Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

VAGNEY DOS SANTOS E SANTOS

O ensino de função afim por meio de atividades experimentais:

no 9.º ano do ensino fundamental de Altamira-PA

Belém-PA
2023

VAGNEY DOS SANTOS E SANTOS

O ensino de função afim por meio de atividades experimentais:

no 9.º ano do ensino fundamental de Altamira-PA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém-PA
2023

VAGNEY DOS SANTOS E SANTOS

O ensino de função afim por meio de atividades experimentais:
no 9.º ano do ensino fundamental de Altamira-PA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do títulode Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental orientado pelo Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da avaliação: 29 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO FRANCO DE SA
Data: 06/12/2023 15:32:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá – UEPA

Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIA DE LOURDES SILVA SANTOS
Data: 06/12/2023 08:23:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Profa. Dra. Maria de Lourdes Silva Santos – UEPAMembro Interno

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE RICARDO E SOUZA MAFRA
Data: 05/12/2023 13:06:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra – UFOPA Membro Externo

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Santos, Vagney dos Santos e
O ensino de função afim por meio de atividades experimentais no 9º ano do ensino fundamental de Altamira-PA / Vagney dos Santos e Santos; orientador Pedro Franco de Sá. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Funções (Matemática) – Estudo e ensino. 2.Prática de ensino. 3. Ensino fundamental. I. Sá, Pedro Franco de Sá (orient.). II. Título.

CDD 23 ed. 515

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:

A DEUS:

Por me manter com fé e esperança nos momentos difíceis dessa jornada.

Aos amigos:

Pelo apoio e incentivo, nos momentos de desânimos.

Ao meu orientador Pedro Franco de Sá:

Por me conduzir com firmeza e sabedoria a minha vida acadêmica e congratular com a proposta dessa dissertação.

À Família:
A minha mãe: **Umbelina Ferreira dos Santos** (In memoriam)
A meu pai, **Valdete Cardoso dos Santos;** e
A minha irmã: **Márcia Valéria dos Santos**

Responsáveis por contribuir com a minha jornada de estudos, hoje, estão colhendo os frutos.

Vagney dos Santos e Santos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir e me dá forças para perseverar e conquistar meus objetivos.

À Universidade do Estado do Pará, por fazer a diferença na qualidade de ensino neste País, neste Estado e do mundo.

Agradeço a todos os professores que com dedicação e sabedoria socializaram seus conhecimentos e experiências no decorrer de cada disciplina. Em particular, agradeço ao Prof. Pedro Franco de Sá, pelas orientações desta dissertação.

Agradeço aos professores Dra, Maria de Lourdes Silva Santos e ao Prof. Dr. José Ricardo Mafra por aceitarem participar da banca examinadora, por conseguinte, de suas contribuições inerentes a melhoria dessa dissertação.

Aos amigos que direta e indiretamente contribuíram com o meu sucesso.

À família, meu alicerce, a minha mãe: Umbelina Ferreira dos Santos (In memoriam), a meu pai, Valdete Cardoso dos Santos e a minha irmã, Márcia Valéria dos Santos.

RESUMO

SANTOS, Vagney dos Santos e. **O ensino de função afim por meio de atividades experimentais**: no 9.º ano do ensino fundamental de Altamira-PA. 2022, 230 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que objetivou avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho da resolução de questões e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental. A pesquisa procurou responder: que possíveis efeitos a aplicação de uma sequência didática baseada em atividades experimentais podem ocorrer sobre o desempenho da resolução de questões e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental? A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática. A sequência didática elaborada foi testada em seis sessões, em duas turmas do 9.º ano do ensino fundamental de duas escolas públicas no município de Altamira-PA envolve do um total de 44 estudantes. Os resultados foram analisados por meio da análise da validade das conclusões dos estudantes em cada atividade, pela comparação do desempenho dos pré- e pós-testes, pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese, e algumas observações *in loco*. Estas estratégias de análise indicaram que a sequência didática aplicada produziu efeitos favoráveis ao aprendizado do referido assunto. Constatamos também que os discentes obtiveram avanços progressivos no processo de institucionalização dos conceitos e definições matemáticas abordadas; além disso, houve uma participação mais expressiva dos alunos nas sessões de resolução de questões, conforme percebido no pós-teste. Diante do exposto e dos resultados na comparação de desempenho entre o pré- e o pós-teste, podemos afirmar que o objetivo deste trabalho foi alcançado e o problema levantado inicialmente foi respondido. Os efeitos registrados foram os seguintes: a melhora do entendimento da noção de função; aplicação do conhecimento de função afim em resolução de problemas; aprimoramento da leitura de um gráfico de função, percepção da variação, crescimento e decrescimento. Com base nos resultados obtidos foi produzido um produto educacional, na forma de uma sequência didática para o ensino de função afim, intitulada Uma sequência didática para o ensino de função afim por atividades experimentais, que está disponível no site do PPGEM-UEPA(colocar endereço site do ppgem) e no Educapes(Colocar endereço site do educapes).

Palavras-chave: Engenharia didática; Ensino de matemática por atividades experimentais; Ensino de Função afim.

ABSTRACT

SANTOS, Vagney dos Santos e. **The teaching of linear functions through experimental activities**: in the 9th grade of elementary education in Altamira-PA. 2022, 230 p. Dissertation (Professional Master's in Mathematics Teaching) - State University of Pará, Belém, 2022.

This study presents the results of a research aimed at evaluating the effects of applying a didactic sequence based on mathematics teaching through experimental activities on the performance in solving questions and understanding linear function concepts by 9th-grade students. The research sought to answer: what are the effects of applying a didactic sequence based on experimental activities on the performance in solving questions and understanding linear function concepts by 9th-grade students? The research methodology used was Didactic Engineering. And, as research resources, the following were used: bibliographic analysis of other works that directly or indirectly addressed the theme in question, application of questionnaires, and tests. The didactic sequence developed in this study took place over six meetings and was applied to 44 9th-grade students from two public schools in the municipality of Altamira-PA. The analysis of the collected data was carried out by verifying the students' conclusions in each activity, comparing the post-test results to the pre-test, applying the Pearson Linear Correlation Coefficient and the Hypothesis Test, and some on-site observations. These statistical inference strategies confirmed that the didactic sequences applied through activities produced better results for understanding the concept of linear function, as well as in interpretations and solutions to problems involving this theme. We also found that students made progressive advances in the institutionalization of the mathematical concepts and definitions addressed; moreover, there was a more expressive participation of students in solving the questions, as observed in the post-test. Given the above and the results comparing performance between the pre and post-test, we can affirm that the objective of this study was achieved, and the initially raised problem was answered. The result is similar to those of other researchers and authors who adopt Didactic Engineering as a research line in applying didactic sequences through activities involving the linear function. Such results include: improved understanding of the notion of function; application of linear function knowledge in problem-solving; enhancement in reading a function graph, noticing the rate of variation, growth, and decline; and the finding that applying a didactic sequence through activity has a positive effect on students' cognitive development concerning mathematical learning.

Keywords: Didactic engineering; Mathematics teaching through experimental activities; Linear function teaching.

Lista de Figuras

Lista de Fotos

Lista de gráficos

Lista de Quadros

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente dissertação visou discorrer acerca do ensino de função afim nos anos finais do Ensino Fundamental vislumbrando compreender os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho da resolução de questões e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental.

O pressuposto acima é a mola propulsora deste trabalho de pesquisa, em virtude das experiências adquiridas neste curto período profissional exercendo o magistério em Matemática, 19 anos. De fato, teve seu início no curso de graduação em Licenciatura Plena em Matemática (1999), especialmente, nas disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar I e II, bem como, na disciplina Álgebra. Para além destas disciplinas, pode-se incluir ainda a Didática Geral e Especial, na qual fui motivado a refletir acerca de resoluções de problemas no geral, dentre eles o de função afim.

Já na Pós-graduação, o tema da Especialização foi "**A didática da matemática**: observações pedagógicas acerca das resoluções de problemas com as quatro operações fundamentais", recentemente com a produção de um artigo sobre "**O ensino de função afim nos anos finais do ensino fundamental de Altamira segundo docentes**". Portanto, é imprescindível dentro deste percurso a pesquisa de mestrado na busca de se compreender ainda mais sobre o ensino da função afim, neste momento, no 9.º ano do ensino fundamental, pois, como professor entendo a importância da contextualização para a ressignificação dos aspectos matemáticos na vida escolar dos alunos, e dentro do currículo escolar brasileiro, é nessa faixa etária que o assunto ora mencionado é apresentado, e acredito que essa seja uma oportunidade ímpar para aperfeiçoar e aprofundar minha linha de pesquisa.

Assim sendo, o presente trabalho justifica-se por trazer essas reflexões acerca do ensino de matemática com ênfase ao tópico da função afim, para além da proposta e da estrutura deste assunto apresentado vias livros didáticos de matemática do 9.º ano, base para uma construção consistente e lógica da aplicação deste conhecimento no cotidiano em diferentes campos do conhecimento Física, Química, Biologia, dentre outras, a própria Matemática.

Neste contexto, como norte deste trabalho, propomos como questão norteadora: quais os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada em atividades experimentais têm sobre o desempenho da resolução de questão e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental?

Com intuito de obter respostas a essa problemática, propusemos o objetivo de avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais sobre o desempenho da resolução de questões e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental.

Para o alcance tanto do objetivo quanto da resposta da questão norteadora, se optássemos por compreender a pesquisa por modelos técnicos científicos tradicionais de pesquisa (pesquisa experimental, pesquisa documental, pesquisa descritiva, dentre outras), certamente incidiríamos na estrutura didática da proposta que está apresentada nos currículos escolares e reproduzidas nos livros didáticos elaborados para atender estes currículos e a critérios didáticos propostos pelo governo, coordenado pelo Ministério da Educação (MEC).

Para vislumbrar outras maneiras de se fazer pesquisa, adotaremos uma linha de pesquisa mais recente, presente no Brasil, chamada pelos pesquisadores de Engenharia Didática, na qual a maioria dos pesquisadores converge para o entendimento de que o expoente de maior destaque neste modelo de pesquisa é Miguel Artigue. Modelo este que será melhor trabalhado no referencial téorico. Onde também, destacamos como leituras principais um rol de autores brasileiros, tais como Sá, Souza e Silva (2003), Sá (2004, 2005, 2006, 2009), Sá e Alves (2011) e Silva (2018), bem como outras leituras secundárias, a exemplos dos documentos oficiais inerentes ao ensino da Matemática no Brasil.

Ancorados na Metodologia de Pesquisa da Engenharia Didática, propusemos para a pesquisa de campo a aplicação de sequências didáticas sobre o ensino de função afim, também fundamentados em Sá e Silva (2018), com o propósito de que na prática percebamos o êxito da nossa proposta de trabalho, já mencionada anteriormente.

Na quinta seção, focamos na análise a posteriori e validação dos dados por meio das análises quantitativa e qualitativa dos resultados acerca das sequências didáticas aplicadas aos alunos consultados, bem como discorremos sobre a observação percebida no decorrer do processo de realização da pesquisa.

Na primeira seção abordamos a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa, discorremos acerca da origem da Engenharia Didática e suas respectivas quatro fases.

A segunda seção foi desenvolvida com ênfase na fase da análise prévias com destaque para os aspectos matemáticos do conteúdo, alguns apontamentos da função afim, dentre outros elementos essenciais que circundam esse tópico da Matemática. para além disso, trouxemos os aspectos históricos dos conteúdos e da própria história do surgimento do termos fundamentados nas leituras de artigos, dissertações e em uma tese que tratam dessa temática.

Para a terceira seção abordamos a fase da concepção e análise a priori com a proposição das sequências didáticas e suas respectivas atividades que foram desenvolvidos juntos ao público-alvo da pesquisa.

Na quarta seção tratamos da experimentação da pesquisa, nela buscamos descrever as etapas na qual foram inseridas tanto a contextualização quanto os sujeitos e instrumentos de coletas de dados, dentre outras informações.

Na quinta seção, focamos na análise a posteriori e validação dos dados por meio das análises quantitativa e qualitativa dos resultados acerca das sequências didáticas aplicadas aos alunos consultados, bem como, discorremos sobre a observação apreendida no decorrer do processo de realização da pesquisa. Culminando com as considerações a respeito das principais constatações obtidas nessa dissertação.

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Esta seção consiste em discorrer acerca da origem da Engenharia Didática como estrutura de pesquisa acadêmica no ensino de matemática, em especial, da função afim. Além disso, apresentamos alguns trabalhos que aplicaram a Engenharia Didática como pesquisa metodológica para a consecução dos objetivos propostos nas respectivas áreas de pesquisas.

1.1 Engenharia Didática

1.1.1 Origem

A literatura especializada que estuda a Engenharia Didática (ED) determina a origem da mesma no início dos anos 1980, na França, ressaltando que adveio dos estudos e pesquisa da Didática da Matemática.

Para corroborar, Sá (2011) diz que a engenharia didática tem sua origem na escola francesa de didática da matemática com base nos trabalhos de pesquisadores da didática da matemática como Douady, Chevallard e Brousseau entre outros.

A expressão utilizada "Engenharia Didática", advém em virtude de ser concebida inicialmente como sendo um trabalho realizado nos moldes de um engenheiro, isto é, apresenta etapas científicas de investigação.

Para Artigue (1988), o termo "engenharia didática" foi concebido para o trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de sua área, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar objetos bem mais complexos do que os objetos depurados da ciência e, portanto, enfrentar, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ALMOULOUD; SILVA, 2012; ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, SÁ, 2004, 2005, 2006).

Neste contexto, é salutar apresentar o quadro das verossimilhanças da função de engenheiro e do pesquisador em Didática, conforme consta na página seguinte.

Quadro 1: Ações do engenheiro e do pesquisador em didática

Ações	Engenheiro	Pesquisador em didática
Apoia-se nos conhecimentos científicos de seu domínio.	Apoia-se nos conhecimentos oriundos da Engenharia e suas teorias.	Apoia-se nos conhecimentos oriundos da pesquisa em didática e suas teorias.
Submete-se ao controle científico.	É controlado pelas normas legais que estabelecem os procedimentos e exigências para as construções.	É controlado pelas normas estabelecidas pela ética na pesquisa.
Trabalha com objetos complexos.	Desenvolve seu trabalho num ambiente em que a complexidade é inerente as condições do projeto, devido envolver materiais distintos e combinações dos mesmos por seres humanos.	Desenvolver seu trabalho num ambiente em que a complexidade é inerente as condições da sala de aula devido a diversidade de relações envolvidas na atividade pedagógicas e os aspectos cognitivos.
Estuda de forma prática meios de alcançar seu objetivo.	Estuda a situação apresentada buscando procedimentos e matérias que garantam a viabilidade do projeto.	Estuda a situação apresentada buscando procedimentos e matérias que visem superar ou aperfeiçoar a situação didática em questão.
Estuda situações ainda não resolvidas.	A cada projeto tem que estudar as condições ambientais, materiais, de mão de obra, tecnológicas e financeiras disponíveis para com criatividade e técnica propor a sequência de desenvolvimento do projeto.	A cada pesquisa tem que estudar as condições socioambientais, ideológicas, materiais e tecnológicas disponíveis para com criatividade e técnica propor uma alternativa metodológica para a situação em estudo.

Fonte: (SÁ; ALVES, 2011, p. 147).

O Quadro 1 ilustra de maneira clara como Artigue, através de seus estudos e pesquisas, foi precisa ao propor a pesquisa em educação sob a perspectiva da ED. Esta abordagem se destaca pela sua correlação intrínseca com a didática e, mais especificamente, pelo seu rigor científico. Além disso, é perceptível que a ED oferece aos pesquisadores a oportunidade de analisar, com profundidade e precisão, o modo como os alunos assimilam conceitos matemáticos específicos. Essa análise minuciosa possibilita a identificação de dificuldades, equívocos e barreiras no processo de aprendizagem. Consequentemente, permite a elaboração e implementação de estratégias pedagógicas mais eficientes e adequadas para superar tais desafios.

Dessa forma, a ED não só contribui para uma compreensão mais aprofundada dos processos de aprendizagem matemática, mas também possibilita ao pesquisador promover o desenvolvimento de métodos de ensino mais refinados e eficazes, alinhados às necessidades e particularidades dos alunos.

Quanto aos objetivos de uma investigação em engenharia didática Sá e Alves (2011), citando Artigue (1996), dizem que para a autora em questão os objetivos podem ser variados, deixando claro que a engenharia didática serve para investigações que visam o estudo dos processos de aprendizagem de um dado conceito como para estudos que são transversais aos conteúdos, ainda que seu suporte seja o ensino de um conteúdo preciso. Isso porque, a engenharia didática não apresenta sua singularidade pelos objetivos das investigações desenvolvidas sob seu estandarte, mas sim, pelas características de seu funcionamento metodológico.

Com base nos princípios destes objetivos, a função da engenharia didática é explorada por vários autores renomados, incluindo Artigue (1988, 1996), Carneiro (2005), Almouloud e Silva (2012), Pommer (2013), Almouloud e Coutinho (2008), e Sá (2004, 2005, 2006), entre outros. Eles conceituam a engenharia didática como uma metodologia de pesquisa de natureza científica, empregada para conduzir investigações focadas no estudo dos processos de aprendizagem de conceitos específicos, bem como para pesquisas que abrangem temas transversais aos conteúdos, mesmo que seu foco principal seja o ensino de um conteúdo específico.

Essa abordagem metodológica permite uma análise aprofundada e detalhada dos métodos de ensino e aprendizagem, proporcionando insights valiosos para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes e refinadas. A engenharia didática, portanto, é uma ferramenta crucial para aprimorar a qualidade do ensino e promover uma aprendizagem mais significativa e enriquecedora para os alunos.

Pommer (2013) destaca que a Engenharia Didática desempenha um papel duplo: serve não apenas como uma metodologia de pesquisa qualitativa em Matemática, mas também é valiosa na criação de situações didáticas que promovem uma aprendizagem significativa em sala de aula. Além disso, contribui para a formulação de novas teorias pedagógicas. Em relação à função da ED, Sá (2011), baseando-se nos trabalhos de Artigue e Pais (2001), reitera que, para ambas as autoras, ela é primordialmente reconhecida como uma metodologia de pesquisa.

Depreendemos do entendimento até o momento que inicialmente a ED emergiu para aperfeiçoar a Didática Matemática, nos aspectos dos ensinos, a forma de ensinar, quais recursos aplicar, como alcançar uma maior aprendizagem. Entretanto, aplicando a técnica da engenharia e tendo como laboratório de pesquisa salas de aula, objeto de pesquisa o aperfeiçoamento do ensino para potencializar a aprendizagem, e na condição de sujeitos da pesquisa, os próprios alunos, o contexto se dá certamente, na complexa teia de relação da práxis pedagógica envolvendo a tríade: ensino, aluno e conhecimento, não necessariamente nessa ordem. Além disso, as etapas metodológicas e científicas implementadas pela ED é utilizada para a pesquisa científica nas instituições de ensino superior (graduações, especializações, mestrados e doutorados) nas mais diversas áreas de conhecimento, sobretudo, o de conhecimento da matemática.

Desta forma, segundo Carneiro (2005, p. 90):

> A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula.

É percebido, portanto, nos cursos de Pós-graduações nas universidades brasileiras a aplicação da ED como metodologia de pesquisa para a realização de projetos e pesquisa em vários temas e assuntos da matemática, dentre eles as unidades de Álgebra, Geometria, Trigonometria, Funções, entre outros.

Para Artigue (1995, p. 12):

> Esta metodologia de engenharia didática é baseada em um controle a priori das situações que são postas em jogo no processo experimental. Esse controle é realizado por meio de uma análise a priori que busca especificar as possibilidades que foram selecionadas, os valores das variáveis didáticas que são produzidos como resultado desta seleção e o significado que os comportamentos esperados podem assumir por ter levado esses valores em consideração. Em seguida, na análise a posteriori, esta análise a priori é comparada com o desempenho real e o que rejeita ou confirma as hipóteses nas quais estavam embasados. (Tradução nossa).

Como proposta de metodologia de pesquisa científica, a Engenharia Didática apresenta algumas fases a serem cumpridas, como veremos.

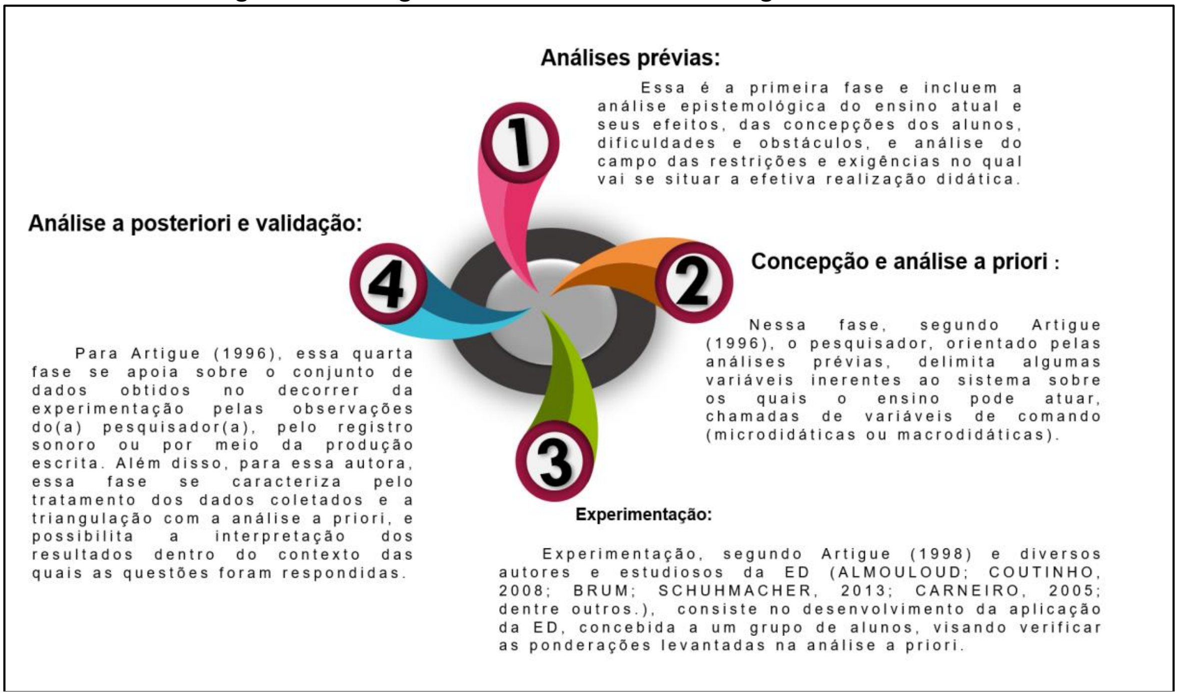
1.2 As fases da Engenharia Didática

A Engenharia Didática apresentada acima se dá, segundo Artigue (1996), em quatro fases distintas, quais sejam: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a priori; 3) experimentação; e 4) análise a posteriori e validação[1]. As quais estão apresentadas no infográfico a seguir.

---

[1] Ressaltamos que estas quatro fases da ED com essas designações são traduzidas nas propostas pelos pesquisadores brasileiros. A metodologia de pesquisa da ED é adaptada para a pesquisa de qualquer assunto relacionadas a percepção de como os alunos possam apreender e aprender de forma construtiva por meio de atividades práticas, neste sentido estamos aplicando nesta pesquisa, este entendimento.

Figura 1- Infográfico das 4 fases da Engenharia Didática



Fonte: Artigue,1996 (Adaptada, autor, 2021).

A Figura 1, demonstra as 4 fases da ED, doravante discorreremos acerca delas.

A primeira fase é chamada de Análises prévias, segundo (MACHADO, 2002; ALMOULOUD; SILVA, 2012), são inferidas considerações envolvendo o quadro teórico didático mais geral, além dos conhecimentos mais específicos envolvendo o tema da pesquisa. Nesta fase é feita uma revisão bibliográfica envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no cenário onde se dará a pesquisa, bem como, uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Desta forma, para corroborar com este entendimento, segundo Sá e Alves (2011, p. 150)

> Em muitas situações a etapa das análises prévias exige do investigador a realização de estudos bibliográficos e até estudos de campo quando ainda não estão disponíveis resultados sobre as concepções dos docentes e discentes sobre o processo de ensino aprendizagem do assunto investigado.

Neste contexto, para Artigue (1996, p. 202, apud POMPER, 2013, p. 23) “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções". Enfim, Para Almouloud (2007, apud SÁ; ALVES, 2011, p. 359):

> A etapa das análises prévias deve contemplar o seguinte: estudo da organização matemática, análise da organização didática do objeto matemático escolhido e definição das questões de da investigação. Vale ressaltar que em muitas situações a etapa das análises prévias exige do investigador a realização de estudos bibliográficos e até estudos de campo quando ainda não estão disponíveis resultados sobre as concepções dos docentes e discentes sobre o processo de ensino aprendizagem do assunto investigado.

Ou ainda, para Sá e Alves (2011) citando Pais (2001) e Artigue (1996), o pesquisador deve construir uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino. Ou seja, são as análises epistemológica dos conteúdos visados, do ensino habitual e de seus efeitos, das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática e dos objetivos da investigação.

Desta forma, está claro que nesta primeira fase o pesquisador planeja, organiza, discorre do referencial teórico, e sobre alguns dados ainda não tabulados acerca da pesquisa, bem como, de possíveis gargalhos no percurso da formulação dos objetivos e problemática da pesquisa.

Para locupletar os passos da primeira fase, de forma concatenada será aplicada a análise a priori das situações didáticas da engenharia ou como é mais citado pelos pesquisadores brasileiros, concepção e análise a priori. Esta é a segunda fase do método de pesquisa da ED. É imprescindível entender neste momento da pesquisa, as variáveis envolvidas, anunciadas aqui, em dois níveis, quais sejam: a variável microdidáticas e macrodidáticas. Nas palavras de Artigue (1988), entende-se as variáveis por:

- ✓ Microdidáticas ou locais: aquelas que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado;
- ✓ Macrodidáticas ou globais: - aquelas que dizem respeito à organização global da engenharia.

Assim sendo, para Almouloud (2008, p.67), nesta fase o pesquisador deve:

> • Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática;
> • Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> • Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Outro fato imprescindível para o entendimento desta fase é a compreensão, segundo Artigue (1996), das duas partes distintas que compõem a concepção e análise a priori, a primeira constituída de uma parte descritiva, a segunda uma parte preditiva que se baseia nas características da situação adidática que se buscou constituir.

Para corroborar com esse entendimento Sá e Alves (2011), discorrem que:

> Na parte descritiva-são apresentados todos os instrumentos ou recursos, que estão previstos serem utilizados na experimentação. Na parte preditiva são apresentados os argumentos das escolhas realizadas. Nesta parte analisam-se os efeitos esperados em cada atividade a ser realizada, os comportamentos esperados dos alunos durante as atividades, os mecanismos de controle da situação e o motivo de tais expectativas com base em outros estudos teóricos ou mesmo experiências já registradas.

Nesta fase, o professor/pesquisador deve e precisa fazer as proposições de hipóteses e escolhas de objetivos claros para subsidiar na elaboração de sequências didáticas para ser aplicadas juntos ao público-alvo de sua pesquisa de forma criteriosa, sobretudo, nas escolhas de questões e/ou situações-problema com caraterísticas espiral, ou seja, que possibilite a percepção da ascensão cognitiva sobre o conteúdo proposto através das análises das respostas.

Desta maneira, em suma, segundo (SÁ; ALVES, 2011, p. 151):

> A construção da sequência didática tem como objetivo a produção e a seleção de todo material que será necessário ao desenvolvimento da sequência de atividades propostas para o trabalho pedagógico a ser realizado. A sequência didática não precisa ser limitada por uma tendência didática vigente ou preferência do investigador. [...] A sequência didática normalmente é construída de um conjunto de atividades construídas com base nos resultados obtidos nas análises prévias, que o pesquisador espera que levem os alunos a desenvolverem certas competências e habilidades desejadas com relação ao conteúdo investigado.

Por conseguinte, complementam as etapas de sistematização e análises desta fase: a análise de cada atividade de sequência didática visando prever as possíveis dificuldades que serão encontradas pelos participantes e como será procedido para contornar as dificuldades e o porquê do procedimento. Outrossim, também são apresentados os instrumentos dos diagnósticos que serão realizados, incluindo a análise das questões dos Pré-teste e Pós-testes.

Enfim, por tudo que foi discorrido da fase a priori, pode se perguntar acerca do papel do professor, neste caso, a resposta é imediata: o professor atua como mediador, facilitador e/ou problematizador do processo de ensino-aprendizagem conduzindo os discentes a produzir e aprender de forma metacognitiva[2], isto é, possam produzir conhecimentos significativos frente aos problemas propostos ou situações-problemas.

Neste contexto, as proposições de execuções das sequências didáticas visando à validação das hipóteses se dá na terceira fase, conhecida por Experimentação. Ela nos oportuniza colocar em prática todo o aprendizado da fase 1 e 2, isto é, fundamentados no referencial teórico e entendido a construção de sequência didática, precisamos desenvolver juntos aos alunos a pesquisa de fato.

Assim, no entendimento de Sá e Alves (2011), a experimentação é o momento da pesquisa que tem como lócus a sala de aula e inicia quando a primeira atividade é desenvolvida, os autores também ressaltam que cada encontro ocorrido na sala de aula é denominado de sessão, mesmo que seja uma atividade diagnóstica e termina quando o pesquisador realiza a última atividade com a turma.

Para Almouloud (2012, p. 27), a terceira fase "consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação." Neste sentido, Sá e Alves (2011, p. 158), reforçam que durante a experimentação, é muito imprescindível:

- A nossa experiência indica que,
- Dispor dos instrumentos de produção previsto na análise a priori;
- Todo o material esteja devidamente providenciado;
- Nada seja improvisado;
- O pesquisador e equipe dominem todas as atividades previstas para cada sessão;
- O objetivo da pesquisa esteja sempre norteando cada ação da experimentação.

É notório que adentrar a campo para a experimentação, se faz necessário, um planejamento prévio e um checklist das etapas de aplicação da sequência didática,

---

[2] "Em função desse processamento supraordenado, o indivíduo consegue monitorar, autorregular e elaborar estratégias para potencializar sua cognição" (JOU; SPERB, 2006, p. 180).

bem como, o domínio destas ações por parte do pesquisador. Manter-se fiel ao planejamento inicial potencializa resultados mais precisos, que podem ser aferidos e mensurados em relação aos objetivos estabelecidos. Conforme Sá e Alves (2011, p. 363) destacam: “isso possibilita uma análise mais confiável dos dados após a experimentação. É essencial que o pesquisador faça uma análise comparativa entre o que foi planejado e o que ocorreu após cada encontro”. Na seção 5, abordaremos novamente este tema, apresentando parâmetros como análise de hipótese, correlação de Pearson, entre outros, para reforçar as análises comparativas dos resultados da pesquisa em questão.

Para Machado (2008), segundo Sá e Alves (2011), a fase da experimentação exige: a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumentos de pesquisa; e registro das observações realizadas durante a experimentação.

Importante frisarmos, que nessa fase, segundo Almouloud (2008), é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. Isto é, se houver a necessidade de reformularmos algumas situações-problema em detrimento a prática in loco para corrigir o curso da pesquisa, assim deve ser feito.

A quarta fase conhecida como Análise a posteriori e validação é a etapa de consolidação dos resultados de todo o processo da pesquisa, sobretudo, da terceira fase, isto é, da experimentação. Para Sá e Alves (2011, p. 158):

> é o momento em que os resultados/informações produzidos no relatório da experimentação serão confrontados com o previsto e descrito na etapa da análise a priori com a intenção de obter argumentos que justifiquem e expliquem o desenvolvimento do experimento, e apontem uma posição favorável ou desfavorável ao ocorrido.

Neste mesmo sentido Almouloud e Silva (2012, p. 27, apud SILVA, 2018, p. 22), dizem que:

> A análise a posteriori consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nela analise, se faz necessária sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

A análise a posteriori e validação, conforme já mencionado na Figura 1, nas proposições da autora Artigue (1996), se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita.

Segundo Almouloud (2008) a análise a posteriori “de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo.” Segundo este autor, essa análise não:

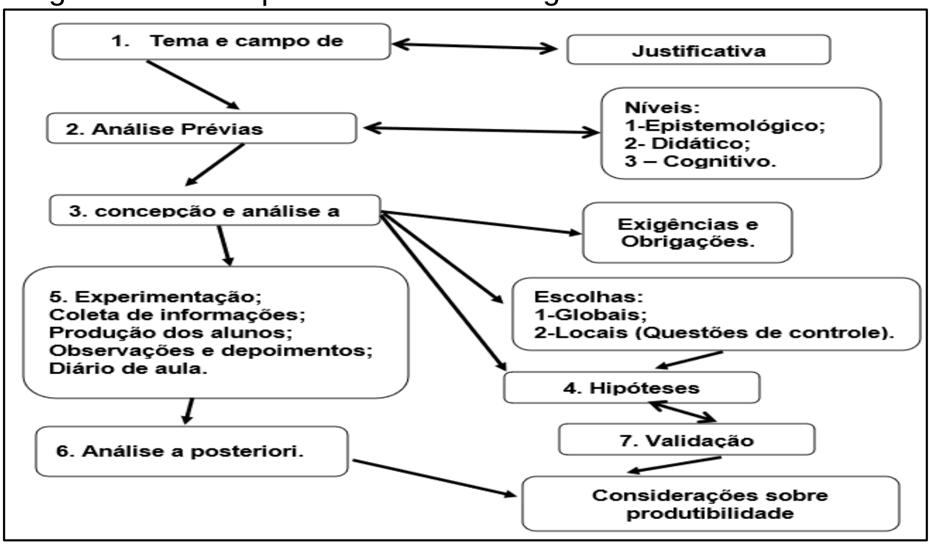
> [...] é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que: • a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador. • os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori.

Em suma, as quatro fases da ED se complementam em uma ordem crescente de execução, dentro de parâmetros científicos de observações, experimentações e validações dos processos de pesquisa. Chamamos atenção que no início a ED não foi ancorado em pesquisa estatística para a comprovação dos dados. Contudo, estudos de Araújo e Igliori (2009, p. 142) demonstraram que

> O Teste Wilcoxon agregado a metodologia da Engenharia didática traz a esta metodologia um aspecto de testabilidade da validação interna sem perda do seu grande poder de explicação. A utilização do programa livre R torna automática a aplicação do teste e democratiza e difunde a informação.

Para efeito didático entre as comparações dos testes do Método Estatístico Bayesiano e a Engenharia Didática, trouxemos um mapa conceitual proposto por Carneiro (2005), conforme segue.

Figura 2- Um mapa conceitual da Engenharia Didática Clássica.



Fonte: Carneiro (2005, Apud ARAÚJO; IGLIORI, 2014, p. 85).

Segundo os autores supracitados, o raciocínio dedutivo observado no mapa conceitual do Método Estatístico Bayesiano é equivalente à validação interna da Engenharia Didática Clássica. Ou seja, toda informação da distribuição a priori sobre o parâmetro é atualizada por meio do Teorema de Bayes. As relações entre elas ocorrem por meio da iteração, isto é, um processo de resolução de um problema por meio de soluções repetidas, buscando uma solução aprimorada a cada etapa, até alcançar um resultado final. Esses autores também observaram a existência de uma ordenação, uma estrutura temporal semelhante, entre a Engenharia Didática Clássica e o Método Estatístico Bayesiano. Essa estrutura temporal é análoga à que foi verificada entre a Engenharia Didática Clássica e a Estatística Não Paramétrica, conforme abordado em Araújo e Igliori (2009).

Em resumo, a Engenharia Didática (ED) tem se destacado historicamente na pesquisa educacional, evidenciando sua relevância e eficácia como metodologia de pesquisa, especialmente no âmbito do conhecimento matemático.

2 ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção discorremos acerca da função afim vislumbrando o levantamento dos aspectos matemáticos do conteúdo, aspectos históricos do conteúdo, aspectos curriculares do conteúdo, estudos anteriores, diagnóstico de algumas pesquisas da área da função afim, teoria da atividade tanto da prática docente, como do processo de aplicação juntos ao alunos, ensino de matemática por atividades experimentais, resolução de problemas por meio da aplicação do raciocínio matemático da função afim e da teoria dos registros de representação semiótica.

2.1 Aspectos matemáticos do conteúdo

2.1.1 Função afim: alguns apontamentos

Quase sempre em uma linguagem matemática, sobretudo, escrito em símbolos, se define uma função afim, desta maneira:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função afim[3]** quando existem números reais a, b, com $a \neq 0$, tal que f leva x em $ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax + b \qquad \text{ou} \quad y = ax + b$$

Onde:

- a o coeficiente angular (coeficiente de x);
- b o coeficiente linear (termo independente);

Exemplos:

a) $f(x) = 2x - 1$, assim, se tem: $a = 2, \quad b = -1$;

b) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 10$, assim, se tem: $a = -\frac{2}{5}, \quad b = +10$.

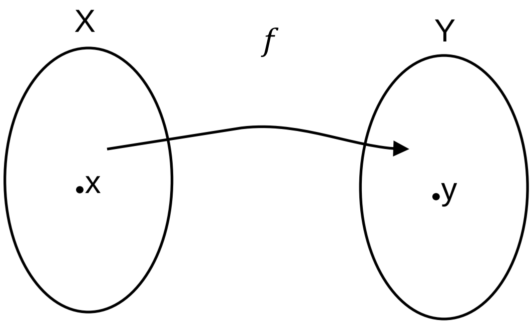
Essa função tem um grande leque de aplicação e é utilizada para resolver problemas do cotidiano, em diversos contextos e outras áreas de conhecimento**.**

Adotaremos a definição apresentada por Lima et al. (2005, p. 8):

[3] Também abordada em diversos livros didáticos do 9,º ano do ensino fundamental como: função polinomial do 1.º grau.

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \in f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Outra forma de representar a definição acima é por meio da relação da função por Diagrama de Venn, assim:



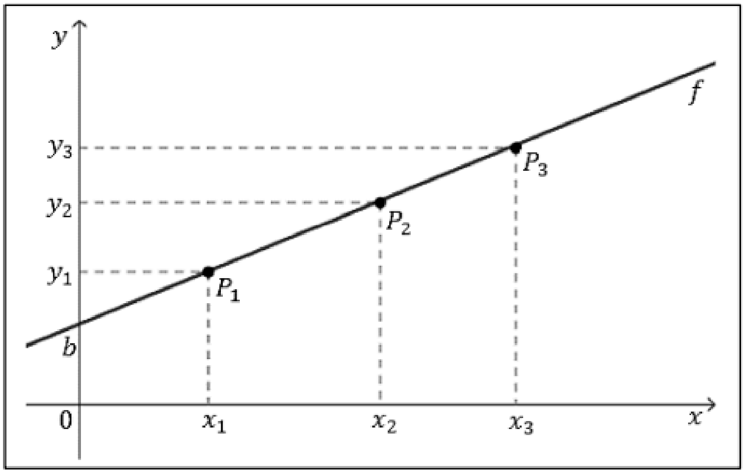
No caso particular de uma função afim: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma reta e como uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta que basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$. Para uma melhor compreensão veja o que Lima (2006) demonstra.

Lima et al (2006) propõe que no Ensino Médio a verificação para este caso pode ser realizada provando que segundo o autor é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual a soma dos outros dois, sendo que $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ representam, respectivamente, as distâncias dos pontos de P_1 a P_2, de P_2 a P_3 e de P_1 a P_3, tal que,

$$P_1 = (x_1, y_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2) \text{ e } P_3 = (x_3, y_3).$$

De forma pedagógica podemos falar ensinar aos alunos do 9.º ano que para mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta, precisamos usar a condição de colinearidade de três pontos dada pela distância entre eles: "três pontos distintos são colineares se a maior distância entre cada dois deles é igual à soma das outras duas menores".

Figura 3 - Colinearidade de três pontos quaisquer na



Fonte: Lima *et. al.* (2006, p. 89).

Assim sendo, se analisarmos três pontos quaisquer distintos que pertençam ao gráfico de uma função afim, podemos expressá-los por:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$$
$$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$$
$$P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

Tomando como base o ponto P_2 e considerando que ele está entre P_1 e P_3 , ou seja, que $x_1 < x_2 < x_3$, temos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot (1 + a^2)}$$
$$d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

De forma análoga temos que:

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Logo,

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_3 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Concluímos que:

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) + \mathrm{d}(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_3).$$

Destarte, conforme a condição anunciada anteriormente temos que, de fato, dados quaisquer três pontos distintos pertencentes à função cuja expressão é $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$, estes pertencem à mesma reta não vertical, ou seja, são colineares.

Uma prova direta do axioma “pois por dois pontos passa uma única reta”, advém da demonstração acima, de forma análoga, a partir de dois pontos quaisquer P_1 = $(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ e P_2 = $(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, com $\mathrm{x}_2, < \mathrm{y}_2$, existe uma única função afim cujo gráfico é uma reta que passa por esses pontos.

Em outras palavras, basta segundo Lages (2006) sabermos que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, e $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, corresponde a resolver um sistema de equações.

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Onde os coeficientes são a e b. Para tanto, a solução do sistema acima é demonstrada desta forma:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição, assim, vamos isolar o coeficiente linear b , em ambas as equações, logo:

$b = y_1 - ax_1.$

$b = y_2 - ax_2.$

Conclui assim que:

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$$

$$ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1$$

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ou } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Agora, faz se necessário calcular o coeficiente linear b

$b = y_1 - ax_1$ Substituindo o valor de a

$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$ Encontrando o m.m.c. temos

$$b = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

$b = \frac{x_2y_1 - \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_1y_1} - x_1y_2}{x_2 - x_1}$ Eliminando os termos semelhantes e simétricos

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Assim $x_1 \neq x_2$ então $x_1 - x_2 \neq 0$ portanto a e b existem e são únicos. Desta forma existe uma única função afim que satisfaça as condições dadas.

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$

Tendo o ensino fundamental como exemplo, os livros do 9.º ano quase sempre abordam a resolução de sistema acima, na maioria das vezes, apenas para encontrar a lei da função afim, isto é, caso o aluno chegue na resolução $f(x) = ax + b$, lógico, com os valores dos coeficientes corretos, pronto, já está concluído o exercício. Desta maneira, não faz muito sentido, para os adolescentes, pois, de forma prática poderia dar um significado imediato para a solução e não apenas a lei da função. Em outras palavras, após os cálculos dos coeficientes angular e linear, o professor pudesse demonstrar a aplicabilidade dentro do contexto do próprio exercício, logo após, solicitasse a turma que criasse outras aplicações congêneres, para demonstrar na prática que os coeficientes numéricos encontrados realmente satisfazem o enunciado do problema/exercício.

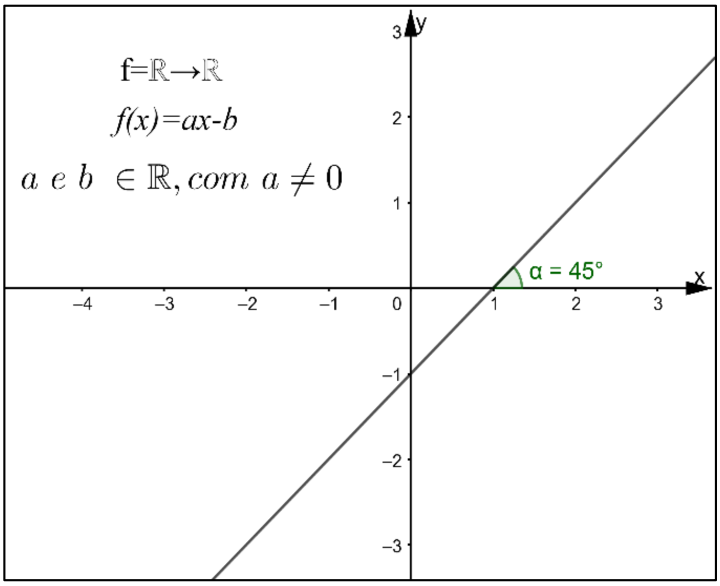
Lima faz uma distinção acerca deste coeficiente, porque na visão dele, o correto é chamá-lo de taxa de variação da função, pois não há ângulo envolvido na operação. Nas palavras dos autores (LIMA *et. al*., 2006, p. 92, grifo nosso).

> 1. Se a função afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é correto chamar o número a de coeficiente angular da função f. O nome mais apropriado, que usamos, **é a taxa de variação**, (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não, na maioria dos casos, ângulos algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. **Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta**.

Percebe-se que o autor acima chama atenção para o termo presente na função, contudo, no fim das suas observações, concorda com o termo coeficiente angular de uma reta.

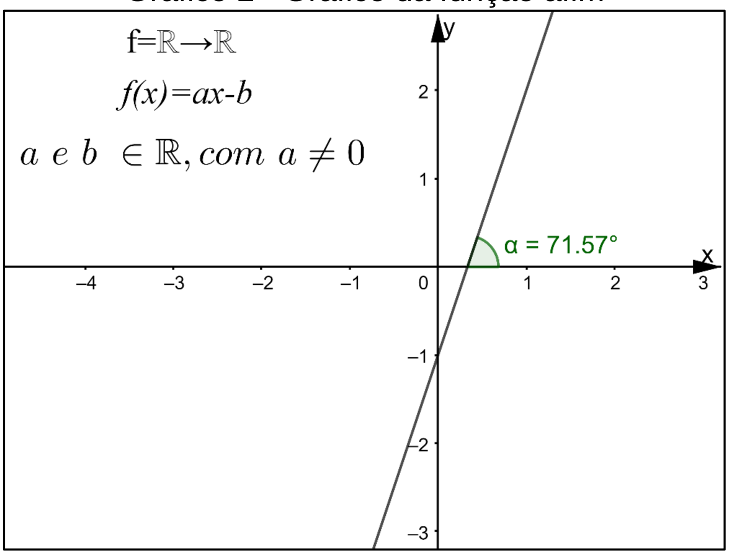
Ressaltamos que a maioria dos livros de matemática do 9.º ano do ensino fundamental, aborda o parâmetro "a" como, coeficiente angular "a" e pode sim ser trabalhado sem perca de significado matemático, e apresenta uma percepção imediata, por exemplo, nos gráficos 1 e 2 a seguir, acrescentamos ângulos para efeito ilustrativo.

Gráfico 1- Gráfico da função afim



Fonte: Autor, 2021.

Gráfico 2 - Gráfico da função afim



Fonte: Autor, 2021.

Às análises das figuras anteriores podem ser feitas assim:

✓Quando menor o coeficiente angular (ou taxa de variação), de forma didática menor é o ângulo, menor é a proximidade do gráfico Reta do eixo do y; (Gráfico 1);

✓Quando maior o valor do coeficiente angular (ou taxa de variação), de forma didática maior é o ângulo, maior a proximidade do gráfico Reta do eixo de y. (Gráfico 2).

Para efeito de visualização a seguir faremos os cálculos de ambos os coeficientes angulares.

Cálculo do coeficiente angular do Gráfico 1:

Dados: $y_2 = 0$ e $y_1 = -1$; $x_2 = 1$ e $x_1 = 0$, temos:

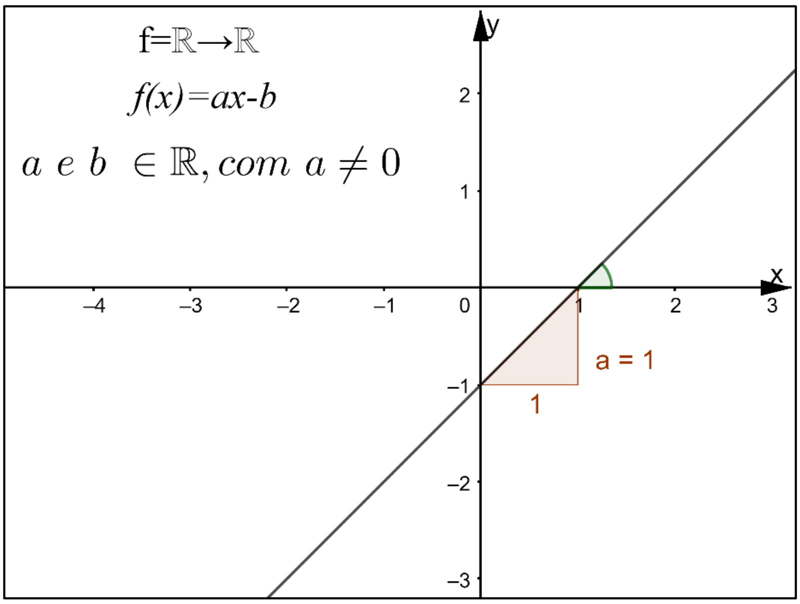
$$a = \frac{0-(-1)}{1-0} = a = \frac{1}{1} = a = 1;$$

Cálculo do coeficiente angular do gráfico 2:

Dados: $y_2 = 2$ e $y_1 = -1$; $x_2 = 1$ e $x_1 = 0$, temos:

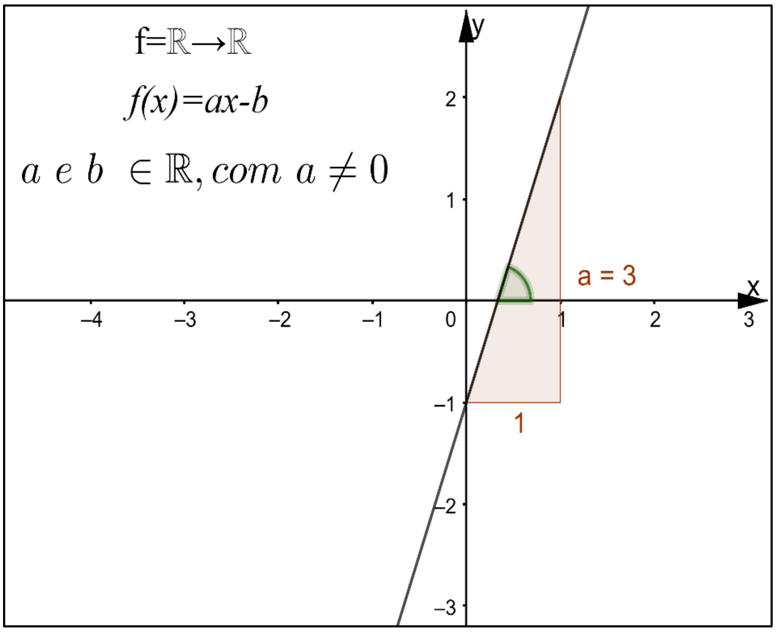
$a = \frac{3-(-1)}{1-0} = a = \frac{3}{1} = a = 3$, portanto, está provado quando maior o coeficiente angular mais próximo o gráfico (reta) fica do eixo y. Em outras palavras, quanto maior o coeficiente angular maior é a declividade do gráfico Reta. Conforme se percebe nos Gráficos 3 e 4 a seguir.

Gráfico 3- Gráfico da função afim - declividade



Fonte: Autor, 2021.

Gráfico 4 - Gráfico da função afim - declividade



Fonte: Autor, 2021.

Certamente, os aspectos matemáticos definidos acima sobre a função afim, não foram desenvolvidos de imediatos, ao contrário se deu ao longo da história.

A função afim recebe nomes especiais em função dos valores de seus coeficientes angulares ou lineares, conforme a seguir:

I) **Função linear**: Ocorre sempre quando os valores dos coeficientes são $a \neq 0$ e $b = 0$, neste podemos representá-la por $f(x) = ax$;

II) **Função constante**: Ocorre sempre quando os valores dos coeficientes são $a = 0$ e $b \neq 0$, neste podemos representá-la por $f(x) = b$;

Exemplos:

I) $f(x) = 10x$, em que, $a = 10$ e $b = 0$ (função linear);

II) $f(x) = -15$, em que, $a = 0$ e $b = -15$ (função constante).

Estes tipos de funções serão mais bem compreendidos no tópico seguinte, onde discorremos acerca dos tipos de gráficos de uma função afim.

2.1.2 Tipos de Gráficos de uma função afim

Os gráficos da função afim, como já, mencionamos é representado por uma reta. Por apresentar o grau da variável x igual a 1, por essa razão a maioria dos livros didáticos de Matemática do 9.º ano do ensino fundamental e em muitos dos livros didáticos de Matemática do ensino médio, denominam essa função como sendo função polinomial do 1.º grau.

A função afim apresenta uma característica própria, chamada de “Teorema da Caracterização de uma Função Afim”, a saber:

Seja $f: R \rightarrow R$ uma função monótona crescente ou monótona decrescente. Se o acréscimo $f(x+\Delta x) - f(x)$ depender apenas de Δx mas não de x, então f é uma função afim.

Perceba a demonstração:

Seja $h = \Delta x$. Sem perda de generalidade vamos supor f crescente. Seja f uma função qualquer e g uma função satisfazendo a condição $f(x + h) - f(x) = g(h)$, ou seja, a variação de f em relação à x depende apenas de h. Observemos que

$$g(0) = f(x+0) - f(x) = 0.$$

Se $h_1 < h_2$, então,

$$g(h_1) = f(x + h_1) - f(x) < f(x + h_2) - f(x) = g(h_2).$$

Portanto g também é crescente.

Vamos calcular $g(v+h)$, para v e h reais quaisquer,

$$g(v+h) = f(x+ (h+v)) - f(x) = f((x+v) + h) - f(x). \qquad (1)$$

Procederemos da seguinte maneira: somando e subtraindo $f(x+v)$ do lado direito de (1), obteremos

$$g(v+h) = f((x+v) + h) - f(x+v) + f(x+v) - f(x)$$

$$g(v+h) = [f((x+v) + h) - f(x+v)] + [f(x+v) - f(x)]$$

$$g(v+h) = g(h) + g(v).$$

Logo, fazendo $a = g(1)$, temos $g(h) = ah, \forall h \in R$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Tomando $x = 0$, temos que $f(0+h) - f(0) = ah$ ou $f(h) - f(0) = ah$. Chamando $f(0) = b$, temos $f(h) = ah + b, \forall h \in R$. Substituindo h por x obtemos $f(x) = ax + b, \forall x \in R$, ou seja, f é uma função afim.

Os tipos de gráficos da função afim do tipo $f(x) = ax + b$, está relacionado com a noção de crescimento, decrescimento ou estacionária, isto é, constante. Desta forma, abaixo as respectivas representatividades:

a)Função crescente: a função afim é considerada crescente quando o coeficiente angular (taxa de variação proporcional) é positivo, ou seja, $a > 0$;

Exemplos de funções com os coeficientes positivos:

i. $f(x)\ 3x + 2$, onde: $a = 3$ e $b = 2$

Figura 4- função afim

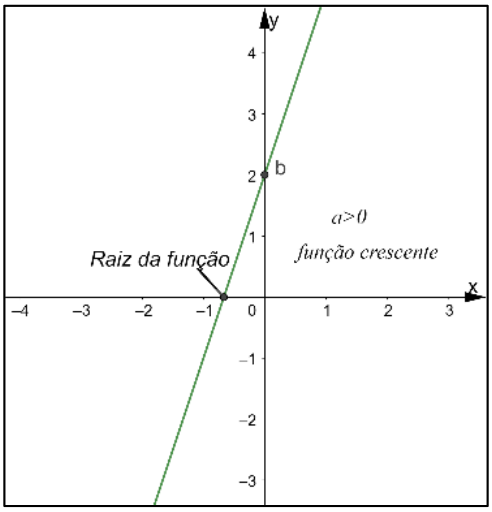
Visualmente:

$$f(x) = \boxed{a}\, x + \boxed{b}$$
$$f(x) = \boxed{3}\, x + \boxed{2}$$

Fonte: autor, 2021.

Gráfico 5 - Função crescente

Graficamente:



Fonte: autor, 2021.

b) Função decrescente: a função afim é considerada decrescente quando o coeficiente angular (taxa de variação proporcional) é negativo, ou seja, $a < 0$.
Exemplos de funções com os coeficientes negativos:

ii. $f(x) = -2x + 3$, onde: $a = -2$ e $b = 3$

Figura 5- Função afim

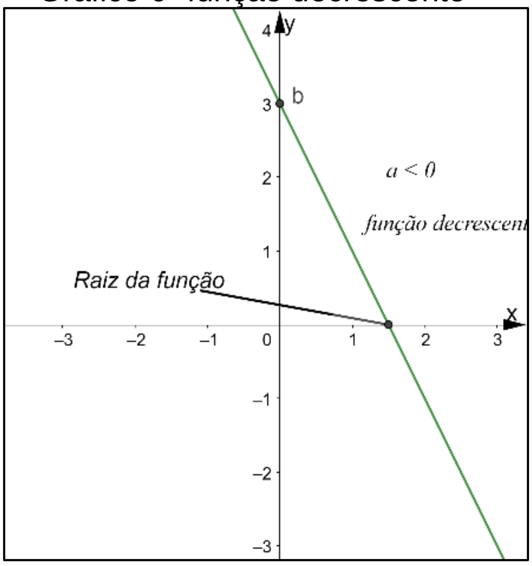
Visualmente:

$$f(x) = \boxed{a}\, x + \boxed{b}$$
$$f(x) = \boxed{-2}\, x + \boxed{3}$$

Fonte: autor, 2021.

Gráfico 6- função decrescente

Graficamente:



Fonte: autor, 2021.

iii. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, onde: $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{3}$

Figura 6 – função afim

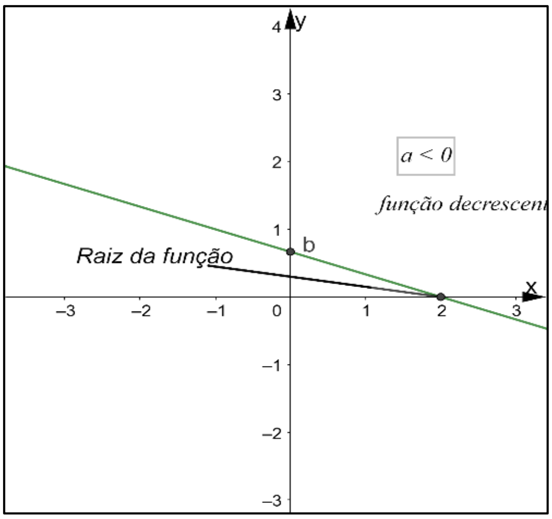
Visualmente:

$$f(x) = a\,x + b$$
$$f(x) = -\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}$$

Fonte: autor, 2021.

Gráfico 7-função decrescente

Graficamente:



Fonte: autor, 2021.

c) Função constante: a função afim é considerada constante quando o coeficiente angular (taxa de variação proporcional) é zero, ou seja, $a = 0$; isto é, $f(x) = b$. Importante, observar que o gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo do x).

iv. $f(x) = 2$, onde $a = 0$ e $b = 2$

Figura 7- Função constante

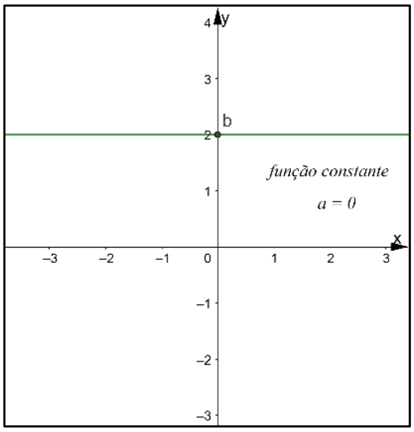
Visualmente:

$$f(x) = \boxed{b}$$
$$f(x) = \boxed{2}$$

Fonte: autor, 2021

Gráfico 8- Função constante

Graficamente:

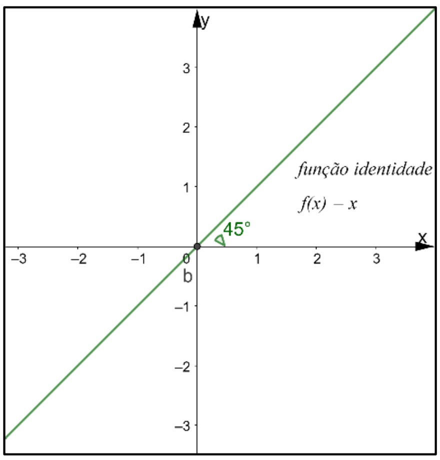


Fonte: autor, 2021.

d) Função identidade: uma função afim é considerada função identidade, quando $f(x) = x$, sua principal característica é que o gráfico é uma bissetriz passando pela origem do Plano Cartesiano.

Gráfico 9 – função identidade

Graficamente:



Fonte: autor, 2021.

2.1.3 Raiz ou Zero de uma função afim

No ensino da Matemática ao desenvolver o cálculo da função afim, para encontrar o ponto de intersecção do eixo das abscissas, é encontrar a raiz da função ou como normalmente é referida como sendo o zero da função, em outras palavras, encontrar o valor de x, para o qual $\mathrm{y} = 0$. Acompanhe a demonstração.

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$, fazendo $\mathrm{f(x)} = 0$, com $\mathrm{a} \neq 0$ temos:

$\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$ (isolando o ax);

$\mathrm{ax} = -\mathrm{b}$ (isolando o x)

$$\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

Resposta o zero da função é $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

Exemplo:

Dada a função $\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x} - 8$, encontre a raiz da função.

i) Processo longo:

fazendo $\mathrm{f(x)} = 0$

$2\mathrm{x} - 8 = 0$

$2\mathrm{x} = 8$

$\mathrm{x} = \frac{8}{2} \Rightarrow \mathrm{x} = 4.$

ii) Processo curto:

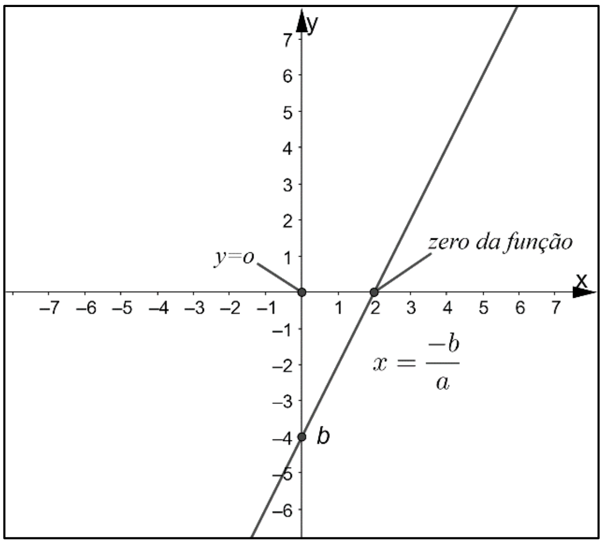
$\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x} - 8,$ a=2 e b= -8

$$\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \Rightarrow \mathrm{x} = -\frac{-8}{2} = \mathrm{x} = 4.$$

Representação no gráfico:

Gráfico 10- zero da função

Graficamente:



Fonte: autor, 2021.

Ao observar o gráfico 10, percebemos que para o valor de $x > 2$, o gráfico sempre é positivo e o contrário, isto é, $x < 2$, o sinal da função fica negativo. Para um melhor entendimento, a seguir discorremos acerca do sinal que uma função afim, pode assumir em relação a sua raiz.

2.1.4 Sinal de uma função afim

Anteriormente, já mencionamos acerca da taxa de variação, quando tratamos dos tipos de gráficos da função afim. Agora, retomaremos este assunto, para tratarmos do sinal de uma função fim, interpretando-a em um gráfico, que Dante (2020) chama de um dispositivo prático.

O coeficiente $a \neq 0$ é chamado de taxa de variação. Caso, $a = 0$, a função será constante. Não obstante, o sinal de a mostra se a função é crescente ou decrescente, conforme discorrido a seguir.

Teorema:

I) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, a taxa de variação for positiva.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$ é crescente, então, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$.

Desenvolvendo, temos: $\frac{(ax_1+b)-f(ax_2+b)}{x_2-x_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{a\cancel{(x_1-x_2)}}{\cancel{(x_2-x_1)}} > 0$ simplifica os termos semelhantes, o resultado é $a > 0$.

II) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, a taxa de variação for negativa.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$ é decrescente, então, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} < 0$.

Desenvolvendo temos: $\frac{(ax_1+b)-f(ax_2+b)}{x_2-x_1} < 0 \Leftrightarrow \frac{a\cancel{(x_1-x_2)}}{\cancel{(x_2-x_1)}} < 0$ simplifica os termos semelhantes, o resultado é $a < 0$.

Agora, partindo do pressuposto que a função afim seja $f(x) = ax + b$. Vamos encontrar o ponto de equilibro, isto é, quando a função f(x) = 0.

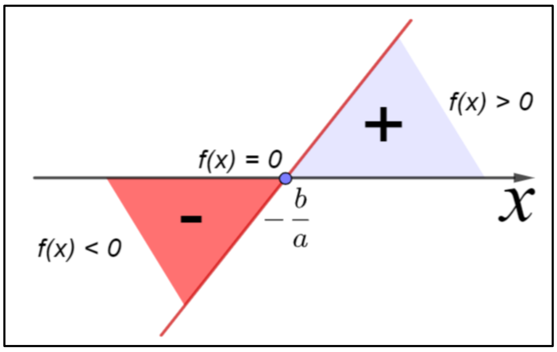
Cálculo:

$ax + b = 0 \rightarrow$ primeiro: isolamos o termo independente (b),

$ax = -b \rightarrow$ segundo dividimos ambos os membros pelo coeficiente angular (a)

$x = -\frac{b}{a}$ ou seja, o ponto de equilibro é: $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Figura 8- Sinal da função afim



Fonte: Autor, 2022.

De forma análoga, temos os seguintes resultados:

- $x > -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal da função é positiva);
- $x = -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) = 0$ (sinal da função é nula);
- $x < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal da função é negativa).

Percebemos assim, quando temos a inequação $f(x) > 0$, o sinal do sipositivo prático é positivo (+); e quando temos a inequação $f(x) < 0$, o sinal do dispositivo prático é negativo (-).

No livro didático de matemática do 9.º ano do ensino fundamental, aqui o livro é do autor Silveira (2018). O estudo do sinal da função se dá conforme segue.

Em uma função afim, podemos verificar para quais valores de x a função é positiva, para quais valores é negativa e para qual valor é nula. Portanto, estudar o sinal de uma função é determinar os valores reais de x para que: a função se anule $(y = 0)$;

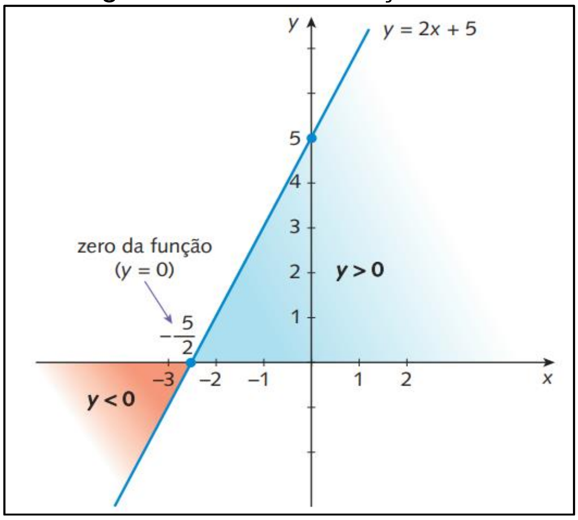
- a função seja positiva $(y > 0)$;

- a função seja negativa $(y < 0)$.

Vamos apresentar um exemplo, feito por Silveira (2018), para a função

$$y = 2x + 5.$$

Figura 9- Sinal da função afim



Fonte: Silveira (2018, p. 143).

A função é crescente, pois $a = 2, (2 > 0)$. O zero da função é $-\frac{5}{2}$.

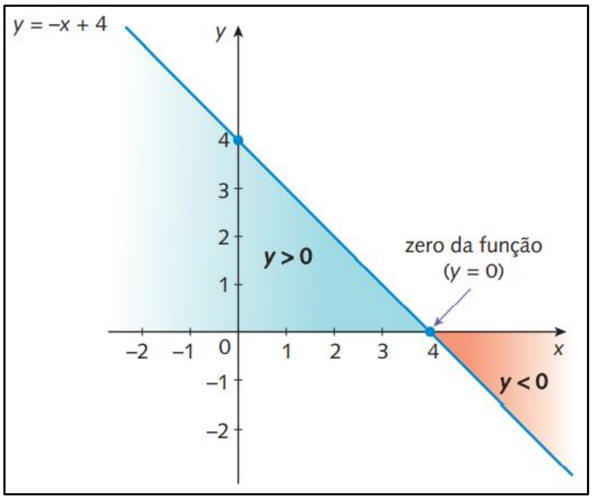
Observando o gráfico, verificamos que para:

• $x = -\frac{5}{2}$, a função é nula $(y = 0)$. (No eixo da abscissa);

• $x > -\frac{5}{2}$, a função é positiva $(y > 0)$. (acima do eixo da abscissa);

• $x < -\frac{5}{2}$, a função é negativa $(y < 0)$. (abaixo do eixo da abscissa).

Figura 10- sinal da função afim



Fonte: Silveira (2018, p. 143).

A função é decrescente, pois $a = -1, (a > 0)$. O zero da função é 4. Observando o gráfico, verificamos que para:

• $x = 4$, a função é nula $(y = 0)$. (No eixo da abscissa);

• $x < 4$, a função é positiva $(y > 0)$. (Acima do eixo da abscissa);

• $x > 4$, a função é negativa $(y < 0)$. (Abaixo do eixo da abscissa).

Depreendemos quanto a abordagem didático-pedagógica, não requer um rigor matemático. Porém, também apresenta os elementos necessários para os alunos da faixa etária deste nível ensino, compreender como se dá a análise do sinal da função afim, sobretudo, visualmente em um dispositivo prático traçado pelo eixo das abscissas e o gráfico, isto é, a reta.

2.1.5 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Além dos elementos discutidos nos tópicos anteriores, no contexto de funções, podemos afirmar que "uma função está bem definida se conhecermos o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a 'regra' que permite determinar a imagem de qualquer elemento do seu domínio"[4].

Ao definirmos uma função f de A em B, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio** $[\mathbf{D}(f)]$ e **contradomínio** $[\mathbf{CD}(f)]$ da função f.

Além disso, para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$ é chamado de **imagem** de a pela função f. Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por $Im(f)$.

É importante ressaltar neste momento que em toda função f de A em B, temos que $Im(f)$ está contido em B, ou seja, é um subconjunto de B. Indicamos: $Im(f) \subset B$.

Para um entendimento dos enunciados acima, acompanhe o desenvolvimento da atividade a seguir.

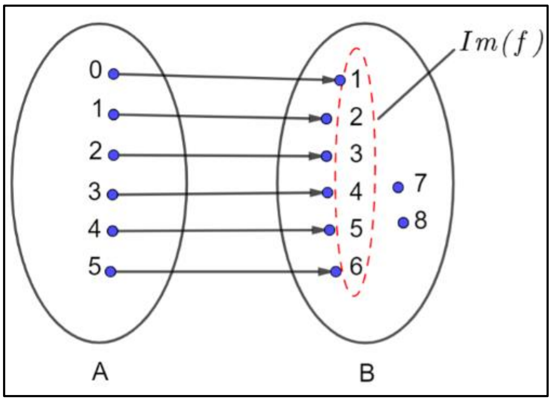
Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e a função f de A em B, representada pelo diagrama abaixo. Observe que o domínio de f: A em B, representada pelo diagrama abaixo. Observe que o domínio de f é o conjunto

[4] Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa (2004).

A e o contradomínio de f é o conjunto B. O conjunto imagem de f é formado pelas imagens dos elementos de A, portanto:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Figura 11-Diagrama de Venn



Fonte: Autor, 2021.

Analisando a figura 1, percebemos que a lei da função afim, pode ser representa pela expressão: $f: A \longrightarrow B$, assim: $f(x) = x + 1$. Tendo abordados estes elementos da função, decorre deles, uma propriedade importante para a matemática que é a função inversa, conforme estudo a seguir.

2.1.6 Função Inversa

Dadas os elementos de uma função como anteriormente, mencionados domínios, imagem e contradomínio de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, decorre uma propriedade importante, deste estudo de funções. Entendemos ainda que a propriedade de que cada elemento do contradomínio se encontra associado a um único elemento do domínio, isto é, ele é imagem de um único elemento do domínio. Essas funções têm um papel muito importante na matemática e são denominadas funções inversíveis.

Para Figueiredo (1996), seja $f: A \rightarrow B$ uma função injetiva definida em um $\mathrm{conjunto}\ A$ e tomando valores em um $\mathrm{conjunto}\ B$. Relembremos que f injetiva significa $f(x_1) \neq f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ em A. Para uma tal f, podemos definir a função inversa f^{-1}: $f(A) \rightarrow A$,que tem por domínio a imagem $f(A)$ e por contradomínio o conjunto A, do seguinte modo, para $y \in f(A)$ temos $f^{-1}(y) = x$, onde $x \in A$ é o elemento (único, por ser f injetiva) tal que $f(x) = y$.

Para este autor:

> Observe que $f^{-1}: f(A) \to A$ é sobrejetiva. Obviamente, toda função crescente (ou decrescente) é injetiva. Para funções contínuas vale uma recíproca deste fato: "toda função $f: I \to \mathbb{R}$ injetiva contínua é ou crescente ou decrescente". (FIGUEIREDO, 1996, p. 69).

Desta forma, podemos concluir que se f é uma função inversível, com $\text{domínio } D$ e $\text{contradomínio } C$, e se g é a sua inversa, então $g(f(x)) = x, \forall x \in D$ e $f(g(y)) = y, \forall y \in C$.

Para uma melhor compreensão do exposto acerca da função inversa, acompanhe o exemplo a seguir.

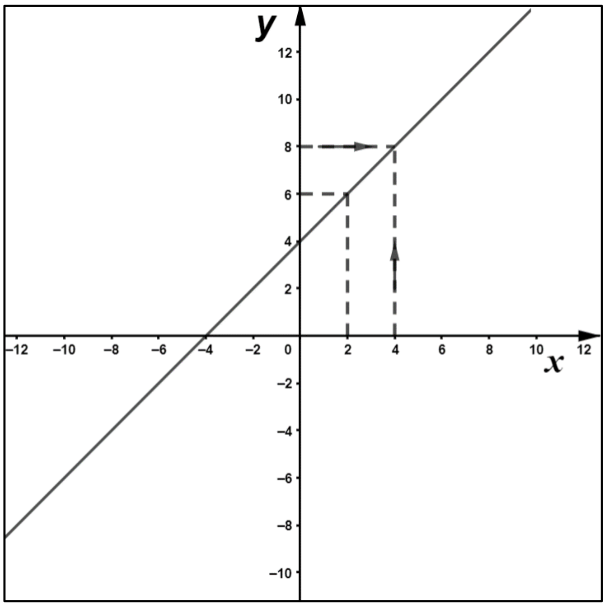
A função dada por $y = x + 4$, com $\text{domínio } \mathbb{R}$ e $\text{contradomínio } \mathbb{R}$ é inversível, pois:

i) a cada $y \in \mathbb{R}$, está associado o único elemento $x = y - 4 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = f(y - 4) = y$.

ii) para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ teremos $x_1 + 4 \neq x_2 + 4$ e, portanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Graficamente, temos:

Gráfico 11 – Função inversa



Fonte: Autor, 2022.

A função dada acima é bijetora, como anteriormente reforçado, por ser inversa.

Outras importantes observações acerca da função afim ficam por quanto de algumas propriedades, que discorreremos a seguir.

2.2 Propriedades operatórias entre funções

É importante ressaltar que dadas três funções afins f, g e h quando efetuamos as operações de: adição e composição de função e o produto de um escalar por uma função quando as funções envolvidas forem afins o resultado continua sendo uma função afim. Veja abaixo os itens i); ii) e iii).

i) Adição de função

Definição: Dadas duas funções $\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathrm{g}: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ chamamos de adição de f e g a função $\mathrm{f}+\mathrm{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})$.

Proposição 4: A soma de duas funções afins o resultado é uma função afim. **Demonstração**:

Dadas às funções $\mathrm{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathrm{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins tais que $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ e $g(\mathrm{x}) = \mathrm{cx} + \mathrm{d}$ da definição de função soma, temos:

$(\mathrm{f} + \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b} + \mathrm{cx} + \mathrm{d}$

$$(\mathrm{f} + \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{cx} + \mathrm{b} + \mathrm{d} \rightarrow (\mathrm{f} + \mathrm{g})(\mathrm{x}) = (\mathrm{a} + \mathrm{c})\mathrm{x} + (\mathrm{b} + \mathrm{d})$$

e como $(\mathrm{a} + \mathrm{c})$ e $(\mathrm{b} + \mathrm{d}) \in \mathbb{R}$, chamando $(\mathrm{f} + \mathrm{g}), (\mathrm{a} + \mathrm{c})$ e $(\mathrm{b} + \mathrm{d})$, respectivamente de h, m e n temos a função afim: $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \mathrm{mx} + \mathrm{n}$, com m e $\mathrm{n} \in \mathbb{R}$.

ii) Composição de função

Definição: Consideremos $\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B},\ \mathrm{g}: \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a função composta $\mathrm{gof}: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{C}$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Conforme segue:

$$(\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}[\mathrm{g}(\mathrm{x})] \text{ e/ou } (\mathrm{g\,of})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}[\mathrm{f}(\mathrm{x})] \text{ para } \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{A}.$$

Neste sentido, Lima (2004, p. 20) diz que se “observamos que, mais geralmente, basta que a imagem $\mathrm{f}(\mathrm{A})$ da função f esteja contida no domínio de g para que a definição $(g\,of)(x) = g[f(x)]$ faça sentido e forneça a função composta $gof: A \rightarrow C$".

Proposição 5: A composição de duas funções afins é uma função afim.

Demonstração: Dadas às funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins tais que:

$$f(x) = ax + b \text{ e } g(x) = cx + d$$

da definição de função composta, temos:

$$(fog)(x) = f[g(x)]$$
$$(fog)(x) = f(cx + d)$$
$$(fog)(x) = a(cx + d) + b$$
$$(fog)(x) = acx + ad + b$$
$$(fog)(x) = (ac)x + (ad + b)$$

e como (ac) e $(ad + b) \in \mathbb{R}$, chamando $(fog), (ac)$ e $(ad + b)$, respectivamente de h, m e n temos a função afim:

$$h(x) = mx + n \text{ , com } m \text{ e } n \in \mathbb{R}.$$

Ou:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$(gof)(x) = g(ax + b)$$
$$(gof)(x) = c(ax + b) + d$$
$$(gof)(x) = (ca)x + (cb + d)$$

e como (ca) e $(cb + d) \in \mathbb{R}$, chamando $(gof), (ca)$ e $(cb + d)$, respectivamente de h, m e n temos a função afim:

$$h(x) = mx + n \text{ , com } m \text{ e } n \in \mathbb{R}.$$

iii) Multiplicação de uma função por um escalar

Definição: Dada uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $A \subset \mathbb{R}$ chamamos de multiplicação de f por α a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Proposição 6: O produto de um número real K por uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função afim $f(x) = ax + b$ o resultado é uma função afim.

Demonstração:

Dada uma função afim f e um número $K \in \mathbb{R}$, pois da definição temos:

$$(Kf)(x) = Kf(x)$$

$$(Kf)(x) = K(ax + b)$$

$$(Kf)(x) = (Ka)x + (Kb)$$

e como

(Ka) e $(Kb) \in \mathbb{R}$, chamamos (Kf), (Ka) e (Kb), respectivamente de h, m e n temos a função afim:

$$h(x) = mx + n, \text{ com } m \ e \ n \in \mathbb{R}.$$

As operações de adição entre as funções afins satisfazem as propriedades de:

- Associativa:

Quaisquer que sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções afins dadas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ e $h(x) = ex + f$, tem-se:

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ e $h(x) = ex + f$, daí:

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = [(ax + b) + (cx + d)] + (ex + f)$$

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = (ax + b) + [(cx + d) + (ex + f)]$$

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

- Comutatividade:

Quaisquer que sejam as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, tem-se:

$$(f + g)(x) = (g + f)(x)$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$ *e* $g(x) = cx + d$ afins, daí:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (ax + b) + (cx + d)$$

$$= (a+c)x + (b+d). \quad (1)$$

Como $(g+f)(x) = g(x) + f(x)$

$$= (cx+d) + (ax+b)$$

$$= (c+a)x + (d+b).$$

Como a,b,c e d são números reais então c+a= a+c e d+b = b+d logo

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x)$$

$$= (cx+d) + (ax+b)$$

$$= (c+a)x + (d+b)$$

$$= (a+c)x + (b+d) \quad (2).$$

Da comparação de (1) e (2) podemos concluir que f+g = g+f .

Assim fica demonstrado que a adição de funções afim é comutativa.

Outras funções podem ser definidas, de forma a satisfazer as condições propostas, conforme segue.

Função zero

Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$ *e* $g(x) = cx + d$ existe uma função afim $g(0) = 0 = 0x + 0$, com $a = b = 0$, tal que $f(x) + g(0) = f(x)$, seja qual for $f(x)$. A função $g(0)$ chama-se função neutra.

Demonstração

Consideremos as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(0) = 0x + 0,$ daí:

$$f(x) + g(0) = (ax + b) + (0x + 0)$$
$$f(x) + g(0) = (ax + 0x) + (b + 0)$$
$$f(x) + g(0) = ax + b$$
$$f(x) + g(0) = f(x)$$

Função simétrica

Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ existe uma função $f - 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f^{-1}(x) = -ax - b$, chamada simétrica tal que:

$$f + f^{-1} = \text{função neutra}$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções afins definidas por $f(x) = ax + b$ e $f^{-1}(x) = -ax - b$ da soma de funções temos:

$$f + f^{-1} = (ax + b) + (-ax - b)$$
$$f + f^{-1} = (ax) + (-ax) + (b - b)$$
$$f + f^{-1} = 0x + 0$$
$$f + f^{-1} = f(0)$$

Além destas trabalharemos ainda a Função injetora, a função sobrejetora e a função bijetora.

Função injetora: Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora quando para quaisquer elementos $X_1 e\ X_2$ de A, $f(X_1) = f(X_2)$ implica $X_1 = X_2$. Em outras palavras, quando $X_1 \neq X_2$ em A, implica $f(X_1) \neq f(X_2)$.

Função sobrejetora: Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ sobrejetora quando para todo $y \in$ B, existe pelo menos um $x \in$ A tal que $f(x) = y$.

Função bijetora: Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Proposição 7: Qualquer uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função afim $f(x) = ax + b$ é bijetora.

Proposição 7:

Qualquer uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afim é bijetora.

Demonstração:

Consideremos a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$. Vamos inicialmente provar que ela e uma função injetora. De fato, para todos X_1 e X_2 em $\mathbb{R}$, temos $f(X1) = f(X2) \Leftrightarrow aX_1 + b = aX_2 + \Leftrightarrow aX_1 = aX_2 \Leftrightarrow aX_1 - aX_2 = 0 \Leftrightarrow a(X_1 - X_2) = 0$. Como $a(X_1 - X_2) = 0$, com $a \neq 0$, então $X_1 - X_2 =$ 0 e, portanto, $X_1 = X_2$. Logo a função afim $f(x) = ax + b$ e injetora.

Provaremos agora a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ ser sobrejetora. De fato, pois dado $y \in \mathbb{R}$, exibiremos $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Se $y \in \mathbb{R}$ então:

$$ax + b = y$$
$$ax = y - b$$
$$x = \frac{y - b}{a}$$

E substituindo x temos que:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x) = a.\left(\frac{y - b}{a}\right) + b$$
$$f(x) = y - b + b$$
$$f(x) = y$$

Logo a função afim $f(x) = ax + b$ é uma função sobrejetora. Portanto, a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo uma função afim $f(x) = ax + b$ é bijetora.

Com estes apontamentos acerca da função afim, faz nos lembrar sobre a trajetória histórica deste assunto. Desta maneira, a seguir faremos um estudo acerca dos aspectos históricos do conteúdo pela ótica do materialismo histórico-dialético, conforme tópico seguinte.

2.3 Aspectos históricos do conteúdo

Para discutir a aplicação da função afim, é necessário compreender o processo histórico vivenciado pela humanidade, ao menos, entender algumas posturas e visões de mundo e sociedade. Nesse sentido, a visão aqui proposta é a "História Dialética Marxista". Assim sendo, para alguns estudiosos marxistas, enquanto Hegel analisou o método dialético no campo do "espírito" e das ideias, Marx analisou o movimento dialético histórico no campo da materialização das coisas. Seguindo essa linha de raciocínio, conforme Pires (1997, p. 85),

> O método dialético que desenvolveu Marx, o método materialista histórico-dialético, é método de interpretação da realidade, visão de mundo e práxis. A reinterpretação da dialética de Hegel (colocada por Marx de cabeça para baixo), diz respeito, principalmente, à materialidade e à concreticidade. Para Marx, Hegel trata a dialética idealmente, no plano do espírito, das ideias, enquanto o mundo dos homens exige sua materialização.
> .

Oliveira (2006), para Marx a primeira premissa da história humana é a “existência dos indivíduos humanos vivos” que se definem, não por aquilo que pensam, mas por “produzirem os seus meios de vida”. Sendo assim, “o ser humano define-se como ser social porque produz e constrói sua humanidade pelo avanço das relações produtivas”. (OLIVEIRA, 2006, p. 76).

Para completar esse entendimento Morin (2007, p. 39), cita que:

> O conhecimento, ao buscar construir-se com referência ao contexto, ao global e ao complexo, deve mobilizar o que o conhecedor sabe do mundo. Como François Recanati dizia, “a compreensão dos enunciados longe de se reduzir a mera decodificação é um processo não-modular de interpretação que mobiliza a inteligência geral e faz amplo apelo ao conhecimento do mundo”. [...] A educação deve favorecer a aptidão natural da mente em formular e resolver problemas essenciais e, de forma correlata estimular o uso total da inteligência geral. Este uso total pede o livre exercício de da curiosidade, a faculdade mais expandida e a mais viva durante a infância e a adolescências, que com frequência a instrução extingue e que, ao contrário se trata de estimular ou, caso esteja adormecida, de despertar.

Partindo deste pressuposto, que o ensino deve ter relação com o contexto e o global, isto é, em uma “visão de mundo e práxis”, doravante vamos discorrer sobre o estudo das funções durante alguns períodos históricos. Mesmo entendendo que em épocas remotas, o pensamento filosófico do método "Histórico dialético Marxista" não era conhecido, contudo, posso afirmar, no caso particular do surgimento do pensamento matemático de função ao longo da história humana, que a essência fenomenológica da compreensão da concepção histórico-dialética, sim, estava presente. Uma vez que, a aplicação da noção de função é a busca interpretativa de representar a realidade para intervir nela em uma práxis pedagógica em linguagem matemática.

Neste contexto, depreendemos que a literatura especializada em pesquisa matemática traz como um possível surgimento do pensamento matemático relacionado a função o período aproximadamente de “2000 anos a.C, em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como “funções tabuladas”, destinadas a um fim prático” (ZUFFI, 2016, p. 2). A noção de funcionalidade e da praticidade para relacionar algo a outrem, já foi levantado em Sá, Souza e Silva (2003, p. 125):

> A ideia de funcionalidade de uma certa maneira não é recente na mente humana, por exemplo, quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional.

O entendimento do raciocínio acima é compartilhado por muitos autores pesquisadores. Desta forma, vários autores registram os Babilônios como percussores da noção de conceito de função (SÁ, 2003; BOYER, 1989; ZUFFI, 2016; SILVA, 2018; dentre outros).

Para efeito didático, organizaremos um quadro histórico com as principais passagens em relação a noção de função.

Quadro 2 - Quadro sinótico da evolução do conceito de função em ordem histórica e cronológica.

(Continua...)

Idade/ Início e Fim	**Autor**	**Ano**	**Contribuição**
Antiga 4.000 a.C. (invenção da escrita); 476 d.C. (queda do Império Romano)	--	--	Sem registro

Média 476 (queda do Império Romano); 1453 (Tomada de Constantinopla)	Nicole Oresme (1323-1382	-	O conceito de funções contribuiu para o desenvolvimento no estudo da teoria da latitude e longitude, onde descreveu as distintas formas de intensidade das variáveis de velocidade e tempo, durante o movimento de um corpo com aceleração constante (BOYER, 1974, p. 193).
Moderna 1453 (Tomada de Constantinopla); 1789 (Revolução Francesa)	René Descartes (1596-1650)	--	Chegou a definir função como qualquer potência de x, como x^2, x^3,...
	Isaac Newton (1643-1727)	--	Introduziu o termo “variável independente”.
	James Gregory	1667	Na obra Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura, conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: “Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b,.... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável”.
	Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra função para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra História usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.
	Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
	Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes.
	Leonhard Euler (1707-1783)	--	Introduziu o símbolo f(x).
	D’Alembert (1717-1783)	--	Equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
	Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$$
Contemporânea 1789 (Revolução Francesa);	Joseph-Louis Lagrange (1783-1813)	1797	Na obra Théorie des Functions Analytiques, definiu: “Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas

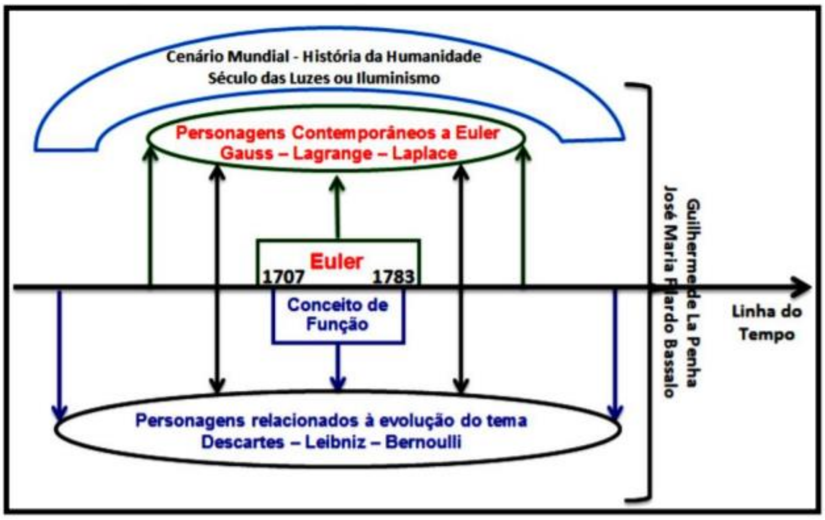
			funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas”
	Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des functions: “Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo”.
	Benhard Bolzano (1781-1848)	1817	Publicou Functionlehre onde conceituou continuidade muito próxima do conceito atual. Demonstrou o teorema do valor médio.
	Augustin Louis Cauchy (1789-1857	1821	Em Cours d’analyse definiu função: “Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de função dessa variável”. Definiu continuidade através de infinitésimos.
	Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em La théorie analytique de la chaleur que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right]$$
	Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	-	Definiu função: “A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x. o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir, mas permanece desconhecida”
	Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)		Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pelas serie de Fourier.
		1837	Definiu função como: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x”.
	Bernhard Riemann (1826-1866)	--	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de “integral de Riemann”.
	Karl Weierstrass (1815-1897)	--	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
	Philipp Cantor (1845-1918)	--	Desenvolveu a teoria dos conjuntos.
	Giuseppe Peano (1858-1932)	--	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.

	Nicolas Bourbaki	1968	Em théorie des Ensembles conceituou função de duas maneiras: “Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja xªE, existe um e somente um elemento yªF que estejam associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento xª E o elemento yªF que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.” E “um certo subconjunto do produto cartesiano AxB”.

Fonte: Adaptado: Sá et. al. (2003).

Desta forma, percebemos que o conceito de função não se deu em um mesmo período histórico e nem por um único autor. A contribuição viera de poucos nomes, mas de forma significativa dentro de cada estudo proposto, como percebido acima, em áreas de conhecimento diferentes (Matemática, Física, Astronomia e outras), até chegar na idade contemporânea, portanto, aos dias atuais. Para uma visão didática da evolução do conceito de função, abaixo veja o Diagrama-Metodológico II – Conceito de função.

Figura 12 - Diagrama - Metodológico II - Conceito de Função



Fonte: Chaquiam (2017, p. 28).

O estudo de função sobre a perspectiva da História da Matemática de forma recente, foi apresentado no XI ENEM[5] em 2013 durante a participação na mesa Propostas práticas de uso didático da História da Matemática na Educação Básica pelo autor Miguel Chaquiam, contudo, o interesse nesse trabalho é a ênfase na função

[5] ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática

afim, logo, os aspectos de toda a história da função e/ou da evolução do conceito de função, mesmo considerando relevante, não é objeto deste trabalho.

Assim sendo, a seguir, vamos abordar o conceito de função, particularmente, da função afim, subtópico dos aspectos curriculares do conteúdo nos documentos oficiais tanto do governo federal como Estadual (Pará) e Municipal (Altamira-PA).

2.4 Aspectos curriculares do conteúdo

Nesta etapa, discorreremos sobre os aspectos curriculares no ensino de função, com foco na função afim, particularmente, como anteriormente mencionado, no 9.º ano do ensino fundamental. Para tanto, serão revistos os documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tanto do quarto ciclo das séries/anos finais do ensino fundamental, como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) será enfatizada.

2.4.1 A função afim à luz dos PCN de matemática do ensino fundamental

Os PCN do quarto ciclo já alertam que “é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula” (BRASIL, 1998, p. 59).

Os PCN concebem a Matemática em desenvolvimento durante o passar da história da sociedade. Segundo ele (BRASIL, 1998, p. 59):

> A Matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Comunicação.

A finalidade dos PCN era de fato levantar algumas provocações em matemática para inserir os alunos no mercado de trabalho e formar o futuro cidadão da sociedade brasileira. Neste sentido,

> Em síntese, os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 60).

Referente ao ensino de função os PCN abordam fazendo menção ao ensino de um dos cinco grandes blocos dos conteúdos em Matemática, o bloco de Álgebra.

> Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de **conceitos como o de variável e de função**; a representação de fenômenos **na forma algébrica e na forma gráfica**; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 84, grifo nosso).

Os PNC mencionam ainda o ensino da função quanto ao ensino da proporcionalidade, principalmente, análise gráfica da função. Sugerindo ao discente a possibilidade de desenvolver essa noção "ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática)" (BRASIL, 1998, p. 84-85).

Percebe-se também nos PCN que a ênfase ao ensino da álgebra é visível, pois destinam uma boa parte na discussão e análise de suas possibilidades, sobretudo, por meio da representação de letras, como variáveis, neste momento, dão ênfase também ao ensino da função, como veremos na figura a seguir:

Figura 13 - Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e proce-dimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Brasil (1998, p. 116, grifo nosso).

Outra referência ao ensino da função, isto é, a aplicação da função para resolver problemas é sugerido de forma explicita, por meio de alguns problemas matemáticos, por exemplo, o seguinte problema foi proposto:

"O dono de um grande estabelecimento concluiu que o preço de uma determinada linha de produtos deveria ser vendida a varejo com um valor majorado em 40% sobre o de custo para que a margem de lucro fosse significativa." (BRASIL, 1998, p. 119).

Sugestão didática pelos PCN: “Após discussões, os alunos anotariam os cálculos em uma tabela do tipo”:

Produto	**P**: preço de custo (R$)	**V**: preço de venda (R$)
I	2,80	2,80 + 2,80 x 0,4 = 3,92
I I	5,00	5,00 + 5,00 x 0,4 = 7,00
I I I	8,25	8,25 + 8,25 x 0,4 = 11,55
IV	9,45	9,45 + 9,45 x 0,4 = 13,23
V	10,00	2 x 7,00 = 14,00
	....	...
	P	P + P x 0,4

Fonte: Brasil (1998, p. 119).

Para os PCN, “o aluno poderá descrever oralmente os procedimentos e em seguida empregar a noção de variável para indicar genericamente o preço de venda (V) dos produtos em função do preço de custo (P): V = P + P x 0,4.”, dentre outros problemas propostos nesse documento oficial.

Depreendemos desses exemplos que o ensino de função no quarto ciclo dos PCN está atrelado a transição da álgebra para equações, além disso, como visto anteriormente, a função afim, sugerida como aplicação para resoluções de situações-problema. Ou seja, os PCN de matemática do ensino fundamental no tocante ao quarto ciclo já abordavam como estratégia de resoluções de problema o uso de função.

Neste período da educação brasileira, o ensino da função afim no quarto ciclo era de forma simples, sem adentrar, ao ensino da função afim, ministrada no ensino médio, como veremos no subtópico a seguir.

2.4.2 A função afim à luz dos PCNEM de matemática do ensino médio

O ensino brasileiro a partir da aprovação da LDB 9.394/96 manteve o cuidado de progressão do ensino de matemática, os anos finais do ensino fundamental meio que introduz vários conteúdos para ter continuidade no ensino médio, alguns exemplos: polinômios, probabilidade e estatística, trigonometria, dentre eles a noção de função afim e a função quadrática, que geralmente nos livros didáticos tanto fundamental como no médio vem com o título “função do 1.º grau” ou “função polinomial do 1.º grau” e função do segundo grau” ou “função polinomial do 2.º grau”.

Neste tópico discorreremos sobre a orientação pedagógica no campo da matemática da função afim nos PCNEM.

Nos PCNEM a abordagem pedagógica se dá por meio da contextualização e interdisciplinaridade, campo fértil para aplicação do raciocínio matemático de função e de outrem, sobretudo àqueles temas que apresenta uma carga cultural significativa e histórica. Para corroborar esse entendimento os PCNEM (2000, p. 43)

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.

Assim, os PCNEM já trazem esse entendimento da importância de contextualizar o ensino para trabalhar uma aprendizagem significativa, isto é, que os alunos entendam o que estão aprendendo e para que estão aprendendo, indo além, que sejam capazes, de interpretar de forma autônoma e aplicar os conhecimentos matemáticos e resoluções de problema, dentre eles o da função afim.

Neste contexto, o professor por meio do ensino da Matemática deve proporcionar aos alunos, segundo os PCNEM (2000, p. 44)

> Certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

O ensino com qualidade visa formar o aluno para uma educação holística que potencialize o desenvolvimento de capacidade lógica matemática que lhe permita o exercício pleno da cidadania e que auxilia nas tomadas de decisões, caso hajam.

Destarte, os PCNEM vislumbram o ensino por meio de competências e o ensino de matemática precisa ser ativo e criativo para propiciar uma educação crítica e reflexiva dentro de uma práxis pedagógica, isto é, como Freire (1996) concebia a práxis reflexão – ação – reflexão. Nas palavras dos PCNEM, temos:

> [...] Se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade[6].

O ensino da função afim pode sim ir além de meros conceitos e cálculos mecânicos, o professor pode incentivar os discentes a pensar aplicação deste conhecimento matemático para a resoluções de problema do cotidiano. Por exemplo, as cidades do interior, até mesmo, na capital, Belém, tem os mototaxistas. Nas cidades do interior, Altamira-PA, como exemplo, tem em cada esquina de ruas de comércios ou saídas de bairros distante do centro. Portanto, pode se fazer um trabalho de pesquisa juntos os profissionais mototaxistas, até mesmo fazer uma visita à sede, por fim propor uma função afim que melhor proporcione um preço justo tanto ao profissional quanto ao cliente. Nas atividades propostas, retomarei essa ideia.

Ressalta-se com essa pequena revisão sobre a presença de conteúdos de função nos PCNEM, bem como, se percebe a progressão do ensino da função dos anos finais, sobretudo do quarto ciclo do ensino fundamental para o ensino da função no ensino médio.

2.4.3 A função afim à luz da BNCC

Em uma visão histórico dialética da educação, A BNCC, incorpora as experiências e ensinamentos dos PCN e dos PCNEM, passando não mais ter como norte o ensino por meio Resolução de Problema, porém, incorpara este entendimento como processo e propõe uma visão contemporânea do desenvolvimento do ensino por meio de competências articuladas com habilidades que cada área de conhecimento deve possuir. Desta maneira,

> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida

[6] Ibid., 2000, p. 54.

> cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. (BRASIL, 2018, p. 13).

Ao se referir à constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores este documento normativo estima por uma concepção de educação de formação integral. Isto é, o compromisso da educação na BNCC em um contexto histórico e cultural são com as mudanças que ocorrem com velocidades aceleradas, em razão dos avanços digitais e tecnológicos nas diversas áreas de conhecimento. Assim sendo, a BNCC sinaliza para uma Educação Integral que reconheça o "comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável, requer muito mais do que o acúmulo de informações". Nesta ótica, a educação básica deve

> [...] visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades. Além disso, a escola, como espaço de aprendizagem e de democracia inclusiva, deve se fortalecer na prática coercitiva de não discriminação, não preconceito e respeito às diferenças e diversidades. (BRASIL, 2018, p. 14).

Percebe-se que a valoração da pessoa como pessoa e suas dimensões pisco-sociais precisam ser consideradas, certamente, evitaria no âmbito da escola à propagação de preconceito, racismo, ódio e outros.

A dimensão da educação integral tanto dos anos do ensino fundamental e médio, perpassa pelo processo de ensino e aprendizagem do professor e precisa estar atento na condução e na reflexão acerca de atitudes, valores, convivência social. Ou seja:

> Independentemente da duração da jornada escolar, o conceito de educação integral com o qual a BNCC está comprometida se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea. Isso supõe considerar as diferentes infâncias e juventudes, as diversas culturas juvenis e seu potencial de criar novas formas de existir (BRASIL, 2018, p. 14).

Desta maneira, percebe-se que a BNCC “reconhecem que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica” (BRASIL, 2018, 16).

Para o ensino de matemática do ensino fundamental a BNCC dá um destaque especial. A princípio, é imprescindível esclarecer que a BNCC e currículos formais apresentam proposições comuns, dentre elas, podemos citar: contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas (BRASIL, 2018).

Para um melhor entendimento do ensino da matemática pelo viés da BNCC, faz se necessária a compreensão de alguns novos termos inseridos no corpo desse documento normativo, que são habilidades de aprendizagem? Objetos de conhecimento? e as Unidades temáticas? As respostas a estes termos estão também na BNCC, assim sendo:

a) Habilidades de aprendizagens: no corpo da BNCC está subentendida como aprendizagens essenciais esperadas para cada disciplina e ano, segundo BRASIL (2018, p. 29) “as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares”. É representada obedecendo uma certa estrutura, como exemplo, veja o que está na habilidade EF09MA06:

Compreender	as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e	utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Verbos que explicitam os processos cognitivos envolvidos na habilidade.	**Complemento** do(s) verbo(s), que explicita o(s) objeto(s) de conhecimento mobilizado(s) na habilidade.	**Modificadores** do(s) verbo(s) ou do complemento do(s) verbo(s), que explicitam o contexto e/ou uma maior especificação da aprendizagem esperada.

Fonte: Autora, 2021.

Cada parte do código das habilidades também tem seu significado:

EF 09 MA 06

O primeiro par de letras indica a etapa de Ensino Fundamental.

O primeiro par de números indica o ano (01 a 09), a que se refere a habilidade, neste caso, 9º ano.

O segundo par de letras indica o componente curricular. MA: Matemática.

O último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou do

Desta maneira, esta estrutura segue para as outras habilidades de matemática e dos demais componentes curriculares, porém, com ressalvas:

> Também é preciso enfatizar que os critérios de organização das habilidades do Ensino Fundamental na BNCC (com a explicitação dos objetos de conhecimento aos quais se relacionam e do agrupamento desses objetos em unidades temáticas) expressam um arranjo possível (dentre outros). Portanto, os agrupamentos propostos **não devem ser tomados como modelo obrigatório para o desenho dos currículos**. Essa forma de apresentação adotada na BNCC tem por objetivo assegurar a **clareza**, a **precisão** e a **explicitação** do que se espera que todos os alunos aprendam no Ensino Fundamental, fornecendo orientações para a elaboração de currículos em todo o País, adequados aos diferentes contextos. (BRASIL, 2018, p. 31, grifo do autor).

b) Objetos de conhecimento: para a BNCC este termo não se reduz somente aos conteúdos, mas também a conceitos e processos. Entende-se a definição do termo conceito como sendo “formulação de uma ideia por palavras; definição [ou] parte da charada, logogrifo, etc., na qual se dá a chave para a solução”;” (FERREIRA, 2012, p. 233); já o termo processo: “modo por que se realiza ou executa uma coisa; método, técnica”[7]. No caso do ensino da matemática envolvem alguns processos cognitivos, como calcular, identificar, descrever, representar, equacionar e sistematizar.

c) Unidade temática – Das leituras da BNCC depreende-se que a unidade temática representa os cinco blocos de conhecimentos temáticos definidos em cada componente curricular os quais serão desenvolvidos pelas escolas de

[7] Ibid., 2012, p. 711.

acordo com a proposta política pedagógica de cada uma. Por exemplo, no componente curricular de matemática são as cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Unidades e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Nesta linha de conhecimento se tem a organização das unidades temáticas dos componentes curriculares, aqui, com a ênfase no ensino de matemática do 9.º ano, conforme quadro 3 abaixo ou com mais detalhes no anexo A, no final deste trabalho.

Quadro 3 - Unidades Temáticas – 9º ano do Ensino Fundamental

UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
Números	4	5
Álgebra	4	4
Geometria	3	3
Grandezas e medidas	4	7
Probabilidade e estatística	4	4

Fonte: Autor, 2021.

Ressaltamos que os cinco grupos acima citados são trabalhados em todos os anos do ensino fundamental, ou seja, do 1.º a 9.º ano. Citamos ainda outra mudança importante na BNCC foram as competências específicas por componente curricular, no caso em questão, são 8 competências para o ensino fundamental no componente curricular de matemática, quais sejam:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, BNCC, 2018, p. 267).

As 8 competências específicas acima foram pensadas de forma ampla e propostas para fomentar um ensino qualitativo e significativo. Em linhas gerais essas competências estão em consonância com a formação integral, holística do sujeito. Caso chegue ao final do 9.º ano com essas competências adquiridas, seguramente, o governo, a secretaria de educação, a escola, o professor e a comunidade escolar, sobretudo, os alunos tiveram êxitos. Entretanto, dados de avaliações de larga escala demonstram até agora, que isto não ocorreu, conforme será demonstrado mais adiante.

É notório que as oito competências por si só não são suficientes para garantir um ensino de qualidade, mas articuladas com os objetos de conhecimento e concatenadas com as respectivas habilidades com boas estratégias de ensino, podem sim, fazer diferença para melhorar o desempenho dos índices de aprovação no 9.º ano e nos demais anos da educação básica.

Como já mencionado, a função afim está proposta no ensino da Álgebra. Este é um dos cinco blocos e/ou unidades temáticas que o seu aprendizado contribui para o entendimento lógico matemático, tanto o pensamento dedutivo como o pensamento indutivo. Desta maneira, dedutivo porque, o alunado precisa entender o contexto matemático para calcular, equacionar, escrever a função e propor situações-problema e soluções; indutivo pois, requer desse público-alvo a condição cognitiva de expressar o raciocínio lógico matemático de forma abstrata por meio de letras e números, que possam representar um entendimento da percepção da realidade e seja capaz de solucionar problemas do cotidiano. Assim sendo, a Álgebra (BRASIL, 2018, p. 270), é

> [..] essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas,

> para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados.

É interessante perceber as recomendações para o ensino da Álgebra do Guia do Livo didático PNLD – 2020 para a Matemática, nele consta que:

> Nos anos finais, há ampliação dessa unidade temática, que passa a **contemplar os significados de variável e incógnita**, suas aplicações e significados, assim como ideias de regularidades de uma sequência, generalização de propriedades, valor desconhecido em uma sentença algébrica, equações polinomiais de 1º e 2º grau, inequações de 1º grau, sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, resolução de **problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, resolução de problemas** que envolvam a partição de um todo em partes proporcionais, **funções (afim e quadrática)** e suas representações. (BRASIL, 2020, p. 3, grifo nosso).

É fundamental essa transição do pensamento matemático com números para o raciocínio algébrico, por exemplo, o entendimento da expressão numérica com números racionais, para a compreensão da expressão algébrica, com variáveis ou, às vezes, apenas como incógnita, ou seja, valor desconhecido. Isso ocorre porque é no 9.º ano que esse raciocínio é reforçado para ser aprimorado no ensino médio e, posteriormente, na faculdade.

Neste contexto, no subtópico a seguir discorreu sobre o ensino da função afim no 9.º do ensino fundamental pela perspectiva do currículo de matemática em vigência na cidade de Altamira-PA e no Estado do Pará.

2.4.4 A função afim à luz da matriz curricular do Estado do Pará

A Secretaria de Estado da Educação (SEDUC/PA), está regularmente atuando na organização do sistema de ensino do Estado do Pará, seguinte os pareceres e normas do Conselho Estadual de Educação do Estado do Pará -CEE-PA, ambos documentos oficias estão alinhados e em sinergia com a legislação em vigor do Brasil, a saber: Constituição Federal de 1988, LDBEN 9.394/96 e atualmente, adequou-se ao ensino pela normativa da BNCC (2018) proporcionando uma nova Matriz Curricular para o Ensino Médio do Pará, formatada a partir da organização curricular por área do conhecimento.

O Estado do Pará, por meio da SEDUC/PA, traz no bojo do documento curricular para o ensino infantil e fundamental, em relação ao papel da Matemática, como sendo:

> [...] Um papel fundamental para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar logicamente, comunicar-se, argumentar e recorrer aos conhecimentos matemáticos para a compreensão e atuação no mundo garantindo ao sujeito o acesso à cidadania.
> Nesse sentido, a Matemática como um conhecimento histórico e socialmente construído e formalizado, serve para promover o empoderamento do educando como cidadão do mundo, valorizando interesses, estimulando a curiosidade e desenvolvendo o espírito científico e nessa perspectiva o conhecimento matemático se torna imprescindível para a tomada de decisões dos sujeitos, sejam estas simples ou complexas. (PARÁ, 2019, p. 290).

Desta maneira, a proposta do ensino da matemática ganha significado e a aplicação do raciocínio lógico matemático traz novas perspectivas para quem está aprendendo, traz o entusiasmo. Neste sentido, o próprio documento curricular reforça que, segundo Boaler; Munson; Williams (2018), os alunos são inspirados pela criatividade que se torna possível quando a matemática é visual e investigativa; eles ficam empolgados ao experimentar a matemática dessa maneira e se beneficiam com a oportunidade de colaborar com suas ideias e criatividade individuais para a solução dos problemas e para o espaço de aprendizagem e à medida que vão se desenvolvendo em sua compreensão da matemática, podemos encorajá-los a ampliar e a generalizar suas ideias por meio do raciocínio, da justificação e da comprovação. Esse processo aprofunda a compreensão dos alunos e os ajudam a cumprir sua aprendizagem.

Na parte do ensino fundamental a proposta do Documento curricular da SEDUC voltado para o ensino da função, dentre ela a função afim. É pautado mais nos tópicos dos estudos de Álgebra, percebido na passagem do recorte do Documento Curricular abaixo:

Figura 14 - parte do currículo de matemática 9.º ano

MATEMÁTICA			
9.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL			
Eixo	**Subeixo**	**Objetivos de aprendizagem**	**Habilidades**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS COMUNICATIVAS	1. A Matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade	1.1 Interpretar e aplicar a linguagem matemática na elaboração e resolução de problemas	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática	1.1 Utilizar o conhecimento matemático	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa

	com a vida social.	na modelação e resolução de problemas sociais.	entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: Pará (2019).

Ao analisar o texto das habilidades (EF09MA06) e (EF09MA08) não percebemos a expressão “função afim”, contudo, os livros didáticos de matemática ao abordar tais habilidades, traz no bojo de seus conteúdos a função afim e suas características e aplicações.

Outro ponto relevante é o eixo estrutural da organização da abordagem matemática no Documento Curricular do Estado do Pará, que propõe o pensamento da resolução de problema como intervenção em situações sociais políticas, econômicas, dentre outras. Em síntese esse documento oficial, compreende,

> Portanto, as atividades matemáticas desenvolvidas no Ensino Fundamental, seja nos anos iniciais ou nos anos finais, assim como no Ensino Médio devem valorizar a resolução de problemas, por meio de atividades investigativas que levem o aluno a visualização e a utilização desse conhecimento no contexto social (PARÁ, 2019, p. 266).

No tocante ao Ensino Médio no Estado do Pará, o Documento Curricular apresentado ao CEE/PA para avaliação e aprovação, apresenta várias configurações curriculares, no sentido de atender os diferentes tipos de ofertas e modalidades de ensino presentes nas escolas públicas estaduais de responsabilidade da SEDUC/PA. Entretanto, aqui vamos apresentar a área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias. O desenho do documento curricular se dá com a seguinte estrutura:

Figura 15- Princípios Curriculares da Educação básica paraense

<table>
<tr><th colspan="12">PRINCÍPIOS CURRICULARES NORTEADORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA PARAENSE</th></tr>
<tr><td colspan="4">Respeito às Diversas Culturas Amazônicas e Suas Inter-Relações no Espaço e no Tempo</td><td colspan="4">Educação para a Sustentabilidade Ambiental, Social e Econômica</td><td colspan="4">A Interdisciplinaridade e Contextualização no Processo Ensino-Aprendizagem</td></tr>
<tr><th colspan="12">ÁREA DE CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Números e Álgebra</td><td colspan="3">Grandezas e Medidas</td><td colspan="3">Geometria</td><td colspan="3">Probabilidade e Estatística</td></tr>
<tr><th colspan="12">EIXOS ESTRUTURANTES</th></tr>
<tr><td colspan="3">Investigação Científica</td><td colspan="3">Processos Criativos</td><td colspan="3">Mediação e Intervenção Sociocultural</td><td colspan="3">Empreendedorismo Social</td></tr>
<tr><th colspan="4">COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS</th><th colspan="4">HABILIDADES</th><th colspan="4">OBJETOS DE CONHECIMENTO</th></tr>
</table>

Fonte: Pará, 2021.

A estrutura organizacional do Documento Curricular para o Ensino médio no Estado do Pará, apresenta a seguinte estrutura conforme a tabela acima: traz três princípios norteadores da educação básica, quais sejam: Respeito às Diversas

Culturas Amazônicas e Suas Inter-Relações no Espaço e no Tempo; Educação para a Sustentabilidade Ambiental, Social e Econômica; e A Interdisciplinaridade e Contextualização no Processo Ensino-Aprendizagem. Ressaltamos que aqui estamos abordando a área do conhecimento “Matemática e suas Tecnologias”, contudo, estes princípios são transversais as demais áreas de conhecimento, isto é, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza d suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Quanto às unidades temáticas, esse documento propõe as 5 unidades, divididas em quatro grandes grupos: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria e Probabilidade e Estatística. Além disso, traz quatro eixos estruturantes da filosofia do ensino educacional para faixa etária, que são: Investigação científica, Processos Criativos, Mediação e Intervenção Sociocultural e Empreendedorismo Social. Tanto estes eixos como aquelas unidades temáticas, não entraremos em maiores desdobramentos, porém, o foco recai com maior ênfase na álgebra, em virtude do objeto da nossa pesquisa sobre função afim.

Assim sendo, abaixo o que este documento oficial traz em sua estrutura acerca da função afim.

Quadro 4 - Matemática e suas tecnologias

<table>
<tr><th colspan="4">ÁREA DE CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS</th></tr>
<tr><th>Números e Álgebra</th><th>Grandezas e Medidas</th><th>Geometria</th><th>Probabilidade e Estatística</th></tr>
<tr><td>CE1-Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para a formação humana integral.</td><td>(EMIFMAT01) Identificar, investigar e analisar situações-problemas associando conhecimentos matemáticos para resolução em uma dada situação, através de modelos matemáticos.</td><td colspan="2">- Funções: conceitos, definições, representações algébricas e gráficas e suas aplicações em diversos contextos.</td></tr>
<tr><td>CE3- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos</td><td>(EMIFMAT03) Identificar, analisar e/ou avaliar situações problemas de</td><td colspan="2">- Tabelas e gráficos: uso e leitura de informações em diversos contextos.</td></tr>
</table>

contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	natureza histórica, social, econômica, política, e/ou cultural nas dimensões individual, local, nacional e global, recorrendo à linguagem matemática e seus objetos para solucionar tais situações-problemas.	
CE5-Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EMIFMAT05) - Identificar, investigar e analisar informações contidas em contas diversas (água, luz, energia, telefonia, faturas de cartões de crédito, entre outros) por meio de conhecimentos matemáticos e das ciências da natureza para o exercício da cidadania. (EMIFMAT06) - Levantar e testar hipóteses sobre as variáveis que interferem na explicação de uma situação-problema reelaborando modelos com auxílio da linguagem matemática e das ciências da natureza para analisá-la e avaliar seu alcance e possibilidade de generalização.	- Proporcionalidade direta e inversa. - Linguagem de programação em algoritmos; uso de linguagem matemática. - Modelagem de situações por meio de uma reta. - Progressões aritméticas e suas relações com a função afim

Fonte: Pará (2021, adaptada).

Desta forma, depreendemos que a educação básica no Estado do Pará está respaldada nos Documentos Curriculares (2019, 2021) e tanto o ensino fundamental (nono ano), como o ensino médio no campo da matemática, nestes documentos oficiais, o estudo de funções, dentre elas, o da função afim, configurou conteúdos lógicos matemáticos imprescindíveis para a formação cognitiva e cidadã do alunado, pois, com estes conhecimentos certamente, poderá contribuir para uma sociedade cada vez mais qualificada e com soluções para várias problemáticas de contextos diversos, um exemplo, o uso da função para avaliar a taxa de alta da inflação, ou de um determinado produto.

2.4.5 A função afim à luz da matriz curricular da cidade de Altamira-PA

O município de Altamira, no Estado do Pará, já dispõe do Conselho Municipal de Educação (CME), estabelecido pela Lei 3.085/2012. Além disso, possui uma Secretaria Municipal de Educação (SEMED) com sede própria e o Documento Curricular Municipal. Neste documento, o ensino fundamental é compreendido da seguinte maneira:

> Como segunda etapa da composição da Educação Básica, o Ensino Fundamental é a etapa de maior influência na formação dos estudantes se considerado o tempo de duração – nove anos, organizados em um Ciclo de Alfabetização, composto pelos três anos iniciais, seguidos dos demais anos. As crianças ingressam nela aos seis anos completos e saem aos quatorzes anos; isso significa dizer que dentro desta etapa de ensino, os estudantes passam por mudanças substanciais de vida, isto é, passam por transformações biológicas e intelectuais e, que, certamente, devem ser consideradas no processo de ensino e de aprendizagem. (ALTAMIRA-PA, 2021, p. 115).

No município de Altamira-PA, teve uma proposta de currículo para a educação municipal aprovada, antes de adentrar na parte específica da função afim proposta para o 9.º ano, veja como a secretaria municipal concebe o sujeito em seu documento oficial:

> Assim, o sujeito é constituído de corpo, mente sentimento e espírito. Um sujeito que está inserido na história, em sua dimensão social e que deve educar-se ao longo da vida, que deve aprender a sobreviver num mundo de conflitos, num contexto de diversidades e de transformações constantes e que deve entender que o que o distingue do outro é sua capacidade de consciência e de reflexão (MORAES, 2003, ALTAMIRA-PA, 2021, p. 119).

Percebemos assim, que a concepção de ensino está alinhada a proposta filosófica na visão histórico-dialética. E que o ensino precisa contribuir para a formação do cidadão crítico-reflexivo e proativo.

No que tange ao ensino da função, este tema está proposto para o 3.º bimestre, conforme a quadro 5. É importante destacar que a estrutura da proposta curricular do município de Altamira-PA, se assemelha a proposta curricular do ensino médio. Uma diferença entre a matriz curricular e as unidades temáticas da BNCC para o 9.º ano está no termo “objetivos de aprendizagens”, pois este termo consta para o ensino médio, no caso de Altamira, para o ensino fundamental.

Outra observação é que a matriz curricular é enviada para todas as escolas, portanto, o professor/a deve segui-la, e adequando ao seu plano de curso, apenas os conteúdos que segundo a escolha do professor possam desenvolver as habilidades propostas, particularmente, a habilidade (EF09MA06), já estudada anteriormente.

Quadro 5 - Estudo de função na matriz curricular da cidade de Altamira-PA, 2021.

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL				
3º BIMESTRE				
EIXO	**SUBEIXO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**	**HABILIDADES**	**UNIDADES TEMÁTICAS**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS	1. A matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade.	1.1 Interpretar e aplicar a linguagem matemática na elaboração e resolução de problemas.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	**ÁLGEBRA**
4º BIMESTRE				
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática com a vidasocial.	1.1 Utilizar o conhecimento matemático na modelação e resolução de problemas Sociais.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	**ÁLGEBRA**

Fonte: Secretaria de Educação Municipal de Altamira-PA (SEMED), 2021, p. 609. (Adaptada).

O recorte da matriz curricular do município de Altamira-Pa, quadro 5, não traz especificamente a expressão “função afim”. Entretanto, as habilidades EF09MA06 e EF09MA08 trazem em seus textos referências às funções, dentre elas, como conteúdo do 9.º ano, para atender essas respectivas habilidades, temos a função afim.

Podendo ser comprovada de forma imediata com uma simples consulta aos livros didáticos de Matemática do 9.º ano do ensino fundamental.

2.5 Função afim sobre a ótica dos docentes em relação a compreensão dos discentes sobre essa temática

Neste tópico trataremos a respeito do entendimento da função afim nas turmas do 9.º ano do ensino fundamental, fundamentados em uma pesquisa, na qual se transformou em um artigo feito por Santos e Santos (2020). Entretanto, ressaltamos que apenas a visão sobre o docente e sobre qual dificuldade dos discentes em reconhecer os assuntos inerentes a função afim.

Frisamos ainda que a pesquisa foi feita por meio de questionário eletrônico aplicado a 50 professores que atuam na rede pública municipal. Nossa amostra representa cerca de 76% dos professores deste município em atividade na disciplina de Matemática. Sendo o perfil da amostra pesquisada distribuído assim: 60% são masculinos, correspondentes a 30 homens e 40% são femininas, representado por 20 mulheres.

Desta maneira, “com base na experiência dos professores participantes, foi perguntado qual o grau de dificuldade da maioria dos estudantes para aprender os assuntos de função afim” (SANTOS E SANTOS, 2020), a pesquisa revelou os seguintes dados, conforme o quadro 6 a seguir:

Quadro 6 - Nível de dificuldade encontrado pelos alunos.

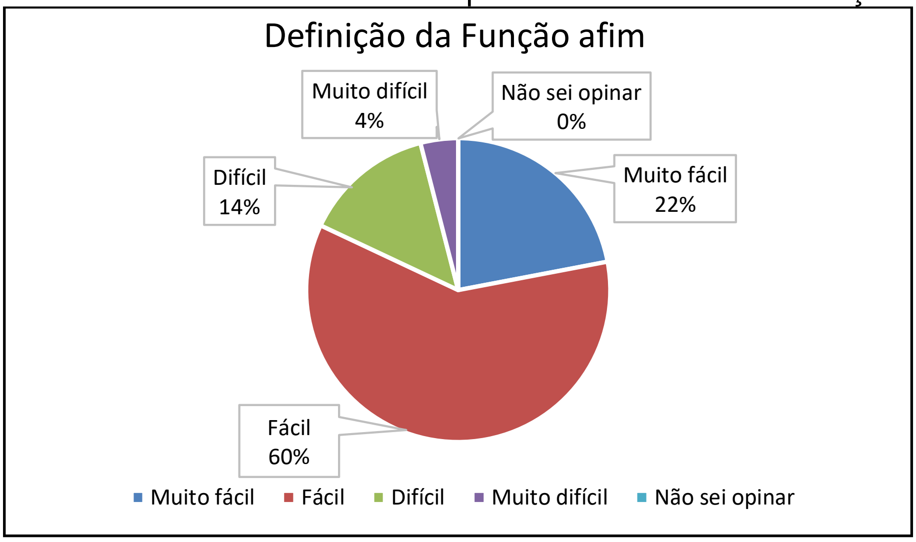
Conteúdo	**Muito fácil**	**Fácil**	**Difícil**	**Muito difícil**	**Não sei opinar**
Definição da Função afim	11	30	7	2	0
Gráfico da Função afim	3	35	10	2	0
Identificar gráfico da Função afim	3	30	15	2	0
Construção de gráfico de Função afim	3	23	20	4	0
Identificar o coeficiente angular da Função afim	5	20	18	5	1
Identificar o coeficiente linear da Função afim	7	17	21	5	0
Domínio da Função afim	5	21	18	5	1
Imagem da Função afim	3	21	20	5	1
Condição para a função afim ser crescente	6	27	15	2	0
Condição para a função afim ser decrescente	7	28	13	1	1
Determinação da Lei da função afim a partir do seu gráfico de uma reta	1	13	29	9	1
Determinação da Lei da Função afim a partir de dados tabelados	0	9	34	6	1
Determinação da Lei da Função afim a partir das coordenadas de 2 pontos do seu gráfico	1	8	32	8	1
Estudo do sinal da Função afim	1	21	23	4	1
Zero da Função afim	4	30	12	2	2
Aplicações da Função Afim em situações-problemas	1	16	22	10	1

Caracterização da função afim a partir de um conjunto de pontos	0	16	21	12	1

Fonte: Santos e Santos (2020, p. 8)

O quadro 6 acima com 17 questões concernentes à função afim, foi apresentado a 50 participantes. As alternativas foram classificadas em 4 níveis crescentes de dificuldades (Muito fácil, Fácil, Difícil, Muito difícil) com uma opção de “Não sei opinar”. Os resultados serão analisados por questões, organizadas em gráficos de setores para efeito desta dissertação. As respostas ficaram assim distribuídas.

Gráfico 6 - Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim

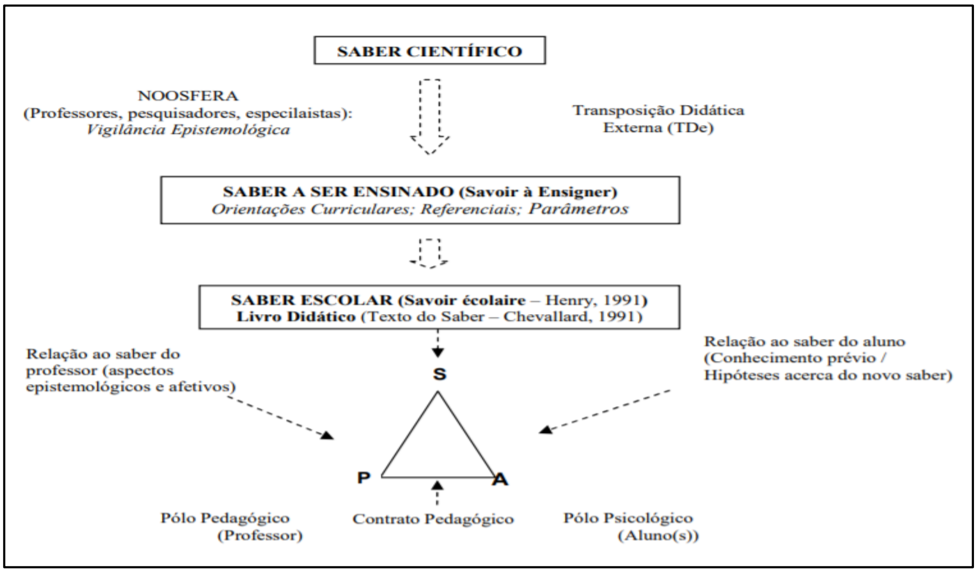


Fonte: Autor, 2022.

Percebemos que os docentes apreendem que os alunos em sua maioria (60%) entendem como fácil a “definição de função afim”; 22% compreendem como muito fácil; 14% difícil e 4%, segundo a interpretação docente considera muito difícil a “definição de desta função”.

Neste sentido, faz se necessário, o entendimento de estratégias didáticas para àqueles que sentem dificuldades. Desta maneira, ao fazer uma transposição didática, pode vir contribuir para o entendimento e aprendizado de alguns alunos. Em geral a transposição didática pode ser entendida por meio da ilustração abaixo:

Figura 16- Esquema da trajetória do Saber na Transposição Didática

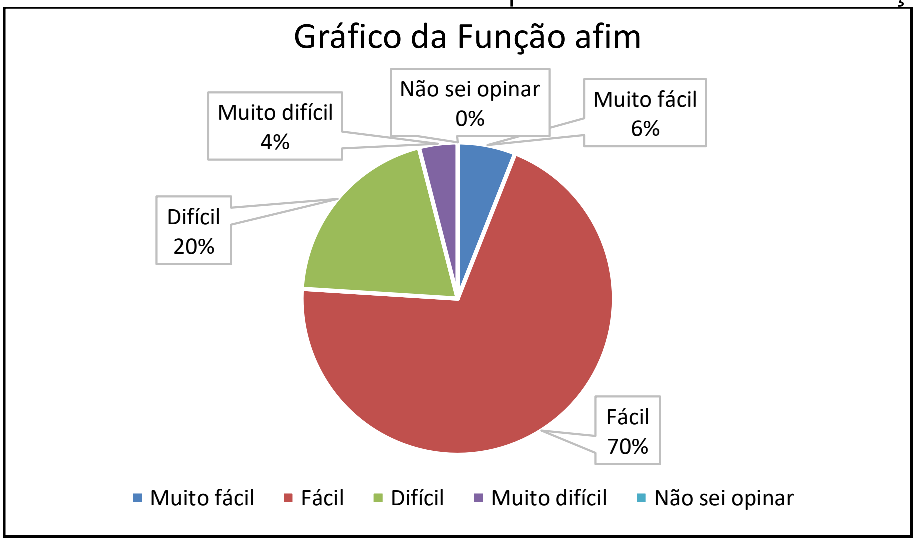


Fonte: Menezes *et. al*. (2008, p. 1193).

Por meio do tripé professor-conhecimento-aluno, não necessariamente nesta ordem. Assim sendo, transposição didática interna é o professor que vai transformar esse saber para os alunos, negociando com eles a sua gestão, os papéis que cada um deverá assumir, para que esse saber possa ser ensinado e aprendido (BRITO MENEZES, 2007 apud MENEZES *et. al*., 2008).

Em relação às respostas dos docentes em função do entendimento dos alunos acerca do gráfico da função afim, os dados podem ser assim apresentados.

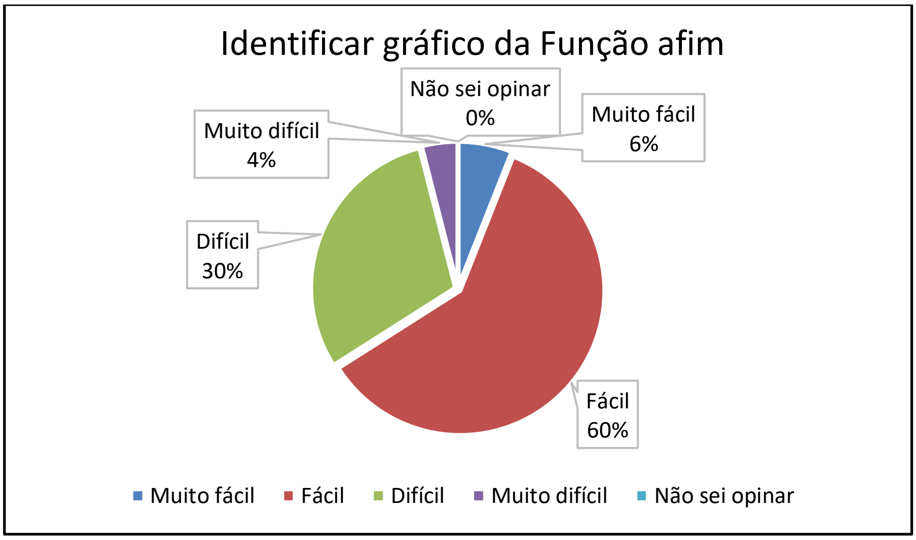
Gráfico 7- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

É notório que nesta pergunta, o nível de facilidade que os professores apontaram quanto a percepção e/ou compreensão dos alunos em relação a interpretação de gráfico da função afim, houve uma melhora em relação à primeira, isto é, 70% dos professores disseram que é fácil para os alunos, identificarem essa função, bem como 6% acham muito fácil; outro ponto a ser considerado é que 10% afirmaram que é difícil para os alunos identificarem o gráfico da função afim e apenas 4% responderam que para alguns alunos é muito difícil identificar este gráfico.

Gráfico 8- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

Depreendemos das respostas acima que os professores mantiveram uma coerência no sentido de afirmar que 60% dos alunos acham fácil identificar gráfico da função afim, entretanto, apresentou uma variação de 16% na interpretação do entendimento dos alunos, comparado com o gráfico 12, na percepção do nível fácil; assim como, aumentou a quantidade de alunos, na interpretação dos docentes, quanto a dificuldades dos discentes entenderem a identificar o gráfico da função afim, comparando ainda com o gráfico 12, a variação foi de 16%, isto é, mantendo a proporção; agora quanto aos níveis “Muito fácil” e “Difícil”, respectivamente, 6% e 4% se mantiveram sem alteração, comparado com o mesmo gráfico 12.

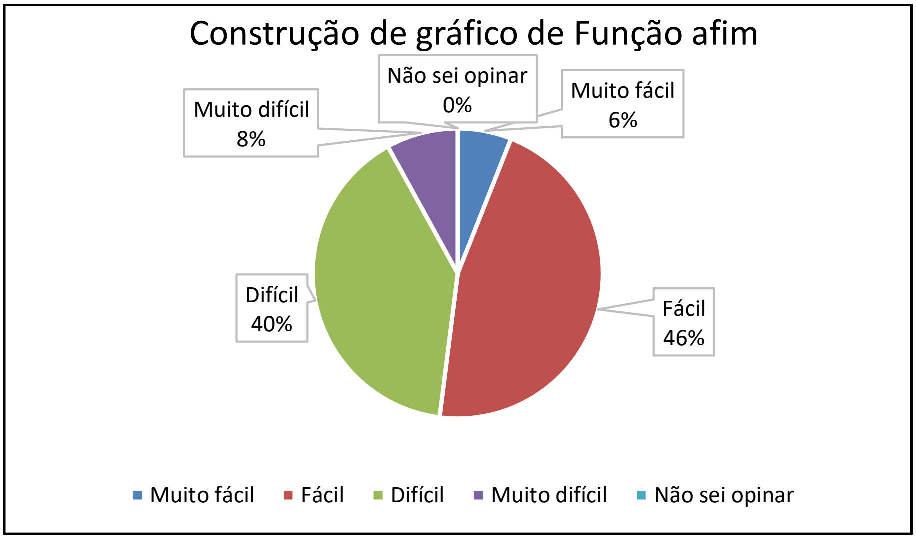
Ressaltamos a importância de se trabalhar de forma contextualizada o ensino por meio de gráficos, construção e análise interpretativa dos dados, pois, certamente, a qualidade do ensino-aprendizagem e o entendimento dos alunos ao se deparar com esses gráficos no dia a dia possam compreendê-los. Consequentemente, o ensino da função em geral contribuir para a percepção e entendimento do raciocínio algébrico para além do ensino da matemática.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre

> grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2002, p.121).

Percebemos assim, que a interpretação da realidade pode ser representada em linguagem matemática, que contribuem para análises e proposições de situações-problema. Neste sentido o gráfico 10 aborda o nível de dificuldade encontrado pelos alunos, na visão dos docentes.

Gráfico 9- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim

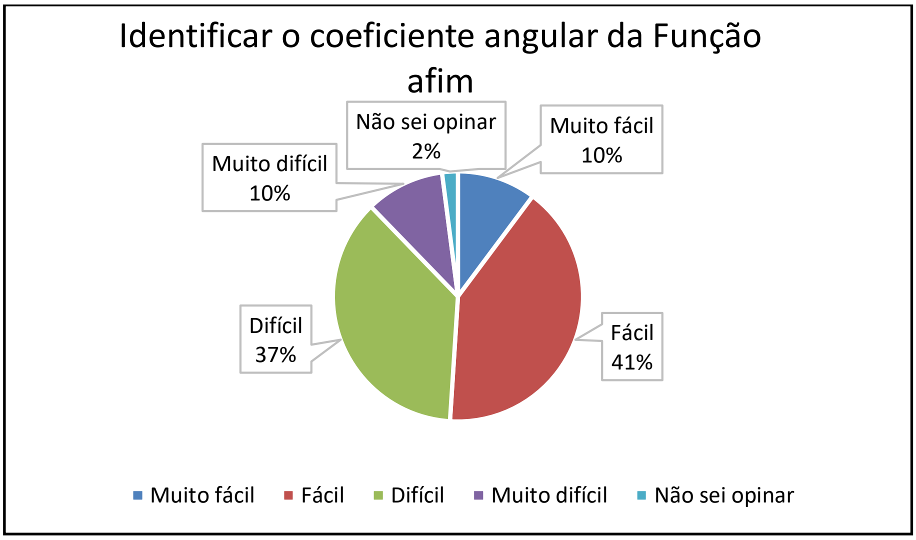


Fonte: Autor, 2022.

No tocante a construção do gráfico acima, percebemos que os docentes concordaram que 46% dos alunos acham fácil e 40% difícil. 8% dos alunos, na visão dos professores acham muito difícil e 6% entendem que é Muito fácil. Por conseguinte, percebemos que no que refere a construção do gráfico, o nível de dificuldade percebido pelos docentes, já é relevante, logo, é um ponto a ser considerado para os planejamentos de intervenções nas aulas. Esta questão será abordada na sequência didática juntos aos alunos do 9.º ano do ensino fundamental.

No que tangem a identificação do coeficiente angular e/ou a taxa de variação de crescimento ou decrescimento de um gráfico da função afim os dados são bem próximos no entendimento da compreensão de ser difícil para os alunos, com um leve aumento de 2% para aqueles que acreditam ser muito difícil, se confrontado com os dados do gráfico 11, na página seguinte.

Gráfico 10- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim

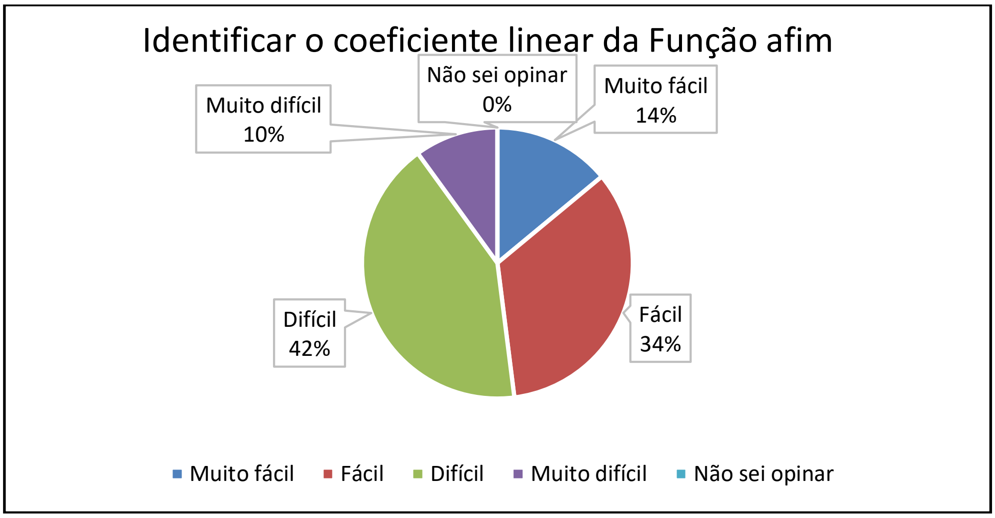


Fonte: Autor, 2022.

Percebemos que 41% dos alunos, na opinião dos professores acham fácil identificar o coeficiente angular da função afim; ressaltamos que 37% consideram difícil a identificação do coeficiente angular dessa função; e 10% consideram ambos muito fácil e muito difícil; apenas 2% não souberam opinar a respeito da dificuldade dos alunos em relação a esse entendimento.

Por entender, que o quantitativo que considerou difícil essa questão apresenta um índice alto, frisamos que o entendimento destes elementos dentro de uma função afim, é essencial para a interpretação da situação-problema. Dito isto, Magarinus (2013), parafraseando Pais (2002) diz que o ensino da matemática deve priorizar a construção e a compreensão dos conceitos, proporcionando atividades significativas e possibilitando aos alunos fazer perguntas, observações, comparações e constatações sobre o objeto em estudo para, finalmente, chegar as definições formais.

Gráfico 11- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim

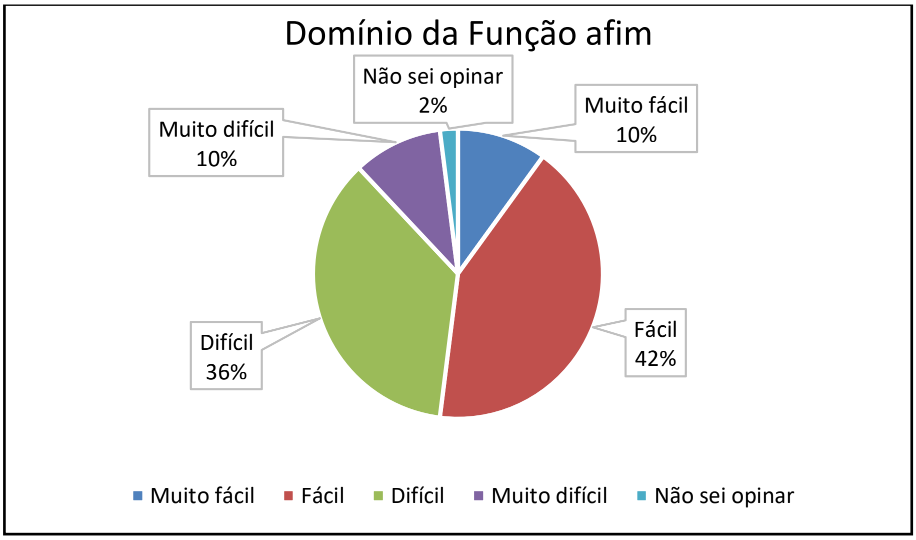


Fonte: Autor, 2022.

No que tange ao coeficiente linear da função afim 34% dos professores acreditam que os alunos acham fácil a identificação deste termo, 42% consideram difícil, na percepção dos professores, 14% e 10% respectivamente, acham fácil e muito difícil, e não houve quem não soubesse opinar.

Uma outra observação que se faz acerca destes resultados é a diferença no grau de dificuldade da compreensão dos docentes sobre a capacidade de identificar o coeficiente linear, que como percebido no gráfico 12, foi maior do que o grau de dificuldade para identificar o coeficiente angular. Ressaltamos por ser um elemento de fácil percepção dentro de uma função afim, o nível de alunos que acreditam ser difícil é considerável, porém, na seção da sequência didática, veremos se tal compreensão permanecerá ou não, juntos aos alunos do 9.º ano.

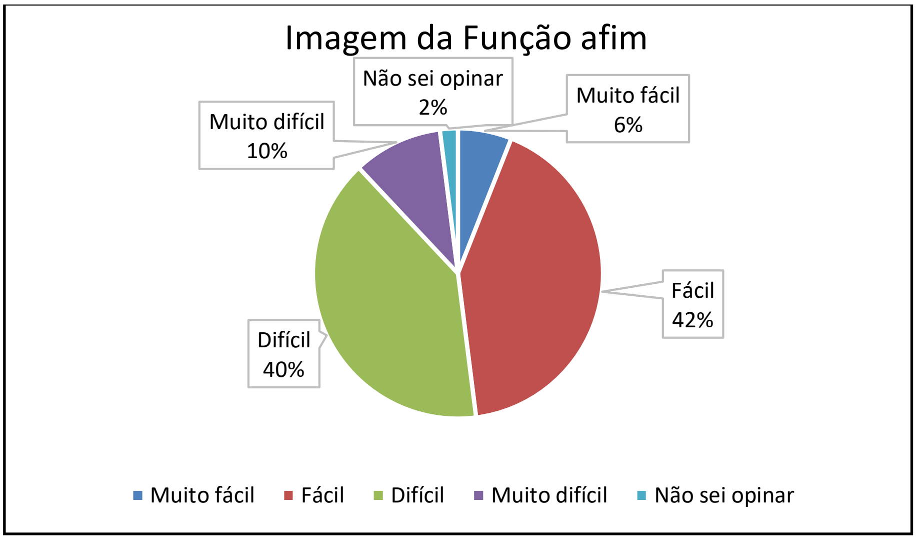
Gráfico 12- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

Segundo 42% dos professores os alunos acham fácil a identificação do domínio da função afim; para 36% dos docentes, os alunos apresentam dificuldades, e para ambos 10% dos professores acham que os alunos muito fácil e muito difícil, neste caso 2% dos participantes, não souberam opinar.

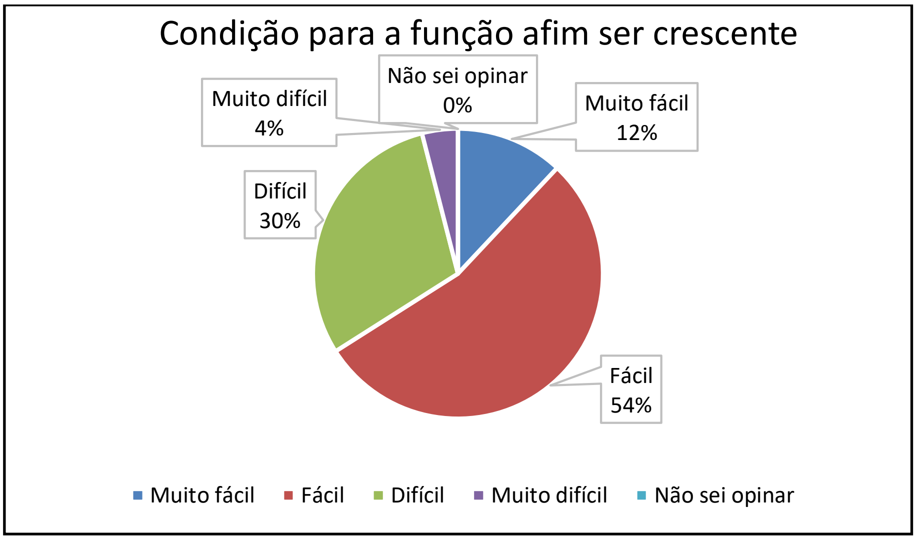
Gráfico 13- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

A observação do gráfico 14, demonstra que 42% dos pesquisados concordam que os alunos têm facilidades para identificarem a imagem da função afim, 40% acreditam que os alunos tem dificuldades; 10% acham que para os alunos é muito difícil a identificação destes elementos na função afim; para 6% dos entrevistados, os alunos achariam “Muito fácil” e somente 2% não opinaram sobre o assunto.

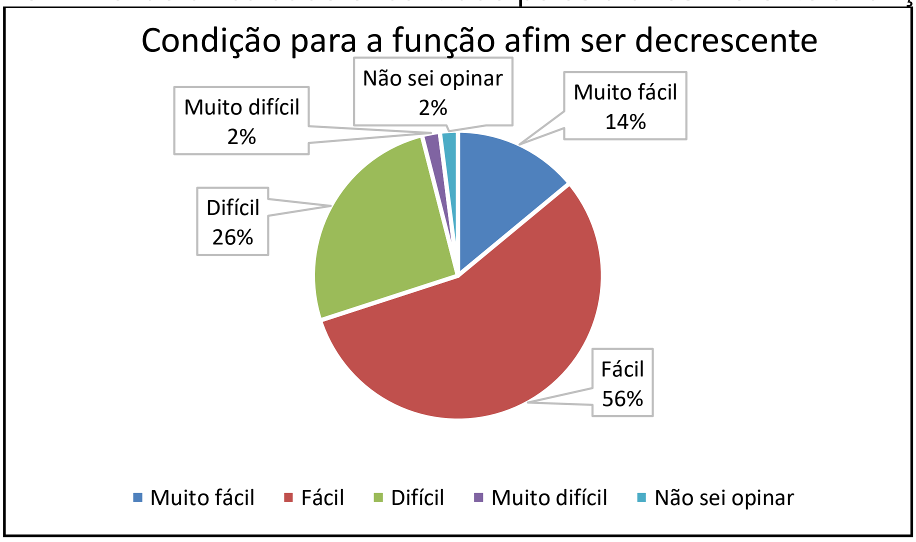
Gráfico 14- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

A respeito da Condição para a função afim ser crescente, para 54% dos professores concordam que é fácil para os alunos, identificarem essa situação; para 30% acreditam que os alunos teriam dificuldade; 12% concordam que é muito fácil e para 4% seriam “Muito difícil”.

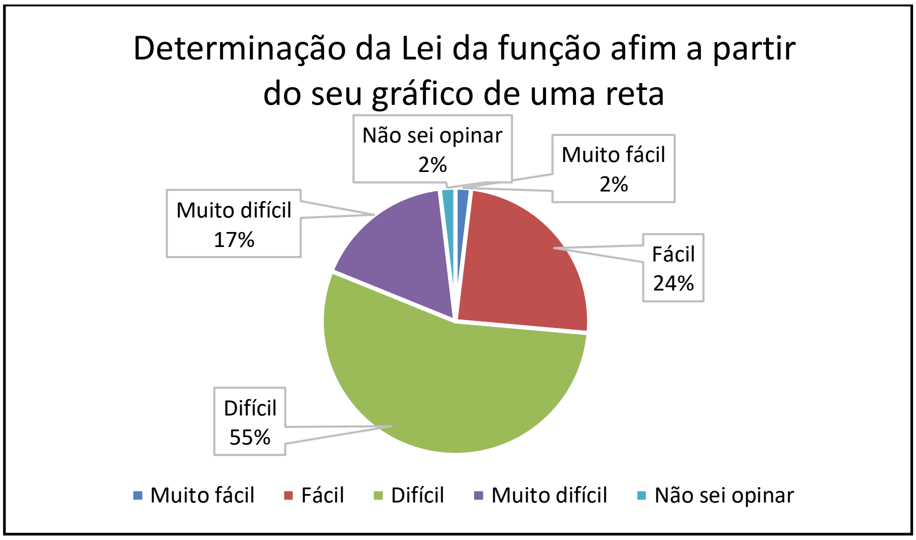
Gráfico 15- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

Para 56% dos pesquisados os alunos achariam fácil perceber a condição de uma função afim crescente, 26% encontrariam dificuldades; 14% entenderiam como muito fácil, 2% muito fácil e 2% não opinaram. Entendendo, que não há a necessidade de resolver a função para entender que ela é crescente ou não, é preocupante 26% dos professores considerarem que os alunos apresentariam dificuldades.

Gráfico 16- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

A respeito da determinação da lei da função afim, tendo como base o gráfico, 55% dos professores acreditam que os alunos teriam dificuldade, para 24% seria fácil os alunos identificarem, 2% teriam dificuldade, 2% teriam muito dificuldade e 2% não souberam opinar.

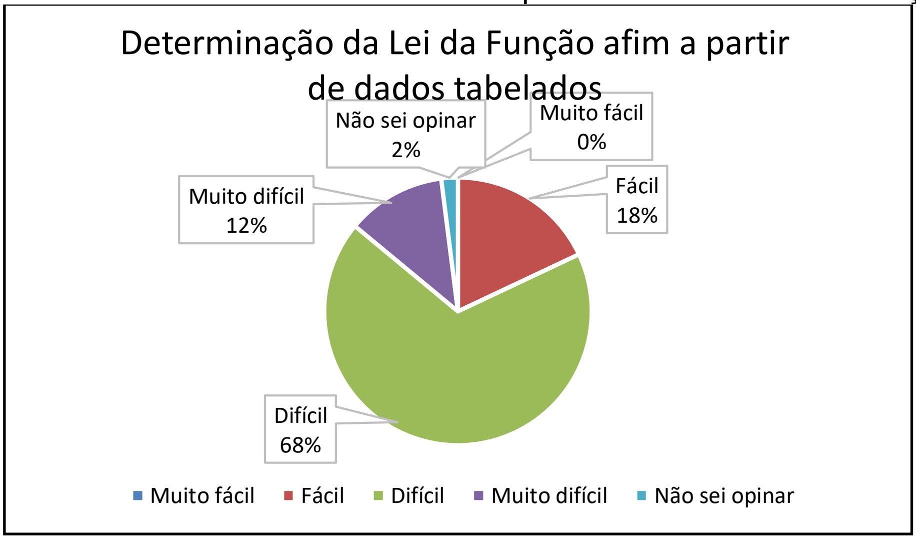
Frisamos que geralmente, a pesquisa da área demonstra essa dificuldade dos alunos em determinar a lei da função apenas com análises de gráficos. Contudo, cabe aos professores contemporâneos superar estes gargalos, pois, ensinar de forma significativa traz uma perspectiva de pertencimento, ou sentimentos de saber que é possível e alcançável o conhecimento matemático. Desta maneira, para Sá (2009, p. 23):

> A participação ativa do estudante no processo ensino-aprendizagem; Compreensão da matemática como um conhecimento humano e que, portanto, deve servir para a melhoria da vida no planeta; A experiência de vida do aluno deve servir de parâmetro para a escolha e desenvolvimento das metodologias de ensino adotadas em sala de aula; A articulação entre compreensão instrumental e compreensão relacional deve implicar na memorização como consequência da construção dos conceitos.

Percebemos, desta maneira, que a contextualização do ensino com as experiencias vivenciadas ou percebidas aos redores do cotidiano da vida dos alunos, proporciona, um aprendizado no ensino da matemática de forma mais prática e útil, desta maneira, acreditamos, que o pensamento abstrato no campo conceitual de matemática, também fica mais tangível a compreensão dos alunos.

Para a determinação da lei da função a partir de dados tabelados os resultados demonstraram que os alunos possuem, na visão dos docentes, um grau de dificuldade maior, conforme expressa o gráfico 17.

Gráfico 17 - Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



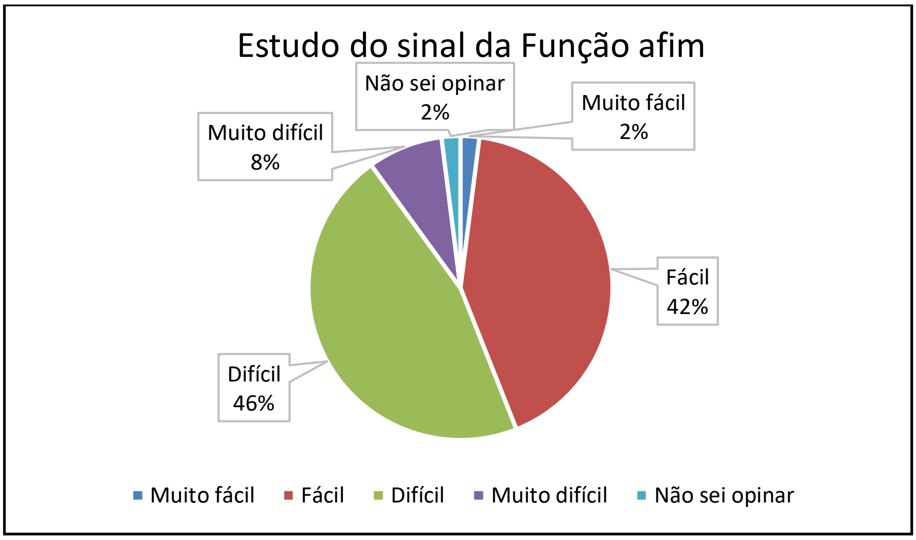
Fonte: Autor, 2022.

Para 68% dos docentes, no que tange a determinação da lei da função a partir de dados tabelados, concordam que os alunos teriam dificuldades, 12% muita dificuldade; 18% afirmaram que seria Fácil" para os alunos determinar a lei da função dentro deste contexto e 2% dos pesquisados concordam que seria muito fácil.

Depreendemos por ser considerado um percentual tão acentuado em relação ao grau de dificuldade neste assunto, que no tópico da sequência didática voltaremos a propor juntos aos alunos atividade com dados tabelados, para confrontarmos o resultado.

O estudo do sinal da função também ficou demonstrou sob a ótica dos professores, que os alunos têm apresentados grau de dificuldade, somado com aqueles que consideram muito difícil chegam a 54%, conforme o gráfico 18.

Gráfico 18- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim

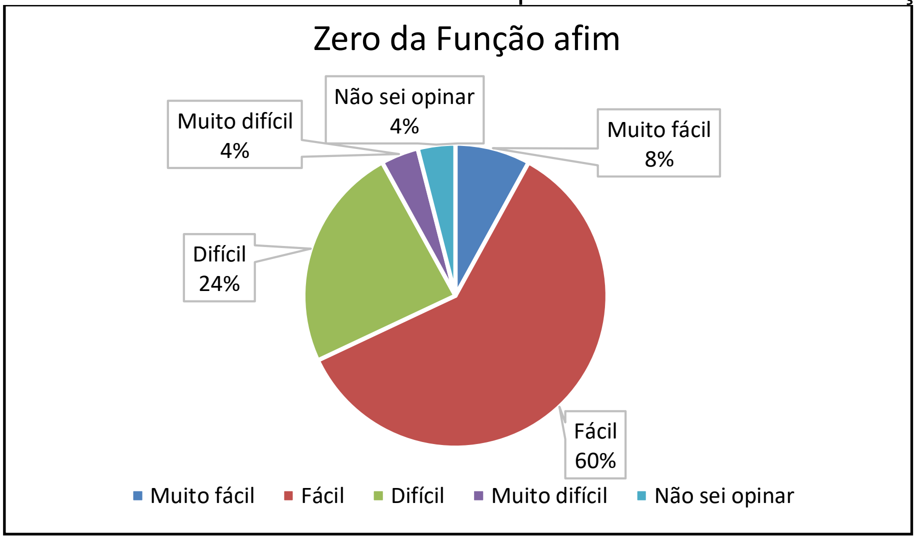


Fonte: Autor, 2022.

Para 46% dos professores os alunos teriam dificuldades em fazer as análises do Estudo do sinal da função afim; 42% colocaram que seria fácil para os alunos, 8% concordam que seria muito difícil para os alunos o Estudo do sinal da função afim, ainda 2% dos entrevistados achariam muito fácil e 2% não opinaram.

Para a questão do zero da função, nas visões dos entrevistados o nível de facilidade demonstra que os alunos apresentam mais facilidade em encontrar a raiz da função afim, os dados do gráfico 19, nos proporcionam esse entendimento.

Gráfico 19- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



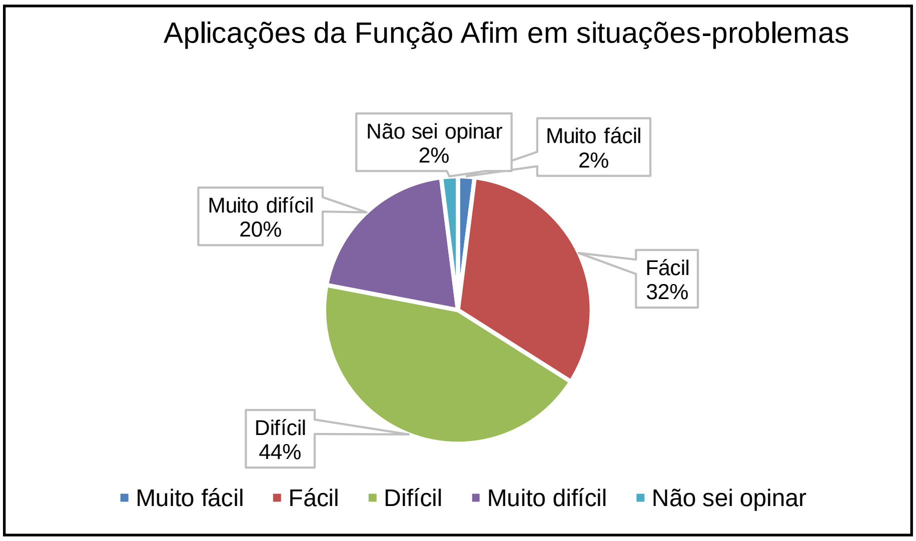
Fonte: Autor, 2022.

A respeito do zero da função afim a pesquisa revelou que 60% dos professores acham que seria fácil os alunos encontrar as raízes da função e/ou zero da função afim; Para 24% dos entrevistados seria difícil para os alunos, 8%

concordam que é muito fácil para alguns alunos e 4% disseram que seria muito difícil e 4% não opinaram.

Para uma melhor compreensão, podemos dizer que o cálculo do zero da função não requer, a princípio, uma visão ampla de abstração matemática, ao contrário, precisa mais de cálculo mecânico, partindo do pressuposto do conhecimento da função afim na forma básica. Agora para aplicação do conhecimento da função afim em contextos, melhor dizendo, para resolver situações-problema do cotidiano, os dados demonstram que os docentes concordam que há um percentual considerável na dificuldade dos alunos, vejamos o gráfico 20.

Gráfico 20- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

Em relação às aplicações da função afim para resolver situações-problemas, para 44% dos docentes seria difícil para os alunos aplicar dentro deste contexto o entendimento da função afim e resolver problemas; agora para 32% já disseram que seria fácil para alguns alunos fazer uso deste conhecimento matemático e resolver situações-problemas; 20% concordam que seria muito difícil fazer uso deste raciocínio matemático e para 2% seria muito fácil e 2% não opinaram. Neste sentido, o ensino contextualizado, isto é, que considera a realidade na qual o aluno está inserido, propiciaria uma melhor compreensão dos alunos em relação a aplicação deste raciocínio matemático para resolver determinadas situações. Assim sendo, segundo (D´AMBROSIO, 2002, apud SILVA, 2018, p.26).

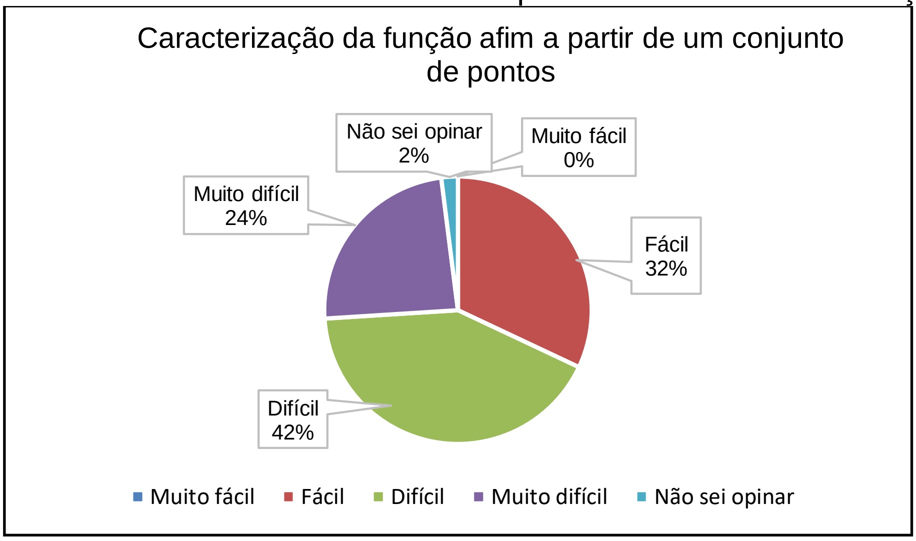
> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando,

> medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando instrumentos materiais e intelectuais que são próprios a sua cultura.

O planejamento da execução do plano de aula precisa considerar os contextos e/ou realidades vivenciadas pelos alunos, ressaltamos que a partir de uma pesquisa oral em sala de aula, o professor pode e deve traçar o perfil de sua turma, para que possa incorporar na sua práxis pedagógica. Desta maneira, para Pais (2002, p. 27) "a contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea".

No que se refere a caracterização da função afim a partir de um conjunto de pontos, o grau de dificuldade praticamente se manteve, contudo, podemos perceber um aumento na opção muito difícil, conforme os dados do gráfico 21.

Gráfico 21- Nível de dificuldade encontrado pelos alunos inerente à função afim



Fonte: Autor, 2022.

O gráfico 22 revela que 42% dos professores concordam que seria difícil para os alunos fazer a caracterização da função afim a partir de um conjunto de pontos, de forma contraria para 32% dos entrevistados seria fácil para alguns alunos fazer essa caracterização; 24% dos docentes concordam que seria muito difícil para alguns alunos e para 2% seria muito fácil.

Neste sentido, o quadro 7 a seguir apresenta alguns trabalhos acadêmicos que aplicaram a ED como metodologia de pesquisa na área do ensino da matemática.

2.6 Revisão de estudos da função afim

Nesta etapa, vamos discorrer a respeito dos trabalhos que enfatizaram a pesquisa sobre a função afim juntos aos alunos por meio da metodologia de pesquisa da ED. Frisamos que alguns trabalhos foram realizados no primeiro ano do ensino médio, entretanto, a ênfase aqui é para os alunos do 9.º ano do ensino fundamental.

Os trabalhos analisados no quadro 7 foram recuperados em bibliotecas digitais de algumas instituições de ensino, dentre elas a Universidade do Estado do Pará - UEPA. Também pesquisamos no Google Acadêmico, em sítios eletrônicos em repositórios da UEPA, UFOPA, e outros[8]. Aplicando os seguintes procedimentos, escrevemos nos sites supracitados, algumas tags[9], tais como: "função afim", "estudo da função", "ensino da função afim". Sendo selecionados os trabalhos que abordavam o ensino da matemática por meio da função afim e com aplicação da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. Àqueles que não se enquadraram nestes critérios, não foram aproveitados. Outrossim, demos preferências a trabalhos científicos mais recentes, logo, o recorte histórico ficou compreendido entre 2009 a 2019, por entender que a temática do ensino da função afim, pela ótica da Metodologia de pesquisa da Engenharia Didática é contemporâneo.

O conjunto de trabalhos são 2 artigos, 5 dissertações na área de Matemática que visaram o ensino de matemática por meio da Função afim e 1 tese que aborda o referido tema. Eles contribuirão significativamente para a continuidade da nossa pesquisa, para além disso, servirão como norteadores para aplicação da sequência didática sobre o ensino de matemática da Função Afim no 9.º ano do ensino fundamental.

Quadro 7 - Resumo do de alguns trabalhos de pesquisa em Engenharia Didática com foco em função afim.

Trabalhos	**Autores e anos**	**Tema da pesquisa**	**Instituições**
Artigo	Tortola; Rezende (2011)	**O Estudo de Função Afim na fatura de energia elétrica por meio da Modelagem Matemática e da Engenharia Didática**	CIAEM
Artigo	MANGUEIRA; SILVA (2018)	**A engenharia didática como metodologia para o ensino de matemática**	UERG/IFRG EPBEM

[8] Para ver as fontes pesquisadas: os links estão nas respectivas referências, no final do trabalho.
[9] "Tag em inglês quer dizer etiqueta. As tags na internet são palavras que servem justamente como uma etiqueta e ajudam na hora de organizar informações, agrupando aquelas que receberam a mesma marcação, facilitando encontrar outras relacionadas" (ASSIS, 2019). Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/navegador/2051-o-que-e-tag-.htm Acesso: 22 mai. 2022.

DISSERTAÇÃO	MARINHO FILHO (2016)	**Criptografia**: uma engenharia didática, com funções, matrizes e cifra de hill, para o ensino médio	UFOPA
DISSERTAÇÃO	CAMARGO (2019)	**Uma proposta de material de apoio para o ensino da Função Afim**	UENF
DISSERTAÇÃO	MACEDO (2018)	**Uma sequência didática para o ensino de função afim**	UEPA
DISSERTAÇÃO	MIRANDA (2019)	**Situações-problema que envolvem o conceito de função afim**: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais	UNIOESTE – Campus de Cascavel
DISSERTAÇÃO	SILVA (2018)	**O ensino de função afim por atividades**: experiência em uma escola pública do Estado do Pará	UEPA
TESE	MAGALHÃES (2009)	Mapas Conceituais Digitais como Estratégia de Ensino para o Desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções	PUC-SP

Fonte: Autor, 2021.

Para a análise dos trabalhos no quadro 7 demostramos quais os objetivos dos estudos, as metodologias aplicadas e de forma sucinta, alguns resultados alcançados. Entretanto, frisa-se que foram realizadas as etapas ora mencionadas, distinguidas primeiro para os artigos, segundos para as dissertações e por fim, mas não menos importante, para a tese.

2.6.1 Análises dos artigos

O artigo dos autores Tortola e Rezende (2011), intitulado “**O Estudo de Função Afim na fatura de energia elétrica por meio da Modelagem Matemática e da Engenharia Didática**” apresentou como objetivo foi verificar se uma sequência de atividades didáticas elaborada segundo os preceitos da Engenharia Didática e embasada nos princípios da Modelagem Matemática poderia contribuir para o ensino e aprendizagem do conteúdo com foco no Ensino da Função Afim. A metodologia aplicada por estes autores foi a Engenharia Didática, que sugere a elaboração de uma sequência didática com atividades que auxiliam no estudo do conteúdo proposto. Os resultados foram apresentados, de forma breve, mas que conduz ao seguinte entendimento: os alunos, no decorrer do processo, ficaram empolgados em solucionarem os problemas apresentados; a metodologia usada proporcionou momentos de discussões acerca do tema, reflexões sobre suas respostas e análises mais críticas da situação, enfim, os alunos entenderam o conceito e aplicação da

Função Afim, bem como, compreenderam a importância de aplicá-la em contexto do dia a dia no qual eles estão inseridos.

O artigo dos autores Mangueira e Silva (2018), intitulado “**A engenharia didática como metodologia para o ensino de matemática**” apresentou como objetivo relatar as possíveis contribuições de dois importantes marcos da educação matemática: a teoria das situações didáticas e a engenharia didática. A metodologia utilizada foi o de pesquisa bibliográfica dos autores da área, dentre eles a autora Artigue e o autor Brousseau. Os resultados foram em suma que a Teoria das Situações Didáticas, juntamente com a Engenharia Didática, é forte instrumento para uma melhor experiência no ensino aprendizagem de matemática.

2.6.2 Análises das dissertações

A dissertação do autor Marinho Filho (2016), cujo título é “**Criptografia**: uma engenharia didática, com funções, matrizes e cifra de hill, para o ensino médio” apresentou como objetivo “Criptografia, associado aos conteúdos de Matemática trabalhados no Ensino Médio” dentre os conteúdos abordou uma atividade com Função Afim. A metodologia aplicada foi A Engenharia Didática, para este autor a Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa, que ressalta um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino. Os resultados de forma sucinta podem ser assim expostos: possibilitou aos alunos associar os conteúdos matemáticos trabalhados com o cotidiano deles; possibilitou revisar conteúdos que já haviam sido esquecidos e obter conhecimento de conteúdos novos; permitiu uma maior interação entre os alunos, promovendo trabalho em grupo e divisão de tarefas para a realização de um objetivo; contribuiu para desenvolver as capacidades de concentração nas atividades e de criação de estratégias de resolução de problemas.

A dissertação da autora Camargo (2019), cujo título é “**Uma proposta de material de apoio para o ensino da Função Afim**” apresentou como objetivo “elaborar um material de apoio, composto por uma parte teórica e por cinco atividades, tendo em vista auxiliar o professor do Ensino Médio no ensino da Função Afim”. A metodologia aplicada na realização do estudo, segundo a autora, foi a qualitativa descritiva aplicada e os métodos escolhidos para a coleta de dados foram a pesquisa documental e o levantamento de dados. Os resultados apresentados deste trabalho de maneira breve foram: a maioria dos estudantes não consegue aplicar o conteúdo na resolução de problemas contextualizados e do cotidiano; a identificação dos recursos e estratégias didáticas adotadas com maior frequência pelos professores e como o seu uso auxilia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática; e foi constatado que apenas uma pequena parcela dos professores pesquisados utiliza as orientações dos PCN em sua prática docente.

A dissertação do autor Macedo (2018), intitulada "**Uma sequência didática para o ensino de função afim**" apresentou como objetivo "estudar as potencialidades de uma sequência didática criada sobre a ótica das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017) para o processo de ensino-aprendizagem de Função Afim". A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica dos autores da área de Engenharia Didática, Sequência Didática e outros. Os resultados alcançados, segundo o autor foram: melhor organização por parte do professor; o professor se torna o mediador; melhora a capacidade de argumentação do professor. Quanto ao aluno: estímulo à percepção por parte dos alunos dos padrões e regularidades em cada tópico; autonomia por parte do aluno; os alunos justificam seus procedimentos.

A dissertação da autora Miranda (2019), intitulada "**Situações-problema que envolvem o conceito de função afim**: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais" apresentou como principal objetivo "categorizar situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, à luz da teoria dos Campos Conceituais". A metodologia usada foi a pesquisa bibliográfica dos autores da área de matemática. Os resultados foram em síntese: identificaram 15 subclasses de problemas de função afim, a partir das sete (07) categorias principais; identificaram alguns fatores que podem ser modificadores do nível de dificuldade da situação, relacionados ao modo de apresentação dos elementos da situação, por exemplos, apresentação de dados em gráfico ou tabela; apresentação de dados em figura relacionada ao enunciado; interpretação de escalas; conversão de medidas; ausências de taxas de forma explícita no enunciado (como a ausência da taxa de proporção e ausência do valor fixo).

A dissertação do autor Silva (2018),"**O ensino de função afim por atividades**: experiência em uma escola pública do Estado do Pará". Tinha o objetivo de avaliar os efeitos que uma sequência didática tem sobre os discentes quando da resolução de questões relacionadas a função afim. A metodologia aplicada foi as 4 fases da Engenharia Didática e a pesquisa bibliográfica de autores da área de matemática. Os resultados em linhas gerais foram: as análises a posteriori evidenciaram que a sequência de atividades elaboras e aplicadas produziu resultados melhores para a compreensão do conceito de função afim; que os alunos obtiveram avanços progressivos dentro do processo de discussão dos conceitos e definições matemáticas trabalhadas; uma maior participação dos alunos nas aulas.

2.6.3 Análise da Tese

A tese do autor Magalhães (2009), "**Mapas Conceituais Digitais como Estratégia de Ensino para o Desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções**" apresentou como **objetivo** analisar se o trabalho cognitivo gerado pela utilização de mapas conceituais alavanca o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos estudantes. A **metodologia** aplicada foi o pressupostos teórico da Engenharia didática de Artigue e em leituras dos referenciais teóricos de autores da área Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), nos estudos sobre metacognição e estratégias metacognitivas tratado por Flavell (1999), e nos estudos dos mapas conceituais de Novak (1984) e Moreira (2006). Os **resultados** apresentados em suma foram: o uso dos mapas conceituais digitais em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas permitiu que os alunos mobilizassem estratégias metacognitivas na construção desses mapas; e os resultados alavancados indicam que os mapas podem influenciar positivamente no processo de aprendizagem.

Outro importante fundamento para uma boa aplicação da sequência didática ou qualquer outra atividade pedagógica na área do conhecimento matemático, é o docente compreender de forma significativa como se apresenta a resolução de problemas, para auxiliá-lo nas tomadas e nas proposições de intervenções mediadoras do ato de ensinar. Para tanto, a seguir, discorremos sobre este assunto.

2.7 Resolução de problema – reflexão como processo de ensino da função afim

A função afim pode e deve ser ensinada por meio da resolução de problema, uma vez que, essa estratégia de ensino pode propiciar aos alunos condições de a partir de determinado contexto, aplicar o raciocínio matemático e/ou conhecimento matemático da função afim, para resolver situações-problema. Entretanto, o que significa “Resolução de problema”?

A resolução de problema à luz dos estudos de Sá pode ser compreendida, pelo menos, em três momentos: primeiro a resolução de problema como processo, segundo a resolução de problema como objetivo e terceiro a resolução de problema como ponto de partida.

Os estudos de Sá (2005) acerca da resolução de problema como processo analisa várias compreensões da literatura especializada na área. Uma delas, os estudos de Mendonça (1999), segundo a autora “como **processo**, a resolução de problemas significa olhar para o desempenho/ transformação dos alunos como resolvedores de problemas. Analisa-se as estratégias dos alunos” (MENDONÇA, 1999, apud SÁ, 2005, p. 30, grifo do autor).

Além deste, podemos citar, outro estudo de Sá, quando afirma que a autora Mendonça traz a seguinte concepção sobre a resolução de problema como processo: - o desenvolvimento do ensino está centrado na proposição de estratégias de solução. Isto nos faz acreditar que a Resolução de problema como processo pode ser assim compreendido, segundo Sá (2004) citando os PCNs (1998) a resolução de problemas é “uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas”. Dentre outras proposições, Sá faz outras recomendações sobre aplicar a resolução de problemas como **processo** de aprendizagem em matemática no que tange a resolução de problemas, aqui citaremos algumas:

> **Incentive o aluno a considerar estratégias diferentes que possam ser usadas para resolver um problema, usando materiais/procedimentos diversos**; desse modo ele se sentirá mais à vontade para criar seus próprios caminhos na resolução de problemas de um modo geral e estará sendo incentivado a não acreditar no mito que estabelece que um problema tem sempre uma única.
> **Use perguntas para focalizar a atenção do aluno na informação pertinente dada no problema;** assim você estará ajudando o aluno a não se desviar do que é essencial num problema e consequentemente, evitando que o mesmo se embarace com detalhes desnecessários.
> **Sempre que possível planeje dentro de cada conteúdo ou unidade trabalhada sessões de resolução de problemas na interpretação de processo**; desse modo você evitará que os alunos criem a crença de que os problemas são sempre os problemas do tipo padrão.
> **Estimule os alunos a resolverem elou apresentarem/formularem problemas criativos dentro de cada assunto estudado**; essa prática estimulará seus alunos a praticarem a formulação de problemas que é uma habilidade de muita importância na vida de um modo geral.
> **Não subestime a capacidade dos seus alunos em propor e/ou resolver problemas**; isso fará com que você não deixe de apresentar aos seus alunos

> problemas interessantes e de dar a oportunidade dos mesmos desenvolverem sua criatividade. (SÁ, 2006, p. 67-68, grifos do autor).

Ressaltamos as considerações como pertinentes, algo que chamou atenção foi o fato de frisar para não subestimar a capacidade dos alunos em propor e/ou resolver problemas. Neste sentido, ressaltamos que os alunos quando chegam na escola já trazem um bom conhecimento prático. Freire já chamava atenção para este fato, quando:

> Por isso mesmo pensar certo coloca ao professor ou, mais amplamente, à escola, o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os das classes populares, chegam a ela saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos (FREIRE, 1996, p. 30).

Para além deste entendimento, Freire (1996, p. 61) propõe a seguinte reflexão: "saber que devo respeito à autonomia e à identidade do educando exige de mim uma prática em tudo coerente com este saber". Desta maneira, Sá (2006) também entende a importância do professor de Matemática considerar os educandos como sujeitos pensantes.

A resolução de problema como **objetivo** pode ser assim analisado na interpretação dos estudos de Sá (2004, 2005, 2006), citando Mendonça (1999), como objetivo, a resolução de problemas significa que se ensina matemática para resolver problemas. Ainda, Sá (2004) diz que a resolução de problema como objetivo desenvolve a habilidade de resolver problemas padrões que procura garantir o domínio de situações do dia a dia que podem ser resolvidas por meio de procedimentos bem definidos e ensinados. Contudo, segundo esse autor, essa concepção não consegue preparar o estudante para enfrentar com confiança situações que exigem criatividade para serem superadas além de técnicas que não são empregadas na resolução de problemas padrões. Ou seja, essa concepção não prepara o aluno para assumir o protagonismo na resolução de problemas.

Por último, porém, não menos importante, Sá (2004, 2005, 2006), pesquisa acerca da Resolução de problema como ponto de partida. Neste sentido, para Mendonça (1999, apud SÁ, 2005, p. 30):

> Como ponto de partida, os problemas são usados como recurso pedagógico para iniciar o processo de construção de um dado conhecimento específico. [...] Já como ponto de partida, o desenvolvimento do ensino é iniciado pela apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de

> aprendizagem culminando na sistematização de conhecimentos matemáticos previamente determinados pelo professor.

Outra observação importante a se fazer quanto essas três concepções de resolução de problemas, é a que Sá aborda em sua pesquisa por meio dos estudos do autor Boavida (1994), ao buscar resposta para a seguinte questão: “o que é que determina nossa concepção acerca da resolução de problemas?” Neste caso, traz para a reflexão três filosofias pessoais da matemática tratada nos estudos de Boavida, quais sejam: absolutismo, progressista e o falibilismo. De forma resumida, apresentamos no quadro 8 abaixo:

Quadro 8 - Relação entre Filosofias Pessoais de Matemática e a Interpretação de Resolução de Problemas.

FILOSOFIAS PESSOAIS SOBRE MATEMÁTICA.	INTERPRETAÇÕES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.
ABSOLUTISMO	A resolução de problemas consiste na execução de tarefas não rotineiras e com resposta certa impostas 0 pelo professor. O principal papel do professor é comunicar e transmitir conhecimentos. Os problemas são meios secundários de aplicar, reforçar e motivar a aprendizagem.
ABSOLUTISMO PROGRESSISTA	A resolução de problemas é um meio de desenvolver e utilizar as estratégias e os processos matemáticos bem como o meio de descobrir as verdades e estruturas da matemática. Os alunos são guiados pelo professor para resolverem os problemas contidos, implícita ou explicitamente, em ambientes cuidadosamente escolhidos; espera-se que o conhecimento seja da experiência dos alunos tendo o professor o papel de condutor e facilitador.
FALIBILISMO	A resolução de problemas será considerada a pedagogia a utilizar na sala de aula. Particularmente será vista como um processo socialmente mediado de formulação de problemas e construção da sua solução, processo esse requerendo discussão para negociação de sentidos, estratégias e provas.

Fonte: Boavida (1994, apud Sá, 2004).

Sá (2004) comparando as concepções de resolução de problemas propostas por Mendonça (1999) e os resultados de Boavida (1994), correlaciona da seguinte maneira:

> • **absolutismo** implica pensar a resolução de problemas como **objetivo**;
> • **absolutismo progressista** implica pensar a resolução de problema como **processo**;
> • **falibilismo** implica pensar a resolução de problemas como **ponto de partida**. (SÁ, 2004, p. 16-17, grifos do autor).

Os estudos de Sá (2004, 2005, 2006) em linhas gerais concluem que de um modo geral resolução de problemas é uma atividade inerente à vida, e no âmbito escolar a resolução de problemas, pode ser relacionada em função da nossa história de vida, como um objetivo, um processo ou um ponto de partida. Assim sendo, o estudo deste autor não trouxe uma resposta conceitual para “o que é resolução de problema”, nas palavras do autor “uma resposta nunca será melhor ou pior que outra, somente diferente”.

A partir destes pressupostos, quanto à resolução de problema com aplicação do conhecimento matemático da função afim (ensino fundamental) na sequência didática, a distinção da concepção fica referente à resolução de problema como **processo**. Pois, na condição de docente, entendo também a importância do perfil mediador do professor na perspectiva de um ensino crítico e reflexivo considerando a história de vida dos educandos e da própria história histórico-dialética pela qual a humanidade passa.

Desta maneira, Freire (1996, p. 41) reforça que:

> Uma das tarefas mais importantes da prática educativo-crítica é propiciar as condições em que os educandos em suas relações uns com os outros e todos com o professor ou professora ensaiam a experiência profunda de assumir-se. Assumir-se como ser social e histórico como ser pensante, comunicante, transformador, criador, realizador de sonhos, capaz de ter raiva porque capaz de amar.

Depreendemos daí que a sequência didática que será apresentada para os alunos do 9.º ano do ensino fundamental, cumprirá essas etapas e respeitará os educandos nas suas limitações e fomentando-os para superá-las. Quanto ao pensamento lógico matemático tanto dedutivo como indutivo em situações-problema cuja solução se dará por aplicação dos conhecimentos da função afim em variados contextos.

Os estudos apresentados até o presente momento com pesquisas em Engenharia Didática aplicado no ensino-aprendizagem de matemática, em especial, nos estudos das funções, possibilitou perceber a importância desta metodologia de pesquisa no Brasil, sobretudo no nível de dissertação e tese.

Desta maneira, podemos aferir que com a proposta da Engenharia Didática inicialmente apresentada pela Artigue (1996), já influenciou outros pesquisadores, especialmente, do Brasil, a fazer pesquisas sobre o ensino de matemática junto ao alunado do sistema educacional brasileiro, que possam por meio da prática didático-pedagógica e didático-científica experienciar e mediar o processo de aprendizagem e de formação conceitual do pensamento lógico matemático desse público-alvo, inserido em diversos contextos, ressaltamos, neste caso, a função afim.

E para aprofundarmos um pouco mais nesta temática, na seção seguinte discorreremos da segunda fase da ED, isto é, da Concepção e análise a priori.

3 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção vamos apresentar uma sequência didática distribuídas em 12 tempos de aula de 45 minutos cada por escola. As sequências foram ancoradas em 4 livros didáticos do ensino de Matemática do 9.º ano, bem como, as atividades propostas, com algumas acrescentadas de outras obras secundárias. Apresentaremos a análise a priori de cada atividade e propusemos questões de aprofundamentos para reforçar os assuntos propostos. Para tanto, nos baseamos nos estudos de Sá (2017) e do autor Silva (2018).

3.1 Sequência Didática - Função Afim

No trabalho da Pós-Graduação “Lato Sensu” em Educação Matemática Santos e Santos (2005) já discutia o papel da Didática Matemática, ocasião que, nas palavras de Parra e Saiz (1996) aprendemos que a Didática da Matemática estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos desta ciência, particularmente na situação escolar e universitária. Além disso, Gálvez (1996) citando Brousseau (1982b) entendera a Didática da Matemática como sendo um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos se apropriem de um saber construído ou em vias de constituição.

Como estratégias de ensino, a BNCC aponta algumas alternativas tais como:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 266, grifo do autor).

Entendendo a Sequência Didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18, apud PERETTI; TONIN DA COSTA, 2013, p. 6). O professor pode propor um plano de aula para diversificar e potencializar o ensino-aprendizagem do assunto de forma mais atrativa e participativa, no caso do ensino da função afim.

Desta maneira, a seguir propusemos 12 aulas de matemática com foco na função afim, por meio de uma sequência didática.

3.1.1 Sequência Didática – Atividades por método da descoberta.

Neste tópico propusemos atender os Pré-requisitos dos desdobramentos da concepção e análise a priori para esta fase.

Ressaltamos ainda que esta sequência foi feita de forma análoga às orientações da proposta da Sequência didática apresentada por Sá (2017), que vislumbrava o ensino e aprendizagem da função afim. Contudo, adaptada para o ensino do 9.º ano do ensino fundamental.

Para tanto, a princípio selecionamos quatro livros didáticos de matemática desta faixa etária de ensino. Organizamos as partes dos capítulos que cada livro aborda sobre a função fim, bem como seus conteúdos que muito se assemelham aos descritores da Matrize de Referência do SAEB com relação às funções polinomiais do primeiro grau e/ou função afim, ver Apêndice A. Desta forma, o quadro abaixo, traz a organização dos quatro livros didáticos, que a partir do apresentado receberam os códigos de LD1, LD2, LD3 e LD4, conforme discriminado no quadro 9.

Quadro 9- Livros didáticos de matemática do 9.º ano usados na sequência didática.
(Continua)

REFERÊNCIA	**GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 9.º ano: ensino fundamental: anos finais. — 4. ed. — São Paulo: FTD, 2018.**	**Código** **LD1** **Livro didático 1**
Unidades/ Assuntos:	Conteúdos	Habilidades
Unidade 9 – Função	• A noção de função: Domínio e conjunto imagem de uma função; • A função polinomial afim: Função linear, Gráfico da função polinomial afim; Zero da função polinomial afim.	(EF09MA06)
REFERÊNCIA	**GAY, Mara Regina Garcia, SILVA, Willian Raphael (Orgs.). Araribá mais: matemática: manual do professor – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2018. Obra em 4 v. do 6.º ao 9.º ano.**	**Código** **LD2** **Livro didático 2**
Unidade/ Assunto:	Conteúdos	Habilidades

Capítulo 8: Funções	• Ideia de função. • Lei de formação de uma função e variáveis. • Determinação do valor de uma função. • Representação gráfica de uma função em um sistema cartesiano. • Análise dos dados de gráficos fazendo inferências.	EF09MA06, EF09MA07, EF09MA08, EF09MA20.
Capítulo 9 – Função afim	• Função afim. • Reconhecimento e construção do gráfico de uma função afim. • Reconhecimento de funções afim crescentes, decrescentes e constantes. • Zero da função afim. • Análise do gráfico de uma função afim. • Função linear e proporcionalidade. • Probabilidade de eventos independentes e de eventos dependentes.	
REFERÊNCIA	**SILVEIRA, Ênio. Matemática: 9.º ano do ensino fundamental – 5 ed. São Paulo: Moderna, 2018.**	**Código** **LD3** **Livro didático 3**
Unidades/ Assuntos:	Conteúdos	Habilidades
Capítulo 5 – Função afim	• Ideia de função; Lei de formação da função; • Variáveis; A notação f (x); Valor de uma função; • Representação gráfica de uma função.	EF09MA06, EF09MA07, EF09MA08, EF09MA20.
A função afim	• Gráfico da função afim; Zero de uma função afim; • Variação de uma função afim; Estudo do sinal da função afim. (Inequação: Comparando funções afim)	
REFERÊNCIA	**BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: 9.º ano do ensino fundamental – 9 ed. São Paulo: Moderna, 2018.**	**Código** **LD4** **Livro didático 4**
Unidades/ Assuntos:	Conteúdos	Habilidades
Capítulo 10 – Estudo das funções	• Conceituação e reconhecimento de função como relação de dependência unívoca entre duas grandezas; • Determinação da lei de formação de uma função e obtenção de valores que uma função assume; • Representação gráfica de uma função; • Estudo das funções polinomiais do 1o grau; • Identificação das relações de proporcionalidades em funções.	(EF09MA06); (EF09MA08).

Fonte: Autor, 2022.

A análise do quadro acima demonstra que o LD1 aborda a função no capítulo 9 e em dois momentos distintos: primeiro momento apresenta o tópico “A noção de função” abordando os elementos domínio e conjunto imagem de uma função (não aborda o contradomínio); no segundo, aborda “a função polinomial afim” (sic) trabalhando os assuntos Função linear, Gráfico da função polinomial afim; Zero da função polinomial afim e correlaciona todos estes assuntos à habilidade EF09MA06[10].

[10] Conforme discriminada no Anexo B.

No LD2 a temática em questão é abordada em dois momentos também, porém, com um pouco mais de organização didática, quais sejam: no Capítulo 8 e 9. Este aborda a Ideia de função, a lei de formação de uma função e variáveis, determinação do valor de uma função, representação gráfica de uma função em um sistema cartesiano e análise dos dados de gráficos fazendo inferências. Aquele, apresenta o tópico específico para a função afim, trabalha o reconhecimento e construção do gráfico de uma função afim e o reconhecimento de funções afim crescentes, decrescentes e constantes. Além destes, trabalha os tópicos do zero da função afim, da análise do gráfico de uma função afim, a unção linear e proporcionalidade e probabilidade de eventos independentes e de eventos dependente. Correlacionam as seguintes habilidades com estes conteúdos e/ou objetos de conhecimento EF09MA06, EF09MA07, EF09MA08, EF09MA20.

O LD3 no capítulo 5 também trabalha o objeto de conhecimento função afim em dois momentos diferentes. No primeiro momento é abordado a ideia de função, a lei de formação da função, as variáveis, a notação $f(x)$, o valor de uma função e a representação gráfica de uma função. No segundo, se trabalhou um outro tópico denominado de função afim, onde foi apresentado o gráfico da função afim, o zero de uma função afim, a variação de uma função afim, o estudo do sinal da função afim e ainda a “inequação: comparando funções afim”. Ressaltamos que o LD3 é o único dos livros didáticos que faz a menção de forma explicita da inequação com a função afim.

Já o LD4 traz o estudo a função das funções no Capítulo 10, com os seguintes subtópicos: conceituação e reconhecimento de função como relação de dependência unívoca entre duas grandezas, determinação da lei de formação de uma função e obtenção de valores que uma função assume, representação gráfica de uma função, estudo das funções polinomiais do 1.º grau e a identificação das relações de proporcionalidades em funções. Aponta como habilidades relacionadas a estes objetos de conhecimento as mesmas EF09MA06 e EF09MA08.

Em geral os livros didáticos abordam a função afim e seus principais elementos e caracterização, destaco aqui os LD2 e o LD3 por trabalharem nesse tema a habilidade EF09MA20, todos os demais apresentam as mesmas habilidades com exceção do LD1 que apresentou como habilidade apenas uma, a EF09MA06.

Doravante, vamos tratar da sequência didática com a elaboração das atividades, novamente friso que será análoga à proposta pelo autor Sá (2017), porém, as atividades propostas são fundamentadas nos LD1, LD2, LD3 e LD4. Exceto as atividades de aprofundamentos, que é uma coletânea ecléticas de atividades, inerente à função afim, de sites, concursos, os próprios livros didáticos e algumas das atividades aplicadas por Silva (2018).

A revisão da função afim nos 4 livros didáticos contribui para entender a proposta da função afim nessa faixa etária. Para além disso, foram selecionadas algumas questões sobre função afim para compor as atividades e questões de aprofundamento. Desta maneira, cada atividade foi organizada e pensada para contribuir no processo de ensino e aprendizagem de função afim, levando em consideração as dificuldades apresentadas segundo a ótica docente, dos graus de dificuldades demonstradas pelos alunos, conforme apresentado anteriormente.

A análise da função afim nos quatro livros didáticos de matemática do 9.º Ano do ensino fundamental supracitados, nos ajuda a compreender sua abordagem para essa faixa etária. Além disso, selecionamos algumas questões sobre função afim para integrar as atividades e proporcionar um aprofundamento no tema. Assim, cada atividade foi meticulosamente organizada para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da função afim. Consideramos tanto as dificuldades percebidas pela perspectiva docente quanto os desafios enfrentados pelos alunos, conforme discutido anteriormente.

Outrossim, frisamos ainda que a sequência didática será composta de 6 Atividades e foram desenvolvidas em 12 tempos (12 aulas) com 45 minutos cada em cada escola, ou seja, totalizaram 24 tempos de aula. Nas redes de ensino no municipal de Altamira, o tempo da hora aula é de 45 min (45 h/a).

As etapas didáticas da sequência se darão assim: Aula expositiva e explicativa com exemplos resolvidos sobre a temática da função afim; depois apresentaremos umas atividades inerente a aula ministrada, com intuito de percebermos qual o nível percentual de aprendizagem fora alcançado pelos referidos alunos.

A configuração dos roteiros de atividades é equivalente ao aplicado por Sá (2017, 2019, 2020) e demais estudos, por exemplo, a pesquisa de mestrado de Silva (2018): “Título”; “Objetivo”, “Material” e “Procedimentos”. Tendo em relação ao objetivo o motivo pela qual a atividade foi elaborada; material os recursos físicos que serão utilizados e procedimentos as etapas de cada atividade.

Para tanto, a seguir apresentamos a estrutura da sequência didática precedidas das atividades e por conseguinte, análise a priori das atividades propostas elaborada para a experimentação, ou seja, as atividades para o ensino de função afim. No tocante as atividades Sá (2009), ressalta que

> Esse tipo de abordagem interativa permite ao aluno realizar um grande número de experimentos, interpretá-los para depois discuti-los em classe com o professor e colegas. Outro fator relevante nesse processo é o que a escola, mas não exclusivamente ela, precisa oferecer condições materiais plenamente desejáveis para que o ensino por atividade ocorra de forma exitosa. O êxito depende muito mais de um bom planejamento das atividades por parte dos professores e do envolvimento dos alunos nas resoluções das atividades. Assim, torna-se relevante que o professor **queira** e **acredite** que pode melhorar sua forma de ensino, acrescentando a ela qualidade e empregabilidade nos conhecimentos aprendidos. (SÁ, 2009, p. 16, grifo do autor).

Imbuído deste entendimento, e para além disso, às análises posteriori se fundamentarão pela Taxonomia de Bloom, sobretudo, no aspecto cognitivo da aprendizagem, por meio dos verbos de “analisar”, “compreender”, “aplicar”, dentre outras. Ressaltamos que a aplicação se dará com alunos do 9.º ano, conforme mencionado. Portanto, dentro do desenho curricular tais alunos, provavelmente, não tiveram contato com este assunto, por conseguinte, procuraremos, mediar o processo de aprendizagem, pelo método da descoberta, garantido assim, a condição mínima para eles interagirem e avançarem na compreensão do assunto ora abordado.

Por conseguinte, em uma etapa posterior, isto é, a 4.ª fase da ED, nos debruçaremos nos resultados, conforme será mencionado no capítulo referente a esse tema.

Desta maneira, as sequências didáticas foram organizadas conforme os tópicos seguintes.

3.1.2 Sequência Didática – Estrutura didática

Componente curricular: Matemática

Objeto de conhecimento: Funções polinomiais do 1º grau: representações numérica, algébrica e gráfica.

Habilidades:

Habilidades da BNCC que podem ser desenvolvidas: EF09MA06, EF09MA07 e EF09MA08.

(EF09MA06) - Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis;

(EF09MA07) - Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Atividade 1

Título: Descubra a minha regra
Objetivo: Descobrir uma relação entre dois conjuntos
Material: Quadro I, roteiro da atividade, papel, caneta.
Procedimento: Para cada par de conjuntos:

- Observe a associação entre os elementos de A e B no quadro I;
- Tente descobrir a expressão do elemento y ∈ B associado a x ∈ A;
- Com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

Par	Expressão do elemento y ∈ B associado a x ∈ A	Grau do polinômio
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

As relações algébricas que relacionam duas variáveis onde a segunda (no nosso caso $\mathbf{y}$) e o resultado da combinação das operações de adição e/ou multiplicação da primeira (no nosso caso $\mathbf{x}$) com números reais, onde dizemos que o valor de $\mathbf{y}$ está em função do valor de $\mathbf{x}$, representado por $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e são do tipo $\mathbf{y} = \mathbf{mx} + \mathbf{b}$, são exemplos da <u>lei de formação da função</u> afim que é definida como:

Uma função $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,chama-se afim quando existem constantes $\mathbf{m}, \mathbf{b}$ $\mathbb{R}$ tais que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{mx} + \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

Em decorrência da definição de função temos que $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é a variável dependente e o $\mathbf{x}$, a variável independente. Chamamos $\underline{\mathbf{m}}$ de taxa de variação e o $\underline{\mathbf{b}}$ de valor inicial.

Fonte: Sá (2017, apud SILVA, 2018, p. 89)

Análise a priori da atividade 1

O objetivo da atividade, segundo Silva (2018), foi levar aos educandos a descobrir a relação de correspondência existente entre os conjuntos de números dados (Ver anexo D). O desenvolvimento das atividades visa poder auxiliar os discentes a descobrir a expressão algébrica e a compreensão do conceito de função afim a partir da relação entre variáveis, bem como o desenvolvimento da capacidade de análise por parte dos alunos com base em dados de problemas contextualizados de modelos matemáticos que representam as situações dadas.

Entendendo que os alunos possam apresentar dificuldade para a percepção do raciocínio algébrico envolvido no processo, nesta atividade, por exemplo, os alunos possam ter dificuldade em identificar a lei de formação da função a partir dos conjuntos (Anexo D), nesta situação o professor mediador/pesquisador deve fazer algumas ponderações com base em perguntas para a turma, a respeito das operações matemáticas que possam corresponder na associação entre os valores dados, por exemplo, no "Par 2" dos conjuntos da folha de atividade 1, o primeiro elemento do conjunto A deve ser adicionado a qual número para corresponder ao primeiro elemento do conjunto B? Desta forma, o professor/pesquisador pode conduzir o aluno a refletir e superar a dificuldade apresentada inicialmente.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[11] 1

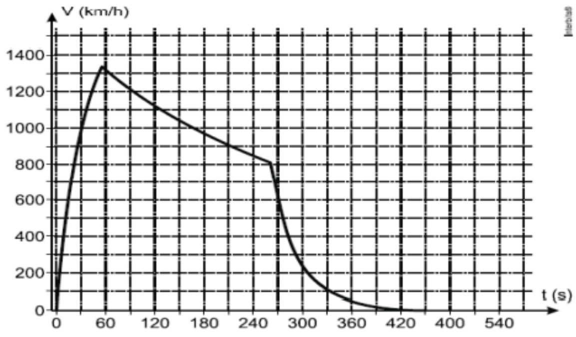
1. Escreva a função afim em cada item sabendo que:
a) a taxa de variação é 3 e o valor inicial é 1
b) a taxa de variação é -2 é $f(2) = 5$.
c) para cada unidade aumentada em x, a função aumenta 2 unidades e o valor inicial é 10;
d) para cada unidade aumentada em x, a função diminui 1 unidade e o valor inicial é 3.

2. Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na tabela e no gráfico abaixo.
a) Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no 30º segundo.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

b) Com base no gráfico, determine o valor aproximado da velocidade máxima atingida e o tempo, em segundos, em que Felix superou a velocidade do som. Considere a velocidade do som igual a 1.100 km/h.

[11] As atividades propostas como questões de aprofundamentos 1 são na ordem que segue: 1. Dante; 2. Unicamp; 3. Dante; 4. UNIOESTE; 5. Dante; 6. UPE; 7. FAAP; 8. UNESP; 9. ENEM; 10. ENEM; 11. UNICAMP; 12. ENEM; 13. UEPA; 14. FUVEST; 15. CESGRANRIO; 16. UNB.



3. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo xo número de unidades produzidas:
a) escreva a lei de formação da função que fornece o custo total de $x$peças;
b) indique a taxa de variação dessa função e seu valor inicial;
c) calcule o custo de 100 peças.

4. Uma empresa de telefonia celular possui somente dois planos para seus clientes optarem entre um deles. No plano A, o cliente paga uma tarifa fixa de R$ 27,00 e mais R$ 0,50 por minuto de qualquer ligação. No plano B, o cliente paga uma tarifa fixa de R$ 35,00 e mais R$ 0,40 por minuto de qualquer ligação. É correto afirmar que, para o cliente,
a) com 50 minutos cobrados, o plano B é mais vantajoso que o plano A.
b) a partir de 80 minutos cobrados, o plano B é mais vantajoso que o plano A.
c)16 minutos de cobrança tornam o custo pelo plano A igual ao custo pelo plano B.
d) o plano B é sempre mais vantajoso que o plano A, independente de quantos minutos sejam cobrados.
e) o plano A é sempre mais vantajoso que o plano B, independente de quantos minutos seja cobrado.

5. Um tanque estava inicialmente com 100 litros de água. A torneira desse tanque foi aberta deixando sair a água na razão de 5 litros por segundo.
a) escreva a lei de formação da função que representa a quantidade de água após t segundos;
b) qual a taxa de variação da função obtida?
c) qual o valor inicial da função obtida?

6. Um dos reservatórios d'água de um condomínio empresarial apresentou um vazamento a uma taxa constante, às 12 h do dia 1º de outubro. Às 12 h dos dias 11 e 19 do mesmo mês, os volumes d´água no reservatório eram, respectivamente, 315 mil litros e 279 mil litros. Dentre as alternativas seguintes, qual delas indica o dia em que o reservatório esvaziou totalmente?

a) 16 de dezembro b) 17 de dezembro c) 18 de dezembro d) 19 de dezembro
e) 20 de dezembro

7. Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da terra aumenta, aproximadamente, 3°C a cada 100m de profundidade. Num certo local, a 100m de profundidade, a temperatura é de 25°C. Nessas condições, podemos afirmar que:

I) A temperatura a 1.500m de profundidade é:

a) 70°C b) 45°C c) 42°C d) 60°C e) 67°C

II) Encontrando-se uma fonte de água mineral a 46°C, a profundidade dela será igual a:
a) 700 m b) 600 m c) 800 m d) 900 m e) 500 m

8. Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156kg, recolhe-se a um SPA onde se anunciam perdas de peso de até 2,5kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:
a) Encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo, P, que essa pessoa poderá atingir após n semanas.

b) Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no SPA para sair de lá com menos de 120 kg de peso.

9. A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino médio	Agência/cód. Cedente R$ 500,00
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos (-) Outras deduções (+) Mora/Multa (+) Outros acréscimos (=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então**, qual é a equação que representa o pagamento da mensalidade?**

10. Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura dependente da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

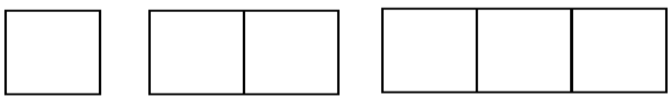


Figura I Figura II Figura II

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

11. Para transformar graus Fahrenheit em graus centígrados usa-se a fórmula: C=5(F-32)/9 onde F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus centígrados.
a) Transforme 35 graus centígrados em graus Fahrenheit.
b) Qual a temperatura (em graus centígrados) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus centígrados?

12. Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão LT(q) = FT(q) – CT(q).
Considerando-se as funções FT(q) = 5q e CT(q) = 2q + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

13. Para produzir colares feitos com sementes de açaí, uma artesã teve uma despesa de R$ 24,00 na aquisição de matéria prima. Sabendo que o preço de custo por unidade produzida é de R$ 2,00 e que a artesã pretende vender cada colar por R$ 5,00, analise as afirmativas abaixo:
I. A lei matemática que permite calcular a receita bruta R, a ser obtida com a venda desses colares, em função da quantidade x de unidades vendidas, é R(x) = 5,00x.
II. A lei matemática que permite calcular o custo total C decorrente dessa produção, em função da quantidade x de colares produzidos é C(x) = 24,00 + 2,00x.
III. A venda desses produtos só dará lucro se a quantidade de colares vendidos for superior a 8.

É correto afirmar que:
a) todas as afirmativas são verdadeiras
b) todas as afirmativas são falsas
c) somente as afirmativas II e III são falsas
d) somente as afirmativas I e II são verdadeiras
e) somente as afirmativas I e III são verdadeiras

14. A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria **é?**

15. O valor de um carro novo é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é**?**

16. Cada bilhete vendido em um parque de diversões dá direito à utilização de apenas um brinquedo, uma única vez. Esse parque oferece aos usuários três opções de pagamento:
I. R$ 2,00 por bilhete;
II. Valor fixo de R$ 10,00 por dia, acrescido de R$ 0,40 por bilhete;
III. Valor fixo de R$ 16,00 por dia, com acesso livre aos brinquedos.
Com base nessa situação, julgue os itens a seguir.
(1) Se uma criança dispõe de R$ 14,00, a opção I é a que lhe permite utilizar o maior número de brinquedos.
(2) Se x representa o número de vezes que uma pessoa utiliza os brinquedos do parque, a função f que descreve a despesa diária efetuada, em reais, ao se utilizar a opção III, é dada por f(x)=16x.
(3) É possível a um usuário utilizar determinado número de brinquedos em um único dia, de modo que a sua despesa total seja a mesma, independente da opção de pagamento escolhida.

Fonte: Silva, (2018, p. 94).

Atividade 2

Função $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**Título**: Identificação dos coeficientes e gráficos da função afim. **Objetivo**: Descobrir uma relação entre os coeficientes da função afim crescente ou decrescente. **Material**: Quadro de gráficos I, roteiro da atividade, papel, caneta. **Procedimento**: Após as explicações iniciais, determine os coeficientes angular e linear de cada função afim e depois diga se ela tem um gráfico crescente, decrescente ou constante.				
	coeficiente angular	**Coeficiente linear**	**f é crescente**	**f é decrescente**	**f é constante**
a) $y = -8 + x$					
b) $y = -x + 11$					
c) $f(x) = -2x - 4$					
d) $y = x - 1$					
e) $y = x + 3$					
f) $f(x) = -x + 2$					
g) $f(x) = 3x - 1$					
h) $f(x) = x + 1$					
i) $y = \frac{1}{2}x$					
j) $f(x) = +10 - 5x$					
l) $f(x) = +2$					
Observação: **Conclusão**:					

Fonte: Silva, (2018, apud SÁ, 2017, adaptada).

Análise a priori da atividade 2

O objetivo da atividade foi fazer os educandos descobrir a declividade da reta, isto é, identificar se a função é crescente, decrescente ou constante sem usar o recurso de cálculos, apenas de forma visual, bastando relacionar o valor do coeficiente angular, ou seja, se $a > 0$, a função é crescente, ou ainda se $a > 0$, neste caso concluir que a função é decrescente. O desenvolvimento das atividades visa poder auxiliar os discentes a compreender que não se faz necessário calcular uma função afim, para afirmar qual o tipo de gráfico pertence a função. Ou seja, esse aprendizado é muito útil, por exemplo, para resolver questões de concurso[12] ou da própria avaliação de matemática deles mesmos. No momento das mediações *in loco* reforçaremos tal visão de utilidade para os cálculos mentais.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[13] 2

1. Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.
A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é**?**

2. Beatriz é gerente de uma sorveteria. O lucro (L) das vendas da sorveteria é dado por uma função cuja lei é $L(x) = 6x - 300$, em que x é a quantidade de sorvetes vendidos por dia. Quantos sorvetes Beatriz precisa vender para obter lucro de R$ 90,00?

3. Duas amigas saem de férias no mesmo período e decidem alugar um carro para fazer uma viagem. O aluguel corresponde a um valor fixo de R$ 20,00 mais R$ 80,00 por dia.

[12] Ver Questões de Aprofundamento 1.
[13] As atividades propostas como questões de aprofundamentos 2 são na ordem que segue: 1. ENEM; 2. Gay; Silva; 3. Gay; Silva; 4. Giovanni Junior; Castrucci; 5 Giovanni Junior; Castrucci; 6. Dante; 7. Silveira, 2018; 8. Bianchini, 2018; 9. Silveira, 2018; 10. Dante; 11. CONSESP.

a) Qual é a lei da função afim que relaciona o preço a ser pago pelo aluguel com os dias em que elas permanecerão com o carro?
b) Que valor elas pagarão se alugarem o carro por uma semana?
c) Se elas reservaram R$ 340,00 para esse gasto, poderão alugar o carro por quantos dias?

4. Uma função afim é definida por $y = 5x + 3$. Nessas condições, determine a imagem do número -2 por essa função.

5. Os professores de uma academia recebem a quantia de 45 reais por aula, mais uma quantia fixa de 200 reais como abono mensal. Então, a quantia y que o professor recebe por mês é dada em função da quantidade x de aulas que ele dá durante esse mês. Qual é a lei de formação da função que relaciona essas duas grandezas?

MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

6. Escreva a função afim em cada item sabendo que:

a) a taxa de variação é 3 e o valor inicial é 1
b) a taxa de variação é -2 é $f(2) = 5$.
c) para cada unidade aumentada em x, a função aumenta 2 unidades e o valor inicial é 10; d) para cada unidade aumentada em x, a função diminui 1 unidade e o valor inicial é 3.

7. Identifique as leis que representam funções polinomiais do 1.º grau.

a) $y = x + 3$
b) $y = -5x + 1$
c) $y = x^2 - 3x$
d) $y = -4x$
e) $y = x^2 - 5x + 6$
f) $y = 2 - x$

8. A lei que fornece a temperatura T, em grau Celsius, de ebulição da água de acordo com a altitude h, em metro, é: $\mathrm{T} = 100 - 0{,}001\mathrm{h}$.

Responda:

a) Qual é a temperatura de ebulição da água a 2.400 m de altitude?
b) Qual é a temperatura de ebulição da água ao nível do mar? 10

9. Ana elaborou o quadro a seguir:

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

a) Qual é a lei de formação da função f que relaciona os valores da segunda e da primeira linha desse quadro?
b) Calcule o valor de $\mathrm{f}\,(\mathrm{x})$ para $\mathrm{x} = -\frac{1}{5}$.
c) Qual é o valor de x quando $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = \frac{7}{2}$?

10. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo xo número de unidades produzidas:
a) escreva a lei de formação da função que fornece o custo total de $x$peças;
b) indique a taxa de variação dessa função e seu valor inicial;
c) calcule o custo de 100 peças.

11. Observe: $\mathrm{Y} = \mathrm{x} - 1.\mathrm{y}$ é uma:

a) parábola com concavidade para baixo.
b) reta crescente.
c) parábola com concavidade para cima.
d) reta decrescente.

Fonte: Sá e Silva (2018, adaptada pelo autor, 2022).

Atividade 3

Título: Construção do gráfico da função afim
Objetivo: Descobrir a representação gráfica da função afim.
Material: Plano cartesiano, roteiro da atividade, papel, caneta, régua.
Procedimento: Para cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada determine:
a) Os valores da imagem de cada valor de x dado; b) Determine os pares ordenados (x, f(x));
c) Marque os pares ordenados obtidos no plano cartesiano;
d) Verifique se é possível traçar uma única reta que ligue todos os pontos marcados;
f) A partir das informações obtidas preencha o quadro a seguir.

Função			Par Ordenado	A função é afim?	É possível ligar todos os pontos

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**Valor de x**	**Valor de $f(x)$**	$(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$			**marcados por uma única reta?**	
				Sim	**Não**	**Sim**	**Não**
$f(x) = x + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = -2x + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = x^2 + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = x^3 + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = x^4$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = 3x - 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						

Observação:

Conclusão:

Fonte: Silva (2018, apud SÁ, 2017).

Análise a priori da atividade 3

Para Silva (2018), o objetivo da atividade (ver anexo C) foi propiciar aos alunos a construção do gráfico da função afim. Onde inicialmente os estudantes deverão encontrar determinados valores para a imagem da função associado a determinados valores do domínio da função. Posteriormente marcados os pontos encontrados no plano cartesiano para traçar o gráfico da função. Acreditamos que os alunos não apresentarão grandes dificuldades para desenvolver a atividade, ao mesmo tempo em que terão a percepção do gráfico da função afim sendo uma reta.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[14] 3

1. Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática $s = 2t - 3$, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos). Construa o gráfico de s em função de t.

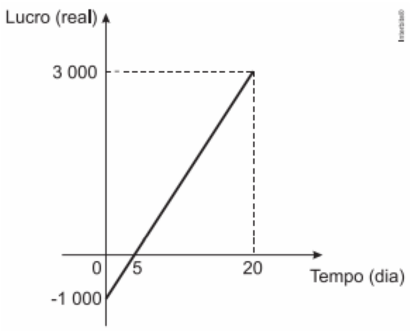
2. As retas das funções afins f, g e h determinam um triângulo.

a) Determine os vértices desse triângulo, sabendo que as leis dessas funções são
$f(x) = x - 3$, $g(x) = -x + 3$ e $h(x) = 3$.

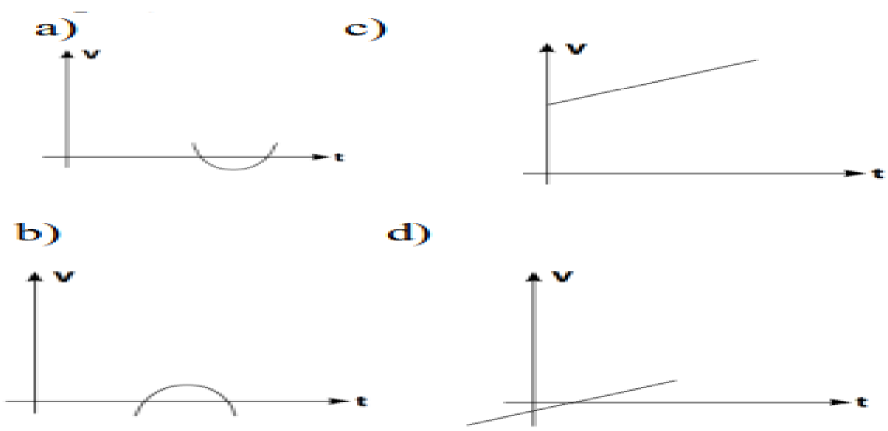
b) Construa os três gráficos em um mesmo sistema de eixos.

3. Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é?



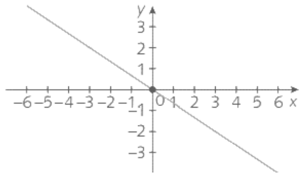
4. A velocidade de um automóvel varia com a aceleração constante em função do tempo, obedecendo a seguinte equação v = 10 + 2.t. O gráfico que melhor representa a equação anterior é:



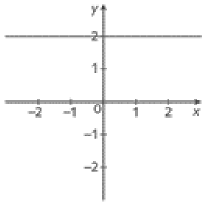
[14] As atividades propostas como questões de aprofundamentos 3 são na ordem que segue: 1. Dante; 2. Dante; 3. ENEM PPL; 4. Gay; Silva; 5 Silveira; 6. Gay; Silva; 7. Gay; Silva; 8. Bianchini.

5. Associe cada função ao seu gráfico das funções definidas pelas leis abaixo:

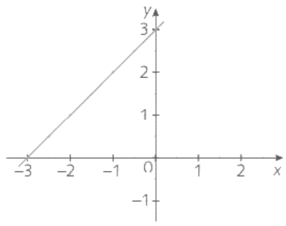
a) $y = 2$



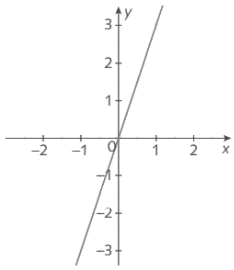
b) $y = 3x$



c) $y = -\frac{2}{3}x$

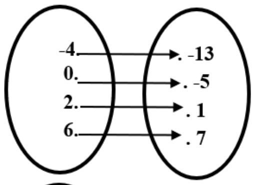


d) $y = x + 3$

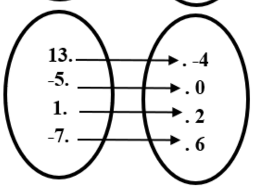


6. Qual diagrama representa a função $f(x) = -2x + 5$ para alguns valores?

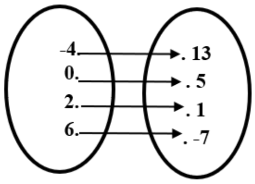
a)



b)



c)



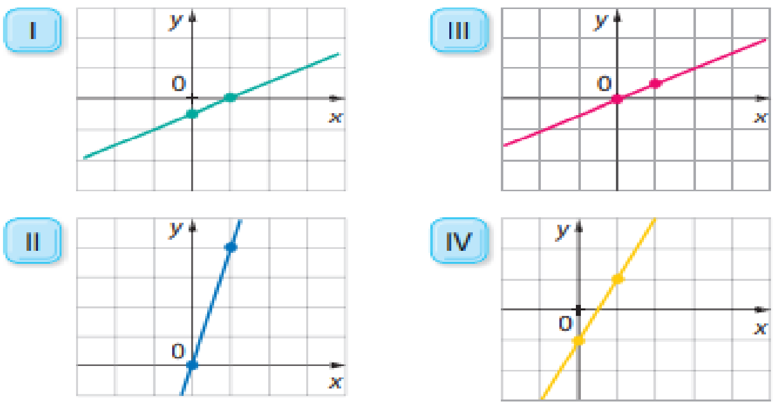
7. Associe a lei da função ao respectivo gráfico.

A $y = 2x - 1$

B $y = \frac{1}{2}x$

C $y = 4x$

D $y = \frac{x - 1}{2}$



8. Classifique cada função em crescente ou decrescente

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $g(x) = 7x + 1$

c) $h(x) = x$

d) $m(x) = -\frac{x}{3}$

e) $n(x) = 5 - x$

f) $p(x) = \sqrt{2} + 6x$

Fonte: Autor, 2022 e Silva (2018) - Adaptada.

Atividade 4

Título: Identificando a lei de formação de uma função afim
Objetivo: Escrever a Lei da função a partir dos dados de uma tabela
Material: Papel A4, caneta, lápis.
Procedimento: Definir a taxa de variação e o coeficiente linear.
Problema: Os dados da tabela abaixo representam o valor de uma corrida de táxi. Sendo assim, responda:

a) Qual o valor do coeficiente linear?
b) Qual o valor do coeficiente angular?
c) Qual a lei da formação do preço que equivale ao valor da corrida?

X (km)	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	5,75	7,75	9,75	11,75	13,15	15,75	17,75

Neste momento o professor mediador, além da aula 2, ele pode sugerir aos alunos a escrever os coeficientes linear para dois pontos distintos e para o eixo das ordenadas e das abscissas. Assim:

$$\mathbf{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ e } \mathbf{b} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Autor, 2022.

Análise a priori da atividade 4

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos encontrem a lei da formação de uma função a partir de dados de uma tabela e não apenas de gráficos. E assim, o alunado pode concluir que a partir da lei de formação se pode generalizar as interpretações para cada situação dada inerente aos contextos que a situação-problema esteja inserida.

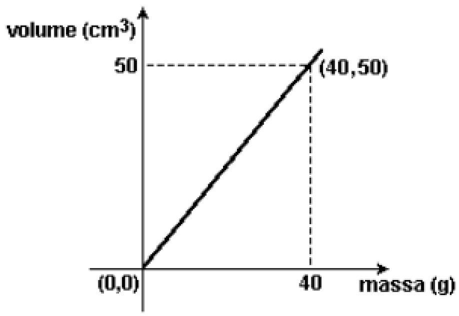
QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[15] 4

1. Carlos e Ricardo estão fazendo uma brincadeira, em que Carlos diz um número e Ricardo transforma esse número em outro. O resultado das 5 primeiras rodadas está apresentado no quadro abaixo.

CARLOS	1	2	3	4	5
RICARDO	-3	-1	1	3	5

Chamando de x o número dito por Carlos, e de y o resultado encontrado por Ricardo, qual a expressão que permite encontrar o resultado fornecido por Ricardo?

2. Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0º C. Baseado nos dados do gráfico:



Determine:
a) A lei da função apresentada no gráfico;

[15] As questões de aprofundamento 4 estão assim fundamentadas: 1. SAEPE; 2. Vunesp-SP; 3. Silveira; 4. UFSCAR; 5. ENEM; 6. Giovani Junior; Castrucci; 7. Internet; 8. Gay; Silva.

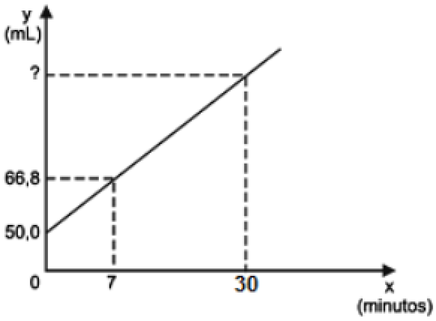
b) Qual é a massa (em gramas) de 30 cm³ de álcool.

3. Um feirante vende mangas pelo preço representado no quadro abaixo

Quantidade de mangas (n)	2	4	8	10
Preço (p) (em real)	3,00	6,00	12,00	15,00

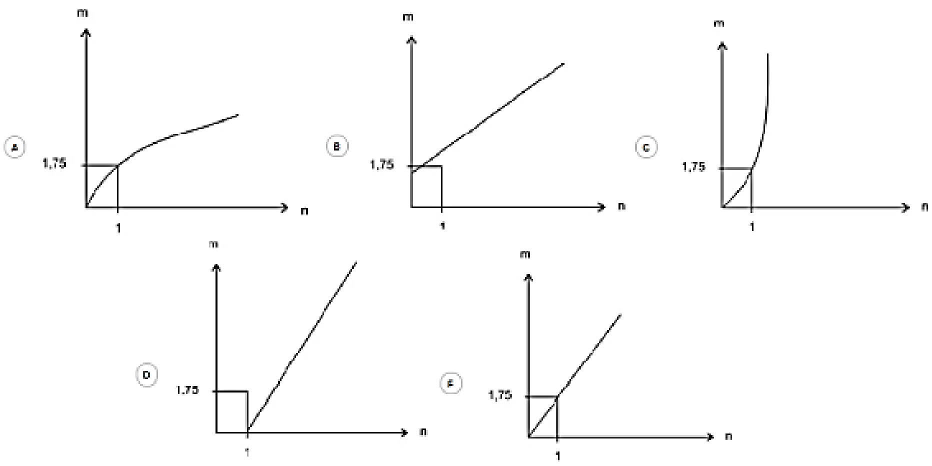
a) O preço a pagar é função da quantidade de mangas? Por quê?
b) Escreva a lei da função que relaciona p e n. c) Qual é o preço de 7 mangas?

4. A quantidade de chuva, em ml, acumulada dentro de um recipiente durante determinado período de tempo obedece a uma função do 1° grau, conforme mostra o gráfico



a) Qual a função que relaciona a quantidade y, em ml com o tempo x, em minutos?
b) Qual a quantidade y, em ml, acumulada após 30 minutos?

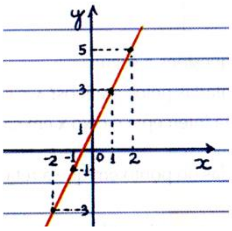
5. As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é



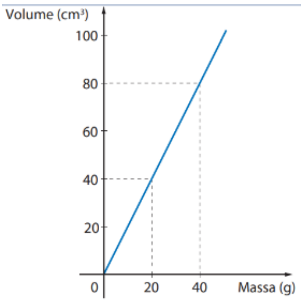
6. Em maio de 2014, uma empresa de Alagoas publicou na internet a oferta ao lado. Naquela data, um comerciante de Manaus encomendou várias peças do anúncio, que foram enviadas por correio, que cobrou R$ 50,00 pelo envio da encomenda. Chamando de x a quantidade de toalhas encomendadas e de y a despesa que esse comerciante teve ao adquirir essa encomenda, determine:

a) a lei de formação da função que descreve a dependência da despesa total com o número de toalhas encomendadas.
b) o número de toalhas encomendadas, sabendo que o comerciante de Manaus gastou R$ 3350,00 nessa transação

7. informações do gráfico e nas coordenadas dos pontos nele apresentados. Encontre a função que descreve esse gráfico.



8. O gráfico abaixo apresenta o volume (V) de álcool, em centímetro cúbico (cm^3), em função de sua massa (m), em grama (g), a uma temperatura fixa de 0 ^{0}C.



a) Observando o gráfico, é possível afirmar que as grandezas volume e massa são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

b) Qual é o volume de 50 g de álcool?

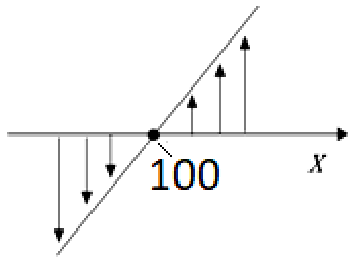
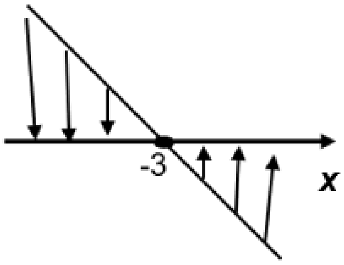
c) Qual é a massa de 60 cm3 de álcool? 30 g d) Escreva a lei da função que relaciona V e m

Fonte: Autor, 2022.

Atividade 5

Título: Identificando o sinal da função afim
Objetivo: Fazer com que os alunos percebam em qual situação a função afim é nula, positiva ou negativa.
Material: Papel A4, caderno, caneta e lápis.
Procedimento: A partir de um modelo resolvido, projetar o aprendizado na análise dos sinais da função.
Problema: Considerando se o gráfico I fosse um gráfico que representasse a vida financeira em um dado momento de uma empresa, como você descreveria as fases financeira?

Gráfico	Valores para os quais o sinal função é

I) 	x = __, a função é ____________ (y = ___) x < __, a função é ____________ (y < ___) x > __, a função é ____________ (y > ___)
II) 	x = __, a função é ____________ (y = ___) x < __, a função é ____________ (y < ___) x > __, a função é ____________ (y > ___)

Fonte: Autor, 2022.

Análise a priori da atividade 5

O objetivo desta atividade é fazer com que o alunado compreenda o sinal de uma função por meio de uma análise crítica do intervalo de valores (x, y) em diferentes fases do gráfico. Por exemplo, em relação ao gráfico I acima, é esperado que os alunos respondam assim:

Para $x > 100 \rightarrow F(x) > 0$ (haverá lucro);

Para $x = 100 \rightarrow F(x) = 0$ (não haverá lucro nem prejuízo);

Para $x < 100 \rightarrow F(x) < 0$ (haverá prejuízo).

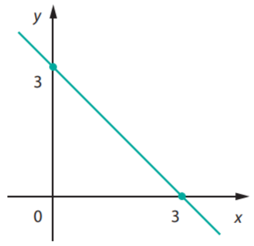
Sendo S o conjunto solução, temos: $S = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 100\}$.

Caso os alunos e/ou alguns alunos não consigam responder, o professor pesquisador/mediador pode fazer uma intervenção pedagógica e instigar aos alunos refletirem com base nos valores assumidos acima ou abaixo do eixo do x, e quando o valor intercepta o eixo do x, é o ponto de equilíbrio desta empresa, isto é, nem houve prejuízo e nem lucro.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[16] 5

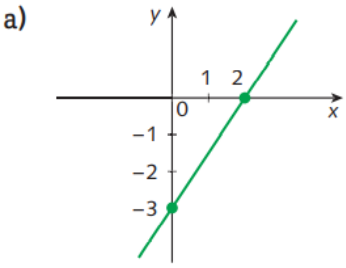
[16] As questões de aprofundamento 5 estão assim fundamentadas: 1. (GAY; SILVA, 2018); 2. (SILVEIRA, 2018); 3. (SILVEIRA, 2018); 4. (BIANCHINI, 2018); 5. Internet; 6. (DANTE, 2020).

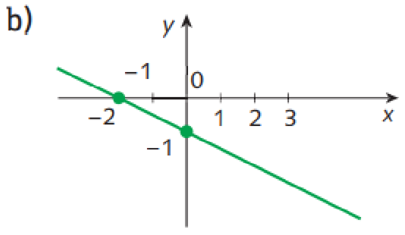
1. Observe o gráfico da função $f(x) = -x + 3$.



a) Para que valor de x o valor de f(x) é 0?
b) Para que valores de x temos $f(x) > 0$?
c) Para que valores de x temos $f(x) ,< 0$?

2. Analise os gráficos a seguir e determine os valores de x para os quais a função afim é positiva, negativa ou nula.





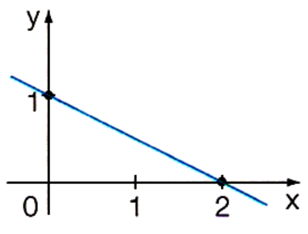
3. Determine os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

a) $y = 2x - 6$
b) $y = -8 + x$
c) $y = -x + 11$
d) $y = -2x - 4$

4. Considere a função do 1o grau definida por $y = ax + b$. Sabe-se que $a > 0$ e que o ponto determinado pelo par (5, 0) pertence ao gráfico dessa função. Determine o sinal de y quando:

a) $x = -2$
b) $x = 0$
c) $x = 4{,}99$
d) $x = 5{,}01$
e) $x = 10$

5. Examinando a gráfico da função do 1º grau f(x), da figura ao lado, classifique cada afirmativa em verdadeira (V) ou em falsa (F) :



a) Se $x > 2$, então $f(x) < 0$. ( )

b) Se $x < 0$, então $f(x) < 0$. ( )

c) Se $x = 0$, então $f(x) = 1$. ( )

d) Se $x > 0$, então $f(x) < 0$. ( )

e) Se $x < 0$, então $f(x) > 1$. ( )

f) Se $x < 2$, então $f(x) > 0$. ( )

6. Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade dessa mercadoria por R$ 5,00, o lucro final será dado em função das x unidades vendidas.

a) a lei da função correspondente ao valor gasto em cada plano, em função de x;
b) qual das funções têm maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado;
c) em que condições é possível afirmar que o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes.

Fonte: Autor, 2022.

Atividade 6

Título: O Zero da função
Objetivo: Descobrir as características dos pontos de intersecção da função afim com os eixos coordenados.
Material: Quadro de gráficos I, roteiro da atividade, papel, caneta.
Procedimento: Analise cada situação e responda o solicitado
Situação. Para cada gráfico do quadro de gráficos:

- Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função afim com o eixo das abscissas;
- Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função afim com o eixo das ordenadas;
- Com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbf{y = ax + b}$	Coordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo das abscissas.	Coordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo das ordenadas.
$y = x + 3$	(,)	(,)
$y = 2x + 6$	(,)	(,)
$y = x - 2$	(,)	(,)
$y = -2x + 3$	(,)	(,)
$y = -x - 3$	(,)	(,)
$y = 3x + 6$	(,)	(,)
$y = 2x - 4$	(,)	(,)
$y = -2x + 2$	(,)	(,)
$y = -x - 5$	(,)	(,)
$y = -3x + 3$	(,)	(,)

O valor do domínio da função f que tem como imagem zero é denominado de **ZERO** da função f, ou seja, o valor de x no qual $y = f(x) = 0$.

Fonte: Silva (2018).

Análise a priori da atividade 6

Para os autores, esta atividade trabalha a questão da localização geométrica do zero e do coeficiente linear da função afim, a partir de sua representação gráfica.

Para os autores Silva (2018) e Sá (2017) os alunos não terão grandes dificuldades no desenvolvimento e no alcance do objetivo da atividade. Frisamos que os gráficos se encontram no Anexo C.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO[17] 6

1. Sem construir gráficos, descubra os pontos em que as retas, gráficos das funções abaixo, cortam o eixo x.

$a)\ f(x) = x - 2$
$b)\ f(x) = -x + 4$
$c)\ f(x) = -2x$
$d)\ f(x) = \frac{x}{2} - 1$

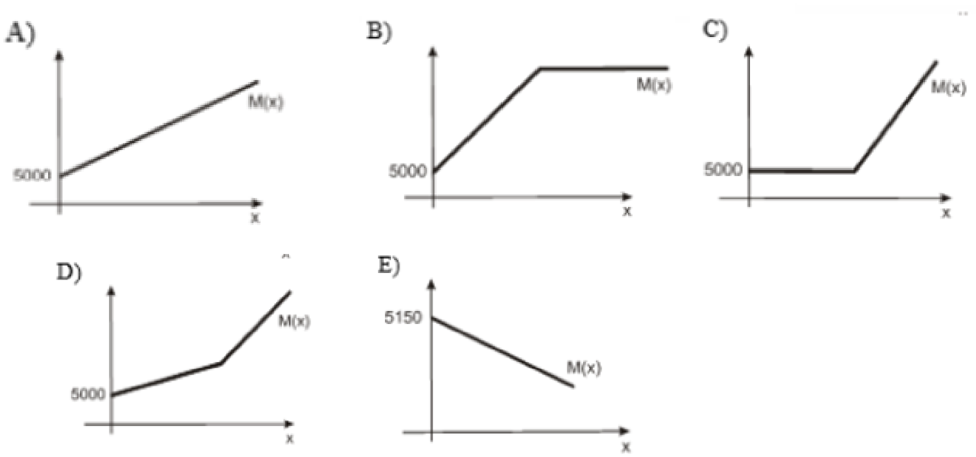
2. Um motorista percorre uma estrada movimentando-se de acordo com a função horária $S(\mathrm{t}) = 100\mathrm{t} - 50$,em que $\mathrm{S}(\mathrm{t})$ representa sua posição (em km) e t representa o tempo (em h). Depois de quanto tempo o motorista passa pelo marco quilômetro zero (km 0)?

3. Para que valores de a, o número –1 será raiz da função $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = (1 - \mathrm{a})\mathrm{x} + 2$?

4. Dada a função afim $\mathrm{f}: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, definida por $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 5$, determine:

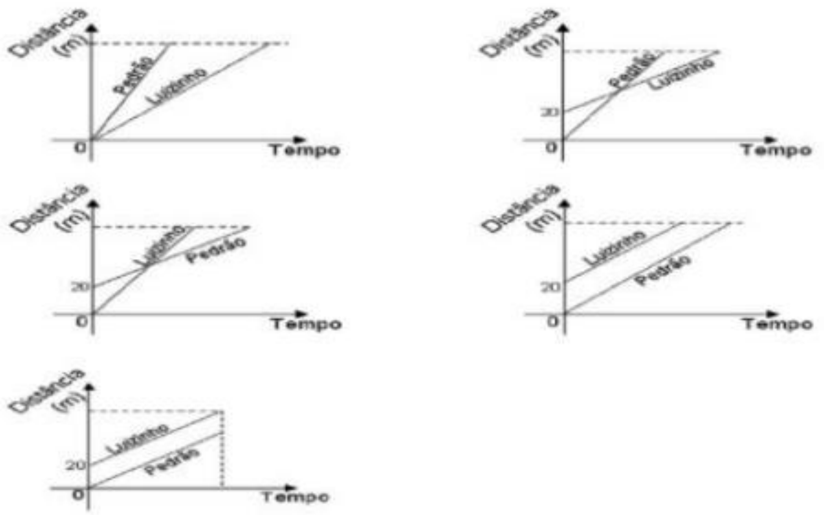
a) O zero da função?
b) Para que valores de x a função e positiva?
c) Para que valores de x a função e negativa?

5. Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses. Nessas condições, a representação gráfica correta para M(x) é

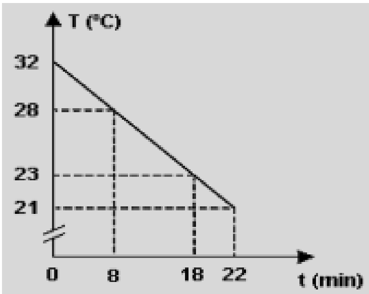


6. Luizinho desafia seu irmão mais velho, Pedrão, para uma corrida. Pedrão aceita e permite que o desafiante saia 20 metros a sua frente. Pedrão ultrapassa Luizinho e ganha a corrida.

[17] As questões de aprofundamento 6 estão assim fundamentadas: 1. (DANTE, 2020); 2. (DANTE, 2020); 3. (PUC); 4. (DANTE, 2020); 5. ENEM; 6. SAEB; 7. SARESP; 8. Silva;9. UFRGS



7. A temperatura interna de uma geladeira, ao ser instalada, decresce com a passagem do tempo, conforme representado no gráfico



A equação algébrica que relaciona a temperatura interna da geladeira (T) ao tempo (t), para o trecho representado no gráfico é

8. A equação da reta que passa pelo ponto P (1, – 3) e tem inclinação igual $\frac{3}{2}$ é**?**

9. Considere as funções f e g, definidas por $f(x) = 4 - 2x$ e $g(x) = 2f(x) + 2$. Representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, a função f intercepta o eixo das ordenadas no ponto A e o eixo das abscissas no ponto B, enquanto a função g intercepta o eixo das ordenadas no ponto D e o eixo das abscissas no ponto C. A área do polígono ABCD é**?**

Fonte: Silva (2018).

As atividades propostas, bem como, as questões de aprofundamento, enfatiza a utilização de atividades práticas para a compreensão e representação gráfica da função afim. Silva (2018) destaca a importância de propiciar aos alunos a capacidade de construir gráficos e entender a relação entre os valores do domínio e imagem da função. Além disso, as atividades visam não apenas a interpretação de gráficos, mas também a capacidade dos alunos de derivar a lei de formação de uma função a partir de dados tabulares.

Outro ponto relevante é a abordagem pedagógica que busca desenvolver a capacidade analítica dos alunos. Por meio das atividades propostas, os educandos são incentivados a descobrir expressões algébricas, compreender o conceito de função afim e analisar relações entre variáveis. Esta abordagem prática, que enfatiza a descoberta e a análise crítica, é essencial para aprimorar o entendimento dos conceitos matemáticos.

Por fim, a menção à localização geométrica do zero e do coeficiente linear da função afim ressalta a importância da representação gráfica na compreensão da matéria. Acredita-se que, ao visualizar e interagir com esses gráficos, os alunos terão menos dificuldades em entender os conceitos subjacentes, tornando o aprendizado mais intuitivo e aplicável em diferentes contextos.

Na seção subsequente, referente à fase de experimentação, implementaremos as atividades propostas. Utilizando as estratégias da Engenharia Didática, realizaremos mediações pedagógicas para orientar eficazmente o aluno no processo de práxis pedagógica. Isso significa que, após cada atividade, refletiremos sobre a dinâmica de sua resolução e, finalmente, avaliaremos o aprendizado. Se necessário, revisaremos a resolução, incorporando o conhecimento adquirido pelo método da descoberta.

4 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção apresentaremos a etapa de aplicação dentro da fase da experimentação, bem como, os resultados procedentes dos registros obtidos na experimentação da sequência didática, durante a jornada de pesquisa no decorrer das atividades desenvolvidas em cada sessão, desde o dia 21/09/2022 e encerrado no dia 09/11/2022, contando com as participações de 19 duplas e 6 alunos individuais (distribuição feita pelos próprios alunos no momento da distribuição das atividades) de duas escolas municipais (E1 e E2) do ensino fundamental dos anos finais do município de Altamira-PA que será desenvolvida no momento oportuno das visitas *in loco*. Também apresentaremos o *lócus* da pesquisa, o cronograma da aplicação da sequência didática, os sujeitos da pesquisa, bem como, os instrumentos de coleta de dados, assim como a aplicação de cada sessão de ensino ancorado no método da descoberta.

4.1 Contexto da pesquisa

O contexto da pesquisa se dará em ambientes escolares, num universo de 9 escolas municipal da zona urbana que oferecem o ensino fundamental dos anos finais no Município de Altamira, do Estado do Pará. Destas escolas, 2 delas serão selecionadas. Todas são de portes médios atendendo uma média de 620 alunos nos dois turnos (manhã e tarde)[18]. Apresentam uma infraestrutura adequada, com algumas pequenas falhas em acessibilidade. Ambas estão regularmente legalizadas tanto pelo Conselho Estadual de Educação – CEE/PA, como pelo Conselho Municipal de Educação – CME-Altamira-PA. As duas Escolas serão abordadas doravante como Escola 1 (E1) e Escola 2 (E2).

Os resultados obtidos pela E1 por meio da Prova Brasil[19], no ano de 2019 (os dados de 2021 ainda não foram disponibilizados), demonstraram que a média de proficiência em matemática foi de 249,65 pontos, dos alunos do 9.º ano do ensino fundamental. Resultado este coloca a referida escola em uma Escala SAEB de Nível 3 (conforme Anexo E). Destes, podemos distribuir assim: 7% estão no nível adequado,

---

[18] Não estamos considerando os alunos da Educação de Jovens e Adultos no turno da noite.
[19] A Prova Brasil é uma avaliação censitária das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino.

sendo: 1% no nível avançado[20] (1 aluno) e 6% no nível de proficiência[21] (9 alunos); 65% estão em nível básico[22] (95 alunos); 28% estão no nível insuficiente[23] (41 alunos). Já a E2 os resultados obtidos por meio da Prova Brasil, demonstraram que a média de proficiência em matemática foi de 262,42 pontos, dos alunos do 9.º ano do ensino fundamental. Neste caso, apesar de uma melhora, este resultado coloca a referida escola em uma Escala SAEB também de Nível 3. Destes, podemos distribuir assim: 16% estão no nível adequado, sendo: 3% no nível avançado (3 alunos) e 13% no nível de proficiência (9 alunos); 64% estão em nível básico (44 alunos); 20% estão no nível insuficiente (14 alunos).

Ressaltamos que a distribuição dos alunos por proficiência é apresentada por aprendizado dos alunos em 4 níveis qualitativos de proficiência. No que tange ao aprendizado adequado engloba os níveis proficiente e avançado.

Tais resultados se revelam que as escolas estão em estado de atenção com relação a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

4.1.2 Cronograma de visitas às escolas

A pesquisa se desenvolverá no período de 21 de setembro a 9 de novembro de 2022, conforme o quadro 9 abaixo:

Quadro 10 - Cronograma de apresentação e execução de ensino na experimentação

Data	Sessão	Atividade do dia	Horário de visita	Escolas
21/09/2022	1.ª	Apresentação nas escolas para a ciência dos diretores no TCLE e ter o (acesso ao) cronograma das aulas do 9º ano do Ensino Fundamental	9h às 10h	E1
			14h às 15h	E2
27/09/2022	2.ª	Aplicação do questionário e do Pré-teste	9h às 10h45min	E1
		Aplicação do questionário e do Pré-teste	13h30min às 15h	E2
18/10/2022	3.ª	Aplicação da Atividade 1 e de aprofundamento – Descubra a minha regra.	9h às 10h45min	E1
			13h30min às 15h	E2
19/10/2022	4.ª	Aplicação da Atividade 2: Identificação dos coeficientes e gráficos da função afim e Atividade 3: Construção do gráfico da função afim e de aprofundamentos	9h às 10h45min	E1
			13h30min às 15h	E2

[20] Aprendizado além da expectativa. Recomenda-se para os alunos neste nível atividades desafiadoras.
[21] Os alunos neste nível encontram-se preparados para continuar os estudos. Recomenda-se atividades de aprofundamento
[22] Os alunos neste nível precisam melhorar. Sugere-se atividades de reforço.
[23] Os alunos neste nível apresentaram pouquíssimo aprendizado. É necessário a recuperação de conteúdos.

25/10/2022	5.ª	Aplicação da atividade 4: Identificando a lei de formação de uma função afim; e a atividade 5: Identificando o sinal da função afim, bem como, as atividades de aprofundamento.	9h às 10h45min	E1
			13h30min às 15h	E2
08/11/2022	6.ª	Aplicação da atividade 6: O Zero da função e de aprofundamento	9h às 10h45min	E1
			13h30min às 15h	E2
09/11/2022	7.ª	Aplicação do Pós-teste	9h às 10h45min	E1
			13h30min às 15h	E2

Fonte: Autor, 2022.

A descrição de cada sessão desenvolvida durante a sequência didática será apresentada na fase da Experimentação destinada para aplicação das sequências didáticas, consequentemente das atividades.

4.1.3 Sujeitos da pesquisa

Serão sujeitos da pesquisa 49 alunos, tanto do sexo feminino como do sexo masculino, na faixa etária média de 14 anos, sendo contemplados duas turmas cada uma respectivamente em média com 25 alunos do 9.º ano do ensino fundamental. Para tanto, os critérios aplicados, para a escolha da amostra selecionada, foram os seguintes:

1º - Escolas das Zona Urbana do Município de Altamira-PA;
2º - Escolas que atendem alunos de 6.º a 9.º anos do ensino fundamental;
3º - Uma escola do bairro centro e outra do bairro periférico da cidade de Altamira-PA;
4º - Uma escolha do turno da manhã, outra do turno da tarde;
5º - Amostra foi aleatória probabilística em uma população de 9 escolas que satisfazem o 1º critério acima.

Assim, tais procedimentos nortearam a pesquisa de campo, bem como, percebemos que este tópico está alinhado ao tópico da contextualização do lócus da pesquisa.

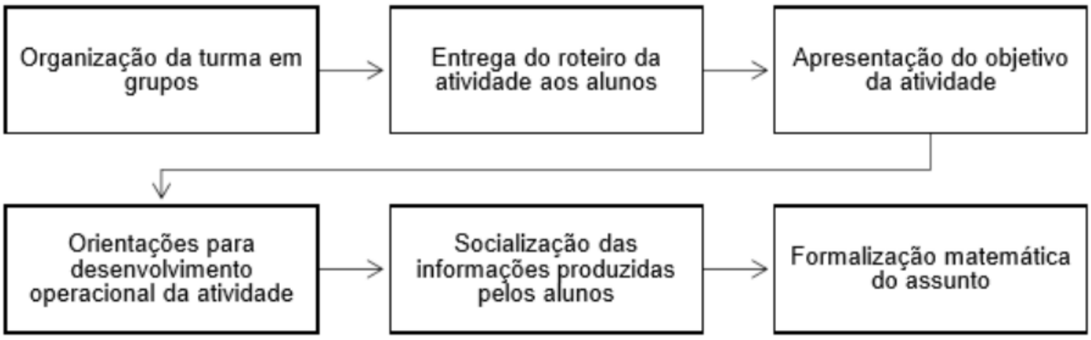
4.1.4 Instrumentos de Coletas de Dados

Os recursos utilizados em nossa experimentação terão como técnica de pesquisa a observação e como instrumentos de pesquisa anotações em diário de campo, a aplicação de questionário visando à obtenção de algumas informações dos discentes, que vão desde a sua idade até as opiniões deles acerca das aulas de matemática no ensino fundamental. (Ver Apêndices A e B).

4.2 Organização do processo de aplicação das atividades

Nesta etapa, para efeito de análises, teremos a participação de 49 alunos presentes na aplicação do Pré e Pós-teste. Com intuito de manter a ética na pesquisa, portanto, o anonimato dos participantes, doravante denominados os discentes envolvidos de “D1”, “D2”, ..., “D49”. O experimento será organizado em sessões de aplicação de cada atividade, conforme anteriormente já mencionado. Para tanto, se valeu do esquema adotado por Lopes (2015) citado por Silva (2018), qual seja:

Figura 17- Esquema Processo de aplicação de cada atividade



Fonte: Lopes (2015, p. 136, apud SILVA, 2018, p.112).

Frisamos que os dados analisados serão originários das produções dos educandos durante cada atividade, bem como dos diálogos ocorridos nos encontros e dos diagnósticos obtidos com os Pré e Pós-teste e da aplicação das sequências didáticas. (Ver Apêndice C).

4.3 Primeira sessão de visita

No dia 21/09/2022 (quarta-feira) das 9h às 10h tivemos o primeiro contato in *loco* com a direção da escola (E1), apresentamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE. A direção foi receptiva e se colocou à disposição para que fosse realizada a pesquisa de mestrado. Desta forma pegamos o cronograma das aulas do 9.º ano do Ensino Fundamental. Nesta mesma data, no período da tarde, das 14h às 15h foi feito o mesmo procedimento na escola E2.

Na primeira sessão de visita com a direção, também se encontrei com o professor titular do componente curricular de matemática do 9.º ano do ensino fundamental e conversamos acerca da turma, apenas para me inteirar do perfil comportamental em sala de aula dos alunos.

4.3.1 Segunda sessão de ensino – Aplicação do questionário e o Pré-teste

No dia 27/09/2022 (terça-feira) das 9h às 10h45min tivemos o primeiro contato *in loco* com os 31 alunos da escola E1; na Escola E2 com 18 alunos, a sessão de ensino ocorreu nessa data, mas no horário das 13h30min às 15h, em ambas as ocasiões dialogamos acerca das atividades que seriam propostas e o objetivo da pesquisa em nível de Mestrado da Universidade do Estado do Pará, bem como, a maneira pela qual a sequência didática seria desenvolvida.

Após as explicações iniciais, foi ressaltado a importância da participação da turma em responder o questionário, de se concentrarem e se dedicarem na realização de cada atividade que seria proposta durante as sessões. Frisamos que a participação deles estavam atreladas também a avaliação bimestral das aulas do professor titular da turma, portanto, o esforço de cada estava sendo considerado pelo docente. Consequentemente, ocorreu a aplicação do questionário socioeconômico, para o qual foi destinado de 15 a 20 minutos iniciais do planejamento da aula, onde verificamos os resultados que serão expostos no subtópico 4.3.2. Após o preenchimento do referido questionário, aplicamos o Pré-teste (70 minutos restantes) cujos resultados podem ser acompanhados no subtópico 4.3.3.

4.3.2 Perfil dos discentes

Os discentes do ensino fundamental uma parcela significativa com idade regular para a turma de 9.º ano, de acordo com o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola são alunos oriundos de famílias com pouco poder aquisitivo e em sua maioria com o nível de escolaridade de ensino fundamental incompleto, apenas uma pequena parcela com o ensino médio. Corroborando com essa afirmação, citamos:

> Em sua maioria, as famílias possuem o ensino fundamental incompleto, com rara exceção, o ensino médio, o que denota, pela incompletude dessas etapas fundamentais de aprendizagem, as dificuldades sempre presentes e muitas vezes não superadas na trajetória de vida dessas pessoas. Consideramos oportuno atestar que essa realidade de vida, marcada por dificuldades e desafios não superados, reflete da comunidade escolar e reverbera diretamente na qualidade e no rendimento escolar da E2 (PPP, 2022, p. 10).

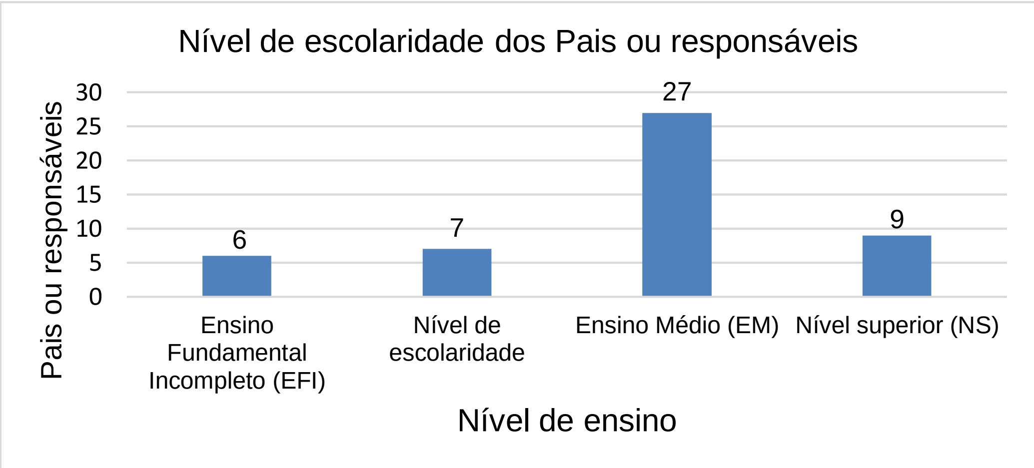
A pesquisa de campo neste momento vai de encontro com os dados do PPP da escola, porque, na questão que indagava o nível de escolaridade dos responsáveis, os dados nos dizem que:

Quadro 11 - Nível de ensino dos pais ou responsáveis

Nível de escolaridade	Pais ou responsáveis	Percentual
Ensino Fundamental Incompleto (EFI)	6	12%
Ensino Fundamental Completo (EFC)	7	14%
Ensino Médio (EM)	27	55%
Nível superior (NS)	9	18%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 22 - Nível de ensino dos pais ou responsáveis



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Diante deste cenário, passamos analisar as respostas dos 49 participantes (E1 e E2) no questionário socioeconômico (Apêndice A) que possibilitou a definição do perfil deles enquanto gênero. Assim, dos 49 participantes, 55% são do gênero masculino e 45% do feminino.

Quadro 12 - Gêneros dos alunos consultados

Sexo	N.º de alunos	Percentual (%)
Feminino	22	45%
Masculino	27	55%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 23 - Percentual de gênero dos alunos consultados

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Diante dos dados observamos uma pequena diferença em relação aos alunos do gênero feminino e masculino. Os dados obtidos se aproximam dos encontrados no PPP (2022) de ambas as escolas, mostrando uma tendência para a predominância do gênero masculino em relação aos alunos matriculados nas escolas E1 e E2.

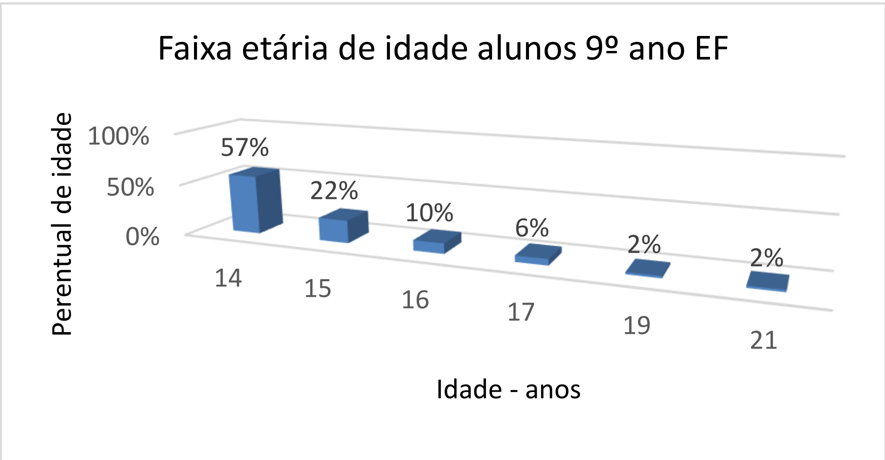
Em relação à faixa etária de idade dos alunos consultados, a pesquisa nos revelou os seguintes dados:

Quadro 13 - Faixa etária de alunos consultados

Idade	Números de alunos	Percentual
14	28	57%
15	11	22%
16	5	10%
17	3	6%
19	1	2%
21	1	2%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 24-Faixa etária dos alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O resultado acima demonstra uma distorção entre à idade-série uma vez que somente 57% estão dentro da faixa etária ideal, conforme a LDB 9.9394/96. Portanto, 43% (16 a 21 anos de idade) estão fora desta faixa, causa preocupação pois estamos na segunda década do século XXI. À luz da letra da lei alguns alunos (6% - 17 anos) nessa idade deveriam estar finalizando o ensino médio da educação básica (MEC), bem como, dois deles (19 e 21 anos) já estivessem cursando um nível superior.

Com relação ao assunto do questionário que trata de indagar quem é o responsável do aluno, as respostas ficaram assim distribuídas:

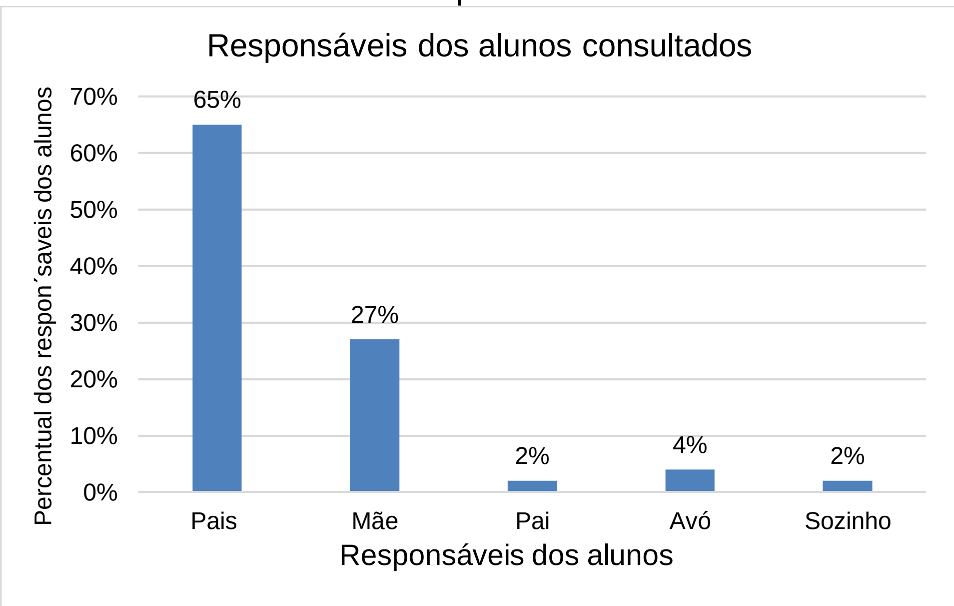
Quadro 14 - Quem é o seu responsável?

Responsáveis	**Quantidade**	**Percentual**
Pais	32	65%
Mãe	13	27%
Pai	1	2%
Avó	2	4%
Sozinho	1	2%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A categoria Pais foi criada em função das respostas marcadas nas opções pai e mãe ao mesmo tempo; a categoria Sozinho, foi criada em função da resposta do aluno de 21 anos de idade, ele respondeu que já morava sozinho e, portanto, era o próprio responsável.

Gráfico 25 - Percentual dos responsáveis dos alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Outra importante observação destas respostas é que mais uma vez, ela vai de encontro com o PPP das escolas (E1 e E2), pois, no perfil das suas respectivas comunidades afirmam que a maioria dos alunos moravam com os avós e os dados acima demonstraram que 65% dos alunos residem com os pais e apenas 4% com os avós. Vale ressaltar que morando somente com a mãe são 27%, então é considerável; morando somente com o pai são 2% dos alunos consultados e um aluno mora sozinho (2%), entretanto, friso que ele está em uma sala de aula, demonstrando interesse pelos estudos.

Agora com relação se há alunos que trabalha, apenas 2, isto é cerca de 4% disseram que "às vezes" trabalham e 47 dos que responderam ao questionário (96%), não trabalham.

Referente a cursos que os alunos consultados estão fazendo, as respostas ficaram assim distribuídas:

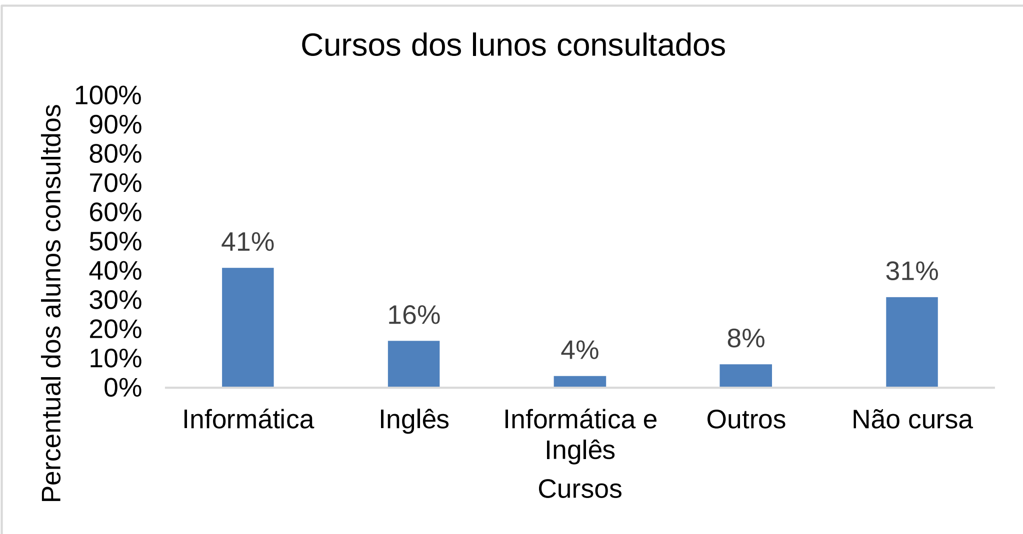
Quadro 15 - Cursos que os alunos consultados participam

Cursos	Quantidades
Informática	20
Inglês	8
Informática e Inglês	2
Outros	4
Não cursa	15

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados acima revelam algo relevante, pois demonstraram que aproximadamente 70% dos alunos estão fazendo um curso, dentre eles, o de informática foi o mais escolhido cerca de 41%, conforme consta no gráfico 25 abaixo.

Gráfico 26 - Cursos frequentados pelos alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Igualmente, percebemos pelo gráfico 26 acima que 4% dos consultados cursam dois cursos (informática e inglês), 8% dos consultados cursam outros cursos e 31% não cursam nenhum, apenas estudam no ensino regular. É importante ressaltar que o índice dos alunos nessa faixa etária de idade que estão cursando de forma paralela outros cursos senão o 9.º ano é significante e positivo.

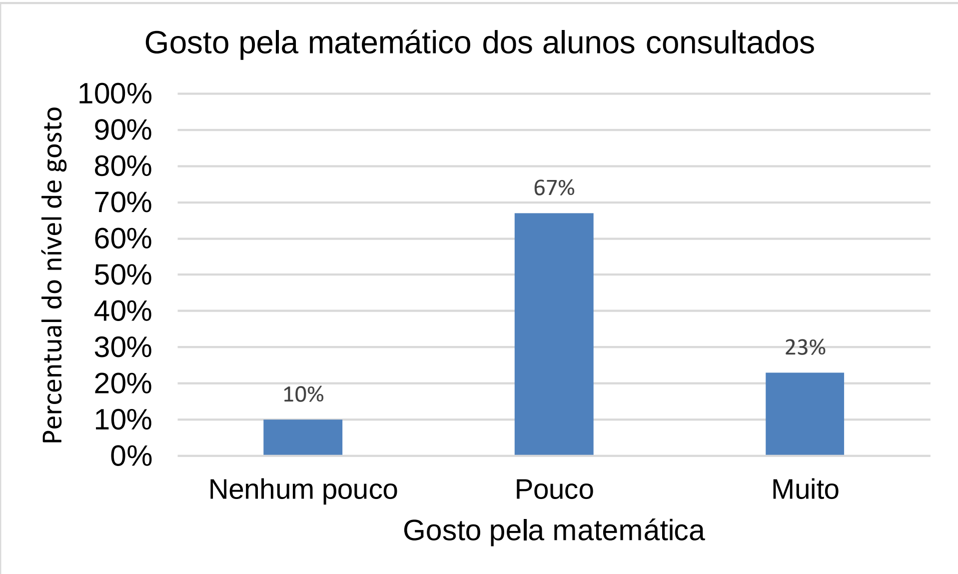
Outra questão proposta foi do gosto pela matemática dos consultados, a análise dos dados nos revelou que:

Quadro 16 - Você gosta de Matemática?

Gosto pela Matemática	Quantidades
Nenhum pouco	5
Pouco	33
Muito	11

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 27 - Você gosta de Matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Depreendemos dos dados do gráfico 27 que 67% dos consultado gosta pouco da matemática, 23% responderam gostar muito, porém, 10% manifestaram sua opinião em não gostar nenhum pouco. Certamente para faixa etária está dentro do aceitável, uma vez que ao longo do processo ensino aprendizagem da matemática o docente pode despertar o interesse e/ou a necessidade dos discentes em aprender a Matemática.

Com relação ao assunto do questionário que trata de indagar se o aluno já ficou em dependência em alguma disciplina escolar até a realização da pesquisa, obtemos os seguintes dados.

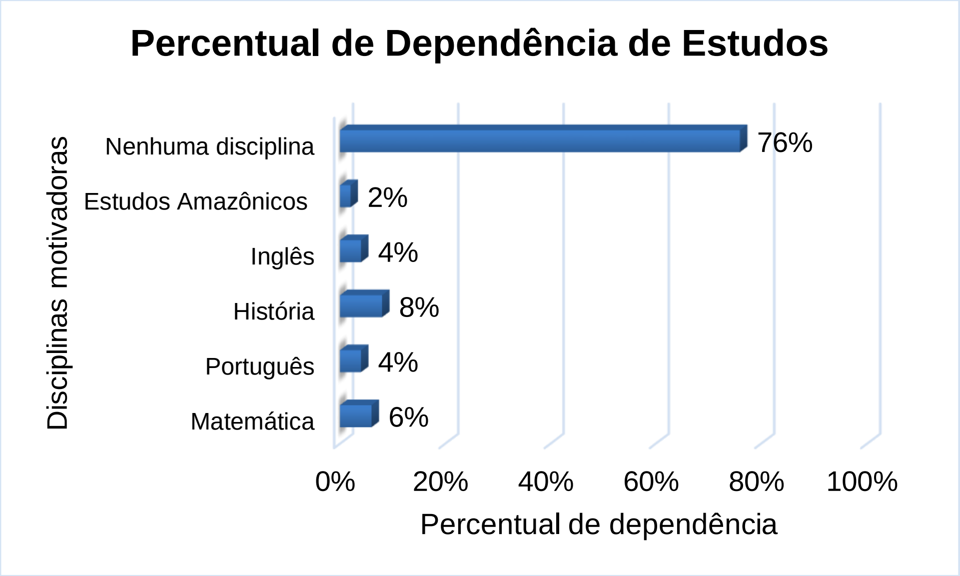
Quadro 17 - Você já ficou em dependência de estudos?

Não	38
Sim	11
Em quais disciplinas	Matemática, História, Português, Inglês e Estudos Amazônicos.

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Em relação as disciplinas motivadoras de dependências de estudos, ficaram distribuídas conforme o gráfico 28 abaixo.

Gráfico 28 - Percentual de Dependência de Estudos dos alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Ressaltamos que os dados acima calculados por disciplina, não significa dizer que são alunos distintos em todas elas. Assim sendo, a pesquisa demonstrou que, por exemplo, houve aluno que ficou em mais de uma disciplina, foi o caso do discente D13, que ficou em dependência de estudo em Matemática e em Português. Entretanto, os resultados foram aceitáveis no tangente a quantidade, pois demonstraram um percentual baixo, na disciplina de Matemática 6%, Português e Inglês 4%, Estudos Amazônicos 2% e História com 8%.

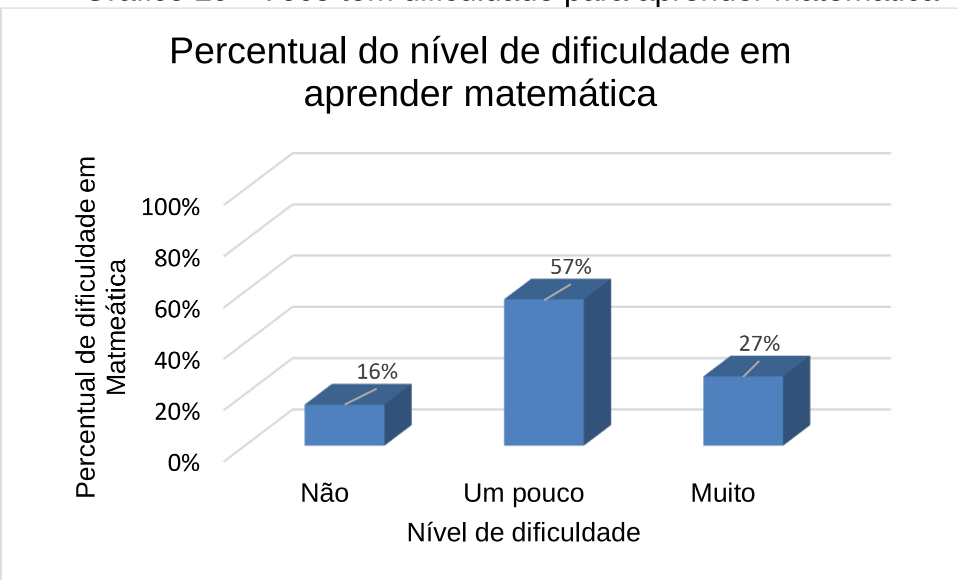
Em relação as questões de quem já reprovou e se tem dificuldade para aprender matemática, a sistematização das respostas revelou que 98% dos discentes consultados não reprovaram ainda e apenas 2% (1 aluno) reprovou durante a vida escolar até o momento; agora no nível de dificuldade que cada aluno se considera o quadro 18 e o gráfico 29 nos trazem mais informações sobre essa problemática.

Quadro 18 - Você tem dificuldade para aprender matemática

Dificuldade em aprender matemática	Quantidade	Percentual
Não	8	16%
Um pouco	28	57%
Muito	13	27%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 29 - Você tem dificuldade para aprender matemática



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O resultado acima se aproxima dos dados do SAEB das escolas pesquisadas E1 e E2, em ambas as escolas, respectivamente 28% e 20% estão no nível insuficiente no componente curricular de matemática. Os dados acima demonstram que 27% têm muita dificuldade para aprender matemática, 57% apresentam pouca dificuldade e 16% não têm dificuldade.

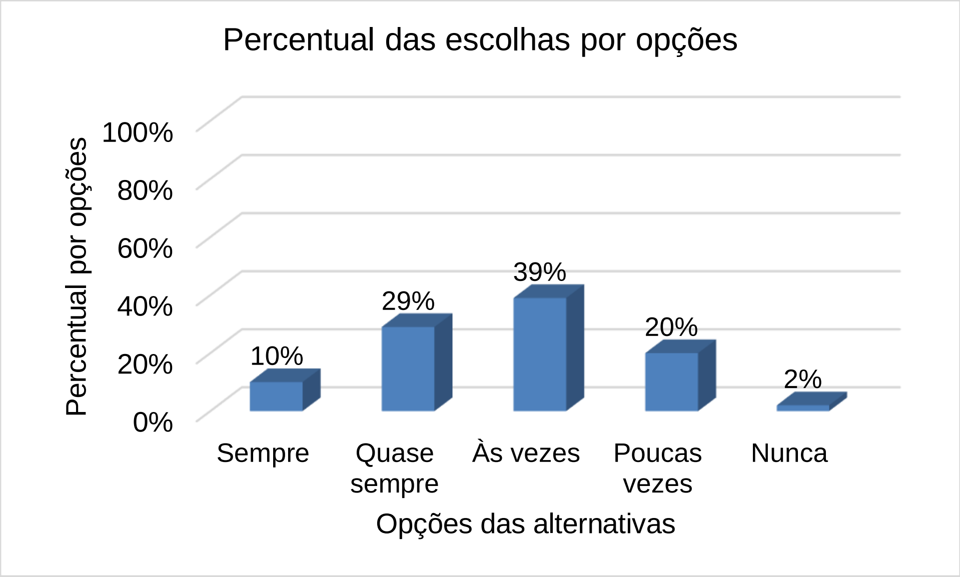
Os discentes responderam se eles conseguem entender as explicações dadas nas aulas de matemática, as respostas ficaram distribuídas conforme o quadro 19 abaixo.

Quadro 19 - Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

Opções	Quantidade	Percentual
Sempre	5	10%
Quase sempre	14	29%
Às vezes	19	39%
Poucas vezes	10	20%
Nunca	1	2%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 30 - Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

As respostas acima revelam que as aulas de matemática não estão sendo compreendidas conforme deveriam. Haja vista que 39% às vezes conseguem entender, 29% quase sempre, 20% entendem poucas vezes, 2% (1 aluno) nunca entende e apenas 10% sempre entendem. Dados como estes, faz com que repensemos as nossas estratégias de ensino, ou seja, a nossa didática conjuntamente com uma reflexão junto aos alunos dos interesses e das dedicações que eles aplicam em estudos de matemática fora da sala de aula.

Na questão que abordava quais formas de atividades e/ou trabalho que os alunos são submetidos a avaliação de matemática tivemos as seguintes respostas.

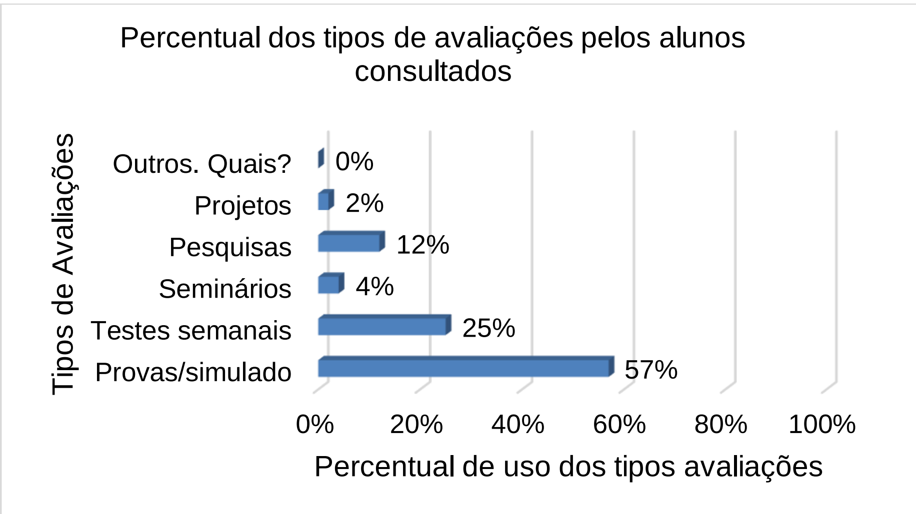
Quadro 20 - Os alunos consultados fazem que tipos de avaliação em matemática?

Tipos de avaliação	Quantidade/resposta	Percentual
Provas/simulado	28	57%
Testes semanais	12	25%
Seminários	2	4%
Pesquisas	6	12%
Projetos	1	2%
Outros. Quais?	0	0%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Depreendemos das respostas acima que sendo os alunos de duas turmas apenas terem tanta diversidade nas respostas das respectivas salas de aula. Entretanto, intuímos que a diversidade pode fazer parte das estratégias dos docentes, contudo dá de afirmar que provas e simulados seguidos por teste semanais são mais presentes nas aulas de matemática, conforme mais bem visualizado no gráfico 31 abaixo.

Gráfico 31 - Os alunos consultados fazem que tipos de avaliação em matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Percebemos que 57% responderam que fazem provas e simulados nas aulas de matemática como o modelo de avaliação mais rotineira do docente. Contudo, 25%

responderam que são por meio de testes semanais e 12% responderam que são por meio de pesquisas, ainda podemos observar que 4% responderam que são avaliados por meio seminários e 2% (1 aluno) respondeu que é através de projetos.

Em síntese, observamos que houve um desencontro das respostas dos alunos, uma vez que, são da mesma turma e não teve consenso, apesar da maioria ter respondido provas e simulados, uma parcela considerada, isto é, 43% responderam sendo outros tipos de avaliações.

Em relação a questão você se distrai nas aulas de matemática? a sistematização dos dados demonstrou o seguinte resultado conforme o quadro 15.

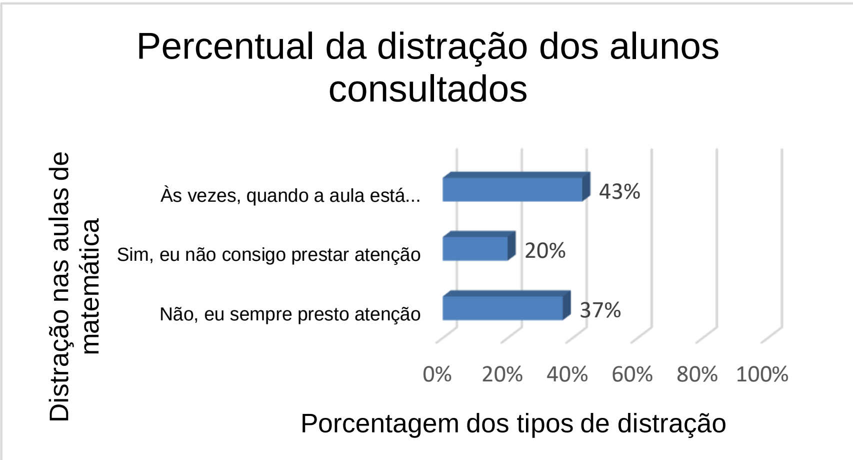
Quadro 21 - Você se distrai nas aulas de matemática?

Distração nas aulas	Quantidade/resposta	Percentual
Não, eu sempre presto atenção	18	37%
Sim, eu não consigo prestar atenção	10	20%
Às vezes, quando a aula está...	21	43%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Para uma melhor visibilidade dos resultados acompanhe o gráfico 32 a seguir.

Gráfico 32 - Você se distrai nas aulas de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

As respostas demonstram que 37% dos alunos consultados não se distraem durante as aulas de matemática; 20% disseram que sim, se distraem e a maioria (43%) dos alunos responderam às vezes, quando a aula está segundo alguns deles, “irritante”, “barulhenta” e um respondeu quando a aula está “chata”.

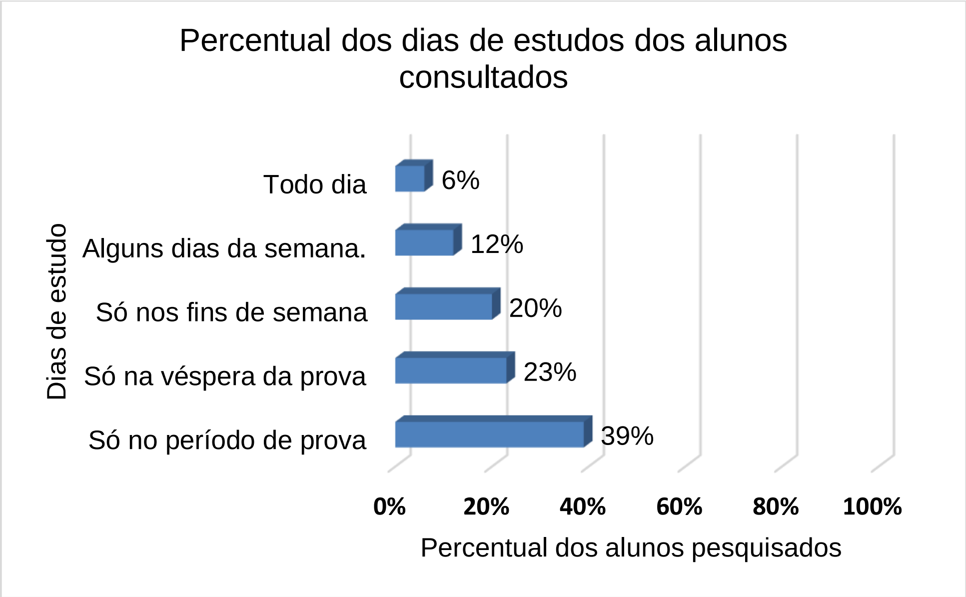
Em relação à pergunta que visava saber se os alunos tinham hábitos de estudar matemática fora da escola, as respostas foram assim sistematizadas:

Quadro 22- Você tem hábito de estudar matemática fora da escola?

Período de estudo	Quantidade/Resposta	Percentual
Só no período de prova	19	39%
Só na véspera da prova	11	23%
Só nos fins de semana	10	20%
Alguns dias da semana.	6	12%
Todo dia	3	6%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 33 - Você tem hábito de estudar matemática fora da escola?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados demonstraram uma realidade bastante comum nas falas de alunos em sala de aula, que é estudar apenas no período de prova, no caso acima, 39% dos alunos consultados, estuda nas semanas de provas; 23% estudam apenas na véspera da prova; 20% responderam estudar nos finais de semana; 12% durante alguns dias da semana e somente 6% responderam que estudam todos os dias.

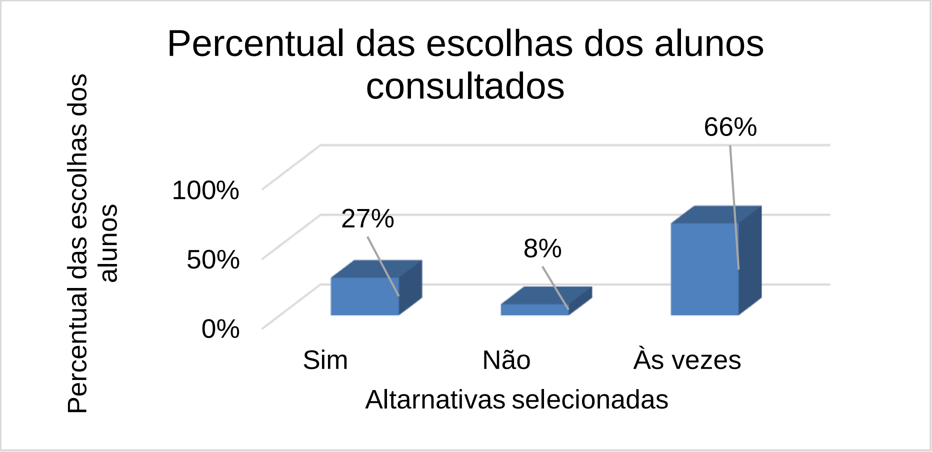
Outra questão respondida pelos discentes foi: você é capaz de fazer relação dos conteúdos matemáticos dados em sala com seu cotidiano? As respostas foram assim classificadas:

Quadro 23 - Você é capaz de fazer relação dos conteúdos matemáticos dados em sala com seu cotidiano?

Contextualização do que estuda	**Quantidade**	**Percentual**
Sim	13	27%
Não	4	8%
Às vezes	32	66%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 34 - Você é capaz de fazer relação dos conteúdos matemáticos dados em sala com seu cotidiano?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados demonstram que 66% às vezes contextualizam o que se aprende nas aulas de matemática com o cotidiano; 27% responderam que sim, conseguem correlacionar o que se aprende com o seu dia a dia e apenas 8% não conseguem fazer essa contextualização com o cotidiano.

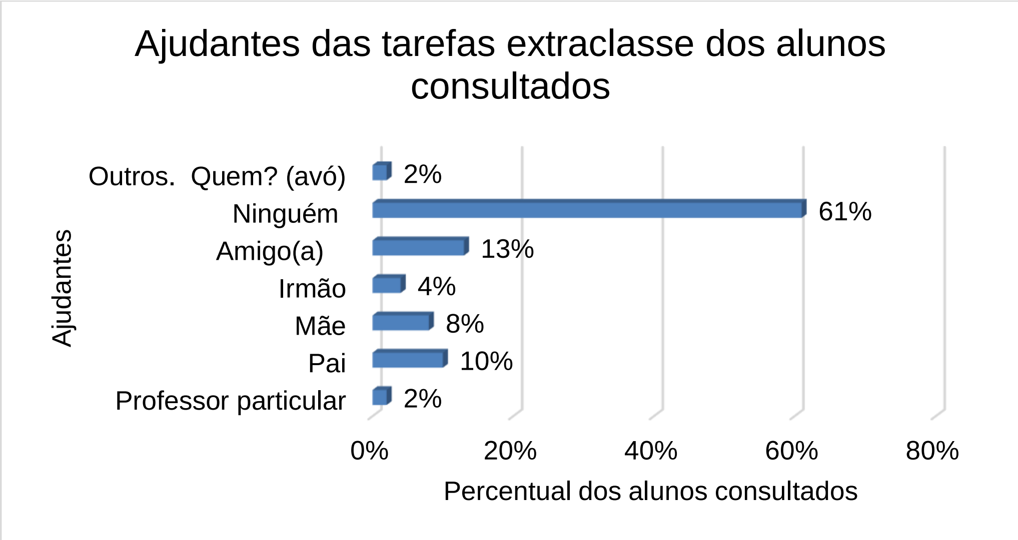
Também os alunos consultados responderam: quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?

Quadro 24 - Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?

Ajudante	**Quantidade**	**Percentual**
Professor particular	1	2%
Pai	5	10%
Mãe	4	8%
Irmão	2	4%
Amigo(a)	6	13%
Ninguém	30	61%
Outros. Quem? (avó)	1	2%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 35 - Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Das respostas obtidas percebemos que 61% dos alunos consultados estudam sozinhos; 13% os amigos ajudam com as tarefas de matemática; 4% responderam que são os irmãos que os ajudam com os deveres; 8% disseram as mães são as responsáveis por ajudá-los com as atividades; 10% disseram que os pais que os ajudam, 2% (1 aluno) respondeu que é a avó quem o ajuda e 2% responderam que é o professor particular que o ajuda com as tarefas de matemática.

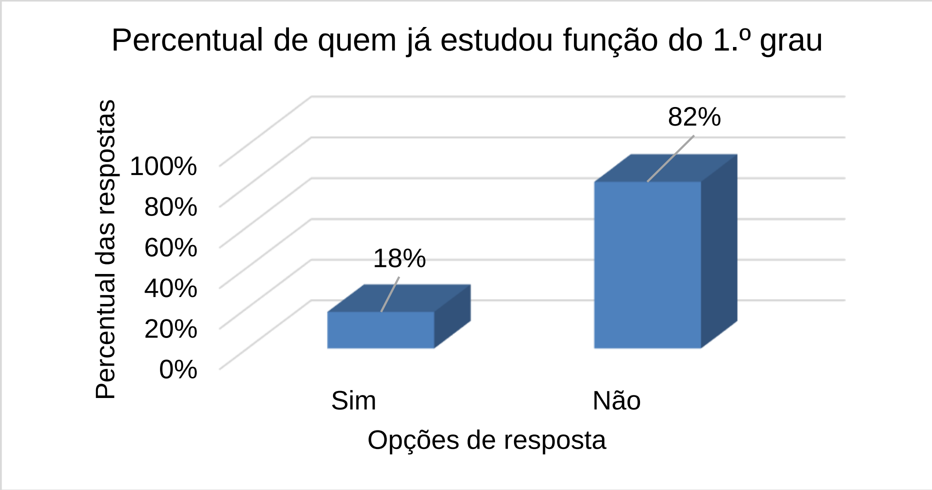
Uma das questões respondida pelos alunos consultados foi: Você já estudou função do 1.º grau? E as respostas de forma objetiva apresentou duas alternativas: Sim ou Não. Desta feita, quem respondeu "Não", implicou em não responder mais duas questões que estavam diretamente concatenadas a esta. A sistematização dos dados está no quadro 25 abaixo.

Quadro 25 - Você já estudou função do 1.º grau?

Opções	**Quantidade**	**Percentual**
Sim	9	18%
Não	40	82%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 36 - Você já estudou função do 1.º grau?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

As respostas acima proporcionam um contexto analítico resumido das questões "Quando você estudou **Função afim**, as aulas iniciaram" e "Para fixar o conteúdo de **Função Afim** seu professor costumava", uma vez que 82% disseram não e somente 18% responderam que já haviam estudados função do 1.º grau.

Neste contexto, quem respondeu "sim" também assinalaram as seguintes alternativas em relação a:

Quando você estudou **Função afim**, as aulas iniciaram:

Quadro 26 - Alternativa de como o docente iniciava a aula de matemática

		Quantidade
(x)	Por definição seguida de exemplos e exercícios	6
( )	Por meio de uma situação problema para depois introduzir o assunto	0
(x)	Por meio de um experimento para chegar ao conceito	1
(x)	Por meio de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo	1
(x)	Por meio de uma História do assunto	1

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Do quadro acima compreendemos que 12% responderam que o professor iniciava a aula "por definição seguida de exemplos e exercícios", 2% disseram que iniciava "por meio de um experimento para chegar ao conceito"; 2% responderam que começava a aula "por meio de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo" e 2% marcaram a opção "por meio de uma História do assunto", isto é, totalizando o 18% dos alunos que responderam sim.

De forma análoga às análises das respostas abaixo também totalizam os 18%

dos que responderam “Sim”.

Para fixar o conteúdo de **Função Afim** seu professor costumava:

Quadro 27- Estratégia para reforço da aprendizagem da função afim

		Quantidade
(x)	apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	6
( )	apresentar jogos envolvendo o assunto	0
(x)	solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático	2
( )	não propor questões de fixação	0
(x)	solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver	1

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

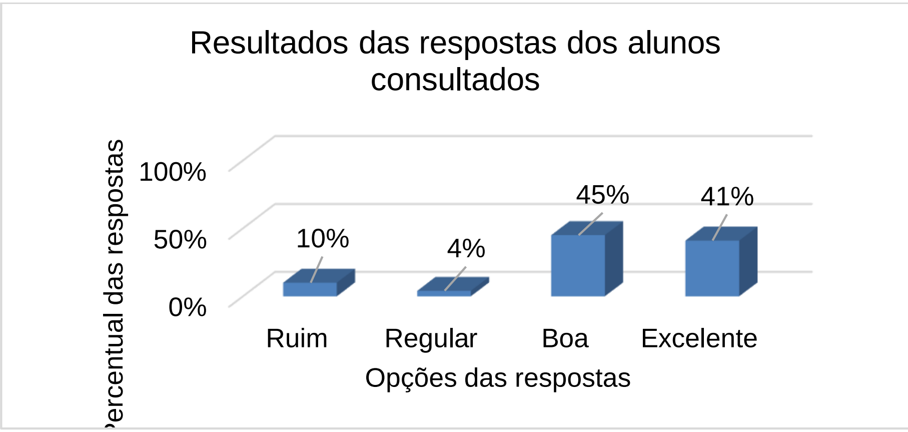
No tocante a questão de como os discentes consideram as explicações do professor de matemática, a sistematização das respostas ficou conforme o quadro 28 abaixo.

Quadro 28 - você considera as explicações do professor de matemática?

Opções	Quantidade	Percentual
Ruim	5	10%
Regular	2	4%
Boa	22	45%
Excelente	20	41%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 37 - você considera as explicações do professor de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

É notório com os dados acima que 41% dos alunos consideram as aulas dos professores “excelente”; 45% dos alunos avaliam como sendo “boa”; 4% avaliam de forma “regular” e 10% responderam que as aulas dos docentes são “ruim”. Este cenário revela uma visão do corpo discente acerca das estratégias didático-pedagógica dos docentes, propiciando momento de reflexão sobre a práxis da didática desenvolvida na sala de aula, pois “a finalidade da didática da matemática é o conhecimento dos fenômenos e processos relativos ao ensino da matemática para controlá-los e, através deste controle, otimizar a aprendizagem dos alunos” (PARRA, 1996, p. 31).

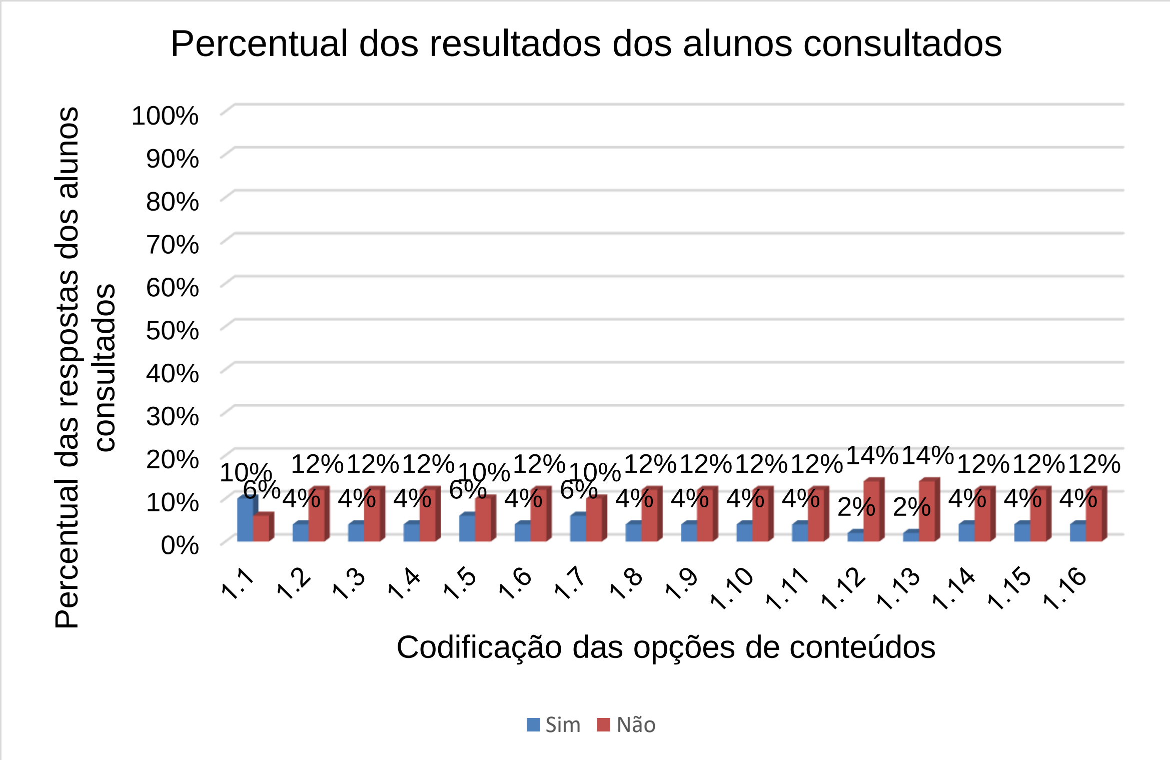
Em relação ao posicionamento acerca da Função Afim conforme os conhecimentos dos discentes, tivemos as seguintes respostas, de 8 dos 9 que responderam “sim” já haviam estudado a função do 1.º grau, segundo às análises do quadro 29 abaixo.

Quadro 29 - Estudos da Função Afim conforme os alunos consultados

	Você lembra ter estudado?			
Codificação / Conteúdos	**Sim**	**%**	**Não**	**%**
1.1 Definição da Função do 1.º Grau	5	10%	3	6%
1.2 Gráfico da Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.3 Identificar gráfico da Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.4 Construção de gráfico de Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.5 Identificar os coeficientes da Função do 1.º Grau	3	6%	5	10%
1.6 Domínio da Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.7 Imagem da Função do 1.º Grau	3	6%	5	10%
1.8 Função Crescente do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.9 Função Decrescente do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.10 Determinação da Lei da Função do 1.º Grau a partir dos coeficientes	2	4%	6	12%
1.11 Determinação da lei da função do 1.º grau a partir de dois pontos da função	2	4%	6	12%
1.12 Determinação da Lei da Função do 1.º Grau a partir do gráfico	1	2%	7	14%
1.13 Determinação da Lei da Função do 1.º Grau a partir de dados tabelados rol.	1	2%	7	14%
1.14 Estudo do sinal da Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.15 Zero da Função do 1.º Grau	2	4%	6	12%
1.16 Aplicações da Função Afim em situações-problemas	2	4%	6	12%

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 38 - Estudos da Função Afim conforme os alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A princípio percebemos que a somatória das porcentagens acima totaliza 18%, pois, reforçamos que 80% dos alunos haviam respondidos não ter estudados função do 1.º grau e 2% do que haviam respondidos “sim”, não responderam à questão acima.

Portanto, na ordem crescente da codificação, inferimos daqueles que responderam que 10% conhecem a “definição da Função do 1.º Grau” e 6%, não; 4% conhecem o “Gráfico da Função do 1.º Grau” 12%, não; de forma idêntica se deram as respostas para os conteúdos “Identificar gráfico da Função do 1º Grau” e “Construção de gráfico de Função do 1º Grau”, isto é, 4% responderam “sim” e 12%, não; para o conteúdo “Identificar os coeficientes da Função do 1.º Grau**”,** 6% responderam conhecê-lo e 10%, não; o assunto “Domínio da Função do 1.º Grau” obteve o seguinte resultado 4% responderam sim, 12%, não; no que tangem o assunto “Imagem da Função do 1º Grau” 6% dos consultados responderam sim, 10%, não; e os 4 conteúdos consecutivos, ou seja, “Função Crescente do 1º Grau”, “Função Decrescente do 1º Grau**”, “**Determinação da Lei da Função do 1º Grau a partir dos coeficientes” e “Determinação da lei da função do 1º grau a partir de dois pontos da função” tiveram 4% responderam sim, 12%, não; bem como, os conteúdos “Determinação da Lei da Função do 1º Grau a partir do gráfico” e “Determinação da

Lei da Função do 1º Grau a partir de dados tabelados rol”, obtiveram 2% para sim e 4% para não. Demonstrando uma fragilidade na apreensão dos conteúdos do tema ora abordado; também de forma análoga os assuntos “Estudo do sinal da Função do 1º Grau”, “Zero da Função do 1º Grau” e “Aplicações da Função Afim em situações-problemas” tiveram os mesmos índices de sim 4% e de não 12%.

Às análises do questionário até o presente momento, nos revelaram que os pais (pai e mãe) são os que mais acompanham os estudos dos alunos consultados, assim como, a maioria dos pais ou responsáveis possuem ensino médio completo. Por lado, também, nos revelou que os alunos estão com uma lacuna de ausência significativa quanto o assunto é a função do1.º grau.

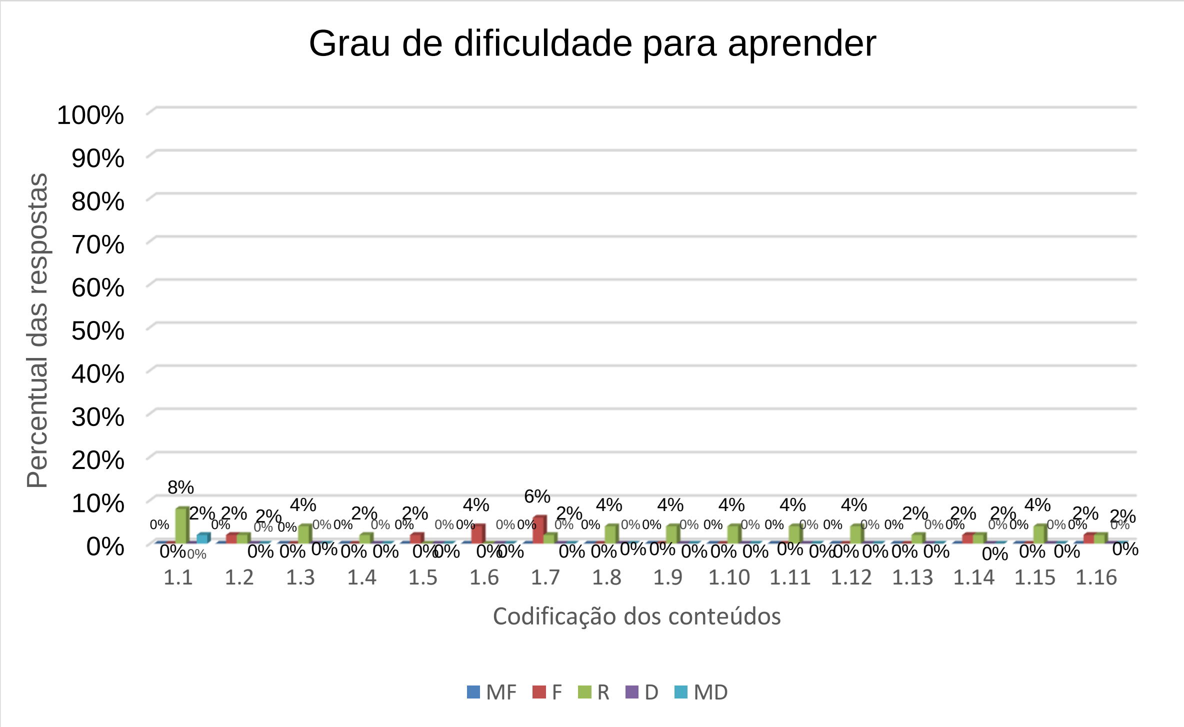
Os alunos consultados quanto à dificuldade em relação aos conteúdos codificados acima precisavam assinalar se eles eram Muito Fácil (MF), Fácil (F)**,** Regular (R), Difícil (D) e Muito Difícil (MD), infelizmente, os que optaram por responder foram menos dos que responderam em ter estudado a função do 1.º grau, representados no quadro 30 abaixo.

Quadro 30 - Grau de dificuldade para aprender dos alunos consultados

	Grau de dificuldade para aprender				
Codificação	MF	F	R	D	**MD**
1.1	0	0	4	0	1
1.2	0	1	1	0	0
1.3	0	0	2	0	0
1.4	0	0	1	0	0
1.5	0	1	0	0	0
1.6	0	2	0	0	0
1.7	0	3	1	0	0
1.8	0	0	2	0	0
1.9	0	0	2	0	0
1.10	0	0	2	0	0
1.11	0	0	2	0	0
1.12	0	0	2	0	0
1.13	0	0	1	0	0
1.14	0	1	1	0	0
1.15	0	0	2	0	0
1.16	0	1	1	0	0

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 39 - Grau de dificuldade para aprender dos alunos consultados



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Percebemos tanto no quadro 30, como no gráfico 39 acima que os alunos consultados e que responderam essas sentenças acerca da dificuldade de aprender a função do 1.º grau e assuntos derivados desse tema as opções MF e D não foram marcadas por nenhum dos consultados, isto é, 0%; quanto a definição de função do 1.º grau 8% concordaram que eram R o grau de dificuldade deles; 2% acharam MD; aos códigos dos conteúdos 1.2, 1.5, 1.14, 1.16, 2% responderam que eram de grau F; bem como, os códigos 1.6 e o 1.7 responderam respectivamente 4% e 6% também F; 2% marcaram R nas codificações 1.2, 1.4, 1.7, 1.13, 1.14 e 1.16; para essa mesma opção R, 4% marcaram as seguintes codificações: 1.3, 1.8 a 1;12 e a 1.15.

Os dados acima nos revelam um percentual baixo de alunos que se dizem ter estudados a função do 1.º grau acrescido das seguintes observações: dos que responderam a Imagem da função do 1.º grau foi a mais fácil para aprender, seguida do Domínio da Função do 1.º Grau e a mais popular do grau de dificuldade ficou a Regular no que tangem a definição da função do 1. grau. Entretanto, não podemos afirmar algo a respeito uma vez que, a amostra dos alunos foi pequena, podendo assim, não ser significativa, isto é, em uma ótica estatística da amostragem.

Doravante, vamos analisar os resultados da continuidade da segunda sessão.

4.3.4 Continuidade da segunda sessão – Aplicação do Pré-teste

A aplicação do Pré-teste ocorreu na escola E1 no dia 27/09/2022, das 9h às 10h45min (dois tempos de 45, exceto o intervalo de 15min) e na escola E2 ocorreu no período vespertino das 13h30min às 15h, contabilizando nas duas escolas 49 alunos presentes, porém, nem todos responderam, mesmo após uma explicação da necessidade da participação de todos, inclusive, reforçando que o professor titular de matemática consideraria a participação deles no processo avaliativo bimestral. Após solicitar aos alunos a compor dupla ou caso preferissem poderia ser sozinho a resolução do Pré-teste, ficou assim organizado:

Quadro 31 - Divisão dos alunos consultados na realização do Pré-teste

Duplas	Sozinho	Não participaram
D2/D22	D1	D3
D4/D27	D7	D20
D5/D9	D8	D29
D6/D10	D36	D30
D11/D23	D37	D43
D12/D26	D40	--
D13/D19	--	--
D14/D21	--	--
D15/D31	--	--
D16/D24	--	--
D17/D28	--	--
D18/D25	--	--
D32/D46	--	--
D33/D48	--	--
D34/D38	--	--
D35/D44	--	--
D39/D41	--	--
D42/D47	--	--
D45/D49	--	--

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O quadro 31 demonstra o quantitativo dos alunos consultados e que dos 49 alunos presentes foram constituídas 19 duplas, 6 alunos fizeram o teste sozinho e infelizmente 5 alunos não quiseram participar, isto é, não responderam, segundo eles, “não estava valendo ponto”.

Com essa composição nas duas turmas os resultados das10 questões do Pré-teste foram sistematizadas conforme o quadro 32 abaixo. Ele apresenta o desempenho das duplas e individual de alguns alunos (quadro 31 acima), onde C representa questões certas, E indica questões Erradas. P indica questões parciais e B, questões em branco.

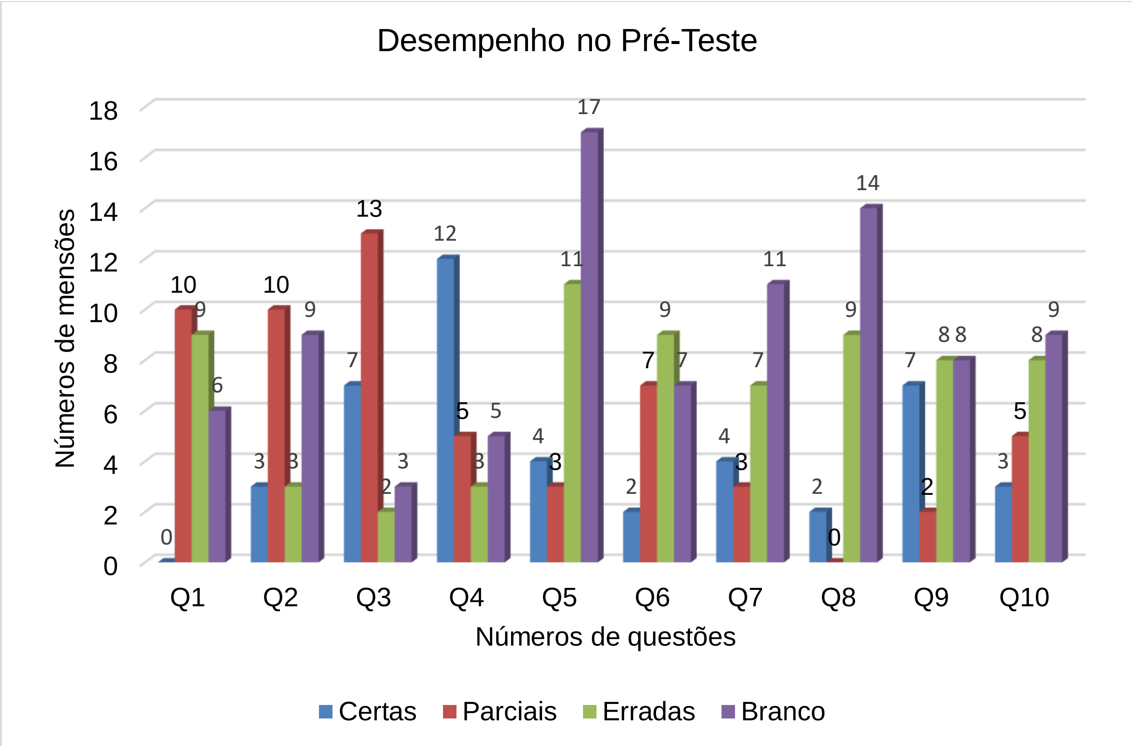
Quadro 32 - Desempenho das duplas e individual dos alunos no Pré-teste

Duplas/alunos	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
D2/D22	P	P	C	C	C	E	E	B	B	C
D4/D27	P	C	C	P	P	C	C	C	P	P
D5/D9	P	B	P	C	E	E	E	E	E	B
D6/D10	E	B	P	E	B	P	E	E	P	E
D11/D23	P	C	C	C	E	C	P	C	C	C
D12/D26	E	B	P	P	E	B	B	B	E	E
D13/D19	E	P	P	B	E	E	B	B	C	P
D14/D21	B	B	E	C	E	B	B	B	E	B
D15/D31	E	B	E	E	E	P	B	B	E	B
D16/D24	B	P	B	B	B	B	B	B	B	B
D17/D28	P	B	P	E	E	E	B	B	B	E
D18/D25	P	C	C	C	C	E	E	B	C	P
D32/D46	B	E	P	P	B	P	P	B	E	B
D33/D48	E	P	P	C	C	P	P	E	E	P
D34/D38	B	B	B	B	B	B	B	E	B	B
D35/D44	E	P	C	P	P	P	C	E	E	E
D39/D41	E	E	P	C	E	P	B	E	B	E
D42/D47	E	E	C	C	E	P	C	E	C	E
D45/D49	P	P	P	C	B	E	E	E	B	E
D1	E	P	P	B	E	E	E	B	E	E
D7	P	P	C	C	P	E	E	B	C	C
D8	P	B	B	B	C	E	B	B	C	B
D36	P	B	P	C	B	B	B	B	B	B
D37	B	P	P	P	B	B	B	B	B	B
D40	B	P	P	C	E	B	C	E	C	P

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A partir dos dados acima, vamos agrupar por quantitativos de acertos (C), erros (E), acertos parciais (P) e em branco (B), conforme o gráfico 40 abaixo.

Gráfico 40 - Desempenho das duplas e individual dos alunos no Pré-teste

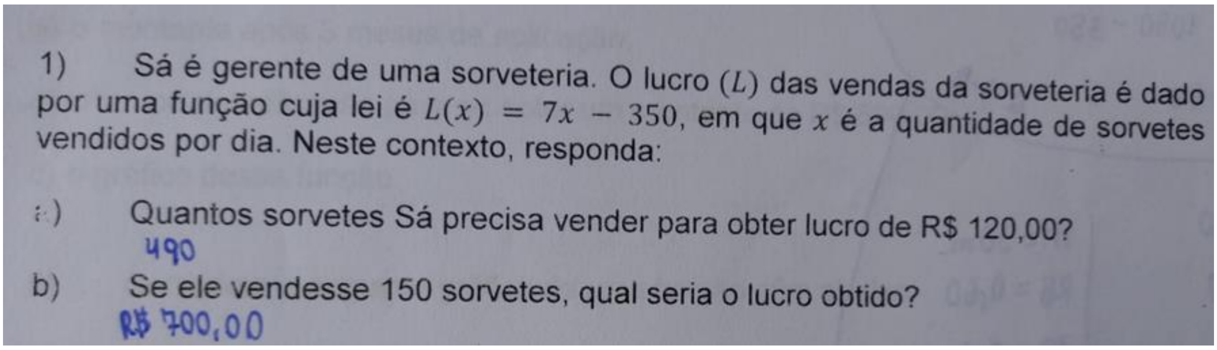


Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O gráfico 40 nos apresenta de forma quantitativa o desempenho dos alunos consultados (19 duplas e 6 individuais), propiciando o entendimento de que a questão 4 foi a mais assertiva neste Pré-teste, seguida pelas questões 3 e 9, de forma antagônica, a questão de menor acerto foi a questão 1, nesse caso, os alunos consultados não resolveram esta questão, a questão de maior acerto parcial foi a questão 3, com 13 acertos parciais (ora acertaram o problema “a”, ora acertaram o problema “b”), seguida das questões 1 e 2, ambas com 10 acertos parciais; as questões com mais erros foi a questão 5, com 11 erros, seguida das questões 1, 6 e 8, todas com 9 erros, e a questão com o maior índice de branco foi a questão 5, com 17 participantes entre duplas e individuais deixaram esta questão em branco, seguida pela questão 8, que 14 participantes deixaram ela em branco.

Destacamos que, em breve, analisaremos as respostas de algumas questões, categorizando-as como certas, erradas ou parcialmente certas. Durante a avaliação do pós-teste, retomaremos essas análises de forma comparativa para determinar se houve progresso no desempenho dos alunos pesquisados. Utilizaremos métodos estatísticos, como o teste de hipóteses e a análise de correlação de Pearson, para embasar nossas conclusões.

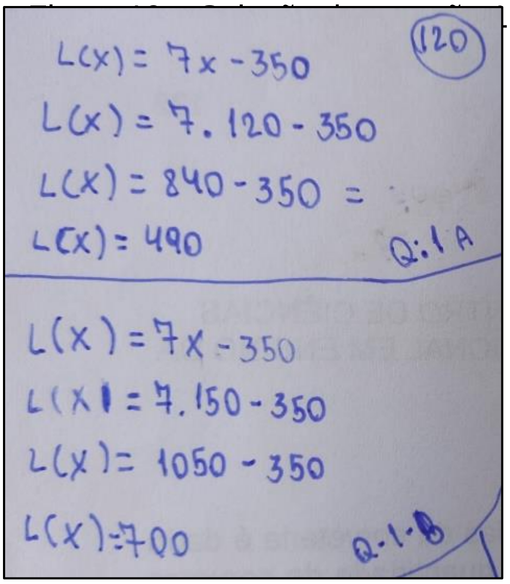
Figura 18 – Resposta da questão 1


1) Sá é gerente de uma sorveteria. O lucro (L) das vendas da sorveteria é dado por uma função cuja lei é $L(x) = 7x - 350$, em que x é a quantidade de sorvetes vendidos por dia. Neste contexto, responda:

a) Quantos sorvetes Sá precisa vender para obter lucro de R$ 120,00?
490

b) Se ele vendesse 150 sorvetes, qual seria o lucro obtido?
R$ 700,00

Fonte: alunos consultados, D17/D28, 2022.

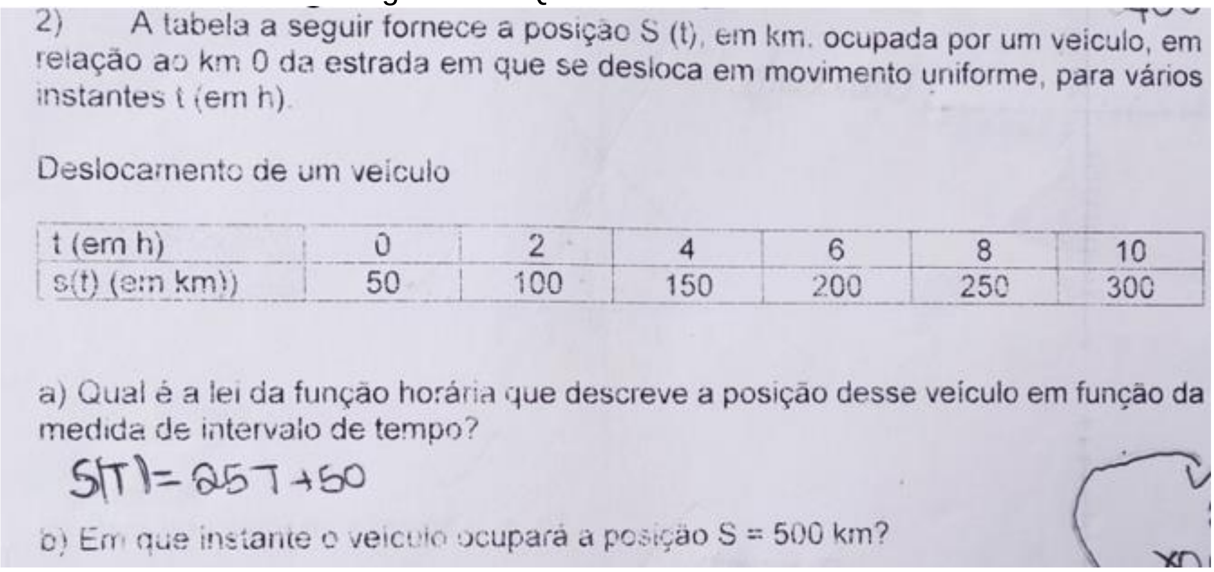


Fonte: alunos consultados, D17/D28, 2022.

Depreendemos da resposta acima da dupla D17/D28 que ele acertou de forma parcial a questão, ou seja, errou a Q1a e acertou a Q1b. Percebemos também que na Q1a, a dupla cometeu o equívoco de colocar o R$ 120,00 como a quantidade de sorvetes e não como o lucro obtido pelas vendas de certa quantidade de sorvetes. Tal equívoco de interpretação ocorreram com outras duplas e com alguns alunos individuais.

A dupla D4/D27 acertou a questão 2, conforme as figuras 20 e 21 abaixo.

Figura 20 – Questão 2 do Pré-teste


2) A tabela a seguir fornece a posição S (t), em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 da estrada em que se desloca em movimento uniforme, para vários instantes t (em h).

Deslocamento de um veículo

t (em h)	0	2	4	6	8	10
s(t) (em km)	50	100	150	200	250	300

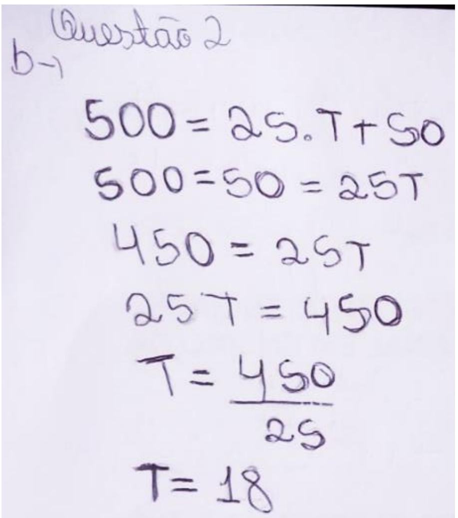
a) Qual é a lei da função horária que descreve a posição desse veículo em função da medida de intervalo de tempo?

S(T)= 25T+50

b) Em que instante o veículo ocupará a posição S = 500 km?

Fonte: Alunos consultados D4/D27, 2022.

Figura 21 – Resolução da Q2-b


Questão 2

b-)

$500 = 25.T + 50$

$500 = 50 = 25T$

$450 = 25T$

$25T = 450$

$T = \frac{450}{25}$

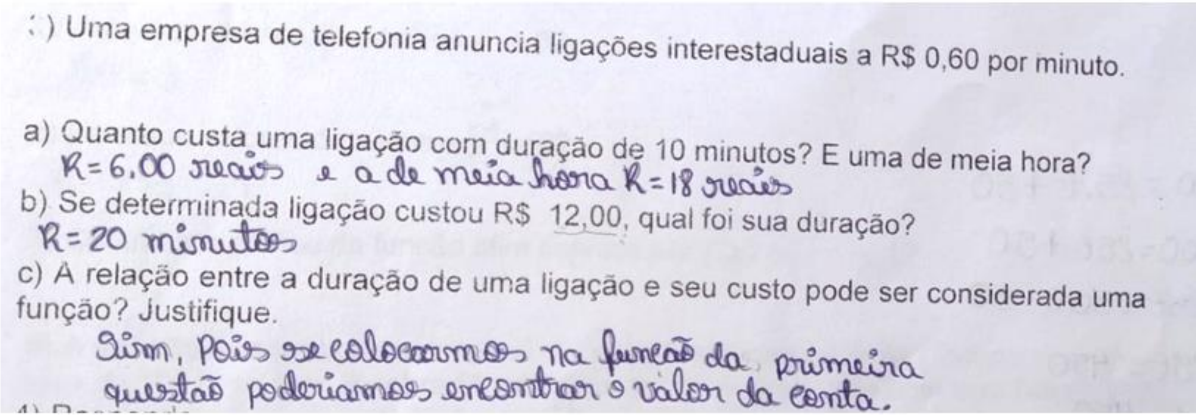
$T = 18$

Fonte: Alunos consultados D4/D27, 2022.

Entendemos que a referida dupla possui um certo conhecimento acerca da função, inclusive, correlaciona com os dados do gráfico 35 na página 45, no qual 4% responderam já ter estudado a função do 1.º grau. A observação é que os cálculos são realizados e param no número encontrado, não colocam a resposta de forma a responder à questão do problema, provavelmente esteja ocorrendo uma destas duas possibilidades: ou não foram incentivados a responder assim ou reproduz a forma do professor responder na lousa.

Na questão 3, a dupla D11/D23 acertou-a em sua totalidade, conforme a figura 22 abaixo.

Figura 22 – Questão 3 do Pré-teste


) Uma empresa de telefonia anuncia ligações interestaduais a R$ 0,60 por minuto.

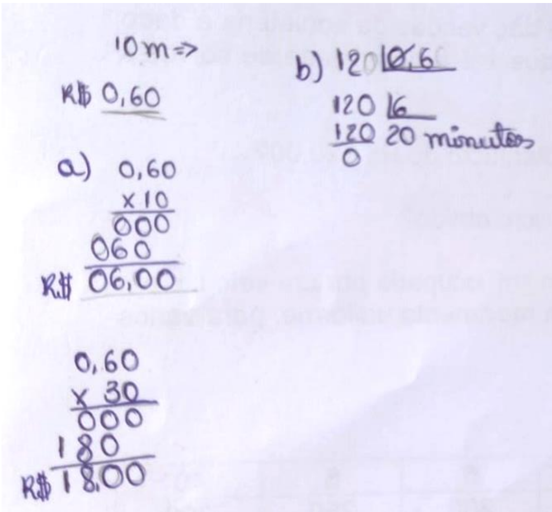
a) Quanto custa uma ligação com duração de 10 minutos? E uma de meia hora?
R=6,00 reais e a de meia hora R=18 reais

b) Se determinada ligação custou R$ 12,00, qual foi sua duração?
R=20 minutos

c) A relação entre a duração de uma ligação e seu custo pode ser considerada uma função? Justifique.
Sim, Pois se colocarmos na funcão da primeira questão poderiamos encontrar o valor da conta.

Fonte: Alunos consultados D11/D23, 2022.

Figura 23 – Resolução da Q3 Pré-teste

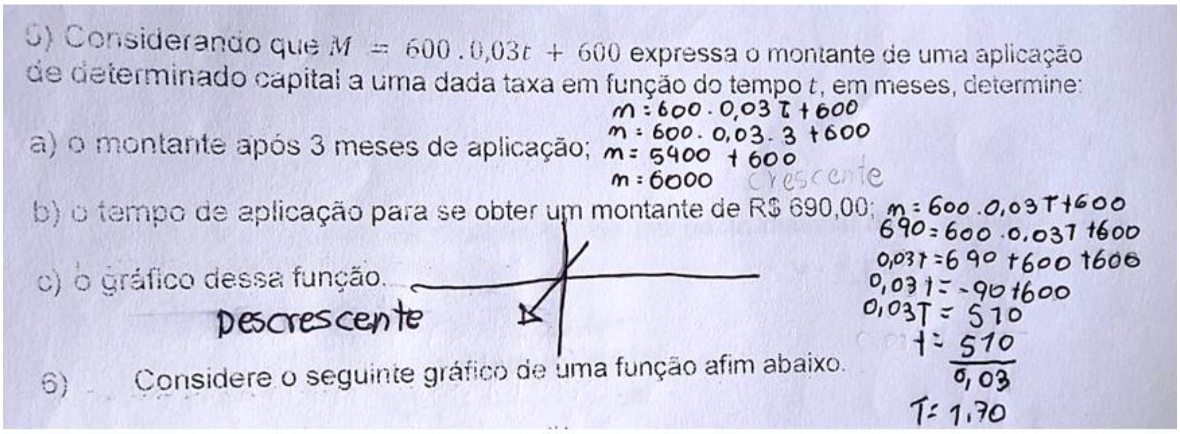


Fonte: Alunos consultados D11/D23, 2022.

Além desta assertiva, 6 consultados também acertaram essa questão, superando assim, até mesmo o quantitativo daqueles que não haviam estudados a função do 1.º grau, conforme anteriormente mencionado.

Das questões que tiveram mais erros, no caso a Q5, vamos analisar uma abaixo.

Figura 24 – Questão 5 do Pré-teste


5) Considerando que $M = 600 . 0{,}03t + 600$ expressa o montante de uma aplicação de determinado capital a uma dada taxa em função do tempo t, em meses, determine:

a) o montante após 3 meses de aplicação;

m : 600 · 0,03 T + 600
m : 600 · 0,03 · 3 + 600
m = 5400 + 600
m : 6000
crescente

b) o tempo de aplicação para se obter um montante de R$ 690,00;

m : 600 . 0,03 T + 600
690 = 600 . 0,03 T + 600
0,03 T = 690 + 600 + 600
0,03 T = -90 + 600
0,03 T = 510
T = 510 / 0,03
T: 1,70

c) o gráfico dessa função.

Descrescente

6) Considere o seguinte gráfico de uma função afim abaixo.

Fonte: Alunos consultados D33/D48, 2022.

A dupla D33/D48 acima, na questão “5-a” até fez a multiplicação correta, porém, não considerou as casas decimais e não adicionou o resultado do produto com o valor fixo; na questão “5-b”, isolou o termo desconhecido sem fazer a multiplicação (600 x 0,03), para além disso, fez a subtração errada entre os valores do montante e o valor fixo, consequentemente, ocorreu o erro na operação e na questão “5-c”, não precisaria realizar conta para saber o tipo de gráfico dessa função do 1.º grau, apenas entender o valor do coeficiente numérico da variação de proporcionalidade, isto é, o valor de “a”, no caso em xeque, $a > 0$, portanto, o gráfico é crescente.

Todavia as análises do Pré-teste serão mais bem comparadas com os resultados do Pós-Teste, após as intervenções do professor pesquisador com aplicações de Atividades de Ensino aprendizagem e de Atividades de Aprofundamento conforme apresentadas na seção 3.

Neste momento, gostaria de fazer uma breve suposição hipotética sobre a permissão e orientação do uso da tecnologia na resolução de problemas. Especificamente, refiro-me à calculadora, uma ferramenta tecnológica há muito presente no cotidiano dos alunos e de suas famílias.

A matemática, quando ensinada através de atividades experimentais, tem o potencial de se tornar uma disciplina viva e tangível para os alunos. No 9.º ano do ensino fundamental, à medida que os conceitos se tornam mais complexos, como é o caso da função afim, a necessidade de uma abordagem prática se torna ainda mais evidente. Neste cenário, a figura do professor mediador, inserido em uma sequência didática experimental, é fundamental.

O professor mediador, ao adotar uma sequência didática experimental, não apenas apresenta os conceitos matemáticos, mas também cria um ambiente onde os alunos podem explorar, testar e validar esses conceitos na prática. A introdução da calculadora neste contexto não é apenas como uma ferramenta de cálculo, mas como um instrumento que pode ser explorado experimentalmente.

Após as atividades mencionadas, ou seja, Q1, Q2, Q3, Q4 e Q5, que foram atividades práticas e contextuais, os alunos conseguiram traduzir os problemas para a linguagem matemática. No entanto, cometeram erros durante a resolução. No Pré-teste, especificamente na questão Q5-a, a dupla D33/D48 realizou a multiplicação corretamente, mas não levou em consideração as casas decimais e não somou o resultado do produto ao valor fixo. Se tivessem usado uma calculadora, provavelmente teriam obtido um resultado correto. Hipoteticamente, sem a orientação experimental e sem o uso da calculadora, as 19 duplas e os 6 alunos individuais alcançaram uma média de 6 acertos em 10 questões.

No entanto, após a sequência didática experimental, onde o professor mediador guiou os alunos na reflexão e exploração do uso da calculadora, a média de acertos no Pós-teste subiu para 9 em 10.

A melhoria nos resultados não é apenas um testemunho da eficácia da calculadora, mas principalmente da abordagem experimental adotada pelo professor mediador. Através de atividades práticas, os alunos foram capazes de visualizar e compreender os conceitos matemáticos, e com a ajuda da calculadora, puderam validar e expandir seu entendimento.

A sequência didática experimental, sob a orientação do professor mediador, não apenas permite que os alunos explorem e compreendam os conceitos matemáticos de maneira prática, mas também prepara o terreno para um momento crucial no processo de aprendizagem: a institucionalização dos conceitos.

Após as atividades práticas e a exploração com a calculadora, chega o momento de consolidar e formalizar o que foi aprendido. É aqui que os conceitos inerentes à função afim, como taxa de variação, resolução de problemas e análise de gráficos, são solidificados. O professor mediador, neste momento, guia os alunos na articulação clara e precisa desses conceitos, transformando a experiência prática em conhecimento formal.

Por exemplo, após explorar experimentalmente a função afim e usar a calculadora para validar suas descobertas, os alunos são incentivados a discutir e definir o que é taxa de variação, como ela se manifesta em diferentes contextos e sua relevância na resolução de problemas. Da mesma forma, ao analisar gráficos, os alunos são orientados a identificar e descrever padrões, relacionando-os com situações do mundo real.

Este momento de institucionalização é essencial, pois é quando os alunos transcendem a experiência prática e começam a ver a matemática como uma linguagem formal e estruturada, capaz de descrever e resolver problemas complexos. A combinação da sequência didática experimental com a institucionalização dos conceitos garante que os alunos não apenas "façam" matemática, mas também "pensem" matematicamente.

Em síntese, a abordagem experimental, complementada pelo uso da calculadora e culminando no momento de institucionalização, oferece uma trajetória de aprendizagem completa. Os alunos passam da exploração prática à compreensão profunda, garantindo que os conceitos matemáticos sejam internalizados e aplicados de maneira eficaz em diversos contextos.

Contudo, essa abordagem pode ser considerada para um futuro próximo como tema de uma tese na área de ensino de matemática com o auxílio de tecnologias.

4.4 Terceira sessão de ensino

No dia 18/10/2022 (terça-feira), nas respectivas salas de aula das escolas E1 e E2, das quais haviam aplicados o Pré-teste, desenvolvi a Atividade 1 de aprendizagem e de Aprofundamento 1, com a estratégia didática do método da descoberta, como anteriormente discorrido e com as seguintes etapas de rotina em sala de aula no decorrer do processo de aplicação das atividades tanto de aprendizagem como de aprofundamento, quais sejam: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

Organização: após a colhida, comentei com a turma que os alunos poderiam ficar à vontade para responder as atividades, podendo se organizarem em dupla ou individual, pois, o momento era de construção de aprendizagem por meio de atividades previamente elaboradas e que seriam disponibilizadas a eles.

Apresentação: momento da explicação da dinâmica como se daria o processo de resolução das atividades propostas, e que o professor pesquisador/mediador poderia ser consultado caso desejassem, mas cada dupla ou o aluno individual buscasse fazer uma leitura e interpretação dos problemas matemáticos e vislumbrasse sua resolução.

Execução: momento destinado a resolução das atividades proposta pelo professor pesquisador/mediador.

Registro: etapa que ocorre de forma concomitante com o processo da aula, na qual o professor pesquisador entendendo algumas ações ou falas como relevantes, registra o momento, por exemplo, se há foco na resolução, ou desinteresse por parte dos alunos, dentre outros.

Análise: momento de mediação entre a dúvida dos alunos consultados e o professor pesquisador/mediador, por meio das técnicas do método da descoberta fazer os alunos refletirem sua intepretação e reavaliar seu entendimento sobra a dúvida inicial do problema proposto, motivando-o aplicar novas estratégias de resolução práticas até chegar em uma resposta que responda a pergunta do problema.

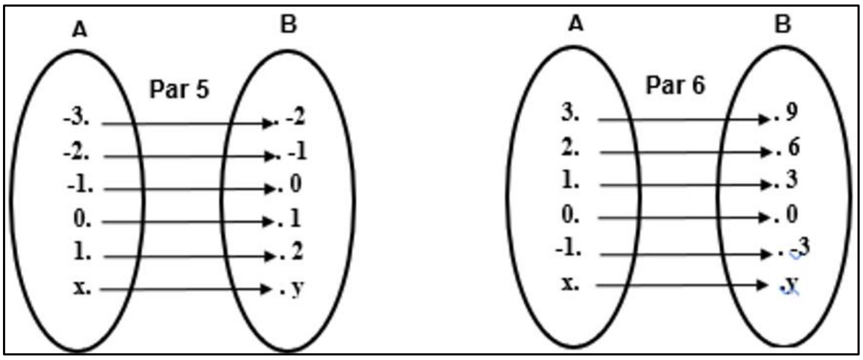
Institucionalização: etapa final dentro do processo didático-pedagógico das atividades de aprendizagem e aprofundamento desenvolvido durante a aula, ou seja, a institucionalização do conhecimento matemático representado de forma fidedigna no enunciado (seja um conceito, um axioma ou um teorema) o professor pesquisador/mediador pode fazer uma mesa redonda e dialogar acerca da dificuldade encontrada durante a resolução por parte de alguns alunos, da ausência de Pré-requisitos para responder determinados problemas propostos, e outros por fim institucionalizar o pensamento matemático envolvido no contexto.

Com essa estrutura desenvolvemos a Atividade 1 com ambas as turmas nas duas escolas, nesta sessão houve a participação de alunos que não estavam presentes na aplicação do questionário socioeconômico, por conseguinte, do Pré-teste. Sendo assim, eles participaram do processo, contudo, nas análises comparativas não serão computados, pois, os dados serão confrontados conforme os dados coletados na aplicação do questionário socioeconômico e do Pré-teste.

Desta maneira, a primeira etapa ocorreu com o desenvolvimento da atividade 1 que visava a introdução do conceito de função afim denominada de **descubra minha regra**, conforme mencionado no capítulo 3, essa atividade tem como objetivo fazer os alunos descobrir uma expressão algébrica que relacionasse dois conjuntos de valores dados por meio de um diagrama. Estavam presentes 49 alunos, e participaram 44, eles foram organizados em 19 duplas e 6 alunos optaram por fazer sozinhos, que desenvolveram a referida atividade em aproximadamente 70 minutos.

Após a colhida e a orientação da rotina de aula para a realização dessa atividade. Entreguei aos alunos uma folha com oito pares de conjuntos (Anexo D) e outra com uma tabela (atividade 1) a ser preenchida. Na atividade procurou-se estimular os alunos a definirem uma expressão algébrica que relacionassem cada par de conjuntos conforme a combinação de valores entre as variáveis x e y. Vislumbrando que eles chegassem as seguintes conclusões: $y = ax + b \; ou \; y = ax$. Um exemplo dos pares, está na figura 25 a seguir:

Figura 25 - Exemplos dos pares de conjuntos da atividade 1



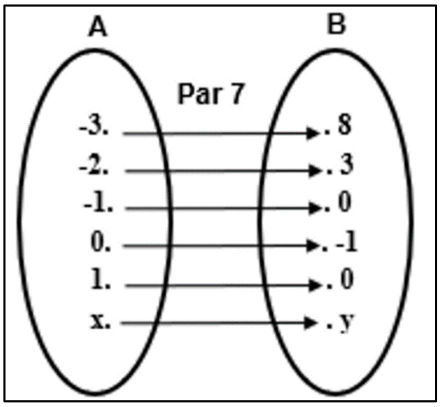
Fonte: Autor e Sá, 2022.

Neste caso, algumas duplas e alguns alunos individuais conseguiram escrever o raciocínio matemático que estava ocultado na relação biunívoca dos conjuntos A para B, logo, apareceram aqueles que disseram:

> **Alunos**: "é o número mais 1", para o par 5; "é o número do conjunto A multiplicado por 3", para o par 6; percebi que alguns alunos após ouvirem os colegas falarem, voltaram a analisar os pares, daí alguns concordaram, outros permaneceram na dúvida em relação à resposta correta. Desta maneira, fiz a intervenção pedagógica:
> **Professor pesquisador/mediador**: "Vocês concordam com as respostas dos colegas? Se sim, tentem escrever na folha a operação e verifique as respostas. Se não, faça também a operação para reavaliarem sua interpretação"
> **Alunos**: "Deu certo professor", "conseguir aqui professor, também deu certo".

Assim esta atividade ocorreu de forma natural, contudo, como já mencionado, tiveram alunos com dificuldades para expressar na linguagem matemática o raciocínio lógico da relação biunívoca dos pares, sendo os pares 4, 6, 7 e 8 com maiores índices de erros na interpretação. Para exemplificar a resolução de alguns dos pares fiz eles refletirem acerca das possibilidades de usarmos o raciocínio matemático para sair do conjunto A e obtermos o resultado do conjunto B, assim, no final, demonstrei no quadro algumas resoluções possíveis, dentre elas uma da figura 26 a seguir.

Figura 26 - Exemplos dos pares de conjuntos da atividade 1



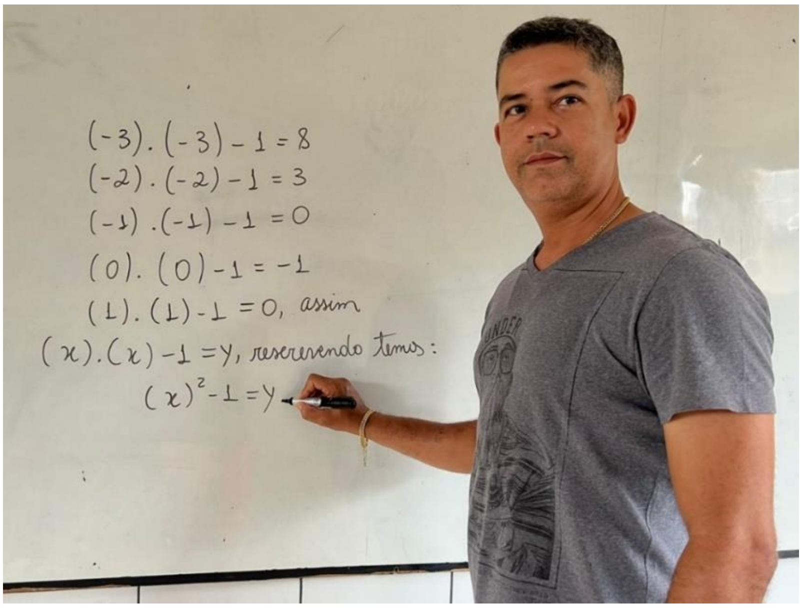
Fonte: Autor e Sá, 2022.

Para uma melhor interação com a turma, iniciei um diálogo sobre o modo de pensar deles para resolver a questão. Em seguida, demonstrei os cálculos na lousa conforme a foto 1 abaixo. O diálogo se deu assim:

> **Professor pesquisador/mediador**: “Sabendo que o valor de x = -3, quais as possiblidades de chegarmos a 8?”
> **Alunos**: “Silêncio”;
> **Alunos**: “Tentamos aqui professor, mas não conseguimos encontrar o 8, encontramos -6, 6, -9, 9, mas o 8, não”;
> **Alunos**: “Professor multiplicamos por 3 encontramos -9; multiplicamos por -3, encontramos +9, mas o 8 ainda não”;
> **Alunos**: “Professor pensamos igualmente aos colegas ai. Multiplicamos por -3 encontramos 9, depois percebemos que deveria dar 8, então subtraímos 1 do resultado”;
> **Professor pesquisador/mediador**: “a dupla que expressou a multiplicação -3 e do resultado subtraiu 1, está no caminho certo?”
> **Professor pesquisador/mediador**: “quem mais concorda com o raciocínio acima?”
> **Alunos**: “Professor fizemos o mesmo cálculo para o x=-2, isto é, multiplicamos por -2 e do resultado subtraímos 1 e chegamos no 3, então, podemos concluir que sim, os colegas estão certos”;
> **Professor pesquisador/mediador**: “pessoal todos compreenderam o raciocínio, então começam a fazer os cálculos para os demais valores de x, darei uns 10 minutinhos para vocês concluírem”.
> **Professor pesquisador/mediador**: “alguma dupla ou aluno percebeu que a expressão pode ser escrita como $x^2 - 1 = y$”;
> **Alunos**: “Sim, professor a partir da conversa percebemos a relação de do x multiplicada por ele mesmo, ou seja x^2”;
> **Professor pesquisador/mediador**: “para aqueles que ainda estão com dúvida da equação $x^2 - 1 = y$, vou fazer os cálculos na lousa, acompanhe com atenção”.

Na lousa demonstrei a seguinte resolução:

Foto 1 - Resolução do par 7 da Atividade 1



Fonte: Professor pesquisador/mediador, 2022.

A relação acima demonstra uma relação conhecida como equação quadrática incompleta. Entretanto, os alunos já estudaram o assunto **função polinomial** (conteúdo do 8.º ano), logo, os que acertaram aplicaram esse conhecimento adquirido. No 8.º ano do ensino fundamental esse conteúdo é classificado como um binômio de grau 2 em relação a variável x.

Em relação aos erros, foram percebidos bastantes erros nos jogos de sinais, na ocasião chamei atenção para a seguinte frase:

> **Professor pesquisador/mediador**: “multiplicação ou divisão de números com sinais iguais, valor sempre positivo; multiplicação ou divisão de números com sinais diferentes, valor sempre negativo”

Ressalto que não entrei no mérito da demonstração, mas julguei necessário a frase considerando o público-alvo no momento da pesquisa. Por fim, fizemos o momento da institucionalização da aprendizagem com um resumo da atividade aplicada.

Assim também se deu no desenvolvimento da aplicação das demais atividades e das atividades de aprofundamento propostas nesta sessão.

Ficou combinado que a próxima sessão seria dia 19/10/2022.

4.5 Quarta sessão de ensino

No dia 19/10/2022 (quarta-feira), retornei as referidas turmas nos respectivos horários: das 9h às 10h45min, na escola E1 e das 13h30min às 15h na escola E2. Fiz toda a rotina conforme já explicado anteriormente e orientei que no primeiro tempo de aula desenvolveríamos a Atividade 2 e no segundo tempo a Atividade 3, assim foi feito.

A atividade 2, como já apresentada no capítulo 3, tem o objetivo de “Descobrir uma relação entre os coeficientes da função afim crescente ou decrescente.” Bem como, a Atividade 3, cujo objetivo é “Descobrir a representação gráfica da função afim”, para ambas as atividades foram entregues as folhas com as atividades impressas às duplas e aos alunos individuais, para tanto, foi solicitado para que mantivessem os alunos das atividades anteriores.

Para atividade 2 foi realizada uma revisão breve acerca da forma algébrica da função afim com relação aos nomes de cada termo que a compõe quais sejam: variável independente; variável dependente; taxa de variação (coeficiente angular) e valor inicial (coeficiente linear), e em seguida explicitamos a dinâmica de resolução das atividades tanto pelas duplas como os individuais, deixando-os mais tranquilo para preencher a tabela recebida, uma vez que erros e acertos são parte do processo de ensino aprendizagem, sobretudo em sala de aula.

Figura 27 - Identificação dos coeficientes e gráficos da função

Função **f**: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**Título**: Identificação dos coeficientes e gráficos da função afim. **Objetivo**: Descobrir uma relação entre os coeficientes da função afim crescente ou decrescente. **Material**: Quadro de gráficos I, roteiro da atividade, papel, caneta. **Procedimento**: Após as explicações iniciais, determine os coeficientes angular e linear de cada função afim e depois diga se ela tem um gráfico crescente, decrescente ou constante.				
	coeficiente angular	**Coeficiente linear**	**f é crescente**	**f é decrescente**	**f é constante**
a) $y = -8 + x$					
b) $y = -x + 11$					
c) $f(x) = -2x - 4$					
d) $y = x - 1$					

Fonte: Autor e Sá, 2022.

Após alguns minutos comecei a andar na sala de aula e percebi que algumas duplas já estavam adiantadas outras ainda estavam debatendo com seus pares, porém, no decorrer do processo, percebi que foi fácil para alguns após a explicação inicial.

Para a atividade 3, solicitei a quem tivesse régua que as usassem e entreguei outras réguas a quem não tinha. Também, entreguei as atividades e um plano cartesiano (Apêndice E) e uma folha que continha uma tabela com seis funções matemáticas para ser resolvida. Por conseguinte, foi explicitado que eles deveriam substituir os valores do domínio em cada uma para encontrar suas respectivas imagens, para em seguida marcar os pontos encontrados no plano cartesiano recebido.

Figura 28 – Exemplo da Atividade 3

Função $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**Valor de** $\boldsymbol{x}$	**Valor de** $\boldsymbol{f(x)}$	**Par Ordenado** $(\mathbf{x}, \mathbf{f(x)})$	**A função é afim?**		**É possível ligar todos os pontos marcados por uma única reta?**	
				Sim	**Não**	**Sim**	**Não**
$f(x) = x + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = -2x + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						
$f(x) = x^2 + 1$	$x = -2$						
	$x = -1$						
	$x = 0$						
	$x = 1$						
	$x = 2$						

Fonte: Autor e Sá (2022).

A atividade acima foi resolvida com êxito pela maioria dos participantes da pesquisa, entretanto, alguns alunos fizeram algumas indagações:

> **Alunos**: “Professor, precisa fazer jogo de sinal?”
> **Professor pesquisador/mediador**: “O que vocês acham? Números inteiros negativos (-2, -1) são multiplicados ou adicionados da mesma maneira que os números inteiros positivos (0,1, 2), sugiro que converse entre os parceiros e quem está fazendo individualmente e tem dúvida, faça os cálculos mais de uma vez para confirmar sua resposta”.
> **Alunos**: “Tá ok professor”, “Valeu professor”, “Vamos tentar aqui professor”.

Assim, conseguiram compreender melhor e a maioria dos alunos fizera essa atividade com sucesso. Frisamos que os resultados foram semelhantes com os resultados da pesquisa de Silva (2018), para esse autor:

> [...] esta atividade decorreu com certa facilidade e agilidade nos grupos, sendo bem acessível para a maioria dos grupos, porém alguns apresentaram dificuldade no momento de marcar os pontos no plano cartesiano, marcando o valor de x no lugar do valor y e vice-versa (SILVA, 2018, p. 137).

Ressaltamos apenas que o resultado da questão acima foi em turmas de primeiro ano do ensino médio, e as que foram percebidas nessa pesquisa foram em turmas do 9.º ano dos anos finais do ensino fundamental, contudo, ambas usaram a ED como plano principal na condução da pesquisa.

4.6 Quinta sessão de ensino

No dia 25/10/2022 (terça-feira) ocorreu a quinta sessão na qual aplicamos a atividade 4 “Identificando a lei de formação de uma função afim” e a atividade 5 “Identificando o sinal da função afim” apresentam como objetivos respectivamente: escrever a Lei da função a partir dos dados de uma tabela; e “fazer com que os alunos percebam em qual situação a função afim é nula, positiva ou negativa” a folha com as atividades e de aprofundamento foram entregues aos mesmos participantes (duplas e individuais) para resolvê-las.

As explicações iniciais se deram conforme as rotinas anteriores, acrescentando a forma de encontrar a taxa de variação $\left(a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ e o valor inicial $\left(b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}\right)$, sem necessitar de equacionar por meio de um sistema de equações. Logicamente, usei exemplos distintos das atividades proporcionando uma linha de raciocínio inicial, para que eles pudessem aplicar na resolução das atividades propostas. Assim sendo, coloquei as turmas para refletirem acerca das resoluções e praticarem fazendo o quociente das diferenças entre dois pontos distintos tanto para valores de P(x), como para valores de x.

Decorrido uns 20 minutos comecei a circular entre os participantes, percebi que alguns já haviam encontrados os valores; outros já tinha determinado o valor da taxa (a), mas estava iniciando o cálculo do valor inicial (b). entretanto, havia aqueles que procuraram a minha ajuda para uma explicação complementar; mediando o diálogo fiz perceberem os pontos distintos e motivei-os a executar os cálculos com os pontos indicados, concomitante, solicitei-os que fizessem os cálculos com outros dois pontos e tirassem suas conclusões.

> **Alunos: “**Pode deixar professor, vamos fazer”;
> **Professor pesquisador/mediador**: “realize os cálculos e confira com o resultado deste resolvido agora”;
> **Alunos**: “professor deu o mesmo valor”.
> **Professor pesquisador/mediador**: “o que vocês concluem com isso?”
> **Alunos**: “professor a conta está certa, então”;

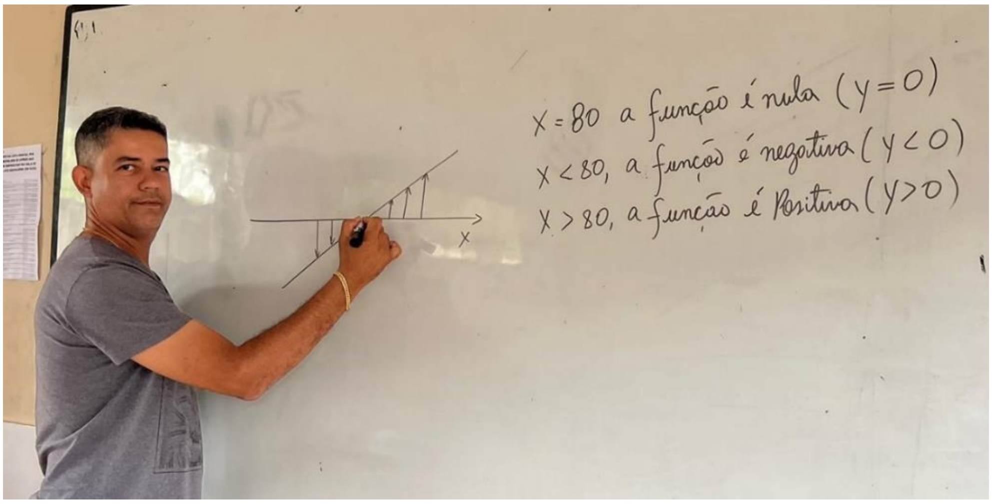
> **Professor pesquisador/mediador**: “É isso aí, agora continue a responder as demais atividades”.
> **Alunos**: “Valeu professor”.

Foto 2 – Alunos consultados realizando as atividades

Fonte: Professor pesquisador/mediador, 2022

Para a atividade 5 também foi entregue os materiais e apresentado o contexto da prática de como pensar matematicamente para chegar à compreensão das análises dos sinais de uma função afim.

Foto 3 – Professor pesquisador – mediação por exemplo



Fonte: Professor pesquisador/mediador, 2022.

Logo em seguida, as duplas e os alunos individuais iniciaram os trabalhos de resolução.

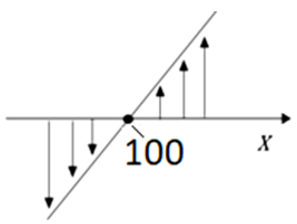
Após uns 20 minutos comecei a andar na sala para saber se os alunos participantes estavam realmente respondendo de forma afinco as atividades, foi então que percebi que haviam duas duplas que não tinham começado, então, interferi de forma pedagógica para saber os motivos da inércia em resolver as atividades, elas (duplas) relataram não compreender bem, pois nunca tinham respondidos antes uma conta desta, perguntei se o exemplo resolvido inicialmente junto com a turma havia ajudado na interpretação, eles disseram que não haviam entendido e tiveram vergonha em perguntar. Deixei claro para eles que o papel do professor é para contribuir com o desenvolvimento cognitivo em relação a matemática, logo, eles poderiam e deveriam perguntar, faz parte do processo dinâmico do ensino aprendizagem.

Desta maneira me aproximei das carteiras e indagando-os fiz mais um exemplo, agora eles acompanharam com mais atenção, pois estava com eles na carteira.

> **Professor pesquisador/mediador**: "veja este exemplo aqui (um exemplo feito na folha de caderno deles) para quais valores de x as setas ficam acima do eixo das abscissas? Para qual valor de x, o ponto fica exatamente no eixo das abscissas? E por conseguinte, para quais valores de x as setas ficam abaixo do eixo das abscissas?"
> **Alunos**: "Ah! Professor, acredito que entendi agora."
> **Professor pesquisador/mediador**: "legal agora faça essas mesmas perguntas para as atividades e desenvolva-as".

No geral, os alunos conseguiram desenvolver sem muita dificuldade, em virtude, da resolução participativa com os alunos da turma, no exemplo inicial na lousa.

Figura 29 - Exemplo da Atividade 5

Gráfico	Valores para os quais o sinal função é
I) 	x = ___, a função é ____________ (y = ___) x < ___, a função é ____________ (y < ___) x > ___, a função é ____________ (y > ___)

Fonte: Autor, 2022.

Ao término destas atividades, passamos para as atividades de aprofundamento, por último, porém não menos importante, institucionalizamos o pensamento matemático para aferir e inferir problemas que envolvem o sinal da função afim.

4.7 Sexta sessão de ensino

No dia 08/11/2022 (terça-feira) ocorreu a sexta sessão com o desenvolvimento da atividade 6. Assim sendo, realizamos a rotina de apresentação e exposição conforme anteriormente relatado e distribuímos a tarefa sobre função afim denominada do zero da função, cujo objetivo era fazer os alunos descobrirem as características dos pontos de intersecção da função afim com os eixos coordenados.

Figura 30 – Exemplo de Atividade 6

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbf{y = ax + b}$	Coordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo das abscissas.	Coordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo das ordenadas.
$y = x + 3$	(,)	(,)
$y = 2x + 6$	(,)	(,)
$y = x - 2$	(,)	(,)
$y = -2x + 3$	(,)	(,)
$y = -x - 3$	(,)	(,)

Fonte: Silva e Sá (2018, apud Professor pesquisador/mediador, 2022).

Para essa atividade aplicada por Silva em sua pesquisa (2018), e reaplicada nesta pesquisa foram disponibilizadas 5 funções crescentes $(a > 0)$ e 5 funções decrescentes $(a < 0)$ de forma aleatória, para a resolução dos alunos consultados.

As duplas e aos alunos individuais presentes foram distribuídos as folhas do roteiro (tabela) e o quadro de gráfico (Ver anexo C) para que eles observando os gráficos completassem a tabela com os valores da coordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo das abscissas e das ordenadas em cada situação.

Decorrido uns 20 minutos, comecei a andar na sala de aula e observar quem já havia começado ou concluído algumas funções, percebi que algumas duplas não tinham começado, estavam sem motivação. Nessa ocasião, fiz a intervenção didático-pedagógica, “vamos pessoal, vocês são capazes, afinal estão no 9.º ano, portanto, conhece a matemática básica do ensino fundamental” (professor pesquisador/mediador).

Alunos: Ok, professor. “Vamos tentar aqui”

> **Professor pesquisador/mediador**: já decorreram uns 50 minutos vamos conversar sobre as soluções de vocês, gostaria da atenção de todos"
> **Dupla D17/D18**: "Beleza professor"; "Está bem, professor"
> **Professor pesquisador/mediador**: Olhando o preenchimento da tabela o que vocês observam?
> **Dupla D16/D24**: "na primeira coluna o y é zero e na segunda o x"
> **Aluno D36**: "percebi que o zero está repetindo na primeira e na segunda coluna"
> **Professor pesquisador/mediador**: "Daí eu pergunto a vocês: é para o mesmo valor que o zero está se repetindo?
> **Professor pesquisador/mediador**: "perceba que na primeira coluna qual é o valor que é zero? e na segunda?"
> **Aluno D36**: "na primeira coluna é zero sempre o y e na segunda o x"
> **Professor pesquisador/mediador**: "pergunto qual é o título e o objetivo da atividade".
> **Alunos**: "Descobrir as características dos pontos de intersecção da função afim com os eixos coordenados".
> **Professor pesquisador/mediador**: "institucionalizamos juntamente com os alunos que o Zero ou Raiz da função afim é o valor que o x assume para que a função $\mathbf{y} = \mathbf{ax} + \mathbf{b}$ seja igual a zero, ou seja, $y = 0$.

Correlacionando com a pesquisa de Silva (2018), Macedo (2018), Tortola e Rezende (2021), dentre outras a atividade acima tive resultado muito parecido, até porque, a metodologia aplica em todos os casos foram a ED.

Por conseguinte, trabalhamos as atividades de aprofundamento, orientamos que noutra sessão aplicaríamos o Pós-teste e gostaríamos de contarmos com a presença de todos.

4.8 Sétima sessão de ensino – Aplicação do Pós-teste

No dia 09/11/2022 (quarta-feira) foi aplicado o Pós-teste aos alunos da E1 e E2, conforme já mencionado, um no período matutino das 9h às 10h45min, outro no vespertino das 13h30min às 15h, destacamos que esta representa a fase final da pesquisa em Engenharia Didática. Contando com a colaboração de 19 duplas e 6 alunos atuando individualmente, o estudo teve como meta avaliar os conhecimentos assimilados pelos estudantes ao longo das etapas conduzidas através das sequências didáticas. Adicionalmente, buscou-se identificar o progresso no desenvolvimento de competências específicas, alinhadas às habilidades intrínsecas à função afim, conforme previamente discutido

Apresentaremos a seguir a análise a posteriori e a validação do experimento, a partir dos resultados obtidos no desenvolvimento da pesquisa, sobretudo, após aplicação do Pós-teste.

5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Nesta seção apresentaremos o resultado da pesquisa, ou seja, a análise a posteriori e a validação da sequência didática aplicada. Para tanto, vamos confrontar os resultados obtidos a partir da comparação dos dados levantados durante a realização da experimentação e as concepções a priori, com aplicações de técnicas de estática aplica, evidenciando a validação da sequência didática elaborada por nós e aplicada em sala de aula para o ensino de função afim. Frisamos que os dados analisados são das produções dos educandos durante o processo de aplicação das atividades, bem como das observações *in loco* durante os encontros e das inferências obtidas após as aplicações do Pré e Pós-teste.

5.1 Resultados e análises do experimento

Para essa análise, se faz necessária, a quantificação dos dados do Pós-teste, para que em um segundo momento, possamos compará-los com os resultados do Pré-teste. Dito isso, no quadro 33 abaixo, já trouxemos o desempenho dos alunos consultados na pesquisa. Ele apresenta o desempenho das 19 duplas e dos 6 alunos individuais, onde C representa questões certas, E indica questões Erradas. P indica questões parciais e B, questões em branco, conforme realizado também no Pré-teste.

Quadro 33 - Desempenho das duplas e individual dos alunos no Pós-teste

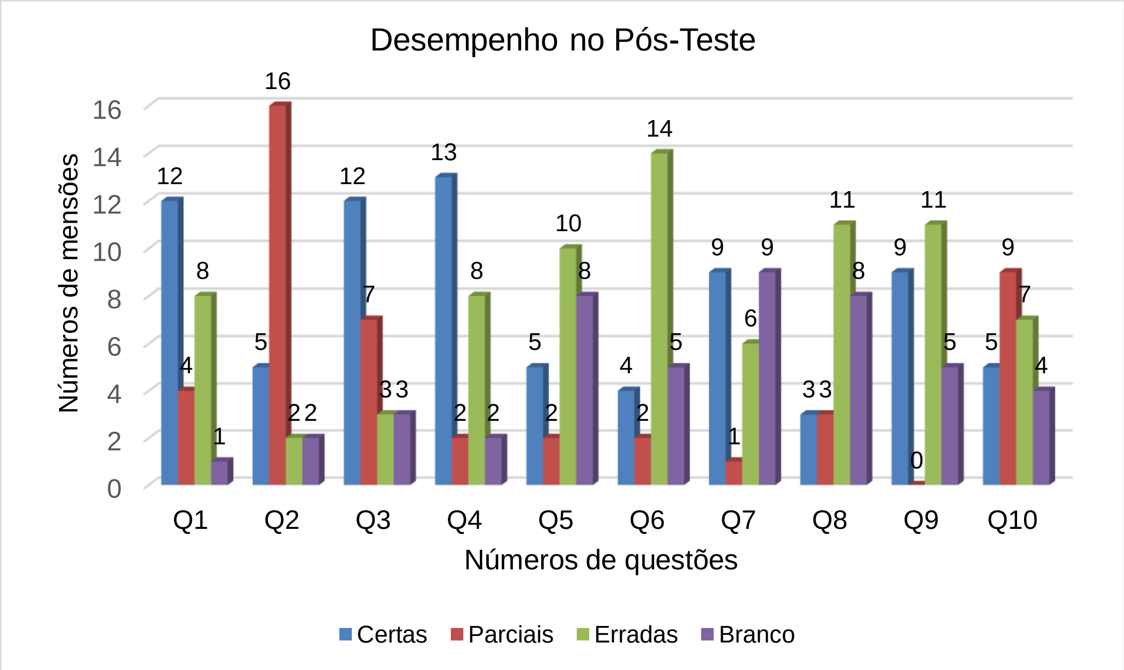
Duplas/alunos	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
D2/D22	C	C	C	C	C	C	B	P	C	C
D4/D27	C	C	C	C	C	P	C	E	C	P
D5/D9	C	P	C	C	P	E	E	C	C	P
D6/D10	E	P	E	E	B	B	B	B	E	E
D11/D23	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D12/D26	B	E	B	B	B	B	B	B	B	B
D13/D19	C	P	P	E	B	E	C	B	B	P
D14/D21	C	B	B	E	B	E	C	B	B	P
D15/D31	E	P	B	B	B	E	B	E	B	C
D16/D24	E	B	E	E	E	E	B	B	B	B
D17/D28	C	P	C	E	E	E	E	E	E	B
D18/D25	C	C	C	C	C	E	C	E	C	C
D32/D46	E	P	P	C	E	E	C	E	E	B
D33/D48	C	P	P	C	E	E	P	P	C	P
D34/D38	P	P	P	C	E	C	E	E	E	P
D35/D44	C	P	C	C	E	E	E	E	E	E
D39/D41	P	P	P	E	E	E	E	E	E	E
D42/D47	P	P	C	C	E	E	B	E	C	E
D45/D49	E	E	E	E	B	B	B	B	E	E

D1	C	P	C	P	E	C	C	B	E	P
D7	C	P	C	C	C	P	E	E	C	C
D8	P	P	C	C	P	E	C	C	C	P
D36	E	P	C	C	B	B	B	B	E	P
D37	E	C	P	E	E	B	C	E	E	E
D40	E	P	P	P	B	E	B	P	E	E

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados do quadro 33 acima, nos possibilitou gerar o gráfico 41 abaixo, para melhor compreensão e aferições dos resultados.

Gráfico 41 - Desempenho das duplas e individual dos alunos no Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O gráfico 41 acima demonstra que as questões de maiores acertos no Pós-teste foram em ordem decrescente: Q4, Q1, Q3, Q7 e Q9; as questões de obtiveram maiores menções parciais em ordem decrescente foram: Q2, Q10 e Q3; as questões que apresentaram maiores índices de erros foram em ordem decrescente: Q6, Q8, Q9 e Q5; já as questões que apresentaram maiores menções em branco foram em ordem decrescente: Q7, Q5 e Q8. Desta maneira, vislumbrando um entendimento adequado nas inferências das respectivas questões, propusemos a comparação entre os dados do Pré e Pós-teste, reproduzido no quadro 34 a seguir.

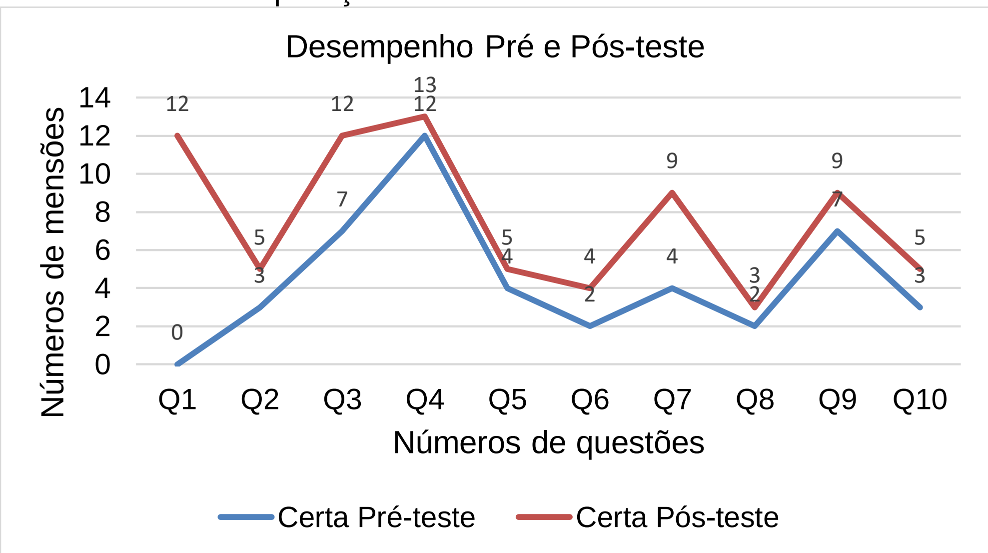
Quadro 34 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

Questões	**Certa**		**Parcial**		**Errada**		**Branco**	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Q1	0	12	10	4	9	8	6	1
Q2	3	5	10	16	3	2	9	2
Q3	7	12	13	7	2	3	3	3
Q4	12	13	5	2	3	8	5	2
Q5	4	5	3	2	11	10	17	8
Q6	2	4	7	2	9	14	7	5
Q7	4	9	3	1	7	6	11	9
Q8	2	3	0	3	9	11	14	8
Q9	7	9	2	0	8	11	8	5
Q10	3	5	5	9	8	7	9	4

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O quadro 34 acima nos fornece uma visão geral das respostas em ambos os testes, frisamos que foram as mesmas questões tanto para o Pré como para o Pós-teste. Contudo, ainda ficou difícil fazer as análises entre os dados, consequentemente, geramos os gráficos (42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 e 49) por categoria de resposta (Certa, Parcial, Errada e em Branco), por quantitativo e percentuais, para contribuir com uma análise mais precisa. Acompanhe os dados do gráfico 42 abaixo.

Gráfico 42 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

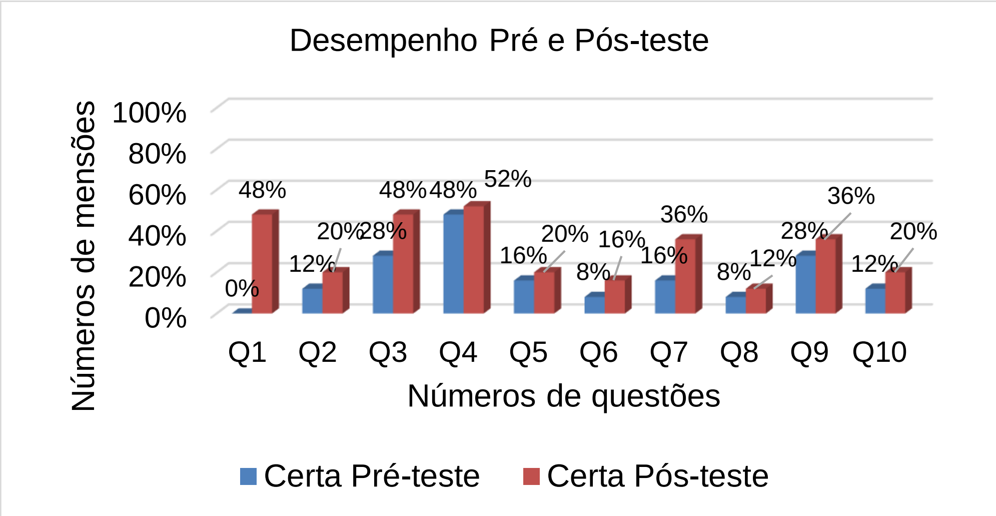


Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O gráfico 42 de linha acima, nos revela visualmente que nos Pós-teste já houve melhoras em acertos e consequente, nas demais categorias. Enquanto no Pré-teste os alunos consultados não conseguiram acertar nem uma sequer, já no Pós-teste após aplicação da sequência didática e as estratégias de recursos como método da descoberta e a taxonomia de Bloom todos concatenados pelo método da ED.

No gráfico 43, temos os resultados já na forma de percentuais, nos fornecendo uma ideia de resultado mais consolidado.

Gráfico 43 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

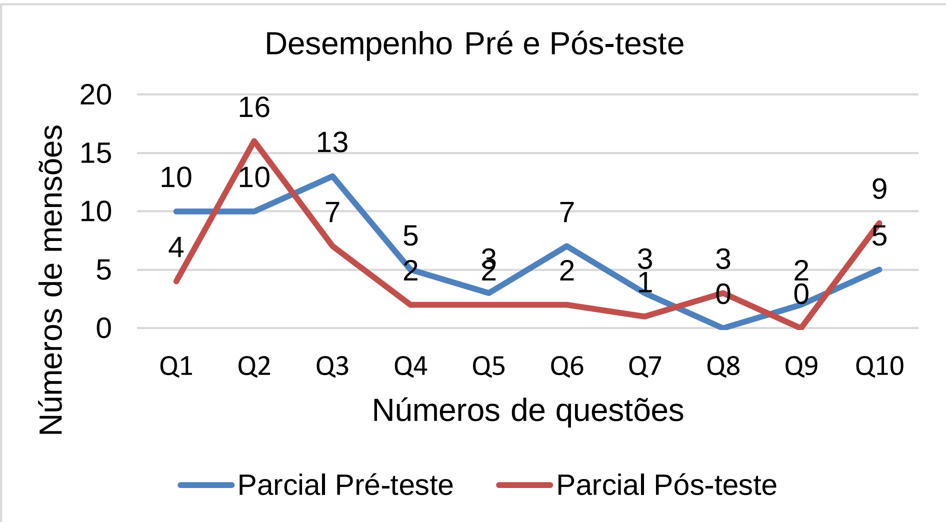


Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Desta maneira, de forma visual percebemos que no Pré-teste na Q1 teve 0% de acerto, já após a SD, tivemos um aumento considerável por parte dos alunos consultados, isto é, 48% acertaram a Q1, outra questão que foi bem avaliada no Pré-teste, porém, veio ultrapassar a casa dos 50%, somente no Pós-teste, com precisamente 52% de acertos contra 48%, no Pré-teste foi a Q4 e de maneira similar podemos aferir que em todas as demais questões, houve avanços.

O gráfico 44 abaixo traz os resultados comparativos na categoria parcial.

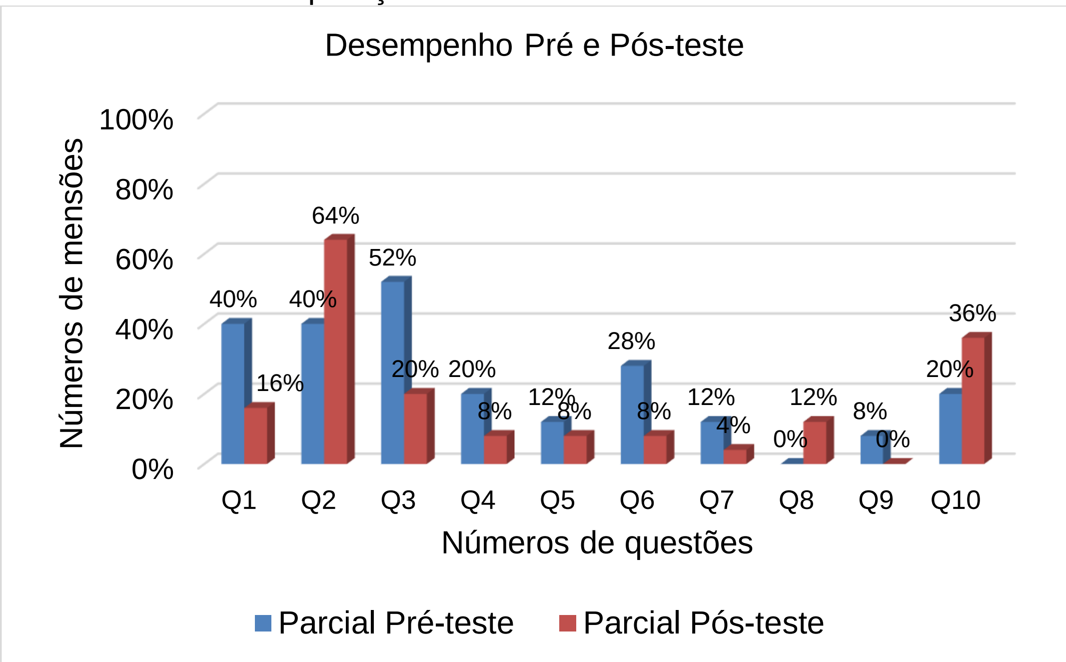
Gráfico 44 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A partir das análises comparativas dos resultados, observamos uma diminuição nos dados após o pós-teste nas questões Q1, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7 e Q9, devido ao número de respostas corretas dessas questões. Analogamente, notamos um aumento na categoria "parcial" para as questões Q2, Q8 e Q10, indicando que os alunos acertaram mais alternativas do que no pré-teste. Essa tendência é mais claramente visualizada no gráfico 45 a seguir.

Gráfico 45- Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

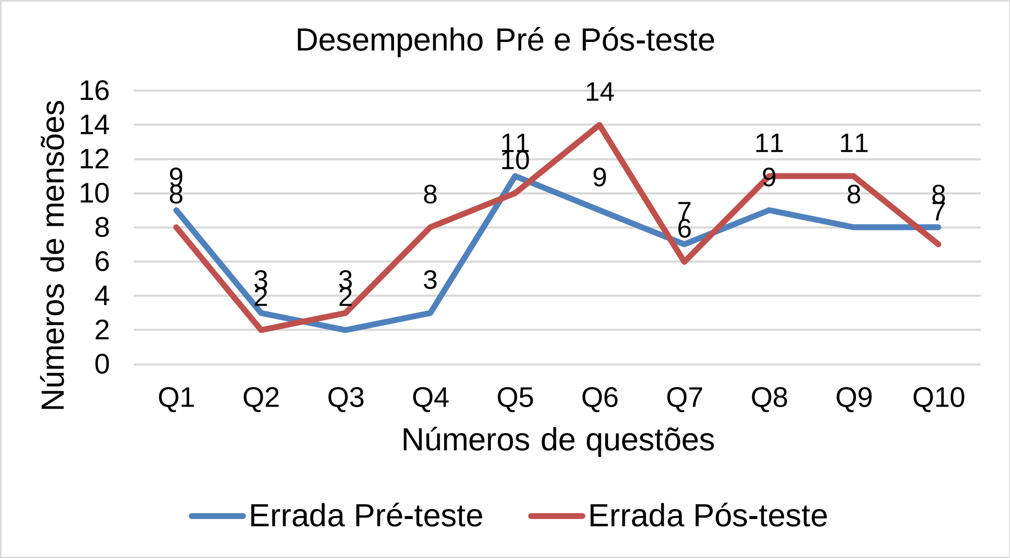


Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Como se percebe na Q1 na categoria parcial no Pré-teste tivemos 40% e no Pós-teste chegamos a 16%, pois, na referida questão no Pré-teste não houve acerto nesta questão e no Pós-teste já teve 12 acertos, caindo, portanto, o índice de alunos que haviam acertados de forma parcial no Pré-teste. De maneira análoga podemos fazer essa mesma interpretação para as demais questões. Ressalvamos que a Q10 aumentou o índice de acertos parciais, portanto, deve ser analisada de forma positiva, pois, no Pré-teste os alunos erraram mais a referida questão.

Na categoria de quantitativos de questões erradas tanto no Pré como no Pós-teste é melhor visualizada nos gráficos 46 e 47 abaixo.

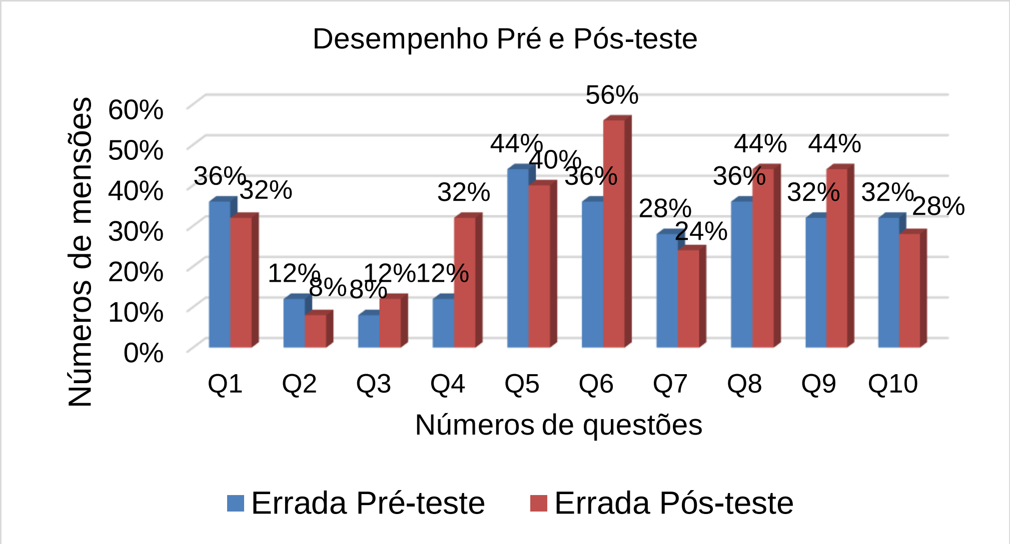
Gráfico 46 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados do gráfico acima, proporcionou fazermos às análises percentuais, como está demonstrado no gráfico 45 abaixo.

Gráfico 47- Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

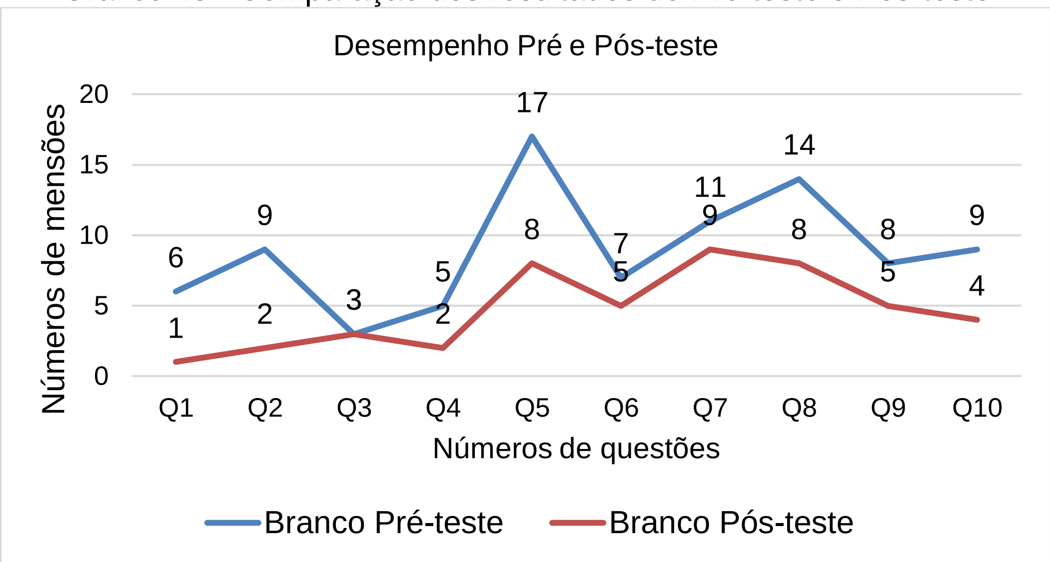
Os dados nos revelam que nas questões Q1, Q2, Q7 e Q10 houve uma pequena redução na diferença do Pré para o Pós-teste, isto em relação às questões erradas. Porém, nas demais questões (Q3, Q4, Q5, Q6, Q8 e Q9), houve um aumento nos erros, resultados atenuados pela diminuição dos índices da categoria Parcial, que contribuíram para os aumentos dos acertos.

No entanto, observou-se um aumento nos erros nas questões (Q3, Q4, Q5, Q6, Q8 e Q9). Esse aumento foi parcialmente compensado pela redução dos índices na categoria "Parcial", o que, por sua vez, contribuiu para o crescimento dos acertos. Vale ressaltar que, levando em consideração o público-alvo, o aumento de erros nas questões pode ser visto como uma estratégia do método de descoberta. Isso oferece oportunidades para aprender a partir dos erros. Além disso, uma das intervenções mais eficazes vem do próprio aluno, ao identificar onde e em que aspecto o erro foi cometido. Nesse contexto, Sá (2019, p.17) “uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado”.

Certamente, o processo de aprendizagem não se dá apenas através do acerto, mas também por meio dos erros. Estes últimos oferecem aos alunos a oportunidade de "aprender a aprender" (HENING, 1986, apud SÁ, 2019, p. 15).

No que tange as questões deixadas em branco, vamos analisar a categoria a partir dos gráficos 48 e 49.

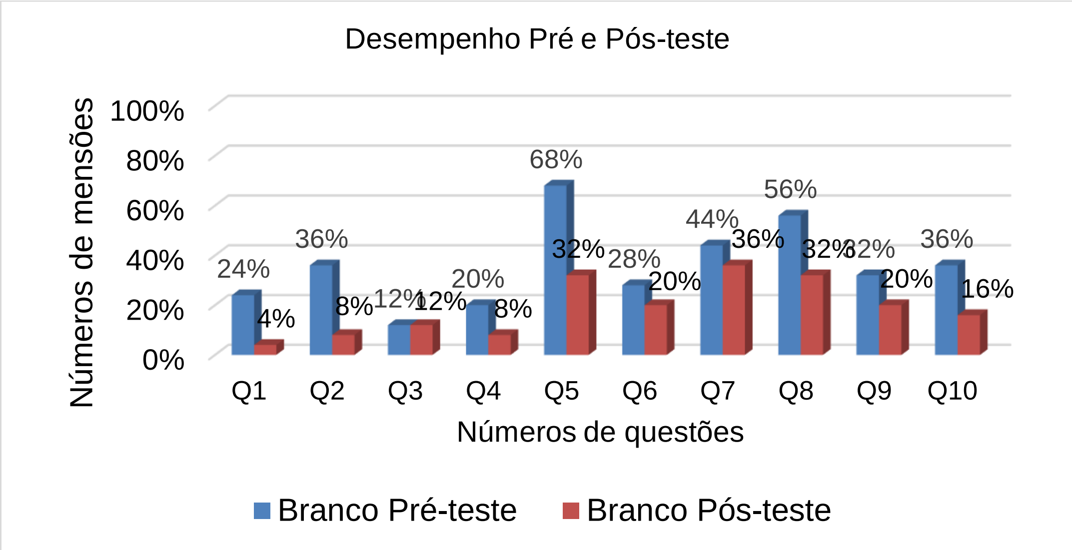
Gráfico 48 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

De imediato e visualmente, percebemos no gráfico 48 acima que no Pós-teste houve reduções nas questões deixadas em branco, porém, vamos tecer uma análise por meio da porcentagem entre os dados apresentados e indicados no gráfico 49 abaixo.

Gráfico 49 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O gráfico 49 nos revelam que com exceção da Q3, que em ambos os testes permaneceram com 12% em branco, mas em todas as outras houve reduções, com destaques na ordem decrescente, para as questões Q5, Q2, Q8 e Q10. Por exemplo na Q5 caiu de 68% no Pré-teste para 32% no Pós-teste.

A relevância neste sentido está mesmo com o aumento das questões erradas do Pré para o Pós-teste, alguns que propuseram a fazer as questões no Pós-teste acertaram.

Para além destas análises comparativas, ressaltamos que se faz necessário outras técnicas de aferições e inferências, particularmente, na área de estatística aplicada, para validarmos os resultados e/ou discorrermos acerca de possíveis conclusões das aplicações das sequências didáticas no ensino de função afim por atividades. Quais sejam: coeficiente de correlação linear de Pearson (r) dos testes, testes de hipóteses, a correlação entre o desempenho nos testes e fatores socioeconômicos dos pesquisados e por último, faremos algumas ponderações das observações *in loco.*

5.2 Coeficiente de correlação linear de Pearson dos testes

Neste tópico analisaremos as correlações entre as variáveis do questionário socioeducacional e os resultados dos testes com o objetivo de verificarmos quais fatores influenciaram no desempenho dos discentes. Para tanto, aplicaremos a técnica de coeficiente de correlação linear de Pearson (r) que é um índice estatístico que estabelece associação linear entre variáveis, desenvolvido pelo cientista Karl Pearson para examinar o que ocorre com uma delas quando a outra varia. Este coeficiente varia de -1 a 1, onde o sinal indica a direção positiva ou negativa da correlação.

Neste trabalho, o coeficiente (r) foi calculado por meio da ferramenta Office Excel por meio do comando "=CORREL(matriz1; Matriz2)". O quadro a seguir apresenta os níveis de intensidade do mesmo, de acordo com Levin e Fox (2004, apud SILVA, 2015, p. 161).

Quadro 35 - Classificação da Correlação

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	**CORRELAÇÃO**
$r = 1$	Perfeita Positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte Positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada Positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca Positiva
$0 < r < 0,10$	Ínfima Positiva
0	Nenhuma correlação
$- 0,1 < r < 0$	Ínfima Negativa
$- 0,5 < r \leq - 0,1$	Fraca Negativa
$- 0,8 < r \leq - 0,5$	Moderada Negativa
$- 1 < r \leq - 0,8$	Forte Negativa
$r = - 1$	Perfeita Negativa

Fonte – Silva (2015, p. 161, adaptada).

Para analisar a correlação dos dados socioeconômicos e as respostas dos discentes dos testes vamos usar o diagrama de dispersão, que corresponde ao conjunto de pontos correlacionados entre as variáveis. Neste caso, existirá correlação linear entre as variáveis quando for possível ajustar o conjunto de pontos a uma reta. Segundo Barbetta (2012, p. 252, apud MIRANDA, 2021, p. 151) "uma maneira de visualizarmos se duas variáveis apresentam-se correlacionadas é através do diagrama de dispersão, no qual os valores das variáveis são representados por pontos, num sistema cartesiano".

Na primeira correlação foi considerada a variável "você gosta de Matemática?" e a diferença das notas no pré-teste e pós-teste do experimento. Conforme o quadro 36 abaixo.

Quadro 36 - Parametrização dos dados – você gosta de matemática

você gosta de matemática?	Parametrização
Nenhum pouco	1
Pouco	2
Muito	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

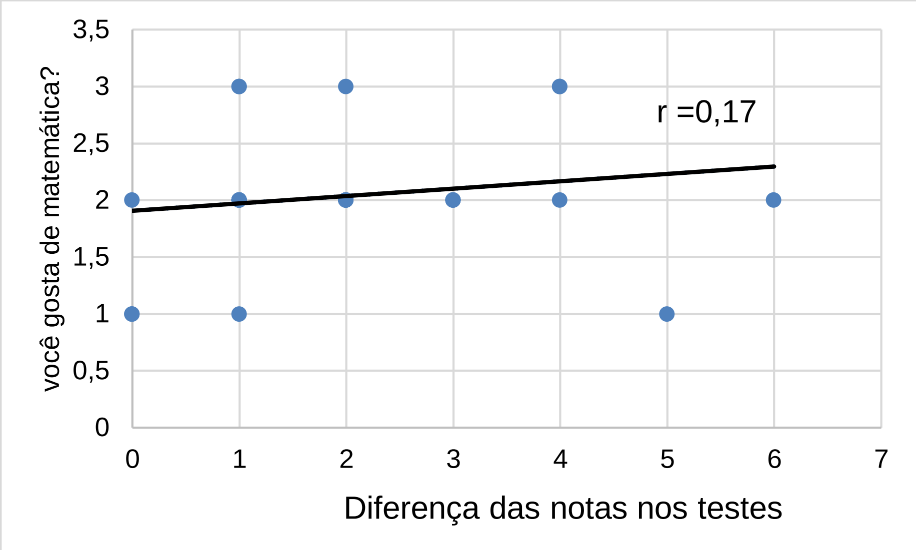
Quadro 37 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você gosta de matemática?

Dupla/ discente	pré-teste x_i	Pós-teste y_i	Diferença	você gosta de matemática?
D2/D22	4	8	4	3
D4/D27	5	8	3	2
D5/D9	1	7	6	2
D6/D10	0	5	5	1
D11/D23	6	10	4	2
D12/D26	0	0	0	1
D13/D19	1	2	1	2
D14/D21	1	1	0	2
D15/D31	0	1	1	2
D16/D24	0	0	0	1
D17/D28	0	2	2	2
D18/D25	5	8	3	2
D32/D46	0	2	2	2
D33/D48	2	3	1	3
D34/D38	0	2	2	3
D35/D44	2	3	1	2
D39/D41	1	0	1	2
D42/D47	4	3	1	1
D45/D49	1	0	1	2
D1	0	4	4	3
D7	4	6	2	2
D8	2	5	3	2
D36	1	2	1	3
D37	0	2	2	2
D40	3	0	3	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O quadro acima gerou o gráfico 50 de dispersão abaixo.

Gráfico 50 - Dispersão: a diferença das notas nos testes e você gosta de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O coeficiente linear de Pearson (r) para a correlação entre ter você gosta de matemática e a diferença das notas nos testes, foi r = 0,17. Sendo um resultado positivo e próximo de zero, a correlação é classificada como Fraca Positiva, pois, o coeficiente de relação se encontra no intervalo de $0,1 \leq r < 0,5$. Desta forma, concluímos que o fato da maioria dos discentes responderam gostar “pouco” de matemática não influenciou no resultado dos testes.

Para o exemplo a seguir o coeficiente linear de Pearson (r) será utilizado para verificar a correlação entre a variável “dificuldade em aprender matemática” e a diferença das notas nos testes. Conforme a parametrização para a dificuldade em aprender matemática apresentada no quadro 38.

Quadro 38 - Parametrização dos dados: você tem dificuldade para aprender matemática?

Você tem dificuldade para aprender matemática?	**Parametrização**
Não	1
Um Pouco	2
Muito	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A parametrização dos dados do quadro 38 foi aplicado no quadro 39 abaixo.

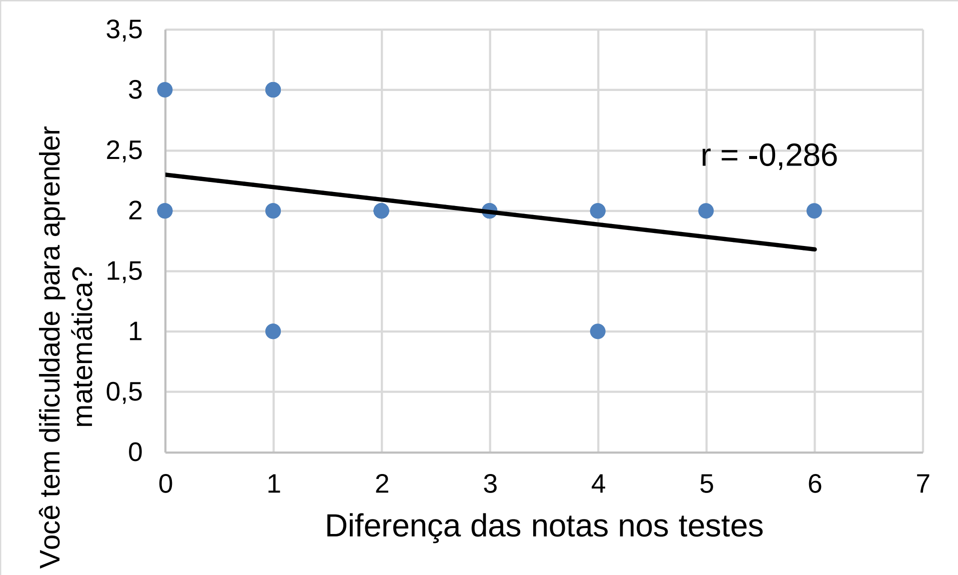
Quadro 39 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você tem dificuldade para aprender matemática?

Dupla/ discente	pré-teste x_i	Pós-teste y_i	Diferença	Você tem dificuldade para aprender matemática?
D2/D22	4	8	4	1
D4/D27	5	8	3	2
D5/D9	1	7	6	2
D6/D10	0	5	5	2
D11/D23	6	10	4	2
D12/D26	0	0	0	2
D13/D19	1	2	1	3
D14/D21	1	1	0	2
D15/D31	0	1	1	3
D16/D24	0	0	0	3
D17/D28	0	2	2	2
D18/D25	5	8	3	2
D32/D46	0	2	2	2
D33/D48	2	3	1	3
D34/D38	0	2	2	2
D35/D44	2	3	1	2
D39/D41	1	0	1	2
D42/D47	4	3	1	1
D45/D49	1	0	1	3
D1	0	4	4	2
D7	4	6	2	2
D8	2	5	3	2
D36	1	2	1	1
D37	0	2	2	2
D40	3	0	3	2

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O gráfico 51 de dispersão abaixo demonstra os resultados do quadro 39 acima apontando o coeficiente de Pearson (r) sua intensidade e direção, tais indicativos é comparado com o quadro 84 - Classificação da correlação para fazermos às análises conclusivas das variáveis, conforme segue abaixo.

Gráfico 51 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você tem dificuldade para aprender matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O resultado do coeficiente de correlação de Pearson para as variáveis diferença das notas nos testes e você tem dificuldade para aprender matemática? foi r = - 0,286. Como este resultado pertence ao intervalo - 0,5 < r ≤ - 0,1, sendo um valor negativo próximo a zero, concluímos que esta correlação é Fraca Negativa.

Assim sendo, corroboramos que o fato dos discentes sentirem pouca dificuldade, não interferiu de forma significativa nos resultados do pré-teste e pós-teste.

A verificação do coeficiente linear de Pearson (r) abaixo se deu para verificar a correlação entre a variável “você se distrai nas aulas de matemática?” e a diferença das notas nos testes. Considerando a parametrização para a variável supracitada, de acordo com o quadro 40 a seguir.

Quadro 40 - Parametrização dos dados: você se distrai nas aulas de matemática?

Você se distrai nas aulas de matemática?	**Parametrização**
Não, eu sempre presto atenção	1
Sim, eu não consigo prestar atenção	2
Às vezes	3

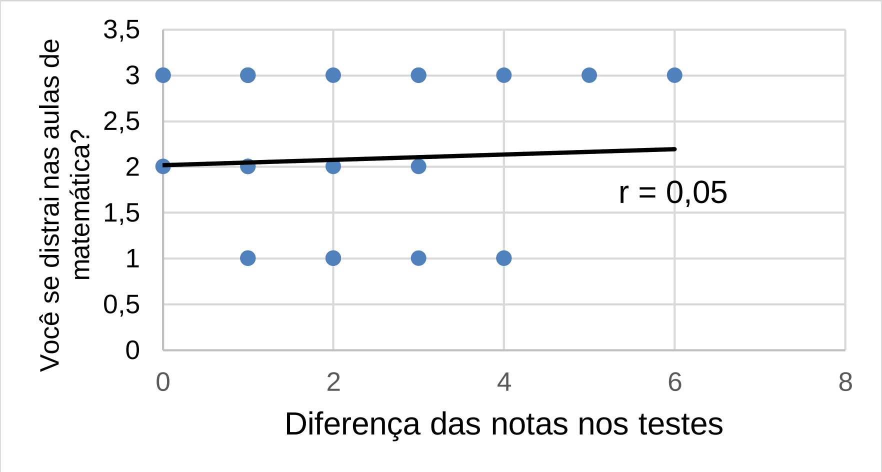
Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Quadro 41 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você se distrai nas aulas de matemática?

Dupla/ discente	pré-teste x_i	Pós-teste y_i	Diferença	Você se distrai nas aulas de matemática?
D2/D22	4	8	4	1
D4/D27	5	8	3	3
D5/D9	1	7	6	3
D6/D10	0	5	5	3
D11/D23	6	10	4	1
D12/D26	0	0	0	3
D13/D19	1	2	1	3
D14/D21	1	1	0	3
D15/D31	0	1	1	3
D16/D24	0	0	0	2
D17/D28	0	2	2	2
D18/D25	5	8	3	2
D32/D46	0	2	2	1
D33/D48	2	3	1	3
D34/D38	0	2	2	1
D35/D44	2	3	1	2
D39/D41	1	0	1	2
D42/D47	4	3	1	1
D45/D49	1	0	1	1
D1	0	4	4	3
D7	4	6	2	1
D8	2	5	3	1
D36	1	2	1	1
D37	0	2	2	3
D40	3	0	3	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 52 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você se distrai nas aulas de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Para as variáveis “diferença nas notas nos testes” e “você se distrai nas aulas de matemática?” o coeficiente linear de Pearson encontrado foi r = 0,05. Este resultado indica uma correlação Ínfima Positiva com coeficiente pertencente ao intervalo 0 < r < 0,1. Com isso observamos que, apesar da parametrização dos dados apontarem que a maioria dos discentes responderem que às vezes se distrai nas aulas de matemática, esta característica não interferiu significativamente nos resultados dos testes.

Com intuito de confirmarmos a tendência que a melhora nas notas no pós-teste é correlacionada à aplicação das estratégias didática-pedagógicas da sequência didática por meio de atividades no ensino da função afim, vamos fazer mais uma análise do coeficiente linear de Pearson. Desta vez, a correlação entre a variável “Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?” e a diferença das notas nos testes. Considerando a parametrização para a variável acima citada.

Quadro 42 - Parametrização dos dados: Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?	**Parametrização**
Sempre	1
Quase sempre	2
Às vezes	3
Poucas vezes	4
Nunca	5

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

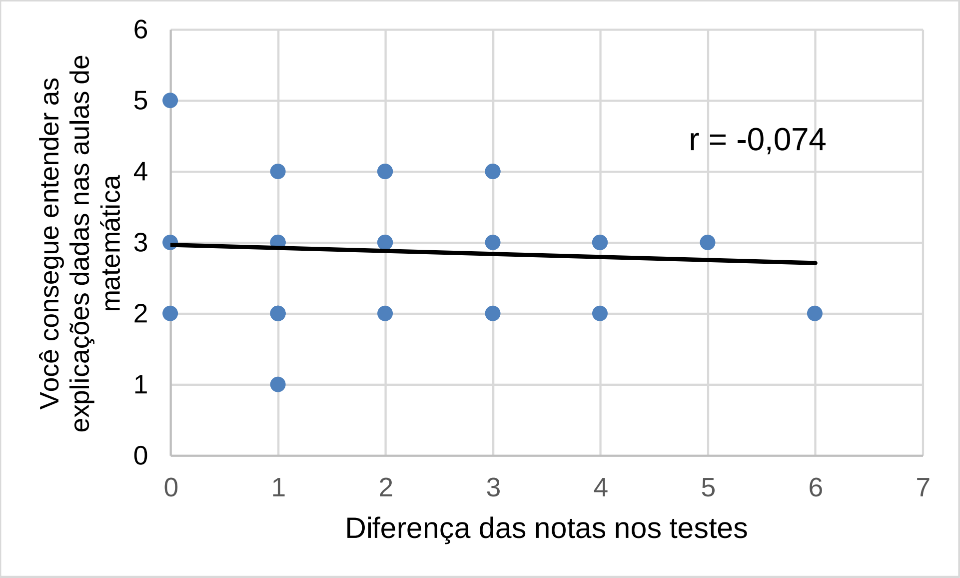
Quadro 43 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

Dupla/ discente	**pré-teste** x_i	**Pós-teste** y_i	**Diferença**	**Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**
D2/D22	4	8	4	2
D4/D27	5	8	3	4
D5/D9	1	7	6	2
D6/D10	0	5	5	3
D11/D23	6	10	4	3
D12/D26	0	0	0	3
D13/D19	1	2	1	3

D14/D21	1	1	0	2
D15/D31	0	1	1	3
D16/D24	0	0	0	5
D17/D28	0	2	2	3
D18/D25	5	8	3	4
D32/D46	0	2	2	3
D33/D48	2	3	1	3
D34/D38	0	2	2	2
D35/D44	2	3	1	2
D39/D41	1	0	1	2
D42/D47	4	3	1	2
D45/D49	1	0	1	4
D1	0	4	4	3
D7	4	6	2	4
D8	2	5	3	2
D36	1	2	1	1
D37	0	2	2	4
D40	3	0	3	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Gráfico 53 - Correlação: a diferença das notas nos testes e você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O valor do coeficiente de correlação linear de Pearson para a “diferença das notas nos testes” e a variável “você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?” foi de r = - 0,074, comprovando uma correlação Ínfima Negativa, pois, este valor se encontra entre o seguinte intervalo - 0,1 ≤ r < 0. Este resultado é muito próximo de zero e sendo negativo, logo, podemos evidenciar que o fato da maioria dos discentes afirmarem às vezes entender as explicações dadas nas aulas de matemática teve pouca influência nos resultados dos testes.

Em síntese, podemos sintetizar os dados acerca os coeficientes de Pearson (r) no quadro abaixo, para uma melhor compreensão das correlações entre as variáveis analisadas e as respostas dos testes, sobretudo, no pós-teste.

Quadro 44 - Resultados da Correlação Linear de Pearson

VARIÁVEL	COEFICIENTE LINEAR DE PEARSON (r) I	INTENSIDADE	DIREÇÃO
Você gosta de matemática?	r = 0,17	Fraca	Positiva
Você tem dificuldade para aprender matemática?	r = - 0,286	Fraca	Negativa
você se distrai nas aulas de matemática?	r = 0,05	Ínfima	Positiva
Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?	r = - 0,074	Ínfima	Negativa

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

As correlações entre os fatores socioeconômicos e a variação das notas entre o primeiro e segundo teste mostraram-se ínfimos e fracos. Conforme a literatura estatística (ver Quadro 35), concluímos que esses fatores não tiveram impacto significativo nos resultados dos testes relacionados à sequência didática empregada. Assim, é possível afirmar que as estratégias metodológicas adotadas foram bem-sucedidas e eficazes, auxiliando no desenvolvimento cognitivo dos alunos no que se refere ao ensino e aprendizado da função afim por meio de atividades.

Na continuidade apresentamos o teste de hipóteses aplicado aos resultados do experimento, vislumbrando obter outras conclusões estatísticas sobre a referida temática.

5.3 Teste de hipóteses

Nesta etapa vamos recorrer aos cálculos estatísticos para auxiliar nas tomadas de decisões acerca dos resultados obtidos no decorrer das aplicações da pesquisa, sobretudo, aferir e inferir as informações produzidas pelos pré-teste e pós-teste dos resultados das atividades por meio da sequência didática envolvendo função afim, assim nos questionar se o que ocorreu com os sujeitos de nossa pesquisa ocorreria com todos os outros estudantes nas mesmas condições. Os resultados obtidos ocorreram ocasionalmente ou se deram a partir da aplicação da sequência didática? Portanto, aplicaremos a técnica estatística do teste de hipótese, que segundo (LARSON; FARBER, 2016, p. 323-324, apud FELIX, 217, grifo do autor):

> Um teste de hipótese é um processo que usa estatísticas amostrais para tentar uma afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional. Uma afirmação sobre um parâmetro populacional é chamado hipótese estatística. Para testar uma afirmação sobre um parâmetro populacional, você deve especificar, cuidadosamente, um par de hipóteses – uma que represente a afirmação e outra, seu complemento. Quando uma dessas hipóteses é falsa, a outra deve ser verdadeira. Qualquer uma das hipóteses – **a hipótese nula ou a hipótese alternativa** – pode representar a afirmação original.

Depreendemos assim que há duas hipóteses para as amostras populacionais, uma hipótese nula e outra alternativa. As quais, dependendo dos resultados pode ser refutada uma ou a outra. Para corroborar com esse entendimento, Mann (2006, p. 379) cita que:

> a) Hipótese nula (H_0) corresponde a uma afirmação (ou declaração) em relação a um determinado parâmetro da população, que é presumida como verdadeira, até que seja declarada falsa.
> b) Hipótese alternativa (H_a) corresponde a uma afirmação em relação a um determinado parâmetro da população, que será verdadeira se a hipótese nula for falsa.

Imbuído desta compreensão, estabeleceremos duas hipóteses para aferirmos os resultados da nossa pesquisa:

➢ Hipótese nula (H_0): a média do pré-teste é maior ou igual à média do pós-teste.

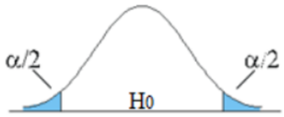
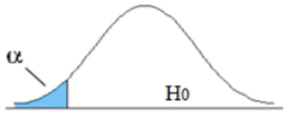
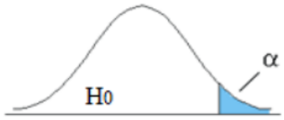
$$\mathrm{H}_0\colon \mu_x \geq \mu_y \therefore \mu_x - \mu_y \geq 0 \therefore \bar{d} \geq \mu_d$$

➢ Hipótese alternativa (H_a): a média do pré-teste é menor que a média do pós-teste.

$$\mathrm{H}_a\colon \mu_x < \mu_y \therefore \mu_x - \mu_y < 0 \therefore \bar{d} < \mu_d$$

Para uma melhor compreensão da interpretação dos resultados das hipóteses relacionados ao tamanho das médias, acompanhe o quadro a seguir.

Quadro 45 - Tipos de Curva Normal

Hipóteses	Curva Normal	Interpretação da cauda
H_0: μ1 = μ2 (média 1 = média 2) H_a: μ1 ≠ μ2 (média 1 ≠ média 2)		É um teste bicaudal com regiões de rejeição de H_0 em ambas as caudas.
H_0: μ1 = μ2 (média 1 = média 2) H_a: μ1<μ2 (média 1 < média 2)		É um teste com cauda à esquerda, que possui região de rejeição de H_0, na cauda da esquerda.
H_0: μ1 = μ2 (média 1 = média 2) H_a: μ1>μ2 (média 1 >média 2)		É um teste com cauda à direita, que possui região de rejeição de H_0, na cauda da direita.

Fonte: Silva (2015, p. 175).

A estatística de teste padronizada *t-student* para amostras dependentes é dada pela seguinte equação:

$$t_{calc} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}, \text{ onde:}$$

n → é o número de sujeitos da pesquisa;

d → é a diferença entre os resultados no pré-teste e no pós-teste;

$\bar{d}$ → é a média das diferenças nas notas do pré-teste e pós-teste, calculado como, $\bar{d} = \frac{\sum_i^n d_i}{n}$

μ_d → é a média hipotética das diferenças de dados emparelhados na população;

S_d → é o desvio padrão amostral da diferença entre os resultados no pré-teste e no pós-teste, calculado como: $S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}$

O grau de liberdade (GL) é o elemento utilizado para construir o gráfico da *t-student*, que é calculado subtraindo 1 da amostra, devido analisarmos amostras de 25 discentes (19 duplas, 6 alunos individuais), então em ambas, o grau de liberdade será $n-1 = 25 - 1 = 24$.

Para auxiliar com os cálculos das médias dos testes e suas implicações, produzimos o quadro 46 abaixo.

Quadro 46 - Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

Duplas/alunos	Acertos			
	pré-teste x_i	Pós-teste y_i	Diferença $(d = x_i - y_i)$	$(d - \bar{d})^2$
D2/D22	4	8	-4	5,5696
D4/D27	5	8	-3	1,8496
D5/D9	1	7	-6	19,0096
D6/D10	0	5	-5	11,2896
D11/D23	6	10	-4	5,5696
D12/D26	0	0	0	2,6896
D13/D19	1	2	-1	0,4096
D14/D21	1	1	0	2,6896
D15/D31	0	1	-1	0,4096
D16/D24	0	0	0	2,6896
D17/D28	0	2	-2	0,1296
D18/D25	5	8	-3	1,8496
D32/D46	0	2	-2	0,1296
D33/D48	2	3	-1	0,4096
D34/D38	0	2	-2	0,1296
D35/D44	2	3	-1	0,4096
D39/D41	1	0	1	6,9696
D42/D47	4	3	1	6,9696
D45/D49	1	0	1	6,9696
D1	0	4	-4	5,5696
D7	4	6	-2	0,1296
D8	2	5	-3	1,8496
D36	1	2	-1	0,4096
D37	0	2	-2	0,1296
D40	3	0	3	21,5296
Soma	**43**	**84**	**-41**	**105,76**
Média	**1,72**	**3,36**	**-1,64**	
Desvio padrão				**2,1**

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Média do pré-teste: $\mu_x = \frac{\sum_i^n x_i}{n} \rightarrow \mu_x = \frac{43}{25} = 1,72$

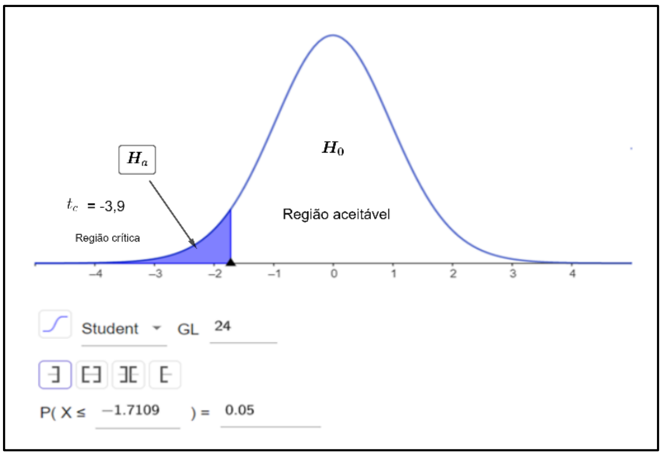
Média do pró-teste: $\mu_y = \frac{\sum_i^n y_i}{n} \rightarrow \mu_y = \frac{84}{25} = 3{,}36$

Desvio padrão da diferença: $S_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \rightarrow S_d = \sqrt{\frac{105{,}76}{24}} \cong 2{,}1$

$$t_{calc} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \rightarrow t_{calc} = \frac{-1{,}64}{\frac{2{,}1}{\sqrt{25}}} \cong -3{,}9$$

Para confirmamos quais hipóteses será aceita, doravante vamos adotar o cálculo probabilístico da curva normal para a modalidade *t-student* com o uso do GeoGebra online (software de geometria dinâmica) com os seguintes parâmetros: nível de significância α = 0,05 e de confiança: 1 - α = 0,95, uma vez que é bem aceito na área de pesquisa científica. Desta forma, apresentamos a seguir o gráfico da curva normal.

Gráfico 54 – Curva Normal



Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Com base nos resultados acima devemos aceitar a hipótese nula (H_0), se $t_{calc} > t_{1-\alpha}$ ou rejeitar, se $t_{calc} \leq t_{1-\alpha}$. A hipótese nula está representada na região aceitável do gráfico 53. Como o valor de $t_{calc} < t_{0{,}95} \rightarrow -3{,}9 < -1{,}71$, concluímos que devemos rejeitar a hipótese nula (H_0) e aceitar a hipótese alternativa (H_a), pois o resultado do teste está fora do intervalo de (H_0), localizado na região crítica à esquerda da curva normal do gráfico acima. Assim sendo o nível de confiança (1 − α = 1 − 0,05 = 0,95) possibilitada afirmar que a hipótese alternativa (H_a) foi aceita e a hipóteses nula (H_0) foi descartada. Em outras palavras, afirmamos que as médias do pré-teste foram menores do que as médias do pós-teste, ou seja, a metodologia de ensino aplicada para o ensino de função afim obteve resultados melhores por parte dos discentes na resolução de questões de função afim.

Às análises estatísticas acima, somada aos resultados das análises de correlações, aponta para a conclusão que o bom aproveitamento dos alunos possui como fator decisivo as estratégias didático-pedagógicas das aplicações das sequências didáticas por meio de atividades, de forma particular, de ensino de função afim por atividades. Conforme corrobora Silva (2018, p.166) “na estatística, o uso das correlações é usado justamente para designar a força que mantém unidos dois conjuntos de valores, uma vez que tem como seu o objeto de estudo a verificação da existência e do grau de relação entre duas variáveis”.

5.4 A correlação entre o desempenho nos testes e fatores socioeconômicos dos pesquisados

Nesta etapa do trabalho apresentamos as análises das informações produzidas inerentes a aplicação do questionário socioeconômico utilizado na experimentação em relação ao desempenho dos estudantes nos testes, com intuito de verificarmos qual a provável ligação entre o desempenho dos estudantes, os fatores externos à sala de aula e a visão do estudante sobre a Matemática no tocante à resolução das questões sobre função afim. Ressaltamos que cada dupla de discente foi considerada para efeito de cálculos como sendo um participante. Assim sendo, os dados analisados são de 19 duplas e 6 alunos individuais, totalizando 25 participantes. As informações contidas a seguir referem-se ao número de acertos de cada discente nos dois testes (pré e pós-teste), formando uma terna (discente, nota no pré-teste, nota no pós-teste), como mostra o esquema abaixo.

$$\left(\underbrace{D_{n,}}_{\boxed{\text{Discentes}}};\ \underbrace{x_i;}_{\boxed{\text{Notas Pré-teste}}}\ \underbrace{y_i}_{\boxed{\text{Notas Pós-teste}}}\right)$$

A seguir iniciaremos pela correlação entre as variáveis observadas a partir dos questionamentos “você tem hábito de estudar matemática fora da escola?” e “quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?” Conforme os resultados sintetizados no 47 abaixo.

Quadro 47 - Hábitos de estudos extraclasse, ajuda recebida nas tarefas de matemática e desempenho nos testes

Você tem hábito de estudar matemática fora da escola?	Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?						
	Professor particular	Pai	Mãe	Irmão	Amigo	Ninguém	Outros
Só no período de prova	--	$(D_{17}/D_{28}; 0; 2)$	--	$(D_{12}/D_{26}; 0; 0)$ $(D_{42}/D_{47}; 4; 3)$	--	$(D_{05}/D_{09}; 1; 5)$ $(D_{06}/D_{10}; 0; 0)$ $(D_{18}/D_{25}; 5; 8)$ $(D_{35}/D_{44}; 2; 3)$ $(D_{45}/D_{49}; 1; 0)$	--
Só na véspera da prova	--	$(D_{07}; 4; 6)$	--	$(D_{02}/D_{22}; 4; 8)$ $(D_{13}/D_{19}; 1; 2)$	--	$(D_{08}; 2; 5)$ $(D_{33}/D_{48}; 2; 3)$ $(D_{36}; 1; 2)$	--
Só nos fins de semana	--	--	$(D_{15}/D_{31}; 0; 1)$	--	--	$(D_{34}/D_{38}; 0; 2)$	--
Alguns dias da semana.	--	$(D_{01}; 0; 4)$ $(D_{32}/D_{46}; 0; 2)$	$(D_{16}/D_{24}; 0; 0)$	--	--	$(D_{04}/D_{27}; 5; 7)$ $(D_{14}/D_{21}; 1; 2)$ $(D_{37}; 0; 2)$	--
Todo dia	$(D_{11}/D_{23}; 7; 10)$	--	$(D_{39}/D_{41}; 1; 0)$	--	$(D_{40}; 3; 0)$	--	--

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

Os dados do quadro 47 acima nos fornece que 48% dos discentes não recebem ajuda de ninguém nas atividades de matemática fora da escola, isto é, 13 discentes. Destes 5 estudam só no período de prova, percebemos que 3 discentes avançaram nos pós-teste e 2 deles, não; 3 estudam na véspera da prova sendo que eles foram melhores no pós-teste; 1 estuda só nos fins de semana, porém, também melhorou no pós-teste; e 3 responderam que estudam em alguns dias da semana, entretanto, todos eles conseguiram avançar no desempenho do pós-teste.

Depreendemos que 1 discente (D_{40}) apesar de responder que estuda todos os dias e recebe ajuda de um amigo, não conseguiu avançar no pós-teste. Para além disso, percebemos que regrediu, uma provável resposta para sua regressão foi o que relatamos anteriormente, que no pós-teste alguns alunos se mostraram sem interesse de responder, mesmo após a intervenção pedagógica.

Dos discentes pesquisados 16% responderam que são ajudados por irmãos, totalizando 4 participantes. Destes, 2 discentes (D_{12}/D_{26} e D_{42}/D_{47}) responderam que só estudam no período de prova, porém, não conseguiram melhorar seus desempenhos no pós-teste; 2 deles (D_{02}/D_{22} e D_{13}/D_{19}) apesar de responderem que estudam só na véspera da prova, avançaram no pós-teste.

Três dos participantes (12%) responderam que são ajudados por suas mães e que estudam (1 Só nos fins de semana, 1 Alguns dias da semana, 1 Todo dia), contudo, apenas um deles (D_{15}/D_{31}) conseguiu avançar no pós-teste.

Quatro participantes responderam ser ajudados pelos pais e que têm hábitos de estudarem fora da escola, isto corresponde a 16% e todos avançaram no pós-teste. Apesar deles responderem que estudam (1 só no período de prova, 1 só na véspera da prova, 2 alguns dias da semana).

Apenas 4% dos alunos, ou seja, 1 (D_{11}/D_{23}) participante respondeu que é ajudado por professor particular e tem hábitos de estudar fora da escola. Ele foi bem no pré-teste e avançou ainda mais no pós-teste.

Em geral, nesta categoria de correlação de quem ajuda e hábitos de estudarem fora da sala de aula, 76% dos participantes avançaram de forma significativa no pós-teste. Destes 40% não tinham ajuda de ninguém, 12% tiveram ajuda dos irmãos, 4% foram ajudados pela mãe, 16% ajudados pelos pais e 4% foram ajudados por professor particular. Por conseguinte 18% não conseguiram melhorar seus desempenhos no ensino da matemática, mesmo após a aplicação da sequência didática. Contudo, com o a estratégia da técnica da descoberta, percebemos que os alunos que erraram podem aprenderem, já que experienciaram na prática, uma forma de não alcançar os cálculos corretos, assim se aprende por essa estratégia tanto acertando como errando.

A seguir veremos a correlação entre os seguintes questionamentos: “Qual a escolaridade do seu responsável?” e “Você tem dificuldade para aprender matemática?” conforme o quadro 48 abaixo.

Quadro 48 - Escolaridade do responsável, dificuldade em aprender matemática e desempenho nos testes

		Qual a escolaridade do seu responsável?				
		Superior	Médio	Fundamental	Fundamental incompleto	Analfabeto
Você tem dificuldade para aprender	Não	--	$(D_{02}/D_{22}; 4; 8)$ $(D_{11}/D_{23}; 7; 10)$ $(D_{36}; 1; 2)$	--	--	--
	Um pouco	$(D_{34}/D_{38}; 0; 2)$ $(D_{18}/D_{25}; 5; 8)$ $(D_{42}/D_{47}; 4; 3)$	$(D_{01}; 0; 4)$ $(D_{05}/D_{09}; 1; 5)$ $(D_{07}; 4; 6)$ $(D_{08}; 2; 5)$ $(D_{32}/D_{46}; 0; 2)$ $(D_{35}/D_{44}; 2; 3)$ $(D_{40}; 3; 0)$	$(D_{17}/D_{28}; 0; 2)$ $(D_{37}; 0; 2)$ $(D_{45}/D_{49}; 1; 0)$	--	--

	Muito	$(D_{04}/D_{27}; 5; 7)$ $(D_{14}/D_{21}; 1; 2)$ $(D_{15}/D_{31}; 0; 1)$	$(D_{16}/D_{24}; 0; 0)$ $(D_{39}/D_{41}; 1; 0)$	$(D_{33}/D_{48}; 2; 3)$	$(D_{06}/D_{10}; 0; 0)$ $(D_{12}/D_{26}; 0; 0)$ $(D_{13}/D_{19}; 1; 2)$	--

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

A partir das informações produzidas pelo quadro 48 observamos que grande parte, 48% dos sujeitos da pesquisa, afirmaram que seus responsáveis possuem o ensino médio, isto representa 12 participantes. Destes 12% (3 discentes) afirmaram não ter dificuldades, inclusive todos melhoram o desempenho no pós-teste; 28% (7 discentes) disseram ter um pouco de dificuldade, apesar que apenas o discente (D_{40}) ter regredido no pós-teste, os demais tiveram desempenho melhores no pós-teste; e 8% (2 discentes) dos consultados (D_{16}/D_{24} e D_{39}/D_{41}) afirmaram ter muita dificuldade para aprender matemática, que aliás, eles não foram bem no pós-teste.

Seis (24%) dos participantes da pesquisa responderam que os pais possuem nível superior e 3 (12%) responderam ter um pouco de dificuldade para aprender a matemática e 3 (12%) responderam ter muita dificuldade, apesar deles todos (24%) terem se saído bem no pós-teste.

Quatro deles (D_{17}/D_{28}, D_{37}, D_{45}/D_{49}, D_{33}/D_{48}), isso é, 16% dos pesquisados, responderam que os seus responsáveis possuem nível fundamental. Destes, 12% disseram ter um pouco de dificuldade em aprender matemática e 4% responderam ter muita dificuldade para aprender a matemática. Entretanto, apenas o participante (D_{45}/D_{49}) apresentou regressão no pós-teste, os demais avançaram.

Três (12%) dos participantes disseram que seus responsáveis possuem fundamental incompleto, e que eles (discentes) têm muita dificuldade para aprender a matemática. Tanto é que apenas o participante (D_{13}/D_{19}) melhorou seu desempenho no pós-teste; os outros dois (D_{06}/D_{10} e D_{12}/D_{26}) não tiveram nenhum acerto. Ressaltamos que estes são alunos que se negaram a participar de forma efetiva nas resoluções das atividades, mesmo após de uma intervenção pedagógica do professor pesquisador/mediador.

De forma geral, podemos perceber pelas informações colhidas e sintetizadas no quadro 48 acima, que 76% (19 participantes) melhoraram seus desempenhos, sendo 36% (9 participantes) de responsáveis de nível médio; 25% (6 participantes) de responsáveis de nível superior, 12% (3 participantes) são de responsáveis de nível fundamental e 4% de responsáveis de fundamental incompleto. Para além destas análises, podemos também afirmar que 44% (11 participantes) que melhoram seus desempenhos no pós-teste disseram ter um pouco de dificuldade para aprender a matemática; 20% (5 participantes) que também melhoram seu desempenho no pós-teste disseram ter muita dificuldade para aprender a matemática.

Por fim, porém, não menos importante, 24% (6 participantes) não melhoram seus desempenhos, a maioria destes 16% (4 participantes) disseram ter muita dificuldade para aprender a matemática, e os 8% (2 participantes) disseram ter um pouco de dificuldade.

Para darmos continuidade às aferições das correlações dos dados, apresentaremos os resultados dos seguintes questionamentos: “você tem dificuldade para aprender matemática?” e “você considera as explicações do professor de matemática?”, de acordo com o quadro 49 abaixo.

Quadro 49 - Dificuldade em aprender matemática, explicações do professor de matemática e desempenho nos testes

		Você tem dificuldade para aprender matemática?		
		Não	Um pouco	Muito
Você considera as explicações do professor de matemática?	Ruim	--	$(D_{37}; 0; 2)$	$(D_{16}/D_{24}; 0; 0)$ $(D_{45}/D_{49}; 1; 0)$
	Regular	--	$(D_{40}; 3; 0)$	--
	Boa	$(D_{34}/D_{38}; 0; 2)$	$(D_{01}; 0; 4)$ $(D_{14}/D_{21}; 1; 2)$ $(D_{17}/D_{28}; 0; 2)$ $(D_{18}/D_{25}; 5; 8)$ $(D_{32}/D_{46}; 0; 2)$	$(D_{13}/D_{19}; 1; 2)$ $(D_{15}/D_{31}; 0; 1)$ $(D_{33}/D_{48}; 2; 3)$ $(D_{39}/D_{41}; 1; 0)$
	Excelente	$(D_{02}/D_{22}; 4; 8)$ $(D_{11}/D_{23}; 7; 10)$ $(D_{36}; 1; 2)$	$(D_{06}/D_{10}; 0; 0)$ $(D_{07}; 4; 6)$ $(D_{08}; 2; 5)$ $(D_{12}/D_{26}; 0; 0)$ $(D_{35}/D_{44}; 2; 3)$ $(D_{42}/D_{47}; 4; 3)$	$(D_{04}/D_{27}; 5; 7)$ $(D_{05}/D_{09}; 1; 5)$

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

As informações contidas no quadro 47 nos revelam que 52% (13 participantes) disseram ter um pouco de dificuldade para aprender matemática. Apesar destas afirmações, 40% (10 participantes) melhoram seus desempenhos no pós-teste e 12%, não melhoram. Para além disso, 4% consideram as explicações do professor ruim, de forma equivalente, isto é, 4% dos discentes consideram regular; bem como, 20% e 24%, respectivamente, consideram as explicações boas e excelentes.

Oito participantes (32%) responderam ter muita dificuldade em matemática. Porém, 20% deles melhoram seus desempenhos no pós-teste. Apenas 12% dos discentes (D_{16}/D_{24}, D_{45}/D_{49}, D_{39}/D_{41}), não melhoram seus desempenhos no pós-teste; quanto às considerações acerca das explicações do professor de matemática podemos afirmar de acordo com os dados que 8% dos discentes consideram as explicações “ruim”, 16% consideram as explicações “boas” e 8% deles consideram as explicações do professor de forma “excelente”.

Quatro dos participantes (16%) disseram não ter dificuldade para aprender a matemática, tendo seus melhorado seus desempenhos no pós-teste. Destes 4% (1 participante) consideram as explicações do professor de matemática de forma “boa” e 12% (3 participantes) consideram as explicações de forma “excelente”.

De maneira geral, percebemos que 44% dos pesquisados consideram as explicações do professor de forma “excelente”, 40% consideram de forma “boa”, 4% consideram “regular” e 12% consideram de forma “ruim”.

5.5 Alguns pontos inferidos na observação *in loco*

Durante as visitas e a aplicação das atividades relacionadas à dissertação, observou-se uma variedade de comportamentos e atitudes dos alunos em sala de aula. A complexidade das relações interpessoais entre os colegas e o nível de interesse deles em uma educação de qualidade tornou-se um aspecto ambíguo para a pesquisa. Enquanto alguns alunos demonstravam alto grau de atenção e envolvimento, outros pareciam indiferentes ou claramente desinteressados. Por exemplo, enquanto alguns alunos faziam perguntas e participavam ativamente, outros pareciam distraídos ou desengajados, apesar das mediações do professor pesquisador/mediador.

Para corroborar com essas observações cito a fala de dois dos alunos que não aceitaram participar das atividades mesmo estando na sala de aula.

> **Professor pesquisador/mediador**: “Vamos participar das atividades, vocês sabem que o professor titular da turma vai considerar a participação de vocês nesta pesquisa”.
> **Aluno D30**: “não vou professor, não sou obrigado a participar contra minha vontade e também não gosto muito da matemática”.
> **Professor pesquisador/mediador**: “vamos participar, o que pode acontecer é você aprender ainda mais sobre a matemática, quiçá você passa a gostar da matemática”.
> **Aluno D30**: “não quero”.
> **Aluno D43**: “eu também não tenho interesse em participar das atividades, sei que não vai valer pontos”.
> **Professor pesquisador/mediador**: “gostaria demais da participação de vocês, porém, respeito sua posição, peço apenas que não interfiram no processo dos demais alunos”.

Podemos inferir dos diálogos acima diversas nuances sobre a relação pedagógica e a motivação dos alunos em sala de aula. O professor pesquisador/mediador, ao incentivar a participação dos alunos nas atividades, destaca a relevância da pesquisa e a possibilidade de reconhecimento por parte do professor titular. No entanto, o Aluno D30 expressa resistência, justificando sua relutância com uma aversão à matemática. A tentativa do professor de reverter essa postura, sugerindo que a participação poderia até mesmo alterar a percepção do aluno sobre a matéria, não surte efeito. O Aluno D43, por sua vez, associa sua participação à recompensa imediata, no caso, a pontuação. O professor, ao final, demonstra empatia e respeito pelas decisões dos alunos, mas reforça a importância de manterem um ambiente propício ao aprendizado dos demais. Este diálogo ressalta a complexidade da motivação estudantil e a necessidade de abordagens pedagógicas flexíveis, que considerem as individualidades e percepções dos alunos sobre o processo de aprendizagem.

Quando se observa a dinâmica de uma sala de aula, é evidente que a atenção e o comportamento dos estudantes variam amplamente. Uma minoria, por exemplo, busca constantemente ser o centro das atenções, almejando o status de "popular". Esses alunos frequentemente desviam a atenção da classe com brincadeiras e piadas, buscando a reação dos colegas. Em várias ocasiões, foi necessário intervir para garantir a produtividade e o foco nas atividades propostas.

Além dessas questões comportamentais, houve desafios logísticos durante a execução da pesquisa. Um exemplo marcante foi o pedido do professor titular para interromper a pesquisa devido ao início da semana de avaliações da escola. Adicionalmente, enfrentei dificuldades para obter as folhas de testes dentro do tempo previsto de duas aulas, ou seja, 90 minutos. Embora tenha sido necessário fazer ajustes e esperar um pouco mais, no final, tudo se resolveu.

A diversidade de comportamentos e atitudes em sala de aula reflete a complexidade da jornada educacional. Cada aluno traz consigo uma bagagem única, influenciada por fatores pessoais, familiares e sociais. Como educador, é fundamental reconhecer essas diferenças e adaptar-se a elas, buscando estratégias que atendam às necessidades de todos.

No entanto, apesar dos desafios, a experiência foi extremamente gratificante. Como professor, é uma alegria perceber e fazer parte da trajetória educacional desses alunos. Muitos deles demonstraram dedicação, esforço e uma notável capacidade de assimilar novos conceitos, reforçando a ideia de que, com o apoio adequado, todos têm o potencial para aprender e crescer.

Enfim, a sala de aula é um palco de excelência para a formação de qualidade, de reflexão da nossa sociedade e de preparar os futuros cidadãos para atuar nas diversas áreas de conhecimento e pesquisa. Sendo por natureza, o palco e/ou laboratório de um professor.

5.6 Confronto entre as análises a priori e análise posteriori das atividades para o ensino de função afim

A literatura estatística, juntamente com os testes detalhados neste trabalho, permite uma análise aprofundada dos resultados do experimento. Especificamente, foi possível examinar o coeficiente de correlação linear de Pearson, os resultados das hipóteses testadas e a correlação entre o desempenho nos testes e os fatores socioeconômicos dos participantes. Essas análises indicaram uma validação positiva das atividades realizadas durante o estudo. Para dar destaque a essa conclusão, vamos comparar os resultados das atividades, analisando-os tanto a priori quanto a posteriori. Isso nos ajudará a entender o impacto do ensino da função afim através de atividades experimentais, conforme será apresentado a seguir.

Apresentamos no quadro 50, o confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades, com o intuito de validar aplicação das sequências didáticas no ensino da função afim.

Quadro 50 – Análise a priori e Análise a posteriori das 6 atividades aplicadas

Atividade	Descrição	Análise	Assertivas	Validação
1	Descubra a minha regra	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam estabelecer a relação de correspondência existente entre dois conjuntos de números dados.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 75% dos alunos informaram as relações de correspondência de forma corretamente.	
2	Identificação dos coeficientes e gráficos da função afim.	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam compreender que não se faz necessário calcular uma função afim, para afirmar qual o tipo de gráfico pertence a função.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 96% dos alunos perceberam a relação entre o valor do coeficiente angular com a função crescente ou decrescente.	

3	Construção do gráfico da função afim	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam identificar a representação gráfica da função afim como sendo uma reta.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 48% dos alunos informaram corretamente como sendo uma reta a representação gráfica da função afim corretamente, contra 28% no pré-teste.	
4	Identificando a lei de formação de uma função afim	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam encontrar a lei da formação de uma função a partir de dados de uma tabela e não apenas de gráficos.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 52% dos alunos informaram corretamente como sendo uma reta a representação gráfica da função afim corretamente, contra 48% no pré-teste.	
5	Identificando o sinal da função afim	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam compreender o sinal de uma função por meio de uma análise crítica do intervalo de valores (x, y) em diferentes fases do gráfico.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 96% dos alunos informaram corretamente o sinal de uma função por meio de uma análise crítica do intervalo de valores (x, y) em diferentes fases do gráfico.	
6	O zero da função	Análise a priori	Esperamos que os alunos possam identificar as características dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos.	Positiva
		Análise a posteriori	Identificamos que 92% dos alunos informaram corretamente as características dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos.	

Fonte: Pesquisa de campo, 2022.

O confronto das análises a priori e a posteriori apresentado no quadro 50, demonstra que 100% das nossas atividades apresentaram validações positivas, ou seja, podemos afirmar que a sequência didática surtiu efeito favorável à aprendizagem do ensino de função afim.

Outras importantes inferências foram inerentes as análises microdidáticas e microdidáticas quanto a aprendizagem da função afim por parte dos alunos. Ambas as análises, micro e macrodidáticas, são essenciais para refinar e melhorar situações de ensino. Elas permitem que os pesquisadores compreendam não apenas o que funciona e o que não funciona, mas também por que certos elementos são eficazes ou ineficazes.

Outras ponderações e discussões do que foi aprendido no âmbito desta dissertação, será abordado nas considerações finais a seguir.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma pesquisa desenvolvida com estudantes do 9.º ano do Ensino Fundamental sobre o “Ensino de função afim por meio de atividades experimentais”, vislumbrando responder à seguinte questão norteadora: quais os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada em atividades experimentais têm sobre o desempenho na resolução de questões e na compreensão de conceitos de função afim por estudantes do 9.º ano do fundamental? O objetivo proposto foi avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática baseada no ensino de matemática por atividades experimentais acerca do desempenho da resolução de questão e a compreensão de conceitos de função afim de estudantes do 9.º ano do fundamental

A metodologia desenvolvida estava ancorada no método científico da Engenharia Didática, portanto, foi desenvolvida nas quatro fases inerentes à ED.

Desta forma, o referencial teórico demonstrou que a ED é usada também no Brasil de forma científica em pesquisas que estudam os problemas em educação, neste caso, os da educação matemática e, especialmente, o do ensino da função afim por meio de sequências didáticas.

A fase das análises prévias proporcionou um entendimento do aspecto matemático dos conteúdos sistematizados na área da função afim, das características matemáticas, bem como dos aspectos históricos e de sua aplicabilidade em diversos contextos, sendo o raciocínio matemático válido nas soluções de problemas do cotidiano, compreensão essa trabalhada nos documentos oficiais PNC, PCEM e BNCC.

Com a concepção e análise a priori, estruturamos o formato da organização da sequência didática e definimos a abordagem da mediação do processo de aplicação das atividades durante o processo de pesquisa, no caso, o método da descoberta.

A fase da Experimentação foi imprescindível para a realização da pesquisa junto aos alunos das E1 e E2, sobretudo, para fomentar o ensino aprendizagem da função afim por meio de atividades práticas, nas quais o processo de mediação usando as técnicas do método da descoberta, ou seja, fazer o aluno refletir a própria prática por meio da ação e reflexão e validação de suas resoluções e por fim foi aplicado o Pós-teste aos discentes consultados.

A fase da análise a posteriori e validação da experiência nos oportunizou a aferição e a inferência dos resultados por meio das análises comparativas das categorias: Certa, Parcial, Errada e em Branco das 6 atividades propostas aos discentes consultados. Assim sendo, foi constado uma melhora na aprendizagem da função afim em diferentes contextos que exigiam dos alunos uma abordagem cognitiva, pois eles precisaram analisar, compreender e aplicar, para além disso, foram fomentados pela mediação do professor pesquisador em rever seus cálculos, para chegar em uma conclusão mais coerente com a solução exigida.

Evidenciamos também que as correlações do coeficiente de Pearson realizadas sobre os aspectos socioeconômicos e sobre o desempenho nos testes não identificaram participação relevante no resultado do pós-teste, não apresentando nenhuma correlação perfeita ou forte, o que nos leva a concluir que a melhora no desempenho no pós-teste foi devido às estratégias metodológicas de ensino adotadas durante o experimento, focado no ensino da função afim por atividades, que durante as tarefas propostas proporcionaram aos discentes a oportunidade de reavaliar a forma de resolver problemas e repensarem suas práticas e chegar a uma redescoberta sobre sua aprendizagem.

Frisamos ainda que a melhora do resultado no pós-teste foi validada também por meio das técnicas de inferências dos testes de hipóteses.

Também nessa fase da ED, constatou-se que os resultados obtidos por esta dissertação foram similares aos estudos de pesquisadores que aplicaram o método de pesquisa da ED e investigaram o ensino-aprendizagem da função afim por meio de atividades práticas em sala de aula, dentre eles Sá e Silva (2018).

Enfim, os resultados demonstraram uma validação positiva, portanto, o objetivo dessa dissertação foi alcançado e a problemática foi respondida, contudo, com a ciência de que não tivemos a pretensão de exaurir todas as indagações acerca do assunto desta pesquisa.

Quero enfatizar que o processo de formação do mestrado, aliado às experiências práticas vivenciadas no ambiente escolar, promoveu um significativo amadurecimento em relação à educação, especialmente no ensino da matemática. Essa vivência evidenciou que ainda existe um vasto campo a ser explorado, com muitas pesquisas a serem realizadas e contribuições a serem feitas para aprimorar a qualidade do ensino de matemática, incluindo no tocante à função afim.

Igualmente, percebemos a necessidade de aprofundar de forma teórica e prática com uma pesquisa a nível de tese, aplicando a ED como linha de pesquisa principal em assuntos matemáticos para validação do processo. Propondo, para tanto, a aplicabilidade em uma pesquisa acerca da função quadrática e/ou função polinomial do segundo grau com alunos do 9.º ano dos anos finais do ensino fundamental ou do primeiro ano do ensino médio.

REFERÊNCIAS

ADOLFO, Gustavo. **Módulo da função afim**: noções básicas – 9.º ano do Ensino Fundamental - Portal da Matemática OBMEP. Disponível em: https://cdnportaldaob mep.impa.br/ortaldaobmep/uploads/material/cno0chndbyo8c.pdf Acesso em: 11 dez. 2021.

ALMEIDA, Caroline Chinelato Silveira de. **Avaliação Educacional**: o ENEM e a Teoria de Resposta ao Item – TRI. Disponível em: http://www.repositorio.ufjf.br:8080/jspui/ bitstream/ufjf/14121/1/carolinechinelatosilveiradealmeida.pdf Acesso em: 02 set. 2022.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 /ANPEd – **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. v.3 n.6, p.62-77, UFSC: 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/ 1981-1322.2008v3n1p62/12137 Acesso em: 07 out. 2021.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação Matemática. ISSN 1981-1322 versão online. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-322.2012v7n2p22/23452 Acesso: 07 out. 2021.

ALTAMIRA-PA. **Documento curricular do município de Altamira Pará**. Secretaria de Educação Municipal (SEMED), 2021.

ASSIS, Pablo de. **O que é tag?**, TECMUNDO, 2019. Disponível em: https://www.tec mundo.com.br/navegador/2051-o-que-e-tag-.htm Acesso: 22 mai. 2022.

AUBYN António St.; FIGUEIREDO, Maria Carlos; LOURA, Luís de; RIBEIRO, Luísa; LISBOA, Francisco Viegas. **Funções**. **-** Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa, 2004. Disponível em: http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/mgallery /default.asp?obj=2633 Acesso: 17 dez. 2021.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**: 9º ano do ensino fundamental – 9 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros aos parâmetros curriculares nacionais**.** BRASIL. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática**.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)**: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. - Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base - PRODUÇÃO EDITORIAL Fundação Carlos Alberto Vanzolini, 2018.

BRASIL. **PNLD 2020**: matemática – guia de livros didáticos – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/inicio Acesso em: 14 nov. 2021.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *In:* **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882 Acesso em: 14 nov. 2021.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos**: história e matemática em sala de aula / Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/historia_matematica.pdf Acesso em: 17 dez. 2021.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos**: função afim e função quadrática. -1 ed. – SP: Ática, 2020.

FELIX, Ana Paula Nunes. **O ensino de problemas aditivos com mais de uma operação**, 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

FIGUEIREDO, Djaro Guedes de. **Análise I**. – 2 ed. – RJ: LTC, 1996.

GÁLVEZ, Grécia. A didática da matemática**.** In**:** PARRA, Cecília e SAIZ, Irma (org.). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas**.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GAY, Mara Regina Garcia, SILVA, Willian Raphael (Orgs.). **Araribá mais**: matemática: manual do professor – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2018. Obra em 4 v. do 6o ao 9o ano.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**: 9.º ano: ensino fundamental: anos finais. — 4. ed. — São Paulo: FTD, 2018.

LIMA, Elon Lages *et. al*. **A matemática para o ensino médio.** Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): Rio de Janeiro – RJ, 2006. v. 1 (Coleção do Professor de Matemática)

MAGALHÃES, A. R. **Mapas Conceituais Digitais como Estratégia de Ensino para o Desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções**. Tese (Programa de Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo.

2009. 257 f. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11436 Acesso em: 15 out. 2021.

MANGUEIRA, Milena Carolina dos Santos; SILVA, Matheus Klisman de Castro e. A engenharia didática como metodologia para o ensino de matemática. In: X Encontro Paraibano de Educação Matemática & V Encontro Cajazeirense de Matemática. **Anais** [...] Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Paraíba (SBEM-PB)**,** 2018**.** ISSN: 2317-0042. Disponível em: https://editorarealize.com.br/edicao/detalhes/anais-x-epbem-e-v-ecmat Acesso em: 14 nov. 2021.

MARINHO FILHO, Eliseu da Rocha. **Criptografia**: uma engenharia didática, com funções, matrizes e cifra de HILL, para o ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA). Disponível em: https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/bitstream/123456789/385/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_CriptografiaUmaEngenharia.pdf Acesso em: 09 abr. 2022.

MENEZES, Josinalva Estácio *et. al*. A transposição didática em Chevallard: as deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula. *In:* VIII Congresso Nacional de Educação (EDUCERE). São Paulo: **Anais** [...] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2008, p. 1190-1201.

MIRANDA, Denis do Socorro Pinheiro. **O ensino por atividades de problemas multiplicativos envolvendo a ideia de disposição retangular,** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

PARRA, Cecília e SAIZ, Irma (org.). **Didática da matemática:** reflexões psicopeda gógicas**.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

COSTA, Gisele Maria Tonin da; PERETTI, Lisiane. **Sequencia Didática na Matemática**. Revista de Educação do Ideal, Alto Uruguai, Edição. Vol. 8. N. 17, p. 3 Jan./Jun. 2013. Disponível em: https://www.ideau.com.br>revistasartigos. Acesso em: 09 abr. 2022.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A Engenharia Didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: Maria Inês Marcondes; Ivanilde Apoluceno de Oliveira; Elizabeth Teixeira. (Org.). **Abordagens Teóricas e Construções Metodológicas na Pesquisa em Educação**. – Belém: EDUEPA, 2011, p. 151-166.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Issac Bastos da. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços**. Belém, v. 6, n.11, p. 123-140, 2003. Disponível em: http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/894/452 Acesso em: 12 nov. 2021.

SÁ, Pedro Franco de. O que é resolução de problema, afinal? **Trilhas**, Belém, v.5, n.2, p. 11-17, dez., 2004.

SÁ, Pedro Franco de. A resolução de problemas como objetivo nas aulas de matemática**. Trilhas**, Belém, v.7. n.1 6 p. 25-33. dez., 2005.

SÁ, Pedro Franco de. A resolução de problemas como processo nas aulas de matemática. **Trilhas**. Belém. v.8, n. 18, p. 59-71. dez. 2006.

SÁ, Pedro Franco. **Atividade para o ensino de matemática no nível fundamental**. 1 ed. Belém, EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco. **Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades**. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

SILVA, Benedita das Graças Sardinha da. **O ensino de problemas envolvendo as quatro operações por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém, 2015.

SILVA, Diego Cunha da. **O ensino de função afim por atividade**: experiência em uma escola pública do estado do Pará, 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: 9º ano do ensino fundamental – 5 ed. São Paulo: Moderna, 2018.

TORTOLA, Emerson; REZENDE, Veridiana. O Estudo de Função Afim na fatura de energia elétrica por meio da Modelagem Matemática e da Engenharia Didática**.** *In:* **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, p. 1-11, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org /index.php /xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1131/114 Acesso em: 09 abr. 2022.

TREVISAN, André Luis; AMARAL, Roseli Gall do. A Taxionomia revisada de Bloom aplicada à avaliação: um estudo de provas escritas de Matemática. *In*: **Ciênc**. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 451-464, 2016 Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-73 132016 0020011 Acesso em: 02 set. 2022.

ZAGO, Luis Henrique. O método dialético e a análise do real. **KRITERION**, Belo Horizonte, nº 127, p. 109-124, Jun. 2013. DOI: https://doi.org/10.1590/S0100-512X 2013 000100006 Disponível em: https://www.scielo.br/j/kr/a /tMzcgmXNY3NJS3MY 3MZBSxH/?lang=pt&format=pdf Acesso em: 22 mai. 2022.

ZUFFI, E.M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **HIPÁTIA** - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática. - São Paulo, v. 1, n.1, p. 1- 10, dez. 2016. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/ar ticle/view/436 Acesso em: 09, abr. 2022.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário socioeconômico dos alunos participantes da Pesquisa

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),____.

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo deensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboraçãorespondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em sigilo.

Muito obrigado!

9.º ano – Escola Municipal

1- Idade:_____anos. Data://

2- Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

3- Quem é o seu responsável?

( ) Pai ( )Mãe ( )Avô ( )Avó ( )Tio ( )Tia ( )Irmão ( ) Irmã( ) Não tenho ( ) Outro. Qual? ____________________.

4- Qual a escolaridade do seu responsável?

( ) Superior ( )Médio ( ) Fundamental ( ) Fundamental incompleto ( ) Analfabeto.

5- Seu responsável trabalha? ( ) Sim ( ) Não

6- Você já estudou o Ensino Fundamental em que tipo de escola (pode ser mais de uma alternativa):

( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Particular ( ) Conveniada

7- Você trabalha de forma remunerada?

( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

8- Você faz ou fez algum curso?

( ) Informática ( ) Língua estrangeira ( ) Outro:______________________.

9- Você gosta de Matemática?

( ) Nenhum pouco ( ) Pouco ( ) Muito

10- Você já ficou em dependência?

( ) Não ( ) Sim. Em quais disciplinas? _____________________________.

11- Você já reprovou o 9.º ano? ( ) Não ( ) Sim

12- Você tem dificuldade para aprender matemática?

( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muito

13-Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?
( ) Sempre ( ) Quase sempre ( ) Às vezes ( ) Poucas vezes ( ) Nunca

14-Quais formas de atividades e/ou trabalho você costuma ser mais avaliado em matemática?
( ) Provas/simulado ( )Testes semanais ( ) Seminários ( ) Pesquisas
( ) Projetos ( ) Outros. Quais? ___________________________.

15- Você se distrai nas aulas de matemática?

( ) Não, eu sempre presto atenção ( ) Sim, eunão consigo prestar atenção

( ) Às vezes, quando a aula está ________________.

16- Você tem hábito de estudar matemática fora da escola?

( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova ( ) Só nos fins de semana

( )Todo dia ( ) Alguns dias da semana.

17-Você é capaz de fazer relação dos conteúdos matemáticos dados em sala com seu cotidiano?

( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

18- Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?

( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão

( ) Amigo(a) ( ) Ninguém ( ) Outros. Quem? __________________.

19- Você já estudou função do 1.º grau?

( ) Sim ( ) Não

20- Quando você estudou **Função afim**, as aulas iniciaram:

( ) Por definição seguida de exemplos e exercícios

( ) Por meio de uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) Por meio de um experimento para chegar ao conceito
( ) Por meio de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
( ) Por m eio de uma História do assunto

21- Você considera as explicações do professor de matemática?

( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Excelente

22- Para fixar o conteúdo de **Função Afim** seu professor costumava:

( ) apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) apresentar jogos envolvendo o assunto
( ) solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático
( ) não propor questões de fixação
( ) solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver

23-A respeito de Função Afim conforme seus conhecimentos, preencha oquadro abaixo.

Conteúdos	**Você lembra ter estudado?**		**Grau de dificuldade para aprender**				
	Sim	**Não**	**Muito Fácil**	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito Difícil**
Definição da Função do 1º Grau							
Gráfico da Função do 1º Grau							
Identificar gráfico da Função do 1º Grau							

Construção de gráfico de Função do 1º Grau							
Identificar os coeficientes da Função do 1º Grau							
Domínio da Função do 1º Grau							
Imagem da Função do 1º Grau							
Função Crescente do 1º Grau							
Função Decrescente do 1º Grau							
Determinação da Lei da Função do 1º Grau a partir dos coeficientes							
Determinação da lei da função do 1º grau a partir de dois pontos da função							
Determinação da Lei da Função do 1º Grau a partir do gráfico							
Determinação da Lei da Função do 1º Grau a partir de dados tabelados rol.							
Estudo do sinal da Função do 1º Grau							
Zero da Função do 1º Grau							
Aplicações da Função Afim em situações-problemas							

Fonte: Silva (2018).

APÊNDICE B – Atividades Pré e Pós-Teste

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

1)Sá é gerente de uma sorveteria. O lucro (L) das vendas da sorveteria é dado por uma função cuja lei é $L(x) = 7x - 350$, em que x é a quantidade de sorvetes vendidos por dia. Neste contexto, responda:

a)Quantos sorvetes Sá precisa vender para obter lucro de R$ 120,00?

b)Se ele vendesse 150 sorvetes, qual seria o lucro obtido?

2)A tabela a seguir fornece a posição S (t), em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 da estrada em que se desloca em movimento uniforme, para vários instantes t (em h).

Deslocamento de um veículo

t (em h)	0	2	4	6	8	10
s(t) (em km))	50	100	150	200	250	300

a) Qual é a lei da função horária que descreve a posição desse veículo em função da medida de intervalo de tempo?

b) Em que instante o veículo ocupará a posição S = 500 km?

3) Uma empresa de telefonia anuncia ligações interestaduais a R$ 0,60 por minuto.

a) Quanto custa uma ligação com duração de 10 minutos? E uma de meia hora?

b) Se determinada ligação custou R$ 12,00, qual foi sua duração?

c) A relação entre a duração de uma ligação e seu custo pode ser considerada uma função? Justifique.

4) Responda.

a) A reta que passa pelos pontos (2, 7) e (-1, -1) é gráfico de uma função crescente ou decrescente?

b) A reta que passa pelos pontos (1, 1) e (2, -3) é gráfico de uma função crescente ou decrescente?

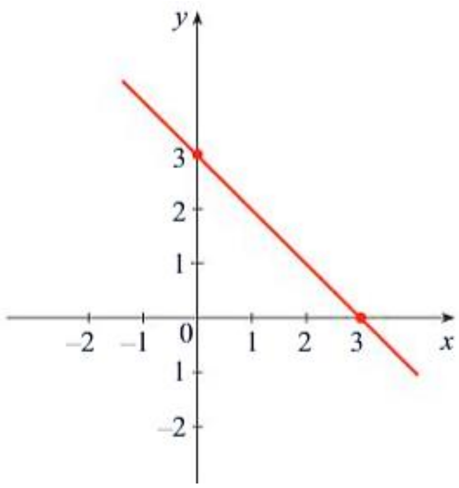
5) Considerando que $M = 600 \,.\, 0{,}03t + 600$ expressa o montante de uma aplicação de determinado capital a uma dada taxa em função do tempo t, em meses, determine:

a) o montante após 3 meses de aplicação;

b) o tempo de aplicação para se obter um montante de R$ 690,00;

c) o gráfico dessa função.

6) Considere o seguinte gráfico de uma função afim abaixo.



Responda:

a) Para que valor de x temos $y = 0$?

b) Para que valores de x temos $y > 0$?

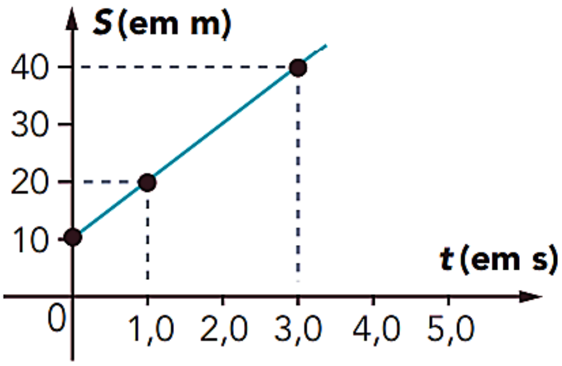
c) Para que valores de x temos $y < 0$?

7) Construa o gráfico da função afim definida por $f(x) = -x + 1$?

8) A e B são locadoras de automóvel. A cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa de 100 reais fixa. B cobra 80 centavos por quilômetro mais uma taxa fixa de 200 reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A em função do número de quilômetros a serem rodados.

9) Em certa cidade, uma corrida de taxi custa ´ R$ 5, 80 a bandeirada, mais R$ 0,40 por quilometro rodado. Quanto custa uma corrida de 55 quilômetros?

10)Analise o gráfico da posição (S) de um ponto material dada em função da medida de intervalo de tempo (t):



a) a medida de velocidade desse ponto material;

b) a lei da função do movimento desse ponto material;

c) a posição desse ponto material no instante t = 3,0 s.

APÊNDICE C – Questionário Dos Alunos Participantes Da Pesquisa – Pós-Teste

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

1) De uma forma geral, você gostou de ter trabalhado com estas atividades? ( ) Sim ( )Não.

Por quê?____

2) Agora você saberia dizer o que é uma Função Afim?

3) Você acha que aprendeu alguma coisa com essas atividades? ( )Sim ( )Não.
O quê?____

4) De 1 a 5, que nota você daria para essa experiência?________________

5) Você gostaria de trabalhar outros assuntos da matemática de forma semelhante?

( ) Sim ( ) Não.

6) Sobre o grau de dificuldade encontrado na resolução das atividades ou na compreensão dos conteúdos relacionados, sendo:

1	2	3	4	5
Pouca ou nenhuma dificuldade	Regular	Normal	Difícil	Extremamente difícil

Atribui nota de 1 a 5 para os itens:

Descubra a minha regra: ( )

Identificação dos coeficientes e gráficos da função afim: ( )

Construção do gráfico da função afim: ( )

Identificando a lei de formação de uma função afim: ( )

Identificando o sinal da função afim: ( )

O Zero da função: ( )

8) Se preferir pode deixar uma sugestão para melhorar a aplicação do teste com os alunos?

APÊNDICE D – Avaliação de Desempenho das Atividades Propostas– Pós-Teste – Professor Pesquisador

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

1 Insuficiente	2 Regular	3 Médio	4 Bom	5 Excelente
Discente conseguiu desenvolver 1 atividade	Discente conseguiu desenvolver 2 atividades	Discente conseguiu desenvolver 3 atividades	Discente conseguiu desenvolver 4 atividades	Discente conseguiu desenvolver 5 atividades

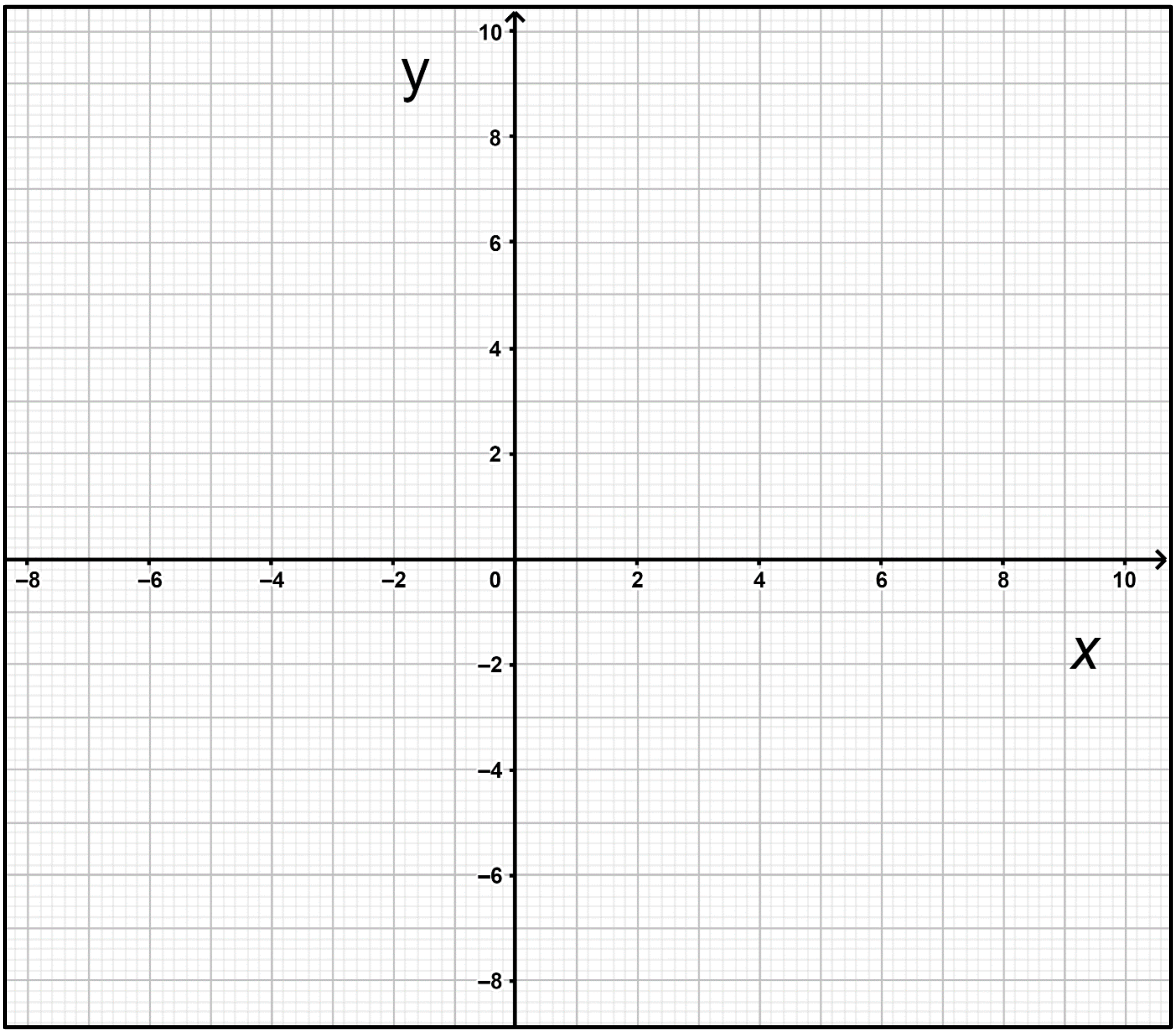
Quantitativo de discente	**Códigos dos discentes**	**Desempenho**				
		1	2	3	4	5
1.	D1					
2.	D2					
3.	D3					
4.	D4					
5.	D5					
6.	D6					
7.	D7					
8.	D8					
9.	D9					
10.	D10					
11.	D11					
12.	D12					
13.	D13					
14.	D14					
15.	D15					
16.	D16					
17.	D17					
18.	D18					
19.	D19					
20.	D20					
21.	D21					
22.	D22					
23.	D23					
24.	D24					
25.	D25					
26.	D26					

27.	D27					
28.	D28					
29.	D29					
30.	D30					
31.	D31					
32.	D32					
33.	D33					
34.	D34					
35.	D35					
36.	D36					
37.	D37					
38.	D38					
39.	D39					
40.	D40					
41.	D41					
42.	D42					
43.	D43					
44.	D44					
45.	D45					
46.	D46					
47.	D47					
48.	D48					
49.	D49					

Fonte: Autor, 2022.

APÊNDICE E – Plano Cartesiano

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA



ANEXOS

ANEXO A - Unidades Temáticas – 9º ano do Ensino Fundamental

(Continua)

Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
	Potências com expoentes negativos e fracionários	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
	Números reais: notação científica e problemas	(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Grandezas e medidas	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	Vistas ortogonais de figuras espaciais	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva. (EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

		(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
Probabilidade e estatística	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: Reprodução adaptada da BNCC, 2018.

ANEXO B - Unidades Temáticas – 9º ano do Ensino Fundamental Altamira-Pa
(Continua...)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL				
1º BIMESTRE				
EIXO	**SUBEIXO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**	**HABILIDADES**	**UNIDADES TEMÁTICAS**
ESPAÇO/TEMPO E SUAS TRANSFORMAÇÕES	1. A matemática para compreensão do espaço/tempo nas transformações da sociedade.	1.1 Analisar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do mundo.	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	**GEOMETRIA**
		1.2. Aplicar as transformações geométricas como construções elementares e suas representações na natureza e nas artes.	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam Semelhantes.	**GEOMETRIA**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS COMUNICATIVAS	1. A matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade.	1.1 Interpretar e aplicar a linguagem matemática na elaboração e resolução de problemas.	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).	**NÚMEROS**
			(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.	**NÚMEROS**
		1.2 Desenvolver a argumentação matemática apoiada no raciocínio intuitivo e dedutivo.	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	**GEOMETRIA**
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática com a vida social.	1.2 Diferenciar e utilizar o sistema de grandezas e de medidas para a resolução de problemas matemáticos e do contexto social.	(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.	**GRANDEZAS E MEDIDAS**
		1.3 Analisar e empregar o conhecimento probabilístico e estatístico em situações problemas que abordem, sobretudo, questões sociais.	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.	**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**
CULTURA E IDENTIDADE	1. Os saberes e as práticas Matemáticas existentes em diferentes grupos sociais.	1.1 Analisar as construções algébricas e geométricas como representações e sistematizações dos diferentes saberes matemáticos existentes no contexto dos 'grupos sociais.	(EF09MA01PA) Comparar, por meio da história da matemática, a construção da geometria e da álgebra como diferentes práticas sociais e culturais.	**ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

Fonte: (SEMED, 2021, p. 605-606).

(Continuação)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL				
2º BIMESTRE				
EIXO	**SUBEIXO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**	**HABILIDADES**	**UNIDADES TEMÁTICAS**
ESPAÇO/TEMPO E SUAS TRANSFORMAÇÕES	1. A matemática para compreensão do espaço/tempo nas transformações da sociedade.	1.1 Analisar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do mundo.	(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.	**GEOMETRIA**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS COMUNICATIVAS	1. A matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade.	1.1 Interpretar e aplicar a linguagem matemática na elaboração e resolução de problemas.	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	**NÚMEROS**
			(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação Científica, envolvendo diferentes operações.	**NÚMEROS**
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática com a vida social	1.1 Utilizar o conhecimento matemático na modelação e resolução de problemas Sociais.	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.	**ÁLGEBRA**
		1.3 Analisar e empregar o conhecimento probabilístico e estatístico em situações problemas que abordem, sobretudo, questões sociais.	(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.	**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**
CULTURA E IDENTIDADE	1. Os saberes e as práticas Matemáticas existentes em diferentes grupos sociais.	1.1 Analisar as construções algébricas e geométricas como representações e sistematizações dos diferentes saberes matemáticos existentes no contexto dos 'grupos sociais.	(EF09MA02PA) Inferir situações que representem a cultura local por meio de representações geométricas e algébricas.	**ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

Fonte: (SEMED, 2021, p. 607-608).

(Continuação)

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL				
3º BIMESTRE				
EIXO	**SUBEIXO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**	**HABILIDADES**	**UNIDADES TEMÁTICAS**
ESPAÇO/TEMPO E SUAS TRANSFORMAÇÕES	1. A matemática para compreensão do espaço/tempo nas transformações da sociedade.	1.1 Analisar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do Mundo.	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também Softwares.	**GEOMETRIA**
		1.2. Aplicar as transformações geométricas como construções elementares e suas representações na natureza e nas artes.	(EF09MA03PA) Reconhecer e utilizar as transformações geométricas na construção de figuras Semelhantes.	**GEOMETRIA**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS COMUNICATIVAS	1. A matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade.	1.1 Interpretar e aplicar a linguagem matemática na elaboração e resolução de problemas.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	**ÁLGEBRA**
			(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	**ÁLGEBRA**
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática com a vida social.	1.2 Diferenciar e utilizar o sistema de grandezas e de medidas para a resolução de problemas matemáticos e do contexto social.	(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.	**GRANDEZAS E MEDIDAS**
		1.3 Analisar e empregar o conhecimento probabilístico e estatístico em situações problemas que abordem, sobretudo, questões sociais.	(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.	**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**
CULTURA E IDENTIDADE	1. Os saberes e as práticas Matemáticas existentes em diferentes grupos sociais.	1.1 Analisar as construções algébricas e geométricas como representações e sistematizações dos diferentes saberes matemáticos existentes no contexto dos 'grupos sociais.	(EF09MA02PA) Inferir situações que representem a cultura local por meio de representações geométricas e algébricas.	**ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

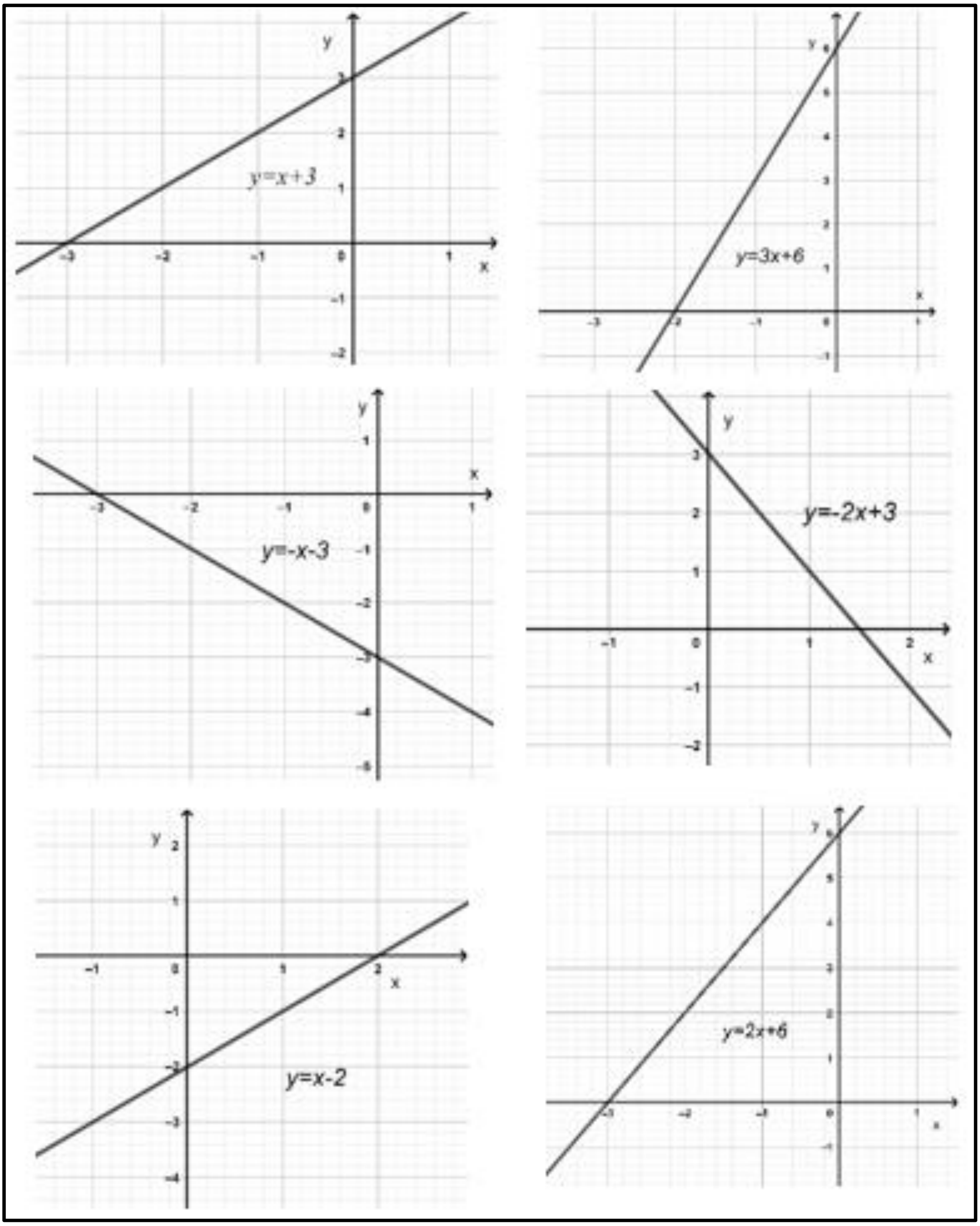
Fonte: (SEMED, 2021, p. 609-610).

(Continuação)

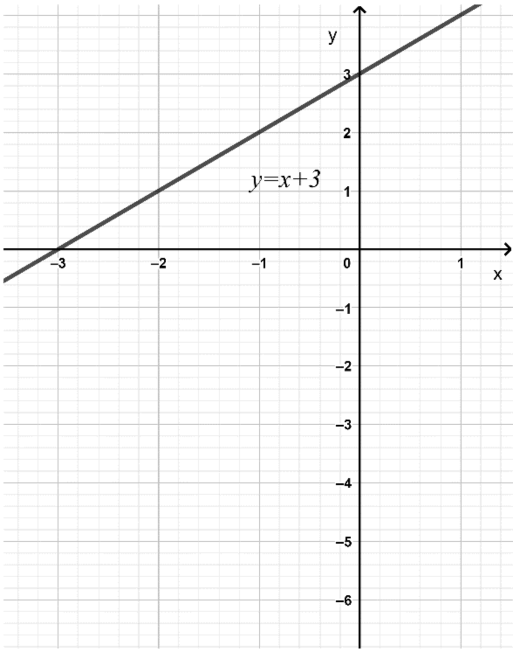
MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL				
4º BIMESTRE				
EIXO	**SUBEIXO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**	**HABILIDADES**	**UNIDADES TEMÁTICAS**
ESPAÇO/TEMPO E SUAS TRANSFORMAÇÕES	1. A matemática para compreensão do espaço/tempo nas transformações da sociedade	1.1 Analisar as relações entre as figuras unidimensional, bidimensional e tridimensional para a percepção do mundo.	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* e geometria Dinâmica.	**GEOMETRIA**
			(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	**GEOMETRIA**
LINGUAGEM E SUAS FORMAS COMUNICATIVAS	1. A matemática como meio de linguagem e de expressão para a compreensão da realidade.	1.1 Desenvolver a argumentação matemática apoiada no raciocinio intuitivo e dedutivo.	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.	**GEOMETRIA**
VALORES À VIDA SOCIAL	1. O diálogo da Matemática com a vida social.	1.1 Utilizar o conhecimento matemático na modelação e resolução de problemas Sociais.	(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.	**NÚMEROS**
			(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	**ÁLGEBRA**
		1.3 Analisar e empregar o conhecimento probabilístico e estatístico em situações problemas que abordem, sobretudo, questões sociais.	(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.	**PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**
CULTURA E IDENTIDADE	1. Os saberes e as práticas Matemáticas existentes em diferentes grupos sociais.	1.1 Analisar as construções algébricas e geométricas como representações e sistematizações dos diferentes saberes matemáticos existentes no contexto dos 'grupos sociais.	(EF09MA02PA) Inferir situações que representem a cultura local por meio de representações geométricas e algébricas.	**ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

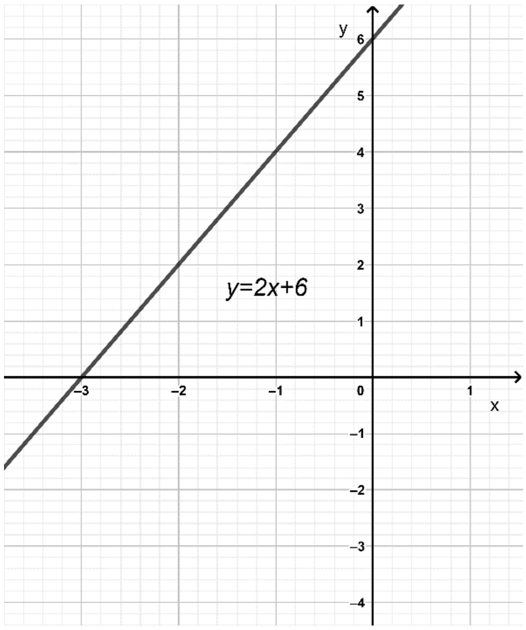
Fonte: (SEMED, 2021, p. 611-612).

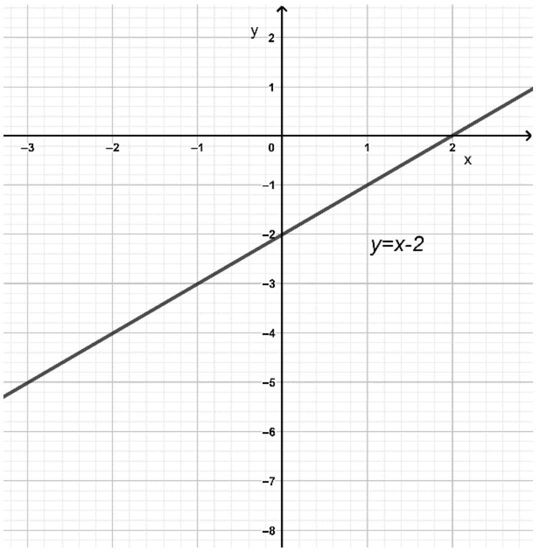
ANEXO C – Quadro de gráficos I

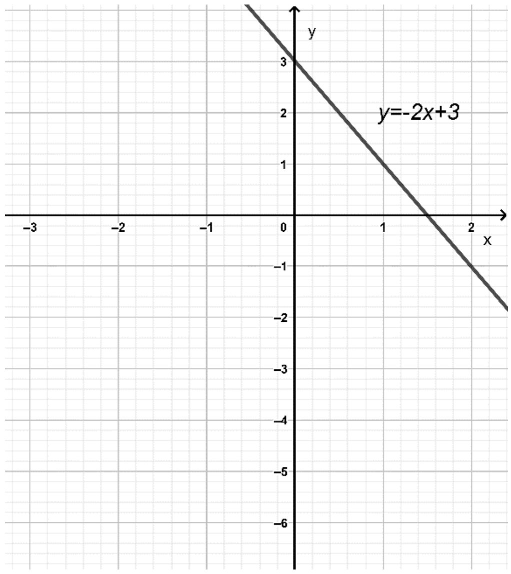


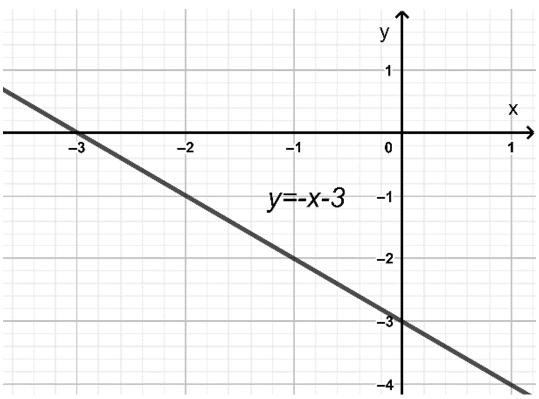
Fonte: Silva (2018).

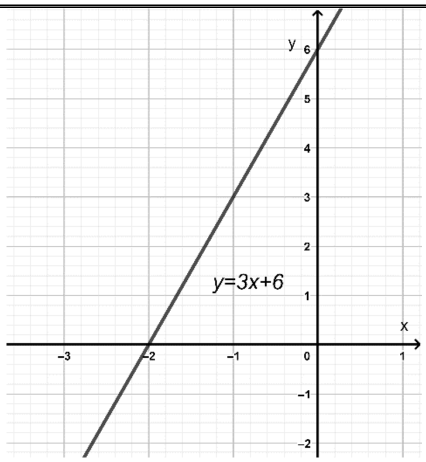

y=x+3

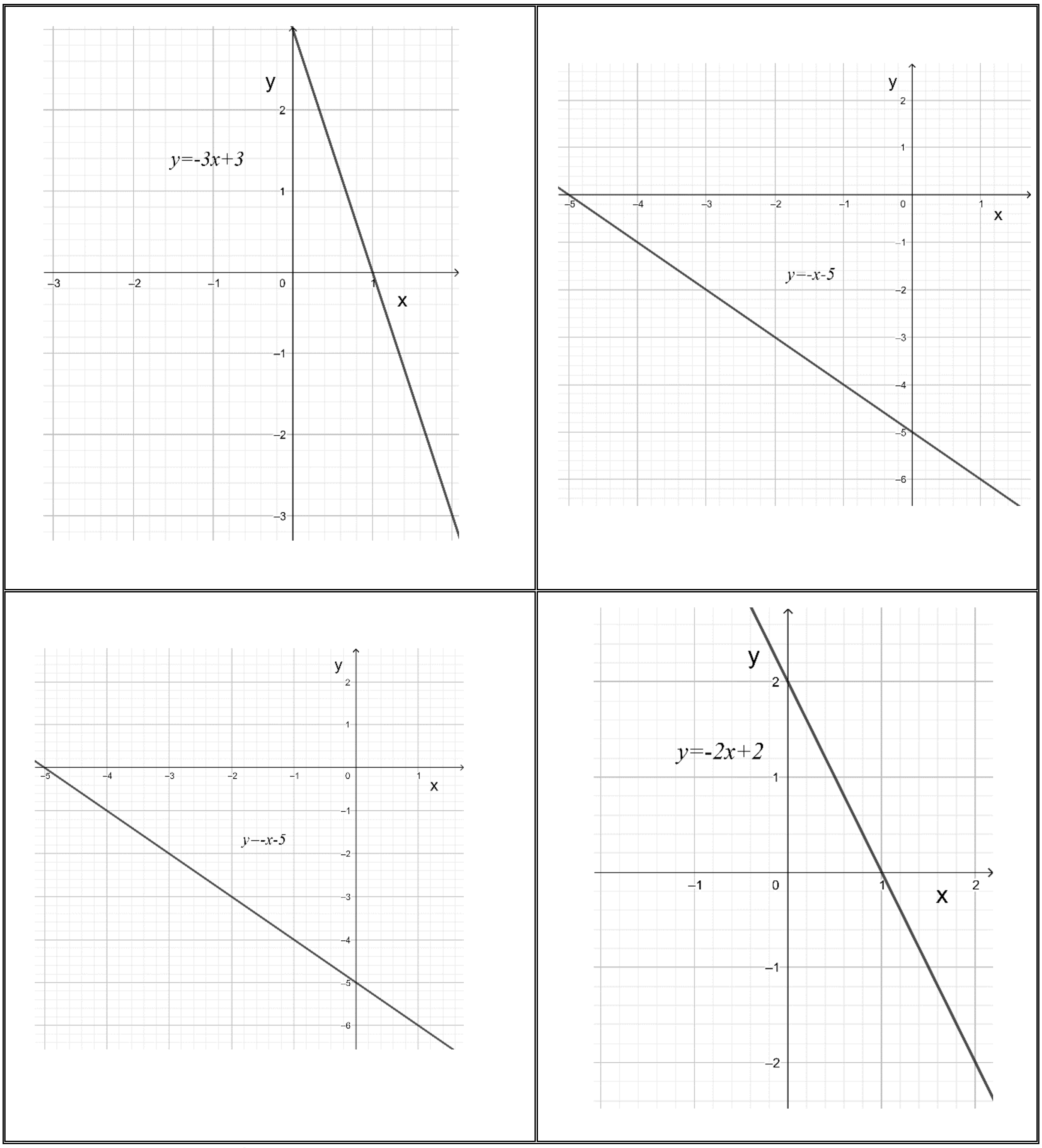

y=2x+6


y=x-2


y=-2x+3

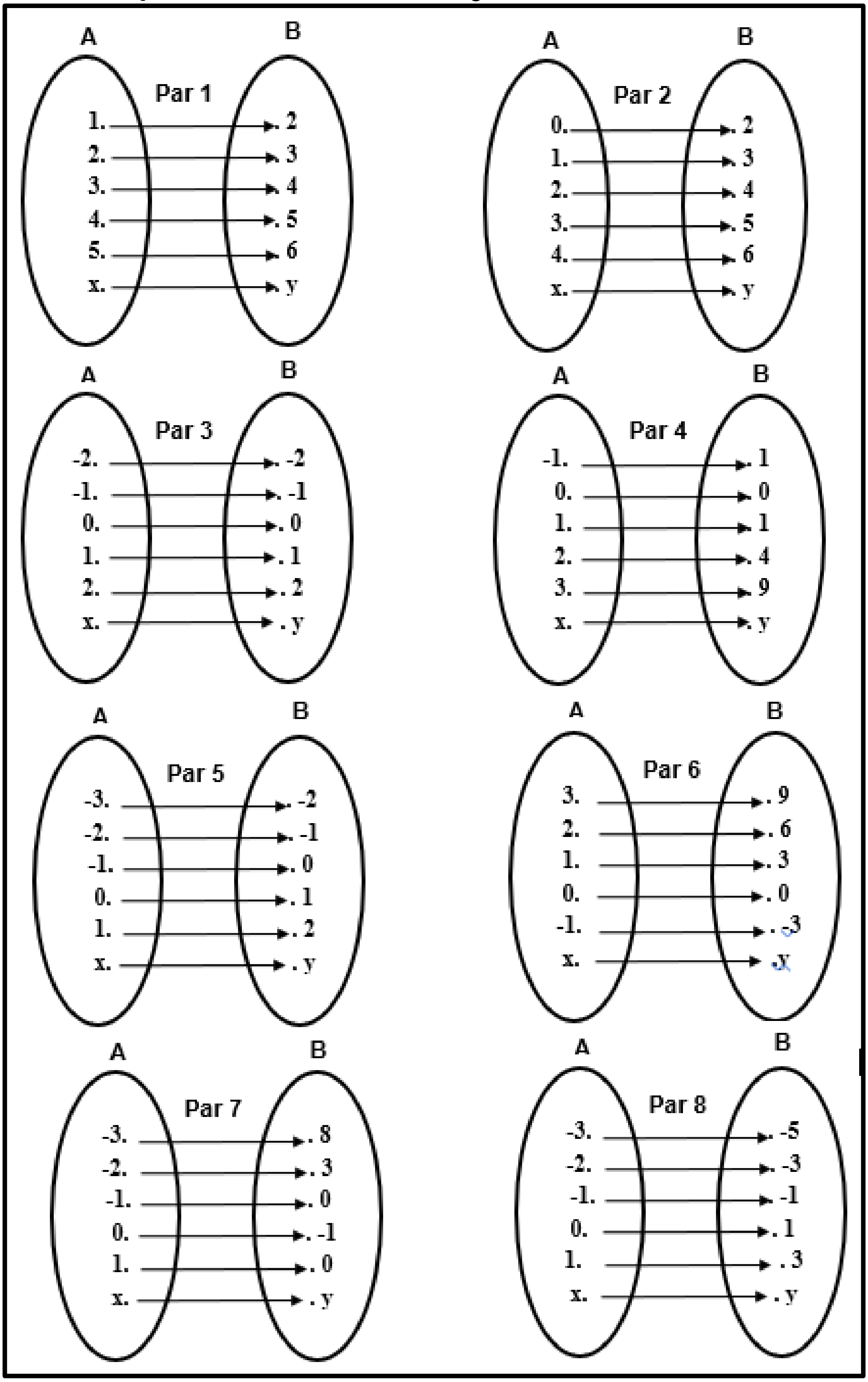

y=-x-3


y=3x+6



Fonte: Silva (2018) e Sá (2017).

Anexo D – Quadro I – Descubra Minha Regra



Fonte: Sá e Silva (2018).

Anexo E - escala de proficiência de matemática 9º ano do ensino fundamental

Nível[1]	Descrição do Nível
Nível 1 Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225	Os estudantes provavelmente são capazes de: **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES** Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de: **ESPAÇO E FORMA** Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES** Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros.

Fonte: MEC, 2022.

ANEXO F – Termo de Consentimento Livre Esclarecido Direção escolar

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada **O ensino de função afim por meio de atividades experimentais** no 9.º do ensino fundamental de Altamira-PA, sob a responsabilidade do pesquisador Vagney dos Santos e Santos, vinculados à Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando avaliar os efeitos de uma sequência didática, que se diferencia da tradicional, para o ensino de função afim e a aprendizagem dos conceitos relacionados ao assunto. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico da relação entre metodologia didática e a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: os pesquisadores Vagney dos Santos e Santos (Mestrando) e o orientador Dr. Pedro Franco de Sá – Professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática e com eles poderei manter contato pelos telefones (93) 99172-2003 e (91) 918152-3988. Poderá também entrar em contato com a Direção do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Altamira-Pa, _____ de __________de 2022.

____

Assinatura dos pesquisadores

Eu,____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Participante da pesquisa

ANEXO G – Termo de Consentimento Livre Esclarecido Alunos do Experimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada **O ensino de função afim por meio de atividades experimentais** no 9.º do ensino fundamental de Altamira-PA, sob a responsabilidade do pesquisador Vagney dos Santos e Santos, vinculados à Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando avaliar os efeitos de uma sequência didática, que se diferencia da tradicional, para o ensino de função afim e a aprendizagem dos conceitos relacionados ao assunto. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico da relação entre metodologia didática e a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: os pesquisadores Vagney dos Santos e Santos (Mestrando) e o orientador Dr. Pedro Franco de Sá – Professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática e com eles poderei manter contato pelos telefones (93) 99172-2003 e (91) 918152-3988. Poderá também entrar em contato com a Direção do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Altamira-Pa, _____ de __________de 2022.

____

Assinatura dos pesquisadores

Eu, ____ autorizo que meu/minha filho (a)____ a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do responsável

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n - Telégrafo 66113-200
Belém - PA