino com metodologias diferentes das utilizadas no ensino tradicional.

E quanto as dificuldades de ensino do conteúdo de adição e subtração de fração, é possível afirmar que estão relacionadas em trabalhar com denominadores diferentes e, conseqüentemente, no cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). Ficou evidenciado que, assim como os docentes, os alunos apresentam muitas dificuldades relacionadas a esse conteúdo, principalmente, o cálculo de m.m.c de soma e subtração com denominadores diferentes e, conseqüentemente, o cálculo das quatro operações básicas, e leitura e interpretação de situações problemas que envolvem adição e subtração de fração.

4. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Tomando como base as análises prévias, apresentamos nesta seção, a concepção e análise a priori, que corresponde a segunda parte da Engenharia Didática. Nela iremos discorrer sobre as teorias que fundamentam a Sequência Didática elaborada para o ensino de adição e subtração de frações e em seguida apresentaremos cada uma das atividades que compõe a Sequência Didática, assim como, os testes elaborados para verificar o desempenho dos sujeitos da pesquisa em adição e subtração de frações.

4.1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O termo Sequência Didática (SD) segundo Araújo (2013 apud CABRAL, 2017) tem relação entre linguagem, interação e sociedade e é adotada como um conjunto de atividades escolares que são organizadas de maneira sistemática em torno de um gênero textual oral ou escrito. É caracterizada por Zabala (2014) como um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”, ou seja, significa um planejamento sistematizado e minucioso em relação aos objetivos almejados em determinado ensino.

Desse modo, para a elaboração da Sequência Didática desta pesquisa, utilizamos a metodologia de ensino definida por Sá (2019) como “Ensino por Atividade” a qual foi ampliada pelo autor para “Ensino por Atividades Experimentais” (SÁ, 2020). Em ambos estudos, o autor concebe encaminhamentos para elaboração, aplicação e análise de atividades em uma SD. Além disso, para nortear a construção da SD, nos apoiamos, também, na metodologia Resolução de Problemas e na Teoria de Registro de Representação Semiótica.

4.1.1 - Ensino de Matemática por Atividades Experimentais

O Ensino de Matemática por atividades Experimentais segundo Sá (2019) teve suas origens na proposta do ensino por descoberta que, no Brasil, na década de 80, foi concebido por Hennig (1986) como uma metodologia de ensino com três técnicas distintas que foram: redescoberta, problema e projeto. A técnica de redescoberta

influenciou trabalhos como o de Zaro e Hillebrand (1990), Sá (1988), Fossa (2000) e Mendes (2001).

O Ensino por Atividades, conforme especifica Sá (2019,) possui as características de:

- 1) Ser diretivo
- 2) Ter compromisso com o conteúdo
- 3) Ter compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo
- 4) Ser estruturado
- 5) Ser sequencial
- 6) Não necessariamente ser associado à resolução de problemas
- 7) Levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
- 8) Institucionalizar os resultados ao final da atividade
- 9) Não dispensar a participação do professor
- 10) Ser adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos
- 11) Proporcionar iteratividade entre estudantes e professor

Baseados no exposto acima, o Ensino por Atividades constituiu-se na metodologia base para a elaboração de nossa SD, uma vez que, a busca por meios que levem o estudante a desenvolver a autonomia durante o aprendizado está entre nossos objetivos de pesquisa e, segundo Sá (2009, p. 14), o Ensino por Atividades “é uma prática metodológica que proporciona ao aluno construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios”.

Sendo assim, podemos elaborar atividades do tipo: conceituação ou redescoberta. Na atividade do tipo conceituação, o objetivo é levar o estudante a formalizar o conceito de determinado objeto matemático. E com a atividade de redescoberta o objetivo é que o aluno descubra relações ou propriedade relacionadas a um determinado objeto ou operações matemáticas, ou seja, explore o objeto que antecede a demonstração do resultado (SÁ, 2019, pg. 17).

Sá (2019) explica que para planejar tais atividades, é importante haver os momentos de: determinação (ou seja, nesse momento o professor seleciona a definição que pretende apresentar aos estudantes), construção do objetivo, elaboração do procedimento, seleção do material, elaboração do espaço de registro,

previsão de observações, previsão de institucionalização, elaboração do roteiro e verificação.

E, para concretizar a experimentação de Sequência Didática com Atividades Experimentais, tanto do tipo conceitual quanto de redescoberta, Sá (2019; 2020) afirma que são necessários seis momentos didáticos, a saber: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização. No quadro a seguir apresentamos as ações que devem ocorrer em cada momento.

Quadro 22 – Momentos de uma aula de matemática por meio de Atividade Experimental de conceituação ou de redescoberta segundo Sá (2019; 2020).

Momentos	Ações
Organização	- Organizar a turma de forma espontânea, preferencialmente, em equipes com no máximo 4 estudantes e no mínimo 2, podendo também ocorrer de forma individual, o que não é recomendado pois assim não estimula a troca de ideias que é fundamental para o processo de aprendizagem. - O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e que planejou com cuidado as tarefas da Atividade Experimental e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias a organização da turma.
Apresentação	Durante o momento da apresentação da Atividade Experimental: - O professor deve distribuir todo material necessário, juntamente com o roteiro que os estudantes seguirão para a realização das tarefas da Atividade. - O roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro o que vai depender das condições estruturais da escola. No caso de uma atividade mais longa, recomenda-se um roteiro impresso para economizar tempo. - O material utilizado nas tarefas da atividade deverá ser organizado em kits para facilitar a distribuição do material, evitando assim, desperdício de tempo.
Execução	- Nesse momento ocorre a experimentação, o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa as equipes e as deixa trabalharem livremente; supervisiona o desenvolvimento das ações e auxilia nas dúvidas quando solicitado ou perceber a ocorrência de dificuldade por parte das equipes para executar a realização da atividade. Tais orientações devem ser claras e precisas para poder permitir a continuação da atividade. - Espera-se que cada equipe realize os procedimentos estabelecidos como tarefa, seguindo as instruções previstas no roteiro da Atividade Experimental, sem conversas paralelas ou atenção para assuntos que não sejam da atividade e, também, devem evitar deixar o grupo ou ficar visitando outros grupos. - Se ocorrer algum questionamento ou dúvida durante a execução do procedimento que sejam ocasionados por falhas nas orientações contidas no roteiro ou da confecção do material para ser utilizado na atividade, o professor deve socializar imediatamente com a turma o problema e apresentar uma solução que contorne o ocorrido e permita a continuação da atividade.
Registro	- É realizado a sistematização das informações na pesquisa científica. - O esperado é que cada equipe realize os registros das informações obtidas durante a execução nos espaços destinados no roteiro. - O docente deve supervisionar o desenvolvimento das ações e auxiliar dirimindo as eventuais dúvidas que possam ocorrer durante o processo.

Análise	• Espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações. • O docente deve auxiliar a equipe por meio da formulação de questões que auxiliem os membros da mesma a perceberem uma relação válida, caso ocorra de alguma equipe apresentar dificuldade para perceber uma relação válida a partir das informações registradas. • É realizado a análise dos resultados de uma pesquisa científica. E a conclusão desse momento deve ocorrer com a elaboração de uma conclusão feita pela equipe.
Institucionalização	• Será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. • O docente, independente do formato das conclusões elaboradas pelas equipes, deve solicitar que um representante de cada equipe vá ao quadro e registre a conclusão elaborada pela sua equipe. • Após analisar as conclusões registradas o docente deve perguntar as equipes quais das conclusões apresentadas permitem a alguém que não participou da atividade entender a relação estabelecida. Este momento é oportuno para que o docente faça considerações sobre as características de uma conclusão. Finalmente o docente pode elaborar junto com a turma uma conclusão que permita a alguém que não participou da Atividade Experimental entender relação estabelecida.

Fonte: Sá (2019)

A análise do quadro nos permite dizer que todos os momentos devem ser pensados e desenvolvidos com foco nos estudantes, de modo que, eles sejam levados a formalizar/redescobrir uma ideia/conceito sobre o objeto matemático em questão.

Portanto, nesse contexto, nossa SD foi elaborada baseada no Ensino por Atividades Experimentais juntamente com a Resolução de Problemas, pois como afirma Sá (2019, p. 52)

Como o processo de ensino, aprendizagem e avaliação de um conteúdo sempre exige um momento destinado a prática do conhecimento adquirido para aprofundar ou mesmo internalizar o novo conhecimento então não podemos pensar que seja suficiente realizar atividades de conceituação ou de redescoberta para garantir a aprendizagem do conteúdo. Para garantir o aprofundamento do assunto estudado é inevitável momentos de resolução de questões preferencialmente numa combinação das interpretações de objetivo e processo.

Nesse prisma, acreditamos que a SD a partir do Ensino por Atividades Experimentais juntamente com a Resolução de Problemas nos trarão resultados satisfatórios sobre o ensino aprendizagem de adição e subtração de fração em relação ao ensino tradicional. A seguir discorreremos acerca da Resolução de Problemas como metodologia de ensino nas aulas de matemática, como pode ser utilizado e suas etapas de desenvolvimento.

4.1.2 - Resolução de Problemas

A resolução de problemas em aulas de matemática é uma metodologia de ensino considerada promissora pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) pois, possibilita o ensino e aprendizagem dos objetos de conhecimento matemático de maneira diferenciada em sala de aula. Segundo Mendonça (1999, p. 16-17 apud SÁ, 2006), a expressão resolução de problemas pode ser interpretada de três maneiras que são: como um objetivo, como um processo e como um ponto de partida. Sobre isso temos que:

Como objetivo, a resolução de problemas significa que se ensina matemática para resolver problemas; Como processo, a resolução de problemas significa olhar para o desempenho/ transformação dos alunos como resolvedores de problemas. Analisam-se as estratégias dos alunos; Como ponto de partida os problemas são usados como recurso pedagógico para iniciar o processo de construção de um dado conhecimento específico. (MENDONÇA, 1999 apud SÁ, 2006, p. 61)

Nesse sentido, nos escritos de Sá (2009, p. 10) sob embasamento teórico de Mendonça (1999) encontramos que

- Ao pensar resolução de problema como objetivo, implica ser suficiente no processo de ensino da matemática, expor a teoria e em seguida propor problemas mais ou menos engenhosos. Essa abordagem é definida por Schroeder e Lester (1989 apud Martins 2020, p. 05-06) como Ensinar Matemática para Resolução de Problemas. Nela “o professor se preocupa em habilitar o estudante a utilizar os conhecimentos adquiridos em sala de aula na resolução de problemas, bem como, na habilidade de transferir aquilo que já aprendeu em um problema para outros”.
- Na concepção de processo, o desenvolvimento do ensino está centrado na proposição de estratégias de solução.
- Já como ponto de partida, o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem, culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor. Martins (2020, p. 06) afirma que nessa abordagem os estudantes constroem seu próprio conhecimento e buscam a solução a partir de conhecimentos já adquiridos anteriormente, e os

professores, tem o papel de mediadores e responsáveis por conduzir esse processo.

Dessa forma, um problema pode ser utilizado de três maneiras diferentes, a depender do que se deseja alcançar. Contudo, é importante destacar que por meio da resolução de problemas os estudantes exercitam as suas mais diversas capacidades intelectuais para encontrar a resposta como também mobilizam estratégias das mais diversas naturezas, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc.

Quanto as etapas de resolução de um problema, Sá (2006) afirma que de acordo com Polya (1977) as fases a serem seguidas na resolução de um problema são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na fase da compreensão do problema, o resolvidor deve procurar entender o enunciado e as condições apresentadas no problema e principalmente ter clareza da qual é a pergunta a ser respondida [...]. Na fase de estabelecimento de um plano, o resolvidor deve procurar uma conexão entre os dados do problema e a pergunta que se deseja responder, a fim de um caminho que leva a solução. Na fase da execução do plano, o resolvidor deve colocar em prática o seu plano para encontrar a solução do problema, verificando cada passo dado. Na fase do retrospecto, o resolvidor deve verificar se a solução obtida satisfaz as condições e a pergunta do problema. (SÁ, 2006, p. 62)

Nesse sentido, para que o estudante consiga resolver os problemas, ele precisa:

- Primeiramente, compreender o problema, ou seja, entender o que está sendo tratado no problema e buscar saber o que deve ser descoberto. Para isso, é fundamental a realização de leitura atenciosa do problema.
- Elaborar um plano ou estratégia de resolução, isto é, pensar em quais recursos poderão ser utilizados para resolver o problema de modo que alcance a solução almejada.
- Após compreender o problema e desenvolver um plano para resolução, é necessário executar tal plano, ou seja, colocar em ação o processo de resolução que fora pensado.

- E, finalmente, após finalizar a resolução, verifica-se a solução obtida e analisa-se os argumentos utilizados.

Assim sendo, o uso de resolução de problemas em sala de aula proporciona ao aluno desenvolver algum tipo de estratégia. E com isso, a Matemática passa a ser mais intuitiva e mais experimental o que proporciona uma apropriação compreensiva do conteúdo estudado.

4.1.3 - Teoria dos Registros de Representação Semiótica

De acordo com os escritos de Cabral e Costa (2019), a teoria dos registros de representação semiótica foi idealizada pelo psicólogo Raymond Duval e foi publicada em 1988 através de artigos relacionados a psicologia cognitiva, os quais fundamentaram a obra de 1995 intitulada *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et appren-tissages intellectuels*. Sobre os dados biográficos, Raymond Duval é pesquisador francês, licenciado em Filosofia e Psicologia, professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Sua teoria possui papel importante nas investigações da Educação Matemática no Brasil, pois tem sido difundida pelos estudiosos em suas pesquisas educacionais e assim contribuído para a área da Didática da Matemática.

Duval (2003 apud CABRAL e COSTA, 2019) defende que uma abordagem cognitiva elaborada a partir das representações semióticas possibilita perceber as dificuldades dos alunos em relação a compreensão da Matemática, bem como a origem dessas dificuldades. Pois para ele, o aluno por meio do funcionamento cognitivo é capaz de compreender, efetuar e controlar os diferentes processos matemáticos que lhes são apresentados.

Para Duval (2010 apud CABRAL e COSTA, 2019), o sucesso da aprendizagem de um conceito matemático está associado aos registros de representação semiótica empregados a esse objeto matemático, já que, tais registros possibilitam o aluno compreender as diferentes formas que esse objeto matemático possui e, assim, escolher uma de suas representações para resolver uma determinada situação.

Nesse sentido, ele destaca duas atividades cognitivas existentes capazes de distinguir um objeto matemático dentre os variados sistemas semiótico: “a semiósis e a noésis. A semiósis refere-se à produção de representações semióticas, enquanto a

noésis está relacionada aos processos cognitivos ligados à apreensão conceitual dos objetos representados” (DUVAL, 2009 apud CABRAL e COSTA, 2019).

Esses registros de representação são classificados por Duval (2003) citado por CABRAL e COSTA (2019) em: registro de representação discursiva, nos quais são apresentados a linguagem natural e os sistemas de escritas (número, algébrico e simbólico) e registro de representação não discursiva, são aqueles que permitem informações características desta representação, como os gráficos cartesianos. E, também, enfatiza que a compreensão das atividades cognitivas de tratamento e conversão são importantes para que se entenda como se dá a obtenção de um conceito por meio da mobilização e coordenação dos registros de representação. Portanto, a TRRS está relacionada com a representação, tratamento e conversão de conceitos matemáticos.

Conforme afirma Duval (1993) traduzido por Moretti (2012, pg. 271-272), um sistema semiótico passa a ser um registro de representação se esse sistema permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose que são:

1. **A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado.** Esta atividade consiste na utilização de mecanismos para formar uma representação do que se deseja transmitir. Tais mecanismos podem ser: enunciar uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc. Ou seja, a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição nas quais deve-se respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...). A função destas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos.
2. **O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada.** O tratamento é responsável por transformações internas a um mesmo registro. Como por exemplo, o cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas. Ou seja, dependendo do tipo de registro existem regras de tratamento próprio

a cada um que variam em relação a sua natureza e número. Para cada registro apresentam-se regras de derivação, de coerência temática, associativas de contiguidade e de similitude.

3. **A conversão de uma representação.** É um tipo de transformação em que os mesmos objetos matemáticos são conservados modificando-se apenas o registro. Como por exemplo, a ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural; a tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua; a descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística.

Ainda sobre a conversão, Santana et al (2013) afirma que ela “é a principal atividade cognitiva, pois ela é um passo fundamental no trabalho com as representações semióticas”. (SANTANA et al, 2013, p. 02).

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza, então, apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39)

Nesse sentido, ao considerar o ponto de vista cognitivo, Duval (2003, p. 16), afirma que, a atividade de conversão “aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

Além das atividades de conversão, Duval (2004 apud MENDES; SILVA, 2013, p. 06) defende a conceitualização como fator importante para o desenvolvimento de tais atividades. Por meio da conceitualização, é possível haver compreensão de que apesar dos registros serem diferentes, estes, “referem-se ao mesmo objeto matemático e podem se complementar no sentido de que um registro pode expressar características ou propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza em outro registro”. Sendo assim, a conceitualização implica coordenação de registros de representação.

Com relação aos registros de representação semiótica e a construção de uma sequência didática tem-se a perspectiva de Zabala (1998 apud CABRAL e COSTA, 2019), que segundo a mesma, a aplicação da sequência didática inclui três fases

reflexivas: o planejamento, a aplicação e a avaliação. Desta forma, Cabral (2017 apud CABRAL e COSTA, 2019), também contribui para a aplicação de sequências didáticas ao destacar que os conjuntos de intervenções, realizadas passo a passo pelo professor, formam “elos de conhecimento”, isto é, gera uma aprendizagem significativa, pois existe uma interligação entre os conceitos apreendidos.

Assim sendo, na seção seguinte, apresentaremos a Sequência Didática elaborada para o ensino desse objeto matemático subsidiada pela teoria de Raymond Duval, a qual considera que o aluno tem a possibilidade de apreender um conteúdo matemático por meio de suas múltiplas representações em Registros de Representações diferentes.

4.2 - APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES PARA A ABORDAGEM DO ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Nesta seção apresentaremos a sequência didática proposta para o conceito e definição de adição e subtração de frações, assim como, a análise a priori de cada atividade que compõe a mesma, ou seja, como se espera que elas ocorram durante o experimento, as previsões das observações, as ações no momento da aplicação e formas para contornar eventuais dificuldades.

A sequência didática é composta de 4 grupos de atividades e cada grupo contém questões que envolvem as operações de adição e subtração de frações cujas resoluções serão direcionadas para serem desenvolvidas no modo geométrico, ou seja, com desenho geométrico.

Ao final de cada grupo de atividades, propomos que o aluno descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos e, relate suas conclusões acerca do que aprendeu em cada atividade. Por meio das repostas obtidas iremos validar o nível de compreensão do aluno para a construção da regra para resolver as operações com as frações para cada grupo de atividade.

A proposta metodológica defendida nessa pesquisa consiste em fazer com que os alunos realizem atividades de adição e subtração de frações sem o cálculo do M.M.C. e, desenvolvam o conceito de resolução dessas operações utilizando apenas papel, caneta ou lápis.

A seguir, apresentaremos as questões que fazem parte dos grupos de cada atividade e a análise a priori para este momento da sequência didática.

Quadro 23 – Atividade para adição de frações com denominadores iguais

Atividade 01
Título: Adição de frações com denominadores iguais Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a adição de duas frações com o mesmo denominador Título: Adição de frações com denominadores iguais Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel. Procedimento: Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.
1. A mãe de Antônio possui uma barra de chocolate e quer distribuir entre ele e seu amigo João de modo que ela também possa comer. Sendo assim, ela deu $\frac{2}{6}$ para Antônio e $\frac{2}{6}$ para João. Que fração da barra de chocolate foi comida por João e Antônio ao todo?
2. Um jardim ocupa $\frac{1}{6}$ de um terreno e uma piscina ocupa $\frac{3}{6}$ desse mesmo terreno. Qual é a fração que representa a parte ocupada pelo jardim e piscina?
3. Uma área de terra pertence a dois agricultores: agricultor A e o agricultor B. O agricultor A possui $\frac{5}{10}$ desse terreno e o agricultor B possui $\frac{2}{10}$. Qual a fração da área de terra os dois agricultores possuem ao todo?
4. Em um jardim $\frac{2}{7}$ das flores são vermelhas e $\frac{3}{7}$ amarelas. Qual a fração que representa as flores vermelhas e amarelas juntas?
5. Para agradar os filhos, dona Benta fez uma torta de cenoura que dividiu em dez pedaços iguais. Para Maria ela deu $\frac{4}{10}$ da torta, para Antônio deu $\frac{3}{10}$ e guardou o restante. Que fração da torta dona Benta deu para seus dois filhos ao todo?
6. Uma pizza foi repartida entre Luíza e João. Luíza comeu $\frac{4}{12}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{12}$. Que fração da pizza eles comeram no total?

7. Dona Nazaré recebeu seu dinheiro ao final do mês. Ela entrou em uma loja e gastou $\frac{3}{5}$ do seu dinheiro em roupas e $\frac{1}{5}$ em sapatos. Que fração representa o total que ela gastou nessa loja?

8. Seu Manoel possui uma roça. Nela ele planta mandioca e milho. Para plantar mandioca ele ocupa $\frac{4}{9}$ da área total, enquanto que $\frac{3}{9}$ da área total são destinados ao cultivo de milho. Qual é a fração da área total da roça que está ocupada com mandioca e milho?

9. Em um dia de promoção Bernardo foi a uma loja e comprou uma televisão e um fogão. Ele retirou de sua carteira $\frac{5}{8}$ do dinheiro que tinha para pagar a televisão e $\frac{3}{8}$ para pagar o fogão. Qual foi a fração total que Bernardo retirou de seu dinheiro para pagar os dois objetos?

10. Sabendo que um anel custaria $\frac{2}{10}$ do dinheiro que tinha, Marta resolveu comprar para presentear sua mãe no dia do seu aniversário. Porém, ao entrar na loja, ela também gostou de um colar que custaria $\frac{7}{10}$ de seu dinheiro. Que fração do dinheiro Marta gastou ao comprar o anel e o colar?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Conclusão

Análise a priori: com relação a esta atividade, acreditamos que os alunos terão de início dificuldades para compreender o método de ensino e perceber a estratégia de resolução pelo fato de ser a primeira a ser desenvolvida na sequência didática através do desenho geométrico. Porém, acreditamos que o fato de ser uma novidade como ferramenta de ensino desse objeto matemático, os alunos serão motivados e atentarão para as orientações iniciais do professor e posteriormente para a interação da dupla visando encontrar a resolução para as questões propostas. Todavia, espera-se que com o desenvolvimento das questões, os alunos possam perceber a regra para as operações de adição de frações com denominadores iguais e resolvam as últimas questões de forma mais rápida.

Quanto às questões finais, que indagam o aluno sobre como resolver às questões sem usar o desenho; e, qual a conclusão sobre os procedimentos de resolução, supomos que ainda por ser a primeira atividade da sequência didática os alunos apresentem dificuldades em expressar na forma textual a sua compreensão da regra e de como resolver a questão sem o uso do desenho. Os textos que devem ser escritos para estas perguntas nesta atividade devem conter pouca formalidade e o uso do linguajar jovial e coloquial dos alunos, de acordo com a sua faixa etária e o hábito da linguagem cotidiana, também influenciada pelo uso das redes sociais e da internet.

Para o desenvolvimento dessa atividade, sem as atividades de aprofundamento, estimamos um tempo de 45 minutos, ou seja, uma aula. Com as atividades de aprofundamento, estimamos que será necessária mais uma aula de 45 minutos, o que totalizará num tempo de 90 minutos.

Quadro 24 – Previsão de observações da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores iguais

Item	Observação prevista	Validade da observação
1	Soma os números de cima e repete o mesmo número que aparece embaixo.	Válida e desejada
2	O resultado só muda em cima, embaixo continua o mesmo valor.	Válida e não desejada
3	Soma os números de cima e soma os números de baixo.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Quadro 25 – Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores iguais

item	Conclusão prevista	Validade da conclusão
1	Soma-se os numeradores e conserva o mesmo denominador.	Válida e desejada
2	Conserva-se o mesmo denominador.	Válida e não desejada
3	Soma-se numerador com numerador e denominador com denominador.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Com a finalidade de aprofundar o conhecimento desenvolvido durante a sequência didática trazemos uma atividade com questões envolvendo tais conhecimentos.

Quadro 26 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 1

1. Para efetuar uma adição de fração com denominadores iguais, qual regra podemos utilizar? a) Adicionamos os numeradores e, também, adicionamos os denominadores. b) Adicionamos apenas os numeradores e multiplicamos os denominadores. c) Adicionamos os numeradores e conservamos o mesmo denominador. d) Adicionamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.														
2. Determine o resultado das operações a seguir: <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>QUESTÕES</th><th>RESULTADOS</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td><td>$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$</td><td></td></tr> <tr> <td>b</td><td>$\frac{1}{8} + \frac{4}{8}$</td><td></td></tr> <tr> <td>c</td><td>$\frac{2}{11} + \frac{1}{11}$</td><td></td></tr> </tbody> </table>				QUESTÕES	RESULTADOS	a	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$		b	$\frac{1}{8} + \frac{4}{8}$		c	$\frac{2}{11} + \frac{1}{11}$	
	QUESTÕES	RESULTADOS												
a	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$													
b	$\frac{1}{8} + \frac{4}{8}$													
c	$\frac{2}{11} + \frac{1}{11}$													

d	$\frac{5}{15} + \frac{2}{15}$	
e	$\frac{5}{20} + \frac{4}{20}$	

3. Na eleição para representante de classe das turmas de 7º Ano, com três candidatos em cada turma, todos os alunos votaram. A eleição finalizou com o seguinte resultado:

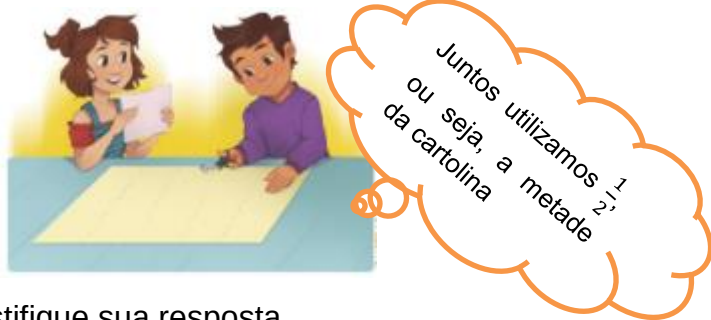
Turma 701	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato	Turma 702	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato
Marcela	$\frac{2}{6}$	João	$\frac{2}{9}$
Luiza	$\frac{1}{6}$	Marcelo	$\frac{4}{9}$
Tiago	$\frac{3}{6}$	Ruth	$\frac{3}{9}$

A partir desses dados, responda:

- Qual é a fração que representa os votos obtidos por Marcela e Tiago juntos na turma 701?
 - Marcelo e Ruth obtiveram um total de votos juntos na 702, que fração representa essa quantidade?
4. No Colégio Militar de Belém, há uma banda de música da qual os alunos do 6º ano ao 3º ano podem participar. Eles aprendem a tocar um instrumento musical e fazem várias apresentações nos eventos que ocorrem no colégio. Na tabela a seguir, temos os cinco instrumentos mais executados e as respectivas frações que eles representam em relação ao total de instrumentos da banda:

INSTRUMENTO	FRAÇÃO
Clarinete	$\frac{4}{23}$
Flauta doce	$\frac{5}{23}$
Flauta transversal	$\frac{5}{46}$
Sax	$\frac{7}{23}$
Trompete	$\frac{7}{46}$

Com base nos dados da tabela acima, responda:

- a) Qual é a fração resultante ao juntar os instrumentos de sax, flauta doce e clarinete?
- b) Trompete e flauta transversal, juntos, representam que fração?
5. Em um colégio, $\frac{1}{5}$ dos alunos da Turma A e $\frac{2}{5}$ dos alunos da Turma B foram infectados com a Covid-19. Sabe-se que o número de alunos da Turma A é igual ao número de alunos da Turma B. Em relação ao total de alunos das Turmas A e B, os infectados com a Covid-19 representam que fração?
6. Para fazer um trabalho escolar, Gustavo usou $\frac{3}{10}$ de uma folha de cartolina, enquanto sua irmã usou $\frac{2}{10}$ da mesma folha para fazer seu trabalho. Avalie se o que eles falam está correto.
- 

Juntos utilizamos $\frac{1}{2}$, ou seja, a metade da cartolina
- Justifique sua resposta.
7. Elabore uma situação que envolva adição de fração com denominadores iguais. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Fonte: Pesquisa (2022)

Quadro 27 – Atividade para subtração de frações com denominadores iguais

Atividade 02
Título: Subtração de frações com denominadores iguais Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a subtração de duas frações com o mesmo denominador Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel. Procedimento: Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.

1. Lucas gosta de tomar açaí. Hoje ele tomou $\frac{4}{7}$ de litro de açaí no almoço e $\frac{2}{7}$ de litro durante o jantar. Que fração de litro de açaí ele toma a mais durante o almoço do que no jantar?
2. Júlia possui $\frac{9}{10}$ de figurinhas para colocar em seu álbum enquanto que Joana não possui nenhuma. Se Júlia doar $\frac{4}{10}$ de suas figurinhas para Joana, qual será sua fração de figurinhas restante?
3. Paulo e João saíram para comer uma pizza. Paulo comeu $\frac{8}{12}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{12}$. Qual fração da pizza Paulo comeu a mais que João?
4. Cristina tem $\frac{10}{15}$ de pacote de biscoito. Fátima também tem $\frac{7}{15}$ desse pacote de biscoito. Qual a fração de pacote de biscoito que Cristina possui a mais que Fátima?
5. Uma pizza de 8 pedaços foi dividida entre Luíza e João. Luíza comeu $\frac{5}{8}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{8}$. Que fração da pizza João comeu a menos que Luíza?
6. Uma loja possui muitos funcionários. $\frac{9}{10}$ são mulheres e $\frac{7}{10}$ são homens. Qual a fração que representa a diferença entre a quantidade de mulheres e homens que trabalham nessa loja?
7. Seu Manoel possui uma roça. Nela ele planta mandioca e milho. Para plantar mandioca ele ocupa $\frac{4}{9}$ da área total, enquanto que $\frac{3}{9}$ são destinados ao cultivo de milho. Qual fração do terreno ele precisa cultivar para que a área do cultivo de milho seja igual a área cultivada com mandioca?
8. A fração $\frac{11}{13}$ representa a área total do sítio de seu Raimundo que pode ser cultivada. Sabendo que ele quer separar $\frac{5}{13}$ para plantar arroz, qual fração da área de cultivo sobrar?
9. Ronaldo foi ao supermercado e levou $\frac{8}{10}$ do que havia recebido do seu mês de salário. Ele comprou tudo o que precisava e gastou $\frac{5}{10}$. Que fração sobrou do dinheiro que Ronaldo havia levado?
10. Um tênis custa $\frac{4}{9}$ do dinheiro que Carlos possui e uma sandália custa $\frac{2}{9}$ desse dinheiro. Que fração representa o valor que o tênis possui a mais em relação a sandália?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Conclusão

Fonte: Pesquisa (2022)

Análise a priori: para esta atividade que envolve questões relacionadas a operação de subtração de frações com denominadores iguais, esperamos que os alunos já estejam familiarizados com a metodologia e o uso do desenho geométrico. Por esse motivo, acreditamos que essas dificuldades serão sanadas logo por volta das questões 4 e 5, e assim, os alunos já percebiam a regra ou a forma de resolver a questão sem o uso do desenho.

Acreditamos, ainda, que uma maior quantidade de alunos resolva com sucesso as 10 questões-problemas propostas na sequência didática e consigam compreender e construir a regra para a solução deste tipo de questão.

Para o desenvolvimento dessa atividade, sem as atividades de aprofundamento, estimamos também um tempo de 45 minutos. E com as atividades

de aprofundamento, estimamos que serão necessárias mais uma aula de 45 minutos, o que totalizará num tempo de 90 minutos.

Quadro 28 – Previsão de observações da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores iguais

Item	Observação prevista	Validade da observação
1	Subtrai o número de cima da primeira fração pelo número de cima da segunda fração e repete o mesmo número que está embaixo.	Válida e desejada
2	O número de baixo continua o mesmo.	Válida e não desejada
3	Subtrai o número de cima da primeira fração pelo número de cima da segunda fração e faz o mesmo com os números de baixo.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Quadro 29 – Previsão de conclusões da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores iguais

Item	Conclusão prevista	Validade da conclusão
1	Subtrai o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda fração e conserva o mesmo denominador.	Válida e desejada
2	Não subtrai os números de baixo.	Válida e não desejada
3	Subtrai o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda fração e, também, subtrai o denominador da primeira fração com denominador da segunda fração.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Para aprofundar o conhecimento desenvolvido durante a aplicação da sequência didática propomos uma atividade com questões envolvendo tais conhecimentos.

Quadro 30 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 2

1. Ao subtrair frações com denominadores iguais, qual regra pode ser utilizada?

- a) Subtrai-se o numerador da primeira pelo numerador da segunda fração e, conserva o denominador.
- b) Subtraímos os numeradores e subtraímos os denominadores.
- c) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.
- d) Subtraímos os numeradores e, multiplicamos os denominadores.

2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$	
b	$\frac{6}{7} - \frac{1}{7}$	
c	$\frac{9}{10} - \frac{6}{10}$	
d	$\frac{10}{11} - \frac{5}{11}$	
e	$\frac{5}{8} - \frac{4}{8}$	

3. Na eleição para representante de classe das turmas de 7º Ano, com três candidatos em cada turma, todos os alunos votaram. A eleição finalizou com o seguinte resultado:

Turma 701	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato	Turma 702	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato
Marcela	$\frac{2}{6}$	João	$\frac{2}{9}$
Luiza	$\frac{1}{6}$	Marcelo	$\frac{4}{9}$
Tiago	$\frac{3}{6}$	Ruth	$\frac{3}{9}$

A partir desses dados, responda:

- a) Qual a diferença de votos entre Tiago e Luíza na turma 701?

b) Marcelo obteve que fração de votos a mais que João na turma 702?
4. Na garagem de um prédio, há automóveis, motos e bicicletas, no total de 120 veículos. Desse total, $\frac{3}{10}$ são motos, $\frac{4}{10}$ são bicicletas, e os demais são automóveis. Do número total de veículos dessa garagem, os automóveis correspondem à qual fração?
5. Elabore uma situação que envolva subtração de fração com denominadores iguais. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Fonte: Pesquisa (2022)

Quadro 31 – Atividade para adição de frações com denominadores diferentes

Atividade 03
Título: Adição de frações com denominadores diferentes Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a adição de duas frações com denominadores diferentes Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel. Procedimento: Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.
1. Uma escola dispõe apenas de um campo de futebol para as aulas de Educação Física. No momento de recreação ao final da aula uma parte dos alunos queria jogar futebol e o restante vôlei. Se a divisão do campo foi $\frac{1}{2}$ do campo para futebol e $\frac{1}{4}$ do campo para vôlei, que fração total foi ocupada pelo futebol e vôlei juntos?
2. Numa fazenda em Tailândia, $\frac{1}{2}$ da área total foi destinada para a plantação de milho, enquanto que $\frac{1}{3}$ da área total foi destinada ao cultivo de frutas diversas. Qual é a fração da área total da fazenda que está ocupada com a cultura do milho e frutas?

3. Em uma empresa os funcionários poderiam escolher entre três cores para a confecção do uniforme. $\frac{1}{5}$ escolheu a cor verde, $\frac{1}{3}$ preferiu a cor azul e os demais optaram pela cor laranja. Qual a fração dos funcionários que votou pelas cores verde e azul?
4. Ana Maria está lendo um livro. Em um dia, ela leu $\frac{1}{2}$ do livro e, no dia seguinte, leu $\frac{1}{7}$ do livro. Qual a fração do livro que ela já leu?
5. Matilde repartiu um bolo em 8 pedaços. Ela comeu $\frac{1}{4}$ e Rodolfo comeu $\frac{1}{2}$ do bolo. Que fração representa a parte do bolo que Matilde e Rodolfo comeram?
6. Imagine que você tenha certa quantidade de bombons para distribuir com os meninos A e B, de modo que o menino A recebesse $\frac{1}{4}$ e o menino B ficasse com $\frac{2}{3}$. Qual é a fração resultante se o menino A juntar seus bombons com o menino B?
7. Uma empresa vai construir uma nova sede. Ela vai destinar $\frac{1}{3}$ do terreno para estacionamento, $\frac{3}{5}$ do terreno para construção do prédio e o restante para área verde. Qual é a fração do total do terreno a ser ocupado pelo estacionamento e construção do prédio juntos?
8. Um atleta, ao participar de uma prova de triatlo, percorreu da seguinte maneira: $\frac{1}{10}$ do percurso correndo, $\frac{3}{7}$ de bicicleta e o restante a nado. Qual fração do percurso que esse atleta realizou correndo e de bicicleta?
9. Miguel comeu $\frac{1}{5}$ dos bombons de uma caixa e Marcos comeu $\frac{2}{3}$. Que Fração dos bombons eles comeram?
10. No simulado, Sergio acertou $\frac{1}{3}$ das questões de Matemática e $\frac{2}{7}$ das questões de português. Que fração do simulado de Matemática e português Sergio acertou?
11. Para comprar uma bicicleta, Marcos precisa gastar $\frac{2}{9}$ de seu salário e para comprar os acessórios que irá precisar para pedalar irá gastar $\frac{1}{3}$. Qual fração de seu salário Marcos irá gastar para poder comprar a bicicleta e os acessórios?
12. Amanda adora frações. Por isso ela observou que gasta $\frac{3}{7}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{5}$ com a prestação do seu carro. Qual fração correspondente aos gastos com aluguel e prestação do carro juntos?

13. João irá receber um <i>tablet</i> em seu aniversário como presente de seu pai e avós. Sabendo que seu pai pagará $\frac{2}{3}$ do valor e seus avós $\frac{1}{5}$ e o restante sairá do seu cofrinho, qual é a fração que representa o valor pago pelo pai e avós do menino juntos?																													
14. Ao percorrer de carro um longo trajeto, João percebeu que ao fim do primeiro dia havia percorrido $\frac{3}{8}$ desse trajeto. No segundo dia, ao dirigir com maior velocidade pôde alcançar $\frac{1}{2}$ do trajeto total. Quanto do trajeto total o motorista percorreu durante os dois dias de viagem?																													
15. Um motorista saiu de Tailândia em direção à cidade de Belém. No primeiro dia percorreu $\frac{3}{6}$ da distância que separa as duas cidade e no segundo dia $\frac{1}{5}$ dessa mesma distância. Qual é a fração, que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem?																													
16. Na construção de um muro, Carlos construiu $\frac{3}{7}$ do muro e Paulo $\frac{2}{8}$ do muro. Que fração do muro eles construíram juntos?																													
17. José Luís decidiu colecionar figurinhas para um álbum. Na primeira compra de figurinhas conseguiu preencher $\frac{2}{7}$ do álbum e na segunda, $\frac{4}{6}$. Que fração do álbum ele preencheu?																													
18. Em um jogo de Futebol, Sandro fez $\frac{4}{7}$ de pontos da partida e Silvio fez $\frac{2}{5}$. Que fração representa o total de pontos que eles fizeram juntos?																													
19. Dona Branca usou $\frac{3}{10}$ das laranjas de uma caixa para fazer doces e $\frac{4}{6}$ para fazer sucos. Que fração das laranjas da caixa foi usada para fazer doces e sucos?																													
20. Uma pizza foi dividida em partes iguais. Rita comeu $\frac{2}{9}$ da pizza e Juca comeu $\frac{4}{8}$. Que fração da pizza eles comeram juntos?																													
Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos. <table border="1"> <thead> <tr> <th>Questão</th><th>Operação realizada</th><th>Resultado obtido</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>			Questão	Operação realizada	Resultado obtido	1			2			3			4			5			6			7			8		
Questão	Operação realizada	Resultado obtido																											
1																													
2																													
3																													
4																													
5																													
6																													
7																													
8																													

9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
Conclusão		

Fonte: Pesquisa (2022)

Análise a priori: as atividades que envolvem as operações com frações de denominadores diferentes, devem apresentar maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos, pois há uma diferença no uso do desenho geométrico em relação à operação de adição de frações com denominadores diferentes, pois nestas atividades, o aluno deverá utilizar as linhas e colunas para representar as partes do inteiro que representam cada uma das duas frações. Na adição com denominadores iguais, era necessário o uso apenas de linhas ou colunas para representar a soma da quantidade de partes que cada fração representava.

Logo, acreditamos que inicialmente os alunos tenham mais dificuldades e demore mais tempo para perceber a regra que resolve as questões. Supomos ainda uma maior demanda da orientação do professor e de uma maior interação entre os alunos para que cheguem a um acordo sobre a forma de resolver. Assim, acreditamos que os alunos percebam a regra entre a 7ª e 8ª questão da sequência de atividades.

Para o desenvolvimento dessa atividade, sem as atividades de aprofundamento, estimamos que sejam necessárias duas aulas de 45 minutos. E com

as questões de aprofundamento, estimamos a necessidade de mais uma aula de 45 minutos, o que totalizará num tempo de 135 minutos.

Quadro 32 – Previsão de observações da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferentes

item	Observação prevista	Validade da observação
1	Multiplica os números de baixo para colocar em baixo da nova fração. Depois, multiplica o número de cima da primeira fração pelo número de baixo da segunda fração e multiplica o número de cima da segunda fração pelo número de baixo da primeira fração, daí a soma dos resultados dessas duas multiplicações resulta no número que fica em cima da nova fração.	Válida e desejada
2	Encontra o m.m.c dos números de baixo.	Válida e não desejada
3	Adiciona os números de cima e, também, adiciona os números de baixo.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Quadro 33 – Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferente

item	Conclusão prevista	Validade da conclusão
1	Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, adicionamos os numeradores resultantes.	Válida e desejada
2	Multiplicamos os denominadores.	Válida e não desejada
3	Adicionamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

A atividade a seguir servirá como aprofundamento do conhecimento desenvolvido durante a sequência.

Quadro 34 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 3

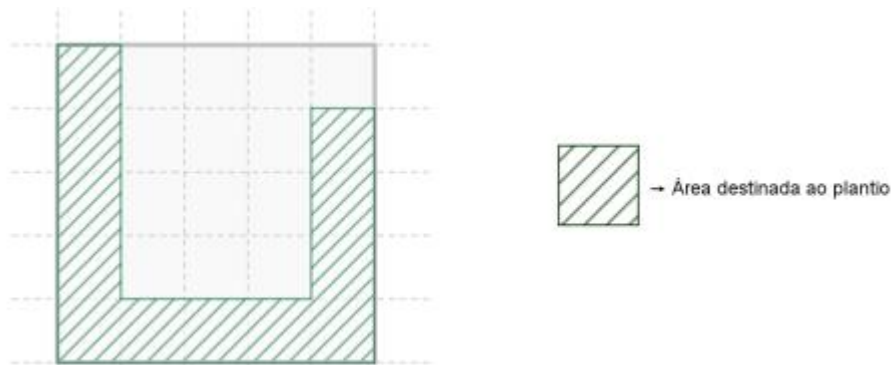
1. Para efetuar uma adição de fração com denominadores diferentes, qual regra podemos utilizar?

- a) Adicionamos os numeradores e, também, adicionamos os denominadores.
- b) Adicionamos apenas os numeradores e multiplicamos os denominadores.
- c) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, adicionamos os numeradores resultantes.
- d) Adicionamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores da primeira pelo denominador da segunda. E, por fim, efetuamos as operações indicadas entre os numeradores.

2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{8} + \frac{1}{5}$	
b	$\frac{1}{2} + \frac{4}{9}$	
c	$\frac{3}{6} + \frac{1}{5}$	
d	$\frac{2}{10} + \frac{3}{4}$	
e	$\frac{4}{6} + \frac{2}{8}$	

3. Um agricultor comprou um terreno de formato quadrangular no município de Tailândia. Ele pretende destinar uma área do terreno para o plantio de produtos agrícolas, com o objetivo de comercializá-los, conforme mostra o desenho abaixo.



Da área destinada ao plantio serão reservados:

- $\frac{1}{4}$ para o plantio de árvores frutíferas;
- $\frac{1}{6}$ para o plantio de verduras e;
- O restante para o plantio de legumes.

Desse modo, qual será a fração da área do terreno destinada ao plantio de legumes?

4. A estrada que liga Moju a Tailândia será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Qual fração que corresponde à terceira etapa?

5. Sílvia fez uma pesquisa com pessoas de seu condomínio residencial sobre a prática da coleta seletiva de lixo. Ele constatou que $\frac{3}{4}$ dos entrevistados praticam esse tipo de coleta e $\frac{1}{5}$ dos entrevistados não sabem o que isso significa. Dessa maneira, qual é a fração que representa a quantidade de pessoas entrevistadas por Sílvia?

6. José separou $\frac{2}{5}$ de um terreno para construir um galinheiro, $\frac{1}{3}$ para cultivar alface e o resto do terreno para tomate. Em que fração do terreno José cultivará tomate?

7. Os jogos estudantis das escolas do município de Tailândia aconteceram nos dias 1 a 6 de maio, o evento esportivo teve a participação de 1.600 alunos que competiram em 11 modalidades. Na disputa de cinco modalidades participaram 600 alunos, desses $\frac{1}{8}$ da natação, $\frac{1}{5}$ handebol, $\frac{1}{4}$ do basquete, $\frac{1}{10}$ de judô e o restante da apresentação artístico-cultural. Com base nas informações do texto, marque a alternativa que representa a quantidade de participantes da apresentação artística-cultural e a fração correspondente a essa modalidade.

a) $195, \frac{13}{40}$

- b) $135, \frac{15}{35}$
 c) $195, \frac{40}{27}$
 d) $280, \frac{14}{35}$
 e) $135, \frac{15}{40}$

8. Elabore uma situação que envolva adição de fração com denominadores diferentes. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Fonte: pesquisa (2022)

Quadro 35 – Atividade para subtração de frações com denominadores diferentes

Atividade 04	
Título: Subtração de frações com denominadores diferentes Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a subtração de duas frações com denominadores diferentes Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel. Procedimento: Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.	
1.	De uma caixa de bombons, foi distribuído $\frac{1}{2}$ dos bombons para Luiz Carlos e Fabiana. Luiz Carlos ficou com $\frac{1}{4}$. Com que fração da caixa de bombons Fabiana ficou?
2.	Dona Benta repartiu uma torta, e deu $\frac{1}{5}$ para seus sobrinhos Felipe e Tiago. Felipe ganhou $\frac{1}{10}$ da torta. Que fração da torta, Tiago ganhou?
3.	Em uma indústria $\frac{1}{3}$ dos funcionários trabalham na produção de macarrão, sendo que $\frac{1}{7}$ desses funcionários são mulheres. Que fração representa os homens que trabalham na produção de macarrão?
4.	Roberto Carlos e Ronaldinho fizeram $\frac{1}{2}$ dos gols de uma partida de futebol. Roberto Carlos fez $\frac{1}{6}$ dos gols da partida. Qual a fração de gols de Ronaldinho?
5.	Carla e Bruna preencheram juntas $\frac{1}{2}$ do álbum de figurinha, Carla preencheu $\frac{1}{5}$ das figurinhas. Qual a fração do álbum de figurinha Bruna preencheu?

6. Na festa de aniversário de Marcelo $\frac{1}{2}$ eram doces de morango e brigadeiro. Se a quantidade de doces de morango correspondia a quantidade $\frac{3}{9}$. Qual a fração que representa a quantidade dos doces de maracujá?
7. Ao receber seu salário, Mário gastou $\frac{1}{4}$ do seu dinheiro comprando camisas e sapatos. Sabemos que o valor gasto com camisas corresponde a $\frac{2}{10}$, sendo assim, qual fração representa o valor gasto com sapatos?
8. Na escola São Felipe $\frac{1}{5}$ dos alunos são torcedores do Flamengo e Palmeiras. Sabe-se que, a quantidade desses alunos torcedores do Palmeiras são representados pela fração $\frac{2}{12}$. Qual é a fração que representa o número de torcedores do Flamengo?
9. Para completar uma prova de ciclismo Roberto precisa percorrer $\frac{1}{2}$ de uma longa pista. Ele já percorreu $\frac{3}{4}$, que fração ainda falta para completar a prova?
10. Para comprar uma bolsa e uma blusa, Carla precisa gastar $\frac{1}{6}$ do dinheiro que possui. Somente a bolsa custa $\frac{2}{15}$ do seu dinheiro. Sabendo disso, qual é a fração que representa o custo da blusa?
11. Vinícius e Tatiana encheram dois copos com refrigerante. Vinícius bebeu $\frac{2}{3}$ do seu copo e Tatiana bebeu $\frac{1}{4}$ do copo dela. Qual fração de refrigerante Vinícius bebeu a mais que Tatiana?
12. Jorge tinha $\frac{6}{9}$ de um bolo. Comeu $\frac{1}{6}$. Quanto sobrou de bolo?
13. Carla deu $\frac{2}{3}$ de um empadão para Lúcia e $\frac{1}{2}$ para André. Que fração de empadão Carla deu a mais para Lúcia do que para André?
14. João entrou em uma loja e gostou de uma camisa. Ele possuía $\frac{8}{10}$ de seu salário no bolso e a camisa custaria $\frac{1}{2}$ desse valor. Qual fração do dinheiro restaria para João se ele comprasse a camisa?
15. Um atleta decide treinar correndo numa determinada pista de corrida. No primeiro e no segundo dia ele correu $\frac{10}{12}$ da pista. Sabendo que no segundo dia ele correu $\frac{1}{6}$, qual fração representa a quantidade que ele correu no primeiro dia?
16. Tenho $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate pequena. Se dou $\frac{3}{5}$ para o meu primo, que fração da barra de chocolate ficarei?
17. Manoel colheu $\frac{13}{15}$ de mangas em seu sítio. Deu $\frac{3}{5}$ para seu tio, com que fração de manga Manoel ficou?

- 18.** Marta resolveu vender laranja e maçã. No primeiro dia vendeu $\frac{9}{10}$ das frutas que tinha no estoque. Das frutas vendidas, $\frac{5}{6}$ foram maçãs. Que fração representa a quantidade de laranjas que foram vendidas?
- 19.** Sandro comprou $\frac{7}{8}$ de uma torta de morango para seu lanche da tarde, porém comeu somente $\frac{3}{4}$. Que fração da torta Sandro deixou de comer?
- 20.** Em uma partida de futebol, Neymar e Messi fizeram $\frac{3}{8}$ dos gols da partida. Sabendo que só Neymar fez $\frac{2}{6}$ desses gols, que fração representa os gols marcados por Messi?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Conclusão:

Fonte: Pesquisa (2022)

Análise a priori: para a realização das atividades que envolvem subtração de frações com denominadores diferentes os alunos trarão a experiência das atividades com adição de frações com denominadores diferentes, o que deve facilitar a compreensão e resolução destas atividades. Logo, acreditamos que para esta atividade entre a 5ª e a 6ª questões alguns alunos já percebiam a regra que orienta a resolução das questões propostas.

Para o desenvolvimento dessa atividade, sem as atividades de aprofundamento, estimamos que sejam necessárias duas aulas de 45 minutos. E com as questões de aprofundamento, estimamos a necessidade de mais uma aula de 45 minutos, o que totalizará num tempo de 135 minutos.

Quadro 36 – Previsão de observações da turma para atividade sobre subtração de frações com denominadores diferentes

Item	Observação prevista	Validade da observação
1	Multiplica os números de baixo para colocar em baixo da nova fração. Depois, multiplica o número de cima da primeira fração pelo número de baixo da segunda fração e multiplica o número de cima da segunda fração pelo número de baixo da primeira fração, daí, a subtração dos resultados dessas duas multiplicações resulta no número que fica em cima da nova fração.	Válida e desejada
2	Encontra o m.m.c dos números de baixo.	Válida e não desejada
3	Subtrai os números de cima e, também, subtrai os números de baixo.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Quadro 37 – Previsão de conclusões da turma para atividade sobre adição de frações com denominadores diferente

Item	Conclusão prevista	Validade da conclusão
1	Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, subtraímos os numeradores resultantes.	Válida e desejada
2	Multiplicamos os denominadores.	Válida e não desejada
3	Subtraímos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.	Inválida e não desejada

Fonte: Autor (2022)

Para o aprofundamento do conhecimento desenvolvido durante a sequência didática iremos propor uma atividade com questões envolvendo tais conhecimentos.

Quadro 38 - Atividade de Aprofundamento da Atividade 4

1. Ao subtrair frações com denominadores diferentes, qual regra pode ser utilizada? a) Subtraímos os numeradores e, também, subtraímos os denominadores. b) Subtraímos apenas os numeradores e subtraímos os denominadores. c) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, subtraímos os numeradores resultantes. d) Subtraímos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores da primeira pelo denominador da segunda. E, por fim, efetuamos as operações indicadas entre os numeradores.								
2. Determine o resultado das operações a seguir: <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>QUESTÕES</th><th>RESULTADOS</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td><td>$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$</td><td></td></tr> </tbody> </table>				QUESTÕES	RESULTADOS	a	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$	
	QUESTÕES	RESULTADOS						
a	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$							

b	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$	
c	$\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$	
d	$\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$	
e	$\frac{9}{10} - \frac{1}{4}$	

3. Na casa de Mariana o gasto diário de água com descargas correspondia a $\frac{2}{5}$ da capacidade da caixa d'água. Com a troca por descargas mais econômicas, esse consumo passou a ser de $\frac{1}{4}$ da capacidade da mesma caixa d'água. Logo, a fração da caixa d'água economizada com essa troca foi de

4. As barras preta, cinza e branca foram empilhadas como mostra a figura.



Sabe-se que os comprimentos das barras branca e cinza correspondem, respectivamente, a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{7}{8}$ do comprimento da barra preta. A diferença entre os comprimentos das barras cinza e branca corresponde a que fração?

5. Um trenzinho de controle remoto anda sobre um trilho sempre em linha reta. Partindo da estação A em direção à estação C, passando pela estação B, percorre $\frac{3}{4}$ da distância entre as estações A e C e pára. Por algum problema no controle remoto, volta, de ré, $\frac{2}{3}$ do que havia percorrido, atingindo a estação B e pára. Desconsiderando-se as dimensões do trenzinho, qual é a fração que representa a distância de A até B?

6. Elabore uma situação que envolva subtração de fração com denominadores diferentes. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

4.3 - OS TESTES PROPOSTOS

Para efeito de diagnose será aplicado um pré-teste com questões de adição e subtração de fração e o mesmo será aplicado após a sequência didática. Pois assim, iremos comparar tais resultados, ou seja, os resultados antes e após a aplicação da sequência didática. A seguir, apresentamos as questões desse teste.

Quadro 39 – Pré e pós-teste proposto para adição e subtração de fração

1. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	
b	$\frac{6}{10} + \frac{3}{10}$	
c	$\frac{8}{11} - \frac{1}{11}$	
d	$\frac{12}{15} - \frac{8}{15}$	
e	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	
f	$\frac{2}{4} + \frac{1}{5}$	
g	$\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$	
h	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$	
i	$\frac{4}{6} - \frac{2}{4}$	

2. Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)

3. Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)
4. Julia e Renato foram comer pizza. Julia comeu $\frac{1}{5}$ e Renato $\frac{2}{5}$ de uma pizza de calabresa. Que fração da pizza eles comeram juntos?
5. A fazenda de seu Francisco perde-se de vista. Ele reservou $\frac{5}{8}$ de sua fazenda para a agricultura de milho e feijão. Se $\frac{2}{8}$ foi para o plantio de milho, que fração da reserva ficou para o plantio de feijão?
6. No primeiro dia de trabalho, Arnaldo pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Avalie se o que ele fala é correto. Justifique sua resposta.
- 
7. Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?
8. Das pessoas que estavam na barraca de pastel, $\frac{4}{5}$ eram homens. Se $\frac{1}{2}$ das pessoas que estavam na barraca usava óculos e apenas homens usavam óculos, que fração das pessoas que estava na barraca de pastel representa os homens que não usavam óculos?
9. A produção mensal de uma confecção feminina é formada por $\frac{2}{7}$ de blusas, $\frac{1}{4}$ de saias e o restante de vestidos. Que fração da produção mensal é destinada aos vestidos?
10. Os militares que trabalham no Colégio Militar Brasileiro realizam um teste de aptidão física (TAF) três vezes por ano. Nesse teste, os militares têm de realizar uma prova de corrida, uma de abdominais, uma de barras e uma de flexão de

braço. No teste realizado em 2015, na prova de corrida, o Tenente Belchior, já havia corrido do percurso da prova $\frac{1}{3}$ e, após correr mais 600 metros, completou $\frac{3}{5}$ do percurso. Dessa forma, que fração representa os 600 metros que ele correu?

Fonte: Pesquisa (2022)

Análise a priori do Pré-teste: nas questões que envolvem adição de frações com denominadores iguais, consideramos que os alunos realizarão a operação de adição com frações da mesma forma que realizam esta operação com número inteiros, ou seja, efetuando a soma direta dos numeradores, e também, a soma dos denominadores iguais. Nesse contexto, julgamos acontecer a mesma situação com as questões em que há necessidade da operação de subtração com frações de denominadores iguais, isto é, o estudante irá subtrair o primeiro numerador pelo segundo e, o mesmo fará com os denominadores. Nas questões com operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, esperamos que o comportamento dos alunos, assemelhe-se ao esperado para a adição e subtração de fração com denominadores iguais, pois acreditamos que os alunos realizarão a soma ou subtração dos numeradores e denominadores entre si, ou ainda, virão a multiplicar os denominadores entre si.

Análise a priori do pós-teste: ao considerar que esse teste será aplicado após a sequência didática, acreditamos que os alunos irão responder satisfatoriamente a estas questões. Após a aplicação da sequência didática supomos que os alunos irão aplicar a regra correta para a adição e subtração de frações com denominadores iguais (conservar o denominador e somar ou subtrair os numeradores), assim como, para adição e subtração com denominadores diferentes (multiplicar os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicar o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicar o numerador da segunda pelo denominador da primeira. E, por fim, subtrair ou somar os numeradores resultantes). Apesar de haver uma percepção por parte dos professores de que é difícil a aprendizagem dos alunos para adição e subtração com denominadores diferentes, podemos julgar que, a partir do momento em que o próprio aluno construir a regra durante a sequência didática o mesmo terá um bom desempenho para as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A referida Sequência Didática foi pensada e elaborada com a expectativa de ajudar a reduzir as dificuldades apresentadas pelos discentes quanto a resolução de problemas que envolvam adição e subtração com frações, tornando-os mais aptos a compreender o papel dos numeradores e denominadores em cada situação, ou seja, desenvolver corretamente as operações quando se tratar de denominadores iguais ou diferentes. Além disso, foi pensada também no professor como transmissor de conhecimento, pois poderá fazer uso de uma metodologia diferenciada a qual desafiará o estudante a criar seu próprio conhecimento e estratégia de resolução.

Para tanto, concordamos com Felix (2021) quando afirma que o sucesso dessa atividade depende “do comprometimento do professor aplicador em seguir os passos da metodologia do Ensino por Atividades, buscando ser um mediador na construção do conhecimento dos discentes, permitindo que se desenvolvam de maneira autônoma”.

Na seção 5 descreveremos como esta sequência didática foi aplicada aos sujeitos da nossa pesquisa, e como se desenvolveu a terceira fase da engenharia didática, a experimentação.

5. EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção apresentamos os momentos da experimentação, ou seja, a descrição da aplicação da Sequência Didática que compõe uma das etapas da pesquisa. Os eventos ocorreram em uma escola pública municipal, localizada na vila Palmares pertencente ao município de Tailândia/Pará. A referida escola atende estudantes do 1º ao 9º ano do ensino fundamental incluindo a modalidade EJA.

A instituição de ensino citada é considerada de grande porte por possuir grande quantitativo de estudantes matriculados e um expressivo quadro de profissionais da educação. Para a realização da pesquisa, primeiramente, conversamos com a direção escolar sobre o desejo de desenvolver o estudo em tela na referida instituição; no primeiro contato explicamos como ocorreria o trabalho e com qual o objetivo. Houve boa aceitação por parte da equipe técnica que assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), e deram excelente apoio para a realização do experimento.

Em seguida procuramos a professora de matemática responsável pelas turmas de 6º ano, pois nesse nível é realizado o ensino de adição e subtração de frações, explicamos como seriam nossas atividades e quais objetivos do experimento. A docente aceitou com prontidão e liberou uma turma do turno da manhã, e também, assinou o TCLE. Além disso, vale apenas ressaltar que a professora mencionou já ter iniciado superficialmente com a turma a parte de adição e subtração de fração com denominadores iguais.

No dia 20 de outubro de 2022, realizamos uma reunião com os discentes dessa turma para explicar sobre a pesquisa e sua importância. Informamos que essa pesquisa era para o Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará no qual estávamos inseridos e que o nosso objetivo era ministrar o conteúdo de adição e subtração de frações por meio de uma metodologia diferente da tradicional.

No momento, perguntamos se todos os discentes presentes poderiam contribuir conosco participando dos encontros e desenvolvendo as atividades solicitadas. Todos concordaram e se mostraram interessados em participar. Dessa forma, entregamos o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) para que eles assinassem. Explicamos e distribuímos, também, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

pedindo a autorização de seus responsáveis (Apêndice A) e solicitamos que trouxessem assinados no dia seguinte.

A pesquisa foi realizada de 21 de outubro a 06 de dezembro de 2022 totalizando 12 momentos/encontros conforme estão apresentados no quadro abaixo:

Quadro 40 - Cronograma da experimentação

Data	Encontros	Atividade/Ação	Tempo de realização	Objetivo
20/10/2022	-	Reunião com os alunos da turma e entrega do TALE e TCLE.	35 minutos	Explicar para os alunos o objetivo da pesquisa; entregar o TALE para os mesmos assinarem e o TCLE para levarem aos pais.
21/10/2022	1º	Questionário sócioeducacional Pré-teste	90 minutos	Aplicar o questionário socioeducativo para conhecer o perfil e as dificuldades de aprendizagem dos alunos do 6º ano do ensino fundamental referentes aos conhecimentos matemáticos. Investigar os conhecimentos prévios sobre as operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.
03/11/2022	2º	Atividade 1 - Adição de Frações com Denominadores Iguais.	90 minutos	Construir regra para resolução das operações com adição de frações com denominadores iguais, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.
04/11/2022	3º	Atividade 2 - Subtração de Frações com Denominadores Iguais.	90 minutos	Construir regra para resolução das operações com subtração de frações com denominadores iguais, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.
10/11/2022	4º	Atividades de aprofundamento das atividades 1 e 2	90 minutos	Aprofundar os conhecimentos adquiridos nas atividades de adição e subtração com denominadores iguais.
11/11/2022	5º	Atividade 3 - Adição de Frações com Denominadores Diferentes.	20 minutos	Construir regra para resolução das operações com adição de frações com denominadores diferentes, utilizando o desenho

				geométrico para resolver as situações-problemas.
17/11/2022	6º	Retomada da atividade 3 (primeira parte) - Adição de Frações com Denominadores Diferentes.	90 minutos	Construir regra para resolução das operações com adição de frações com denominadores diferentes, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas nas quais as frações possuam numeradores 1 ou 1 e outro valor qualquer.
18/11/2022	7º	Segunda parte da atividade 3 - Adição de Frações com Denominadores Diferentes.	90 minutos	Construir regra para resolução das operações com adição de frações com denominadores diferentes, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas nas quais as frações possuam numeradores diferentes de 1.
22/11/2022	8º	Atividade de aprofundamento da primeira e segunda parte da atividade 3.	90 minutos	Aprofundar os conhecimentos adquiridos nas atividades de adição de fração com denominadores diferentes.
24/11/2022	9º	Atividade 4 - Subtração de Frações com Denominadores Diferentes (primeira e segunda parte).	90 minutos	Construir regra para resolução das operações com subtração de frações com denominadores diferentes, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.
25/11/2022	10º	Atividade de aprofundamento da atividade 4.	90 minutos	Aprofundar os conhecimentos adquiridos nas atividades de subtração de fração com denominadores diferentes.
29/11/2022	11º	Momento para Resolução de questões e Revisão dos conceitos construídos.	90 minutos	Verificar o desenvolvimento dos alunos para resolver situações problemas após aplicação da Sequência Didática e aprofundar os conceitos construídos.
06/12/2022	12º	Pós-Teste de adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.	90 minutos	Verificar o nível de conhecimento construído pelos alunos na sequência didática para as situações-problemas com as operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.

Fonte: Experimentação (2022)

Vale ressaltar que em todos os momentos da pesquisa, isto é, a aplicação do pré-teste, as atividades da Sequência Didática, as questões de aprofundamento, e o pós-teste, foram registrados com anotações em diário de campo e em fichas de acompanhamento elaboradas por Sá (2018), o que permitiu a descrição de como ocorreu cada um deles.

5.1 - PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro ocorreu no dia 21 de outubro de 2022 das 07h30min às 9h00min com a participação de 21 estudantes. Nesse período aplicamos o questionário socioeducacional (Apêndice D), e o pré-teste relacionado ao objeto de estudo da sequência didática. O questionário foi composto por questões que produziram informações sobre o perfil dos discentes, como: informações pessoais, informações sobre o gosto pela matemática, hábito de estudo, quem auxilia nas atividades de matemática fora da escola, e a metodologia da professora de matemática. E por meio do pré-teste foi possível obter informações a respeito dos conhecimentos prévios que os estudantes obtinham sobre adição e subtração de frações. Tais informações serão detalhadas a seguir.

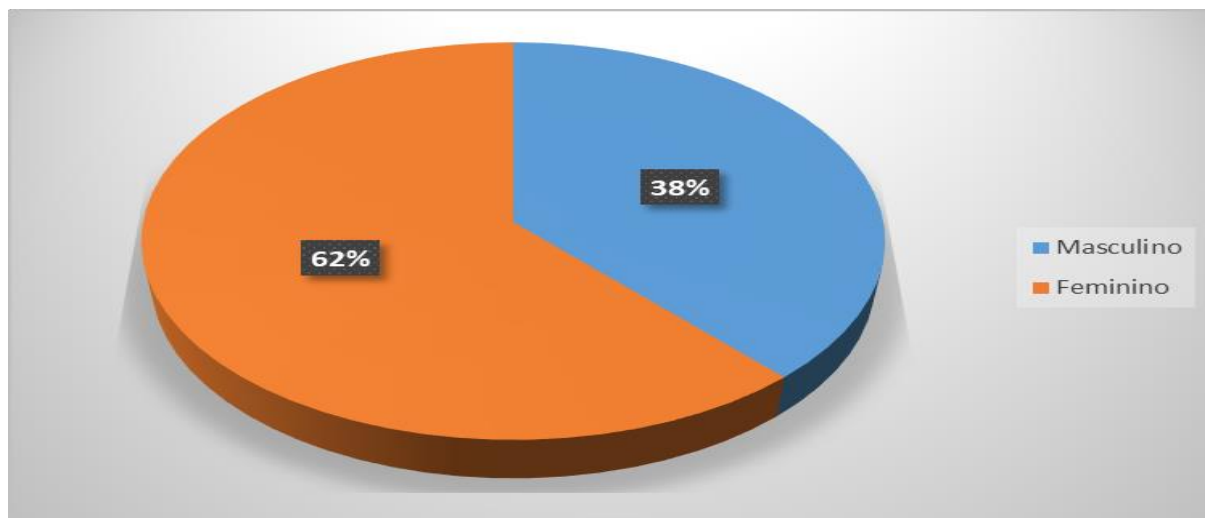
5.1. 2 - Perfil dos estudantes

Iniciamos essa análise com a apresentação da distribuição por gênero dos estudantes que estiveram presentes no primeiro encontro.

Quadro 41 - Distribuição dos estudantes por gênero

GÊNERO	Nº DE ESTUDANTES	%
Masculino	8	38
Feminino	13	62
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 18 - Distribuição dos estudantes por gênero

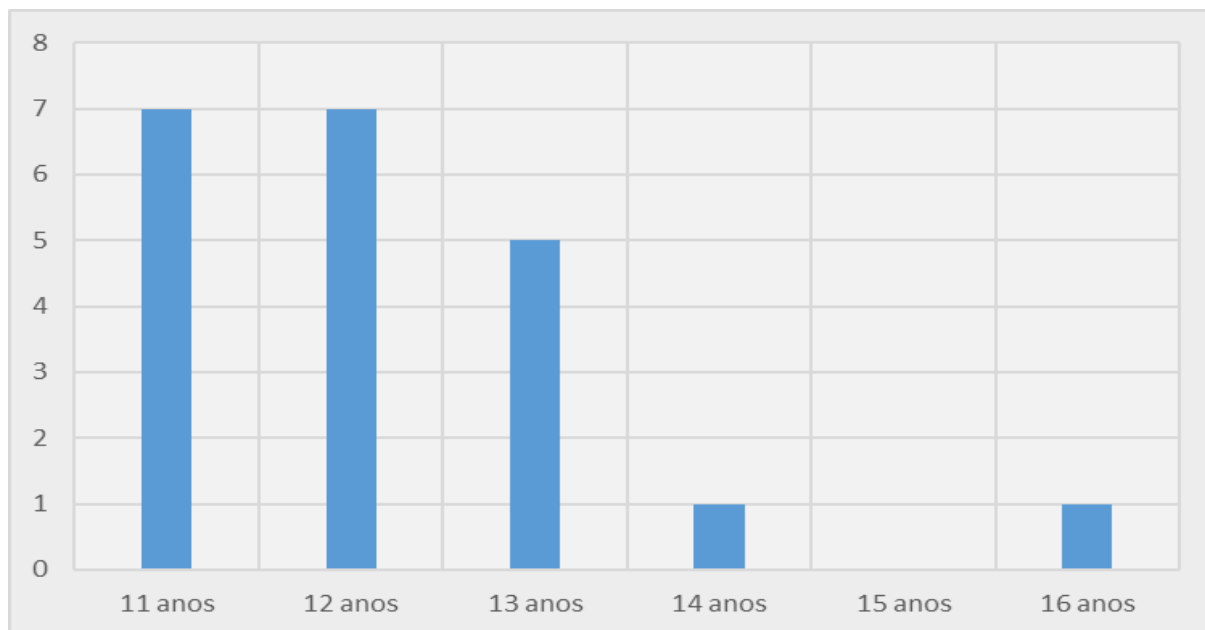
Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Podemos observar que a maioria são do sexo feminino correspondendo a um percentual de 62% dos alunos pesquisados, enquanto que os alunos do sexo masculino totalizaram 38%, como na pesquisa de Santos (2020, p. 147), em que 24% eram do sexo masculino e 76% eram do sexo feminino, por outro lado, na pesquisa de Felix (2021, p. 116) houve uma leve vantagem para o sexo masculino pois 52,78% foram discentes do sexo masculino e 47,22% do sexo feminino. A seguir temos a apresentação da distribuição dos discentes por idade.

Quadro 42 - Distribuição dos estudantes por idade

IDADES	Nº DE ESTUDANTES	%
11 anos	7	33,33
12 anos	7	33,33
13 anos	5	23,80
14 anos	1	4,77
15 anos	0	0
16 anos	1	4,77
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 19 - Distribuição dos alunos por idade

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Com relação a faixa etária, os dados mostram que: 33,33% dos estudantes tem 11 anos; 33,33% têm 12 anos; 23,80% tem 13 anos; 4,77% tem 14 anos; e 4,77% tem 16 anos.

De acordo com a LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996 que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, a idade certa para o aluno ingressar no ensino fundamental deve ser aos 6 anos de idades, com isso ao completar 11 anos deve estar no 6º ano.

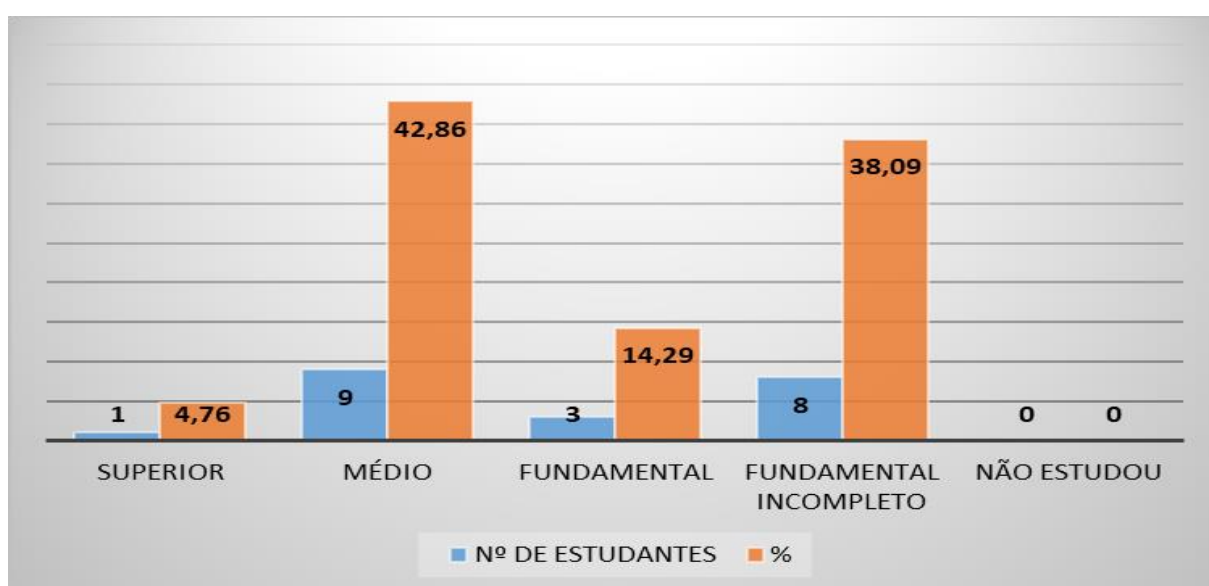
Diante disso podemos concluir de acordo com os dados levantados na pesquisa que apenas 33,33% dos alunos estão em consonância com a idade-série exata. Outros 33,33% que possuem 12 anos não foram considerados com distorção de idade-série por ser apenas um ano de diferença. No entanto, os alunos que estão com 13, 14 e 16 anos (totalizando 33,34%), esses sim foram considerados em situação de distorção idade-série, pois apresentam dois ou mais anos de atraso escolar.

Nesse aspecto, tais resultados assemelham-se aos resultados da pesquisa de Ferreira (2021, p.135), pois, 21% dos alunos participantes da pesquisa encontram-se em distorção idade-série por possuírem dois anos ou mais de atraso escolar. A seguir, apresentamos o grau de escolaridade do responsável masculino.

Quadro 43 - Escolaridade do responsável masculino

ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO	Nº DE ESTUDANTES	%
Superior	1	4,76
Médio	9	42,86
Fundamental	3	14,29
Fundamental incompleto	8	38,09
Não estudou	0	0
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 20 - Escolaridade do responsável masculino

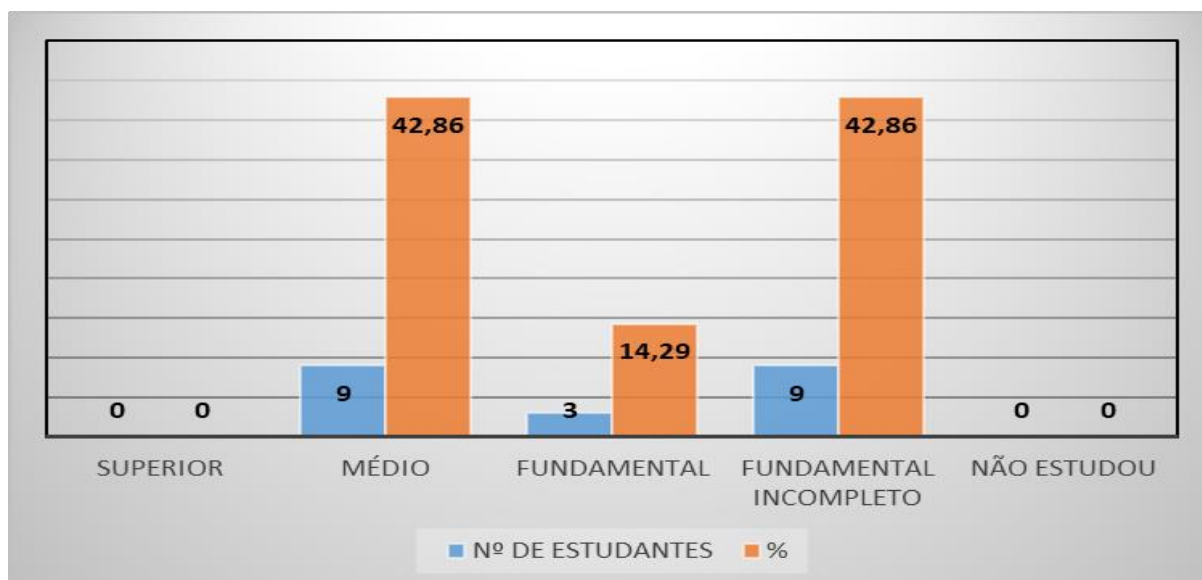
Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Os dados obtidos a partir das respostas dos estudantes revelam que apenas 4,76%, ou seja, 1 (um) responsável masculino concluiu o Ensino Superior, 42,86% concluíram o Ensino Médio, os quais concluíram o Ensino Fundamental correspondem a 14,29%, e grande parte dos responsáveis com 38,09% possui o Ensino Fundamental Incompleto. Dessa forma, destacamos que todos os responsáveis estudaram em algum nível de ensino tendo com isso possibilidade de ajudar seus filhos com as tarefas escolares que levam para casa. Pois conforme destaca Carneiro et al (2015, p. 03), o acompanhamento feito pelos pais sobre a vida escolar dos filhos é um fator importante para a aprendizagem e para o sucesso acadêmico dos mesmos. Ou seja, independentemente da formação acadêmica, os pais ou responsáveis precisam se dedicar na formação de seus filhos. A seguir apresentamos a escolaridade do responsável feminino.

Quadro 44 - Escolaridade do responsável feminino

ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO	Nº DE ESTUDANTES	%
Superior	0	0
Médio	9	42,86
Fundamental	3	14,29
Fundamental incompleto	9	42,86
Não estudou	0	0
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 21 - Escolaridade do responsável feminino

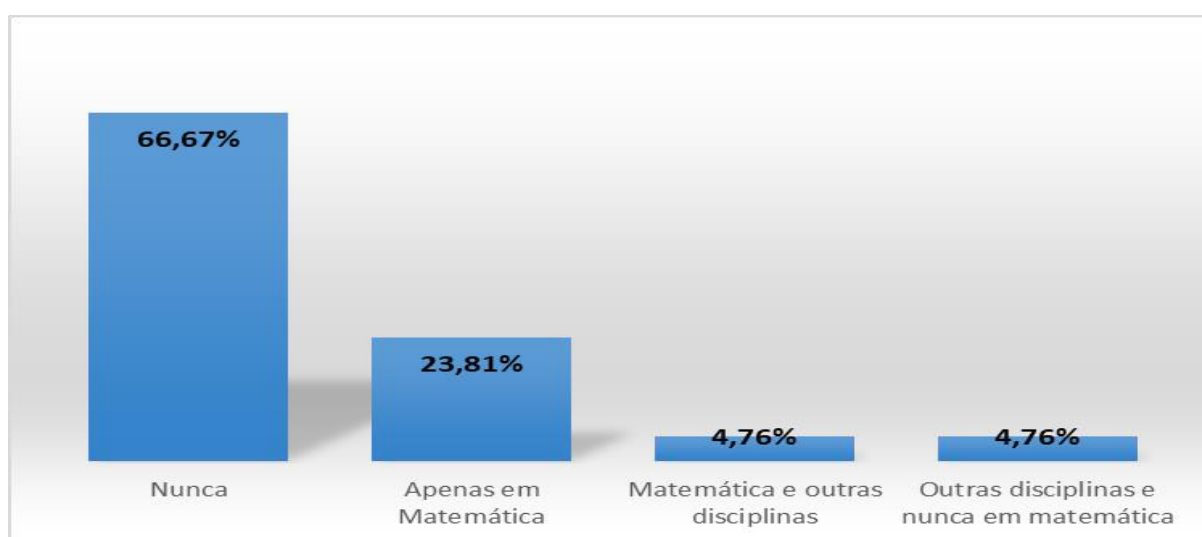
Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Os dados apresentados no quadro e na tabela acima demonstram que 42,86% dos responsáveis do sexo feminino terminaram o Ensino Médio e a mesma porcentagem se deu para as responsáveis que possuem o Ensino Fundamental Incompleto, desse modo, apenas 14,29% concluíram o Ensino Fundamental e nenhuma possui o ensino superior. Os dados referentes ao grau de escolaridade dos responsáveis feminino foram equivalentes aos dados resultantes dos responsáveis masculinos. A seguir apresentamos os dados referentes sobre os alunos que já ficaram de dependência em matemática ou em outra disciplina em algum ano letivo no decorrer de sua trajetória escolar.

Quadro 45 - Dependência dos alunos

DEPENDÊNCIA	Nº DE ESTUDANTES	%
Nunca	14	66,67
Apenas em Matemática	5	23,81
Matemática e outras disciplinas	1	4,76
Outras disciplinas e nunca em matemática	1	4,76
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 22 - Dependência dos alunos

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

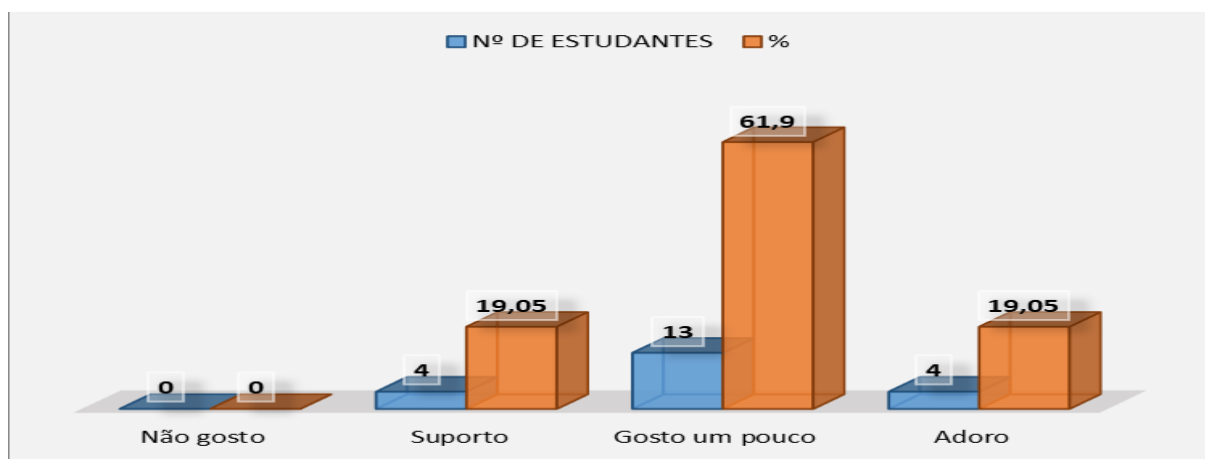
Como visto, a maioria dos estudantes pesquisados nunca ficaram de dependência em nenhuma disciplina o que equivale a 66,67%, os quais ficaram apenas em Matemática totaliza 23,81%, em Matemática e outras disciplinas 4,76%, ou seja, um estudante e o mesmo percentual ocorreu para outras disciplinas e nunca em Matemática. Percebe-se segundo os dados que 06 estudantes já foram reprovados em matemática e esse é considerado um quantitativo relevante pois observa-se que essa foi a disciplina com maior histórico de reprovação. E tal situação pode ser decorrentes de vários fatores, como por exemplo, “o modo como ela vem sendo apresentada, desde as séries iniciais até a presente série” (FELICETTI, 2007, p. 18).

Os dados a seguir representam o gosto dos estudantes em relação a Matemática.

Quadro 46 – Gosto dos estudantes pela Matemática

RESPOSTAS	Nº DE ESTUDANTES	%
Não gosto	0	0
Suporto	4	19,05
Gosto um pouco	13	61,90
Adoro	4	19,05
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 23 – Gosto dos estudantes pela Matemática

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Como podemos observar, a maioria dos estudantes investigados, 61,9%, afirmaram gostar um pouco de matemática, 19,05% suporta a disciplina, e o mesmo percentual adora, ou seja, possui afinidade com a matemática, e também, nenhum estudante revelou não gostar de matemática o que é considerado como um ponto positivo, pois todos gostam de alguma forma. No entanto o fato da maioria gostar um pouco pode estar associado a crença social transmitida muitas vezes pela família dos estudantes de que a “matemática é muito difícil de ser aprendida”, como também, pela forma como essa disciplina é trabalhada em sala de aula, pois em consonância com Felicetti (2007, p. 18-19)

Pensa-se que o trabalho diferenciado do professor pode reverter a situação, pois acredita-se que o objetivo de um professor, além de querer que seu aluno aprenda, é também proporcionar-lhe condições para aprender como aprender, o que pode ser proporcionado por práticas de ensino diversificadas. Logo, a Matemática não pode ser dissociada da sua aplicabilidade, mas sim contextualizada, trabalhada das mais diferentes maneiras a fim de que tenha significado para o aluno.

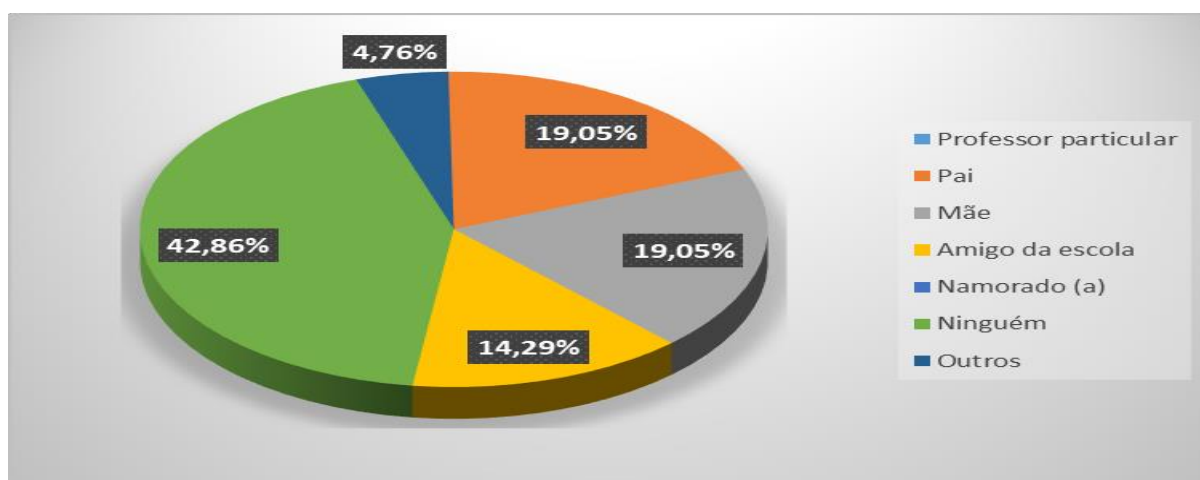
Diante de tal pensamento e ação docente o estudante pode ser levado a aprender a gostar de matemática e, assim, obter bons resultados. No quadro a seguir, apresentamos os dados referentes à ajuda recebida para realizar as tarefas de matemática.

Quadro 47 - Ajuda nas tarefas de matemática

AJUDA NAS TAREFAS DE MATEMÁTICA.	Nº DE ESTUDANTES	%
Professor particular	0	0
Pai	4	19,05
Mãe	4	19,05
Amigo da escola	3	14,29
Namorado (a)	0	0
Ninguém	9	42,86
Outros	1	4,76
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 24 - Ajuda nas tarefas de matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Sobre a ajuda recebida nas tarefas de matemática a maioria dos discentes revelou não receber ajuda de ninguém 42,86%, os estudantes que recebiam ajuda do pai totalizam 19,05% e o mesmo percentual representa os estudantes que obtinham ajuda das mães. Também observamos que um percentual considerável, 14,29% da mostra, recebia auxílio dos amigos nas tarefas escolares de matemática, e 4,76% marcou a opção outros.

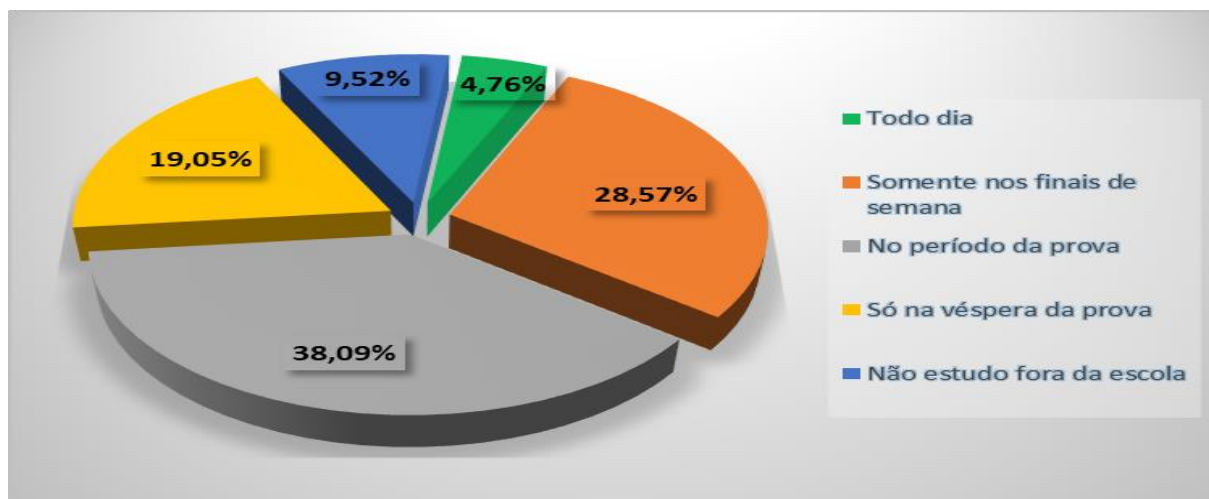
Vale apenas ressaltar que a porcentagem de estudantes que não recebem ajuda de ninguém é um tanto preocupante, uma vez que isso pode tornar ainda mais difícil o aprendizado dos conteúdos trabalhados em sala de aula, pois sem um auxílio extraclasse o mesmo poderá não consolidar seus conhecimentos, haja vista que, possivelmente, não fará as tarefas que tiverem dúvidas ou dificuldades. Na continuidade iremos expor os percentuais das respostas dadas pelos estudantes quando perguntamos com que frequência ele estuda matemática fora da escola.

Quadro 48 - Frequência de estudo da matemática fora da escola

FREQUÊNCIA DE ESTUDO	Nº DE ESTUDANTES	%
Todo dia	1	4,76
Somente nos finais de semana	6	28,57
No período da prova	8	38,09
Só na véspera da prova	4	19,05
Não estudo fora da escola	2	9,52
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 25 - Frequência de estudo da matemática fora da escola



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

De acordo com os dados acima, verificamos que 38,09% dos discentes, informou que estuda matemática fora da escola somente no período da prova, outro percentual considerável 28,57% é dos discentes que estudam somente nos finais de semana; 19,05% só na véspera da prova; 9,52% declarou não estudar fora da escola e apenas 4,76% estudam matemática todo dia. A partir da análise desses dados, temos um cenário preocupante, pois sabemos que a falta de interesse ou hábito de

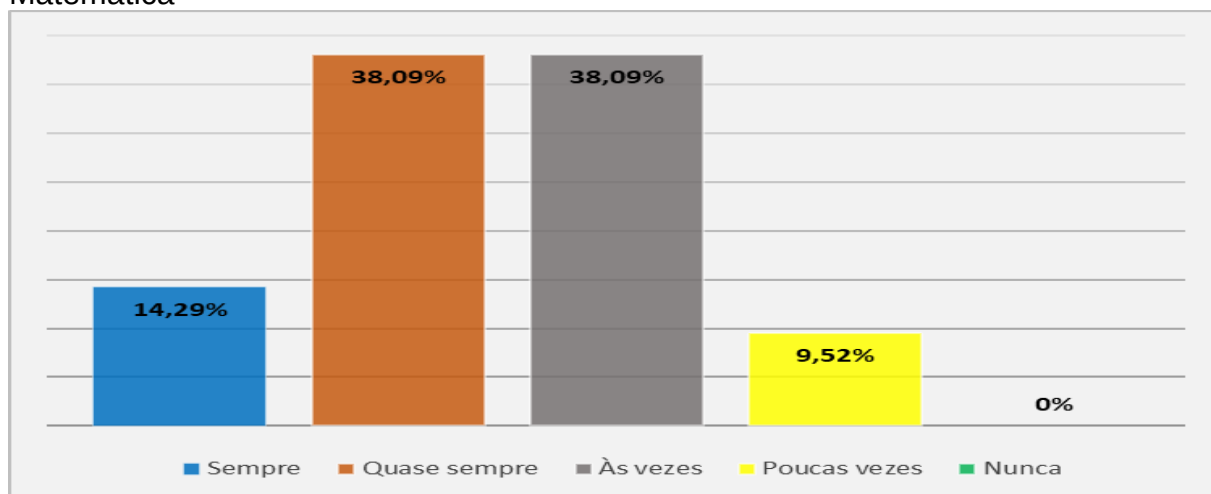
estudar fora da escola acarreta sérios problemas na aprendizagem de matemática, como por exemplo, baixo rendimento nas avaliações. A seguir apresentamos o resultado das respostas dos pesquisados quando perguntamos com qual frequência ele compreende as explicações dadas nas aulas de Matemática.

Quadro 49 - Frequência de compreensão das explicações dadas nas aulas de Matemática

FREQUÊNCIA DE COMPREENSÃO	Nº DE ESTUDANTES	%
Sempre	3	14,29
Quase sempre	8	38,09
Às vezes	8	38,09
Poucas vezes	2	9,52
Nunca	0	0
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 26 - Frequência de compreensão das explicações dadas nas aulas de Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Quanto à compreensão das explicações durante as aulas de matemática os dados mostram que nenhum aluno escolheu a opção nunca, 9,52% afirmaram compreender poucas vezes, e para a opção às vezes o percentual das respostas foi de 38,09% esse mesmo percentual se repetiu para a opção quase sempre. Ainda tivemos aproximadamente 14,29% dos estudantes afirmando sempre compreender as explicações. O percentual de estudantes que compreendem às vezes, quase sempre ou poucas vezes a explicação dada nas aulas de Matemática é bastante elevado o que gera preocupação e inquietação sobre os motivos de tal resultado.

Pacheco e Andreis (2018, p. 106) relatam que “as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Matemática são muitas, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores. E sobre isso, as referidas autoras destacam o pensamento de Bessa (2007, p. 4) segundo o qual tais dificuldades podem estar relacionadas

[...] ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno).

Portanto, tais dificuldades precisam ser trabalhadas para serem resolvidas tanto por parte do professor como também dos estudantes, pois somente assim, teremos percentuais melhores de estudantes com boa compreensão das explicações em aulas de matemática e, com isso, mais motivados em estudar a disciplina.

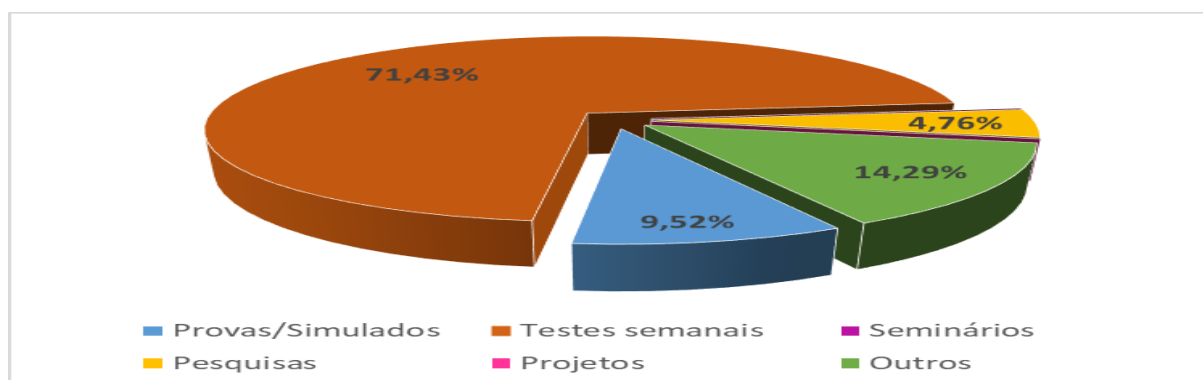
No quadro a seguir mostraremos os recursos mais utilizados para avaliação em Matemática segundo os discentes.

Quadro 50 - Recursos mais utilizados para avaliação em Matemática

RECURSOS UTILIZADOS	Nº DE ESTUDANTES	%
Provas/Simulados	2	9,52
Testes semanais	15	71,43
Seminários	0	0
Pesquisas	1	4,76
Projetos	0	0
Outros	3	14,29
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 27 - Recursos mais utilizados para avaliação em Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Os dados acima mostram que a grande maioria dos recursos utilizados para avaliar a aprendizagem são Testes semanais e Provas/simulados que somados chegam ao percentual de 80,95%. Esse resultado evidencia como frequentes tais recursos são nas avaliações de matemática, prevalecendo assim, o método seletivo e quantitativo, pois muitos docentes ainda acreditam que tais métodos são os únicos capazes de avaliar o desempenho dos estudantes. Em contradição a essa situação os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) defendem que:

é preciso repensar certas ideias que predominam sobre o significado da avaliação em Matemática, ou seja, as que concebem como prioritário avaliar apenas se os alunos memorizam as regras e esquemas, não verificando a compreensão de conceitos, o desenvolvimento de atitudes e procedimentos e a criatividade nas soluções, que, por sua vez, se refletem nas possibilidades de enfrentar situações-problema e resolvê-las. (BRASIL, 1998, p. 54)

Por isso, há necessidade de cada docente avaliar suas práticas de avaliação ao ensinar matemática e procurar por novos mecanismos de avaliação que, propiciem aos estudantes, possibilidades de manifestação do conhecimento adquirido.

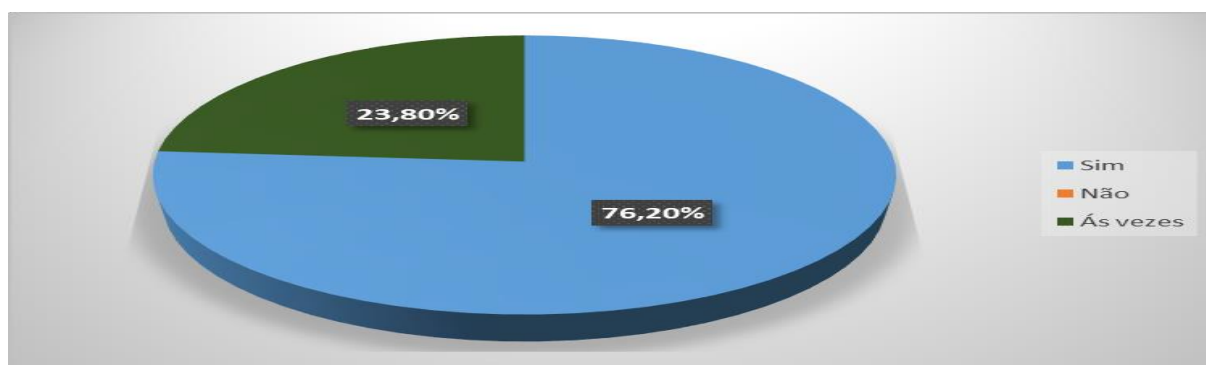
A seguir apresentamos os dados referentes a pergunta: as aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?

Quadro 51 - Interesse em aprender os conteúdos ministrados

RESPOSTAS	Nº DE ESTUDANTES	%
Sim	16	76,20
Não	0	0
Às vezes	5	23,80
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 28 - Interesse nas aulas de Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

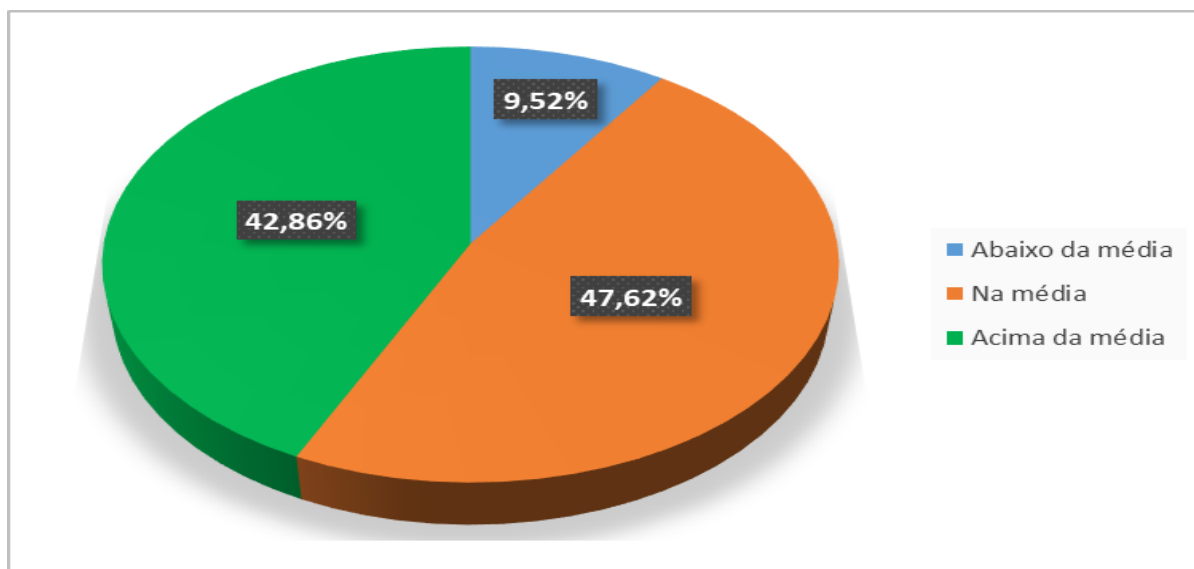
Conseguimos observar que a maioria dos estudantes 76,20% responderam que as aulas despertam a atenção em aprender os conteúdos, e 23,80% optaram pela opção às vezes. Esse resultado indica que a professora da turma é empenhada em fazer com que seus alunos compreendam o conteúdo trabalhado. A seguir serão apresentados os dados referentes ao rendimento dos alunos nas avaliações de Matemática.

Quadro 52 - Rendimento nas avaliações de Matemática

NOTAS EM MATEMÁTICA	Nº DE ESTUDANTES	%
Abaixo da média	2	9,52
Na média	10	47,62
Acima da média	9	42,86
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 29 - Rendimento nas avaliações de Matemática



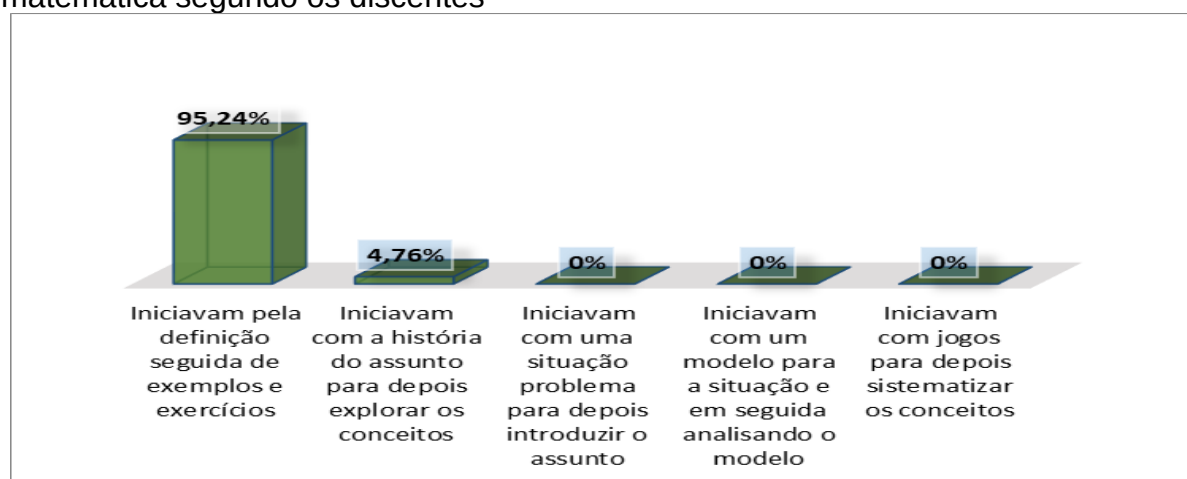
Fonte: Pesquisa de campo (2022)

As informações obtidas para essa pergunta mostram que 47,62% dos alunos obtêm notas na média e 42,86% acima da média, já abaixo da média apenas 9,52%. A seguir apresentamos a análise referente à metodologia utilizada pela docente para iniciar suas aulas de matemática segundo opinião dos discentes.

Quadro 53 - Atitude metodológica para início das aulas de matemática segundo os discentes

METODOLOGIA	Nº DE ESTUDANTES	%
Iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios	20	95,24
Iniciavam com a história do assunto para depois explorar os conceitos	1	4,76
Iniciavam com uma situação problema para depois introduzir o assunto	0	0
Iniciavam com um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	0	0
Iniciavam com jogos para depois sistematizar os conceitos	0	0
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráfico 30 - Atitude metodológica da professora para início das aulas de matemática segundo os discentes

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Sobre às atitudes metodológicas utilizadas pela docente para iniciar as aulas de matemática, 95,24% dos discentes informaram que as aulas iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercício. Vale destacar que apenas 4,76% dos discentes afirmaram que suas aulas de matemática tiveram início com a história do assunto para depois explorar os conceitos. Com base nisso, observa-se que o ensino tradicional como padrão educativo ainda é predominante, pois começa com uma explicação do conceito relativo ao objeto matemático em questão, e em seguida é mostrado aos estudantes, por meio de exemplos, como fazer os exercícios indicados.

Sobre método tradicional Walle (2009, p.31) afirma que “os estudantes delegam apenas ao professor a responsabilidade de determinar se suas respostas estão corretas” e, com isso, cria-se uma visão na mente desses estudantes de que a “matemática é uma série de regras arbitrárias, transmitidas pelo professor”. Ainda segundo esse autor, tal visão criada pelos estudantes devido esse modelo tradicional de ensinar matemática, “é uma distorção brutal da real essência da matemática” pois, ele “recompensa a aprendizagem de regras, mas oferece poucas oportunidades para realmente fazer matemática” (p.32).

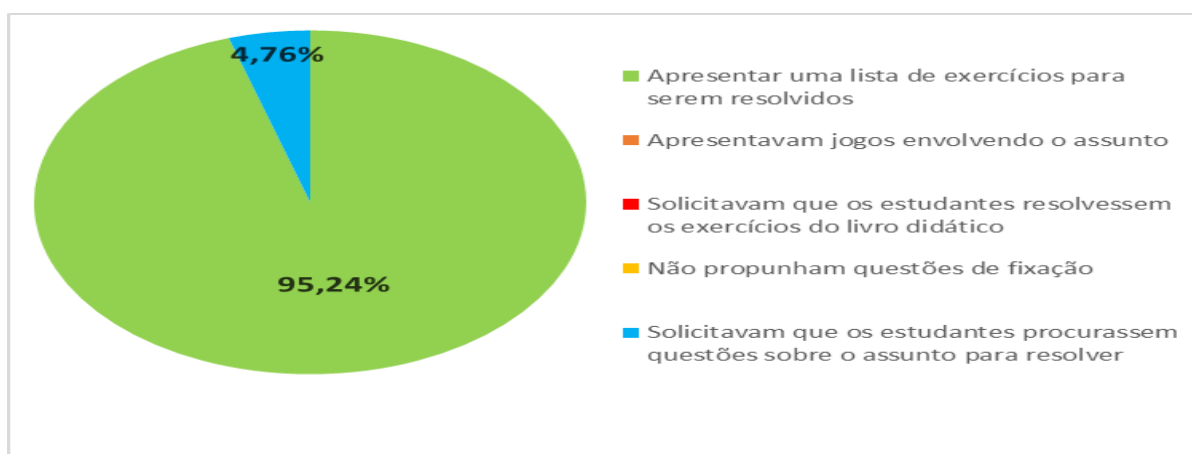
A seguir apresentamos os dados sobre as práticas utilizadas pela professora da turma para praticar o conteúdo de matemática segundo os discentes.

Quadro 54 - Ferramentas utilizadas pela professora para praticar o conteúdo de matemática segundo os discentes

PRÁTICAS METODOLÓGICAS	Nº DE ESTUDANTES	%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	20	95,24
Apresentavam jogos envolvendo o assunto	---	---
Solicitavam que os estudantes resolvessem os exercícios do livro didático	---	---
Não propunham questões de fixação	---	---
Solicitavam que os estudantes procurassem questões sobre o assunto para resolver	1	4,76
TOTAL	21	100

Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Gráficos 31 - Ferramentas utilizadas pela professora para praticar o conteúdo de matemática segundo os discentes



Fonte: Pesquisa de campo (2022)

Em relação as práticas pedagógicas utilizadas pela professora de matemática para a fixação do conteúdo, verificamos que é utilizado predominantemente listas de exercícios para serem resolvidos pois 95,24% dos discentes marcaram essa opção e 4,76% afirmaram que a professora solicitava que os estudantes procurassem questões sobre o assunto para resolver.

Com isso, conseguimos comprovar a preferência dos docentes em utilizar listas de exercícios ao invés de utilizar outra metodologia, ou seja, não há uma preocupação em seguir orientações de ensino contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de matemática, pois conforme indica esse documento, “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1997, p. 32) e dentre essas possibilidades de práticas educacionais está a resolução de problemas que possibilita o estudante:

questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos. (BRASIL, 1997, p. 33)

Portanto, a procura por parte dos docentes sobre instrumentos metodológicos para ensinar matemática e aplicá-las em sala de aula é de suma importância, pois terá reflexo direto nos resultados de aprendizagem dos estudantes.

5. 1. 3 - Pré-teste

Conforme mencionado anteriormente, aplicamos o pré-teste, também, no dia 21 de outubro de 2022 após os estudantes responderem e entregarem o questionário socioeconômico. O pré-teste foi constituído de dez questões sobre adição e subtração de frações. Para esse momento, solicitamos que a turma realizasse a leitura e respondessem conforme seus conhecimentos matemáticos sobre o assunto abordado. Logo em seguida os discentes mencionaram não conseguir responder porque não tinham conhecimento desse conteúdo, e realmente, como a própria professora ressaltou, foi iniciado muito superficialmente com a turma a parte de adição e subtração de frações com denominadores iguais. Pedimos então que não se preocupassem e que respondessem somente o que conseguissem e, em último caso, deixasse em branco quais não conseguissem resolver. Como citado anteriormente, o

pré-teste foi efetivado por 21 participantes em aproximadamente 50 minutos, no horário de 08h10min às 09h00min. Vale apenas mencionar que apesar de ainda não conhecerem completamente o conteúdo, todos leram com bastante atenção as questões na tentativa de obter as respostas. Os dados obtidos no pré-teste serão apresentados e analisados na próxima seção da pesquisa denominada análise a posteriori e validação.

Quadro 55 - Resultado do pré-teste

QUESTÃO		ACERTOS	ERROS	EM BRANCO
1	a	10	11	0
	b	8	13	0
	c	10	11	0
	d	10	11	0
	e	0	21	0
	f	0	21	0
	g	0	21	0
	h	0	21	0
	i	0	21	0
2		6	13	2
3		1	17	3
4		10	10	1
5		4	16	1
6		1	18	2
7		0	20	1
8		0	19	2
9		0	18	3
10		0	16	5

Fonte: experimentação (2022)

Como é possível observar, houve estudantes que conseguiram acertar questões que envolviam adição e subtração de fração com denominadores iguais. Isso se deu pelo motivo antes mencionado de que a professora da turma já havia iniciado o mesmo com eles. Contudo, quando se tratou de operar com denominadores diferentes não houve nenhum acerto, pois tais operações eram totalmente desconhecidas pela turma. No capítulo 6 traremos análise mais detalhada sobre esses resultados.

5.2 - SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro aconteceu no dia 03 de novembro de 2022 (quinta-feira) de 08h45min às 10h30min com a participação de 20 alunos. A distância de tempo do segundo encontro para o primeiro encontro se deu devido a semana dos jogos internos realizados na escola. No segundo encontro aplicamos nossa primeira atividade elaborada para construir a regra de resolução das operações adição de frações com denominadores iguais, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.

A atividade 1 teve início com a organização da turma em 5 grupos de 4 estudantes, os quais denominamos de grupo A, B, C, D e E. Em seguida houve a distribuição de uma cópia da atividade impressa para cada grupo. Solicitamos que todos os membros de cada grupo participassem da resolução das atividades, pois o objetivo era que todos pudessem discutir entre si sobre a estratégia de resolução e preenchessem a atividade proposta.

Os estudantes estavam bastante interessados, porém logo no início, estiveram um tanto dispersos. Nesse momento, orientamos quanto a necessidade de concentração e então iniciamos as orientações quanto a elaboração do desenho geométrico para resolução da atividade e como preencher o quadro de registro das questões solicitado ao final da atividade. Para isso, fizemos uma demonstração no quadro branco de como ficaria a resolução da primeira questão e como a mesma ficaria preenchida no quadro de registros citado acima.

Após demonstrarmos no quadro como seria o procedimento para resolver por meio do desenho, os estudantes rapidamente entenderam e começaram a construir os desenhos para cada situação-problema e, conforme havíamos solicitado de início, fizeram rodízio para realização das resoluções, ou seja, cada membro do grupo resolvia uma questão até que todos resolvessem, e assim, todos participaram e contribuíram para a efetivação da atividade.

Para conclusão da atividade, após terem feito os registros, pedimos que os estudantes lessem novamente o objetivo e elaborassem um conceito para a regularidade que haviam percebido nas resoluções. Verbalmente, os mesmos conseguiram explanar o que observaram, no entanto, levaram algum tempo para chegarem a uma conclusão do grupo. Com relação a escrita, percebemos que os mesmos possuem dificuldades em ler e escrever, por isso, tivemos que orientá-los

com exemplos e indagações que pudessem auxiliá-los na construção de uma conclusão conceitual de forma escrita. O quadro 56 a seguir apresenta as transcrições das conclusões escritas por cada grupo.

Quadro 56 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 1

Grupo	Transcrição das conclusões dos grupos	Classificação
A	Para somar com números iguais só precisa repetir o denominador e só somar com o numerador.	Válida, não prevista e não desejada.
B	Para conseguir o resultado temos que somar os dois numerador e conservar o denominador.	Válida, prevista e desejada.
C	Somando os números de cima com o total com os de baixo e pintando os quadradinhos de duas cores diferentes.	Válida, não prevista e não desejada.
D	Somamos e fizemos quadradinhos para resolver denominadores iguais.	Válida, não prevista e não desejada.
E	Soma o numerador com o numerador da outra fração e coloca o resultado na frente. Quando o denominador for igual você conserva o número e coloca abaixo apenas quando for uma fração de adição.	Válida, não prevista e não desejada.

Fonte: Experimentação (2022).

Após todos os grupos terem entregado suas conclusões fomos ao quadro branco para discuti-las e então chegamos ao momento da institucionalização, última fase do ensino por atividades, onde levamos os estudantes a compreenderem que para somar frações com denominadores iguais precisamos somar os numeradores e conservar (repetir) o mesmo denominador. Dessa forma, realizamos a classificação quanto a validade de cada conclusão conforme se aproximava ou não da institucionalização da atividade 1. O quadro a seguir mostra a frequência e o percentual das conclusões formuladas pelos estudantes na atividade 1, conforme os possíveis tipos de classificações.

Quadro 57 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 1

Classificação	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	1	20%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	4	80%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	0	0%
TOTAL	5	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Como podemos observar no quadro acima, apenas um grupo apresentou uma conclusão válida, prevista e desejada, enquanto que os demais grupos, formalizaram uma conclusão válida que não foi prevista e nem desejada, ou seja, não souberam explicitar na escrita que estavam realizando uma adição de numeradores e conservação de denominadores. Todavia, a maioria percebeu que estavam somando apenas os numeradores de cada fração e repetindo o mesmo denominador. Observadas tais dificuldades em relação a transcrição do raciocínio, torna-se ainda mais necessário e importante o momento da institucionalização, isto é, a formulação da conclusão juntamente com a turma, partindo e aprimorando as ideias e conceitos que surgiram durante a atividade. A seguir buscamos analisar a validade das conclusões da atividade 1 e apresentamos o quadro 58.

Quadro 58 - Validade das conclusões da atividade 1

Validade das conclusões	Validade das conclusões	Percentual
Válida	1	20%
Parcialmente válida	4	80%
Inválida	0	0%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	5	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Com isso, concluímos que 20% dos estudantes encontraram conclusões válidas e 80% parcialmente válida por conter ideias incompletas, no entanto, o ponto positivo foi que todos os grupos formularam alguma conclusão, mostrando o interesse dos estudantes em concluir a atividade apesar da inexperiência.

5.3 - TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro aconteceu no dia 04 de novembro de 2022 (sexta-feira) de 07h30min às 09h00min com a participação de 20 alunos. Nesse terceiro encontro aplicamos nossa segunda atividade elaborada para construir a regra para resolução das operações com subtração de frações com denominadores iguais, utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.

A atividade 2 teve início com a organização da turma nos mesmos 5 grupos de 4 estudantes formados na atividade do dia anterior, isto é, grupos A, B, C, D e E. Vale a pena ressaltar que faltaram 5 estudantes que participaram da atividade anterior e estiveram presentes 5 estudantes que não participaram da primeira atividade, ou seja, da atividade do dia anterior. Esses, foram inseridos nos grupos que houveram faltas de participantes. Em seguida houve a distribuição de uma cópia da atividade impressa para cada grupo. E, também, solicitamos que todos os membros de cada grupo participassem da resolução das atividades, pois o objetivo era que todos pudessem discutir entre si sobre a estratégia de resolução e preenchessem a atividade proposta. Os estudantes se mostraram ainda mais interessados, menos dispersos no início e com maior concentração. Reforçamos a necessidade de manter a concentração e então iniciamos as orientações quanto a elaboração do desenho geométrico para resolução da atividade e como preencher o quadro de registro das questões solicitado ao final da atividade. Para isso, fizemos uma demonstração no quadro branco de como ficaria a resolução da primeira questão e como a mesma ficaria preenchida no quadro de registros citado acima.

Após demonstrarmos no quadro como seria o procedimento para resolver por meio do desenho, os estudantes rapidamente entenderam e começaram a construir os desenhos para cada situação-problema e, conforme havíamos solicitado de início, fizeram rodízio para realização das resoluções, ou seja, cada membro do grupo resolvia uma questão até que todos resolvessem, e assim, todos participaram e contribuíram para a efetivação da atividade.

Para conclusão da atividade, após terem feito os registros, pedimos que os estudantes lessem novamente o objetivo e elaborassem um conceito para a regularidade que haviam percebido nas resoluções. Verbalmente, os alunos conseguiram explicar o que observaram, no entanto, levaram algum tempo para chegarem a uma conclusão do grupo. Com relação a escrita, percebemos, mais uma vez, que os discentes demonstraram dificuldade para transmitir por meio da escrita a conclusão que haviam chegado. Contudo, conseguiram com mais facilidade elaborar uma conclusão, haja vista já haverem elaborado semelhantemente na atividade anterior. Mas ainda foi necessária nossa orientação para alguns grupos conseguirem escrever sua conclusão. Na continuidade organizamos as transcrições das conclusões escritas por cada grupo no quadro 59.

Quadro 59 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 2

Grupo	Transcrição das conclusões dos grupos	Classificação
A	Para subtrair com denominadores iguais só precisa repetir o denominador e subtrair o numerador.	Válida, prevista e desejada.
B	Para obtermos o resultado basta conservar o denominador e subtrair os numeradores.	Válida, prevista e desejada.
C	Subtrai os numeradores que dá o resultado exato da subtração e os denominadores repetem.	Válida, não prevista e não desejada.
D	Agente subtraiu e repetiu os denominadores.	Válida, não prevista e não desejada.
E	Subtraímos os numeradores entre si e conservamos o denominador.	Válida, prevista e desejada.

Fonte: Experimentação (2022).

A atividade 2 foi institucionalizada após a apresentação e análise em conjunto com a turma sobre as conclusões elaboradas pelos grupos. Tal momento é de suma importância para efetivação da atividade pois nesse momento juntamente com a turma formalizou-se que: para subtrair frações com denominadores iguais precisamos subtrair os numeradores e conservar (repetir) o mesmo denominador. O quadro 60 a seguir mostra com mais detalhes o resultado das conclusões dessa atividade 2.

Quadro 60 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 2

Classificação	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	3	60%
Válida, prevista e não desejada	0	0%
Válida, não prevista e não desejada	2	40%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada		0%
TOTAL	5	100%

Fonte: Experimentação (2022).

De acordo com os resultados acima, três grupos apresentaram uma conclusão desejada e dois grupos formalizaram uma conclusão válida que não foi prevista e nem desejada. A partir disso, percebe-se que, a turma compreendeu (alguns estudantes parcialmente) que estavam subtraindo apenas os numeradores de cada fração e repetindo o mesmo denominador. Segue abaixo a análise da validade das conclusões da atividade 2.

Quadro 61 - Validade das conclusões da atividade 2

Validade das conclusões	Validade das conclusões	Percentual
Válida	5	100%
Inválida	0	0%
Não formulou conclusão	0	0%
TOTAL	5	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Desse modo, pode-se concluir que todos os grupos encontraram conclusões válidas. E isso é muito positivo, pois, significa que as atividades proporcionaram o estudante chegar a suas próprias conclusões. Vale ressaltar que a turma esteve entusiasmada e interessada em participar durante toda a atividade.

Ao final desse momento de institucionalização, conseguimos perceber que a experiência com as duas atividades possibilitou nos estudantes uma melhor compreensão que uma operação de adição e subtração com frações cujos denominadores são iguais, adicionam-se ou subtraem-se os numeradores e conserva ou repete o denominador.

5.4 - QUARTO ENCONTRO

No dia 10 de novembro de 2022 aconteceu o quarto encontro de aplicação da sequência didática, no horário das 08h45min às 10h30min. Nesse encontro aplicamos as atividades com questões de aprofundamento para as atividades 1 e 2, cujo objetivo foi aprofundar os conhecimentos adquiridos durante a realização dessas atividades, ou seja, conhecimento sobre a operacionalização das operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais.

A atividade de aprofundamento 1 teve início às 08h45min com a organização da turma de modo que todos realizassem de forma individual. Em seguida foi entregue uma cópia da atividade para cada estudante e, após todos estarem com suas atividades, explicamos que se tratava de uma atividade referente à primeira atividade que haviam realizado e que deveriam responder conforme haviam apreendido tal conceito. Todos iniciaram as resoluções e tiramos as dúvidas conforme elas surgiam. O quadro 62 a seguir demonstra o resultado dos estudantes nessa atividade em que consideramos C para correta, E para errado e B para questões em branco.

Quadro 62 – Desempenho dos estudantes na atividade de aprofundamento da atividade 1

Estudantes	Atividade de Aprofundamento da Atividade 1													Acertos %	Erros %	Em branco (%)
	Questões															
	Q1	Q2					Q3		Q4		Q5	Q6	Q7			
		A	b	c	d	e	a	b	a	b						
E1	E	C	C	C	C	C	C	C	B	E	C	E	E	61,5	30,7	7,8
E3	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	92,3	7,8	0
E4	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	-	76,9	15,3	7,8
E5	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	C	C	69,2	30,7	0
E7	E	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	E	E	46,1	53,8	0
E8	E	C	C	C	C	C	B	B	B	B	E	B	B	38,4	15,3	46,1
E10	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	E	E	53,8	46,1	0
E11	E	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	E	E	46,1	53,8	0
E13	E	C	C	C	C	C	B	B	B	B	E	B	B	38,4	15,3	53,8
E14	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	92,2	7,8	0
E15	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	B	46,1	0	53,8
E16	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100	0	0
E17	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	B	76,9	15,3	7,8
E19	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	E	84,7	15,3	0
E20	E	C	C	C	C	C	E	E	E	E	E	E	E	38,4	61,5	0
E21	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	92,2	7,8	0
E22	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	C	C	C	69,2	30,8	0
E23	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	92,2	7,8	0
E24	E	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	E	E	69,2	30,8	0
E25	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	84,6	7,8	7,8
E29	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100	0	0
E31	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	92,2	0	7,8
E33	B	E	E	E	E	E	B	B	B	B	B	B	B	0	38,4	61,6
E35	E	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	B	69,2	23,0	7,8

Fonte: Experimentação (2022).

Os estudantes responderam as questões com bastante firmeza, exceto as questões 1, 6 e 7 pois, a dificuldade de expressar-se tornou-se, mais uma vez, um grande obstáculo para eles. Observou-se, também, uma certa dificuldade envolvendo as questões 3 e 4 o que evidencia a falta da metodologia resolução de problemas nas aulas de matemática dessa turma, ou seja, os estudantes estão acostumados a resolverem questões diretas que não exige interpretação.

Sendo assim houve a necessidade de realizarmos algumas demonstrações para que eles resolvessem tais questões. E mesmo assim, poucos conseguiram responder de modo satisfatório. O término dessa atividade se deu às 09h30min, pois é o horário que os estudantes saem para lanche.

Após 15 minutos retornamos para a sala de aula e iniciamos a segunda atividade, isto é, a atividade referente à subtração de frações com denominadores

iguais. O quadro 63 a seguir demonstra o resultado dos estudantes nessa atividade em que consideramos C para correta, E pra errado e B para questões em branco.

Quadro 63 – Desempenho na atividade de aprofundamento da atividade 2

Estudantes	Atividade de Aprofundamento da Atividade 2										Acertos%	Erros %	Em branco (%)
	Questões												
	Q1	Q2					Q3		Q4	Q5			
a		b	c	d	e	a	b						
E1	E	C	C	C	C	C	C	C	E	C	80	20	0
E3	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	100	0	0
E5	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E7	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	60	40	0
E8	E	C	C	C	C	C	B	B	B	B	50	10	40
E10	E	C	C	C	C	C	C	C	E	E	70	30	0
E11	C	C	C	E	C	C	E	E	E	C	60	40	0
E13	C	C	C	C	C	C	B	B	B	B	60	0	40
E14	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E15	E	C	C	C	C	C	C	C	E	E	70	30	0
E16	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E17	E	C	C	E	C	C	C	C	E	C	70	30	0
E19	E	C	C	C	C	C	C	C	C	E	80	20	0
E20	E	C	C	C	C	C	C	E	E	E	60	40	0
E21	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	90	10	0
E22	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	90	10	0
E23	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E24	C	C	C	C	C	C	E	E	C	C	80	20	0
E25	E	C	C	C	C	C	E	E	E	C	60	40	0
E29	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	90	10	0
E31	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	90	10	0
E33	C	C	C	C	C	C	E	E	C	E	70	30	0
E34	E	C	C	C	C	C	E	E	E	C	60	40	0
E35	E	C	C	C	C	C	E	C	C	C	80	20	0

Fonte: experimentação (2022)

A turma continuou organizada da mesma forma que havia estado antes do intervalo e distribuímos as cópias, uma para cada estudante. Explicamos que essas questões eram referentes ao conhecimento adquirido durante o desenvolvimento da atividade 2, ou seja, do encontro anterior e solicitamos que lessem com atenção e buscassem as soluções mediante cada situação. E orientamos que usassem o desenho geométrico caso sentissem necessidade.

No decorrer da atividade os estudantes também apresentaram dificuldade em responder as questões 1, 4 e 5, pois envolviam análise e interpretação e, como já havíamos observado, situações desse tipo gera dificuldade para eles. Desse modo, tentamos sanar as dúvidas e ajuda-los a chegar ao resultado. Contudo, muitos estudantes novamente não conseguiram concluir e chegar a solução dessas questões. A atividade encerrou às 10h30min. Nos despedimos e agradecemos a participação, envolvimento e compromisso com essa pesquisa e, confirmamos o próximo encontro.

5.5 - QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro aconteceu no dia 11 de novembro de 2022, com a participação de 21 estudantes. Teve início às 07h30min e houve a necessidade de liberar a turma a pedido da direção da escola para que a mesma pudesse participar de uma feira científica que estava ocorrendo em outra escola vizinha. Por esse motivo, nosso quinto encontro teve apenas duração de vinte minutos, pois a turma foi liberada às 07h50min. Desta forma, não foi possível realizar a atividade 3 nesse dia.

5.6 - SEXTO ENCONTRO

No dia 17 de novembro de 2022, às 08h45min iniciamos a retomada das resoluções da primeira parte da atividade 3, que como já explicamos acima, não foi possível prosseguir com ela nesse dia. Essa atividade tem como objetivo descobrir uma maneira operacional de determinar a adição de duas frações com denominadores diferentes. A primeira parte é composta de 10 situações-problemas: cinco problemas com frações possuindo numeradores iguais a 1; e cinco problemas com frações cujos numeradores são o número 1 e outro diferente de 1.

Então, como a mesma apenas iniciou no encontro anterior, nesse dia 17 reiniciamos a essa atividade, ou seja, formamos os mesmos grupos do encontro anterior (A, B, C, D, E) e distribuímos novamente uma cópia da atividade para cada grupo. Os lápis coloridos eles trouxeram de casa pois sabiam que seriam necessários para pintar os desenhos.

Após isso, voltamos a solicitar que todos os membros de cada grupo participassem da resolução das atividades para poder alcançar o objetivo que era:

discutir entre si sobre a estratégia de resolução, preencher a atividade proposta e formular uma conclusão ao final. Orientamos, também, quanto a necessidade de concentração para compreensão e execução da atividade.

Iniciamos as orientações quanto a elaboração do desenho geométrico para resolução da atividade fazendo uma demonstração no quadro branco de como ficaria a resolução da primeira questão. E assim, pedimos que eles realizassem as operações desde o início novamente, já que, não foi possível realizar no encontro anterior.

Após demonstrarmos no quadro como seria o procedimento para resolver por meio do desenho, os estudantes estavam bastante interessados. No entanto, não conseguiram construir o desenho sozinhos para a segunda questão. Percebeu-se que houve dificuldade de percepção inicialmente como já havíamos previsto, pois trabalhar com denominadores diferente exige um pouco mais raciocínio na construção do desenho. Para sanar as dúvidas decorrentes da resolução da primeira questão, demonstramos mais uma vez como construir o desenho geométrico exemplificando com a segunda e terceira questão.

Com essas construções, os estudantes pediram que não fizéssemos mais nenhuma e que deixássemos que eles fizessem as próximas. E assim, ao entenderem, começaram a construir os desenhos para cada situação-problema e sempre que surgia alguma dúvida íamos até o grupo para ajudá-los. Conforme havíamos solicitado de início, fizeram rodízio para realização das resoluções, ou seja, cada membro do grupo resolvia uma questão até que todos resolvessem, e assim, todos participaram e contribuíram para a efetivação da atividade. Todos os grupos finalizaram as resoluções dessa primeira parte e nos devolveram. O registro das respostas e elaboração da conclusão será feita ao final da segunda parte da atividade.

5.7 -SÉTIMO ENCONTRO

O sétimo encontro ocorreu no dia 18 de novembro de 2022 de 07h15min até 08h45min, nesse dia aplicamos a segunda parte da atividade 3 composta de 10 questões que apresentavam duas frações com numeradores diferentes de 1.

Formamos os mesmos grupos do encontro anterior (A, B, C, D, E) com os mesmos participantes, inserindo os quais não participaram do encontro anterior no lugar dos quais vieram a faltar nesse dia 18. Em seguida foram distribuídas as cópias

da atividade para cada grupo e pedimos que lessem com atenção. Após a leitura dos grupos, iniciamos as orientações quanto a elaboração do desenho geométrico para resolução da atividade fazendo uma demonstração no quadro branco de como ficaria a resolução da primeira questão.

Ao demonstrarmos no quadro como seria o procedimento para resolver por meio do desenho, os estudantes mostraram-se bastante interessados em resolver, pois já haviam realizado a primeira parte e essa segunda parte possuía o mesmo método, porém com a necessidade de maior atenção já que os numeradores eram diferentes de 1. Portanto, conseguiram construir os desenhos sozinhos para a segunda questão. Percebeu-se que não houve dificuldade de percepção como no início da primeira parte.

Os grupos começaram suas construções e conforme as dúvidas surgiam tentávamos ajudá-los. E como nas outras atividades enfatizamos a importância de realizarem as resoluções de maneira conjunta para que todos os integrantes do grupo pudessem compreender e conseguir resolver as questões.

Ao concluírem as resoluções dessa segunda parte, devolvemos as resoluções da primeira parte para seus respectivos grupos para que fizessem os registros das mesmas conforme solicitado ao final da segunda parte. Com os registros feitos, pedimos que os grupos lessem entre si novamente o objetivo e elaborassem um conceito para a regularidade que haviam percebido nas resoluções. Expressando-se verbalmente, os mesmos conseguiram explicar o que observaram, no entanto, levaram algum tempo para chegarem a uma conclusão do grupo.

Com relação a escrita, voltamos a perceber as mesmas dificuldades anteriores, isto é, de organizar e expressar de maneira escrita um determinado pensamento. Nesse momento tivemos que orientá-los com exemplos e indagações que pudessem auxiliá-los na construção de uma conclusão conceitual de forma escrita. O quadro 64 a seguir apresenta as transcrições das conclusões escritas por cada grupo.

Quadro 64 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 3

Grupo	Transcrição das conclusões dos grupos	Classificação
A	Sem resposta	
B	Multiplicamos os denominadores somamos os numeradores.	Válida, prevista e não desejada.
C	Sem resposta	

D	A gente soma o numerador com o denominador	Inválida, não prevista e não desejada.
E	Tem que multiplicar os dois de baixo e depois multiplicar os denominadores com os numeradores que vai dar o resultado de cima.	Válida, não prevista e não desejada.

Fonte: Experimentação (2022).

A atividade 3 assim, como as atividades anteriores, foi institucionalizada após a apresentação e análise em conjunto com a turma sobre as conclusões elaboradas pelos grupos. As informações contidas no quadro acima deixam claro a dificuldade enfrentada pelos alunos em formalizar uma conclusão. Dois grupos deixaram em branco e não conseguiram expressar seu entendimento de maneira escrita.

Partindo dessa análise, conseguimos formalizar verbalmente e transcrever o conceito de que para adicionar frações com denominadores diferentes multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, adicionamos os numeradores resultantes. O quadro 65 a seguir mostra o resultado de validação das conclusões dessa atividade 3.

Quadro 65 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 3

Classificação	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	0	0%
Válida, prevista e não desejada	1	33,3%
Válida, não prevista e não desejada	1	33,3%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	1	33,3%
Total	3	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Como mostra o quadro acima, nenhum grupo conseguiu formalizar uma conclusão válida, prevista e desejada. Um grupo formalizou uma conclusão inválida e dois grupos optaram por deixar em branco, pois não conseguiram expressar seu entendimento. Com a resolução das questões percebeu-se um bom entendimento de resolução por parte dos estudantes, porém, quando se trata de escrever suas ideias, eles têm grandes dificuldades. Segue a baixo a análise da validade das conclusões da atividade 3.

Quadro 66 - Validade das conclusões da atividade 3

Validade das conclusões	Validade das conclusões	Percentual
Válida	0	0%
Parcialmente válida	2	40%
Inválida	1	20%
Não formulou conclusão	2	40%
Total	5	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Desse modo, pode-se concluir que nenhum grupo conseguiu escrever uma conclusão que fosse válida, prevista e desejada. Dois grupos chegaram a construir uma solução parcialmente válida, um grupo formalizou conclusão inválida e outros dois grupos não escreveram nada. Vale apenas destacar que esse resultado é referente a escrita da conclusão, uma vez que, ao observar as resoluções das questões percebe-se que os estudantes em sua maioria conseguiram identificar as características de resolução de situações que envolvem adição de fração com denominadores diferentes, pois, resolveram as questões por meio do desenho geométrico de maneira correta.

5.8 - OITAVO ENCONTRO

No dia 22 de novembro de 2022 de 08h45min às 10h30min, ocorreu o oitavo encontro com a participação de 22 estudantes. Nesse dia aplicamos a atividade de aprofundamento da atividade 3 com o objetivo de aprofundar os conhecimentos adquirido durante a realização dessa atividade, ou seja, da operacionalização de adição de fração com denominadores diferentes. O método utilizado para realização dessa atividade de aprofundamento 3 foi de maneira individual, isto é, cada estudante resolvia suas questões individualmente para colocar em prática o que aprendeu nos grupos, para isso foi distribuído uma cópia do material com as questões para cada estudante.

Quando todos já estavam com seus materiais em mãos, voltamos a explicar que essa atividade continha questões que eles resolveriam utilizando os conhecimentos adquiridos nos dois encontros anteriores sobre adição de fração com denominadores diferentes. Determinamos um tempo de 45 minutos para que eles respondessem e ressaltamos que poderiam resolver diretamente por meio da regra aprendida ou utilizar o desenho geométrico para as resoluções. E, também, qualquer

dúvida poderiam contar conosco para ajudá-los. Solicitamos calma e atenção para poderem interpretar o que cada questão pedia.

Durante a realização das resoluções surgiram dúvidas sobre interpretações, por isso, precisamos intervir em alguns momentos nos dirigindo não somente ao estudante individualmente, mas também, a turma toda já que as dúvidas de um poderia ser uma dúvida de toda a turma ou de maioria dela. Todos estiveram concentrados durante o tempo de resolução. Ao completar o tempo estabelecido, todos haviam finalizado.

Nesse momento informamos que iríamos resolver todas as questões juntamente com eles no quadro branco, para que assim, eles pudessem identificar se houve algum erro em suas resoluções, se interpretaram de forma correta todas as questões e tirar alguma dúvida que não havia sido possível de ser resolvida durante a atividade.

E assim, as 09hs45min iniciamos as resoluções no quadro. Foi um momento proveitoso, pois os estudantes puderam interagir fazendo suas observações e corrigindo o que por ventura haviam errado. E o mais importante, houve interesse de participação da parte deles e relatos de que estavam gostando e conseguindo aprender com essas atividades. Com isso encerramos as resoluções às 10hs30min. Agradecemos a participação no encontro daquele dia e reforçamos o próximo.

5.9 - NONO ENCONTRO

No dia 24 de novembro de 2022 aconteceu o nono encontro com duração de 90 minutos (08h45min às 10h30min) e houve a participação de 26 alunos. O objetivo desse encontro foi aplicar a atividade 4 que também foi dividida em duas partes. A primeira composta de 10 situações-problemas: cinco problemas com frações possuindo numeradores iguais a 1; e cinco problemas com frações cujos numeradores são o número 1 na primeira fração e outro número diferente de 1 na segunda fração. A segunda parte, também, composta de 10 situações problemas: cinco problemas com frações cujos numeradores são um número diferente de 1 na primeira fração e outro número igual a 1 na segunda fração: e cinco problemas com frações cujos numeradores são todos diferentes de 1.

Essa atividade foi elaborada para induzir os estudantes a construírem a regra para resolução das operações com subtração de frações com denominadores diferentes utilizando o desenho geométrico para resolver as situações-problemas.

Para essa atividade preferimos que os alunos ficassem em duplas. Rapidamente se organizaram e com as duplas já formadas distribuímos uma cópia do material para cada uma e solicitamos que todos lessem com atenção, pois tratava de uma atividade com situações-problemas que seriam resolvidos de modo semelhante às questões da atividade 3. Eles logo perceberam que a atividade seria de subtração com denominadores diferentes.

Em seguida, apresentamos no quadro para a turma como ficaria a resolução da primeira questão com o auxílio da representação geométrica proposta. Perguntamos se havia alguma dúvida e como já havíamos previsto, devido já terem familiaridade com os desenhos trabalhados nas atividades anteriores, eles não mencionaram dúvidas. Contudo, para efeito de fixação, resolvemos juntamente com eles também a segunda questão. Solicitamos que as duplas resolvessem as demais, porém, sempre com a atenção nas resoluções geométricas para que delas eles pudessem descobrir uma maneira de obter os resultados desejados sem precisar dos desenhos. Determinamos um tempo de 50 minutos para realizarem as resoluções, registro e conclusão.

Logo nas primeiras cinco questões, eles associaram à regra de adição de frações com denominadores diferentes e, comentaram que a diferença consistia em subtrair o resultado dos numeradores ao invés de somar como é na adição. Com isso, as duplas realizaram todas as questões da atividade 3 no mesmo encontro, ou seja, a primeira e a segunda parte, pois já conseguiam responder por meio da regra.

Pedimos que após as resoluções, fizessem os registros das repostas no quadro determinado para isso e, também, escrevessem suas conclusões ao final da atividade. Todas as duplas concluíram no prazo estabelecido.

Às 10hs iniciamos a sistematização dessa atividade com a turma. Cada dupla apresentou suas conclusões e delas formalizamos o conceito de que para subtrair frações com denominadores diferentes multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo denominador da primeira. E, por fim, subtraímos os numeradores resultantes. O quadro 67 a seguir apresenta as transcrições das conclusões escritas por cada dupla.

Quadro 67 - Conclusões apresentadas pelos estudantes na atividade 4

Duplas	Transcrição das conclusões dos grupos	Classificação
D1	Sem resposta	
D2	Sem resposta	
D3	Sem resposta	
D4	Multiplicaremos os denominadores entre si, para obtermos o denominador resultante. Em seguida, multiplicamos o denominador da 2ª fração com o numerador da 1ª fração, após isso multiplicamos o denominador da 1ª fração e multiplicaremos com o numerador da 2ª fração. Com os resultados subtraímos e temos o resultado.	Válida, prevista e desejada.
D5	A regra é denominador multiplica com o denominador e dá a conta de baixo e multiplica o denominador primeiro com o numerador segundo, numerador primeiro com denominador segundo.	Válida, prevista e não desejada.
D6	A conclusão é que para o denominador da resposta precisa que multiplicar os dois denominadores das frações para a resposta denominador. Do numerador é preciso de multiplicar o denominador da primeira fração com o numerador da segunda fração assim colocando em cima o resultado. Depois faz o mesmo, multiplica o denominador da segunda fração com o numerador da primeira fração colocando em cima o resultado e depois subtrair os dois e coloca na resposta do numerador.	Válida, prevista e desejada.
D7	É só somar a soma do número de cima pelo de baixo que dá o resultado.	Inválida, não prevista e não desejada.
D8	Para subtrair com denominadores diferentes você precisa multiplicar os denominadores e multiplicar os denominadores com numeradores.	Válida, não prevista e não desejada.
D9	Multiplica os dois denominadores de baixo para dá o resultado. Depois multiplicamos os números de cima e de baixo para dá o resultado de cima.	Válida, não prevista e não desejada.
D10	Pegamos o numerador com denominador para subtração e multiplicamos os numerador com denominador.	Inválida, não prevista e não desejada.
D11	Para subtrair com denominadores diferente você precisa multiplicar os denominadores e multiplicar os numeradores com os denominadores.	Válida, não prevista e não desejada.

Fonte: Experimentação (2022).

As informações contidas no quadro a cima evidenciam, mais uma vez, a dificuldade que esses estudantes possuem na escrita, isto é, em formalizar uma conclusão de maneira clara e precisa já que nas resoluções fica claro o entendimento deles sobre a regra. Apenas duas duplas escreveram uma conclusão válida, prevista

e desejada, quatro duplas apresentaram a escrita de uma conclusão válida, mas não desejada, significando estar parcialmente correta. Duas duplas escreveram uma conclusão inválida e outras três duplas deixaram o espaço da conclusão sem resposta, ou seja, não conseguiram expressar, de forma nenhuma, seu entendimento de maneira escrita.

Partindo dessa análise, conseguimos formalizar verbalmente e transcrever o conceito de que para adicionar frações com denominadores diferentes multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, adicionamos os numeradores resultantes. O quadro 68 a seguir mostra o resultado de validação das conclusões dessa atividade 4.

Quadro 68 - Percentual de classificação das conclusões da atividade 4

Classificação	Frequência	Percentual
Válida, prevista e desejada	2	18,2 %
Válida, prevista e não desejada	1	9,0 %
Válida, não prevista e não desejada	3	27,2%
Inválida, prevista e não desejada	0	0%
Inválida, não prevista e não desejada	2	18,2%
Não formulou conclusão	3	27,2%
Total	11	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Como vimos, o maior número de estudantes formalizou uma conclusão não desejada ou nem chegaram a formalizar nenhum tipo. E, levando em consideração o geral, apenas 4 alunos (duas duplas) conseguiu expressar na escrita sua ideia de maneira correta. Segue abaixo a análise da validade das conclusões da atividade 4.

Quadro 69 - Validade das conclusões da atividade 4

Validade das conclusões	Validade das conclusões	Percentual
Válida	2	18,2%
Parcialmente válida	4	36,3%
Inválida	2	18,2%
Não formulou conclusão	3	27,2%
Total	11	100%

Fonte: Experimentação (2022).

Desse modo, pode-se concluir: o número de alunos que conseguiu escrever uma conclusão correta é pouco em relação ao total de participantes da atividade. Vale apenas destacar, novamente, que esse resultado é referente a escrita da conclusão, uma vez que, ao observar as resoluções das questões percebe-se que os estudantes em sua maioria conseguiram identificar as características de resolução de situações que envolvem subtração de fração com denominadores diferentes.

5.10 - DÉCIMO ENCONTRO

O décimo encontro aconteceu no dia 25 de novembro de 2022 de 07h15min às 08h45min com a participação de 22 estudantes. Nesse encontro trabalhamos a atividade de aprofundamento da atividade 4 com o objetivo de aprofundar os conhecimentos adquiridos na atividade de subtração de fração com denominadores diferentes. Ao iniciarmos, explicamos como se daria a atividade desse dia e reafirmamos a importância de concentração e esforço para obtenção de um bom resultado. Em seguida, distribuimos uma cópia da atividade para cada estudante presente, pois esta atividade foi realizada de maneira individual. Combinamos com eles um tempo de 45 minutos para as resoluções e todos concordaram. No decorrer desse tempo, todos estiveram empenhados em resolver sua atividade e quando tinham alguma dúvida, íamos até o estudante.

As 08hs como combinado todos já haviam finalizado suas resoluções e assim, fomos até o quadro para resolver, juntamente com eles toda as questões e com isso, tirar qualquer dúvida que ainda pudesse existir. Quando viam que tinham errado em algum momento, eles mesmos faziam a correção. Finalizamos o encontro desse dia as 08h45min agradecendo a excelente participação de todos, o empenho em resolver a atividade e pelo desejo de aprender mais sobre subtração de frações com denominadores diferentes.

5.11 - DÉCIMO PRIMEIRO ENCONTRO

No décimo segundo encontro ocorrido no dia 29 de novembro de 2022 com início as 08h45min até às 10h30min, ocorreu o momento para Resolução de questões e Revisão dos conceitos construídos, que teve como objetivo verificar o desenvolvimento dos alunos para resolver situações-problemas após aplicação da

Sequência Didática e aprofundar os conhecimentos adquiridos no decorrer de todas as atividades.

Ao iniciar, pedimos que todos os estudantes se sentassem de forma individual. Distribuímos uma cópia da atividade de revisão para cada um. E explicamos que essa seria nossa última atividade antes do pós-teste e que nela continham oito questões envolvendo adição e subtração de frações com denominadores iguais e adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Ou seja, questões envolvendo todos os conhecimentos desenvolvidos no decorrer de toda sequência didática, e que, por isso, deveriam ter bastante atenção na leitura e interpretação de cada uma para então poder resolver de maneira correta. Combinamos um tempo de 45 minutos para responderem.

De início ficaram preocupados com medo de errar, mas depois resolveram as questões tranquilamente. Quando completou o tempo combinado todos já haviam finalizado suas resoluções. E assim, às 09h45min nos dirigimos ao quadro para resolver juntamente com eles as questões. Tiramos todas as dúvidas que surgiram em relação à interpretação dos problemas e houve excelente participação da turma. Encerramos às 10h30min convidando-os a não faltarem no próximo encontro.

5.12 - DÉCIMO SEGUNDO ENCONTRO

No último encontro com a turma escolhida para esta experimentação aplicamos o pós-teste da nossa sequência didática, que ocorreu no dia 06 de dezembro de 2022 com início às 08h45min até às 10h30min com participação de 21 estudantes, mesmo quantitativo do pré-teste, porém, desses 21 estudantes 3 não participaram do pré-teste, mas, estiveram presentes nas demais atividades da sequência didática.

Explicamos a eles que este teste continha as mesmas questões do pré-teste, ou seja, 10 questões de problemas envolvendo adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes, com o objetivo de analisarmos e observarmos se houve evolução dos mesmos em resolver problemas desse tipo. A aplicação ocorreu de maneira satisfatória e não precisaram de nossa intervenção para realizar o registro das soluções.

Todos os estudantes presentes resolveram o teste com atenção, maturidade de comportamento e de acordo com as habilidades desenvolvidas durante as atividades da sequência Didática e, também, cada um escolheu a maneira que

considerava mais propícia para resolver as questões. A seguir apresentamos uma análise da frequência dos discentes no experimento.

5.13 - FREQUÊNCIA DOS DISCENTES NO EXPERIMENTO

Este tópico apresenta a frequência dos discentes no experimento, analisando que efeitos a participação dos 29 estudantes produziu sobre o índice de acertos na resolução de problemas de adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes. Os dados sobre a frequência estão expostos quadro 70, onde adotamos P quando o estudante esteve presente e F quando o estudante faltou em alguma das atividades.

Quadro 70 - Participação dos estudantes nas atividades

Estudantes	Pré-teste	Atividade 1	Atividade 2	aprofundamento 1 e 2	atividade 3 (1ª parte)	Retomada da atividade 3 (1ª parte)	Atividade 3 (2ª parte)	aprofundamento 3	Atividade 4 (1ª e 2ª parte)	Aprofundamento 4	Resolução de questões	Pós -teste	Percentual de participação (%)
E1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E3	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	91,7
E4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	91,7
E5	P	F	P	P	P	P	P	P	P	F	F	F	58,3
E7	P	F	F	P	F	P	P	P	P	P	P	P	75
E8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E10	F	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	F	66,7
E11	P	F	P	P	F	P	P	P	P	P	F	P	75
E13	P	F	F	P	P	P	P	P	P	F	F	P	66,7
E14	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E15	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E16	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	F	F	75
E17	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E18	F	F	F	F	F	F	F	P	F	F	P	F	16,7
E19	F	P	P	P	F	F	F	F	P	P	P	F	50
E20	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	91,7
E21	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	83,3
E22	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	91,7
E23	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E24	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E25	F	P	F	P	P	P	P	P	P	P	P	P	83,3
E26	P	F	F	F	P	P	F	F	F	F	F	P	33,3
E27	F	P	F	F	F	F	F	F	P	P	F	F	25
E29	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E30	F	P	P	F	P	P	F	F	F	F	F	F	33,3

E31	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
E33	P	P	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P	91,7
E34	F	F	P	P	P	P	P	F	P	F	P	P	66,7
E35	F	P	F	P	F	F	F	P	P	P	P	P	58,3

Fonte: Experimentação (2022)

Com essas informações podemos observar que essa turma possuía 35 alunos matriculados, porém, houve desistências no decorrer do ano letivo restando assim 29 alunos frequentes. Outro ponto importante a destacar é que, essa escola onde realizamos a experimentação, recebe estudantes que residem em outras comunidades e que dependem de transporte escolar para se deslocarem até a instituição, devido a isso, a presença dos estudantes nas aulas nem sempre é de 100%, uma vez que, quando não há transporte o aluno não tem como chegar na escola.

Por esse motivo, apenas 7 estudantes participaram 100% da experimentação o que corresponde a 24% da amostra desta pesquisa e os 22 discentes que faltaram em alguma atividade representam 76% da amostra. Ou seja, como explícito no quadro acima, nem todos os 29 alunos estiveram presentes nos dias em que foram aplicados o questionário socioeducativo, pré-teste e pós-teste, por isso, consideramos para a análise do trabalho somente os 21 estudantes que estiveram presentes nesses dias. A seguir apresentamos algumas considerações sobre a realização da experimentação.

5.14 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A REALIZAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

A fase de experimentação da pesquisa aconteceu do dia 20/10/2022 a 06/12/2022. Durante esse tempo, tivemos 12 encontros com a turma e, em todo o período, a direção da escola e a professora da turma nos concederam total apoio para que conseguíssemos concluir o experimento antes do encerramento do 4º bimestre letivo. Tivemos alguns obstáculos como jogos internos, conselho de classe e plantão pedagógico, pois como se sabe, esse período de encerramento de ano letivo é bastante corrido.

Contudo, observamos no decorrer da experimentação, um aumento gradativo e significativo na participação, concentração e motivação dos discentes. E isso, com certeza, deve-se ao fato de termos utilizado uma metodologia de ensino diferenciada,

utilizando o ensino por atividades e resolução de problemas com auxílio de desenho geométrico. Pois, era comum ouvirmos relatos dos alunos sobre o quanto as aulas estavam se tornando mais dinâmicas e prazerosas.

A organização da turma em grupos, revelou uma boa estratégia de interação entre discentes, contribuindo para um bom entendimento do objeto matemático abordado e alcance dos objetivos propostos. Conforme desenvolvíamos as atividades fomos observando certos obstáculos enfrentados pelos discentes dessa turma tais como: leitura, escrita e interpretação; e falta de hábito em resolver problemas. Apesar disso, havia interesse dos estudantes em seguir as orientações de cada atividade possibilitando a constatação de um avanço considerável na resolução de problemas envolvendo adição e subtração de frações. Na seção seguinte apresentamos a análise a posteriori e validação do experimento.

6. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Neste capítulo faremos análise e apresentação dos resultados obtidos na fase da experimentação, isto é, durante a aplicação da sequência didática.

6.1 - RESULTADOS E ANÁLISES DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

O objetivo desse tópico é identificar se houve progresso ou não quanto a aprendizagem das operações de adição e subtração de frações por meio da aplicação da sequência didática. Para isso, faremos análise dos percentuais de acertos, erros e questões deixadas em branco pelos estudantes que participaram do experimento. Como regra dessa análise adotamos ACERTO quando o estudante apresentou uma resolução com um resultado correto, ERRO quando o estudante apresentou uma resolução com um resultado incorreto e EM BRANCO quando o estudante não apresentou uma resolução, isto é, nenhum resultado.

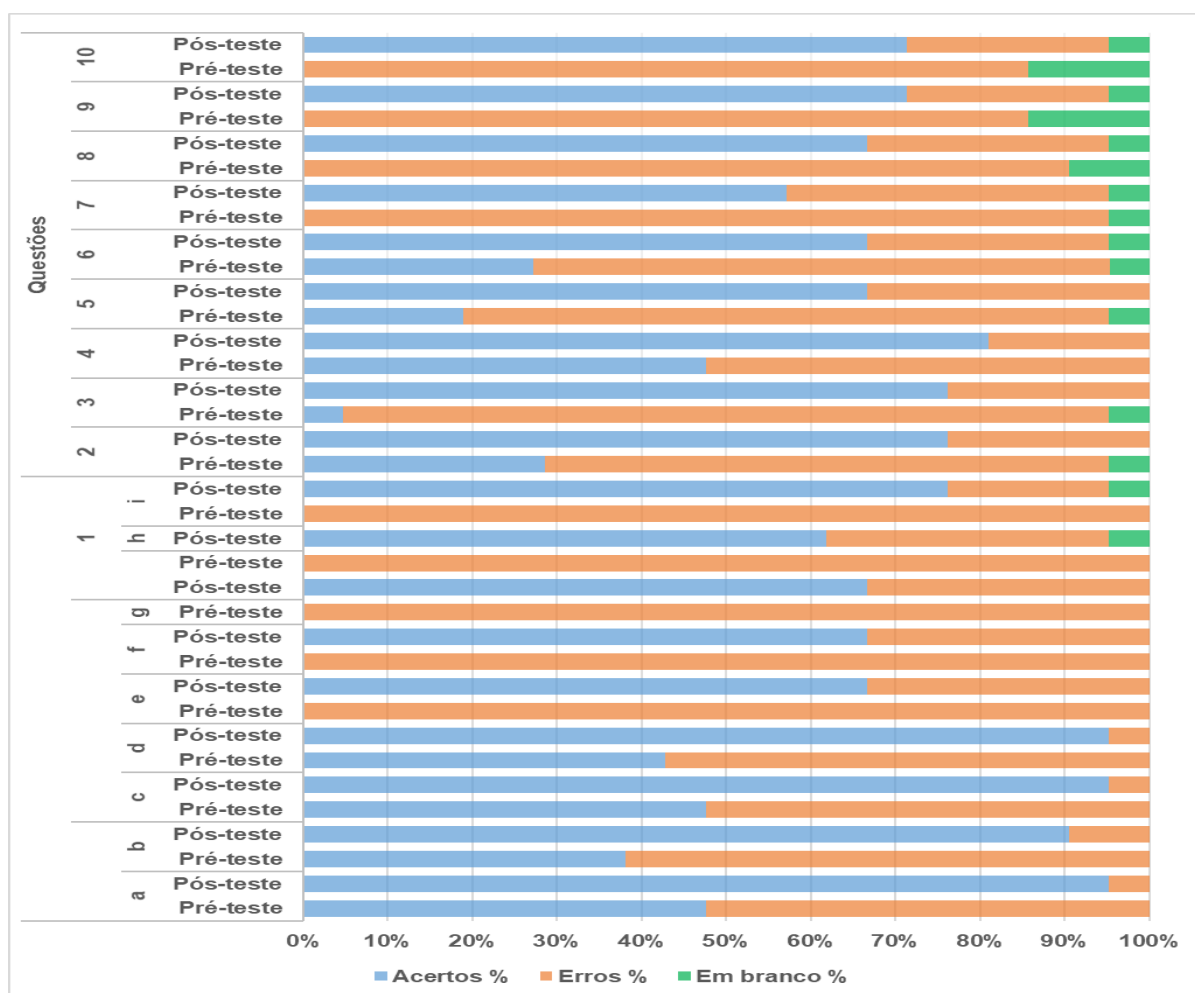
Quadro 71 – Desempenho por questões no pré-teste e pós-teste

QUESTÃO		ACERTOS %		ERROS %		EM BRANCO %	
		Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
1	A	47,6	95,2	52,4	4,8	0	0
	B	38,1	90,5	61,9	9,5	0	0
	C	47,6	95,2	52,4	4,8	0	0
	D	42,8	95,2	57,1	4,8	0	0
	E	0	66,7	100	33,3	0	0
	F	0	66,7	100	33,3	0	0
	G	0	66,7	100	33,3	0	0
	H	0	61,9	100	33,3	0	4,8
	I	0	76,2	100	19,0	0	4,8
2		28,6	76,2	66,7	23,8	4,8	0
3		4,8	76,2	90,5	23,8	4,8	0
4		47,6	81,0	52,4	19,0	0	0
5		19,0	66,7	76,2	33,3	4,8	0
6		28,6	66,7	71,4	28,6	4,8	4,8
7		0	57,1	95,2	38,1	4,8	4,8
8		0	66,7	90,5	28,6	9,5	4,8
9		0	71,4	85,7	23,8	14,3	4,8
10		0	71,4	85,7	23,8	14,3	4,8

Fonte: Experimentação (2022).

A partir dos resultados mostrados no quadro sobre o desempenho por questão no pré e pós-testes de adição e subtração de frações, compreende-se que os erros em todas as questões diminuíram consideravelmente. O que significa, de modo geral, uma melhora expressiva no desempenho dos estudantes após a aplicação das atividades que compuseram a sequência didática. Contudo é válido destacar que em questões envolvendo adição ou subtração com denominadores diferentes os estudantes demonstraram precisar de maior esforço cognitivo comparado com as questões com denominadores iguais. O gráfico 32 nos permite visualizar melhor tais resultados.

Gráfico 32 – Desempenho por questões no pré-teste e pós-teste



Fonte: Experimentação (2022).

Mediante os dados apresentados graficamente é possível perceber, de forma mais clara, o rendimento dos estudantes por questão no pré-teste e pós-teste. Pois, como já mencionamos anteriormente, houve um grande aumento dos percentuais de

acerto nas questões, assim como a diminuição de questões deixadas em branco. A questão 7 foi a qual apresentou um número menor de acertos no pós-teste 57,1%, demonstrando que o resultado de acertos em todas as questões foi superior a 50%, isto é, um rendimento positivo adquirido com a aplicação da sequência didática.

Os resultados nos mostram que os itens (a, b, c, d) da questão Q1 foram os que tiveram maior percentual de acertos no pós-teste pois tratam de adicionar ou subtrair frações com denominadores iguais e, são questões do tipo “diretas”, ou seja, que exigiam apenas a aplicação da regra para obter o resultado.

No pré-teste, nos itens (e, f, g, h, i) da questão Q1 e nas questões (Q7, Q8, Q9, Q10) não houve nenhum acerto. Isso é justificado pelo fato dos estudantes do experimento ainda não terem estudado o conteúdo relacionado a tais questões, isto é, adição e subtração com denominadores diferentes.

Todavia, no pós-teste é constatado um significativo avanço em relação ao pré-teste justamente nessas questões citadas a cima em que obtiveram percentual 0% no pré-teste, enquanto que no pós-teste esse percentual de acertos passou para 66% a 72%. De modo geral, pode-se afirmar que os estudantes obtiveram êxito em todas as questões.

A seguir iremos expor os percentuais de acertos, erros e questões deixadas em branco por estudante que realizaram os testes, ou seja, traremos um quadro comparativo do resultado dos dois testes de acordo com o desempenho de cada aluno.

Quadro 72 - Desempenho por estudante nos testes aditivos de fração

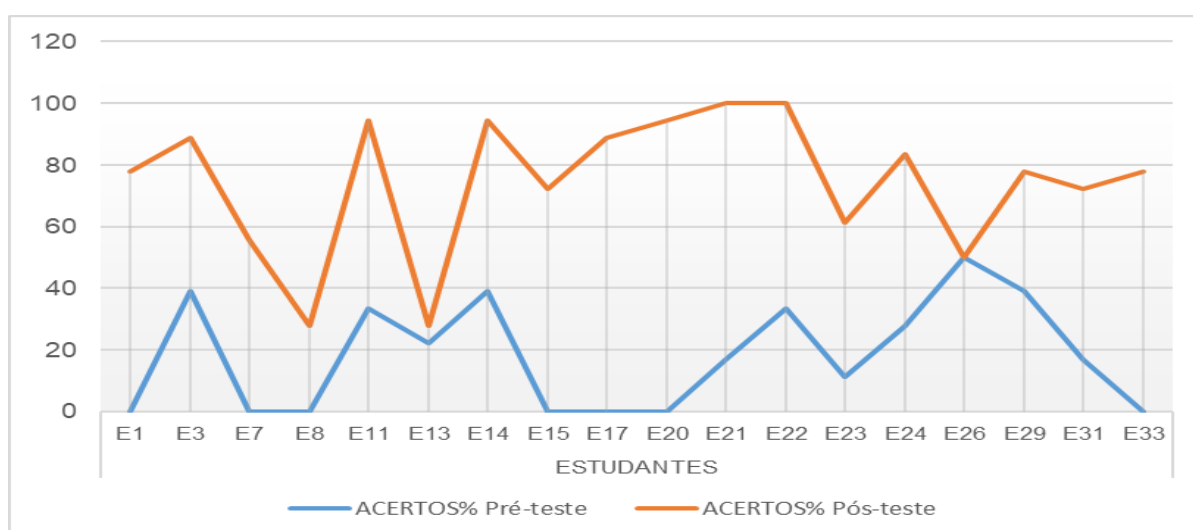
ESTUDANTES	ACERTO%		ERRO%		EM BRANCO%	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
E1	0	77,8	100	22,2	0	0
E3	38,9	88,9	61,1	11,1	0	0
E4	38,9	não fez	61,1	não fez	0	não fez
E5	0	não fez	100	não fez	0	não fez
E7	0	55,6	100	44,4	0	0
E8	0	27,8	100	72,2	0	0
E11	33,3	94,4	55,6	5,6	11,1	0
E13	22,2	27,8	72,2	33,3	5,6	38,9
E14	38,9	94,4	44,4	5,6	16,7	0
E15	0	72,2	100	27,8	0	0
E16	38,9	não fez	61,1	não fez	0	não fez
E17	0	88,9	100	11,1	0	0
E20	0	94,4	100	5,6	0	0

E21	16,7	100	83,3	0	0	0
E22	33,3	100	66,7	0	0	0
E23	11,1	61,1	88,9	38,9	0	0
E24	27,8	83,3	72,2	16,7	0	0
E25	não fez	61,1	não fez	38,9	não fez	0
E26	50	50	66,7	50	33,3	0
E29	38,9	77,8	61,1	22,2	0	0
E31	16,7	72,2	83,3	27,8	0	0
E33	0	77,8	94,4	22,2	5,6	0
E34	não fez	72,2	não fez	27,8	não fez	0
E35	não fez	94,4	não fez	5,6	não fez	0

Fonte: Experimentação (2022).

No quadro acima há registro dos resultados de todos os discentes que realizaram os testes. Porém, como já relatamos no decorrer deste trabalho, a turma era composta por estudantes de comunidades diferentes e que necessitavam de ônibus escolar para se deslocarem até a escola, por esse motivo principalmente, nem todos os estudantes que participaram do pré-teste, realizaram o pós-teste e vice-versa, contudo achamos interessante registrar tais resultados. No gráfico abaixo, elaboramos um comparativo somente dos estudantes que estiveram presentes nos dois testes.

Gráfico 33 - Desempenho por estudante nos testes aditivos de fração



Fonte: Experimentação (2022).

Por meio do gráfico nota-se a evolução que os estudantes obtiveram na aprendizagem e resolução de questões aditivas envolvendo fração. Somente os

discentes E8 e E13 apresentaram rendimento abaixo de 50%. Mesmo assim, os índices de acertos mostram que todos os discentes apresentaram progresso superior ao pré-teste, com exceção do estudante E26 que continuou com o mesmo percentual de acertos 50%. Destacamos, também, a diminuição do quantitativo de estudantes que deixaram questões em branco, pois, no pré-teste o E11, E13, E14, E26 e E33 deixaram questões em branco e no pós-teste isso se repetiu somente com o estudante E13. Estes dados indicam a confiança que os discentes foram desenvolvendo no decorrer da fase de experimentação.

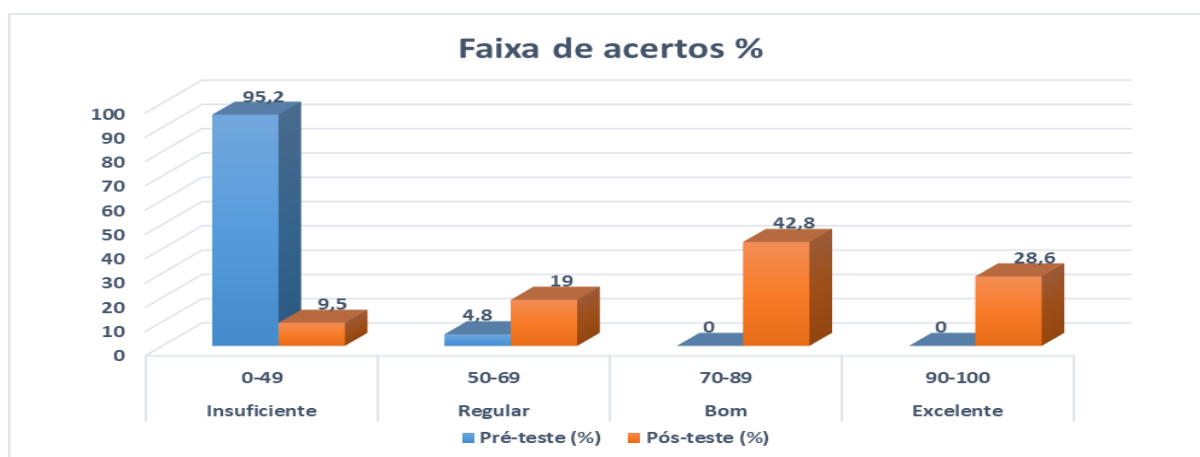
Sobre esses resultados, também optamos em analisá-los por faixa de acertos. Para tal, consideramos os conceitos utilizados por Felix (2021, p. 157) classificando-os em: insuficiente, o percentual de acerto é entre 0 e 49; regular percentual de acerto entre 50 e 69; bom, percentual de acerto entre 70 e 89; e excelente percentual de acerto entre 90 e 100. A partir disso, construímos o quadro a seguir.

Quadro 73 - Faixas de acerto por estudante nos testes aditivos de fração

Classificação	Faixa de acerto %	Pré-teste (%)	Pós-teste (%)
Insuficiente	0-49	95,2	9,5
Regular	50-69	4,8	19,0
Bom	70-89	0	42,8
Excelente	90-100	0	28,6

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 34 - Faixas de acerto por estudante nos testes aditivos de fração



Fonte: Experimentação (2022).

Com a classificação de desempenho dos estudantes nos testes propostos apresentados no quadro e graficamente, torna-se evidente a constatação da grande

evolução resultante das atividades da sequência didática trabalhada com esses discentes, uma vez que, 90,4% saíram do nível de insuficiente passando para regular, bom ou excelente. É importante evidenciar o aumento na quantidade de estudantes que atingiram um nível bom 42,8% e um nível excelente 28,6%, sendo que no pré-teste nenhum discente atingiu esses níveis.

Diante dessas evidências podemos julgar que a sequência didática proporcionou um resultado positivo, gratificante e bem-sucedido para a resolução de questões que envolveram adição e subtração de fração propostas nos testes. Os resultados dessa experimentação estão em consonância com os resultados da pesquisa de Brandão e Ribeiro (2016) apresentada na revisão de estudos desse trabalho. Os autores discutem sobre a docência no tocante à adição de frações com denominadores diferentes e propõem, em seu trabalho, atividades que possam servir como introdução ao assunto.

Eles mostram a abordagem do cálculo das frações com denominadores diferentes através do desenho de retângulos e, concluíram que o estudo por meio de representações gráficas no ensino de adição de frações com denominadores diferentes permite o docente refletir sobre a importância de trabalhar esse assunto sem que haja memorizações na sala de aula.

Além desses autores, revisamos também os trabalhos de Alves (2018) e Pereira (2017), ambos elaboram uma Sequência Didática para o ensino de frações e os resultados foram que a mesma proporcionou desempenho aos estudantes em relação a esse conteúdo.

No entanto, ainda houve persistência de alguns erros durante as resoluções das questões no pós-teste e, sobre isso, analisaremos a seguir quais foram esses erros, assim como, as possíveis causas e/ou soluções para a ocorrência dos mesmos.

6.2 - ANÁLISE DE ERROS NO PÓS-TESTE

Durante a correção dos testes foi possível observar que a dificuldade de interpretação de situações problemas e erros aritméticos apresentados no pré-teste ainda persistiram no pós-teste, pois a definição exata de qual operação realizar diante de um problema foi considerado um obstáculo para alguns discentes desenvolverem as resoluções corretamente, nos levando a concluir que estes não possuíam hábito de resolver questões que envolvesse resolução de problema. Outro tipo de erro foi de

cálculo numérico, isto é, houve estudantes que erraram cálculos de soma, subtração e multiplicação.

Nesse sentido realizamos a análise dos erros mais ocorridos pelos estudantes durante a resolução das questões no pós-teste conforme as características utilizadas por Santos (2020, p. 220), apresentadas no quadro a seguir.

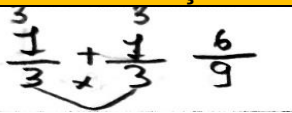
Quadro 74 - Tipos de erros cometidos nas questões do Pós-teste

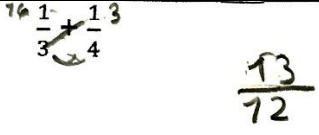
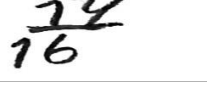
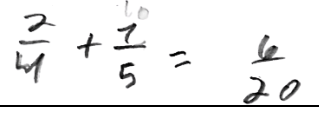
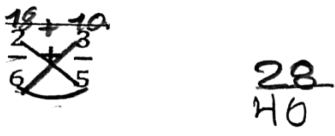
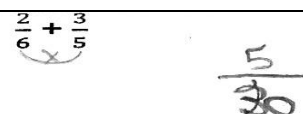
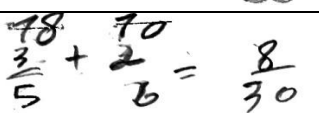
ERROS	CARACTERÍSTICA
e1	Utilizar regras indevidamente.
e2	Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
e3	Realizar cálculos incorretos.
e4	Operações aditivas equivocadas.
e5	Resposta incompleta

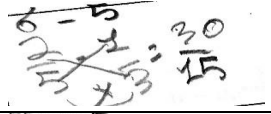
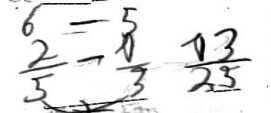
Fonte: adaptado de Santos (2020, p.220)

A questão Q1 apresenta nove itens envolvendo adição e subtração de frações sem contextualização, sendo os quatro primeiros com frações cujos denominadores são iguais e os cinco últimos com frações de denominadores diferentes. Para resolver, os estudantes precisariam lembrar do conceito e regra de soma e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes conforme foi trabalhado na sequência didática.

Quadro 75 - Resumo de erros questão 01

Determine o resultado das operações a seguir:				
ITENS	EST.	RESOLUÇÃO	ERROS	
A $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	E35		e1	- Utilizar regras indevidamente.
B $\frac{6}{10} + \frac{3}{10}$	E13 E23		e3	- Realizar cálculos incorretos.
C $\frac{8}{11} - \frac{1}{11}$	E15		e3	- Realizar cálculos incorretos.
D $\frac{12}{15} - \frac{8}{15}$	E33		e3	- Realizar cálculos incorretos.

E	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	E3		e3 - Realizar cálculos incorretos
		E23		e1 - Utilizar regras indevidamente. e3 - Realizar cálculos incorretos
		E25		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E26 E29		e4 - Operações aditivas equivocadas.
		E31 E33		e3 - Realizar cálculos incorretos.
F	$\frac{2}{4} + \frac{1}{5}$	E7		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E13		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E23		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E25		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E26 E29		e4 - Operações aditivas equivocadas.
G	$\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$	E1		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E15		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E23		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E25		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E26		e4 - Operações aditivas equivocadas.

H	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$	E7 E23 E26		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E17 E33		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E34		e3 - Realizar cálculos incorretos.
I	$\frac{4}{6} - \frac{2}{4}$	E7 E23		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E8		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E26		e1 - Utilizar regras indevidamente.

Fonte: Experimentação (2022).

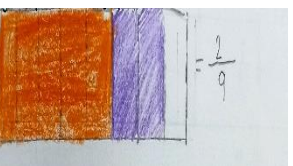
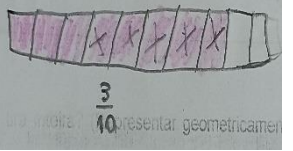
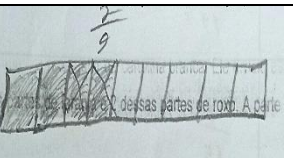
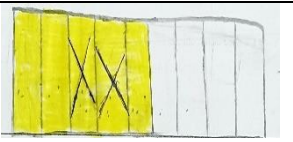
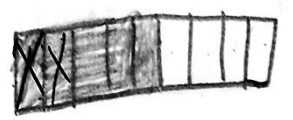
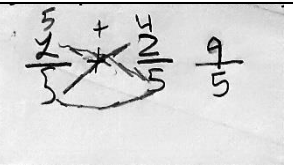
A correção dos testes e análises de erros da questão Q1 nos mostrou que apesar dos estudantes em sua grande maioria responder, utilizar as regras, calcular e realizar corretamente as operações aditivas entre frações, ainda ocorreu os erros (e1, e3 e e4) por parte de alguns estudantes, conforme discriminado no quadro acima.

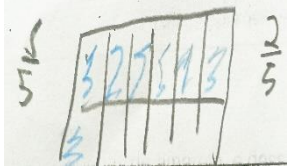
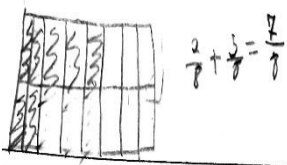
Sobre o erro e1 que é utilizar regras indevidamente, ocorreu nos itens a, e, f, g, h, i. Nesses itens houve alunos que conforme foi apresentado no quadro acima utilizaram a regra aditiva de frações com denominadores iguais para resolver adição ou subtração de frações com denominadores diferentes e vice-versa, ou ainda, misturaram as duas regras no momento da resolução, como o estudante E26 no item i, ele subtraiu os denominadores diferentes para obter o denominador resultante e multiplicou os extremos subtraindo em seguida tais resultados para obter o numerador final.

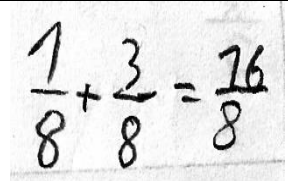
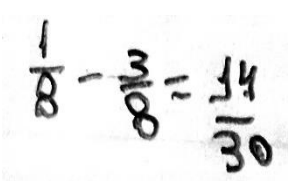
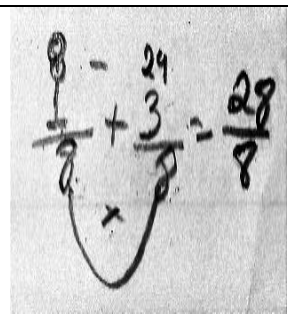
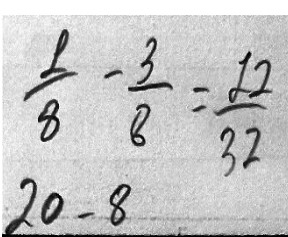
A ocorrência do erro e3 – realizar cálculos incorretos, com exceção do item a, ele ocorreu em todos os demais itens. Os estudantes erraram cálculos de multiplicação, adição e subtração. A exemplo disso, o estudante E1 no item g aplicou a regra corretamente para adicionar frações com denominadores diferentes, porém, errou o cálculo da multiplicação de 6x5 dos denominadores. Possivelmente, esse estudante tenha errado pela falta de atenção ou nervosismo acometido por se tratar de um teste, ou também, pela falta de base matemática em alguns conteúdos.

O erro e4 ocorreu no item e, f, g, ou seja, houve estudantes que utilizaram operações aditivas equivocadas, isto é, no lugar de uma adição efetuou uma subtração e vice-versa. A seguir faremos análise dos erros nas demais questões do pós-teste divididas em dois quadros: no primeiro, com situações-problemas envolvendo soma ou subtração de duas frações com denominadores iguais; e no segundo, problemas aditivos de duas frações com denominadores diferentes.

Quadro 76 - Resumo de erros nos problemas aditivos de frações com denominadores iguais

QUESTÃO	ENUNCIADO	EST.	RESOLUÇÃO	ERROS
02	Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)	E8		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E15 E25 E26		e5 – Resposta incompleta.
		E29		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
03	Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)	E8		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E13 E20		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E25		e5 – Resposta incompleta.
		E26		e5 – Resposta incompleta.
04	Julia e Renato foram comer pizza. Julia comeu $\frac{1}{5}$ e Renato $\frac{2}{5}$ de uma pizza de calabresa. Que fração da pizza eles comeram juntos?	E1		e1 - Utilizar regras indevidamente. e3 - Realizar cálculos incorretos.

		E13		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E31	$\frac{20-5-20}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$	e1 - Utilizar regras indevidamente. e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.
05	A fazenda de seu Francisco perde-se de vista. Ele reservou $\frac{5}{8}$ de sua fazenda para a agricultura de milho e feijão. Se $\frac{2}{8}$ foi para o plantio de milho, que fração da reserva ficou para o plantio de feijão?	E8	$\frac{2}{8} - \frac{5}{8} = \frac{13}{14}$	e1 - Utilizar regras indevidamente. e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E15		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E24	$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$	e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E25	$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$	e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.
		E31	$\frac{5}{8} \times \frac{2}{8} = \frac{36}{32}$ $16 + 20$	e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e3 - Realizar cálculos incorretos. e4 - operações aditivas equivocadas.
		E34	$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$	e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e3 - Realizar cálculos incorretos. e4 - operações aditivas equivocadas.
06	No primeiro dia de trabalho, Arnaldo pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Avalie se o que ele fala é correto. Justifique sua resposta.	E1	$\frac{21+6}{8} = \frac{32}{8}$	e1 - Utilizar regras indevidamente e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e3 - Realizar cálculos incorretos.

	E7		e1 - Utilizar regras indevidamente. e3 - Realizar cálculos incorretos.
	E8		e1 - Utilizar regras indevidamente e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.
	E15		e1 - Utilizar regras indevidamente e3 - Realizar cálculos incorretos.
	E31		e1 - Utilizar regras indevidamente e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e3 - Realizar cálculos incorretos.

Fonte: Experimentação (2022).

Com relação aos erros encontrados nas resoluções de problemas aditivos de frações com denominadores iguais, temos que na questão 02 os estudantes E8 e E29 interpretaram a contextualização dessa questão de maneira equivocada, isto é, não compreenderam a questão e com isso não conseguiram fazer uma apresentação gráfica correta do resultado, nem a escrita matemática do mesmo. Já os estudantes E15, E25, E26 conseguiram representar o problema geometricamente, mas, esqueceram de apresentar essa solução na escrita matemática. Julgamos que esses ocorridos sejam reflexos de nervosismo por estar realizando um teste, ou ainda, somente falta de atenção.

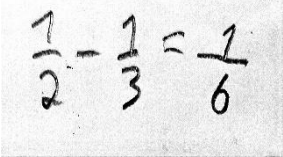
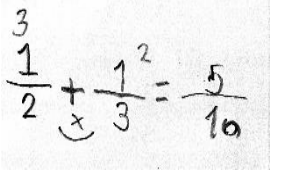
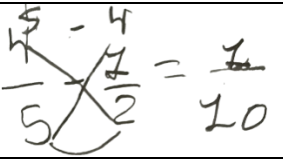
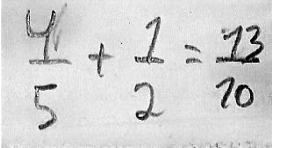
Na questão 03 os discentes E8, E13 e E20 interpretaram de maneira equivocada a contextualização do problema apresentando assim resolução incorreta e o discente E25 continuou apresentando resposta incompleta, pois faltou a escrita da fração resultante.

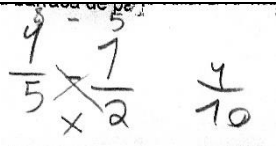
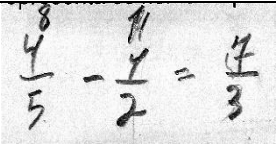
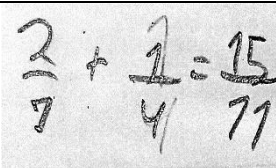
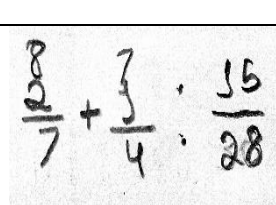
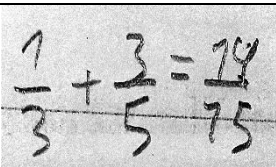
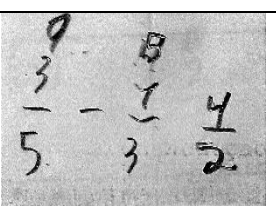
Na questão 04 o estudante E1 interpretou corretamente o problema, porém, misturou as regras no momento da resolução e efetuou cálculo de multiplicação erroneamente. O E13 não conseguiu interpretar tal problema e, assim, não apresentou uma solução correta tanto escrita como geométrica. E31 além de não interpretar a contextualização, também utilizou regras indevidas e erro na escolha da operação.

A questão 05 solicitava uma solução para subtração de duas frações. Cinco dos seis erros encontrados estavam relacionados a interpretação equivocada da contextualização do problema. Tais erros foram cometidos por E8, E15, E25, E31 e E34 além disso, apresentaram erros de utilização de regras indevidas. O E24 apenas efetuou a subtração de 5-2 de forma incorreta, pois ao invés de somar ele subtraiu evidenciando um exemplo típico de falta de atenção.

A interpretação equivocada sobre o que era solicitado no problema da questão 06 afetou o resultado dos estudantes E1, E8 e E31, que apesar disso, também utilizaram regras indevidas como o E7 e E15. No quadro a seguir será apresentado o resumo dos erros encontrados nas correções dos problemas aditivos de frações com denominadores diferentes.

Quadro 77 - Resumo de erros nos problemas aditivos de frações com denominadores diferentes

QUES TÃO	ENUNCIADO	EST.	RESOLUÇÃO	ERROS
07	Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?	E7 E14 E17 E25 E31		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.
		E29		e3 - Realizar cálculos incorretos.
08	Das pessoas que estavam na barraca de pastel, $\frac{4}{5}$ eram homens. Se $\frac{1}{2}$ das pessoas que estavam na barraca usava óculos e apenas homens usavam óculos, que fração das pessoas que estava na barraca de pastel representa os homens que não usavam óculos?	E1		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E7		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.

		E11		e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E26		e1 - Utilizar regras indevidamente e3 - Realizar cálculos incorretos.
		E34		e1 - Utilizar regras indevidamente
09	A produção mensal de uma confecção feminina é formada por $\frac{2}{7}$ de blusas, $\frac{1}{4}$ de saias e o restante de vestidos. Que fração da produção mensal é destinada aos vestidos?	E7		e1 - Utilizar regras indevidamente e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização.
		E23 E24 E34		e5 - Resposta incompleta.
10	Os militares que trabalham no Colégio Militar Brasileiro realizam um teste de aptidão física (TAF) três vezes por ano. Nesse teste, os militares têm de realizar uma prova de corrida, uma de abdominais, uma de barras e uma de flexão de braço. No teste realizado em 2015, na prova de corrida, o Tenente Belchior, já havia corrido do percurso da prova $\frac{1}{3}$ e, após correr mais 600 metros, completou $\frac{3}{5}$ do percurso. Dessa forma, que fração representa os 600 metros que ele correu?	E3		e1 - Utilizar regras indevidamente.
		E7 E34		e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. e4 - operações aditivas equivocadas.
		E26		e1 - Utilizar regras indevidamente

Fonte: Experimentação (2022).

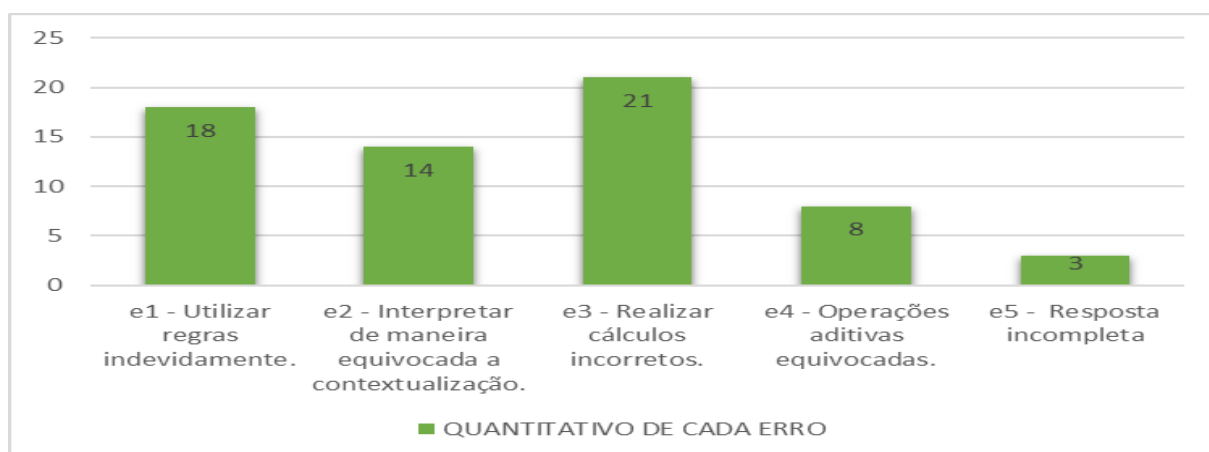
Sobre os erros encontrados nas resoluções de problemas aditivos de frações com denominadores diferentes, podemos perceber que na questão 07 os estudantes E7, E14, E17, E25, E31 interpretaram a contextualização dessa questão de maneira equivocada e não compreenderam que se trata de uma adição e não de subtração

como apresentaram. E29 interpretou o problema corretamente, aplicou a regra exata, porém, multiplicou erradamente 2×3 .

Na questão 08 os discentes E1, E11 e E26 efetuaram cálculos de maneira incorreta e interpretaram de maneira equivocada a contextualização do problema apresentando assim resolução incorreta. O discente E7 interpretou de forma errada o problema e realizou soma ao invés de subtrair. Na questão 09 o estudante E7, além de não conseguir interpretar o problema, utilizou a regra errada para solucionar o problema. O E23, E24, E34 deixaram solução deste problema incompleta.

Sobre a questão 10 os estudantes E3 e E26 utilizaram regras de resolução incorreta. E os discentes E7 e E34 interpretaram de forma equivocada sobre o que era solicitado no problema dessa questão. O gráfico abaixo foi elaborado para demonstrar o quantitativo de cada tipo de erro.

Gráfico 35 - Quantitativo de cada tipo de erro



Fonte: Experimentação (2022).

Como podemos observar, o erro e3 foi o mais recorrente pois os estudantes citados nos quadros anteriores realizaram cálculos incorretos de multiplicação, adição e subtração. Esse fato julgamos ser devido, principalmente, pela falta de atenção e por se tratar de um teste, uma vez que nas atividades desenvolvidas durante a experimentação alguns desses mesmos estudantes apresentaram respostas corretas para esse tipo de operação. Além disso, há casos de discentes que já vieram das séries iniciais com um déficit de aprendizagem das quatro operações.

Outro erro bastante recorrente foi o e1, isto é, a utilização de regras indevidas para resolver questões aditivas de frações. Houve estudantes que aplicaram a regra

de resolver adição e subtração de frações com denominadores iguais em operações com denominadores diferentes e vice-versa, assim como, misturar as duas regras para resolver uma dessas operações.

Em terceiro lugar no quantitativo de erros está o e2 - Interpretar de maneira equivocada a contextualização. Esse erro já julgávamos que fosse ocorrer, pois durante a experimentação percebemos bastante dificuldade da turma toda em elaborar uma resolução quando lhes era apresentado uma situação-problema, ou seja, não tinham o hábito de resolver problemas. Desta forma, alguns estudantes não conseguiram superar esse obstáculo. No entanto, é válido frisar que esses erros não foram cometidos por todos os estudantes, e sim, por alguns como nesse último erro mencionado que foi cometido somente por E1, E7, E8, E23, E25, E26, E31 e E35 em alguma das questões do teste.

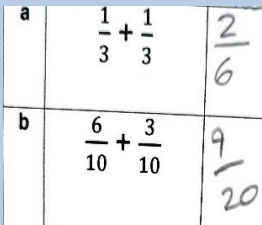
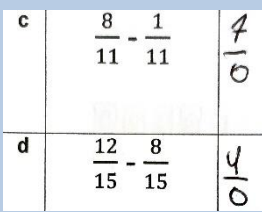
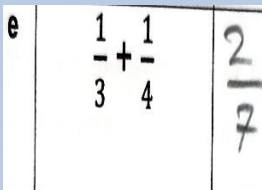
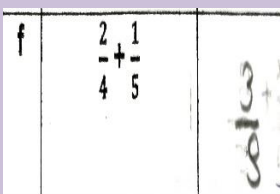
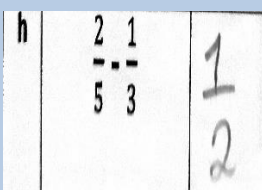
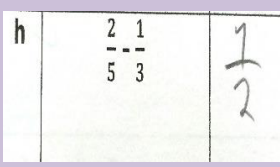
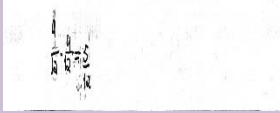
6.3 – ANÁLISE DE MISCONCEPTIONS NO PRÉ-TESTES E PÓS-TESTE

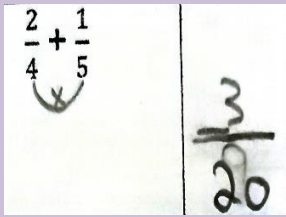
Como já explicamos no capítulo das análises prévias, Misconceptions é um termo inglês que significa equívocos. É utilizado para descrever as concepções errôneas apresentadas pelos alunos no momento em que precisam resolver um determinado problema ou situação.

Desse modo, no referido capítulo, realizamos um levantamento bibliográfico para abordarmos as misconceptions (equívocos) que afetam o processo de ensino e aprendizagem de adição e subtração com frações e assim verificar se as mesmas seriam constatadas no pré-teste realizado antes da experimentação e qual resultado teríamos sobre esses equívocos no pós-teste, ou seja, analisar se os estudantes sujeitos da pesquisa cometeriam no pré-teste os mesmos equívocos mencionados nas pesquisas de outros autores e se continuariam a cometê-los no pós-teste.

Portanto, para tal análise, construímos nesse tópico das análises a posteriori, um quadro com as misconceptions analisadas nas pesquisas efetuadas durante a etapa das análises prévias e com as quais detectamos nas resoluções das questões do pré-teste e pós-teste, ou seja, no quadro a seguir é possível observar as misconceptions que foram comprovadas durante a realização do pré-teste desta pesquisa e quais persistiram no pós-teste.

Quadro 78 - Misconceptions constatadas nos testes aditivos de frações

Misconceptions pesquisadas	Misconceptions detectadas			
	Pré-teste	Estudantes	Pós-teste	Estudantes
Tipo 1 $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b+b}$		E1, E5, E23, E31, E33	Não houve	Não houve
Tipo 2 $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b-b}$		E1, E5, E15, E23, E31, E33	Não houve	Não houve
Tipo 3 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$		E1, E3, E4, E5, E11, E14, E15, E16, E21, E22, E23, E24, E29, E31, E33		E23
Tipo 4 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$		E1, E3, E4, E5, E11, E14, E15, E16, E21, E22, E23, E24, E29, E31, E33		E7, E23, E34
Tipo 5 $a + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$	Não houve	Não houve	Não houve	Não houve
Tipo 6 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b * d}$	Não houve	Não houve	4. Júlia e Renato foram comer pizza. Júlia comeu $\frac{1}{3}$ e Renato $\frac{2}{5}$ de uma pizza de calabresa. Que fração da pizza eles comeram juntos? 	E8

				E25
Tipo 7 $\frac{a*b+c}{b} = \frac{a+c}{b}$	Não houve	Não houve	Não houve	Não houve

Fonte: Experimentação (2022).

Com o quadro acima, vimos claramente que as misconceptions do tipo 1,2,3,4 ocorreram nas resoluções de questões do pré-teste, pois houve estudantes que apresentaram tais equívocos no momento de responder algumas das questões desse teste. Já no pós-teste, o número de alunos que apresentaram continuar com tais equívocos (misconceptions) foram poucos, uma vez que somente um aluno apresentou misconception do tipo 3, três do tipo 4 e dois do tipo 6.

Com esses resultados podemos constatar o que encontramos na revisão de estudos sobre esse tema. Pois nos quadros 12,13 e 14 do tópico 3.4 apresentamos as possíveis misconceptions referentes a adição de fração, as misconceptions no ensino de adição e subtração com fração e as possíveis causas de misconceptions em adição e subtração de fração, respectivamente. E conforme observou-se nos resultados obtidos com a experimentação, os estudantes quase que em sua totalidade apresentaram no pré-teste a misconception do item 1 apresentada no quadro 12 que é adicionar o numerador com o numerador e o denominador com o denominador (sem primeiro igualar os dois denominadores), enquanto que no pós-teste apenas uma minoria dos estudantes apresentou tal equívoco.

Com relação ao quadro 13 que tratou das misconceptions no ensino de adição e subtração com fração, vimos que os equívocos $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b+b}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b-b}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ foram confirmados com os resultados apresentados pelos estudantes no pré-teste dessa experimentação, enquanto que no pós-teste, o número de alunos que apresentaram continuar com tais equívocos (misconceptions)

foram poucos, uma vez que somente um aluno cometeu misconceptions do tipo $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, três do tipo $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ e dois do tipo $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b * d}$.

Sobre o quadro 14 que enfatizou as causas de misconceptions em adição e subtração de fração podemos confirmar com os resultados dessa pesquisa que os estudantes cometem tais equívocos (misconceptions) pelos seguintes motivos:

- A passagem da adição de frações com denominadores semelhantes para a adição de frações com denominadores diferentes. Durante a realização do pré-teste observou-se que para os estudantes o conceito de resolução de uma operação aditiva com frações de denominadores diferentes era o mesmo para com frações de denominadores iguais ou vice-versa;
- Conhecimento conceitual incorreto ou incompleto. Os estudantes que participaram da experimentação dessa pesquisa já haviam estudado o tópico adição e subtração de frações com denominadores iguais com a professora titular da turma antes do início da pesquisa, no entanto, observamos durante o pré-teste que muitos estudantes resolviam questões referentes a esse ensino de maneira incorreta ou incompleta;
- A memorização de regras. Outro fator importante que ocasionou muitos equívocos (misconceptions), pois somavam ou subtraíam numerador com numerador e denominador com denominador e isso, acreditamos ser devido a memorização de regra para somar ou subtrair números inteiros;
- A falta de orientação. Esse é um ponto importante, pois, o estudante precisa ser orientado quanto ao melhor caminho a ser tomado no momento de resolução de determinada situação.
- Dificuldades em realizar operações matemáticas. Muitos foram os erros, principalmente, no pré-teste relacionados à realização de operações matemática básicas, ou seja, erros de multiplicação de números naturais, assim como de adição e subtração. E essas dificuldades já veem de anos anteriores.

Portanto, os resultados obtidos durante a experimentação dessa pesquisa nos permitiram confirmar que a Sequência Didática aplicada permitiu que os estudantes, visualisassem de maneira clara a diferença existente entre operações aditivas com frações de denominadores iguais e diferentes, proporcionando a construção de um conhecimento conceitual correto e completo por meio das orientações no momento

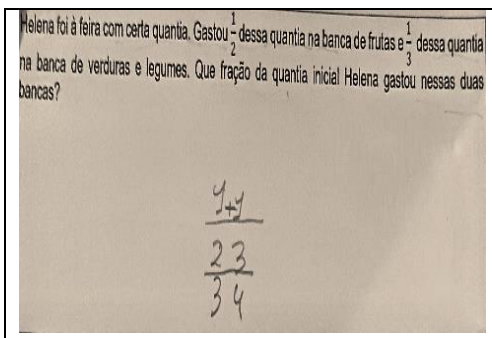
da aplicação da mesma. E com o conhecimento desenvolvido, os estudantes não necessitaram memorizar nenhuma regra para resolver as questões do pós-teste onde o índice de misconceptions ocorridas foi muito baixo em relação ao pré-teste como podemos observar no quadro 78 acima.

Desta forma, depreendemos que a sequência didática elaborada para ensinar adição e subtração de frações foi útil também para sanar a quantidade de equívocos apresentados pelos alunos durante a realização do pré-teste.

Consideramos válido destacar que além dessas misconceptions pesquisadas e analisadas por outros autores, também, conseguimos observar a ocorrência de outros tipos que não havíamos encontrado durante a pesquisa bibliográfica realizada sobre esse assunto. No quadro a seguir destacamos tais misconceptions.

Quadro 79 - Misconceptions diferentes constatadas nos testes aditivos de frações

Misconceptions detectadas nos testes diferentes das pesquisadas					
Pré-teste			Estudante	Pós-teste	Estudante
a	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$\frac{1+1}{3+3}$	E7	Não houve	Não houve
c	$\frac{8}{11} - \frac{1}{11}$	$\frac{8-1}{11-11}$	E7, E17,	Não houve	Não houve
g	$\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$	$\frac{2+3}{6+5}$	E7, E20, E26	Não houve	Não houve
g	$\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$	E13	Não houve	Não houve
h	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	E13	Não houve	Não houve
6. No primeiro dia de trabalho, Arnaldo pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Avalie se o que ele fala é correto. Justifique sua resposta.			E17	Não houve	Não houve

 Handwritten solution for a math problem. The problem asks for the fraction of an initial quantity spent on fruits and vegetables. The solution shows $\frac{4}{4}$ over $\frac{2}{3}$, resulting in $\frac{3}{4}$.	E17	Não houve	Não houve
--	-----	-----------	-----------

Fonte: Experimentação (2022).

As misconceptions apresentadas no quadro acima, só ocorreram no pré-teste. No pós-teste elas já não apareceram mais em nenhuma resolução dos estudantes participantes da pesquisa. Porém, merecem atenção especial dos professores ao ensinar as operações aditivas entre frações.

Diante dos resultados coletados sobre esses equívocos, concordamos mais uma vez com Deringöl (2019) ao afirmar que “como os alunos pensam que as características das frações são iguais às de outros números, eles tentam aplicar a mesma regra, o que leva ao desenvolvimento de suas misconceptions” (p.30, tradução nossa). E de fato constatamos tal afirmação, pois, os alunos tendem a confundir os conhecimentos anteriormente adquiridos sobre conceito de números e consideram uma fração como se fosse dois números inteiros.

6.4 - CORRELAÇÃO ENTRE AS NOTAS DOS TESTES E QUESTÕES SOCIOEDUCACIONAIS

Para esta análise, serão abordados os resultados das respostas obtidas pelos estudantes no questionário socioeducacional (apêndice D) aplicado no início desta pesquisa juntamente com as notas obtidas nos testes com o objetivo de verificar se existe ou não relação desses resultados, ou seja, se o desempenho dos estudantes está relacionado com a sua vida estudantil fora da escola e seu pensamento sobre a Matemática. Tal resultado será identificado com as ternas ordenadas que significam respectivamente a identificação do estudante, a nota do pré-teste e a nota do pós-teste (En; nota pré-teste; nota pós-teste). No quadro a seguir apresentamos a correlação entre o gosto pela matemática e quem ajuda nas atividades. Esses resultados foram colhidos por meio das perguntas: “Você gosta de Matemática?” e “Quem lhe ajuda nas tarefas de Matemática?”

Quadro 80 - Relação gosto pela matemática x quem ajuda nas tarefas

Respostas		Você gosta de Matemática?			
		Não gosto	Suporto	Gosto um pouco	Adoro
Quem lhe ajuda nas tarefas de Matemática?	Professor Particular				
	Pai		(E ₈ ; 0; 2)	(E ₇ ; 0; 5) (E ₁₃ ; 2; 2) (E ₂₉ ; 3; 7)	
	Mãe			(E ₁₄ ; 3; 9) E ₂₂ ; 2; 10) (E ₂₃ ; 1; 6) (E ₃₁ ; 1; 7)	
	Amigos da Escola			(E ₃ ; 4; 8) (E ₂₆ ; 0; 5)	
	Ninguém		(E ₂₀ ; 0; 9)	(E ₁ ; 0; 7) (E ₁₁ ; 3; 9) (E ₁₅ ; 0; 7) (E ₁₇ ; 0; 9) (E ₂₁ ; 2; 10)	(E ₃₃ ; 0; 7)
	Outros				(E ₂₄ ; 2; 8)

Fonte: Experimentação (2022).

Para esta análise vale observar que registramos os resultados apenas dos alunos que responderam o diagnóstico e os dois testes, pois como já relatamos no decorrer dessa pesquisa houve estudantes que não participaram de todos os testes.

Ao analisar sobre o gosto dos alunos pela Matemática, temos que cerca de 89% dos alunos disseram gostar de Matemática, não houve nenhum estudante que respondesse não gostar da disciplina, 11% disseram apenas suportar. Com relação a ajuda recebida nas tarefas 44% recebe ajuda do pai ou da mãe, 39% não recebe ajuda de ninguém e apesar disso apresentaram bom desempenho na comparação do pré-teste e pós-teste, 11% é ajudado por amigos e 5,6% respondeu a opção outros. De maneira geral, independente da ajuda recebida ou não, com exceção dos estudantes E8 e E13, todos obtiveram bons resultados ao comparar as notas do pré-teste com as do pós-teste.

Quadro 81 - Relação gosto pela matemática x frequência do estudo desta fora da escola

Respostas		Você gosta de Matemática?			
		Não gosto	Suporto	Gosto um pouco	Adoro
Com que frequência você estuda Matemática fora da escola?	Todo dia			(E ₁₃ ; 2; 2)	
	Somente nos finais de semana		(E ₈ ; 0; 2)	(E ₁ ; 0; 7) (E ₇ ; 0; 5) (E ₁₄ ; 3; 9) (E ₁₅ ; 0; 7) (E ₂₁ ; 2; 10)	
	No período de prova			(E ₃ ; 4; 8) E ₂₂ ; 2; 10) (E ₂₃ ; 1; 6) (E ₂₉ ; 3; 7) (E ₃₁ ; 1; 7)	(E ₂₄ ; 2; 8)
	Só na véspera da prova			(E ₁₁ ; 3; 9) (E ₁₇ ; 0; 9)	
	Não estudo fora da escola		(E ₂₀ ; 0; 9)	(E ₂₆ ; 0; 5)	(E ₃₃ ; 0; 7)

Fonte: Experimentação (2022).

Com os dados organizados sobre a correlação gosto pela matemática e frequência do estudo desta fora da escola temos 33% dos estudantes afirmando que estudam matemática somente no período da prova e destes todos afirmam gostar de matemática e demonstraram um bom desempenho no pós-teste.

Diante desses dados um fato nos chamou a atenção, pois o estudante E₁₃ afirma gostar de matemática, assim como, afirma estudar todos os dias, porém seu

rendimento no pós-teste não foi satisfatório. Um outro fato relevante para ressaltar, é que os estudantes E20, E26 e E33 afirmam não estudar fora da escola e obtiveram rendimento satisfatório no pós-teste. Os estudantes que responderam estudar somente aos finais de semana ou na véspera da prova, também, apresentaram rendimento positivo na comparação dos testes.

Quadro 82 - Relação gosto pela matemática x interesse nas aulas

Respostas		Você gosta de Matemática?			
		Não gosto	Suporto	Gosto um pouco	Adoro
As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Sim		(E ₂₀ ; 0; 9)	(E ₁ ; 0; 7) (E ₃ ; 4; 8) (E ₁₁ ; 3; 9) (E ₁₄ ; 3; 9) (E ₁₅ ; 0; 7) (E ₁₇ ; 0; 9) (E ₂₁ ; 2; 10) (E ₂₃ ; 1; 6) (E ₂₆ ; 0; 5) (E ₂₉ ; 3; 7) (E ₃₁ ; 1; 7)	(E ₂₄ ; 2; 8) (E ₃₃ ; 0; 7)
	Não				
	Às vezes		(E ₈ ; 0; 2)	(E ₇ ; 0; 5) (E ₁₃ ; 2; 2) E ₂₂ ; 2; 10)	

Fonte: Experimentação (2022).

Para a pergunta “as aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?”, verificou-se que a maioria 77,8% afirmam que sim e

22,2% responderam que às vezes tem sua atenção despertada pela aula de matemática para aprender os conteúdos ministrados. Vale ressaltar que nenhum estudante afirmou que as aulas de matemática não despertam interesses pelos conteúdos ministrados.

6.5 - COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON DOS TESTES

Neste tópico analisaremos as correlações existentes entre as variáveis do questionário socioeducacional e os resultados dos testes para podermos melhor verificar quais fatores influenciaram no desempenho dos estudantes. Para isso, faremos uso do coeficiente de correlação de Pearson (r) que recebe esse nome graças às importantes descobertas de Karl Pearson para os estudos na área das ciências exatas. O coeficiente de correlação amostral de Pearson é representado por “ r ” cujos valores variam entre -1 e +1, e que busca medir o nível e direção com que duas variáveis, de tipo quantitativo, se associam linearmente.

Desta forma, para este trabalho, calculamos esse coeficiente por meio da ferramenta Office Excel e adotamos a classificação de Dancey e Reidy (2005 apud SANTOS, 2020, p. 230) apresentada no quadro a seguir.

Quadro 83 - Legenda Coeficiente de Pearson

Coeficiente de Pearson (r)	Classificação
0,10 até 0,30	Fraco Positivo
0,40 até 0,60	Moderado Positivo
0,70 até 1	Forte Positivo
0	Nenhuma Correlação
-0,10 até -0,30	Fraco Negativo
-0,40 até -0,60	Moderado Negativo
-0,70 até -1	Forte Negativo

Fonte: Adaptado de Dancey e Reidy (2005, apud SANTOS, 2020).

A correlação linear de Pearson será importante nessa etapa do trabalho para compararmos e analisarmos algumas variáveis. Nesse sentido, faremos a primeira

correlação que será entre a diferença nas notas obtidas pelos estudantes do experimento no pré-teste e pós-teste e as respostas obtidas como resultado da pergunta “você gosta de Matemática?”. Adotaremos então, os seguintes parâmetros descritos em ordem para cada item das questões do questionário de pesquisa.

Quadro 84 - Parâmetros para correlação

Você gosta de Matemática?	Parametrização
Não gosto	1
Suporto	2
Gosto um pouco	3
Adoro	4

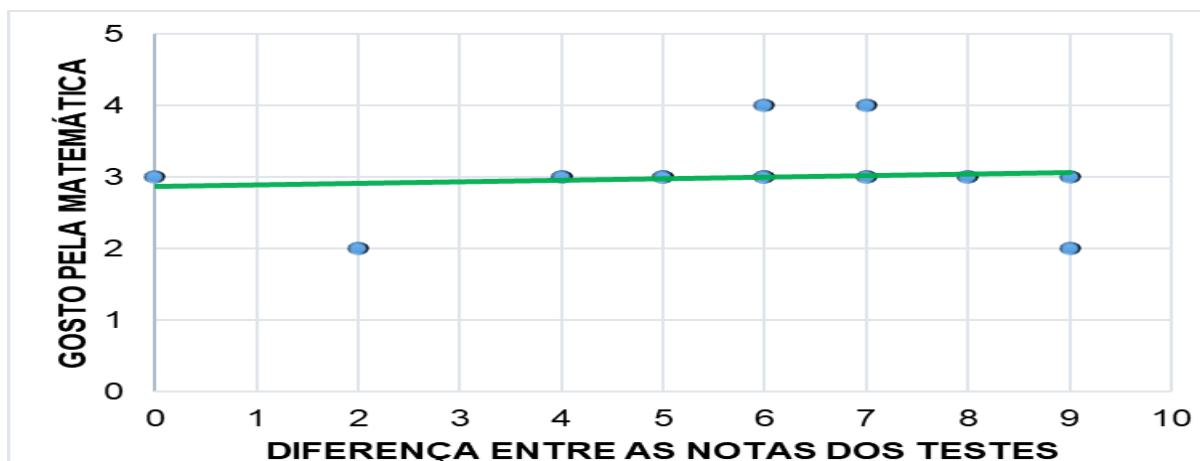
Fonte: Experimentação (2022).

Quadro 85 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o gosto por matemática

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	GOSTO PELA MATEMÁTICA
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	3
E3	4	8	4	3
E7	0	5	5	3
E8	0	2	2	2
E11	3	9	6	3
E13	2	2	0	3
E14	3	9	6	3
E15	0	7	7	3
E17	0	9	9	3
E20	0	9	9	2
E21	2	10	8	3
E22	2	10	8	3
E23	1	6	5	3
E24	2	8	6	4
E26	0	5	5	3
E29	3	7	4	3
E31	1,	7	6	3
E33	0	7	7	4

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 36 - Dispersão: Gosto pela Matemática



Fonte: Experimentação (2022).

Na correlação entre a diferença das notas dos testes com o gosto pela matemática, obtivemos como resultado de coeficiente linear de Pearson “ r ”, o valor $r = 0,104880885$, e como este resultado está dentro do intervalo $0,10 < r < 0,30$ podemos classificar esta correlação como “Fracamente Positiva”, nos possibilitando a constatação de que o gosto pela matemática teve pouca influência nos resultados que obtivemos nos testes.

A seguir apresentamos a correlação para as variáveis, quem ajuda nas tarefas de matemática e diferença de notas entre os testes por meio do coeficiente linear de Pearson (r). A parametrização, também, seguiu a ordem dos itens dessa questão contida no questionário aplicado aos estudantes que participaram dos momentos de experimentação.

Quadro 86 - Parâmetros para correlação

Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	Parametrização
Ninguém	1
Amigos da escola	2
Outros	3
Pai	4
Mãe	5
Professor particular	6

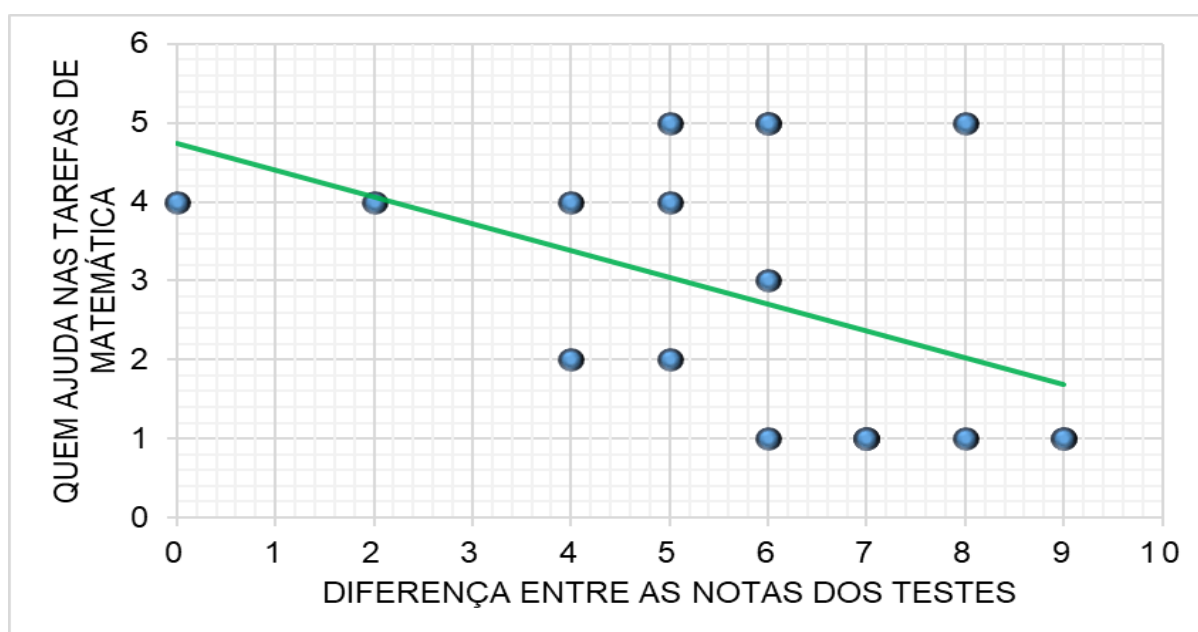
Fonte: Experimentação (2022).

Quadro 87 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e quem ajuda nas tarefas de matemática

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	QUEM LHE AJUDA NAS TAREFAS DE MATEMÁTICA?
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	1
E3	4	8	4	2
E7	0	5	5	4
E8	0	2	2	4
E11	3	9	6	1
E13	2	2	0	4
E14	3	9	6	5
E15	0	7	7	1
E17	0	9	9	1
E20	0	9	9	1
E21	2	10	8	1
E22	2	10	8	5
E23	1	6	5	5
E24	2	8	6	3
E26	0	5	5	2
E29	3	7	4	4
E31	1,	7	6	5
E33	0	7	7	1

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 37 - Dispersão: Quem ajuda nas tarefas de matemática



Fonte: Experimentação (2022).

Como podemos analisar, na correlação entre a diferença das notas dos testes com a variável “quem lhe ajuda nas tarefas de matemática? ”, o resultado do coeficiente linear de Pearson “r”, foi $r = 0,461735855$, cuja localização é o intervalo $0,40 < r < 0,60$. Com isso podemos classifica esta correlação como “Moderada Positiva”, nos possibilitando considerar que a ajuda recebida nas tarefas de matemática não teve influência nos resultados apresentados pelos docentes no pós-teste.

A seguir apresentamos a correlação entre as variáveis, “com que frequência você estuda matemática fora da Escola”? e a diferença de notas entre os testes por meio do coeficiente linear de Pearson (r). A parametrização, também, seguiu a ordem dos itens dessa questão contida no questionário aplicado aos estudantes que participaram dos momentos de experimentação.

Quadro 88 - Parâmetros para correlação

Com que frequência você estuda matemática fora da Escola?	Parametrização
Não estudo fora da escola	1
Só na véspera de prova	2
No período de prova	3
Somente nos fins de semana	4
Todo dia	5

Fonte: Experimentação (2022).

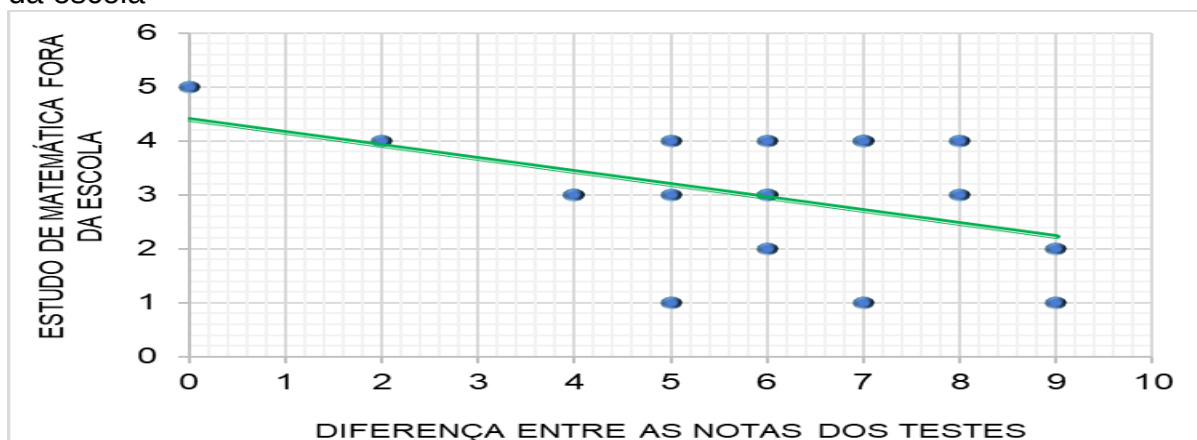
Quadro 89 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o estudo de Matemática fora da escola

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	ESTUDO DE MATEMÁTICA FORA DA ESCOLA
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	4
E3	4	8	4	3
E7	0	5	5	4
E8	0	2	2	4
E11	3	9	6	2
E13	2	2	0	5

E14	3	9	6	4
E15	0	7	7	4
E17	0	9	9	2
E20	0	9	9	1
E21	2	10	8	4
E22	2	10	8	3
E23	1	6	5	3
E24	2	8	6	3
E26	0	5	5	1
E29	3	7	4	3
E31	1,	7	6	3
E33	0	7	7	1

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 38 - Dispersão: diferença das notas nos testes e o estudo de Matemática fora da escola



Fonte: Experimentação (2022).

O coeficiente linear de Pearson “r” para a correlação entre a diferença das notas dos testes com a frequência de estudos fora da escola foi de $r = 0,470425339$ este resultado está dentro do intervalo $0,40 < r < 0,60$, sendo assim, tal relação pode ser classificada como “Moderada Positiva”, nos possibilitando a constatação de que o estudo de matemática fora da escola teve uma razoável influência nos resultados dos testes.

A seguir apresentamos a correlação para as variáveis interesse nas aulas de matemática e diferença de notas entre pré-teste e pós-teste. A parametrização

obedeceu a ordem abordada no questionário aplicado aos estudantes que participaram dos momentos de experimentação.

Quadro 90 - Parâmetros para correlação

As aulas de matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?	Parametrização
Não	1
As vezes	2
Sim	3

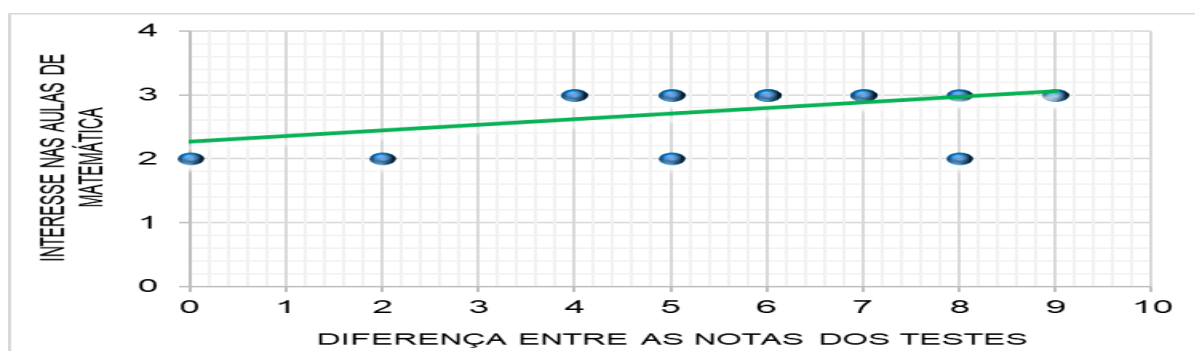
Fonte: Experimentação (2022).

Quadro 91 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o interesse nas aulas

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	INTERESSE NAS AULAS DE MATEMÁTICA
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	3
E3	4	8	4	3
E7	0	5	5	2
E8	0	2	2	2
E11	3	9	6	3
E13	2	2	0	2
E14	3	9	6	3
E15	0	7	7	3
E17	0	9	9	3
E20	0	9	9	3
E21	2	10	8	3
E22	2	10	8	2
E23	1	6	5	3
E24	2	8	6	3
E26	0	5	5	3
E29	3	7	4	3
E31	1,	7	6	3
E33	0	7	7	3

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 39 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e o interesse nas aulas



Fonte: Experimentação (2022).

O coeficiente linear de Pearson “r” resultante para essa correlação entre a diferença das notas dos testes com o interesse nas aulas de matemática foi $r = 0,481767579$. Como este resultado está dentro do intervalo $0,40 < r < 0,60$ podemos concluir que essa correlação é “Moderada Positiva”, ou seja, o interesse nas aulas de matemática teve uma discreta influência nos resultados dos testes.

A seguir apresentamos a correlação para as variáveis escolaridade do responsável masculino e diferença de notas entre pré-teste e pós-teste. A parametrização obedeceu a ordem abordada no questionário aplicado aos estudantes que participaram dos momentos de experimentação.

Quadro 92 - Parâmetros para correlação

Qual escolaridade do seu responsável masculino?	Parametrização
Não estudou	1
Fundamental incompleto	2
Fundamental	3
Médio	4
Superior	5

Fonte: Experimentação (2022).

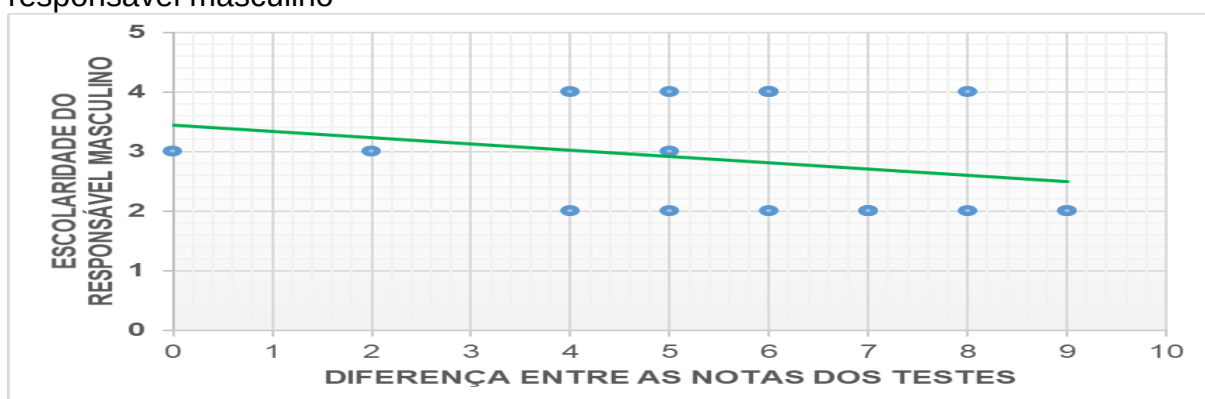
Quadro 93 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	2
E3	4	8	4	2
E7	0	5	5	2
E8	0	2	2	3
E11	3	9	6	4
E13	2	2	0	3
E14	3	9	6	2
E15	0	7	7	2
E17	0	9	9	2
E20	0	9	9	2
E21	2	10	8	4
E22	2	10	8	2
E23	1	6	5	4
E24	2	8	6	4
E26	0	5	5	3

E29	3	7	4	4
E31	1,	7	6	4
E33	0	7	7	2

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 40 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino



Fonte: Experimentação (2022).

O coeficiente linear de Pearson “r” para a correlação entre a diferença das notas dos testes com a escolaridade do responsável masculino foi de $r = 0,265894716$ este resultado está dentro do intervalo $0,10 < r < 0,30$, sendo assim, tal relação pode ser classificada como “Fraco Positiva”. Isso significa que a escolaridade dos responsáveis masculinos dos estudantes que participaram dessa pesquisa não influenciou nos resultados dos testes.

A seguir apresentamos o resultado da correlação entre a escolaridade do responsáveis femininos e diferença de notas entre pré-teste e pós-teste. A parametrização obedeceu a ordem abordada no questionário aplicado aos estudantes que participaram dos momentos de experimentação.

Quadro 94 - Parâmetros para correlação

Qual escolaridade do seu responsável feminino?	Parametrização
Não estudou	1
Fundamental incompleto	2
Fundamental	3
Médio	4
Superior	5

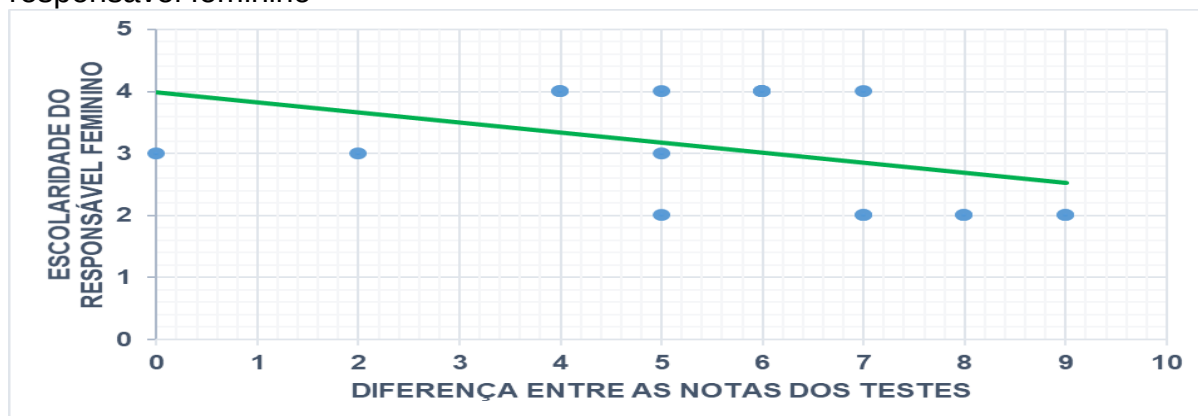
Fonte: Experimentação (2022).

Quadro 95 - Correlação entre a diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino

ESTUDANTE	DESEMPENHO		DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO
	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE		
E1	0	7	7	2
E3	4	8	4	4
E7	0	5	5	2
E8	0	2	2	3
E11	3	9	6	4
E13	2	2	0	3
E14	3	9	6	4
E15	0	7	7	4
E17	0	9	9	2
E20	0	9	9	2
E21	2	10	8	2
E22	2	10	8	2
E23	1	6	5	4
E24	2	8	6	4
E26	0	5	5	3
E29	3	7	4	4
E31	1,	7	6	4
E33	0	7	7	2

Fonte: Experimentação (2022).

Gráfico 41 - Dispersão: diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável feminino



Fonte: Experimentação (2022).

O coeficiente linear de Pearson “r” para essa correlação foi de $r = 0,400499688$ este resultado está dentro do intervalo $0,40 < r < 0,60$, podendo assim, ser classificada como “Moderado Positivo”. Isto é, a escolaridade do responsável feminino de cada discente que participou dos momentos de experimentação não possuiu influência significativa nos resultados dos testes.

No quadro a seguir apresentamos de maneira resumida os resultados das correlações encontradas entre variáveis investigadas com o questionário

socioeducativo e a diferença entre as notas obtidas no pré-teste e pós-teste realizados pelos estudantes participantes dos momentos de experimentação.

Quadro 96 - Resultados da Correlação Linear de Pearson

VARIÁVEL	COEFICIENTE LINEAR DE PEARSON (r)	INTENSIDADE	DIREÇÃO
Gosto pela Matemática	$r = 0,104880885$	Fraca	Positiva
Quem ajuda nas tarefas de Matemática	$r = 0,461735855$	Moderada	Positiva
Estudos fora da escola	$r = 0,470425339$	Moderada	Positiva
Interesse nas aulas de Matemática	$r = 0,481767579$	Moderada	positiva
Escolaridade do responsável masculino	$r = 0,265894716$	Fraca	Positiva
Escolaridade do responsável feminino	$r = 0,400499688$	Moderada	Positiva

Fonte: Experimentação (2022).

O quadro resume das correlações entre variáveis do questionário e a diferença das notas no pré-teste e pós-teste de adição e subtração de frações revela que os resultados para o coeficiente Linear de Pearson foram de fracos a moderados na direção positiva. Este resultado evidencia que os fatores socioeducacionais não interferiram nos resultados dos testes. Com isso, depreendemos que o bom desempenho dos estudantes em resolver as questões sobre adição e subtração de frações propostas no pós-teste pode ser resultado da sequência didática apresentada neste trabalho. Portanto, consideramos que a metodologia utilizada para ensinar os conceitos operatórios de adição e subtração de fração com denominadores iguais e diferentes foi fator determinante para os resultados do pós-teste.

6.6 - ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES PROPOSTAS E VALIDAÇÃO

Para chegarmos as conclusões dessa pesquisa que teve como objetivo analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais de estudantes do 6º ano do ensino fundamental confrontaremos nessa seção as análises a priori e a posteriori de cada atividade de aprendizagem proposta.

Por conseguinte, utilizaremos as informações que foram produzidas durante a experimentação, ou seja, os registros em fichas de observação e as anotações realizadas pelos estudantes. Os quadros a seguir mostram o confronto das atividades experimentadas 1, 2, 3 e 4. Vale ressaltar que as atividades de aprofundamento não foram analisadas pois tinham apenas o objetivo de fixar o conhecimento adquirido nas atividades de aprendizagem.

Quadro 97 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 01

ATIVIDADE	ANÁLISE À PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
1	Acreditamos que os alunos terão de início dificuldades para compreender o método de ensino e perceber a estratégia de resolução pelo fato de ser a primeira a ser desenvolvida na sequência didática através do desenho geométrico. Porém, acreditamos que o fato de ser uma novidade como ferramenta de ensino desse objeto matemático, os alunos serão motivados e atentarão para as orientações iniciais do professor e posteriormente para a interação da dupla visando encontrar a resolução para as questões propostas. Todavia, espera-se que com o desenvolvimento das questões, os alunos possam perceber a regra para as operações de adição de frações com denominadores iguais e resolvam as últimas questões de forma mais rápida. Quanto às questões finais, que indagam o aluno sobre como resolver às questões sem usar o desenho; e, qual a conclusão sobre os procedimentos de resolução, supomos que ainda por ser a primeira atividade da sequência didática os alunos apresentem dificuldades em expressar na forma textual a sua compreensão da regra e de como resolver a questão sem o uso do desenho. Os textos que devem ser escritos para estas perguntas nesta atividade devem conter pouca formalidade e o uso do linguajar jovial e coloquial dos alunos, de acordo com a sua faixa etária e o hábito da linguagem cotidiana, também influenciada pelo uso das redes sociais e da internet.	Como previsto nas análises à priori, os estudantes demonstraram um pouco de dificuldades no início por ser a primeira atividade a ser desenvolvida e pelo fato de estarem diante de uma metodologia diferente. Contudo, estavam bastante interessados e atentos a demonstração de resolução da primeira questão dessa atividade. Ao demonstrarmos como ficaria a resolução da segunda questão, os grupos já entenderam e passaram a resolver as demais questões sozinhos e, conseqüentemente, perceberam a regra para as operações de adição de frações com denominadores iguais, passando assim, a responder as últimas questões de forma mais rápida. Com relação a solicitação de uma conclusão de resolução elaborada de maneira escrita os grupos tiveram dificuldade de formular tal resposta. Apesar de apenas um dos cinco grupos ter conseguido expressar no registro escrito uma conclusão válida, prevista e desejada, a maioria percebeu que para somar frações com denominadores iguais, basta somar os numeradores e repetir o denominador. Além disso, dois grupos apresentaram uma conclusão não prevista e não desejada, porém válida. De modo geral, todos formularam alguma conclusão mesmo que inválida, o que demonstra interesse, participação e autonomia cognitiva para colaborar com o desenvolvimento da atividade.	POSITIVA

Fonte: Experimentação (2022)

Quadro 98 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 02

ATIVIDADE	ANÁLISE À PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
2	Para esta atividade que envolve questões relacionadas a operação de subtração de frações com denominadores iguais, esperamos que os alunos já estejam familiarizados com a metodologia e o uso do desenho geométrico. No entanto, por ser uma operação de subtração é exigido uma estratégia diferenciada para esse desenho e, por esse motivo, de início acreditamos que os alunos possam apresentar uma certa dificuldade. Mas acreditamos, também, que essas dificuldades serão sanadas logo por volta das questões 4 e 5, e assim, os alunos já percebiam a regra ou a forma de resolver a questão sem o uso do desenho. Acreditamos, ainda, que uma maior quantidade de alunos resolva com sucesso as 10 questões-problemas propostas na sequência didática e consigam compreender e construir a regra para a solução deste tipo de questão.	Os estudantes se mostraram ainda mais interessados, menos dispersos no início e com maior concentração. Com a demonstração de resolução no quadro como seria o procedimento para resolver por meio do desenho, os estudantes logo entenderam e começaram a construir os desenhos para cada situação problema e, como previsto, logo nas primeiras questões perceberam a regra para resolver subtração de frações com denominadores iguais. Conforme foi previsto, por já haverem elaborado conclusão semelhantemente na atividade anterior, todos os grupos conseguiram com facilidade elaborar uma conclusão válida.	POSITIVA

Fonte: Experimentação (2022)

Quadro 99 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 03

ATIVIDADE	ANÁLISE À PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO

3	As atividades que envolvem as operações com frações de denominadores diferentes, devem apresentar maior dificuldade de compreensão por parte dos alunos, pois há uma diferença no uso do desenho geométrico em relação à operação de adição de frações com denominadores diferentes, pois nestas atividades, o aluno deverá utilizar as linhas e colunas para representar as partes do inteiro que representam cada uma das duas frações. Logo, acreditamos que inicialmente os alunos tenham mais dificuldades e demore mais tempo para perceber a regra que resolve as questões. Supomos ainda uma maior demanda da orientação do professor e de uma maior interação entre os alunos para que cheguem a um acordo sobre a forma de resolver. Assim, acreditamos que os alunos percebam a regra entre a 7ª e 8ª questão da sequência de atividades.	Os estudantes estavam bastante interessados em entender como seria o procedimento para resolver as questões dessa atividade por meio do desenho, porém, como já tínhamos previsto, os grupos tiveram mais dificuldade demorando mais tempo para perceber a regra de resolução sem utilizar o desenho, pois trabalhar com denominadores diferente exige um pouco mais raciocínio na construção do desenho. Após demonstrações de resolução de outras duas questões os estudantes começaram a construir as respostas sozinhos. E assim, ao entenderem, começaram a construir os desenhos para cada situação problema. Todos os grupos finalizaram as resoluções mas, apresentaram muita dificuldade em escrever a conclusão solicitada.	POSITIVA
---	--	---	----------

Fonte: Experimentação (2022)

Quadro 100 - Análise a priori x Análise a posterior – Atividade 04

ATIVIDADE	ANÁLISE À PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
4	Para a realização da atividade que envolve subtração de frações com denominadores diferentes os alunos trarão a experiência das atividades com adição de frações com denominadores diferentes, o que deve facilitar a compreensão e resolução desta atividade. Logo, acreditamos que logo nas primeiras questões alguns alunos já percebam a regra que orienta a resolução das questões propostas.	Ainda no início da atividade os estudantes perceberam que seria de subtração com denominadores diferentes. E nas primeiras cinco questões, eles associaram à regra de adição de frações com denominadores diferentes e, comentaram que a diferença consistia em subtrair o resultado dos numeradores ao invés de somar como é na adição. Cada dupla apresentou suas conclusões. Seis duplas conseguiram elaborar uma conclusão escrita válida.	POSITIVA

Fonte: Experimentação (2022)

Ao verificar e confrontar as análises a priori e a posteriori apresentado acima, concluímos que todas as atividades apresentaram validações positivas, isto é, conforme o que havíamos previsto e desejado como resultado. Isso nos permite afirmar que o experimento à luz do ensino por atividades proporcionou aos estudantes um avanço cognitivo sobre a aprendizagem de operacionalizar problemas aditivos de frações com denominadores iguais e diferentes. Deste modo, mediante aos resultados

obtidos e analisados sob a ótica dos aportes teóricos adotados conclui-se que a sequência didática para o ensino de adição e subtração com frações por meio de atividades experimentais está validada, podendo ser adotada em aulas de matemática no Ensino Fundamental como produto educacional.

7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este trabalho que teve como objetivo geral analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais de estudantes do 6º ano do ensino fundamental, podemos afirmar que o estudo foi desenvolvido conforme as quatro fases da metodologia de pesquisa Engenharia Didática e que a mesma foi importante e eficiente para nos ajudar nas conclusões a que chegamos.

Quanto a identificar aspectos históricos e curriculares sobre fração em documentos oficiais como os PCNs e BNCC, ambos evidenciam a importância e necessidade de trabalhar o ensino de fração desde os anos iniciais associando ao ensino e a realidade do aluno para que seja significativa para ele. O levantamento sobre aspectos matemáticos do assunto nos ajudou a elaborarmos resoluções tanto de modo tradicional quanto de modo geométrico. Concluímos que o conceito sobre as operações de adição e subtração de frações, tanto com mesmo denominador quanto com denominadores diferentes, terá um significado mais concreto se formulado pelo próprio estudante a partir da resolução geométrica, ou seja, ajudar o aluno a desenvolver os conceitos operatórios desenhando a situação proposta, para em seguida concluir a solução algébrica.

Sobre os *misconceptions* no ensino de adição e subtração de frações os resultados indicam que esses estudos estão relacionados a conceitos, procedimentos ou princípios matemáticos. E também, que os alunos possuem grandes dificuldades em compreender os procedimentos aritméticos de adição e subtração de frações e, especialmente, com denominadores diferentes. Além disso, verificamos equívocos decorrentes de má formação do conceito de fração.

A revisão de estudos sobre o ensino de frações envolveu doze trabalhos subdivididos em diagnósticos, teóricos e experimentais, cujos resultados foram relevantes para nos situar quanto ao estado do conhecimento do objeto matemático.

Outra etapa que consideramos importante para a investigação foi a consulta aos docentes sobre os aspectos de sua formação e do ensino de frações. Os resultados nos permitiram concluir que, apesar dos professores possuírem grande experiência na docência, e assim, conhecerem outros métodos de ensino de frações, raramente os exploram em sala de aula, visto que, a maioria inicia suas aulas com

uma situação problema para depois introduzir o assunto e, muitos ainda costumam iniciar suas aulas pelo conceito seguido de exemplos e exercícios. Ficou evidenciado que, assim como os docentes, os alunos apresentam muitas dificuldades relacionadas a esse conteúdo, principalmente, o cálculo de m.m.c de soma e subtração com denominadores diferentes e, conseqüentemente, o cálculo das quatro operações básicas, e leitura e interpretação de situações problemas que envolvem adição e subtração de fração.

Avaliar a participação dos alunos da amostra nas aulas de Matemática durante o desenvolvimento da sequência didática e após a aplicação da mesma, nos permitiu concluir que durante a realização da primeira atividade os estudantes apresentaram um pouco de dificuldade, pois estavam diante de uma metodologia diferente da habitual. Contudo, durante o desenvolvimento das outras atividades esse obstáculo foi superado. Tal superação pôde ser evidenciada nas notas dos estudantes no pós-teste, uma vez que, foram significativamente maiores que as notas no pré-teste.

Ao aplicarmos as correlações de Person sobre variáveis do questionário sócio educacional (gosto pela matemática, escolaridade do responsável masculino, escolaridade do responsável feminino, estudos extraclasse e interesse pelas aulas de matemática) e as notas dos testes, vimos que nenhuma dessas variáveis influenciaram nesse resultado, o que nos leva a considerar que o ensino por atividade contribuiu para o sucesso do experimento, pois o mesmo foi constatado estatisticamente.

Por fim ao responder nosso problema de pesquisa sobre “como se dão os efeitos da aplicação de uma sequência didática sobre aprendizagens conceitual e procedimental de adição e subtração de frações, quando trabalhada junto a estudantes do 6° ano do ensino fundamental, podemos afirmar que os efeitos do experimento proporcionaram aos estudantes um avanço cognitivo sobre a aprendizagem de operacionalizar problemas aditivos de frações com denominadores iguais e diferentes.

Esperamos que os resultados da investigação possam abrir espaço para novas descobertas sobre a temática, pois constatamos na prática que a metodologia de ensino por atividades experimentais é capaz de fazer o estudante desenvolver conhecimentos e habilidades de maneira concreta. Enfim, a Sequência Didática elaborada apresentou efeitos positivos sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais de

estudantes do 6º ano do ensino fundamental participantes dessa pesquisa, pois os mesmos tiveram avanços significativos.

Concluímos que a sequência didática proposta é viável para o ensino do conteúdo matemático abordado e pode ser adotada por professores. Com base nos resultados da dissertação elaboramos um produto educacional intitulado “Adição e subtração de frações por atividades experimentais: sequência didática”, cuja intenção é que o material possa auxiliar tanto professores quanto estudantes no processo de ensino aprendizagem de adição e subtração de frações. O referido produto está disponível no site: <https://ccse.uepa.br/ppgem/>, na aba dissertações 2023.

REFERENCIAS

ALGHAZO, Yazan. M., & ALGHAZO, Runna. Exploring common misconceptions and errors about fractions among college students in Saudi Arabia. **International Education Studies**, v.10, n.4, p.133 -140, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.5539/ies.v10n4p133>.

ALKHATEEB, Mohammad Ahmad. Correcting Misconceptions in Fractions Using Interactive Technological Learning Activities. **International Journal of Learning, Teachin and Educational Research**. V. 19, n. 4, pg. 291-308, 2020.

ALMEIDA, Liliana; BRANCO, Neusa. Erros cometidos pelos alunos de 6.º ano a operar com números racionais. **Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém**, Santarém, vol. 6, n. 1, p. 95-109, 2018.

ALMOLOUD, Saddo. Ag; COUTINHO, Cileda Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, n. 3, p. 62-77, 2008. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>. Acesso em: 10 ago. 2021.

ALVES, kamilly Suzany Félix. O ensino de Frações por Atividades. 2018. 318 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In. BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BEKKEN, Otto. B. **Equações de Ahmes até Abel**. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro. Universidade de Santa Úrsula, 1994.

BITTAR, Marilena. Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para Discutir o Ensino de Matemática. In. TELES, Rosinalda Aurora de Melo;

BORBA, Rute Elisabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs.) **Investigações em Didática da Matemática**. Recife: UFPE, 2017, vol. 2, p. 101-132. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/321148987>. Acesso em: 20 mar. 2022.

BRANDÃO, C. L. F; RIBEIRO, M. M. C. L. O estudo das adições de frações com denominadores diferentes através das representações gráficas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p. 1 – 10.

Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. BSB: MEC, 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília, 1998.

BRASIL. Base nacional comum curricular. 3. ed. BSB: MEC, 2017.

BRUN, Sophie Joffredo-Le et al. Engenharia cooperativa como ação conjunta. **Revista Europeia de Pesquisa Educacional journals**. n. 1, v. 17, p. 187 – 208, 2018.

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Elza F.Gomide. 10. reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEMPA, 2017, p. 31- 51.

CABRAL, Natanael Freitas; COSTA, Acilena Coelho. **Sequências Didáticas: olhares teóricos e construção**. Belém: SBEMPA, 2019, p. 60-82

CARNEIRO, Luís Felipe Gonçalves; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Concepções de professores da educação básica sobre o ensino de frações: considerações preliminares. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. n. 14., 2017, Cascavel. **Anais...** Cascavel: Unioeste, n.14, p. 1 -10, 2017.

CARNEIRO, Rachel Shimba et al. Recursos do ambiente familiar e participação dos pais na vida escolar: um estudo comparativo entre crianças de escola pública e particular. In: **Revista Conexões Psi**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 49-61, 2015. Disponível em: <http://apl.unisuam.edu.br/revistas/index.php/conexoespsi/article/view/574>. Acesso em: 06/03/2023.

COSTA, Alan Cesar da. **Referenciais Históricos e Metodológicos para o Ensino de Frações**. 2010. 64f. Monografia de Licenciatura. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso B, relatório final) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: 2010.

DAVIS, Claudia L. F. et al. **Formação continuada de professores em alguns estados e municípios do Brasil**. São Paulo: Cadernos de Pesquisa, v.41, n.144, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0100-15742011000300010>. Acesso em: 05/01/2021.

DERINGÖL, Yasemin. Misconceptions of primary school students about the subject of fractions. **International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)**, v. 8, n. 1, p. 29-38, 2019.

D PERMATA *et al.* **Students' misconceptions on the algebraic prerequisites concept: operation of integer numbers and fractions**. The Sixth Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan, 2019.

DIONIZIO et al. Abordagens de frações no ensino fundamental: um levantamento nos anais do ENEM e EPREM. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, n. 3, vol. 10, p. 1 - 22, 2019.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.7, n.2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>>. Acesso em: 27/01/2021.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução: LEVY, Lênio Fernandes; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papyrus, 2003. (Coleção Papyrus Educação)

EICHENBERGER NETO, João. **História da matemática**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016, 224 p.

FELICETTI, Vera Lucia. **Um estudo sobre o problema da MATOFOBIA como agente influenciador nos altos índices de reprovação na 1ª série do Ensino Médio**. 2007. 208f. Dissertação de Mestrado. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). - PUCRS, Fac. de Física, Porto Alegre, 2007.

FERREIRA, João Max Damasceno. **Ensino de Problemas de Comparação Aditiva por Atividades Experimentais**. 2021. 352f. Dissertação de Mestrado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

FELIX, Ana Paula Nunes. **O ensino de problemas aditivos com mais de uma operação**. 2021, 291f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática. **Práxis Educacional**, v. 8, n. 13, p. 253-280, 2012.

LIMA, Renan Gustavo Araujo de; NEVES, Tatiani Garcia. Possibilidades de uso da engenharia didática na educação matemática e no ensino regular Possibilities of using didactic engineering in mathematics education and regular education. In: **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v.21, n.5, p.694-708, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p694-708>. Acesso em: 01/01/2022.

LIMA, Rafael Pontes. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II**. 2014. 240f. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará. Macapá, 2014.

LIMA, Karina Xavier de. **A adição e subtração de frações com denominadores diferentes com o uso do conceito de frações equivalentes**. 2017. 64f. Trabalho de

Conclusão de Curso (graduação – licenciatura em pedagogia). IF Goiano. Morrinhos, GO, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ifgoiano.edu.br/handle/prefix/1069>. Acesso em: 06/02/2022.

LOPES, Thiago Beirigo; PALMA, Rute Cristina Domingos da; SÁ, Pedro Franco de. Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, p. 159-181, 2018.

LOPES, Thiago Beirigo; SÁ, Pedro Franco de. Por que a Engenharia Didática em sala de aula?. **Gnosis Carajás**, [S. l.], v. 1, n. 2, p. e21012, 2021. DOI: 10.55723/gc.v1i2.21. Disponível em: <https://ojs.gnosiscarajas.com.br/index.php/GC/article/view/21>. Acesso em: 31 maio. 2022.

MABELINI, Orlando Donisete et al. **Caderno do futuro, matemática, 6º ano**. IBEP, 2013.

MARTINS, Kaique Nascimento. Tendências da pesquisa brasileira em resolução de problemas no campo da educação matemática. In: XXIV ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. PPGECEM, 2020, Paraná. **Anais...** Paraná: UNIOESTE/Cascavel, 2020.

MELO, Igor Augusto Sampaio da Costa de; ANDRADE, Pedro Henrique Freitas. Análise de erros em questões de adição e subtração com frações. **Revista WEB-MAT**. Belém, vol. 1, n. 1, p. 51- 60, 2014.

MELLO, Guiomar Namó de. **Currículo da educação básica no Brasil: concepções e políticas**. São Paulo: CEESP, 2014.

MELO, Elvis Medeiros de; COSTA, Clésia Jordânia Nunes da; PONTES, Mércia de Oliveira. Ensino de fração: uma experiência com o frac-soma 235. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SP, 2016.

MENDES, Marcele Tavares; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. O uso de representações semióticas na resolução de Problemas: proposta de uma atividade. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Curitiba, PR. **Anais...** Curitiba: PR, 2013.

MORAES, César Augusto do Prado; DEMARTINI, Zeila de Brito Fabri. A concepção da avaliação escolar em Matemática a partir dos desenhos de alunos. **Revista Pedagógica**, Chapecó - SC, v. 17, n. 35, p. 196-216, 2015. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5611504.pdf>. Acesso em: 05/01/2021.

MOURA, M. O. de. **A atividade de ensino como ação formadora**. In CASTRO, A. de; CARVALHO, A. M. P. (orgs.) Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, cap. 8, p. 143 – 162, 2001.

NUNES, Célia Barros; DOS SANTOS SANTANA, Eurivalda Ribeiro. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática Sobre o Conceito de Função. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 65-71, 2017.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. In: **Revista Principia** - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB, n. 38, p. 105-119, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612>. Acesso em: 06/03/2023.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autentica, 4 ed, 2019.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autentica, v. 3, 2001.

PANTOJA, L. F. L.; SILVA, F. H. S. Engenharia didática: articulando um referencial metodológico para o ensino de matemática na EJA. IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte. **Anais...**Belo Horizonte: MG, 2007.

PASUCH; BARBOZA; BASSANI. A utilização do lúdico no processo de ensino-aprendizagem de frações. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba - Paraná, 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2085_1580_ID.pdf> . Acesso em: 29/12/2020.

PEREIRA, Onésimo Rodrigues. Uma sequência didática para o ensino de adição de frações. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Curso de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Tocantins: Câmpus Universitário de Arraias, 2017.

PORTO, Francirley Moura. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis**. 2019. 105f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/handle/123456789/297>. Acesso em: 31 de maio de 2021.

POWELL, Arthur B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência. In: **REMATEC**, n. 29, p. 78-93, 2018. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/200/0>. Acesso em: 25/10/2022.

PRAHMANA, Rully Charitas Indra; FITRI, Nur Lailatul. Misconception in fraction for seventh-grade students. In: **Journal of Physics: Conference Series**. Publicação IOP, p. 012 - 031, 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **REMATEC**, [S. l.], v. 15, n. 35, p. 143–162, 2020. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/99>. Acesso em: 31 maio. 2021.

SÁ, Pedro Franco de. Possibilidades do ensino de matemática por atividades. 1. ed. Belém: SINEPEM, 2019. v. 1. 65p

SÁ, Pedro Franco de. **Momentos de aula de matemática por atividade**. Belém: (Ainda não publicado). 2018.

SÁ, Pedro Franco de.; ALVES, Fábio Júnior da Costa. A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: MARCONDES, M. I. (Org.); OLIVEIRA, I. A. (Org.); TEIXEIRA, E. (Org.). **Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação**. 1. ed. Belém: EDUEPA, 2011. v.1, p. 145-160, 2011.

SÁ, Pedro Franco de. et al. Adição e subtração de frações com calculadora virtual. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, salvador. **Anais...** salvador: Via Litterarum, n.10, p. 1-10, 2010.

SÁ, Pedro Franco de. Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental. Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. **A resolução de problemas como processo nas aulas de matemática**. Trilhas, Belém, v.8, n. 18, p. 59-71, 2006.

SÁ, Pedro Franco de. **Os problemas envolvendo as quatro operações e a unidade do pensamento linear**. 212p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2003.

SANTANA, Larissa Elfisia de Lima et al. Fração e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba – Paraná, 2013.

SANTOS, Francisco Nórdman Costa Santos. **O Ensino de Polígonos por Atividades**. 2020. 268f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

SANTOS, Renata dos; FONSECA, Simone Silva da. Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. **Revista Insignare Scientia (RIS)**, vol. 2, n. 1, 2019.

SANTOS, Maria José Costa dos. O currículo de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental na base nacional comum curricular (BNCC): os subalternos falam? **Horizontes**, [S. l.], v. 36, n. 1, p. 132–143, 2018. DOI:

10.24933/horizontes.v36i1.571. Disponível em:
<https://revistahorizontes.usf.edu.br/horizontes/article/view/571>. Acesso em:
 12/12/2020.

SCHROEDER, T. L., LESTER JR., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, 1989 (Year Book).

SOUZA, Vandete Freire de. **Uma abordagem aos números racionais na forma decimal: suas operações, representações e aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2013.

VAN DE WALLE, John A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Colonesse, Paulo Henrique. Porto Alegre: Penso Editora, 6. ed., 2009.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Penso, 2014.

ZANELLA et al. Um estudo teórico de problemas da estrutura aditiva de números racionais na representação fracionária. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba – Paraná, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) PARA OS
RESPONSÁVEIS LEGAIS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Seu/sua filho (a) está sendo convidado (a) para participar, como voluntário (a), da pesquisa intitulada **O Ensino de Adição e Subtração de Fração por meio de Atividades Experimentais**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Pedro Franco de Sá e Natali de Jesus Ferreira de Miranda**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esta pesquisa temos a pretensão de analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será autorizar seu/sua filho (a) para participar das atividades referentes a pesquisa. Os dados produzidos serão registrados por filmagens, fotografias, gravações de áudio e cadernos de campo. O acesso à análise dos dados coletados será realizado apenas pelos responsáveis da pesquisa citados a cima.

Sua identidade e a de seu/sua filho (a) será preservada e em nenhum momento serão identificados. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim as identidades serão preservadas.

Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre **O Ensino de Adição e Subtração de Fração por Atividades Experimentais**.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Pedro Franco de Sá e Natali de Jesus Ferreira de Miranda** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_____, _____ de _____ de 2022.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ autorizo que meu/minha
filho (a) _____ a participar do projeto citado acima,
voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE) PARA DISCENTE



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar voluntariamente da pesquisa intitulada **O Ensino de Adição e Subtração de Fração por meio de Atividades Experimentais**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Pedro Franco de Sá e Natali de Jesus Ferreira de Miranda**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esta pesquisa temos a pretensão de analisar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, baseada em atividades experimentais e resolução de problemas, sobre o ensino da adição e subtração de frações a respeito da aprendizagem de aspectos conceituais e procedimentais dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da mesma, participar dos testes e das atividades propostas.

Sua identidade será preservada e em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre **O Ensino de Adição e Subtração de Fração por Atividades Experimentais**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Pedro Franco de Sá e Natali de Jesus Ferreira de Miranda** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_____, _____ de _____ de 2022.

Assinatura dos pesquisadores

Eu, _____ aceito
participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE) PARA DOCENTE



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu aceito participar, voluntariamente, da pesquisa intitulada O Ensino de Adição e Subtração de Fração: Uma análise junto à professores de Matemática da rede pública do estado do Pará, sob a responsabilidade dos (as) **pesquisadores Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva, orientadoras e orientanda Natali de Jesus Ferreira de Miranda** vinculados a Universidade do Estado do Pará. Estou ciente que esta pesquisa busca realizar um diagnóstico do ensino de adição e subtração de frações a partir da opinião dos professores de matemática. Tenho clareza que minha colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras importantes para a realização da pesquisa. Em nenhum momento serei identificado. Estou ciente que os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim minha identidade será preservada. Estou ciente ainda que os produtos desta pesquisa serão de natureza acadêmica com um estudo sobre o ensino de adição e subtração de frações.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva e Natali de Jesus Ferreira de Miranda** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_____, _____ de _____ de 2022.

Assinatura dos pesquisadores

Participante da pesquisa

APÊNDICE D – PERFIL DISCENTE: QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL

 UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA		
Prezado(a) aluno(a), Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.		
1- Idade: _____ anos	2- Gênero: ☐ Masculino ☐ Feminino	3- Série: _____ Ano
4- Tipo de escola que estuda? ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada		
5- Qual a escolaridade do seu responsável masculino? ☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou		
6- Qual a escolaridade da sua responsável feminina? ☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou		
7- Você já ficou em dependência? ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas? _____		
8- Você gosta de Matemática? ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro		
9- Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática? ☐ Professor particular ☐ Pai ☐ Mãe ☐ Amigo da escola ☐ Namorado(a) ☐ Ninguém ☐ Outros. Quem? _____		
10- Com que frequência você estuda matemática fora da escola? ☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova ☐ Só na véspera da prova ☐ Não estudo fora da escola.		
11- Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática? ☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca		
12- Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem? ☐ Provas/simulado ☐ Testes semanais ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos ☐ Outros. Quais? _____		
13- As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados? ☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes		
14- Suas notas em Matemática geralmente são: ☐ Abaixo da média ☐ Na média ☐ Acima da média		
15- A maioria das suas aulas de matemática: ☐ Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios; ☐ Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos; ☐ Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto; ☐ Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo; ☐ Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.		
16- Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava: ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; ☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto; ☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático; ☐ Não propunha questões de fixação; ☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.		
17- Seu professor de matemática demonstra conhecimento e clareza ao trabalhar os conteúdos? ☐ Sim ☐ Não		
18- Você considera as explicações do professor de matemática? ☐ Ruins ☐ Regulares ☐ Boas ☐ Excelentes		

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO PARA DOCENTES DE MATEMÁTICA

 UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA	
Prezados (as) professores (as), Estamos desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de matemática, com a finalidade de elaborar produtos educacionais que possam ajudar no ensino mais dinâmico de matemática na educação básica. Para a efetivação da referida pesquisa, é importante sua participação ao responder às questões a seguir. Ressalto que sua identificação será preservada e que as informações serão utilizadas para fins acadêmicos.	
1- Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino ☐ Outro: _____	
2 – Faixa Etária: ☐ 15 a 20 anos ☐ 21 a 25 anos ☐ 26 a 30 anos ☐ 31 a 35 anos ☐ 36 a 40 anos ☐ 41 a 45 anos ☐ 46 a 50 anos ☐ 51 a 55 anos ☐ 56 a 60 anos ☐ 61 a 65 anos ☐ 66 a 70 anos	
3- Escolaridade: (Informe sua maior titulação) ☐ Superior ☐ Especialização ☐ Mestrado em andamento ☐ Doutorado	
4- Tempo de serviço como professor de Matemática ☐ Menos de um ano ☐ 1-5 anos ☐ 6-10 anos ☐ 11-15 anos ☐ 16-20 anos ☐ 21-25 anos ☐ 26-30 anos ☐ 31-35 anos ☐ Mais de 35 anos	
5- Como você costuma iniciar suas aulas de matemática? ☐ Pelo conceito seguido de exemplos e exercícios; ☐ Com uma situação problema para depois introduzir o assunto; ☐ Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo; ☐ Com jogos para depois sistematizar os conceitos; ☐ Outro: _____	
6– Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de matemática? ☐ Formação inicial sólida; ☐ Domínio de classe; ☐ Compreensão dos conceitos matemáticos; ☐ Formação continuada; ☐ Outro: Metodologias diferenciadas de ensino; ☐ Recursos didáticos e pedagógicos; ☐ Outro: _____	
7- Você seleciona os conteúdos de matemática a partir de que? ☐ Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN; ☐ Livro Didático; ☐ Caderno de Orientações da Rede de ensino.; ☐ Base Nacional Comum Curricular – BNCC; ☐ Outros: _____	
8- Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/ utilizar? (Marque mais de uma opção, se necessário) ☐ Prova oral; ☐ Prova escrita; ☐ Autoavaliação; ☐ Trabalhos em grupo ou individuais; ☐ Produções no caderno; ☐ Outro: _____	
9- Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma? ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; ☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto; ☐ Mandar resolver os exercícios do livro didático; ☐ Não propor questões de fixação; ☐ Propõe a resolução de questões por meio de softwares ☐ Outro: _____	
10- A rede de ensino onde você atua oferece formação continuada? ☐ Não oferece ☐ Oferece raramente ☐ Oferece frequentemente ☐ Sempre	
11- Quando a rede de ensino onde você trabalha, ou ainda outras instituições, ofertam curso de formação continuada você: ☐ Não participa ☐ Participa poucas vezes ☐ Participa muitas vezes ☐ Sempre	
12- Você considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada? ☐ Sim ☐ Não	

13- Seus alunos gostam de matemática? ☐ Todos ☐ A maioria ☐ A minoria ☐ Nenhum				
14- Quais as maiores dificuldades dos seus alunos nas aulas de matemática? (você pode marcar mais de uma alternativa, caso necessário) ☐ Compreensão dos conceitos/idéias ☐ Compreensão das regras ☐ Resolução dos problemas ☐ Realizar cálculo ☐ Outro: _____				
15- Qual o bloco de conteúdos da matemática você considera mais importante nas suas aulas? ☐ Números e operações ☐ Grandezas e medidas ☐ Espaço e forma ☐ Tratamento das informações				
16- Justifique sua resposta. _____				
17- Com base na sua experiência de professor (a) do 6º ano do ensino fundamental, preencha o quadro a seguir quanto ao ensino do assunto de fração.				
Conteúdo	Costuma ensinar esses assuntos?			
	Sim	Raramente	Não	
Conceito de fração				
Representação de fração				
Equivalência de frações				
Comparações de frações				
Tipo de frações				
Escrita de frações				
Leitura de frações				
Simplificação de frações				
Adição de frações com mesmo denominador				
Subtração de frações com mesmo denominador				
Adição de frações com denominadores diferentes				
Subtração de frações com denominadores diferentes				
Potência de fração				
Resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte				
Resolução de problemas nos quais se conhece uma parte se deseja conhecer um todo				
Resolução de problemas em que se conhece uma parte se deseja conhecer outra parte				
Expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração				
Problemas que envolvam adição ou subtração com frações				
18- Com base na sua experiência de professor (a) do 6º ano do ensino fundamental, relacione os assuntos conforme o grau de dificuldade de aprendizado dos alunos				
Conteúdo	Grau de dificuldade para os alunos aprenderem			
	Muito fácil	Fácil	Difícil	Muito difícil
Conceito de fração				
Representação de fração				
Equivalência de frações				

Comparações de frações				
Tipo de frações				
Escrita de frações				
Leitura de frações				
Simplificação de frações				
Adição de frações com mesmo denominador				
Subtração de frações com mesmo denominador				
Adição de frações com denominadores diferentes				
Subtração de frações com denominadores diferentes				
Potência de fração				
Resolução de problemas nos quais se conhece o todo e se deseja conhecer uma parte				
Resolução de problemas nos quais se conhece uma parte se deseja conhecer um todo				
Resolução de problemas em que se conhece uma parte se deseja conhecer outra parte				
Expressões numéricas com frações envolvendo adição e subtração				
Problemas que envolvam adição ou subtração com frações				

19- Quando você trabalha o assunto de Fração, usa algum tipo de material além da explanação no quadro para ensinar o assunto?
 competição com o jogo do dominó de frações
☐ uso de material concreto de seu dia a dia como: (bolo, pizza, frutas etc.)
☐ Resolução de problemas
☐ Oficinas
☐ Recursos manipuláveis como: disco de frações, desenho geométrico, blocos lógicos.
☐ Outros. Quais? _____ -

20- Existe algum tipo de dificuldade que você gostaria de referir-se quanto ao ensino de adição e subtração de frações?

21- Você aponta alguma dificuldade apresentada pelos estudantes no processo de aprendizado de adição e subtração de fração? (você poderá marcar mais de uma alternativa)
☐ Dificuldade de aplicar o conhecimento do conteúdo em diferentes situações
☐ No cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, apresentam dificuldade para transformar tais frações com denominadores iguais
☐ Dificuldade na leitura e interpretação de situação problema
☐ Dificuldade para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.)
☐ Os alunos não apresentam nenhuma dificuldade
☐ Outros: _____

22- Que sugestões você daria relativas a elaboração de um material didático específico para o ensino de adição e subtração de fração?

APÊNDICE F – SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO ESTUDANTE

Atividade 01
Título: Adição de frações com denominadores iguais Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a adição de duas frações com o mesmo denominador Título: Adição de frações com denominadores iguais Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel. Procedimento: Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.
1. A mãe de Antônio possui uma barra de chocolate e quer distribuir entre ele e seu amigo João de modo que ela também possa comer. Sendo assim, ela deu $\frac{2}{6}$ para Antônio e $\frac{2}{6}$ para João. Que fração da barra de chocolate foi comida por João e Antônio ao todo?
2. Um jardim ocupa $\frac{1}{6}$ de um terreno e uma piscina ocupa $\frac{3}{6}$ desse mesmo terreno. Qual é a fração que representa a parte ocupada pelo jardim e piscina?
3. Uma área de terra pertence a dois agricultores: agricultor A e o agricultor B. O agricultor A possui $\frac{5}{10}$ desse terreno e o agricultor B possui $\frac{2}{10}$. Qual a fração da área de terra os dois agricultores possuem ao todo?
4. Em um jardim $\frac{2}{7}$ das flores são vermelhas e $\frac{3}{7}$ amarelas. Qual a fração que representa as flores vermelhas e amarelas juntas?
5. Para agradar os filhos, dona Benta fez uma torta de cenoura que dividiu em dez pedaços iguais. Para Maria ela deu $\frac{4}{10}$ da torta, para Antônio deu $\frac{3}{10}$ e guardou o restante. Que fração da torta dona Benta deu para seus dois filhos ao todo?
6. Uma pizza foi repartida entre Luíza e João. Luíza comeu $\frac{4}{12}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{12}$. Que fração da pizza eles comeram no total?
7. Dona Nazaré recebeu seu dinheiro ao final do mês. Ela entrou em uma loja e gastou $\frac{3}{5}$ do seu dinheiro em roupas e $\frac{1}{5}$ em sapatos. Que fração representa o total que ela gastou nessa loja?

8. Seu Manoel possui uma roça. Nela ele planta mandioca e milho. Para plantar mandioca ele ocupa $\frac{4}{9}$ da área total, enquanto que $\frac{3}{9}$ da área total são destinados ao cultivo de milho. Qual é a fração da área total da roça que está ocupada com mandioca e milho?

9. Em um dia de promoção Bernardo foi a uma loja e comprou uma televisão e um fogão. Ele retirou de sua carteira $\frac{5}{8}$ do dinheiro que tinha para pagar a televisão e $\frac{3}{8}$ para pagar o fogão. Qual foi a fração total que Bernardo retirou de seu dinheiro para pagar os dois objetos?

10. Sabendo que um anel custaria $\frac{2}{10}$ do dinheiro que tinha, Marta resolveu comprar para presentear sua mãe no dia do seu aniversário. Porém, ao entrar na loja, ela também gostou de um colar que custaria $\frac{7}{10}$ de seu dinheiro. Que fração do dinheiro Marta gastou ao comprar o anel e o colar?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Conclusão

Atividade de Aprofundamento da Atividade 1

1. Para efetuar uma adição de fração com denominadores iguais, qual regra podemos utilizar?
- Adicionamos os numeradores e, também, adicionamos os denominadores.
 - Adicionamos apenas os numeradores e multiplicamos os denominadores.
 - Adicionamos os numeradores e conservamos o mesmo denominador.
 - Adicionamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.

2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	
b	$\frac{1}{8} + \frac{4}{8}$	
c	$\frac{2}{11} + \frac{1}{11}$	
d	$\frac{5}{15} + \frac{2}{15}$	
e	$\frac{5}{20} + \frac{4}{20}$	

3. Na eleição para representante de classe das turmas de 7º Ano, com três candidatos em cada turma, todos os alunos votaram. A eleição finalizou com o seguinte resultado:

Turma 701	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato	Turma 702	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato
Marcela	$\frac{2}{6}$	João	$\frac{2}{9}$
Luiza	$\frac{1}{6}$	Marcelo	$\frac{4}{9}$
Tiago	$\frac{3}{6}$	Ruth	$\frac{3}{9}$

A partir desses dados, responda:

- Qual é a fração que representa os votos obtidos por Marcela e Tiago juntos na turma 701?

b) Marcelo e Ruth obtiveram um total de votos juntos na 702, que fração representa essa quantidade?

4. No Colégio Militar de Belém, há uma banda de música da qual os alunos do 6º ano ao 3º ano podem participar. Eles aprendem a tocar um instrumento musical e fazem várias apresentações nos eventos que ocorrem no colégio. Na tabela a seguir, temos os cinco instrumentos mais executados e as respectivas frações que eles representam em relação ao total de instrumentos da banda:

INSTRUMENTO	FRAÇÃO
Clarinete	$\frac{4}{23}$
Flauta doce	$\frac{5}{23}$
Flauta transversal	$\frac{5}{46}$
Sax	$\frac{7}{23}$
Trompete	$\frac{7}{46}$

Com base nos dados da tabela acima, responda:

- a) Qual é a fração resultante ao juntar os instrumentos de sax, flauta doce e clarinete?
- b) Trompete e flauta transversal, juntos, representam que fração?

5. Em um colégio, $\frac{1}{5}$ dos alunos da Turma A e $\frac{2}{5}$ dos alunos da Turma B foram infectados com a Covid-19. Sabe-se que o número de alunos da Turma A é igual ao número de alunos da Turma B. Em relação ao total de alunos das Turmas A e B, os infectados com a Covid-19 representam que fração?

6. Para fazer um trabalho escolar, Gustavo usou $\frac{3}{10}$ de uma folha de cartolina, enquanto sua irmã usou $\frac{2}{10}$ da mesma folha para fazer seu trabalho. Avalie se o que eles falam está correto.



Juntos utilizamos $\frac{1}{2}$, ou seja, a metade da cartolina

Justifique sua resposta.

7. Elabore uma situação que envolva adição de fração com denominadores iguais. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Atividade 02

Título: Subtração de frações com denominadores iguais

Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a subtração de duas frações com o mesmo denominador

Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel.

Procedimento:

Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.

1. Lucas gosta de tomar açaí. Hoje ele tomou $\frac{4}{7}$ de litro de açaí no almoço e $\frac{2}{7}$ de litro durante o jantar. Que fração de litro de açaí ele toma a mais durante o almoço do que no jantar?
2. Júlia possui $\frac{9}{10}$ de figurinhas para colocar em seu álbum enquanto que Joana não possui nenhuma. Se Júlia doar $\frac{4}{10}$ de suas figurinhas para Joana, qual será sua fração de figurinhas restante?
3. Paulo e João saíram para comer uma pizza. Paulo comeu $\frac{8}{12}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{12}$. Qual fração da pizza Paulo comeu a mais que João?
4. Cristina tem $\frac{10}{15}$ de pacote de biscoito. Fátima também tem $\frac{7}{15}$ desse pacote de biscoito. Qual a fração de pacote de biscoito que Cristina possui a mais que Fátima?
5. Uma pizza de 8 pedaços foi dividida entre Luíza e João. Luíza comeu $\frac{5}{8}$ da pizza e João comeu $\frac{3}{8}$. Que fração da pizza João comeu a menos que Luíza?
6. Uma loja possui muitos funcionários. $\frac{9}{10}$ são mulheres e $\frac{7}{10}$ são homens. Qual a fração que representa a diferença entre a quantidade de mulheres e homens que trabalham nessa loja?
7. Seu Manoel possui uma roça. Nela ele planta mandioca e milho. Para plantar mandioca ele ocupa $\frac{4}{9}$ da área total, enquanto que $\frac{3}{9}$ são destinados ao cultivo de milho. Qual fração do terreno ele precisa cultivar para que a área do cultivo de milho seja igual a área cultivada com mandioca?

8. A fração $\frac{11}{13}$ representa a área total do sítio de seu Raimundo que pode ser cultivada. Sabendo que ele quer separar $\frac{5}{13}$ para plantar arroz, qual fração da área de cultivo sobrar?

9. Ronaldo foi ao supermercado e levou $\frac{8}{10}$ do que havia recebido do seu mês de salário. Ele comprou tudo o que precisava e gastou $\frac{5}{10}$. Que fração sobrou do dinheiro que Ronaldo havia levado?

10. Um tênis custa $\frac{4}{9}$ do dinheiro que Carlos possui e uma sandália custa $\frac{2}{9}$ desse dinheiro. Que fração representa o valor que o tênis possui a mais em relação a sandália?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Conclusão

Atividade de Aprofundamento da Atividade 2

1. Ao subtrair frações com denominadores iguais, qual regra pode ser utilizada?
- e) Subtrai-se o numerador da primeira pelo numerador da segunda fração e, conserva o denominador.
 - f) Subtraímos os numeradores e subtraímos os denominadores.
 - g) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores.
 - h) Subtraímos os numeradores e, multiplicamos os denominadores.

2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$	
b	$\frac{6}{7} - \frac{1}{7}$	
c	$\frac{9}{10} - \frac{6}{10}$	
d	$\frac{10}{11} - \frac{5}{11}$	
e	$\frac{5}{8} - \frac{4}{8}$	

3. Na eleição para representante de classe das turmas de 7º Ano, com três candidatos em cada turma, todos os alunos votaram. A eleição finalizou com o seguinte resultado:

Turma 701	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato	Turma 702	Fração dos votos da turma obtidos pelo candidato
Marcela	$\frac{2}{6}$	João	$\frac{2}{9}$
Luiza	$\frac{1}{6}$	Marcelo	$\frac{4}{9}$
Tiago	$\frac{3}{6}$	Ruth	$\frac{3}{9}$

A partir desses dados, responda:

- a) Qual a diferença de votos entre Tiago e Luíza na turma 701?
- b) Marcelo obteve que fração de votos a mais que João na turma 702?

4. Na garagem de um prédio, há automóveis, motos e bicicletas, no total de 120 veículos. Desse total, $\frac{3}{10}$ são motos, $\frac{4}{10}$ são bicicletas, e os demais são automóveis. Do número total de veículos dessa garagem, os automóveis correspondem à qual fração?

5. Elabore uma situação que envolva subtração de fração com denominadores iguais. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Atividade 03

Título: Adição de frações com denominadores diferentes

Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a adição de duas frações com denominadores diferentes

Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel.

Procedimento:

Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.

1. Uma escola dispõe apenas de um campo de futebol para as aulas de Educação Física. No momento de recreação ao final da aula uma parte dos alunos queria jogar futebol e o restante vôlei. Se a divisão do campo foi $\frac{1}{2}$ do campo para futebol e $\frac{1}{4}$ do campo para vôlei, que fração total foi ocupada pelo futebol e vôlei juntos?
2. Numa fazenda em Tailândia, $\frac{1}{2}$ da área total foi destinada para a plantação de milho, enquanto que $\frac{1}{3}$ da área total foi destinada ao cultivo de frutas diversas. Qual é a fração da área total da fazenda que está ocupada com a cultura do milho e frutas?
3. Em uma empresa os funcionários poderiam escolher entre três cores para a confecção do uniforme. $\frac{1}{5}$ escolheu a cor verde, $\frac{1}{3}$ preferiu a cor azul e os demais optaram pela cor laranja. Qual a fração dos funcionários que votou pelas cores verde e azul?
4. Ana Maria está lendo um livro. Em um dia, ela leu $\frac{1}{2}$ do livro e, no dia seguinte, leu $\frac{1}{7}$ do livro. Qual a fração do livro que ela já leu?
5. Matilde repartiu um bolo em 8 pedaços. Ela comeu $\frac{1}{4}$ e Rodolfo comeu $\frac{1}{2}$ do bolo. Que fração representa a parte do bolo que Matilde e Rodolfo comeram?
6. Imagine que você tenha certa quantidade de bombons para distribuir com os meninos A e B, de modo que o menino A recebesse $\frac{1}{4}$ e o menino B ficasse com $\frac{2}{3}$. Qual é a fração resultante se o menino A juntar seus bombons com o menino B?
7. Uma empresa vai construir uma nova sede. Ela vai destinar $\frac{1}{3}$ do terreno para estacionamento, $\frac{3}{5}$ do terreno para construção do prédio e o restante para área verde. Qual é a fração do total do terreno a ser ocupado pelo estacionamento e construção do prédio juntos?

8. Um atleta, ao participar de uma prova de triatlo, percorreu da seguinte maneira: $\frac{1}{10}$ do percurso correndo, $\frac{3}{7}$ de bicicleta e o restante a nado. Qual fração do percurso que esse atleta realizou correndo e de bicicleta?
9. Miguel comeu $\frac{1}{5}$ dos bombons de uma caixa e Marcos comeu $\frac{2}{3}$. Que Fração dos bombons eles comeram?
10. No simulado, Sergio acertou $\frac{1}{3}$ das questões de Matemática e $\frac{2}{7}$ das questões de português. Que fração do simulado de Matemática e português Sergio acertou?
11. Para comprar uma bicicleta, Marcos precisa gastar $\frac{2}{9}$ de seu salário e para comprar os acessórios que irá precisar para pedalar irá gastar $\frac{1}{3}$. Qual fração de seu salário Marcos irá gastar para poder comprar a bicicleta e os acessórios?
12. Amanda adora frações. Por isso ela observou que gasta $\frac{3}{7}$ do seu salário com aluguel e $\frac{1}{5}$ com a prestação do seu carro. Qual fração correspondente aos gastos com aluguel e prestação do carro juntos?
13. João irá receber um <i>tablet</i> em seu aniversário como presente de seu pai e avós. Sabendo que seu pai pagará $\frac{2}{3}$ do valor e seus avós $\frac{1}{5}$ e o restante sairá do seu cofrinho, qual é a fração que representa o valor pago pelo pai e avós do menino juntos?
14. Ao percorrer de carro um longo trajeto, João percebeu que ao fim do primeiro dia havia percorrido $\frac{3}{8}$ desse trajeto. No segundo dia, ao dirigir com maior velocidade pôde alcançar $\frac{1}{2}$ do trajeto total. Quanto do trajeto total o motorista percorreu durante os dois dias de viagem?
15. Um motorista saiu de Tailândia em direção à cidade de Belém. No primeiro dia percorreu $\frac{3}{6}$ da distância que separa as duas cidade e no segundo dia $\frac{1}{5}$ dessa mesma distância. Qual é a fração, que representa a distância percorrida após os dois dias de viagem?
16. Na construção de um muro, Carlos construiu $\frac{3}{7}$ do muro e Paulo $\frac{2}{8}$ do muro. Que fração do muro eles construíram juntos?
17. José Luís decidiu colecionar figurinhas para um álbum. Na primeira compra de figurinhas conseguiu preencher $\frac{2}{7}$ do álbum e na segunda, $\frac{4}{6}$. Que fração do álbum ele preencheu?
18. Em um jogo de Futebol, Sandro fez $\frac{4}{7}$ de pontos da partida e Silvio fez $\frac{2}{5}$. Que fração representa o total de pontos que eles fizeram juntos?

19. Dona Branca usou $\frac{3}{10}$ das laranjas de uma caixa para fazer doces e $\frac{4}{6}$ para fazer sucos. Que fração das laranjas da caixa foi usada para fazer doces e sucos?

20. Uma pizza foi dividida em partes iguais. Rita comeu $\frac{2}{9}$ da pizza e Juca comeu $\frac{4}{8}$. Que fração da pizza eles comeram juntos?

Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.

Questão	Operação realizada	Resultado obtido
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Conclusão

Atividade de Aprofundamento da Atividade 3

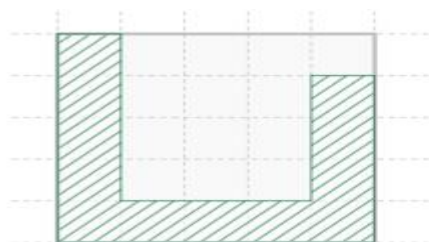
1. Para efetuar uma adição de fração com denominadores diferentes, qual regra podemos utilizar?

- a) Adicionamos os numeradores e, também, adicionamos os denominadores.
- b) Adicionamos apenas os numeradores e multiplicamos os denominadores.
- c) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, adicionamos os numeradores resultantes.
- d) Adicionamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores da primeira pelo denominador da segunda. E, por fim, efetuamos as operações indicadas entre os numeradores.

2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{8} + \frac{1}{5}$	
b	$\frac{1}{2} + \frac{4}{9}$	
c	$\frac{3}{6} + \frac{1}{5}$	
d	$\frac{2}{10} + \frac{3}{4}$	
e	$\frac{4}{6} + \frac{2}{8}$	

3. Um agricultor comprou um terreno de formato quadrangular no município de Tailândia. Ele pretende destinar uma área do terreno para o plantio de produtos agrícolas, com o objetivo de comercializá-los, conforme mostra o desenho abaixo.



→ Área destinada ao plantio

Da área destinada ao plantio serão reservados:

- $\frac{1}{4}$ para o plantio de árvores frutíferas;

- $\frac{1}{6}$ para o plantio de verduras e;

- O restante para o plantio de legumes.

Desse modo, qual será a fração da área do terreno destinada ao plantio de legumes?

4. A estrada que liga Moju a Tailândia será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Qual fração que corresponde à terceira etapa?

5. Silvio fez uma pesquisa com pessoas de seu condomínio residencial sobre a prática da coleta seletiva de lixo. Ele constatou que $\frac{3}{4}$ dos entrevistados praticam esse tipo de coleta e $\frac{1}{5}$ dos entrevistados não sabem o que isso significa. Dessa maneira, qual é a fração que representa a quantidade de pessoas entrevistadas por Silvio?

6. José separou $\frac{2}{5}$ de um terreno para construir um galinheiro, $\frac{1}{3}$ para cultivar alface e o resto do terreno para tomate. Em que fração do terreno José cultivará tomate?

7. Os jogos estudantis das escolas do município de Tailândia aconteceram nos dias 1 a 6 de maio, o evento esportivo teve a participação de 1.600 alunos que competirão em 11 modalidades. Na disputa de cinco modalidades participaram 600 alunos, desses $\frac{1}{8}$ da natação, $\frac{1}{5}$ handebol, $\frac{1}{4}$ do basquete, $\frac{1}{10}$ de jud  e o restante da apresenta o artístico-cultural. Com base nas informações do texto, marque a alternativa que representa a quantidade de participantes da apresenta o artística-cultural e a fração correspondente a essa modalidade.

- a) $195, \frac{13}{40}$
- b) $135, \frac{15}{35}$
- c) $195, \frac{27}{40}$
- d) $280, \frac{14}{35}$
- e) $135, \frac{15}{40}$

8. Elabore uma situação que envolva adição de fração com denominadores diferentes. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

Atividade 04

Título: Subtração de frações com denominadores diferentes

Objetivo: Descobrir uma maneira operacional de determinar a subtração de duas frações com denominadores diferentes

Material: Roteiro da Atividade, Caneta ou lápis e papel.

Procedimento:

Resolva as questões a seguir e com os resultados obtidos preencha o quadro abaixo.

1. De uma caixa de bombons, foi distribuído $\frac{1}{2}$ dos bombons para Luiz Carlos e Fabiana. Luiz Carlos ficou com $\frac{1}{4}$. Com que fração da caixa de bombons Fabiana ficou?
2. Dona Benta repartiu uma torta, e deu $\frac{1}{5}$ para seus sobrinhos Felipe e Tiago. Felipe ganhou $\frac{1}{10}$ da torta. Que fração da torta, Tiago ganhou?
3. Em uma indústria $\frac{1}{3}$ dos funcionários trabalham na produção de macarrão, sendo que $\frac{1}{7}$ desses funcionários são mulheres. Que fração representa os homens que trabalham na produção de macarrão?
4. Roberto Carlos e Ronaldinho fizeram $\frac{1}{2}$ dos gols de uma partida de futebol. Roberto Carlos fez $\frac{1}{6}$ dos gols da partida. Qual a fração de gols de Ronaldinho?
5. Carla e Bruna preencheram juntas $\frac{1}{2}$ do álbum de figurinha, Carla preencheu $\frac{1}{5}$ das figurinhas. Qual a fração do álbum de figurinha Bruna preencheu?
6. Na festa de aniversário de Marcelo $\frac{1}{2}$ eram doces de morango e brigadeiro. Se a quantidade de doces de morango correspondia a quantidade $\frac{3}{9}$. Qual a fração que representa a quantidade dos doces de maracujá?
7. Ao receber seu salário, Mário gastou $\frac{1}{4}$ do seu dinheiro comprando camisas e sapatos. Sabemos que o valor gasto com camisas corresponde a $\frac{2}{10}$, sendo assim, qual fração representa o valor gasto com sapatos?
8. Na escola São Felipe $\frac{1}{5}$ dos alunos são torcedores do Flamengo e Palmeiras. Sabe-se que, a quantidade desses alunos torcedores do Palmeiras são representados pela fração $\frac{2}{12}$. Qual é a fração que representa o número de torcedores do Flamengo?
9. Para completar uma prova de ciclismo Roberto precisa percorrer $\frac{1}{2}$ de uma longa pista. Ele já percorreu $\frac{3}{4}$, que fração ainda falta para completar a prova?

10. Para comprar uma bolsa e uma blusa, Carla precisa gastar $\frac{1}{6}$ do dinheiro que possui. Somente a bolsa custa $\frac{2}{15}$ do seu dinheiro. Sabendo disso, qual é a fração que representa o custo da blusa?		
11. Vinícius e Tatiana encheram dois copos com refrigerante. Vinícius bebeu $\frac{2}{3}$ do seu copo e Tatiana bebeu $\frac{1}{4}$ do copo dela. Qual fração de refrigerante Vinícius bebeu a mais que Tatiana?		
12. Jorge tinha $\frac{6}{9}$ de um bolo. Comeu $\frac{1}{6}$. Quanto sobrou de bolo?		
13. Carla deu $\frac{2}{3}$ de um empadão para Lúcia e $\frac{1}{2}$ para André. Que fração de empadão Carla deu a mais para Lúcia do que para André?		
14. João entrou em uma loja e gostou de uma camisa. Ele possuía $\frac{8}{10}$ de seu salário no bolso e a camisa custaria $\frac{1}{2}$ desse valor. Qual fração do dinheiro restaria para João se ele comprasse a camisa?		
15. Um atleta decide treinar correndo numa determinada pista de corrida. No primeiro e no segundo dia ele correu $\frac{10}{12}$ da pista. Sabendo que no segundo dia ele correu $\frac{1}{6}$, qual fração representa a quantidade que ele correu no primeiro dia?		
16. Tenho $\frac{10}{12}$ de uma barra de chocolate pequena. Se dou $\frac{3}{5}$ para o meu primo, que fração da barra de chocolate ficarei?		
17. Manoel colheu $\frac{13}{15}$ de mangas em seu sítio. Deu $\frac{3}{5}$ para seu tio, com que fração de manga Manoel ficou?		
18. Marta resolveu vender laranja e maçã. No primeiro dia vendeu $\frac{9}{10}$ das frutas que tinha no estoque. Das frutas vendidas, $\frac{5}{6}$ foram maçãs. Que fração representa a quantidade de laranjas que foram vendidas?		
19. Sandro comprou $\frac{7}{8}$ de uma torta de morango para seu lanche da tarde, porém comeu somente $\frac{3}{4}$. Que fração da torta Sandro deixou de comer?		
20. Em uma partida de futebol, Neymar e Messi fizeram $\frac{3}{8}$ dos gols da partida. Sabendo que só Neymar fez $\frac{2}{6}$ desses gols, que fração representa os gols marcados por Messi?		
Descubra uma maneira de obter os resultados sem fazer os desenhos.		
Questão	Operação realizada	Resultado obtido

1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Conclusão:

Atividade de Aprofundamento da Atividade 4

1. Ao subtrair frações com denominadores diferentes, qual regra pode ser utilizada?

- e) Subtraímos os numeradores e, também, subtraímos os denominadores.
- f) Subtraímos apenas os numeradores e subtraímos os denominadores.
- g) Multiplicamos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda e multiplicamos o numerador da segunda pelo numerador da primeira. E, por fim, subtraímos os numeradores resultantes.
- h) Subtraímos os denominadores, formando o novo denominador. Em seguida, multiplicamos os numeradores da primeira pelo denominador da segunda. E, por fim, efetuamos as operações indicadas entre os numeradores.

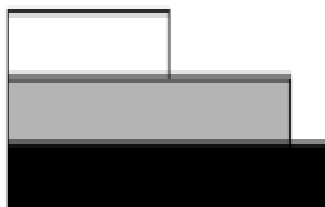
2. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$	
b	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$	
c	$\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$	
d	$\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$	
e	$\frac{9}{10} - \frac{1}{4}$	

3. Na casa de Mariana o gasto diário de água com descargas correspondia a $\frac{2}{5}$ da capacidade da caixa d'água. Com a troca por descargas mais econômicas, esse

consumo passou a ser de $\frac{1}{4}$ da capacidade da mesma caixa d'água. Logo, a fração da caixa d'água economizada com essa troca foi de

4. As barras preta, cinza e branca foram empilhadas como mostra a figura.



Sabe-se que os comprimentos das barras branca e cinza correspondem, respectivamente, a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{7}{8}$ do comprimento da barra preta. A diferença entre os comprimentos das barras cinza e branca corresponde a que fração?

5. Um trenzinho de controle remoto anda sobre um trilho sempre em linha reta. Partindo da estação A em direção à estação C, passando pela estação B, percorre $\frac{3}{4}$ da distância entre as estações A e C e pára. Por algum problema no controle remoto, volta, de ré, $\frac{2}{3}$ do que havia percorrido, atingindo a estação B e pára. Desconsiderando-se as dimensões do trenzinho, qual é a fração que representa a distância de A até B?

6. Elabore uma situação que envolva subtração de fração com denominadores diferentes. Troque com um colega e resolva a situação elaborada por ele, representando-a geometricamente e em linguagem matemática.

APÊNDICE F – TESTE PROPOSTO PARA ANTES E APÓS A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. Determine o resultado das operações a seguir:

	QUESTÕES	RESULTADOS
a	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	
b	$\frac{6}{10} + \frac{3}{10}$	
c	$\frac{8}{11} - \frac{1}{11}$	
d	$\frac{12}{15} - \frac{8}{15}$	
e	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	
f	$\frac{2}{4} + \frac{1}{5}$	
g	$\frac{2}{6} + \frac{3}{5}$	
h	$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$	
i	$\frac{4}{6} - \frac{2}{4}$	

2. Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)

3. Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que

fração da tira inicial? (Representar geometricamente as informações do problema e em seguida, apresentar a solução)

4. Julia e Renato foram comer pizza. Julia comeu $\frac{1}{5}$ e Renato $\frac{2}{5}$ de uma pizza de calabresa. Que fração da pizza eles comeram juntos?

5. A fazenda de seu Francisco perde-se de vista. Ele reservou $\frac{5}{8}$ de sua fazenda para a agricultura de milho e feijão. Se $\frac{2}{8}$ foi para o plantio de milho, que fração da reserva ficou para o plantio de feijão?

6. No primeiro dia de trabalho, Arnaldo pintou $\frac{1}{8}$ de uma parede e, no segundo dia, pintou $\frac{3}{8}$ da mesma parede. Avalie se o que ele fala é correto. Justifique sua resposta.



7. Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?

8. Das pessoas que estavam na barraca de pastel, $\frac{4}{5}$ eram homens. Se $\frac{1}{2}$ das pessoas que estavam na barraca usava óculos e apenas homens usavam óculos, que fração das pessoas que estava na barraca de pastel representa os homens que não usavam óculos?

9. A produção mensal de uma confecção feminina é formada por $\frac{2}{7}$ de blusas, $\frac{1}{4}$ de saias e o restante de vestidos. Que fração da produção mensal é destinada aos vestidos?

10. Os militares que trabalham no Colégio Militar Brasileiro realizam um teste de aptidão física (TAF) três vezes por ano. Nesse teste, os militares têm de realizar uma prova de corrida, uma de abdominais, uma de barras e uma de flexão de braço. No teste realizado em 2015, na prova de corrida, o Tenente Belchior, já havia corrido do percurso da prova $\frac{1}{3}$ e, após correr mais 600 metros, completou $\frac{3}{5}$ do percurso. Dessa forma, que fração representa os 600 metros que ele correu?

APÊNDICE G – FICHA DE OBSERVAÇÃO DE AULA POR ATIVIDADE

Nome do Professor: _____ Nome do Observador: _____
 Data ____/____/____ Atividade: _____
 Horário Inicial: _____ Horário do Término: _____
 Quantidade de Alunos: _____ Quantidade de Grupos: _____ Objetivo da Atividade: _____

MOMENTO	DOCENTE	GRUPOS							
ORGANIZAÇÃO	DIRIGIU AS AÇÕES? () SIM () EM PARTE () NÃO	GRUPOS	01	02	03	04	05	06	07
	ORIENTOU A FORMAÇÃO DAS EQUIPES? () SIM () EM PARTE () NÃO	OS COMPONENTES FORAM RECEPTIVOS?							
	DEMONSTROU TER PLANEJADO A ATIVIDADE? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	EVITOU QUE OS ALUNOS DESPERDIÇASSEM TEMPO COM AÇÕES ALHEIAS A ORGANIZAÇÃO DA TURMA? () SIM () EM PARTE () NÃO	DESPERDIÇOU TEMPO COM AÇÕES ALHEIAS A ORGANIZAÇÃO?							
	FOI OBJETIVO? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	MOSTROU ENTUSIASMO? () SIM () EM PARTE () NÃO	O GRUPO FOI FORMADO ESPONTANEAMENTE?							
	OBSERVAÇÃO:	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	OBSERVAÇÃO:								

MOMENTO	DOCENTE	GRUPOS							
APRESENTAÇÃO	DISTRIBUIU O MATERIAL NECESSÁRIO? () SIM () EM PARTE () NÃO	GRUPOS	01	02	03	04	05	06	07
	MOSTROU-SE MOTIVADO? () SIM () EM PARTE () NÃO	MOSTROU-SE ATENTO ÀS ORIENTAÇ?							
	DEMONSTROU SEGURANÇA? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	OBSERVAÇÃO:	DESPERDIÇOU TEMPO COM AÇÕES ALHEIAS A ORGANIZAÇÃO?							
		SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
		O GRUPO FOI FORMADO ESPONTANEAMENTE?							
		SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
		OBSERVAÇÃO:							

		NÃO	()	()	()	()	()	()	()
		OBSERVAÇÃO:							
MOMENTO	DOCENTE	GRUPOS							
SISTEMATIZAÇÃO	SUPERVISIONOU E AUXILIOU O GRUPO QUANDO SOLICITADO OU QUANDO PERCEBEU NECESSIDADE? () SIM ()EM PARTE () NÃO	GRUPOS	01	02	03	04	05	06	07
	MOSTROU-SE MOTIVADO? () SIM ()EM PARTE () NÃO	CONSEGUIU REGISTRAR AS INFORMAÇÕES PRODUZIDAS DURANTE A EXECUÇÃO COM FACILIDADE?							
	DEMONSTROU SEGURANÇA? () SIM ()EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	OBSERVAÇÃO:	NECESSITOU OU SOLICITOU ORIENTAÇÃO PARA O REGISTRO DAS INFORMAÇÕES PRODUZIDAS?							
		SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
		OBSERVAÇÃO:							

MOMENTO	DOCENTE	GRUPOS							
ANÁLISE	SUPERVISIONOU FAZENDO PERGUNTAS AO GRUPO? () SIM () EM PARTE () NÃO	GRUPOS	01	02	03	04	05	06	07
	ORIENTOU POR MEIO DE QUESTIONAMENTOS PARA A DESCOBERTA DA RELAÇÃO? () SIM () EM PARTE () NÃO	DESCOBRIU UMA RELAÇÃO VÁLIDA A PARTIR DAS ANÁLISES DAS INFORMAÇÕES REGISTRADAS?							
	MOTIVOU OS GRUPOS? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	DEMONSTROU SEGURANÇA? () SIM () EM PARTE () NÃO	SENTIU-SE A VONTADE PARA SOLICITAR ORIENTAÇÃO?							
	DEMONSTROU MOTIVAÇÃO? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	OBSERVAÇÃO:	APRESENTOU MOTIVAÇÃO PARA A ANÁLISE?							
		SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
		REGISTROU SUA CONCLUSÃO NA FICHA?							
		SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
		OBSERVAÇÃO:							

MOMENTO	DOCENTE	GRUPOS							
INSTITUCIONALIZAÇÃO	DISPONIBILIZOU ESPAÇO NO QUADRO À ELABORAÇÃO DAS CONSIDERAÇÕES FINAIS? () SIM () EM PARTE () NÃO	GRUPOS	01	02	03	04	05	06	07
	MOSTROU-SE MOTIVADO PARA O REGISTRO NO QUADRO FEITO PELOS ALUNOS? () SIM () EM PARTE () NÃO	REGISTROU SUA CONCLUSÃO NO QUADRO?							
	MOSTROU SEGURANÇA PARA O REGISTRO NO QUADRO FEITO PELOS ALUNOS? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	FEZ QUESTIONAMENTOS QUE ORIENTASSE A ELABORAÇÃO DE UM TEXTO ADEQUADO? () SIM () EM PARTE () NÃO	MOSTROU-SE MOTIVADO PARA O REGISTRO NO QUADRO?							
	ELABOROU EM CONJUNTO COM A TURMA A CONCLUSÃO? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	DEIXOU CLARO QUE A ATIVIDADE REALIZADA NÃO É UMA DEMONSTRAÇÃO DO RESULTADO OBTIDO? () SIM () EM PARTE () NÃO	ELABOROU UMA CONCLUSÃO?							
	APRESENTOU UMA FÓRMULA PARA EXPRESSAR A CONCLUSÃO DA ATIVIDADE? () SIM () EM PARTE () NÃO	SIM EM PARTE NÃO	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()	() () ()
	PROPÔS ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO? () SIM () EM PARTE () NÃO	OBSERVAÇÃO:							
	OBSERVAÇÃO:								



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem