Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Ernani Soeiro da Costa

ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Belém (PA)
2023

Ernani Soeiro da Costa

ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém (PA)
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Costa, Ernani Soeiro da
Ensino de progressão aritmética por meio de sequência didática / Ernani Soeiro da Costa; orientador Miguel Chaquiam. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Aritmética-Estudo e ensino. 2.Matemática-Estudo e ensino. I.Chaquiam, Miguel (orient.). II. Título.

CDD 513 23º ed.

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

ERNANI SOEIRO DA COSTA

ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 27/10/2023

Banca examinadora

________________________________. Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

________________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

________________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Alailson Silva de Lira
Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Belém – PA

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Luciana e a minha filha Ana Luísa, pela compreensão nos meus momentos de ausência e incentivo nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e à N. Sra. de Nazaré por serem o meu refúgio e fortaleza de todas as horas, por me permitirem concluir esta etapa de minha trajetória acadêmica. Obrigado por nunca soltar a minha mão e me guiar em todos os caminhos.

Aos meus pais, Ibrahim e Zuleide, que nunca mediram esforços para me ensinar o caminho do bem, e sempre me apoiaram em todas as etapas da minha vida. Sem vocês, eu não chegaria até aqui. Muito obrigado por tudo!. O amor que sinto por vocês é incondicional.

Minha eterna gratidão a minha esposa Luciana, a minha filha Ana Luísa e a cadela Lolla Maria, que mesmo sem perceberem, de várias maneiras, me ajudaram e contribuíram para que eu completasse mais este ciclo de minha vida. Muito obrigado por estarem comigo, por me fortalecerem e por me incentivarem. Tenho plena certeza de que eu não teria chegado até aqui se não fosse a existência de cada um de vocês.

Ao meu sogro Claudionor Sebastião e sogra Oneide, meus pais do coração, serei eternamente grato a vocês por todas as formas de ajuda durante todos esses anos. Muito obrigado.

Aos meus irmãos e irmãs, por estarmos juntos, por valorizarem as minhas qualidades e me ajudar a superar os meus defeitos e minhas dificuldades, pelo apoio, carinho, amizade e amor devotado. Muito obrigado.

Ao meu grande amigo e orientador Prof. Dr. Miguel, pela construção de cada etapa deste trabalho, por ser responsável pela minha mudança de rumo e perspectiva profissional, por ter provocado um contínuo exercício de reflexão e questionamentos, pelo seu exemplo responsável e dedicado ao ofício de ensinar que me serviram de inspiração. A você prezado professor e amigo Chaquiam, a minha eterna admiração e gratidão. Muito obrigado.

Ao corpo de docentes que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, em especial aos professores e professoras, Acylena, Carlos Alberto, Cinthia, Fábio, Hermes, Miguel, Natanael, Pedro e Roberto, por terem colaborado por despertar em mim a paixão em procurar a construção de uma práxis e matemática mais coerente, mais contextualizada e mais comprometida com a transformação. Muito obrigado.

Ao Professor Dr. Pedro Sá e demais colegas do curso de mestrado profissionalizante em ensino de matemática, que formaram um grupo de excelência e diversidade pelo WhatsApp. Muito obrigado a todos vocês por compartilhar o conhecimento de forma admirável. Muito obrigado.

Ao meu grande amigo João, meu irmão camarada, por ter me ensinado tanto, sem as vezes perceber como e quando. Pelo exemplo de dignidade e por me ensinar que as diferenças podem representar uma enorme fonte de crescimento. Muito obrigado.

A minha amiga Francinete, por todo o tipo de apoio e ajuda que muito contribuíram para a realização deste trabalho. Muito obrigado.

Aos meus amigos de trabalho, Adriano, Filipe, Flávio, Graça, José, Lenita, Michelle, Plíncida, Rafael e Roberta, pela companhia durante o café, pelas experiências e trabalhos compartilhados, pelas inúmeras conversas e risadas sobretudo pelo incentivo. Muito obrigado.

Aos alunos voluntários da pesquisa, pela compreensão e dedicação aos estudos. Muito obrigado.

A gestora Rita e as coordenadoras Elizabeth, Maria do Socorro e Michele da escola onde trabalho, pela gestão dedicada, pelo profissionalismo, pela organização, apoio, amizade, parceria e aprendizado. Muito obrigado.

Ernani Soeiro Costa

RESUMO

COSTA, Ernani Soeiro da. **Ensino de progressão aritmética por meio de sequência didática**. 217 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Este trabalho apresenta um conjunto de atividades para o ensino da progressão aritmética realizada durante o curso de Mestrado em Ensino de Matemática, buscando responder a seguinte questão: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) proposta por Cabral (2017) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de progressão aritmética? Para tanto, foi definido como objetivo geral verificar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada para o ensino e a aprendizagem de progressão aritmética. A abordagem da pesquisa é de cunho quantitativo e qualitativo. Como aportes teóricos abordamos a Teoria da Situação Didática descrita por Brousseau (1996), a Educação Matemática, Sequência Didática idealizada por Zabala (1999) e Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017). Para análise e validação dos resultados adotamos a Análise Microgenética, de Góes (2000), e Análise do Discurso, de Mortimer e Scott (2002). Além disso, efetuamos um levantamento bibliográfico sobre o ensino da progressão aritmética com empirias e um estudo sobre a abordagem de progressão aritmética nos livros didáticos. Delineamos a opinião de professores de matemática e de alunos egressos do 1° Ano do Ensino Médio sobre as dificuldades em aprender progressão aritmética. Empreendemos um teste e uma oficina de conhecimentos básicos aos alunos. Esses estudos gerou o produto educacional “Ensino de Progressão Aritmética por Meio de Sequência Didática[1]”. Os resultados da pesquisa demonstraram que a estrutura metodológica de ensino adotada possibilitou um melhor domínio do gênero textual dos alunos, auxiliou os alunos na compreensão da formalização de estruturas mais complexas da matemática, melhorou interação da tríade aluno-professor-saber e propriciou o aluno ser o ator principal da construção dos seus saberes.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Progressão Aritmética; Sequência Didática.

1

ABSTRACT

COSTA, Ernani Soeiro da. **Teaching arithmetic progression through didactic sequence**. 217 f. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) – State University of Pará, Belém, 2023.

This work presents a set of activities for teaching arithmetic progression carried out during the Master's degree in Mathematics Teaching, seeking to answer the following question: To what extent does a Didactic Sequence prepared according to the structuring model of the Articulated Units of Conceptual Reconstruction (UARC) proposed by Cabral (2017) enhances the teaching and learning process of arithmetic progression? To this end, the general objective was to verify the didactic potential of a Didactic Sequence designed for teaching and learning arithmetic progression. The research approach is quantitative and qualitative. As theoretical contributions we address the Theory of the Didactic Situation described by Brousseau (1996), Mathematics Education, Didactic Sequence idealized by Zabala (1999) and Articulated Units of Conceptual Reconstruction proposed by Cabral (2017). To analyze and validate the results, we adopted Microgenetic Analysis, by Góes (2000), and Discourse Analysis, by Mortimer and Scott (2002). Furthermore, we carried out a bibliographical survey on teaching arithmetic progression with empirics and a study on the approach to arithmetic progression in textbooks. We outline the opinion of mathematics teachers and students graduating from the 1st year of high school about the difficulties in learning arithmetic progression. We carried out a test and a basic knowledge workshop for students. These studies generated the educational product "Teaching Arithmetic Progression through Didactic Sequence [2]". The research results demonstrated that the adopted teaching methodological structure enabled students to better master the textual genre, helped students understand the formalization of more complex structures in mathematics, improved interaction between the student-teacher-knowledge triad and allowed the student to be the main actor in the construction of their knowledge.

Keywords: Mathematics Teaching; Arithmetic Sequence; Following teaching.

2

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Temos nos deparado com a preocupação constante em relação a melhoria no aprendizado dos alunos, principalmente na Educação Básica, essa inquietação é um dos principais incentivadores de vários estudos na área educacional [3] e amplamente discutida nos documentos oficiais. Por trás dessa situação existem causas diversas, desde a falta de conexão de conteúdos com interesse dos alunos e aprendizagem por descoberta, a predominância de práticas pedagógicas que não incluem a perspectiva de grupos historicamente excluídos. Assim sendo, dificultando ainda mais para que haja um processo sólido de aprendizagem e continuidade nos estudos.

Sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos temos que, uma das finalidades da educação básica segundo o artigo 22 da Lei de Diretrizes e Base (LDB) é, "desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores". Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) auxiliam o professor na tarefa de reflexão e discussão de aspectos do cotidiano da prática pedagógica, a serem transformados continuamente pelo professor. Assim, encontramos a importância do objeto matemático e uma orientação clara desse documento com relação ao estudo de séries e sequências.

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece, talvez, a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequências seus gráficos e relacionar os conceitos de sequência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo em que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações. (BRASIL, 1998, p. 118)

---

[3] D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

Assim sendo, no estudo de progressão aritmética é possível estabelecer a relação com o cotidiano do aluno, assim também, envolver o aluno no processo de ensino e aprendizagem de modo que, ele possa observar e explorar regularidades em padrões numéricos, desenvolver ideias que são essenciais para desenvolvimento da ciência na atualidade.

Ademais, durante a minha trajetória docente, venho desenvolvendo práticas de ensino com ênfase na compreensão e no envolvimento efetivo do aluno no âmbito do processo de ensino e aprendizagem. O desenvolvimento dessas ativas, e das reflexões sobre os resultados obtidos a partir da minha própria prática docente, foram as motivações iniciais para desenvolver esse trabalho. Assim, a fim de limitar nossa linha de pesquisa, enfatizaremos, nesse trabalho, a Sequência Didática como proposta para o ensino de Progressão Aritmética.

Admitindo que este trabalho poderá colaborar nos debates que auxiliam o ensino e a aprendizagem, este estudo vem mostrar uma abordagem dos conceitos presentes em Progressão Aritmética por meio da Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual segundo Cabral (2017). Assim sendo, uma "nova" abordagem para tratar velhos problemas na aprendizagem de Progressão Aritmética (PA).

Dessa forma, acreditamos, que a abordagem por meio de sequência didática poderá proporcionar aos alunos do Ensino Médio incentivo e condições de aprendizagem em PA. Assim, para elucidar o direcionamento da presente pesquisa, designamos a seguinte pergunta: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) proposta por Cabral (2017) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de progressão aritmética?

Para responder ao questionamento apresentado e balizar a elaboração da sequência didática foi estabelecido o seguinte objetivo: Identificar potencialidades de uma sequência didática direcionada ao ensino de Progressão Aritmética, estruturada segundo as UARC, a partir dos registros de sua aplicação e análises dos resultados esteados na microgenética e na análise do discurso.

Para melhor desenvolvimento desta pesquisa e obtenção de elementos para subsidiar as respostas foram delineados os objetivos específicos a seguir:

- ✓ Destacar a importância da temática a partir dos estudos realizados, bem como, a utilização de uma abordagem que promove em níveis teóricos e práticos o ensino e a aprendizagem de Progressão Aritmética;
- ✓ Apresentar percepções de professores e alunos sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Progressão Aritmética, tendo em vista a identificação de possíveis pontos nefrálgicos, assim também, pontos positivos acerca desses processos que irão balizar a elaboração da sequência didática de Progressão Aritmética;
- ✓ Compreender o processo de ensino e aprendizagem de Progressão Aritmética a partir de uma revisão de estudos sobre essa temática, tendo em vista obter elementos para constituição da sequência didática de Progressão Aritmética;
- ✓ Elaborar uma Sequência Didática de Progressão Aritmética para o Ensino Médio, estruturada segundo a UARC, tendo em vista a superação dos obstáculos identificados no processo de ensino e aprendizagem durante as análises prévias;
- ✓ Identificar abordagens a respeito do tema em livros didáticos indicados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) por considerar que, em muitos casos, o livro didático influencia o planejamento e abordagem do tema pelo professor em sala de aula;
- ✓ Elaborar um texto matemático que contemple o objeto matemático, tendo em vista a formação inicial e continuada de professores de Matemática e obter subsídios matemáticos à constituição da sequência didática;
- ✓ Validar as atividades propostas a partir das potencialidades identificadas durante sua aplicação e das análises dos resultados amparados pela análise microgenética e análise do discurso.

A pesquisa de campo está apoiada na abordagem qualitativa, pois ela permite descrever e interpretar o fenômeno investigado (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; SANTOS FILHO; GAMBOA, 2007; FIORENTINI; LORENZATO, 2012; BOGDAN; BIKLEN, 1994). O fenômeno está relacionado às abordagens atribuídas as concepções de professores e alunos a respeito do ensino e aprendizagem de matemática em especial, de progressão aritmética. Desse modo, considerando a perspectiva de diversos autores e correntes teóricas no campo da Educação Matemática, temos que, esse fenômeno não pode ser mensurado, e sim qualificado.

O público alvo para aplicação da sequência didática elaborada foram alunos de uma turma do primeiro ano do ensino médio de uma escola pública de periferia, que tem no seu contexto escolar, baixo rendimento em matemática e possuem quatro alunos diagnosticados com déficit de aprendizagem.

Considerando os objetivos e finalidades acima apresentados, essa pesquisa caracteriza-se no formato qualitativa-bibliográfica, além de contar com uma pesquisa de campo. Assim sendo, apresentamos especificamente uma pesquisa de campo feita por meio da aplicação de um questionário composto de perguntas abertas e fechadas com professores e alunos, que busca entender e tipificar as concepções de 53 (cinquenta e três) professores de matemática que estão como professores do ensino médio no ato da pesquisa, suas concepções acerca do ensino e aprendizagem de progressão aritmética.

Ademais, foi realizada uma pesquisa de campo com 60 (sessenta) alunos egressos do 1º ano de escola pública de periferia. Para isso o método escolhido de investigação está embasado na análise microgenética. Sobre isso, o principal argumento de se optar em favor da análise microgenética é que ela permite aos pesquisadores uma maior aproximação dos detalhes dos processos de mudança, assim como estudá-los durante sua ocorrência (LAVELLI et al., 2005, p. 41; SIEGLER e CROWLEY, 1991, p. 607). Corroborado também por Góes (2000) que se refere à abordagem metodológica Microgenética como “Análise Microgenética”. Além do mais, a partir dos questionamentos e as suas dimensões ideológicas, foi realizado um estudo sobre a abordagem do tema nos livros didáticos.

No primeiro capítulo, desde já, queremos deixar clara a ideia de que temos uma opção pela Teoria das Situações Didáticas, no entanto, outras teorias também podem ser localizadas neste trabalho, embora como pano de fundo, de maneira secundária. Secundária não corresponde aqui a menos importante, mas sim, coadjuvante. Assim sendo, temos a Educação matemática, Sequência Didática e a Estrutura da Sequência Didática segundo Cabral (2017) que promovem o ensino experimental em níveis teóricos e práticos. Assim também, os olhares sobre o processo de validação, a microgenética e a análise do discurso.

No segundo capítulo, temos a revisão de literatura sobre o ensino da progressão aritmética a partir do trabalho de três pesquisadores, um quadro comparativo entre esses trabalhos que evidencia e caracteriza o ensino de matemática, as dificuldades durante o processo de aprendizagem, as dificuldades não consolidadas em sala de aula, as contribuições da revisão da literatura para este trabalho, assim também, o diferencial desse trabalho considerando a revisão da literatura. Assim também, teremos neste capítulo a partir de uma pesquisa de campo, as percepções de professores e de alunos egressos sobre o ensino de matemática em especial sobre o ensino de PA. Embora não seja o tema central do deste trabalho, e por considera o livro didático um material não neutro, também abordaremos neste capítulo, uma discussão acerca da abordagem do objeto matemático nos livros didáticos como instrumento na construção do conhecimento escolar.

No terceiro capítulo abordaremos a Progressão Aritmética enquanto conteúdo, as sequências e séries numéricas, a definição da progressão aritmética, sua fórmula do termo geral, a classificação de uma progressão aritmética, propriedades da PA, a soma dos termos de uma PA.

No quarto capítulo esclarecemos o conjunto de procedimentos que foram organizados. Assim, explica de modo geral a estrutura da SD, esclarece sobre o teste e oficina de conhecimentos básicos, além disso, revela detalhes da elaboração das atividades, bem como, apresenta a sequência didática de PA.

No quinto capítulo, não só elucidamos a aplicação e validação da SD, como também, elaboramos algumas orientações que julgamos ser apropriadas aos professores que desejarem aplicar a SD. Ademais, esclarecemos sobre a aplicação do teste de conhecimentos básicos, assim também, os seus resultados. Além disso, abordamos a aplicação da SD e apresentamos uma análise discursiva dos resultados obtidos em sala de aula. Por fim, discorremos sobre as contribuições da SD para a tríade.

No sexto capítulo apresento os resultados da aplicação da Sequência Didática validada e, que gerou não só o produto educacional “Ensino de Progressão Aritmética por Meio de Sequência Didática”, como também mostrou potencialidades para o ensino de progressão aritmética. Além disso, contribuições para a tríade aluno-professor-saber como, por exemplo, a SD proporcionou aproximação do conhecimento do senso comum ao conhecimento científico. Além disso, viabilizou o estimulo e a afetividade como sendo ações fundamentais nas construções de saberes.

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS NORTEADORES

Antes de tudo, destacamos a resposta dos autores quando nos perguntamos por que precisamos de teorias:

> Teorias são úteis porque direcionam a atenção dos pesquisadores para relações particulares, fornecendo significado para os fenômenos estudados, avaliam a relativa importância da questão de pesquisa, e as descobertas de estudos individuais dentro de um contexto mais amplo. Teorias sugerem para onde olhar quando formular as próximas questões de pesquisa e fornecem um esquema organizacional, ou uma linha histórica, dentro da qual se acumulam e ajustam-se conjuntos individuais de resultados. (SILVER & HERBST, 2007. HIEBERT & GROUWS, 2007, apud SRIRAMAN E ENGLISH, 2010, p. 24, tradução ALMOULOUD, 2017).

Razão pela qual, a narrativa desse capítulo aborda em linhas gerais um pouco da origem e algumas diretrizes, teorias, conceitos e ações que ajudam a caracterizar e utilizar a Teoria das Situações Didáticas como um meio que auxilia e promove o ensino em níveis teóricos e práticos, dessa forma, corroboram para ensejar reflexões acerca de sequências didáticas e, junto com as teorias adjacentes, proporcionam condições favoráveis ao trabalho do professor para que, entre outras tarefas, ele possa elaborar, aplicar, acompanhar e realizar análises, considerando uma sequência didática em que o aluno é convidado a construir saberes relativos a um conteúdo matemático, sem a interferência direta do professor nessa construção.

Como já dito anteriormente, neste trabalho, temos uma opção pela Teoria das Situações Didáticas, no entanto, outras teorias também podem ser localizadas neste trabalho, embora como pano de fundo, de maneira secundária. Secundária não corresponde aqui a menos importante, mas sim, coadjuvante.

Dito isto, o objetivo desse estudo é elaborar uma sequência didática para o ensino de Progressões Aritméticas que serão avaliadas de acordo com a análise do discurso e a microgenética. Para tanto, o referencial teórico adotado elege, a Educação Matemática, a Teoria da Situação Didática, a Sequência Didática e utilizaremos a Estrutura da Sequência Didática segundo as UARC de Cabral (2017). A escolha desses referencias, se deu pela importância dessas teorias associar a teoria à prática em sala de aula, fio condutor deste trabalho.

Nessa perspectiva, Lopes & Borba (1994) assumem como tendências as formas de trabalho que emergem na busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. Nesse contexto, Libâneo (1994) diz que.

> Os professores precisam dominar, com segurança, esses meios auxiliares de ensino, conhecendo-os e aprendendo a utilizá-los. O momento didático mais adequado de utilizá-los vai depender do trabalho docente prático, no qual se adquira o efeito traquejo na manipulação do material didático. (LIBÂNEO, 1994, p. 173)

Nesse novo contexto, acreditamos que a função do professor de matemática não é (nunca foi) mais a de simplesmente transmitir um conhecimento cristalizado, pronto e acabado. Cabe-lhe organizar situações de aprendizagem desafiadoras metodologicamente, estimulantes do ponto de vista cognitivo, de modo a promover diversos benefícios para o ensino proporcionando impacto no sucesso dos educandos, como por exemplo, favorecer a interação do professor e aluno e deste com os demais colegas e todos com o meio[4].

1.1. SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Por considerar que a Educação Matemática (EM) vem contribuindo para aprofundar conhecimentos e práticas que envolvam a formação humana nas suas relações com o conhecimento matemático, razão pela qual a narrativa desse tópico traz fundamentos sobre a origem da Didática da Matemática enquanto campo científico, e um outro olhar, nos fundamentos teóricos que promove em níveis teórico e experimental a prática docente e que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Situações Didática (TSD).

Além do que, o objeto da Didática é a compreensão do processo de aprendizagem na sua totalidade. Ela se interessa pelas relações existentes entre o professor, o aluno e o conhecimento a ser ensinado, o que caracteriza o triângulo didático (Brousseau 1990, 1998) fios condutores por onde se desloca esse trabalho.

Desse modo, a partir da década de 50, a Unesco organiza congressos sobre educação matemática, também chamada de didática matemática em países

[4] No decorrer deste trabalho iremos abordar mais detalhadamente o estudo deste – meio – que passará a se chamar *milieu*, diferente da sua tradução mais comum encontrada em dicionários – meio ambiente – este *milieu* é um conceito central da Teoria das Situações Didáticas que deve possibilitar e potencializar a interação autônoma do aluno em relação às situações que interagem e em relação ao professor.

europeus5. E a partir da década de 70 surge, inicialmente na França, a Didática da Matemática enquanto campo de estudos para sistematizar o ensino da matemática. Alguns teóricos que contribuíram com os estudos nesse campo, são Gastão Bachelard (Obstáculos Epistemológicos), Yves Chevallard (Transposição Didática), Gérard Vergnaud (Teoria dos Campos Conceituais), Guy Brousseau (Teoria das Situações Didáticas). Todos esses, entre outros, corroboram de alguma forma, com a valorização e a ideia de estudos que associam as teorias às práticas docentes.

Os estudiosos dessa área, didática da matemática[6], reconhecem que não poderia haver um campo de estudo único que atendesse as especificidades de cada campo de conhecimento, razão pela qual, defendiam que cada área de ensino deveria pensar em sua própria didática. Nessa perspectiva, segundo Pais (2001), a Didática da Matemática "é uma tendência da educação matemática", cujo objetivo de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade do saber matemático.

Dessa forma, pode se dizer que, a Didática da Matemática é a ciência que pode auxiliar e promover a prática docente, tanto no nível teórico como na prática experimental. Corroborando com a ideia, D'Amore (2007)[7] sinaliza duas maneiras de vislumbrar a didática: a primeira interpretação é como divulgador de ideias, concentrando a atenção na fase do ensino, onde o professor é um especialista em didática e o centro da atenção é o conteúdo. A segunda interpretação, é como pesquisa empírica, concentrando sua atenção na aprendizagem, mas do ponto de vista dos fundamentos não aceitando um modelo único de teoria de aprendizagem.

Nessa perspectiva, a Didática faz parte da ciência pedagógica sendo responsável por estudar os processos de ensino e aprendizagem. Nesse sentindo, para trazer luz e compreensão de fenômenos complexos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de objetos matemáticos no campo de estudo da didática da

---

[5] NISS, Moggens. Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics Volume 40, Number 1. Springer Netherlands, setembro de 1999. p.1 e 2.

[6] Para Brousseau (1996), a Didática da Matemática estuda as atividades didáticas que tem como objetivo o ensino naquilo que tem de específico dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos (referência a Piaget), além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

[7] D"Amore (2007) complementa como objetivo da Didática da Matemática "a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito" (D'Amore, 2007,p.3).

matemática, e que estão inseridos implicitamente ou explicitamente neste trabalho, discorre o que segue:

Sobre o *obstáculo epistemológico* sabe-se que se trata da resistência oferecida por conceitos considerados verdadeiros em um determinado período, e que, dificultam a formação de um novo saber no processo de ensino e aprendizagem. Ademais, a transposição didática permite uma visão panorâmica das transformações no qual o saber matemático é submetido, que vai desde sua gênese acadêmica, passando pelas ideias dos autores de livros, por especialistas em educação, responsáveis pela política educacional (documentos oficiais), pelas interpretações do professor, até chegar ao espaço conflituoso da sala de aula e, daí, para o nível intelectual do aluno.

De outro lado, tem-se a *teoria dos campos conceituais* está em sintonia com o problema do significado do saber escolar visando a realização dos valores educacionais da matemática. É preciso destacar que, a teoria dos campos conceituais supõe que o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização (1996a, p. 118). É ela a pedra angular da cognição (1998, p. 173). Logo, deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os alunos desenvolvem seus esquemas, na escola ou fora dela (1994, p. 58).

Esse trabalho como já foi dito anteriormente, será baseado na *Teoria das Situações Didáticas* que trata das formas de apresentação de determinado conteúdo matemático, ou parte dele, para os alunos, "sempre" que houver uma intenção clara do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem, por meio de uma sequência didática planejada.

A discussão, não exaustiva a respeito da Didática da Matemática encontra reforço na resenha do livro de Bruno D'Amore (2007) apud Almouloud (2008) a "Didática da Matemática como epistemologia da aprendizagem matemática", D'Amore (2007) adota a didática da disciplina com sendo a epistemologia da aprendizagem, em outros termos, a pesquisa empírica, fixando a atenção na fase de aprendizagem.

Neste âmbito, segundo D'Amore (2007) citado por Almouloud (2008), algumas das problemáticas que parecem emergir nos últimos anos, como o da pesquisa em curso, que trata do ensino e aprendizagem, e que se constitui como elementos de investigação, e que parecem "proporcionar sustentação sólida e significativa para uma possível generalização, fornecendo também contribuições a uma definição de uma Didática Geral" (p. 58).

Nesse contexto, D'Amore (2007) apud Almouloud (2008), a epistemologia é entendida como um "ramo da Filosofia que estuda a maneira pela qual os conhecimentos científicos de certa área específica são constituídos, até mesmo para delimitar e caracterizar essa especificidade" (p. 66). Discute diferentes posições e significados de Didática da Matemática e os fundamentos teóricos associados. Motivo pelo qual abordaremos neste trabalho a Educação Matemática versos a Prática Docente.

Por considerar o planejamento um ponto chave para uma Sequência Didática na prática do professor, a narrativa deste tópico, aborda a prática do professor vista como um espaço de compreensão e transformação para a aprendizagem na educação matemática, dizendo de outra maneira, da importância da prática do professor que favorece o ensino, da elaboração do planejamento de ensino para uma “boa” prática docente, bem como, a utilização da Sequência Didática como mediadora nesse processo.

Assim, consideramos a Educação Matemática como um ponto de partida neste referencial teórico uma vez que trata de uma área de conhecimento que tem por finalidade o estudo de fenômenos relacionados a aprendizagem, realçando um dos fios condutores deste trabalho que envolve Sequência Didática de Progressão Aritmética.

É importante ressaltar, antes de tudo, que não existe uma metodologia de ensino mais competente ou melhor que outra. Partindo desse pressuposto e considerando a prática do professor, o que há na verdade são metodologias que se encaixam mais adequadamente à proposta e as necessidades de ensino em relação a uma outra. Considerando essa premissa, é possível dizer que a escolha de uma metodologia precisa ser coerente para que não resulte em problemas futuro de aprendizagem.

Nesse contexto, é necessário a adoção de uma nova postura educacional que substitua o já desgastado ensino de objetos matemática, desconectados da realidade dos alunos, e amplamente debatido em Educação Matemática por tratar de problemas mais diretamente ligados a sala de aula e às inovações nas práticas dos sujeitos. Nessa perspectiva, D'Ambrosio (2009) nos remete a importância da prática docente. Para o autor, toda teorização se dá em condições ideias, mas é na prática que serão evidenciados certos pressupostos que não são identificados na teorização. A esse respeito D'Ambrosio (2009) diz que.

> Não há dúvida quanto a importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto educação a distância quanto outras utilizações de tecnologias na educação, mas nada substituirá o professor. Todos esses serão meios auxiliares para o professor. Mas o professor, incapaz de se utilizar desses meios, não terá espaço na educação. (D'AMBROSIO, 2009, p. 73)

Desse modo, para D'Ambrosio (2009), "o professor que insistir no seu papel e fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral". Em consonância com essas ideias D'Ambrosio, Carbonell (2002, p. 19), sinaliza que a inovação educacional é um conjunto de intervenções, decisões e processos, com certo grau de intencionalidade e sistematização, que tratam de modificar atitudes, ideias e práticas pedagógicas relacionadas a dinâmica da classe.

É preciso destacar que, acreditamos que toda prática educativa deve ter caráter intencional, com finalidade estruturada e bem estabelecida. Em virtude disso, os educadores matemáticos têm desenvolvido estudos que subsidiam a construção de um referencial teórico que possa embasar ações educativas mais amplas Mendes (2009). Em conformidade, para Nélisse (1997), práticas educativas são como um "fazer ordenado" voltado para o ato educativo, desse modo, exige um planejamento, um momento de interação, um momento de avaliação e, finalmente, a reflexão crítica e o replanejamento dessas ações.

Nessa perspectiva, segundo Libâneo (2013), há de se considerar que os objetivos educacionais devam ser exigência indispensável para o trabalho docente, dentro desse cuidado, está a avaliação ou a verificação da aprendizagem, consideramos que é por meio dela que se tem clareza do que se quis/quer atingir como objetivo, possibilitando nesse contexto um replanejamento. Nessa perspectiva e consonância com as ideias dos autores, Klosouski e Reali (2008) destacam a importância do planejamento especificamente na prática docente, provocando uma reflexão sobre o ato de planejar, suas fases e sua importância para o ensino e aprendizagem. Segundo as autoras:

> Dentro do planejamento de ensino, deve-se desenvolver um processo de decisão sobre a atuação concreta por parte dos professores, na sua ação pedagógica, envolvendo ações e situações do cotidiano que acontecem

> através de interações entre alunos e professores (KLOSOUSKI e REALI, 2008, p. 4).

A esse respeito segundo Carr (1996), a diferenciação da prática tecnologicamente tecida da prática pedagogicamente tecida, é que a primeira é uma forma de saber fazer não reflexivo enquanto a segunda, é eminentemente uma ação reflexiva. Assim, a prática docente não se fará de forma inteligível se não for “regida por critérios éticos imanentes à mesma prática educativa” (CARR, 1996, p. 102). Em conformidade com essas ideias, Neiva Ignês Grando; Sandra Mara Marasini (2014) ressaltam que a busca por um ensino de qualidade exige um maior engajamento do professor, uma nova postura pedagógica frente aos objetos da matemática.

A esse respeito, segundo Franco (2016) “há práticas docentes construídas pedagogicamente e há práticas docentes construídas sem a perspectiva pedagógica, num agir mecânico que desconsidera a construção do humano”. Assim, segundo Franco (2016), “nas práticas pedagogicamente construídas, há a mediação do humano e não a submissão do humano a um artefato técnico previamente construído”. A esse respeito, Franco (2016) diz que.

> Será prática pedagógica quando incorporar a reflexão contínua e coletiva, de forma a assegurar que a intencionalidade proposta é disponibilizada a todos; será pedagógica à medida que buscar a construção de práticas que garantam que os encaminhamentos propostos pelas intencionalidades possam ser realizados. (FRANCO, 2016, p. 536)

Assim, consideramos que uma Sequências Didáticas afiance a prática docente conferindo sentindo às intencionalidades. Contudo, vale salientar que as Sequências Didáticas propostas neste trabalho, não tem a pretensão de serem “receitas” como prática pedagógica; entretanto, nelas são exploradas ideias e conceitos considerados importantes para que o estudante lhes atribua sentido. De modo que, o aluno é estimulado a questionar e a agir com autonomia, sistematizando o objeto matemático por meio da construção e reconstrução – Unidade Articuladas de reconstrução Conceitual (CABRAL, 2017) – de dados, informações e argumentos.

Nesse contexto segundo Brousseau, a transposição didática permite uma visão panorâmica das transformações que o saber matemático passa desde a sua gênese acadêmica até a sua sala de aula. A esse respeito Chevallard (1991) alega:

> “Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.” (CHEVALLARD, 1991, p.39)

Vale ressaltar que o foco central deste trabalho é sequência didática, entretanto, queremos lembrar que é esta sequência, ou melhor, esta forma de trabalhar que irá afiançar o que Chevallard chamou de transposição didática. Nesse contexto, Chevallard (1991) considerar que alguns problemas podem ocorrer numa transposição didática como, por exemplo, quando o saber ensinado se distancia da sua origem, da sua produção histórica, do saber científico.

Ainda segundo Chevallard (1991), outro problema pode ocorrer quando se rompe a relação entre o saber a ser ensinado e o saber científico por meio de uma (re)contextualização modificando seu sentido original. Isto porque, aplicar uma teoria deslocada de seu território original faz com que ela perca seu significado, podendo gerar um obstáculo para a aprendizagem do aluno. De modo que o desafio didático consiste em fazer essa contextualização sem reduzir o significado das ideias matemáticas que deram origem ao saber ensinado.

Assim, é preciso destacar que os fatores/problemas que interferem no ensino e na aprendizagem de matemática têm despertado o interesse de vários pesquisadores da área de Educação Matemática. Dentre eles citamos: Chevallard (1991), Carr (1996), Nélisse (1997), Klosouski e Reali (2008), D’Ambrosio (2009), Mendes (2009), Libâneo (2013), Perrin-Glorian (2020) e Brousseau. Desse modo, vale ressaltar que as pesquisas desenvolvidas em educação matemática seguiram diferentes direções. Escolhemos discutir algumas das noções e concepções desenvolvidas na escola francesa, mais especificamente a Teoria das Situações Didáticas (TSD), sem, no entanto, abandonar as teorias adjacentes.

1.2. SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Como consideração pertinente para este trabalho (Teoria das Situações Didáticas), é necessário voltar às origens, de modo que a narrativa desse tópico aborda fundamentos, da implementação, das discussões, dos movimentos e da visão dominante que antecederam a teoria das Situações Didáticas.

Desse modo, destacamos a implementada na França aconteceu no final da década de 60 do séc. XX, surgiu em meio a estudos desenvolvidos no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática, em contraposição aos trabalhos formalistas durante o movimento da Matemática Moderna. Na época, o Investigação do Ensino de Matemática desenvolvia uma complementação na formação de professores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula.

Vale ressaltar que, um alvo das discussões no âmbito da Investigação do Ensino de Matemática se concentrava para a “[...] produção de conhecimento para controlar e produzir [...] ações sobre o ensino” (GÁLVEZ, 1996, p. 26), promovendo assim o surgimento da Teoria da Situação Didática, aceita por pesquisadores da corrente da Didática da Matemática francesa, que a adotaram como objeto de estudo para as situações didáticas, proposta por Brousseau (1996).

Nesse contexto, a visão dominante no campo da Educação era fundamentalmente cognitiva, sobretudo, devido aos estudos de Piaget (1976) e colaboradores. Dentro da concepção Piagetiana, os estudos desenvolvidos evidenciaram: 1) o papel central da ação no desenvolvimento; 2) a originalidade do pensamento matemático e 3) as etapas de seu desenvolvimento nas crianças.

Porém, é preciso destacar que para Vernaud (1981), Piaget não levou em conta de quanto o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas necessárias para lidar com elas. Segundo Vergnaud (1994), Piaget também não percebeu o infrutífero que é tentar reduzir a complexidade conceitual, progressivamente dominada pelas crianças, a algum tipo de complexidade lógica geral. Por outro lado, Vergnaud (1994) ressalta a importância da teoria de Piaget, destacando as ideias de adaptação, desequilibração e reequilibração como pedras angulares para a investigação em didática das Ciências e da Matemática.

Em consonância, Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau é denominada de construtivismo didático por ser uma proposta alternativa dentro da Psicologia Cognitiva que se baseou em alguns conceitos do construtivismo piagetiano como desequilíbrio, adaptação e acomodação, mas rejeita a ideia das fases de desenvolvimento infantil.

> Inicialmente, é muito importante entender que a teoria é uma abordagem sistêmica com foco na relação didática; não no professor, não no aluno,

> nem no próprio conteúdo de matemática, mas nos três ao mesmo tempo, o famoso triângulo didático. (PERRIN-GLORIAN, 2020, p. 17)

Assim, a narrativa que segue apresenta as principais ideias da Teoria das Situações Didáticas como subsídio para o processo de ensino e aprendizagem e, como parte complementar da sistematização metodológica considerando sequências didáticas como mecanismo de ensino, induzindo a considerar a relação que existe entre a teoria e a prática, isto porque, o professor e o aluno firmam um contrato didático, pelo qual o aluno se compromete, tendo o professor como mediador, a se apropriar de saberes que o professor propõe ao aluno na execução das atividades propostas na sequência didática, alvo e fio condutor deste trabalho.

Vale destacar que na década de 70, as situações didáticas serviam para ensinar um conhecimento sem que fosse levado em conta o papel do professor. Assim, no início da década de 70 do século XX, na Universidade de Bordeaux (França), Brousseau desenvolveu uma pesquisa científica objetivando analisar, e eventualmente criticar, modelos das situações didáticas usadas no ensino da Matemática sugerindo a construção de outras mais adequadas.

No Brasil, as obras de Brousseau passaram a ser conhecidas nos anos 90. Brousseau baseou seus estudos não apenas em teorias, como as de Piaget e Bachelard, mas também na observação e análise de sua prática docente para propor a Teoria das Situações Didática (TSD)[8]. É preciso destacar que a TSD é uma teoria de aprendizagem desenvolvida por Brousseau (1986) em contraposição aos trabalhos formalistas característicos da Matemática Moderna.

Considerando a TSD de Brousseau (1986), podemos conceituar situações didáticas como um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema didático com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou uma via de constituição.

---

[8] As principais construções desta teoria foram desenvolvidas na tese de doutorado: La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques", de 1986: situação didática, situação a-didática, contrato didático, devolução e milieu (antagonista e aliado).

Nesse contexto, vale ressaltar que o professor e o aluno firmam um contrato didático[9], pelo qual o aluno se compromete, a se apropriar de saberes que o professor propõe ao aluno na execução das atividades propostas na sequência didática. De acordo com Brousseau (1986), um sistema didático é baseado na interação entre o professor, o aluno e o saber em um meio denominado "*milieu*[10]". O conjunto das múltiplas relações entre esses três elementos – professor – aluno – saber – descreve uma situação didática. Que para Brousseau (1986).

> Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor, etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) com os quais o sujeito interage em uma situação. (BROUSSEAU, 1998, p.2)

Considerando esse prospecto, é possível que na dinâmica de sala de aula, haja momentos em que só dois desses elementos se relacionam, essas situações, no entanto, não serão denominadas de situações didática. O fim de uma situação didática corresponde a possibilidade de interação livre do aluno com o meio não didático e que iremos chamar de situações adidáticas. Nesse sentido segundo Brousseau (2008).

> Um "meio adidático" é a imagem na relação didática do meio exterior ao ensino em si, ou seja, desprovido de intenções e pressupostos didáticos. Esse meio é denominado adidático, pois considera o funcionamento normal dos conhecimentos, fora das condições didáticas (aquelas em que alguém decidiu pelo aluno que saber ele deveria aprender). (BROUSSEAU, 2008, p. 89)

Nessa perspectiva segundo Brousseau (1986), a aprendizagem ocorre quando o sistema didático sofre um desiquilíbrio, ou seja, uma mudança, um novo problema que exige novos conhecimentos. Vale ressaltar que é pelo meio (*Milieu*) que se pode provocar ações para desestabilizar o sistema didático.

Brousseau (2008), discorre sobre a situação didática no livro "Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino", neste livro encontraremos alguns questionamentos tais como: Quais são os conhecimentos

---

[9] Brousseau define contrato didático como "o conjunto de comportamentos específicos do professor esperados pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperados pelo professor" (Brousseau, 1986).

[10] Brousseau utiliza o termo *Milieu* para referir-se ao meio (ambiente ou entorno) que interage com o aluno. Esse meio produz incertezas, contradições, atitudes e emoções que levam à aprendizagem

matemáticos “necessários” para a educação e a sociedade e como realizar a sua difusão? A “transmissão” dos conhecimentos matemáticos depende das ciências da educação, da psicologia ou da própria matemática? Que lugar os conhecimentos de didática da matemática ocupam nessa difusão? Quais instituições podem garantir a coerência e a pertinência desses conhecimentos? Nesse âmbito, a TSD ambiciona responder a essas e outras perguntas.

A esse respeito, Saddo (2008) diz que “os estudos de fenômenos de ensino e aprendizagem trouxe à tona a necessidade de desenvolver modelos teóricos que pudessem caracterizar os conhecimentos e saberes”. Dessa forma, A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Brousseau (1986), teve sua origem durante o Movimento da Matemática Moderna.

Para Brousseau (2008) o objetivo dessa teoria é de promover a reflexão sobre as relações entre os conteúdos do ensino e os métodos educacionais, assim como, abordar a didática como campo de investigação. Razão pela qual, para Brousseau (2008), o ensino é concebido a partir de relações entre o sistema educacional e o aluno, vinculado à promoção de determinado conhecimento.

Nessa perspectiva, Brousseau (2018) coloca como pressuposto a aproximação do trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador, como no sentindo da busca pela solução, pela formulação de hipóteses, abonando, arquitetando modelos, conceitos, teorias e socializando os resultados. Nesse sentindo, segundo Brousseau (1986a) é necessário criar uma situação didática que favoreça o ensino e aprendizagem.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1986a, p. 8)

Nesse sentindo de acordo com Brousseau (1968), é necessário que o professor providencie situações favoráveis para que o aluno, agindo sobre o saber, construa o seu próprio conhecimento. A esse respeito, Margolinas (1993) apud Brito Menezes (2006) afirma que a relação entre professor e aluno com o saber, revela-se assimétrica, espera-se que a prática docente proporcione uma evolução do aluno frente ao saber.

Nessa perspectiva, segundo Brousseau (1996b), essa evolução é possível quando o professor propõe situações adequadas para aprendizagem. Corroborando com as ideias dos autores citados, Oliveira (2013), sinaliza que essa ferramenta pedagógica é "...um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade".

Dessa forma, Brousseau (1996a) em seu livro intitulado a "Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino" ressalta a importância da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno. A esse respeito segundo Zabala (1998) uma Sequência Didática por se tratar de "Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Considerando esse contexto, o aluno sabe que o problema tem fins didáticos e deve saber que o novo conhecimento se justifica pela lógica interna da situação didática.

Diz-se que uma situação é didática quando predomina o controle do professor sobre a atividade. Em contradição, a situação adidática ocorre quando o aluno trabalha sem a intervenção do professor, ou seja, de forma livre e autônoma. Vale ressaltar que, nesse caso, apesar da intencionalidade didática do professor sobre a tarefa, sua interferência direta na aprendizagem não ocorre.

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (BROUSSEAU, apud PAIS 2002, p.68)

Segundo Almouloud (2007), a situação adidática é a parte essencial da situação didática, onde a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas é imaginada, planejada e construída pelos professores com finalidade de proporcionar ao aluno condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar.

Nessa perspectiva, a narrativa desta vez está organizada a partir de disposições diversas que emergem da relação entre os polos do Triângulo Didático da Teoria da Situação Didática, proposta por Guy Brousseau (1996) como hipótese de ensino e aprendizagem. Nesse âmbito, discutiremos os esquemas, o meio, as formas de apresentação e interações de um determinado conteúdo matemático – ou parte dele – para os alunos, através de uma sequência didática planejada.

> O professor continua necessário na criação de situações e de idealizar projetos iniciais que introduzam problemas significativos à criança. O que se

> deseja é que o professor deixe de ser um transmissor de soluções prontas e exerça o seu papel de um mentor, estimulando a iniciativa à autonomia da pesquisa (PIAGET, 1973, p. 16, tradução nossa).

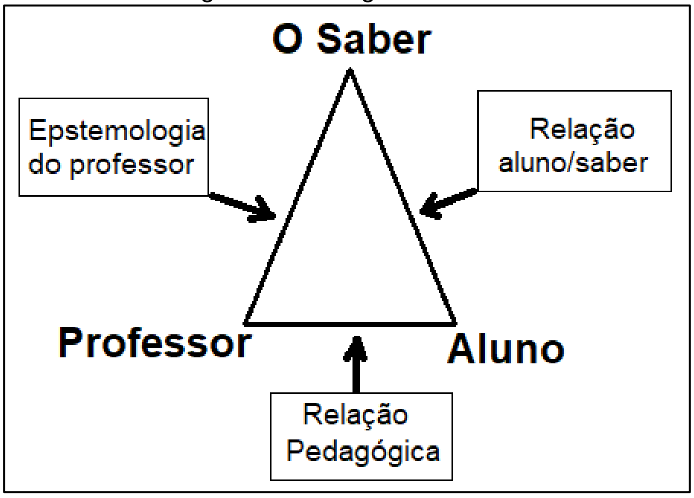
Assim, para Brousseau (1996a), situação didática é o modelo, que através da prática docente, possibilita a interação do aluno com o meio específico "*milieu*" que determina apreensão de certo conhecimento, é também um recurso que o aluno dispõe para alcançar ou conservar um estado favorável de compreensão. Em oposição a este conceito, na década de 70, as situações didáticas serviam para ensinar um conhecimento sem que fosse levado em conta o papel do professor. Contrapondo-se a esse pensamento, a situação didática para Brousseau (1996a), é utilizada para descrever os modelos que delineiam as atividades do professor e do aluno.

Dito de outra forma, a situação didática é todo contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional. Nessa perspectiva, a situação é criada para ensinar um conhecimento ou controlar a sua aquisição e, o seu desenvolvimento pode produzir um efeito de ensino. Dessa forma, a aprendizagem é alcançada pela adaptação do aluno, que assimila o meio criado intencionalmente por essa situação didática.

No contexto da situação didática, o espaço da sala de aula é caracterizado de acordo com a Teoria das Situações Didáticas pela tríade professor, aluno e o saber. Esses três elementos são os componentes principais de um sistema didático. Desse modo, a relação dessa tríade (professor-aluno-saber) constitui uma relação triangular, que é denominada por Brousseau (1996) como Triângulo das Situações Didáticas.

Assim sendo, Pommer (2013) lembra que para modelar a Teoria das Sequências Didáticas, Brousseau (1996a, b) propõe o triângulo didático (figura 1), composto por três elementos fundamentais para que a situação didática ocorra - o aluno, o professor e o saber. Esses elementos constituem uma relação dinâmica e complexa que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber (elemento não humano), que determina a forma como tais relações irão se desenvolver como mostra a Figura 1 do Triângulo Didático.

Figura 1 - Triângulo didático.



Fonte: Brousseau (1996a).

Nesse âmbito, segundo Brousseau (1996a), a Teoria da Situação Didática está associada a quatro situações didáticas fundamentais para desenvolvimento da situação didática proposta: sendo i) situação de ação, ii) situação de formulação, iii) situação de validação e iiii) situação de Institucionalização, as quais podem ser:

i) *Situação de ação* é a fase em que os alunos analisam a situação didática proposta, elaboram suas estratégias para a resolução do problema, tomam suas decisões e ao fim de suas tentativas de resolução, observam o resultado obtido. Nesse percurso da atividade proposta, desenvolve novas estratégias e tomam novas decisões (algumas intuitivas), até que o aluno seja capaz de formular uma tática, justificá-la e, finalmente, tirar suas próprias conclusões. A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual se espera que o aluno aprenda um método de resolução de problema.

ii) *Situação de formulação* entende-se que a formulação de um conhecimento corresponde a capacidade alcançada pelo aluno de retomar e ressignificar todo o processo de resolução elaborado por ele. Nesse sentido, a formulação deve envolver a comunicação entre alunos, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. Para determinar o objeto do conhecimento da comunicação, é necessário que ambos os interlocutores (alunos) cooperem no controle de um meio externo a fim de obter a formulação dos conhecimentos proposto. Este processo de comunicação é dividido em dois momentos: 1) a do representante da equipe e 2) o debate da equipe.

iii) *Situação de validação* nessa fase, a situação de validação permite distinguir um novo tipo de formulação: os componentes da equipe (alunos) discutem entre si o desafio proposto. Nessa perspectiva, um emissor (aluno) já não é um informante, mas um proponente, e o receptor (aluno), um oponente. Os dois colaboram na busca da verdade, e se esforção para vincular um conhecimento a um campo de saberes já consolidado. Durante esse processo de validação cada qual pode se posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, solicitar uma demonstração ou exigir que o outro exponha suas ideias para o componente da equipe.

iv) *Institucionalização* nas fases anteriores a institucionalização, o professor procura não intervir diretamente durante o processo, limitando-se a orientações quando julgar necessário, para evitar possíveis bloqueios. O professor reassume a ação, estabelecendo quais conhecimentos obtidos nas etapas anteriores são relevantes e quais são descartáveis, configurando o estatuto de objeto aos conhecimentos obtidos.

Brousseau (1996a) ressalta a importância dessa fase da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno. Segundo o autor, a origem de um conhecimento pode ser fruto de uma sucessão de novas perguntas e respostas. As sucessões de situações que antecede a institucionalização, ação, formulação e validação podem conjugar-se para acelerar as aprendizagens. Nesse sentindo, acrescentando a institucionalização teremos uma ordem para a construção de novos saberes.

Nessa perspectiva, a narrativa da vez e a Sequência Didática como perspectiva de produção de conhecimento e como proposta para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula da pesquisa em curso. Sabe-se que a Sequência Didática (SD), é amplamente difundida e utilizada pelos pesquisadores da Didática da Matemática francesa. Nessa perspectiva, do ponto de vista da investigação de ensino de matemática conforme Souza (2016) apud Douady (1995) é evidente a necessidade de se fazer uma aproximação científica aos problemas gerados pelo saber matemáticos que emergem da relação entre o ensino e aprendizagem, dessa forma, a aproximação deveria considerar a aula em sua globalidade, como objeto de estudo.

Para Guy Brousseau (1998). O objetivo central de estudo é a relação pedagógica professor, aluno e saber. Nesse sentido, “os objetivos educacionais são uma exigência indispensável para o trabalho docente, requerendo um posicionamento ativo do professor em sua explicitação, seja no planejamento escolar, seja no desenvolvimento das aulas" (LIBÂNEO, 2013, p. 134). Em concordância, Zabala (1998) salienta que os objetivos são pontos de partida da prática educativa, é através deles que o professor pode encaminhar o ensino tendo como foco a aprendizagem dos alunos. Nesse contexto, existe uma necessidade a qual os "educadores matemáticos precisam aproximar pesquisa e prática por meio de um sistema organizado de conhecimentos que lhes permitam ver além das especificidades de cada uma e explicar como elas funcionam juntas" (KILPATRICK, 2010, p. 5)

Nesse contexto, é cada vez mais evidente a necessidade de uma aproximação científica aos problemas gerados pelo saber matemático por manter uma relação direta entre os alunos, o professor e o conhecimento, e por ter como objetivo o ensino que priorize

Na perspectiva de Brousseau (1996a, b), alerta que o processo de transmissão na Didática da Matemática, deve se centrar nas atividades didáticas que têm como objetivo o ensino que priorize, especificamente, os saberes matemáticos. Nesse sentido, o objeto central de estudo não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando identificado, constitui-se como valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou para novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos desejáveis.

1.2.1. O milieu

A narrativa da vez lança um olhar para o *milieu*[11] e a situação adidática como dinâmica, diretriz, estratégias que auxiliam o aluno na resolução de problemas e na promoção da interação independente e autônoma. Sobre o desempenho do aluno, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008), revela a importância do funcionamento do meio. Nesse sentindo, considera que o meio que deve ser modelado, ou seja, um meio que seja ao mesmo tempo autônomo e antagônico ao aluno.

[11] A partir de agora, a não ser em títulos e gráficos, usarei o itálico para o termo *milieu*.

Diz-se autônomo porque o aluno nesse contexto de ensino e aprendizagem deve se conduzir a partir das situações didática elaborada intencionalmente pelo professor. E antagônico porque deve haver certo equilíbrio entre o que se propõe na situação didática e a capacidade de o aluno se valer dos seus construtos para solucionar o desafio que está sendo proposto. Nesse sentindo, a atividade proposta intencionalmente deve ser dosada de tal forma que; i) não deve ser difícil a ponto de o aluno não conseguir avançar, ii) não deve ser fácil a ponto de o aluno não se sentir motivado.

Como já foi dito, Brousseau (1996) denominou este meio de *milieu*, para o autor, o meio deve ser planejado e organizado pelo professor para que a aprendizagem ocorra em uma interação baseada em desequilíbrios, assimilações e acomodações conforme propôs Piaget (1976; 1990). Nesse sentindo segundo Brousseau (1996a), o *milieu* deve possibilitar a interação independente e autônoma do aluno em relação às situações propostas sem ajuda do professor.

Vale ressaltar que, o *milieu*, em uma situação didática, deve ser planejado a partir de uma situação adidática. Dentro desse processo de construção, Silva (2008) lembra que, para Brousseau, o planejamento de uma situação didática requer momentos em que o aluno se encontre sozinho diante do problema a resolver, sem a intervenção do professor. Esse aspecto caracteriza o momento adidático, onde o aluno deve se relacionar com a situação problema assumindo o comando da resolução contando apenas com seus próprios conhecimentos.

Para Silva (2008), as situações didáticas e adidáticas coexistem de forma harmônica, sem que uma altere a outra, mas uma complementando a outra. É preciso ressaltar que nesse contexto, o professor não deve intervir diretamente nas opções de solução para o problema proposto, pelo contrário, deve permitir e induzir que o aluno construa a solução de forma autônoma. Vale destacar que as situações adidáticas constituem o momento de grande potencialidade justamente por poder vir a romper as condenáveis práticas da repetição sistematicamente vivenciadas em salas de aulas.

Nessa estrutura, segundo Brousseau (1996a), a situação mais adequada para a aprendizagem ocorre quando o *milieu* oferece resistência dosada ao aluno, sendo denominado de *milieu* antagonista[12]. Dessa forma, se a distância entre os conhecimentos anteriores dos alunos e os novos conhecimentos for grande, o *milieu* será ineficaz. Isto porque, na perspectiva de diminuir a distância, o professor tende a exagerar em seu auxílio ao aluno, e a função antagonista do *milieu* desaparecerá, e se instalará um *milieu* inadequado, prejudicando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

É preciso destacar que, um *milieu* dito adequado é aquele em que a distância entre o conhecimento almejado e o anterior seja alcançável, pelo menos em parte, pelo próprio esforço do aluno, pois ele assume o papel de sujeito-pesquisador. Dessa forma, a narrativa que segue, pretende ampliar o debate da produção do ensino ideal à análise das situações comuns em sala de aula. Nessa perspectiva, é indispensável lança o olhar sobre a noção de *milieu* como conceito fundamental na teoria das situações didáticas, que valoriza não somente os conhecimentos mobilizados pelo aluno e o seu envolvimento na construção do saber matemático, mas também o trabalho do professor fio condutor deste trabalho.

Segundo Perrin-Glorian (2007), o aprimoramento da teoria a torna mais adequada para endereçar questões cada vez mais ligada ao “verdadeiro” trabalho do professor em relação ao conhecimento matemático e à aprendizagem do aluno. Para explicar essa afirmação, a autora parte da sua própria perspectiva, alguns aspectos desse conceito, elucidado pela observação histórica e formação epistemológica. Nessa perspectiva, encontramos diversos autores que debatem de forma ampla sobre essa temática. Entre esses autores destacamos a ideia e contribuições Almouloud (2007), Margolinas (2002) e Petráskova e Hasek (2012), Berthelot & Salin (1998) bem como as teorias de Brousseau, Marie-Jeanne e Perrin-Glorian (2020).

Diante da complexidade e da importância que tem o *milieu* no contexto da Teoria das Situações Didáticas (TSD), é relevante identificar qualquer movimento que vá nessa direção, mesmo porque, este trabalho considera o *milieu* como um ponto chave capaz de provocar aprendizado de um conhecimento matemático, razão pela qual iremos destacar onde tudo começou.

[12] Segundo Amouloud (2007), na TSD, o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão ao respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (AMOULOUD, 2007, p. 35).

Aqui consideramos o Congresso Internacional de Educação Matemática, CIEM (ICME, International Congress on Mathematical Education[13], de 2004, como o início, onde Perrin-Glorian (2020) participou de um grupo de discussão (DG10) em um painel no qual os palestrantes foram convidados a apresentar, a partir de suas próprias experiências, exemplos de variantes teóricas que foram tendência ou que tiveram continuidade.

Assim, Perrin-Gloria (2020), ressalta que ela experimentou mudanças em relação à Teoria de Situações Didáticas (TSD). Nesse contexto, a autora salientar que sua formação teórica vivenciou um processo de “aprimoramento de teorias para conseguir dar conta da complexidade cada vez maior da sala da aula”.

A esse respeito Perrin-Glorian (2020), aponta que pode ter ocorrido mudanças ou um prolongamento no processo de construção da teoria. Isso porque segundo a autora, as primeiras versões da Teoria das Situações Didáticas demonstravam “situações adidáticas” sem levar “verdadeiramente” em conta a participação do professor em sala de aula. Sobre esse aspecto, Perrin-Glorian (2020) ressalta que Brousseau era professor e sua teoria não poderia ignorar por muito tempo a importância da participação do professor em sala de aula.

Assim, a partir do conceito de institucionalização e de devolução, o professor passou a fazer parte da teoria. Nessa perspectiva segundo Perrin-Glorian (2020), Guy Brousseau vivência e desenvolve “construções teóricas cada vez mais precisas e eficientes”, a maioria delas existentes implicitamente ou explicitamente, entretanto, “nem sempre visíveis o suficiente para os outros pesquisadores”. Segundo a autora, é o caso da noção de *milieu*, considerado fundamental por todos os pesquisadores que se referem a essa Teoria.

Para Perrin-Glorian (2020) não há apenas três, mas quatro sistemas em interação. Assim, o *milieu* se distingue dos atores, professores ou alunos, ou seja, os atores podem agir no *milieu* ou receber informação do *milieu*. Vale ressaltar que o *milieu* não é um meio natural, é organizado de modo a provocar um conhecimento específico por adaptação.

---

[13] Referência da publicação original: Marie-Jeanne Perrin-Glorian. From producing optimal teaching to analysing usual classroom situ-ations. Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: the notion of milieu. The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008), Mar 2008, Rome, Italy. résuméparu (abstract) page 308. hal- 01660872.

Segundo Perrin-Glorian (2020), “uma perspectiva epistemológica não é suficiente em didática”. Para a autora, deve-se levar em conta que há também condições em que o aluno pode entender o problema e processar uma solução a partir de seu conhecimento prévio. Sobre esse aspecto, Perrin-Glorian (2020) avalia que “tais *milieus* são muito difíceis de encontrar, mas de uma perspectiva didática a mera busca para encontrá-los é muito produtiva”.

Nessa perspectiva, Perrin-Glorian (2020) ressalta o trabalho de Berthelot & Salin (1998) que exploram tais *milieus* para ensinar geometria como modelo de espaço. Assim como, essa autora também experimenta desenho geométrico com ferramentas comuns – régua, compasso, esquadro... – como *milieu* para aprender geometria na escola primária. Ainda nesse contexto, ela observa que mesmo levando em consideração a perspectiva cognitiva, ainda assim não é suficiente para uma situação de sala de aula. Para a autora, devemos considerar também programa de ensino, tempo disponível etc.

Por outro lado, Perrin-Glorian (2020) considera que a estrutura do *milieu* explica “como o aluno pode aprender a partir de sua ação sobre o *milieu* e como o professor pode regular essa ação e esse aprendizado”. Assim como as três dialéticas – ação, formulação e validação – estão integradas uma dentro da outra, bem como os diferentes níveis de *milieu* estão integrados um dentro do outro, assim também, uma situação em um nível se transforma em um *milieu* no nível seguinte. Nesse sentindo, a ação em um nível superior pressupõe reflexo no nível anterior.

Em consonância Petráskova e Hasek (2012) explica que na estrutura vertical, os diferentes níveis de *milieu* estão entrelaçados no sentido de que a situação em um nível se torna um *milieu* para a situação no nível mais acima. A ação em um nível superior supõe uma reflexão sobre o nível anterior. Perrin-Glorian (2020) ressalta que tais níveis não devem ser vistos como sucessivos, mas simultâneos: eles correspondem às posições que o professor ou o aluno assumem.

Nesse sentindo, Perrin-Glorian (2020) elucida os diferentes níveis de *milieu* por meio de um quadro proposto por Margolinas em 1993, e requisitado por muitos pesquisadores desde então. Contudo, Perrin-Glorian (2020) preenche apenas as caixas identificadas por Brousseau em 1986, como mostra o Quadro 1 dos diferentes níveis de *milieu*.

Quadro 1 - Diferentes níveis de milieu.

M1 didatic milieu	E1 universal subject	P1 Teacher preparing the class	S1 Metadidatica Situation
M0 Leaming milieu	E0 Student	P0 Teacher	S0 Didatic Situation
M-1 reference milieu	E-1 epistemic subject		S-1 Learming Situation
M-2 objective milieu	E-2 acting subjet		S-2 Reference Situation
M-3 material milieu	E-3 objetive actors		S-3 Objective Situation
Tradução independente			
M1 milieu didático	E1 sujeito universal	P1 professor preparando a aula	S1 Situação
M0 milieu de aprendizagem	E0 aluno	P0 professor	S0 Situação didática
M-1 milieu de referência	E-1 sujeito epistêmico		S-1 Situação de aprendizagem
M-2 milieu objetivo	E-2 sujeito da ação		S-2 Situação de referência
M-3 milieu material	E-3 atores objetivos		S-3 Situação objetiva

Fonte: Margolinas (1993), tradução de Perrin-Glorian (2020).

Perrin-Glorian (2020) aponta que no nível M-3, não há intenção didática, dessa forma, atores objetivos atuam em um material, segundo a autora, essa ação será o objeto da problemática *da situação* S-2. Nesse contexto, segundo Perrin-Glorian (2020), o E-2 é o sujeito da ação com seu conhecimento prévio, de tal forma que ele precisa entender as regras do jogo – possível afirmações e afirmação final a ser alcançada - e jogar. Para Perrin-Glorian (2020) o E-1 é o sujeito epistêmico refletindo sobre sua ação e aprendizagem, segundo a autora, ele tem que elaborar uma estratégia para ganhar.

Em conformidade com Perrin-Glorian, Almouloud (2007) sinaliza que nessa estruturação estão identificadas as posições onde M correspondendo ao milieu, E correspondendo ao aluno e P correspondendo ao professor. Nesse contexto segundo Almouloud (2007), o professor antes de entrar no nível S0, faz a devolução do problema para o aluno, desencadeando o nível S-3 que corresponde a situação objetiva.

Nessa perspectiva, Almouloud (2007) ressalta que a escolha de uma situação didática deve levar em conta, se não todas, pelo menos as possíveis posições de um sujeito na relação didática. Nesse sentindo, autor destaca que é imprescindível identificar essas posições em relação a outras, assim como suas articulações. Nesse contexto, Almouloud (2007) destaca que a posição de um “agente” num jogo adidático é diferente da posição de um aluno submetido às intenções do professor. Para o autor, o professor é o organizador dos jogos do aluno com o *milieu*, pois ele escolhe as situações adidáticas mais adequadas com as quais os alunos devem interagir para encaminhar o processo de aprendizagem.

Em complemento as ideias de Almouloud (2007), Perrin-Glorian (2020) ressalta que o jogo pode ser individual ou com vários alunos, cooperando – por exemplo, em uma *situação* ou formulação – ou jogando um contra o outro. Assim segundo a autora, algumas interações sociais são consideradas no meio e no modelo de *situações* didáticas, que têm um efeito sobre o conhecimento envolvido para resolver o problema (ou ganhar).

1.3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E SUA ESTRUTURAÇÃO

Nesse momento, apresenta-se a estrutura da Sequência Didática para o Ensino de Progressão Aritmética baseada no modelo proposto por Cabral (2017) cuja obra intitulada Sequências Didáticas: Estrutura e elaboração que tem o objetivo de ensinar conteúdos curriculares da disciplina Matemática no ensino Médio e no ensino Fundamental. Segundo o autor, a estrutura da sequência didática da qual estamos falando é composta por Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), onde cada uma trata de um ou mais tópicos relacionados ao tema em questão.

Para o autor a primeira dessas unidades de "unidade articulável de reconstrução conceitual de primeira geração" - UARC-1. Segundo Cabral (2017), esse é um ponto de partida que não "necessita ser exatamente um problema". No entanto, a primeira escolha deve ser consciente e profissional, de modo que o aluno perceba e explore regularidades, e consiga estabelecer generalizações a partir das intervenções. Dessa forma a primeira das UARC's não é, e não pode ser uma escolha aleatória. Segundo Cabral (2017) essa escolha depende de vários fatores[14].

A elaboração da próxima Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual denominada UARC-2 deve estar condicionada a primeira escolha, ou melhor, a UARC-1. Segundo Cabral (2017), "o mesmo critério é adotado para a definição das demais UARC'S de gerações superiores". Nesse sentido, à medida que as UARC's

[14] Para Cabral (2017), esta primeira escolha depende de uma série de variáveis. O tempo disponível, a experiência didática e conceitual do professor, o conhecimento que ele tem sobre o que o que os alunos dominam sobre certos conhecimentos prévios, os objetivos de aprendizagem, etc.

são evocadas, o conceito a ser ensinado é “reconstruído/revestido”, o que em tese, espera-se que a cada UARC requisitada, tenha-se potencializada a capacidade de reconstrução conceitual, de tal modo que, a reconstrução pretendida é atingida pelo aluno.

Cabral (2017) descreve sete categorias estruturantes no modelo das UARC’S que materializam o texto de uma Sequência Didáticas sendo seis intervenções estruturantes escritas, sendo três Pré-formal; Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), e três intervenções escritas Formal; Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restrita (IAr) e, Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAap) e Intervenções orais a saber; Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO).

1.3.1. Sobre as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual

A *Intervenção Inicial (Ii)* é a primeira intervenção estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual orquestrada pelo professor com propósito bem definidos do começo ao fim. É também um ponto chave para que tudo ocorra bem durante as ações, isto porque, corresponde a uma das categorias do discurso dialógico-didático que serve de “aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito” (Cabral, 2017, p. 40). Vale ressaltar que, essa Intervenção define a natureza das outras intervenções, são ações eleitas intencionalmente pelo professor com a intenção de promover segundo os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural (Vygotsky) as chamadas Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Dessa forma, espera-se que o aprendiz avançar de um Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) para um Nível de Desenvolvimento Efetivo (NDE).

A *Intervenção Reflexiva (Ir)* “Aqui o aluno é estimulado/orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências”, Cabral (2017). Nesse ponto, é também papel do professor estimular o aluno, nesse contexto, as ações interativas e dirigidas pelo professor se materializem através de questionamentos a um ou mais aspectos de reconstrução conceitual do objeto. Com base em Cabral (2017), “o aluno é estimulado durante todo o tempo” das ações interativas a refletir sobre “o que está fazendo e as consequências de esse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve". Segundo o autor, "tudo passa por uma perspectiva de planejamento e de identificação, por parte do professor". Nesse ponto entendemos que no planejamento das ações interativas há um destaque para a organização dos conceitos circunscritos que de forma associada promovam e potencializam a (re)descoberta do conceito objeto de reconstrução.

A *Intervenção Exploratória (Ie)* Nesse ponto, o objetivo é aprofundar o olhar dos alunos a respeito das respostas alcançadas por cada e um e por todos a partir das Intervenções Reflexivas (Ir). Para Cabral (2017), as respostas "não serão dadas por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos". Nesse contexto, os alunos são convocados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e fazerem observações durante o processo. É nesse contexto segundo o autor, a utilização colaborativa das intervenções reflexivas e intervenções exploratórias – Ir e Ie – estimula o aluno à percepção de "regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual". O autor declara que, "é justamente a percepção dessas regularidades que permitem aos alunos, ainda que intuitivamente, numa lógica fundamentalmente empírica, serem convencidos de certas verdades do saber matemático".

Vale destacar que as ações combinadas das Intervenções Reflexivas e Exploratórias, torna favorável "um cenário didático estimulante de intervenções estruturantes pré-formais" Cabral (2017). Nesse contexto segundo o autor, a partir das generalizações empírica-intuitiva dos alunos fomentadas pelas Intervenções Estruturantes Reflexivas e Intervenções Exploratórias o professor, se apropria dessas verdades "empírico-intuitivas" sugeridas pelos alunos e, a partir delas, enuncia a Intervenção formalizante (If).

Intervenção formalizante (If) Nesse ponto, o professor reelabora as generalizações empírico-intuitivas dos alunos e, a partir das principais afirmações em torno dos objetos o professor que aplicou a sequência didática, reorganiza tais proposições de modo formal e disponibilizar a todos os alunos imprimindo o caráter disciplinar formal da Matemática. Desse modo, as percepções dos alunos são materializadas pelo professor que aplicou a sequência didática com uma linguagem mais abstrata e adequado à natureza da matemática. Após as Intervenções Formalizantes (If) o professor pode inserir as Intervenções Avaliativas Restritas (IAr) cuja finalidade é de se “estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução conceitual”.

Intervenções Avaliativas Restritivas (IAr) Nesse ponto, logo após as intervenções anteriores do conceito objeto de reconstrução. Segundo Cabral (2017), essa Intervenção é o primeiro parâmetro de aferição e o professor é o responsável de averiguar as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, quais sejam: qual o significado e o sentindo do objeto matemático em estudo? E como se justificam e operam as propriedades e operações decorrentes?

Intervenções Avaliativas Aplicativas (IAap) Nesse ponto, temos um nível mais elevado de avaliação do processo de reconstrução conceitual e, espera-se que o aluno seja capaz de mobilizar as noções associadas as propriedades operacionais do objeto de reconstrução conceitual. Nesse contexto, o objetivo das Intervenções Avaliativas Aplicativa segundo o autor, é aferir a capacidade dos alunos com relação a Resolução de Problemas aplicado em diversos contexto reais e/ou abstratos adequados ao nível de ensino.

Assim, de acordo com o que vimos até aqui, vejamos um quadro esclarecedor que relaciona as situações didáticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e as Intervenções na estrutura da Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) fios condutores deste trabalho conforme Quadro 2 sobre aspectos que relacionam a TSD a UARC.

Quadro 2 - Aspectos que relacionam a TSD a UARC

Teoria das Situações Didáticas	Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual
Situação de Ação (Sa)	Intervenção Inicial (Ii)
Situação de Formulação (Sf)	Intervenção Reflexiva (Ir)
Situação de Validação (Sv)	Intervenção Exploratória (Ie)
Situação de Institucionalização (Si)	Intervenção Formalizante (If)

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A esse respeito, considera-se que os alunos deverão passar por todas as situações didáticas que compõe o esquema da TSD em consonância com as intervenções propostas na Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) segundo modelo de Cabral (2017), com a finalidade de validar ou refutar esses esquemas constituídos durante a aplicação da sequência didática tendo como propósito final a formalização do conhecimento pelo professor que aplicou a SD, ou seja, apresentar aos alunos o registro formal segundo as fórmulas ou regras com adequado rigor matemático.

1.4. OLHARES SOBRE O PROCESSO DE VALIDAÇÃO

Entendemos que a validação de um método é um procedimento contínuo que inicia no planejamento da estratégia e continua ao longo de todas as manifestações da investigação. Assim, a validação deve garantir, por meio de estudos experimentais, que o método atenda as exigências do processo de pesquisa.

Dessa forma, especialmente nos estudos científicos em Educação, os métodos e técnicas de pesquisa qualitativa como, a observação, estudo de caso, pesquisa ação, pesquisa de desenvolvimento, experimentos de ensino, pesquisa histórica, pesquisa etnográfica, pesquisa narrativa, e entrevistas permitem ao pesquisador descobrir como algo efetivamente ocorre.

Dessa maneira, o método para coletar os dados em uma pesquisa, deve ser planejado para que os procedimentos possam garantir indicadores de confiabilidade. Assim sendo, a decisão dependerá do desenho da pesquisa e da seleção de instrumentos de medidas adequados e precisos (ALEXANDRE, COLUCI, 2011).

Por outro lado, validar um instrumento de pesquisa subsiste etapas previamente elaboradas para que as propriedades psicométricas possam ser efetivadas (COLUCI, ALEXANDRE; MILANI, 2015). Além do mais, a confiabilidade é a capacidade de um instrumento medir fielmente um fenômeno. Por outro lado, a validade é a capacidade de um instrumento medir com precisão o fenômeno a ser estudado (PILLATTI; PEDROSO; GUTIERRES, 2010).

Assim sendo, procuramos identificar por meio da observação, realização de experimentos, questionamento, formulação de hipótese, aceitação ou rejeição das hipóteses e pôr fim a conclusão os indícios de aprendizagem durante todo o processo de pesquisa que iniciou com a elaboração da avaliação diagnóstica até a aplicação da Sequência Didática que versa sobre Progressão Aritmética. Desse modo, buscamos descobrir os indicativos de indícios de aprendizagens manifestados pelos alunos, sejam eles, verbais ou escritos, levando prioritariamente em conta o objetivo a ser alcançado em cada uma das atividades propostas da SD.

Para tanto, assumiremos neste trabalho a proposta metodológica de Goés (2000), denominada Análise Microgenética, em diálogo com as contribuições de Mortimer e Scott (2002), no que tange a Análise do Discurso. Assim, as gravações dos vídeos, áudios e as atividades respondidas pelos alunos foram os instrumentos submetidos a análise do discurso nesta pesquisa.

1.4.1. A Microgenética e a Análise do Discurso

É consenso entre os estudiosos que a microgenética em consonância com a análise do discurso consolida as potencialidades na área da educação considerando o processo interativo do ensino e aprendizagem (MOTA, 2019; GONÇALVES, 2019; SILVA, 2020). Desse modo, apresentamos algumas reflexões que julgamos necessária para fundamentar a adoção da microgenética e análise do discurso neste trabalho. Assim, baseado nas proposições e pesquisas de Vygotsky, Wertsch (1985), define, a análise microgenética como aquela que abarca o acompanhamento minucioso da concepção de um processo, considerando as manifestações dos sujeitos, as relações interpessoais, e um curto espaço de tempo.

Considerando a microgenética segundo Weltsch (1998a), é parte fundamental da pesquisa sociocultural que procura "[...] entender a relação entre o funcionamento metal humano, por um lado, e o contexto cultural, histórico e institucional, por outro lado". Oferece ainda uma interpretação analítica que divide as pesquisas em duas categorias; uma prioriza a análise do funcionamento mental nos fenômenos socioculturais, a outra analisa os processos psicológicos ou outros conduzidos pelos indivíduos como forma de entendimento dos fenômenos socioculturais. Em concordância, Goés (2000), refere-se à abordagem metodológica microgenética como "análise microgenética" e conceitua como:

> [...] uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 09)

Segundo Goés (2000) "a análise microgenética pode ser o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante". Nesse contexto, e com intento de identificar os indícios de aprendizagem, Goés (2000) destaca, a partir de vídeo gravação e posterior transcrição das falas dos alunos participantes afim de capitar os detalhes das ações, interações e do cenário sociocultural, para fins de análise das relações que se estabelecem dos microeventos em condições macrossociais. Sobre a análise minuciosa a qual Goés (2000) se refere, trata-se de um estudo que considera trechos dos eventos das ações de ensino e aprendizagem.

Nesse sentindo, esses trechos são objetos de estudos desmembrados em microunidades que carregam informações fundamentais que remonta a compreensão do objeto de estudo. Para a autora, essa análise não é micro porque se refere a curta duração dos eventos, mas sobretudo, por ser orientada para minúcias indiciais. Ainda segundo Goés (2000, p. 14), Vygotsky propõe uma análise por unidades, contrapondo-se a análise por elementos. Desse modo, define a unidade como aquela instância de recorte que conserva as propriedades do todo que se pretende investigar. O autor justifica sua escolha no fato de que a unidade é o componente vivo do todo.

Assim, com base nessas considerações, pretendemos investigar a partir das interações verbais dialógicas entre os pares aluno-aluno, professor-aluno o nível de compreensão, empírico e teórico do aluno sobre o objeto matemático ensinado. Dessa forma, avaliarei as potencialidades de uma sequência didática voltada para o ensino de Progressão Aritmética a partir dos recortes dos trechos registrados em áudios durante a aplicação da SD. Para tanto, articula-se a estrutura analítica proposta por Mortimer e Scott (2002) para analisar as interações verbais e a produção de significados que emergem em salas de aula.

A análise do discurso segundo Mortimer e Scott (2002) é de modo geral, o produto resultante da tentativa de criar uma linguagem que pudesse descrever o gênero do discurso (BAKHTIN, 1986, apud MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 284). Para Bakhtin (1953/1986, p 60 apud MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 284), desse modo, “cada esfera na qual a linguagem é usada desenvolve seus tipos relativamente estáveis de enunciados. A isso nós podemos chamar de gênero de discurso”. Neste sentido, Mortimer e Scott (2002), ressaltam:

> Os significados são vistos como polissêmicos e polifônicos, criados na interação social e então internalizados pelos indivíduos. Além disso, o processo de aprendizagem não é visto como substituição das velhas concepções, que o indivíduo já possui antes do processo de ensino, pelos novos conceitos científicos, mas como a negociação de novos significados

> num espaço comunicativo no qual há o encontro entre diferentes perspectivas culturais, num processo de crescimento mútuo. As interações discursivas são consideradas como constituintes do processo de construção de significados. (*Ibidem*, 2002, p. 284)

Para Mortimer e Scott (2002), pouco é conhecido como os professores dão suporte no processo de construção de significados pelos alunos em sala de aula, assim também, como são produzidas as interações e como os variados tipos de discurso podem auxiliar a aprendizagem dos alunos. Nesse sentindo, Mortimer e Scott (2002) apresentam uma estrutura analítica baseada em cinco aspectos inter-relacionados que focalizam o papel do professor e são organizadas em termos de focos do ensino – intenções do professor e conteúdo; abordagem – abordagem comunicativa; e ações – padrões de interação e intervenção do professor organizado no quadro abaixo apresentado no Quadro e sobre aspectos da Análise do Discurso.

Quadro 3 - Aspectos da Análise do Discurso.

Focos do ensino	**Intenções do professor**	-Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente; -Explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos; -Disponibilizar as ideias científicas; -Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe. -Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade pelo uso dessas ideias; -Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.
	Conteúdo	**Descrição:** envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. **Explicação:** envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. **Generalização:** envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	**Interativo/dialógico:** professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. **Não-interativo/dialógico:** professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. **Interativo/de autoridade:** professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. **Não-interativo/de autoridade:** professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	**Padrões de interação**	**Tríade I-R-A:** Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor. **Cadeias não triádicas**: exemplo I-R-P-R-P.… ou I-R-F-R-F.… onde o P significa uma ação discursiva que permite o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.

	Intervenções do professor	- Introduz um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados; - Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante; - Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado; - Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe. - Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados. **-** Sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

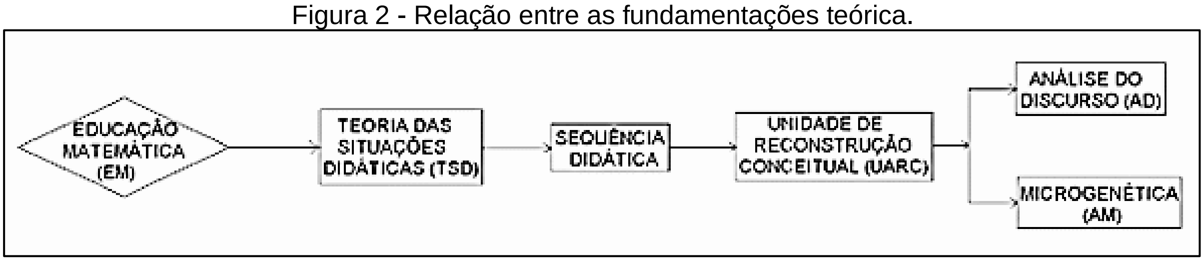
Fonte: Silva (2020) adaptado de Mortimer e Scott (2002).

Ainda segundo os autores, o conceito de abordagem comunicativa, ocupa o centro da estrutura analítica descrita anteriormente. Desse modo, fornece o olhar sobre como o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por intermédio das inúmeras intervenções pedagógicas proporcionando diferentes padrões de interações. Nesse contexto, Mortimer e Scott (2002) identificaram quatro classes de abordagem comunicativa, com base na caracterização do discurso entre alunos ou professor e alunos. Nessa perspectiva, segundo duas dimensões; o discurso dialógico ou de autoridade e discurso interativo ou não interativo.

Nesse contexto, para Mortimer e Scott (2002) a análise do discurso é uma ferramenta que estuda a forma como os professores podem guiar as interações em sala de aula com finalidade de construir significados. Desse modo, é possível acrescentar maior intencionalidade às intervenções do professor a fim de conduzir o aluno à apreensão do objeto matemático.

Em resumo, fazemos uma síntese demostrando as ligações entre as teorias abordada nesse trabalho conforme Figura 2 sobre a relação entre as fundamentações teóricas.

Figura 2 - Relação entre as fundamentações teórica.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

1.5. O PERCURSO METODOLÓGICO

Os procedimentos metodológicos correspondem a todo conjunto de tomada de decisões e ações quanto à escolha das técnicas de pesquisa e método para o desenvolvimento de um trabalho científico. Por isso também chamado de Percurso Metodológico. Desse modo, a narrativa que se destaca nesse ponto detalha o percurso metodológico deste trabalho.

Assim, com o problema de pesquisa definido: Em que medida uma determinada sequência didática, elaborada a partir da estrutura da SD segundo Cabral (2017) contribui e potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Progressão Aritmética?

Nessa perspectiva, em conformidade com o orientador, foi delineado, aceito, e analisado o aporte teórico desse trabalho. Além disso, foi realizada uma revisão da literatura que versam sobre SD em matemática especialmente em P.A., duas pesquisas de campo, a primeira com os professores de matemática do ensino médio e a outra com alunos egressos do 1º ano do ensino médio. Então, embasados pela TSD, SD e UARC – definidas no aporte teórico – realizamos um teste para identificar os conhecimentos prévio. Assim também, a elaboração e aplicação da SD segundo proposto Cabral (2017), além disso, os áudios serão gravados e submetemos a microgenética e a análise do discurso.

Sobre a revisão da literatura contendo Teses, Dissertações, artigos e livros didáticos, por conseguinte, foi realizado um fichamento bibliográfico identificando os pontos principais a nível de documentos como o título, resumo, palavra-chave e ano de publicação – levando em conta os mais recentes – priorizamos os trabalhos que tratavam dos estudos experimentais em SD em matemática especialmente as que mencionam o ensino de PA. Assim, após análise de cada um desses trabalhos, foi realizado um resumo informativo da finalidade, metodologia, resultados e conclusões dos trabalhos analisados visando o trabalho em questão.

No âmbito da pesquisa de campo, foi realizado um estudo preliminar para que pudéssemos tomar decisões como, por exemplo, que tipo de pesquisa seria a mais adequada para esse trabalho, qual o tipo de procedimento de coleta nos daria uma maior amplitude em termos quantitativos de sujeitos que participariam da pesquisa. Então, elegemos como procedimento de coleta um formulário socioeducacional no google forms destinados aos alunos egressos do 1º ano, levando em conta a nossa realidade escolar – escola pública de periferia – e as dificuldades levantadas na revisão da literatura para o ensino de PA.

Sobre a pesquisa de campo com professores de matemática que atuam no ensino médio, em sintonia com o orientador, foi elaborado um questionário para verificar suas percepções sobre as dificuldades do ensino de PA, além das dificuldades dos alunos com relação a aprendizagem da PA, sua formação continuada, caracterização do material e abordagem da PA, assim também, a metodologia adotada e o número de aula utilizada para o ensino de PA. Desse modo, o alcance foi de 53 professores que responderam o questionário socioeducacional.

Sobre a pesquisa de campo, em conformidade com o orientador, elaboramos um questionário de pesquisa, que depois foi aplicado a 73 alunos do ensino médio com objetivo de identificar a percepção dos alunos com relação ao ensino de matemática, as dificuldades de aprendizagem em matemática, em especial ao ensino de P.A. que versam na revisão da literatura levando em conta a realidade in lócus. No entanto, somente 60 alunos responderam. Posteriormente, será realizado o cruzamento de dados sobre as percepções de alunos e professores com objetivo de elaborar um produto educacional direcionado para as necessidades educacionais diagnosticadas.

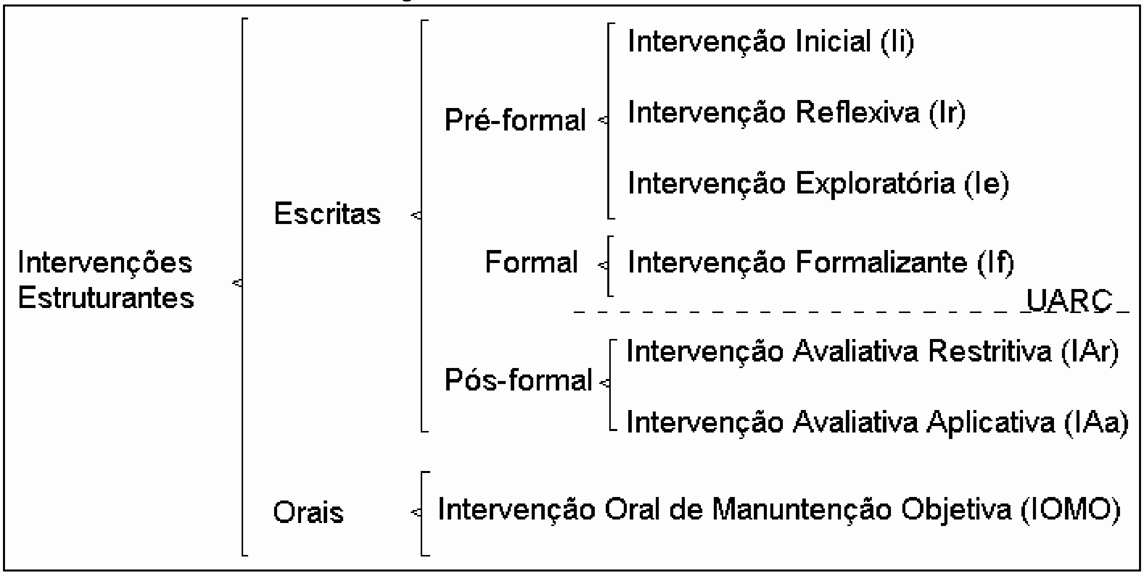
Sobre os conhecimentos prévios, estes são os saberes ou informações que temos guardados em nossas mentes que podemos acionar e ou recuperar quando nós precisamos. Desse modo, e por considerar o aporte teórico deste trabalho adicionado a estrutura da UARC, avaliamos que a influência dos conhecimentos prévios no ensino de conceito é fundamental. Por essa razão, considerando a habilidade (EF03MA10)[15] da BNCC, elaboramos um teste para diagnosticas os conhecimentos prévios necessários para desenvolver essa habilidade nos 38 alunos de uma sala do ensino médio que irão participar da pesquisa.

Sobre a elaboração da SD, Cabral (2017) manifesta que a elaboração de uma SD estruturada como UARC deve ser movida por uma preocupação com a compreensão e visão científica e tecnológica atribuída ao sujeito epistêmico, o professor, sujeito científico investido da capacidade de posição de mediador do

[15] (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes, (BNCC).

saber. Desse modo, tendo em vista a superação dos obstáculos identificados durante as análises prévias foi elaborado uma SD para o ensino de P.A. com intencionalidades educacionais composta de 5 (cinco) UARCs segundo estrutura da SD proposta por Cabral (2017) que norteou todo o processo de ensino e aprendizagem apresentado em síntese na Figura 3 sobre a estrutura das UARCs.

Figura 3 – Estrutura das UARCs.



Fonte: Cabral (2017).

Segundo Silva; Chaquiam; Cabral (2022) [...] esse conjunto de intervenções escritas até a formalização são transversalizadas pelas manifestações orais do professor, denominadas de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (IOMO), que perpassa pelas intervenções pré-formal e formal.

Além disso, este modelo está abalizado nos pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural (RÊGO, 1995), no conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky e nas noções de Análise Microgenética na investigação da construção de conhecimentos nas interações verbais (GOÉS, 2000). De outro lado, em cima de cada UARC foi realizado uma análise do tempo gasto para executá-las levando em conta a estrutura de cada uma, a dificuldade de resolução, e o tempo para discursão e reflexão até completar totalmente a UARC.

Sobre a aplicação da SD, os alunos foram orientados – contrato didático explicito – a respeito do material que cada um iria receber, dos objetivos em cada UARC além da metodologia, do tempo usado para cada atividade proposta, como também a devolução de um material com as respostas das atividades por grupo.

Durante o percurso dessa dinâmica, cada grupo elegeu o aluno que iria passar a limpo as respostas. Ainda sobre a aplicação da SD Cabral (2017) argumenta que:

> A ideia é que o cenário didático seja construído adotando-se a Intervenção Inicial como uma espécie de "caixa de pandora" aplicada ao ato-processo de ensinar-aprender. Uma vez aberta pela motivação hipotética da curiosidade – cerne da construção de conhecimentos – traz como consequência uma série de desdobramentos relacionais que culminam com a redescoberta, por parte do aluno, de alguma verdade matemática. (Ibidem, 2017, p. 46)

Dessa maneira, considerando todos as fases da situação didática da TSD em conformidade com todas as Intervenções propostas nas UARCs. Ainda sobre a aplicação da SD, a turma será dividida em 9 (nove) grupos, sendo 7 (sete) grupos de 4 (quatro) alunos e 2 (dois) grupos de 5 (cinco) alunos. Propositalmente os grupos não será formado espontaneamente de modo que, todos os grupos formados terão pelo menos um aluno com competência e habilidade para desenvolver atividade em matemática.

Sobre os recursos e estratégia, conto com um dispositivo de gravação vídeo e de áudio, celular dos próprios alunos. Disponho também de ajuda de uma colega de trabalho para ajudar nos registros de fotos e gravação de modo geral.

Sobre analisar os dados qualitativos, segundo André e Lüdke (1986), significa "trabalhar" todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos das observações, as transcrições de entrevistas, assim também, os áudios e vídeos, do mesmo modo, as análises de documentos e as demais informações disponíveis.

Desse modo, os dados levantados passaram por tratamento conforme a análise da microgenética. Então cada fala será categorizada. Assim, Segundo Gomes (2004): "A palavra categoria, em geral, se refere a um conceito que abrange elementos ou aspectos com características comuns ou que se relacionam entre si". Contudo, André e Lüdke (1986) chama atenção que:

> A categorização, por si mesma, não esgota a análise. É preciso que o pesquisador vá além, ultrapasse a mera descrição, buscando realmente acrescentar algo à discussão já existente sobre o assunto focalizado. Para isso ele terá que fazer um esforço de abstração, ultrapassando os dados, tentando estabelecer conexões e relações que possibilitem a proposição de novas explicações e interpretações (p.49).

Em consonância, Mortimer e Scott (2002) apresentaram uma estrutura analítica útil tanto para a análise como para o planejamento do ensino. Os autores acreditam ser a fala e o discurso verbal o centro das diferentes abordagens comunicativas, embora não sejam as únicas formas de comunicação.

Nessa perspectiva, segundo os autores, quanto maior for o entendimento dos discursos verbais, maiores serão as possibilidades de uma prática pedagógica reflexiva cujo objetivo é melhor atender as demandas do processo de ensino e aprendizagem.

Assim, não apenas as interações verbais do grupo, e ainda registros escritos de argumentação em linguagem matemática e língua materna, como também os trechos de áudios individual por aluno serão submetidos a análise do discurso a fim de percebemos indícios de manifestações de aprendizagem pelo aluno com objetivo de verificar quais níveis epistemológicos de aprendizagem foram manifestados nos padrões da comunicação dos alunos.

2. SOBRE O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Nos últimos anos, tem havido uma quantidade crescente de literatura sobre o processo de construção e aplicação da sequência didática como prática que promove em níveis a aprendizagem. Nessa perspectiva iremos nos debruçar e analisar alguns pontos de vistas de pesquisadores sobre Sequência Didática como ferramenta potencializadora para prática do ensino, em especial, do ensino de Progressão Aritmética. A proposta dos livros didáticos nessa perspectiva, a opinião de professores de matemática do ensino médio sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando se leva em conta a promoção de interesses e o envolvimento do aluno durante o processo de ensino e aprendizagem de Progressão Aritmética.

2.1. O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA COM EMPIRIAIS

A narrativa neste tópico, identifica e ressalta, através de um levantamento bibliográfico trabalhos científicos de importância a formação acadêmica e cidadã, desenvolvidos em ensino e aprendizagem de progressão aritmética que estejam diretamente relacionados com o tema desta pesquisa. A seguir apresentamos uma revisão da literatura no que tange trabalhos que abordam situações experimentais.

2.1.1. Trabalho 1 – Mota (2019)

O trabalho de Natanael de Oliveira Mota, tem por objetivo geral, elaborar um projeto cujas atividades serão desenvolvidas por meio de uma Sequência Didática, com turmas de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio que, estejam submetidos ao método tradicional da aprendizagem para o referido assunto. Nesse contexto, o projeto foi aplicado a um grupo de 18 alunos.

Considerando esse contexto, Mota (2019), parte do pressuposto de que as dificuldades de aprendizagem em matemática que os alunos têm, estão intimamente ligadas ao método de ensino e aprendizagem, pois segundo Mota (2019), rotineiramente encontramos metodologias tradicionais.

Nesse sentindo, Mota (2019) ressalta as dificuldades de aprendizagem da progressão aritmética (PA) dos alunos egressos, extraídas a partir da coleta de dados de um levantamento bibliográfico e uma pesquisa de campo. Essa última foi realizada através de um questionário, contendo 21 questões de pesquisa além da observação em lócus, em uma escola pública do ensino fundamental e médio na cidade de Belém no estado do Pará com um grupo de 100 (cem) alunos.

Para Mota (2019) o questionário teve relevância na concretização do seu trabalho. De modo que, possibilitou a investigação do fenômeno a qual a pesquisa se destina. Sobre os dados coletados no questionário de pesquisa de Mota (2019), iremos especificamente nos deter no ensino e aprendizagem dos alunos egressos em Progressão Aritmética (PA).

Segundo Mota (2019), 85% dos alunos entrevistados disseram que o professor começou o assunto de PA pela definição seguido de exemplos e exercícios, 10% dos alunos disseram que o professor começou com uma situação-problema para depois introduzir o assunto, 2% dos alunos afirmaram que o professor criou um modelo para a situação em seguida desenvolveu os conceitos, outros 3% dos alunos disseram que o professor iniciou o assunto de PA com jogos para depois sistematizar os conceitos.

Mota (2019) ressalta que, a Progressão Aritmética é uma sequência numérica que, não necessita que os professores iniciem pela definição, cuja comprovação desse fato está no quadro (6) do seu trabalho que, apontam 85% dos alunos entrevistados disseram que o professor começa por definição seguido de exemplos.

Para Mota (2019), poderíamos introduzir o assunto de PA fazendo uso de várias situações problemas, sem ao menos citar a definição. Nesse sentindo, o autor ressalta que o PCN[16] justifica a relação da contextualização e interdisciplinaridade de maneira a permitir conexões de diferentes conceitos matemáticos e possibilitando que os alunos criem suas próprias suposições com o que está em construção durante a atividade.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático (...). Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador

[16] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é uma coleção de documentos que compõem a grade curricular de uma instituição educativa.

> que ele possui. (...) As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções... (PCN, 2002, p.255).

Mota (2019) salienta que durante a pesquisa a maioria dos alunos entrevistados respondeu que o seu professor recorre a métodos tradicionais de ensino, apresentando uma apostila com exercícios ou fazendo uso do livro didático.

No que se refere o grau de dificuldade em aprender PA. Mota (2019) observa durante o desenvolvimento do seu trabalho que, a maioria dos alunos considera PA acessível quando se trata de identificar os termos de uma PA, como por exemplo, verificar sua razão e definição, entretanto, esses alunos demonstram dificuldades com problemas, propriedades, e generalizações da PA.

Com relação aos recursos tecnológicos utilizados pelos alunos para auxiliá-los nos estudos. Mota (2019) ressalta que, os 22% identificados no percurso da sua pesquisa, correspondem um percentual elevado de alunos que nunca utilizou o computador para fazer atividades escolares ou por não possuírem equipamentos tecnológicos ou por falta de interesse do próprio aluno.

Nesse âmbito, para Mota (2019), o professor pode influenciar a capacidade de aprendizagem do aluno de forma a minimizar as dificuldades que o aluno enfrenta na escola, em vários aspectos, uma delas por exemplo, é em relação a mudança de metodologias nada convincentes e puramente tradicionais se tratando da disciplina de Matemática, com foco na aprendizagem das Progressões Aritméticas.

Partindo desse mapeamento inicial, o trabalho de Mota (2019), tem como objetivo geral, elaborar um projeto com atividades envolvendo PA aplicadas como Sequência Didática (SD), com alunos do 1º Ano que estejam submetidos a método tradicional de ensino para o assunto de PA. O projeto de Mota (2019) utiliza a Engenharia didática como metodologia de pesquisa. Segundo PAIS (2002), "a engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática".

Portanto, o trabalho de Mota (2019) é um projeto de intervenção pedagógica, centralizado em três ideias chave subjacentes, sendo; i) todos os alunos podem gostar de matemática, ii) a matemática é a ciência dos padrões e iii) a descoberta de padrões. Segundo Mota (2019), "a descoberta de padrões é uma estratégia poderosa de resolução de problemas, o qual, posteriormente pode ser usado como subsídio por professores de matemática”. (MOTA, 2019, p. 17)

Para Mota (2019), considerando uma matemática convencional, o que importa aos alunos no final das contas é a aprovação no final do ano letivo. Nesse contexto, segundo o autor, os alunos aprendem a resolver problemas com respostas já estabelecidas, através da memorização das fórmulas e regras formais. Segundo Mota (2019), esse modelo tradicional de ensino de matemática, sem contextualização, impede que o aluno desenvolva habilidades e competências enquanto sujeito reflexivo.

Mota (2019) ressalta que o ensino das Progressões Aritméticas tem potencial de proporcionar ao aluno habilidades e conhecimentos no campo da matemática. Nesse contexto, a análise preliminar tem em sua metodologia fundamentação dos pressupostos da Engenharia Didática. Nessa perspectiva Segundo Pais (2011);

> “[no âmbito da Engenharia Didática,] uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula." (PAIS, 2011: p.102).

E por não se tratar de aulas tradicionais, Mota (2019) elabora a Sequência Didática estruturada através da formulação de Unidades Articuláveis de Reconstrução Conceitual (UARC) proposta por Cabral (2017). Nessa perspectiva, as UARCs são montadas passo a passo, sedo que a de primeira geração (UARC-1) será o “ponto de partida”, não necessitando ser um problema, como ocorre de um modo geral. As demais UARCs são elaboradas baseadas na UARC-1.

Com relação a aplicação da Sequência Didática (SD), Mota (2019) apresenta uma SD com cinco atividades de Progressão Aritmética (PA) elaborada e estruturado no modelo proposto por Cabral (2017). Cada atividade será intitulada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) e para cada uma UARC tem-se um título, um objetivo e os procedimentos para a sua realização.

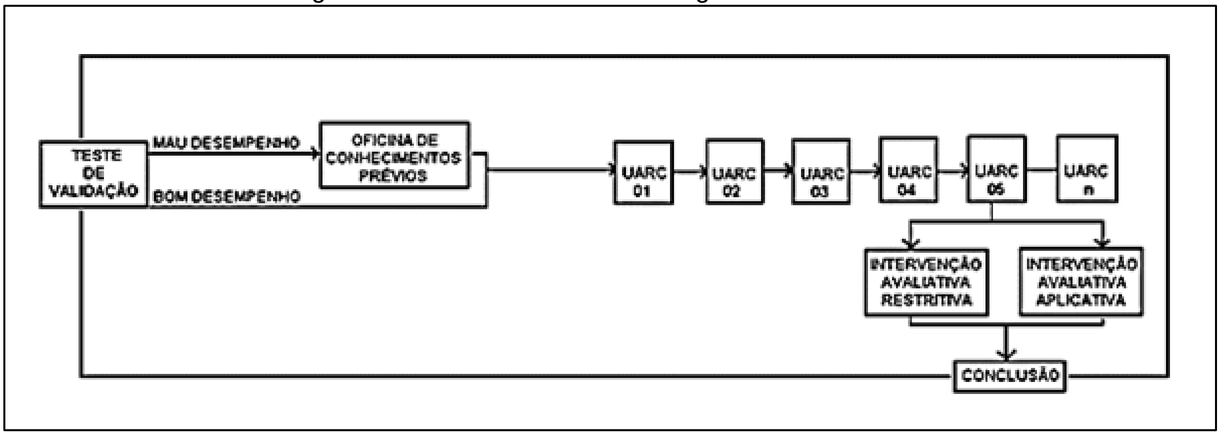
Antes de iniciar a aplicação da sequência didática segundo as considerações de Cabral (2017), Mota (2019) realizou um teste de verificação contendo alguns conhecimentos prévios que Mota (2019) julga ser necessário que os alunos tenham para iniciarem os estudos de PA por meio da SD.

Nessa perspectiva, Mota (2019) utilizou os resultados desse teste de verificação e, elaborou baseado no baixo desempenho dos alunos, uma oficina contendo os conhecimentos matemáticos indispensáveis para que o aluno desenvolva os estudos de PA a partir de uma SD proposta segundo o modelo de Cabral (2017).

Nesse contexto, Mota (2019) o autor, ressalta a Intervenção Avaliativa Restritiva que segundo Mota (2019) tem por objetivo aferir a aprendizagem do aluno. Dessa forma o autor, também ressalta a aplicação da Intervenção Avaliativa Aplicativa ligadas a Resolução de Problemas de Aplicação aos diversos contextos reais para finalizar o processo da SD.

O esquema da Figura 4, elaborado por Mota (2019) permite ter uma visão geral da dinâmica de todo o processo da realização da Sequência Didática realizado em seu trabalho.

Figura 4 – Processo da SD de Progressão Aritmética.



Fonte: Mota (2019).

Mota (2019) elabora o esquema caracterizando o desenvolvimento da SD segundo a proposta de Cabral (2017). Nesse contexto, esse autor organiza as UARCs na forma; UARC 1 sequência numérica regular, UARC 2 reconhecendo uma Progressão Aritmética (PA), UARC 3 Classificação da Progressão Aritmética, UARC4 Termo Geral da Progressão Aritmética e UARC 5 Propriedades da Progressão Aritmética.

Segundo Mota (2019), na fase que antecede o desenvolvimento a SD ele contou com um grupo de 18 alunos. O teste de verificação de conhecimentos prévios necessários para dar condições de aplicação da Sequência Didática de PA teve duração limitada a 45minutos de aula. Também, para esse autor, essa intervenção didática permitiu criar um quadro avaliativo a partir das respostas dadas pelos alunos.

Mota (2019) ressalta que o número de questões erradas dos alunos que realizaram o teste foi elevado, e que dos 18 alunos somente 2 alunos acertaram a metade das questões propostas. Mota (2019) ressalta que, se somar o número de alunos que erram todas as questões com o número de alunos que acertaram apenas uma questão esse percentual é de 78% dos alunos que realizaram o teste de verificação de conteúdo, apontando segundo Mota 92019) para a fragilidade do ensino.

Após o teste de verificação de conteúdos prévios e, com o objetivo de nivelar os alunos a respeito dos conteúdos mínimos necessários para aplicar a sequência didática proposta na pesquisa. Mota (2019) realizou uma oficina com os conteúdos indispensáveis para a aplicação da SD. Essa oficina segundo o autor foi realizada em duas aulas de 45 minutos cada aula. Mota (2019) desenvolveu cinco UARCs, trabalhadas em dois encontros no período de três aulas de 45 minutos cada encontro. Segundo o autor, as duas primeiras UARCs foram desenvolvidas no primeiro encontro e as demais UARCs no segundo encontro.

Passos a considerar para elaboração de uma SD. Nesse âmbito segundo Mota (2019), é importante que se planeje para obter sucesso na Sequência Didática, definindo o tema, realizando uma sondagem inicial a respeito dos conhecimentos prévios que os alunos devam ter, definir e utilizar critérios para encandear as etapas da SD, estimar o tempo de cada sequência, organizar a turma, flexibilizar as atividades e por fim, avaliar o que a turma aprendeu.

> Em termos de modelo estrutural de acordo com a concepção da Escola de Genebra para (DOLZ; NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, P.98) esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: *apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final.* (CABRAL, 2017, p.33)

Assim, Mota (2019) ressalta a primeira fase como sendo, aquela em que o professor apresenta as atividades aos alunos, bem como, os estudos que os alunos irão desenvolver. A segunda fase para o autor, corresponde a produção inicial, essa fase trata da Avaliação prévia de conteúdo com o objetivo de conhecer asa dificuldades dos alunos e a partir daí estabelecer quais as atividades irá compor a SD.

Mota (2019) ressalta ainda que a terceira fase, os módulos, corresponde a atividades como por exemplo, exercícios e pesquisas, planejadas metodicamente, com objetivo de ampliar/fortalecer a capacidade do aluno. Dessa forma, os módulos devem visar a superação das dificuldades iniciais propondo atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma. Para Mota (2019), a quarta fase, produção final, é a avaliação do que conseguiram aprender no decorrer da sequência didática.

A seguir Mota (2019) apresenta os tópicos que fazem jus à sequência de Intervenções pré-estabelecidas de acordo com os objetivos da pesquisa, a conferir. Intervenção Inicial (Ii) Segundo (OLIVEIRA, 2018 p. 40) citado por Mota (2019), qualifica nosso primeiro desafio, pois trata-se de um “discurso didático-dialógico que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito”.

Intervenção Reflexiva (Ir) Segundo Marconni Oliveira (2018, apud Mota, 2019), a intervenção Reflexiva “sempre se materializa por meio de um questionamento”, é também uma forma de estimular e orientar o aluno “a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências”. (OLIVEIRA, 2018 p. 41).

Intervenção Exploratória (Ie) Segundo Mota (2019) apesar desta não se encontrar na primeira UARC, entretanto Oliveira (2018, apud Mota, 2019, p. 41) afirma que a Intervenção Exploratória “tem como finalidade aprofundar o olhar do aluno a respeito das respostas obtidas nas intervenções reflexivas (*Ir*)”.

Intervenção Avaliativa Restritiva e Intervenção Avaliativa Aplicativa segundo Mota (2019) se deu após a aplicação 5 UARCs e suas devidas formalizações, chamadas por Cabral (2017, apud Mota, 2019) de *Intervenções Auxiliares*, em um único material de apoio (APÊNDICE C) para evidenciar as potencialidades das Intervenções Iniciais aplicadas nas UARCs.

Nessa perspectiva A UARC 1 segundo Mota (2019), tem como título sequência numérica regular a partir de sua lei de formação e, como procedimento de resolução é solicitado que se analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões. Dessa forma, A UARC 1 tem por objetivo reconhecer uma sequência numérica regular e sua lei de formação.

Para Mota (2019), essa UARC é composta por duas Intervenção Inicial (Ir). A primeira Intervenção Inicial (Ii 1) o autor solicita que se observe a sequência de números em destaque (0; 2; 6; 14; 30; 62; ...).

Na sequência segundo Mota (2019), o aluno deverá responder as cinco Intervenção Reflexiva (Ir). Na segunda Intervenção Inicial (Ii 2) Mota (2019) solicita que a parir do 1° elemento escrito na tabela, preencha os espaços destinados aos outros elementos, a partir do 2° e até o sexto elemento, obedecendo o procedimento a seguir: multiplique por 3 o elemento anterior e adicione duas unidades. Em seguida responda as duas Intervenção Reflexiva (Ir).

Após o procedimento, Mota (2019) realiza a Intervenção Formalizante 1 (If1), ou seja, ele formaliza aos seus alunos que: A Sequência Numérica Regular a partir de sua Lei de Formação é uma sequência numérica que admite um termo qualquer (termo geral, $\boldsymbol{an}$) a partir de relações entre seus termos e sua posição, obedecendo uma determinada lei.

Considerando a análise a priori da UARC1, Mota (2019) espera que os alunos sejam capazes de desenvolver as sequências através da lei que lhe foi informada e possa encontrar a regularidade da sequência. A UARC 2 tem por objetivo reconhecer quando uma sequência numérica é uma Progressão Aritmética e formalizar o seu conceito. Essa Unidade Articulada de reconstrução Conceitual é composta de uma intervenção Inicial (Ii) onde o autor solicita que os alunos observassem as sequências numéricas A (3, 7, 15, 31, 63, …) e B (2, 5, 8, 11, 14, …) em seguida respondesse as sete Intervenção Reflexiva (Ir) e quatro Intervenção Exploratória (Ie).

Após o procedimento, Mota (2019) realiza a Intervenção Formalizante 2 (If2) onde, ele formaliza aos seus alunos que: a Progressão Aritmética (P.A) é uma sequência numérica (finita ou infinita) em que qualquer termo (an), a partir do segundo ($a2$) é o antecessor somado a um valor constante representado por “r”, denominado de Razão, que é a diferença entre o termo posterior e o termo imediatamente antecessor.

A esse respeito segundo Mota (2019), sobre a análise a priori da UARC 2, espera que os alunos sejam capazes “de reconhecer e entender que as sequências dadas, formam Progressões Aritméticas”.

A UARC 3 tem por objetivo segundo Mota (2019), identificar se PA é crescente, decrescente ou constante. Essa Unidade Articulada de Reconstrução

Conceitual 3 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) onde o autor solicita para preencher as tabelas, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Aritmética e suas devidas razões (r) em seguida respondesse as três Intervenção Reflexiva (Ir) e uma Intervenção Exploratória (Ie). Após esse procedimento, esse autor realiza a Intervenção Formalizante 3 (If3) onde o autor formaliza aos seus alunos que: Classifica-se uma Progressão Aritmética (PA), pela sua razão (r), ou seja, se r for maior que zero a PA é Crescente, se r for igual a zero a PA é Constante, e se r for menor que zero a PA é Decrescente.

Nesse contexto, segundo Mota (2019) da análise a priori considerando a UARC 3 o autor espera que a partir do valor da razão da PA os alunos possam reconhecer se ela é crescente, decrescente ou constante. A UARC 4 tem por objetivo descobrir o termo geral da PA. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 4 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) onde o autor solicita para analisar as informações abaixo e responder três Intervenção Reflexiva (Ir) em seguida as três Intervenção reflexiva (Ir). Após esse procedimento Mota (2019) realiza a Intervenção Formalizante 4 onde ele formaliza aos seus alunos que: A expressão $an=a1+(n-1).r$ é denominada de termo geral de uma P.A.

A esse respeito segundo Mota (2019), sobre a análise a priori da UARC 4, espera que os alunos possam desenvolver o conhecimento a respeito da fórmula do termo geral da PA. Ainda segundo o autor, nessa UARC os alunos enfrentarão dificuldades, mas que ao final da atividade os alunos irão alcançar o objetivo desejado.

Para Mota (2019), A UARC 5 tem por objetivo entender e aplicar as propriedades de PA. Essa Unidade Articulada de reconstrução Conceitual 5 é composta de duas Intervenções Iniciais (Ii). Na primeira o autor solicita que se observe a PA (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) em seguida responda três Intervenções Reflexivas (Ir1) a respeito da primeira propriedade. Na segunda Intervenção Inicial (Ir2) o autor solicita que considere a PA (3, 9, 15, 21, 27, 33) em seguida responda três Intervenção Reflexiva (Ir) e uma Intervenção Exploratória (Ie).

Após o procedimento Mota (2019) realiza a Intervenção Formalizante 5 (If5) onde ele formaliza aos seus alunos que: Em uma PA finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistantes dos extremos é constante e sempre igual a a_1+a_n. (Primeira Propriedade) e, tomando-se quaisquer três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois (Segunda propriedade).

Em suas considerações finais Mota (2019) conclui que a potencialidade do uso da Sequência Didática para o ensino da Progressão Aritmética foi comprovada, respondendo assim a questão de pesquisa. Segundo Mota (2019), os alunos precisam se envolver com as atividades, e que a aplicação da Sequência Didática foi favorável as descobertas e entendimento de conceitos e propriedades. Segundo o autor foi possível observar as dificuldades de aprendizagem na matemática que se relacionam com o processo de ensino e a abordagem dos conteúdos abordados.

2.1.2. Trabalho 2 – Gonçalves (2019)

Gonçalves (2019) realizou um estudo acadêmico onde apresenta reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática relativos à função do segundo grau como objetivo de averiguar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de função do segundo grau. Neste contexto, esse autor procura responder em que medida uma Sequência Didática (SD) elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de função quadrática?

Para o desenvolvimento do seu trabalho, Gonçalves utilizou pressupostos teóricos da Engenharia Didática de Michele Artigue, como metodologia de pesquisa e, a Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) segundo a proposta de Cabral (2017) para a elaboração das Sequências Didáticas e contou com 23 alunos sendo que somente 11 alunos participaram do projeto de pesquisa até o final.

Na investigação da construção do conhecimento a partir das interações verbais, Gonçalves (2019) contou com as contribuições de Goés (2000) com as noções de Análise da Microgenética. O autor também contou com as contribuições de Mortimer e Scott (2002) a respeito da Análise do Discurso.

A Sequência Didática no trabalho de Gonçalves (2019) é composta de doze atividades das quais fazem parte seis *applets* construídos no software livre de geometria dinâmica GeoGebra e uma calculadora denominada “EQUAÇÃO DO 2º GRAU” construída no App Inventor.

Segundo Gonçalves (2019), a coleta de dados da pesquisa do seu trabalho se deu por meio de um questionário sociocultural e, um teste de conhecimento matemático relativo à função quadrática aplicada aos alunos egressos, avaliado por professores de Matemática. Por se tratar de um trabalho sobre SD, Gonçalves (2019) desenvolveu um teste diagnóstico contendo os principais conteúdos circunscritos aos objetos matemáticos a serem (re)construídos com os alunos.

Nesse âmbito, o questionário elaborado por Gonçalves (2019) era composto por dezanove questões abertas e fechadas. Sendo que, as oito primeiras perguntas estão relacionadas aos aspectos sociais do aluno e as demais estão associadas aos aspectos culturais desse aluno, direcionado à Matemática e ao conteúdo função do 2º grau.

Considerando o questionário como técnica de pesquisa, Gonçalves (2019) ressalta que uma das vantagens apresentadas diz respeito à garantia do anonimato das respostas dos pesquisados. Segundo Gonçalves (2019) este fato garantiu um maior número de participantes na pesquisa.

Gonçalves (2019) contou com 83 alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, localizada na região metropolitana de Belém do estado Pará. Nesse contexto, o autor busca mapear "quais dificuldades na aprendizagem de Função Quadrática são apontadas por alunos do 2º ano do ensino médio de escola pública"?

Nessa perspectiva, Gonçalves (2019) ressalta que o questionário sociocultural foi aplicado concomitantemente com o teste de verificação de conhecimento que contou com seis questões de abertas referentes ao conhecimento básico sobre função quadrática. Ademais, a escolha dessa técnica de pesquisa tem como uma de suas finalidades verificar se de fato o que o aluno apontou no quadro de dificuldades condizia com o que ele respondeu no teste de conhecimento.

Sobre a percepção do aluno com relação as respostas do questionário de pesquisa. Gonçalves (2019) avalia e comenta as respostas dadas pelos alunos. Nesse contexto, 53% dos alunos responderam que "só estudam no período de prova". Sobre esse aspecto segundo Gonçalves (2019), a melhoria do desempenho escolar também está associada ao tempo de estudos destinados fora da escola.

Gonçalves (2019) destaca que 47,50% dos alunos responderam que "gostam um pouco da matemática" seguido de 26,25% "não gosto de matemática" Para o autor, este resultado pode estar ligado ao fato de como a matemática foi apresentada para esses alunos que, segundo Gonçalves (2019), na sua grande maioria “desvinculado do contexto social no qual esse aluno está inserido”, excesso de formalismo, sem valorização do pensamento intuitivo e criativo do aluno.

Uma outra resposta que desperta reflexões no questionário de pesquisa de Gonçalves (2019) está relacionada a “compreensão das explicações nas aulas de matemática”. Segundo o autor, 51,25% dos alunos responderam que poucas vezes compreendem as explicações nas aulas de matemática. Para Gonçalves (2019), esse fato pode estar associado a diferentes fatores entre eles a maioria dos professores da educação básica utilizarem de métodos tradicionais de ensino.

Nesse sentindo Gonçalves (2019) ressalta que “é necessário buscar e aplicar em sala de aula com os alunos, novas metodologias de ensino de matemática, que possibilite aos mesmos (re)construir os seus conhecimentos”. (GONÇALVES, 2019, p. 75).

A respeito da metodologia para o ensino de função do segundo grau, segundo Gonçalves (2019), 83,75% dos alunos entrevistados responderam que os professores “começando pela definição seguida de exemplos e exercícios”. Para o autor, essa resposta pode indicar a forma tradicional de ensino como vem sendo trabalho o assunto de função do 2º grau.

Gonçalves (2019), ressalta que, quando perguntado aos alunos “como gostariam de aprender a função do segundo grau?” segundo o autor, não houve uma metodologia que se destacou como a melhor forma de aprender função do segundo grau.

Segundo o pesquisador, os resultados apontam para um ensino de matemática predominante tradicional, tendo como avaliação mais utilizada pelo professor de matemática a prova escrita. Vale ressaltar que segundo os alunos, é a forma que mais acarreta preocupação e medo. Os dados da pesquisa apontam que os alunos não têm o hábito de efetuar estudos fora da escola.

Sobre as questões de conhecimento matemático, Gonçalves (2019) observou um baixo desempenho obtido pelos estudantes. Entretanto, o autor conclui que está coerente com os resultados apresentados no quadro de dificuldades do questionário preenchido por eles.

Para compor a visão geral dos professores no trabalho de Gonçalves (2019), ele contou com 37 professores de matemática escolhido aleatoriamente e submetidos a um questionário socioeconômico. Estes professores também avaliaram o grau de dificuldade das seis questões submetidas aos alunos egressos.

O questionário socioeconômico do trabalho de Gonçalves (2019) conta com 22 questões abertas e fechadas e teve por objetivo identificar as possíveis dificuldades no ensino e na aprendizagem do conteúdo de função do segundo grau.

Gonçalves (2019) comenta os resultados obtidos da pesquisa, e ressalta que a maioria professores de Matemática costumam ensinar os tópicos elencados no questionário sobre conteúdos de função quadrática, contudo, esses professores não têm o hábito de ensinar à forma canônica da função quadrática e fazer relação entre está e função e a sequência numérica.

Com relação ao grau de dificuldade que os alunos apresentam em assimilar os tópicos referentes à função do segundo grau no trabalho de Gonçalves (2019), os professores entrevistados julgam de fácil a difícil. Entretanto, o autor ressaltar que as mesmas perguntas foram feitas para os alunos egressos com relação ao grau de dificuldade que eles tinham com relação aos conteúdos de função do segundo grau e a maioria julgou serem médio a muito difícil.

Gonçalves (2019) sinaliza que uma possível dificuldade na aprendizagem de conteúdo de função do segundo grau na amostra do seu trabalho, está relacionada a afirmação por uma parte significativa dos alunos egressos não terem visto tópicos importantes do conteúdo de função do segundo grau como por exemplo problemas de valor máximo e mínimo associado a função do segundo grau. Por fim, ressalta que a utilização de recursos tecnológicos pelos 37 professores de Matemática entrevistados se limita basicamente ao acesso à internet para realizações de pesquisas, sejam por meio do computador pessoal ou do próprio celular. Alguns professores entrevistados segundo o autor, disseram que nunca ou raramente fazem uso de algum recurso tecnológico.

Sobre o ensino de função do segundo grau o trabalho de Gonçalves (2019) aponta para um ensino baseado somente em aulas expositivas com definição, exemplos e exercícios, cuja avaliação dos alunos se dá predominantemente por prova escrita. Ele também apresenta doze atividades que materializam o texto da Sequência Didática elaborada de acordo com a estrutura proposta por Cabral (2017) denominada de UARC. O autor ressalta, antes de cada atividade a ser desenvolvida, conteúdos matemáticos que ele julga ser necessário e que estão circunscritos para a realização delas.

Nessa perspectiva, Gonçalves (2019) elabora uma Sequência Didática para o ensino de função quadrática, estruturada de acordo com as UARC's de Cabral (2017) que será utilizado como um instrumento dialógico, para fins de possibilitar a análise das interações advindas entre professor e alunos e entre alunos, emergentes das Intervenções Estruturantes a saber: Intervenção Inicial (Ii), Intervenção exploratória (Ie), Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr) e por fim, Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa).

A respeito da elaboração da Sequência Didática no trabalho de Gonçalves (2019), cada atividade foi elaborada com a intenção de amenizar de alguma forma o ensino e aprendizagem dos conteúdos relativos à função do segundo grau apontados na literatura e nas pesquisas de campo. Com relação a Sequência Didática, ele propõe um o quadro como proposta de organização das atividades contendo ordenação das aulas, título da atividade e a previsão do número de aulas para cada atividade. Vale ressaltar que no trabalho de Gonçalves (2019) após a finalização de cada UARC, o autor propõe as Intervenções Avaliativas restritivas (IAr) e as Intervenções Avaliativas Aplicativas (IAa).

Nesse contexto, segundo Gonçalves (2019), a Intervenção Avaliativa Restritiva (IAr), tem como objetivo estabelecer um parâmetro de desempenho de aprendizagem do conceito em (re)construção. Assim como, a Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAa) tem por finalidade a resolução de problemas de aplicação.

Dessa forma, a UARC 1 segundo Gonçalves (2019), tem por objetivo introduzir o conceito de função quadrática a partir da relação existente entre a geometria e a álgebra. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 1 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) contendo quatro situações de cálculo de área. Nessa perspectiva Gonçalves (2019) propõe quatro (04) Intervenção Reflexiva (Ir) e uma (01) Intervenção Exploratória (Ie). Após a Intervenção exploratória ele realizou a Intervenção Formalizante da UARC 1, onde o autor formaliza aos seus alunos que: As expressões resultantes da Atividade 1, definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são exemplos de função quadrática, onde o y é a variável dependente da variável independente x. e que as expressões algébricas podem ser escritas na sua forma geral: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, chamados de coeficientes da função quadrática.

A UARC 2 segundo Gonçalves (2019) tem por objetivos: descobrir a representação geométrica para a função quadrática. Essa Unidade Articulada de

Reconstrução Conceitual 2 é composta por uma (01) Intervenção Inicial (Ii), três (03) Intervenção Reflexiva (Ir) e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie). Após desenvolvimento da UARC 2 ele realizou a Intervenção Formalizante da UARC 2, onde o autor formaliza aos seus alunos que: as representações geométricas construídas na Atividade 2, exceto as duas últimas, são exemplos da representação geométrica da função quadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ x, a, b, c \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$), cuja representação no plano cartesiano é uma curva aberta chamada parábola.

A UARC 3 segundo Gonçalves (2019), tem como objetivo descobrir uma relação indireta entre os coeficientes da função quadrática e a concavidade da parábola. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 3 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) uma (01) Intervenção Reflexiva (Ir) e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie). Na sequência realizou a Intervenção Formalizante da atividade 3 onde o autor formaliza aos seus alunos que o coeficiente “a” da função do segundo grau é responsável pela mudança de sentido da concavidade da parábola. E se $a > 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para cima, se $a < 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

A UARC 4. segundo Gonçalves (2019), tem como objetivo principal, relacionar o termo independente da função quadrática com o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) contendo duas (02) Intervenção Reflexiva (Ir) e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento foi realizado a Intervenção Formalizante da atividade 4 onde o professor formaliza aos seus alunos que para toda função do quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b*, e $c \in \mathbb{R}\ sendo\ a \neq 0$, temos que a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y, corresponde ao termo independente “c” da referida função.

A UARC 5 segundo Gonçalves (2019), tem como objetivo compreender o significado algébrico dos zeros de uma função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 5 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) contendo uma (01) Intervenção Reflexiva (Ir) e uma (01) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento é feito pelo professor a Intervenção Formalizante da atividade 5 onde o professor formaliza aos seus alunos que os valores de ***x*** do domínio da função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem ***f(x)*** igual ao zero, são chamados de zeros da função quadrática.

A UARC 6 de Gonçalves (2019), que tem como objetivo compreender o significado geométrico dos pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 6 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) contendo duas (02) Intervenção Reflexiva (Ir) e cinco (05) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 6 foi realizado a Intervenção Formalizante da atividade 6 onde o professor formaliza aos seus alunos que as abscissas correspondentes aos pontos de intersecção da parábola com o eixo x correspondem aos zeros da função quadrática.

A UARC 7 segundo Gonçalves (2019), tem como objetivo relacionar a quantidade de zeros da função quadrática, a partir da análise de sua representação geométrica, com o discriminante. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 7 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii) contendo quatro (04) Intervenção Reflexiva (Ir) e três (03) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 7 foi realizado a Intervenção Formalizante da atividade 7 onde o professor formaliza aos seus alunos que para toda função quadrática f(x) = ax2 + bx + c, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com a,b, $c \in \mathbb{R}$ $sendo$ a≠0, temos que; i) se Δ > 0, então a função possui dois “zeros” e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos, ii) se Δ= 0, então a função possui apenas um “zero” e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto e que iii) se Δ < 0, então a função não possui “zeros” reais e a parábola não intersecta o eixo x.

A UARC 8 segundo Gonçalves (2019) tem como objetivo compreender o que significa o ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 8 é composta por uma (01) Intervenção Inicial (Ii) e três (03) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 8 é feito realizado pelo autor a Intervenção Formalizante da atividade 8 onde o professor formaliza aos seus alunos que o ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola é chamado de vértice da parábola. O vértice representa o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática.

A UARC 9 segundo Gonçalves (2019) tem como objetivo descobrir uma maneira de obter a abscissa do vértice de uma parábola. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 9 é composta por uma (01) Intervenção Inicial (Ii) contendo uma)1) Intervenção Reflexiva e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 9 foi realizado pelo autor a Intervenção Formalizante da atividade 9 onde o professor formaliza aos seus alunos que para toda função quadrática f(x) = $ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$, temos que a abscissa do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser calculada pela expressão $-b/2a$, onde “*a*” e “*b*” são coeficientes da referida função.

A UARC 10 de Gonçalves (2019) teve por objetivo relacionar os zeros da função quadrática com a abscissa do vértice da parábola. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 10 é composta por uma (01) Intervenção Inicial (Ii), três (03) Intervenção Reflexiva e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie).

Após o procedimento da UARC 10 foi realizado pelo autor a Intervenção Formalizante da atividade 10 onde o professor formaliza aos seus alunos que para toda função quadrática f(x) = $ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ de de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$ *e* $\Delta \geq 0$, temos que a abscissa do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser determinada pela média aritmética dos zeros da referida função.

A UARC 11 segundo o autor tem como objetivo descobrir uma maneira de obter a ordenada do vértice de uma parábola. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 11 é composta por uma (01) Intervenção Inicial (Ii), duas (02) Intervenção Reflexiva e quatro (04) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 11 é feito pelo professor a Intervenção Formalizante da atividade 10 onde o professor formaliza aos seus alunos que para toda função do segundo grau f(x) = $ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$, temos que a ordenada do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser calculada pela expressão $-\Delta/4a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ e “a”, “b” e “c” são os coeficientes da referida função.

A UARC 12 segundo Gonçalves (2019) tem como objetivo descobrir uma maneira de determinar a ordenada do vértice a partir da abscissa do mesmo. Essa Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual 12 é composta por uma Intervenção Inicial (Ii), duas (02) Intervenção Reflexiva e cinco (05) Intervenção Exploratória (Ie). Após o procedimento da UARC 12 foi realizado pelo autor a Intervenção Formalizante da atividade 12 onde o professor formaliza aos seus alunos que Para toda função do segundo grau f(x) = $ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com *a*, *b* e *c* $\in \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$, temos que a ordenada do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser determinada substituindo o valor da abscissa do vértice na lei da função, ou seja, determinando f(x_v). A ordenada do vértice representa o valor máximo ou mínimo da função.

Com relação a Análise do Discurso, Gonçalves (2019) procurou identificar os indícios de aprendizagem manifestados pelos alunos empregando a abordagem metodológica de Góes (2000) denominada Análise Microgenética em diálogo com as contribuições Mortimer e Scott (2002). Ademais, ao finalizar o processo de análise da SD, aponta aspectos importantes que respondem à questão de pesquisa e atendem o objetivo geral do seu trabalho. Segundo o autor, os alunos demonstram ter mais interesse nas aulas mediante um ambiente de ensino e aprendizagem planejado.

Para Gonçalves (2019), a estrutura da SD possibilita aos alunos mobilizarem os conhecimentos prévios fator garantidor da recursividade dos objetos matemáticos e favorecedor para a formalização dos conteúdos no processo.

Segundo Gonçalves (2019), os *applets* e a calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”, proporcionaram aos alunos estímulo e, a utilização de ferramenta tecnológica contribuíram para a percepção das regularidades e dos padrões beneficiando a (re)construção dos conceitos matemáticos.

Ainda segundo Gonçalves (2019), as Intervenções Avaliativas permitem sistematizar as potencialidades de uma SD estruturada segundo o modelo proposto por Cabral (2017) em pelo menos três dimensões: “dimensão do ensino, relacionada ao professor; dimensão da aprendizagem, relacionada ao estudante e dimensão do saber, relacionada ao objeto do conhecimento”. Assim sendo, a partir dos resultados apresentados, há evidência segundo o autor, de que “uma Sequência Didática bem estruturada de acordo com a concepção proposto por Cabral (2017), pode potencializar o processo de ensino e de aprendizado dos conteúdos matemáticos em sala de aula”. Em suma, esse autor sugere a reaplicação da Sequência Didática em um contexto parecido ou diferente ao qual a Sd foi trabalhada, com o intuito de confrontar e perceber semelhanças e diferenças nas respostas obtidas.

Por fim, Gonçalves (2019) também sugere a elaboração de outras SD de acordo com a concepção de Cabral (2017), porém com conteúdo matemático relativo a outros temas, dado a relevância dos resultados desta pesquisa para a área da Educação Matemática.

2.1.3. Trabalho 3 – Trevizan (2015)

O trabalho de Wanessa Aparecida Trevizan de Lima (2015) tem por objetivo mostrar que a situação adidática, sendo um conceito que permite modelar determinadas situações de aprendizagem também serve como instrumento metodológico, à medida que o docente, de posse dele, pode planejar situações potencialmente adidáticas em sala de aula. De 100 alunos convidados a participar do projeto de pesquisa, 18 se inscreveram, 7 começaram a frequentar e apenas 4 concluíram a oficina.

A pesquisadora desenvolveu um projeto durante 4 anos de aplicação de sequência didática em três cenários e momentos diferentes e com alunos do ensino médio. O desenvolvimento da pesquisa iniciou na Escola de Aplicação da USP em 2010 com a elaboração e aplicação de uma de uma sequência didática para alunos do 3º ano. A mesma sequência foi compartilhada com aluno do SESI em 2011, com alunos do 2º ano e por fim, no terceiro momento em 2014 no IFSP com alunos do 2º ano e como aluna d MPEM do IME-SP.

Segundo Trevizan (2015) "a situação adidática é um caso especial de situação didática, que possui algumas características de uma situação não didática". Para a autora, uma situação adidática apesar da coordenação e orientação de um professor, há nessa situação uma Sequência Didática, em particular, sobre análise combinatória, que permite o aluno aprender sem a presença desse professor.

O trabalho de Trevizan (2015) está dividi em três capítulos. Sendo o primeiro composto por uma breve caracterização da escola pública brasileira e seus desafios mais atuais; a concepção de desenvolvimento e aprendizagem segundo Vygotsky e a Teoria das Situações de Guy Brousseau, entre outros conceitos da Didática Francesa.

Sobre o ensino público, Trevizan (2015) nos conta que tem observado um descaso da comunidade escolar com relação às aprendizagens e ao conhecimento. E que na maioria das vezes a escola, encontrasse cada vez mais envolvida por seu papel de contenção17 deixando para segundo plano o ensino e aprendizagem.

---

[17] TIRAMONTI (2005) fala sobre o papel de contenção que a escola assume na pós-modernidade, pelo qual acaba assumindo funções até então atribuídas à família como as de proteção, atenção e orientação/transmissão de valores

Para Trevizan (2015), “de modo geral, atribui-se qualidade inferior à escola pública”. Essa caracterização não está pautar unicamente em observações da autora e no senso-comum, mas no estudo etnográfico realizado por Salatino (2014) que analisa a realidade escolar.

Baseada nas ideias de Salatino (2014) citadas por Trevizan (2015) ressalta que os alunos veem no longo processo de escolarização um atraso para ingressar no mercado de trabalho. Segundo Salatino “os jovens experimentam nesse período a ausência de um sentido de caráter imediato e utilitário em seus estudos” (SALATINO, 2014, p.27).

Trevizan (2015) salienta que o desinteresse dos alunos “não tem a ver com dificuldade cognitiva ou uma simples falta de planejamento, mas com a dificuldade de construir um sentido positivo para a escola”.

Segundo Trevizan (2015), ao mesmo tempo em que a escola parece ser a solução da desigualdade na sociedade, os títulos[18] que distribui são mecanismos de seleção (“peneiras”) e manutenção da desigualdade. Na visão da autora, através da massificação do ensino, muitos podem obter esses títulos, deslocando as peneiras para um nível cada vez mais acima como a formação técnica, superior etc. ou para setores de educação não formal como cursos de inglês, informática, pré-vestibulares etc.

Nesse contexto, segundo Trevizan (2015), certificado escolar não é mais suficiente na percepção dos alunos que procura alcançar boas oportunidade de emprego ou ingressar no ensino superior. Corroborando com essa visão da autora, Salatino (2014) salienta que mesmo os bons alunos enfrentam dificuldades de ascensão social através da escola.

Por outro lado, Trevizan (2015) salienta que, há também uma desmotivação com relação aos conteúdos desenvolvidos na escola, desprovidos de utilidade prática e desagregado da realidade do aluno. Para Salatino (2014), a maioria dos alunos “não se socializa nem contra nem pela escola, mas paralelamente à escola, tendo uma postura apática com relação ao conhecimento, apenas seguindo os rituais que lhes são impostos”.

Trevizan (2015), ressalta que além de toda tensão enfrentada pela escola, um outro desafio submetido a essa geração de professores e alunos é a evolução

[18] Essa “inflação dos títulos” ou “translação do sistema de diplomas” é considerada por BOURDIER (1983)

repentina da tecnologia que impõe aos professores a difícil tarefa controlar/usar/proibir o uso das tecnologias em sala de aula.

Ainda segundo Trevizan (2015), apesar das evidências da desmotivação dos alunos que nem sempre são internas à escola. Nesse contexto, segundo a autora, não podemos admitir o fato de que a maioria dos alunos não irá aprender por questões diversas. A esse respeito, para a autora, um bom método, “pode atrair mais alunos que outros ou atrair com maior qualidade”.

Sobre a influência de fatores que motivam os alunos, Salatino (2014) apud Trevizan (2015) destaca a expectativa do professor. Nesse sentindo, percebemos que geralmente o professor não confia no aluno e parte do pressuposto de que o aluno “não sabe nada” ou que “não quer aprender”.

Segundo Trevizan (2015) essa expectativa negativa é implicitamente repassada aos alunos, como mostram as pesquisas[19], de modo que eles mesmos percebem que pouco ou nada se espera deles. Entretanto, para Trevizan (2015), deve-se levar em conta todos os fatores que colaboram com o ensino e aprendizagem, inclusive a confiança de que todos são capazes de aprender.

No trabalho de Trevizan (2015), considera alguns conceitos socioconstrutivistas de Vygotsky, justamente pelo seu aporte social, que explicam e embasam as concepções sobre o ensino e a aprendizagem e auxiliam para fundamentar a compreensão das teorias francesas da Didática da Matemática, e em particular a ideia de situações adidáticas.

Sobre a aprendizagem e o desenvolvimento, Jonnaert (1996, p. 128) apud Trevizan (2015), ressalta que Vygotsky diferencia a aprendizagem escolar e o desenvolvimento intelectual do indivíduo, o que corresponde, respectivamente, ao tempo curto e ao tempo longo. Para Trevizan (2015) a microgênese é o plano do desenvolvimento em que há menos determinismo e que estão inseridas as atividades escolares.

A esse respeito segundo Trevizan (2015), dois irmãos podem apresentar desenvolvimentos totalmente diferentes, mesmo fazendo parte do meio. É nesse contexto que estão inseridas as atividades escolares, as quais irão interferir no desenvolvimento do aluno. E deve-se considerar segundo Trevizan (2015), “que

[19] ROSENTHAL, R.J.; JACOBSON, L. (1973) há mais de quatro décadas já nos mostram a influência daexpectativa do professor no desempenho do aluno.

cada aluno tem seu próprio modo de enfrentar os problemas e resolvê-los de acordo com as experiências que já teve e o nível de desenvolvimento em que se encontra”.

Uma proposta do trabalho de Trevizan (2015) é defender o uso de situações adidáticas no ensino de Matemática. Para Vygotsky (2010) apud Trevizan (2015) “A educação deve ser organizada de tal forma que não se eduque o aluno, mas o próprio aluno se eduque.” (Vygotsky, 2010, p.64). Nesse sentindo, Trevizan (2015), ressalta que, essas situações valorizam a experiência pessoal de cada aluno, como sendo está a responsável direta pelo aprendizado.

Valendo-se dessa prerrogativa, Trevizan (2015) debruça seus estudos sobre o meio social e a interação pedagógica baseada nos relatos de Vygotsky (2010) ressaltando que a intervenção pedagógica intencional e, essencial estabelecendo uma relação com as ideias de Brousseau (1986) que tem o meio como um elemento ativo na educação.

Considerando esse contexto, Trevizan (2015) ressalta que a concepção adidática é consequência de uma preparação do meio com uma intencionalidade pedagógica como objetivo de que o aluno se aproprie das propriedades do novo conceito e desenvolva-se.

Um conceito muito conhecido de Vygotsky (2010) apud Trevizan (2015), é a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Para a autora, conhecer a ZDP de cada indivíduo seria indispensável, uma vez que é nessa área do desenvolvimento que a intervenção educativa se tornaria eficiente.

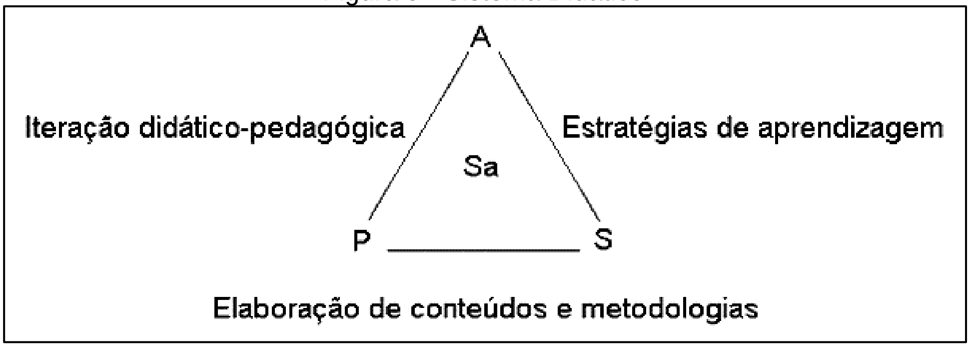
Trevizan (2015) ressalta que Vygotsky (2010) prioriza o desenvolvimento Inter psicológico, segundo o autor, a interação entre os pares é significativa quando favorece o desenvolvimento, e nesse contexto desperta funções que estão na Zona de Desenvolvimento Proximal.

Chevallard (1991) citado por Trevizan (2015) define como sistema didático aquele que contém o professor (P), os alunos (A), o saber (S) a ser ensinado e suas relações. Nesse contexto segundo a autora, para Chevallard (1991), “faz-se necessário entender o funcionamento do sistema de acordo com as características específico de cada um dos três polos, considerando a relação com o mundo exterior”.

Nesse contexto, a tríade Professor, Aluno e o Saber como famílias de variáveis que se inter-relacionam durante o processo de ensino e aprendizagem, Jonnaert (1996, p. 121) apud Trevizan (2015) teremos um modelo fecundo para as demais teorias didáticas.

Nessa perspectiva, segundo Trevizan (2015), em um sistema didático, os três elementos Professor, Aluno e Saber polarizam as principais variáveis do sistema, entretanto, Trevizan (2015) ressalta que há outros elementos secundários nessa relação como objetivos, métodos e recursos didáticos. As trocas organizadas entre esses três elementos chamam-se relações didáticas indicados na Figura 5 sobre o Sistema Didático.

Figura 5 - Sistema Didático.



Fonte: Adaptado de ASTOLFI et al. (1997, p. 72).

Considerando o sistema didático, Trevizan (2015) ressalta que, na medida que essas relações didáticas com os saberes são subjetivas são também por isso assimétricas, ou seja, o professor mantém uma relação com o saber diferente da relação que o aluno mantém. Vale ressaltar que, a relação com o saber varia mesmo entre os próprios alunos. Nesse contexto, a função da relação didática é de fazer evoluir a relação com os saberes, como explica Jonnaert (1996, p. 123).

O trabalho de Trevizan (2015), é inesperado na Teoria da Situação Didática (TSD) de Brousseau, por fornecer conceitos teóricos com fins práticos, os quais podem ser relacionados diretamente com a rotina de uma sala de aula, levando em conta a Situação Didática caracterizada por Brousseau (1933).

Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) com os quais o sujeito interage em uma situação. (BROUSSEAU, 1998, p.2)

Guy Brousseau (1993) apud Trevizan (2015) utiliza o termo Milieu quando se refere ao meio (ambiente ou entorno) que interage com o aluno. Para Brousseau, esse meio produz incertezas, contradições, atitudes e emoções que levam os alunos à aprendizagem.

O trabalho de Trevizan (2015) traz como pressuposto a Teoria das Situações que, tem como alguns princípios fundamentais, a necessidade de especificar a área do conhecimento estudada pela Didática, a diferença (apesar das proximidades) entre a atividade do matemático e do professor de matemática e, a necessidade de fortalecer a relação direta entre o aluno e o conhecimento.

Trevizan (2015) ressalta que é deste último princípio citado que surge o conceito de situações adidáticas. Dessa forma, para Trevizan (2015) o fim de qualquer situação didática resulta na possibilidade de interação do aluno com o meio não didático. De modo que.

> Um “meio adidático” é a imagem na relação didática do meio exterior ao ensino em si, ou seja, desprovido de intenções e pressupostos didáticos. Esse meio é denominado adidático, pois considera o funcionamento normal dos conhecimentos, fora das condições didáticas (aquelas em que alguém decidiu pelo aluno que saber ele deveria aprender). (BROUSSEAU, 2008, p. 89)

Nesse contexto, segundo Trevizan (2015), as situações de aprendizagem ideais são aquelas em que o professor intencionalmente seleciona problemas que provoque mobilizações[20] de saberes já conhecido e favoreça para que o aluno atue, reflita, discuta e evolua. Para tanto, segundo a autora, toda atividade deveria ser planejada de modo a direcionar o aluno a uma situação adidática. Dessa forma, Trevizan (2015) considera que, apesar da intencionalidade didática do professor sobre a tarefa, não há interferência direta do professor na aprendizagem isto por quê.

Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (BROUSSEAU, apud PAIS 2002, p. 68)

[20] PERRENOUD (1999), ao discutir a noção de competência, valoriza o conceito de mobilização de recursos cognitivos. Ele considera a metáfora de mobilização mais adequada que a de transferência de saberes, justamentepor destacar o papel ativo do sujeito.

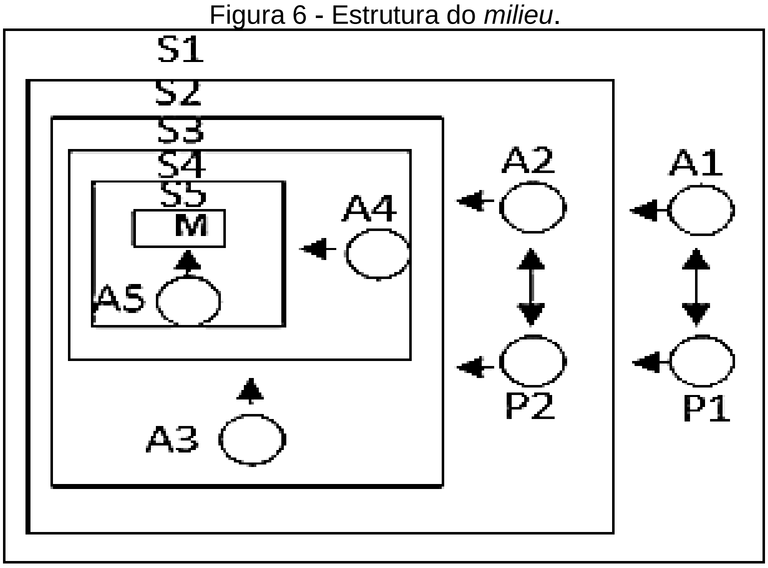
A esse respeito, Trevizan (2015) considera um desvio querer impor aos alunos uma única forma de compreender um conceito. Para a autora, as situações adidáticas podem amenizar esse desvio e, de tal forma que nesse contexto, seria prudente buscar certo equilíbrio entre situações didáticas e adidáticas.

Dessa forma, Brousseau (2008) apud Trevizan (2015), ressalta que as situações adidáticas numa aula de matemática ocorrem em quatro etapas distintas que são, Situação de ação, Situação de Formulação, Situação de Validação e Situação de Institucionalização.

Para Trevizan (2015), as três primeiras etapas podem ser identificadas como situações adidáticas, a situação de institucionalização é de natureza didática. Segundo autora, Brousseau inseriu está quarta etapa das situações devido a necessidade de o professor conferir um status aos eventos vistos anteriormente.

Brousseau (1986) apud Trevizan (2015) introduziu um novo conceito na Teoria das Situações, *a estruturação do meio*. Nesse contexto, as posições do professor e do aluno variarem de acordo com a posição do observador como mostra no esquema da Figura 6 sobre a estrutura do *milieu*.

Figura 6 - Estrutura do *milieu*.



Fonte: Trevizan (2015, adaptado de BROUSSEAU, 2008, p. 57).

Trevizan (2015) considera que, o esquema acima trata da estrutura do meio introduzida por Brousseau, onde A1, A2, A3, A4 e A5 representam as cinco posições que o “aluno” pode assumir no contexto da situação. P1 e P2 são as posições do professor. S1, S2, S3, S4 e S5 são os níveis de situação em que aluno e professor, estabelecem em seus papéis e M é o meio material, as flechas indicam quem aluno/professor atua sobre quem.

Segundo Trevizan (2015), outro fator que é importante levar em consideração e que caracteriza um dos principais elementos da Teoria da Situação Didática é o Contato Didático (CD). Que segundo a autora “... é, na verdade, uma metáfora, cujo significado esclarece a relação existente entre os três elementos de um sistema didático: o professor, o aluno e o saber escolar”.

Nesse sentindo, Trevizan (2015) ressalta algumas características do (CD). Uma delas é que, em cada sistema didático, há um contrato didático que é único e depende das variáveis que são o professor, o aluno e o saber, outra característica a ser considerado, ele é perecível, ou seja, o tempo que durar a relação didática.

Ainda sobre esse aspecto, Trevizan (2015) ressalta a característica do CD ser dinâmico e flexível por estar sempre evoluindo. E segundo a autora, ele é também implícito, entretanto, pode se tornar explícito sobretudo em caso de ruptura desse contrato, ou seja, quando há uma obstrução durante o processo de ensino e aprendizagem devido a uma ocorrência não prevista no CD.

Corroborando a essas ideias postas acima. Para Jonnaert (1996), se o sistema de regras do Contrato Didático for rígido e imutável, paralisará cada um num papel único e nenhuma aprendizagem será possível. Corroborando com esta visão, Pais (2002, p. 87), “um contrato fechado pode parecer comodismo e alienação”.

Nessa perspectiva, Trevizan (2015) ressalta que, Brousseau (2008) refere-se a níveis de contrato, de acordo com o grau de responsabilidade e influência do emissor no projeto dos receptores. São eles:

- ✓ *Contrato de Emissão* – nesse caso, o emissor não está preocupado com a formação dos receptores.
- ✓ *Contrato de Comunicação* – nesse âmbito, o emissor preocupa-se com o vocabulário utilizado para garantir a chegada da mensagem ao receptor, e pode chegar a repetir a mensagem de um modo mais simples a pedido do receptor.
- ✓ *Contrato de Habilidade* – O emissor preocupa-se com a aceitação dos receptores e garante a validade da mensagem.
- ✓ *Produção de um novo saber* – A mensagem do emissor é inédita e original para os receptores e há preocupação com a validade da mensagem.

Considerando esses níveis do CD, Trevizan (2015) ressalta que, há ainda outros níveis de contrato. Nesse sentido, segundo Brousseau, o ideal é que o aluno exerça controle sobre seu instrutor, demonstrando até que ponto as mensagens lhe são relevantes (novas), compreensíveis e aceitáveis.

Ainda sobre os níveis do CD, Trevizan (2015) reitera que, no contrato didático o professor não pode desempenhar pelo aluno "seu papel de aprender, pois os projetos (de ensinar, de aprender) são pessoais e intransferíveis". Entretanto, o professor não pode ausentar-se da responsabilidade de arquitetar e construir meios favoráveis para o desenvolvimento da aprendizagem. Posto isto, segundo a autora, cabe a pergunta: Até que ponto o professor pode responsabilizar-se pelos efeitos de seu projeto nos projetos de seus alunos?

Trevizan (2015) responde essa questão trazendo em seu trabalho os níveis de contrato, de acordo com o grau de responsabilidade e influência do emissor no projeto dos receptores segundo Brousseau. No entanto, apenas citaremos alguns como, por exemplo, o contrato de comunicação, o contrato de habilidade entre outros.

Um outro fator importante segundo Trevizan (2015), é considerar a devolução um componente essencial do (CD), haja visto que dela depende o surgimento de uma situação adidática. O termo Devolução foi emprestado da terminologia legal da França que, de acordo com BROUSSEAU (1996, p. 51), a "devolução era um ato pelo qual o rei- por direito divino – abandonava seu poder para remetê- lo a uma câmara."

Trevizan (2015) ressalta, "um paradoxo da devolução é que o professor não pode aceitar a resposta errada para um problema, entretanto, se ele der a resposta correta, a situação deixará de ser adidática". Nesse sentindo.

> Jogando a regra da devolução, o professor pode exigir do aluno que tome por ele mesmo o ritmo da aprendizagem. Mas, isso não é suficiente. Se ele é bloqueado na situação que o professor lhe propõe e que não pode mais avançar em seu próprio ritmo de aprendizagem, por sua vez, o aluno tem o direito (volta a deter) de reclamar ao professor em retomar uma de suas funções em aplicar uma outra regra do jogo que essa da devolução. O aluno deve poder contra-devolver o papel de cada um, aluno e professor, na organização da evolução do saber no interior da relação didática (JONNAERT, 1996, p.7)

Nessa perspectiva, Trevizan (2015) reitera que, o aluno pode sentir-se dificuldade na resolução do problema e por isso não conseguir avançar, isso o leva a realizar a contra devolução, isto é, devolver novamente ao professor a responsabilidade pela resolução daquele problema.

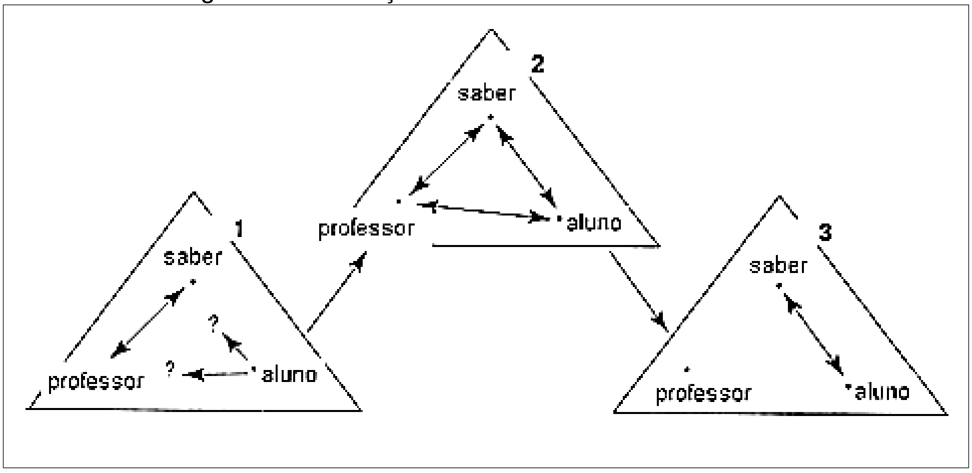
Um outro conjunto que merece destaque no sistema didático são as Escalas Temporais. Trevizan (2015) cita os estudos de Jonnaert (1996) que apresenta uma dupla escala temporal, definida por Gérard Vergnaud, para a aquisição do saber.

O aluno experimenta a escala temporal curta, onde ocorre situações sucessivas, pautadas pela relação didática e o tempo longo da psicogênese do conhecimento, que se desenvolve além da relação didática.

Trevizan (2015) traz um esquema na Figura 7, considera a dinâmica da escala curta, e ressalta que as relações entre os três elementos do sistema didático evoluem continuamente iniciando na ausência da relação direta entre aluno e saber.

Segundo Trevizan (2015) o professor, inicialmente, parece ser o único que tem o "poder" de interagir com o saber. No entanto, os laços que unem aluno e saber devem ser reforçados para que, futuramente, na ausência de uma relação didática, o aluno seja capaz de interagir diretamente com ele.

Figura 7 - As relações assimétricas com os saberes.



Fonte: Trevizan (2015), adaptado por JONNAERT, P. (1996, p. 123, 126 e 131).

Trevizan (2015) avalia que a aquisição do conhecimento na escala do tempo curto está submetida às cláusulas com o contrato didático, as regras de uma relação didática e ao tempo escolar que impõe com o currículo o tempo da aprendizagem.

Para Jonnaert (1996) citado por Trevizan (2015), "a relação didática é precária, mas ela possui o objetivo de desenvolver em cada aluno um processo em longo tempo de construção do conhecimento".

Para Trevizan (2012) as situações didáticas e adidáticas ocorrem no tempo curto, mas estas últimas devem garantir a preparação do aluno para relacionar-se com o saber no tempo longo, no qual não haverá a figura do professor, mas apenas do indivíduo, relacionando-se diretamente com o conhecimento.

Trevizan (2015) desenvolveu e aprimorou a Sequência Didática (SD) em três momentos, sendo que o primeiro momento ocorreu quando estava como professora na Escola de Aplicação da USP em 2010 com alunos do 3º ano do ensino médio que nunca tinham visto análise combinatória.

Considerando o primeiro momento, Trevizan (2015) após avaliar os dados obtidos da aplicação da SD, ressalta que a sequência deveria ser aplicada com alunos do 2º ano para que as técnicas dos cursos pré-vestibulares não interferissem nos resultados.

No segundo momento, Trevizan (2015) aplica a Sequência Didática na unidade escolar do SESI, 201, com três turmas do 2 ano do ensino médio, a autora nos conta que fez uma revisão de cálculo aritmético e algébrico visando facilitar a devolução da SD. Segundo Trevizan (2015), no decorrer da revisão os alunos demonstraram resistência para buscar o porquê dos procedimentos.

Trevizan (2015) ressalta que, a postura dos alunos, de não querer buscar o porquê dos procedimentos revela o histórico de uma formação legalizada nas salas de aula sobre a aceitação das sentenças matemática sem questionamentos.

O terceiro momento ocorreu em 2014, quando Trevizan (2015) se torna professora do IFSP[21] e ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP - IME-USP. A autora investe e retoma as análises dos estudos anteriores sobre SD ao mesmo tempo que toma conhecimento que a área de Matemática faz parte do PIBID[22].

Durante esse percurso, Trevizan (2015) contava com uma rede de apoio composta por um grupo de oito bolsistas ligados ao PIBID juntamente com o professor supervisor deste programa e que iniciou os estudos no primeiro momento.

Trevizan (2015) ao realizar as entrevistas com os bolsistas e o professor, identifica na fala do professor que, existe dificuldades por parte dos professores para lidar com a Análise Combinatória devido ser este um dos conteúdos que envolvem abstração e diferentes modos de raciocínio. Outra observação que encoraja

[21] Instituto Federal de São Paulo (Ensino Técnico e Superior)
[22] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica à Docência.

Trevizan (2015) por assim dizer, parte da entrevista com os alunos bolsistas do BIPID, segundo ele, aprender Análise Combinatória sem fórmulas flui muito melhor, entretanto, ressalta que, há conteúdos matemáticos cujas fórmulas são indispensáveis, entretanto, esse fato não se aplica a Análise Combinatória.

Sobre a devolução, Trevizan (2015) ressalta a afala do professor e dos alunos bolsistas a esse respeito, nesse sentindo, os entrevistados corroboram da mesma percepção de que, os fatores que mais impedem a devolução de exercício nas aulas de matemática estão ligados a exercícios difíceis, fora da realidade dos alunos, falta de entendimento e em alguns casos aversão a disciplina de matemática.

Baseada nas observações e falas do professor e alunos bolsistas, Trevizan (2015) ressalta que nas falas do professor e alunos bolsistas uma afirmação é peculiar, a de que não tem sido comum os alunos perguntarem para que servem os conteúdos matemáticos e quando fazem, eles estão querendo saber onde poderiam usar no seu dia a dia.

A respeito da percepção de Trevizan (2015), do 3º momento do projeto que ela desenvolve sobre situação adidática a luz de Gui Brousseau. Para a autora, a situação adidática não é uma utopia e, nesses termos, é possível os alunos terem vontade de aprender, nesse contexto, segundo a autora, “os personagens vão descobrindo com tanta naturalidade os conteúdos matemáticos”. Outra percepção de Trevizan (2015) nesse percurso está relacionada a SD, ela identifica todas as fases da situação adidática durante o processo da “devolução”.

Sobre esse aspecto, Trevizan (2015) avalia algumas etapas que antecedem a “devolução” considerando, por exemplo, a aceitação da proposta para resolver o desafio, mesmo os alunos não estando no espaço formal escolar e sem a obrigatoriedade de devolução. Nesse contexto, Trevizan (2015) identifica a busca pela compreensão do desafio evidenciada pelas perguntas feitas pelos alunos e o desejo de continuar aprendendo revelada na satisfação dos alunos ao descobrirem cada resposta.

Para Trevizan (2015), “a devolução não ocorre somente no início de cada desafio, mas durante toda a situação adidática”. Segundo autora, a devolução é responsável por desencadear as fases de ação, formulação, validação e pode gerar a necessidade da institucionalização. A esse respeito segundo Trevizan (2015), a devolução “interfere também no tempo longo do conhecimento, quando promove o desejo de continuar aprendendo”.

Trevizan (2015) ressalta que no percurso da sua pesquisa ela identifica que todas as fases da situação adidática foram alcançadas. A autora evidencia a importância que os bolsistas tiveram em cada etapa, bem como a importância dos recursos utilizados.

Segundo Trevizan (2015), apesar de não ter sido realizada de modo completo nas 2 horas em que os dados foram coletados, realizou-se posteriormente pelos próprios bolsistas e pelo professor Josenilton, que prosseguiu trabalhando com este tema.

Outro fator considerado por Trevizan (2015) como um aliado do processo por assim dizer é que, devido toda a atividade do terceiro momento da pesquisa ter sido realizado no contra turno com a adesão dos alunos tenha sido profícuo.

Desse modo, Trevizan (2015) ressalta que, por ter um número reduzido de aluno que aderiram a pesquisa, fizeram Trevizan (2015) prestar mais atenção em alguns fatores presentes e que acontecem em sala de aula em escala maior, como pro exemplo, as inseguranças e as diferenças podem ser obstáculos para que a sitação adidática siga adiante.

Outro fator observado por Trevizan (2015) foi que o contexto da pesquisa trouxe potencialidades que a sala de aula geralmente não tem, mas que, segundo a autora, poderia ter. Nesse contexto, Trevizan (2015) considera que, "seria interessante se outros trabalhos, na continuidade deste, pudessem investigar a possibilidade de um contrato didático que levasse em consideração":

- ✓ O respeito pelo tempo do aluno, com o intuíto de oportunizar o aluno a passar pelas fases de ação, formulação e validação, de modo que o tempo esteja em função da Sequência Didática e não o contrário.
- ✓ A flexibilidade na forma de trabalho individual/ em grupo, baseada na percepção do professor e dos alunos sobre as necessidades que surgem.
- ✓ A atenção do professor para com cada aluno individualmente para que ele possa apresentar seu raciocínio e o professor possa perceber as lacunas e incoerências.
- ✓ O centro das situações posto na aprendizagem e não no simples "tirar nota".
- ✓ A variedade de Sequências Didáticas, de modo que o aluno não seja induzido a pensar que todos os dados necessários para a solução estão prontos no problema, ou que se resolvendo um problema de uma lista, os demais serão análogos.

Para Trevizan (2015) pesquisa e ensino de fato caminham juntos, e que o bom professor é aquele que vê a vida como um laboratório de aprendizagens. Ainda sobre suas percepções no percurso da pesquisa, Trevizan (2015) sinaliza que processo de ensino e aprendizagem é mais complexo do que ela imaginava no início da pesquisa, portanto, a resposta não é tão objetiva assim.

Isto porque, para Trevizan (2015), as diversas variáveis que formatam uma sala de aula não permitem encontrar “uma única raiz para a equação”. Segundo Trevizan (2015), um sistema didático formado por professor, alunos e saber pode adquirir diversos formatos, todos eles capazes de gerar situações de aprendizagem.

Nesse contexto, Trevizan (2015) levada pela reflexão e motivada pela pergunta-chave “É possível planejar situações potencialmente adidáticas?”. Sobre esse aspecto, Trevizan (2015) em vez de dar uma resposta objetiva, procura sintetizar algumas reflexões a esse respeito, entre elas, que fatores favorecem/desfavorecem a concretização de uma situação adidática, planejada para tal.

Para Trevizan (2015), por mais óbvio que pareça, “é o aluno que decide se irá aprender ou não”. Considerando esse contexto, Trevizan (2015) ressalta que, o Contrato Didático interfere muito nas possibilidades que se abrem para uma situação adidática.

Segundo Trevizan (2015), uma Sequência Didática pode privilegiar possibilidades adidáticas, que favoreça uma aprendizagem mais autônoma e mais próxima dos objetivos que se pretendem nos documentos oficiais.

Sobre esse aspecto, Trevizan (2015) ressalta que, o planejamento é a principal atividade do professor que se preocupa em criar situações potencialmente adidáticas, levando em consideração os conhecimentos prévios de seus alunos e recursos adequados, sejam eles materiais ou simbólicos.

Outro fator percebido por Trevizan (2015) no percurso da sua pesquisa é que, o professor tem nesse contexto da situação adidática, a função de realizar a devolução e de orientar a atividade do aluno. Segundo a autora, “a devolução vai além de convencer o aluno da importância de realizar a atividade, ela engloba a compreensão do desafio proposto e de seu significado”. Sobre esse aspecto, Trevizan (2015), ressalta que “de nada serve realizar a devolução se não for dado tempo suficiente para que o aluno chegue a alguma conclusão”.

A percepção e conclusão de Trevizan (2015) sobre a microgênese do desenvolvimento e o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal é que, “as experiências são pessoais, que as trajetórias são únicas, portanto, não se pode esperar que todos os alunos estejam no mesmo nível de desenvolvimento.

Dessa forma, para Trevizan (2015), qualquer que seja a situação, mesmo que haja igualdade de oportunidade nunca haverá igualdade de aprendizagem. Por último, Trevizan (2015) considera que, somente “o fato de estar interessado em produzir situações potencialmente adidáticas demonstra que o professor compreende exatamente o que é aprender e o que é ensinar”.

Segundo Trevizan (2015), a situação adidática “é apenas um construto, ou seja, um termo científico criado e definido para designar um conceito ou fenômeno ao qual queremos nos referir”. Para tanto, segundo Trevizan (2015), “existe uma postura docente coerente com essa ideia e, independe da existência do termo, tal postura valoriza cada aluno como capaz de aprender”.

2.1.4. Contribuições da revisão da literatura

As informações no Quadro 4 a seguir, contemplam algumas das ideias dos autores analisados, ou seja, àquelas que trazem alguma contribuição ao trabalho. Para aprofundamentos sobre as temáticas, recomenda-se a leitura dos textos apresentados.

Quadro 4 – Síntese da reunião bibliográfica.

QUESTÕES	TREVIZAN (2015)	MOTA (2019)	GONÇALVES (2019)
Tipo de trabalho	**Dissertação**	**Dissertação**	**Dissertação**
Objetivo Geral	Mostrar que a situação adidática, sendo um conceito que permite modelar determinadas situações de aprendizagem também serve como instrumento metodológico, à medida que o docente, de posse dele, pode planejar situações potencialmente adidáticas em sala de aula.	Elaborar um projeto cujas atividades serão desenvolvidas por meio de uma Sequência Didática, com turmas de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio que, estejam submetidos ao método tradicional da aprendizagem para o referido assunto.	Averiguar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de função do segundo grau.
Contribuições	Algumas contribuições desse trabalho vieram também das suas observações durante o processo de aplicação da SD. Assim, considera-se a importancia do tempo do aluno, para que ele possa vivenciar todas as fases da SD, de modo que o tempo esteja em função da sequência didática e não o contrário. Um outra contribuição reside na variedade de sequências didáticas, de modo que o aluno não seja induzido a pensar que todos os dados necessários para a solução estão prontos no problema, ou que se resolvendo um problema de uma lista, os demais serão análogos. Assim também, de deixar claro aos alunos a importância dos registros de cada um e de todos na devolução da SD para pesquisa. Do mesmo modo, a percepção e inclusão de alunos com deficias. de aprendizagem.	Esse trabalho contribui de maneira significativa para a formulação, aplicação e diagnose dos conhecimentos prévios dos alunos. Assim também, para as oficinas realizadas neste pesquisa. Do mesmo modo, ajudou na formulação da cosntrução das UARC'S.	O trabalho do autor contribui com a proposta de diversidade de abordagem de um conteúdo e a busca por engajamento dos alunos com as dicussões. Assim também, o autor contribui com as atividades investigativas de seu trabalho como por exemplo, o levantamento de hipóteses, a busca de informações, discussões, bem como a comunicação dos resultados de maneira oral e escrita.

Dificuldades enfrentadas pelos alunos	Considerando a bservação dos aspectos analisados, essa questão envolve fatores além dos metodológicos, mas é frequente a reflexão que envolve certa insatisfação com o chamado "método tradicional" de ensino de Matemática. Essa forma de ensinar, segundo a autora, restringe as possibilidades de o aluno desenvolver estratégias e raciocinar.	As análises revelam que parte considerável dos alunos não estudam fora do ambiente escolar e, de modo geral, a metodologia tradicional de ensinar matemática é respossável pelo desinteresse, e pelas dificuldades que os alunos tem em aprender matemática.	Tendo em vista a coleta de dados e os argumentos apresentados durante sua pesquisa, para este autor, a matemática é ensinada como um conjunto de fórmulas e regras prontas e acabadas para serem memorizadas, a método tradicional prevalece no ensino dos conteúdos, e a falta de rotina de estudos fora do ambiente escolar.
Dificuldades e habilidades não consolidadas da turma	Levando-se em consideração os desafios adicionais em sala de aula, há um quantitativo que não pode ser desprezado e que dificulta a aprendizagem de alunos como por exemplo; A dislexia, transtorno de déficit de Atenção, discalculia, disgrafia, déficits de processamento facilmente encontrados no contexto de sala de aula.	Os dados demonstram que a escolaridade dos responsáveis dos alunos influenciam no desempenho escolar destes[23]. Além do que, para este autor, os alunos não tem afinidade com a matemática.	Não foi identificado no trabalçho deste autor nehuma dificuldade habilidaades não consolidadas em sala de aula.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

[23] Segundo pesquisa de Goulart (2010) cuja explicação para a essa influência está no estímulo que as crianças recebem dentro de casa.

A seguir, nesta narrativa, descreve-se das contribuições apresentadas nos diversos trabalhos, quais foram utilizadas, adequadas, reformuladas, inseridas no trabalho em tela. Assim também, o que não foi realizado pela revisão de estudos e que acrescentamos neste trabalho.

Diante dos aspectos analisados em cada um desses trabalhos, de modo geral, somos levados a considerar que uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos na disciplina de matemática está relacionada com a forma de como as aulas de matemática acontecem, em muitos casos, de maneira tradicional, exigindo resposta precisas e procedimentos infalíveis além da retenção de fórmulas, propriedades e teoremas. Nesse contexto, identificamos ainda que, por se tratar de uma disciplina que necessita de conhecimentos prévios para se desenvolver como as operações aritméticas, procedimentos algébricos, definições e teoremas geométricos além do comportamento dentro e fora de sala de aula desses alunos com relação aos estudos de maneira geral em especial os conteúdos de matemática, tem-se as dificuldades na aprendizagem agravada para uma grande parte dos alunos.

Assim sendo, na elaboração do teste de conhecimentos prévios, bem como nas oficinas de matemática, foi considerado as dificuldades apontadas pela revisão da literatura, em especial a relevância do trabalho de Mota (2019) nesse processo inicial. Após os resultados obtidos a partir da aplicação do teste de conhecimentos prévios em consonância com os autores, foi elaborada uma oficina que buscasse minimizar as lacunas da aprendizagem.

Atendendo as observações de Mota (2019) e Gonçalves (2019), imprimiu-se uma aula diferente das tradicionais buscando maior engajamento dos alunos, como atividades impressas, leitura e interpretação de texto matemático, discussão sobre as atividades propostas relacionadas ao cotidiano dos alunos. Além do que, foi estimulado e valorizado a devolução das atividades como propõe Trevizan (2015). Assim também foi destacado por meio de debate em sala de aula a resolução dos alunos que resolveram sem a utilização de fórmulas como diagnosticado o exagero dessas no trabalho de Gonçalves (2019).

Por outro lado, por considerarmos que as dificuldades e habilidades não consolidadas em uma turma interferem no rendimento escolar e nas estatísticas de dificuldades e repetência em matemática – não é o foco deste trabalho, no entanto a sala onde o trabalho se desenvolve tem 2 (dois) alunos com laudos e outros 2 (dois) com suspeita de déficit de aprendizagem por razões diversas – desse modo, é relevante que esse ponto seja considerado aqui, e por essa razão destacamos o trabalho de Trevizan (2015) que avalia, entre outros, esses aspectos como um campo de problemas que interfere no baixo rendimento escolar.

Dessa maneira, foi pensado como estratégia para minimizar os impactos do ensino e aprendizagem desses alunos que, eles fossem inseridos em grupos distintos, que atendesse minimamente suas necessidades educacionais. Levando em considerando a afinidade deles com os demais componentes do grupo, além de inseri-los em grupos que se destacassem em termos de competência e habilidades matemática.

E ainda, este trabalho se diferencia do trabalho de Trevizan (2015), por incluir esses alunos no processo de ensino e aprendizagem. Para tanto, além da oficina de matemática sobre conhecimentos prévios necessários ao conteúdo de PA, foi realizado um trabalho específico sobre regularidade de padrões com os alunos que apresentam déficit de aprendizagem e que demonstraram durante a oficina, dificuldade de reconhecer um padrão. Vale ressaltar que alguns desses alunos apresentam laudo médico e outros são apontados pela coordenação e professores como alunos que apresentam indícios de déficit de aprendizagem, atenção etc.

Assim, todos esses autores trabalharam com um grupo reduzido de alunos, e ou grupo de alunos convidados a participarem da SD – convite aceito talvez garanta o interesse desses em participar – No entanto, o trabalho que se desenvolve se diferencia dos demais pelo quantitativo de alunos, 38 (trinta e oito alunos) em uma única sala de aula com quatro desses alunos apresentando déficit de aprendizagem por razões diversas, sendo um deles com deficiência múltipla.

Diante disso, sem simular uma sala de aula ideal e considerando o quantitativo de alunos elevado, assim como todos os seus problemas, o trabalho que segue tem por finalidade investigar se, nessas condições, uma determinada sequência didática, elaborada a partir da estrutura da SD segundo Cabral (2017) contribui para conferir sentindo e significado para aprendizagem de Progressão Aritmética.

2.2. A PERCEPÇÃO DE ALUNOS E PROFESSORES

A narrativa neste ponto tem por objetivo apresentar a concepção de um grupo de professores e outro de alunos sobre os problemas acerca do ensino e de aprendizagem de Matemática em especialmente ao ensino de PA identificados a partir de questionário sociocultural aplicado por meio do *google forms*.

2.2.1. A percepção dos professores

Com o propósito de conseguir o maior número de professores de matemática que pudessem participar da pesquisa, percorri 8 escolas públicas e 4 escolas particulares nos turnos da manhã, tarde e noite. Assim também, solicitei aos professores os quais consegui falar pessoalmente que repassassem o convite e o formulário de pesquisa realizado por meio do *google forms* aos seus colegas professores de matemática.

Assim sendo, a narrativa que segue tem o objetivo de apresentar os resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de professores de Matemática acerca do ensino de Progressão Aritmética que responderam um questionário de pesquisa através do *google forms*.

Desse modo, o questionário socioeconômico continha questões abertas e fechadas, totalizando vinte perguntas, versando sobre em qual a rede de ensino que esses professores trabalham, o tempo de serviço no magistério, a formação inicial e continuada, as questões referentes às metodologias de ensino, o livro didático de matemática, a avaliação no que diz respeito a aprendizagem da Progressão Aritmética.

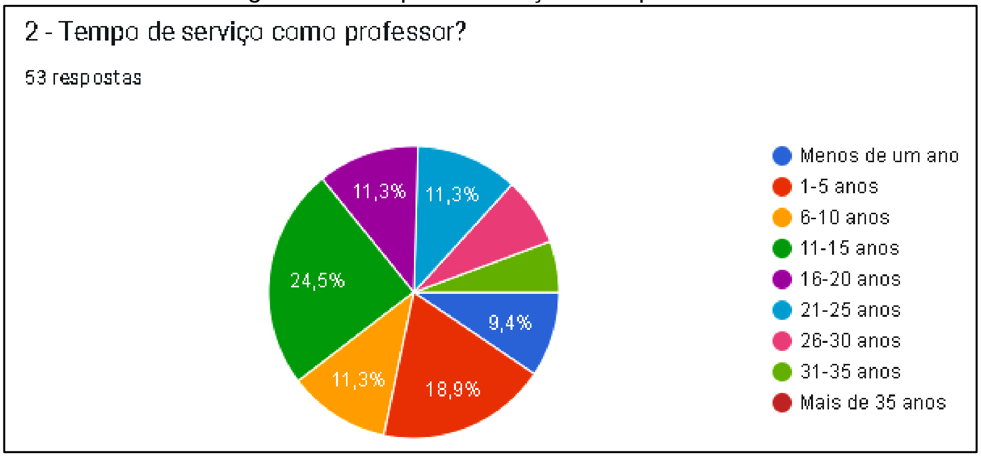
A aplicação do questionário socioeconômico aos professores teve como principal objetivo caracterizar a abordagem da Progressão Aritmética. Assim também, identificar as possíveis dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem em Progressão Aritmética, bem como, o material didático utilizado para o ensino de Progressão Aritmética. Para tanto, utilizarei somente as perguntas do questionário que se destina a caracterizar como está se dando o ensino de P.A.

Dessa maneira, o questionário de pesquisa por meio do *google forms* teve um alcance efetivo de 53 (cinquenta e três) professores de matemática. A seguir, descrevo os resultados obtidos com a aplicação do questionário em seguida faço algumas análises preliminares. Quando indagados qual o tempo de serviço como professor de matemática eles possuem em sala de aula, obtivemos as seguintes respostas; 24,5% disseram respectivamente ter de 11 a 15 anos, 18,9% disseram ter de 1 a 5 anos, 11,3% disseram ter de 6 a 10 anos, 11,3% disseram ter de 16 a 20 anos, 11,3%

disseram ter 21 a 25 anos e 9,4% disseram ter menos de um 1 ano. Por outro lado, o restante 13,3% disseram ter 26 a 35 anos.

Em resumo, estamos diante de uma amostra equilibrada com relação a quantidade de professores e o tempo de serviço como professor de matemática. Contudo, a quantidade de professores entrevistado que possuem de 11 a 15 anos destoa dessa maioria. Entretanto, enriquece ainda mais a amostra com relação a diversidade e possibilidades de respostas nesta pesquisa conforme apresenta o gráfico da Figura 8 sobre o tempo de serviço como professor.

Figura 8 - Tempo de serviço como professor.

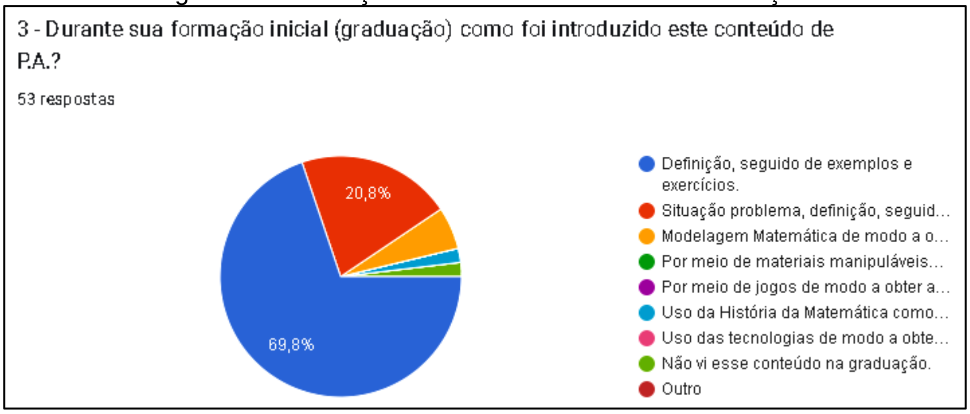


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagados a respeito do conteúdo de P.A., na formação inicial obtivemos o seguinte resulta; 69,8% dos professores responderam que o conteúdo de Progressão Aritmética foi introduzido a partir da definição seguido de exemplos e exercícios. Do mesmo modo, 20,8% disseram que foi a partir de uma situação problema seguido de exercício. Por outro lado, 9,4% disseram que foi a partir de modelagem matemática e ou modelagem matemática e ou não viram esse conteúdo na graduação.

Nesse âmbito, é relevante considerar que mais da metade dos professores durante sua formação inicial viram o conteúdo de P.A. a partir da definição seguido de exemplos e exercício. Isso demonstra o quanto o ensino e a aprendizagem na formação inicial têm contribuído para a manutenção de um ensino baseado no modelo tradicional de acordo com a Figura 9.

Figura 9 - Introdução do conteúdo de PA na Graduação.

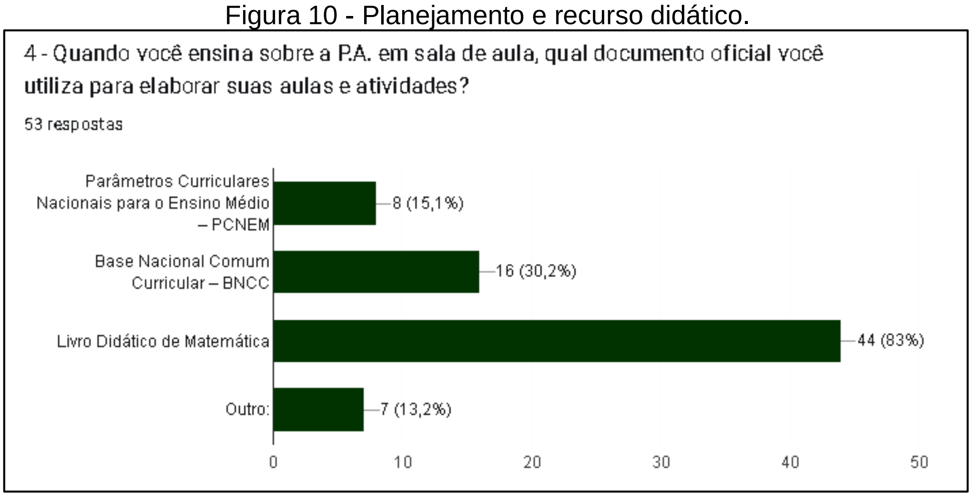


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos professores qual o documento oficial você utiliza para elaborar as suas aulas P.A., 83% livro didático de Matemática, 30,2% Base Nacional Curricular Comum (BNCC), 15,1% Parâmetro Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e 13,2% disseram utilizar outro documento oficial para elaborar suas atividades.

Diante disso, sendo o livro didático fundamental na elaboração das aulas de P.A., de imediato podemos deduzir que para essa amostra de professores um número expressivo de professores tem a sua abordagem baseada no livro didático apresenta acerca de PA em conformidade com a Figura 10 sobre o planejamento e recurso didático.

Figura 10 - Planejamento e recurso didático.



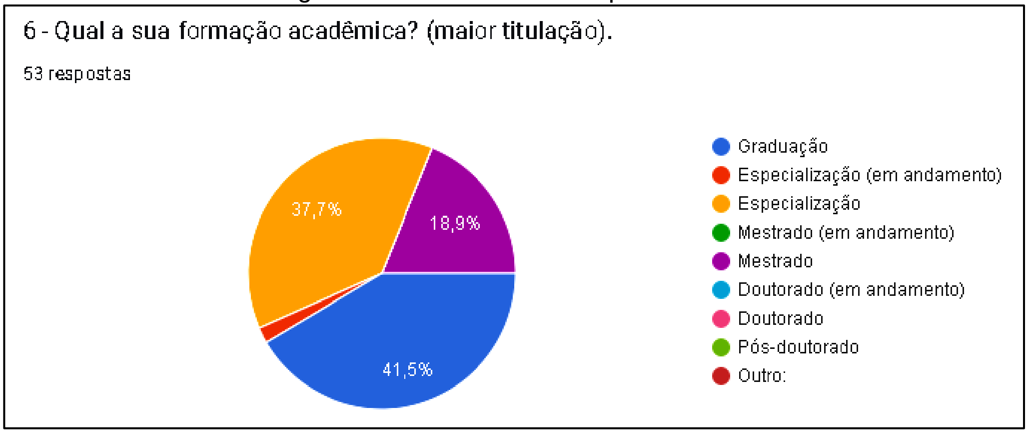
Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagados qual a maior titulação, obtivemos as seguintes repostas; 41,5% responderam ter graduação, 37,7% especialização, 18,9% responderam ter mestrado e 1,9% disseram que a sua especialização está em curso.

Baseado nas informações, concluímos que o número de professores que deram sequência na sua formação continuada é bem superior a quantidade de professores que possuem somente a graduação. Resumidamente podemos dizer que há uma preocupação com a formação continuado por parte dos professores de matemática.

Por outro lado, percebemos através das análises preliminares que fizemos a partir das respostas anteriores que, mesmo para uma amostra de professores, com um número de especialista e mestres superior aos professores que possuem somente a graduação, ainda se mantem um número expressivo 69,8% dos professores que estruturam suas aulas de P.A. a partir da definição, seguido de exemplos e exercícios, caracterizando o ensino tradicional para o conteúdo de PA indicado na Figura 11 sobre a titularidade dos professores.

Figura 11 - Titularidade dos professores.

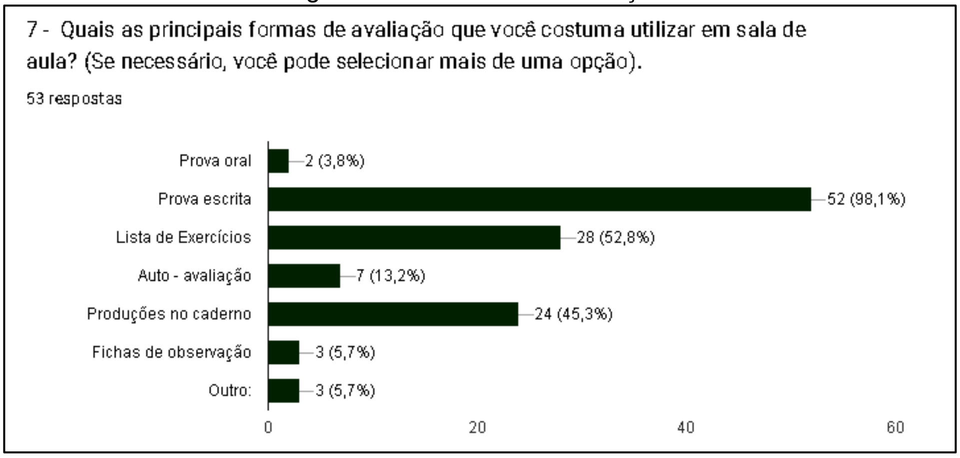


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagados qual a principal forma de avaliação, podendo o professore marcar mais de uma opção, obtivemos as respostas; 98,1% dos professores responderam prova escrita, 52,8% responderam lista de exercício, 45,3% responderam produções no caderno. Por outro lado, tivemos 13,2% responderam autoavaliação, 5,7% ficha de observação, assim também, 5,7 responderam outro e 3,8% prova oral.

Desse modo, concluímos que a avaliação escrita continua sendo o principal instrumento de avaliação do professor, seguido pela lista de exercício e as produções no caderno cuja escolhas são traços marcantes de uma avaliação tradicional de acordo a Figura 12 sobre formas de avaliação.

Figura 12 - Formas de avaliação.

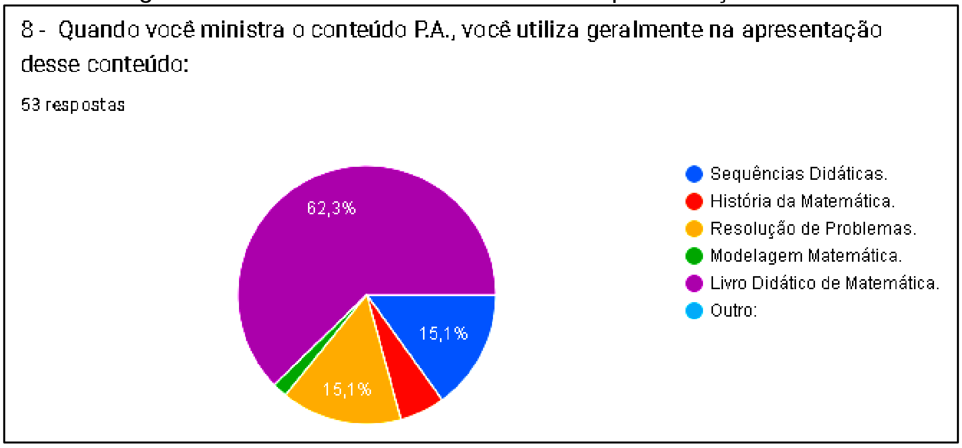


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos dos professores o que ele utiliza na apresentação do conteúdo de P.A., obtivemos as respostas; 62,3% responderam que utilizam o livro didático. Por outro lado, 15,1% sequência didática, assim também, 15,1% resolução de problemas. Vale destacar que também pontuou história da matemática e um pouco menos modelagem matemática.

Assim, 62,3% dos professores responderam utilizarem como material didático o livro didático. O que reafirma a importância do livro didático como material de escolha na abordagem de Progressão Aritmética apresentado na Figura 13 sobre o material didático utilizado na apresentação de PA.

Figura 13 - Material didático utilizado na apresentação de PA.

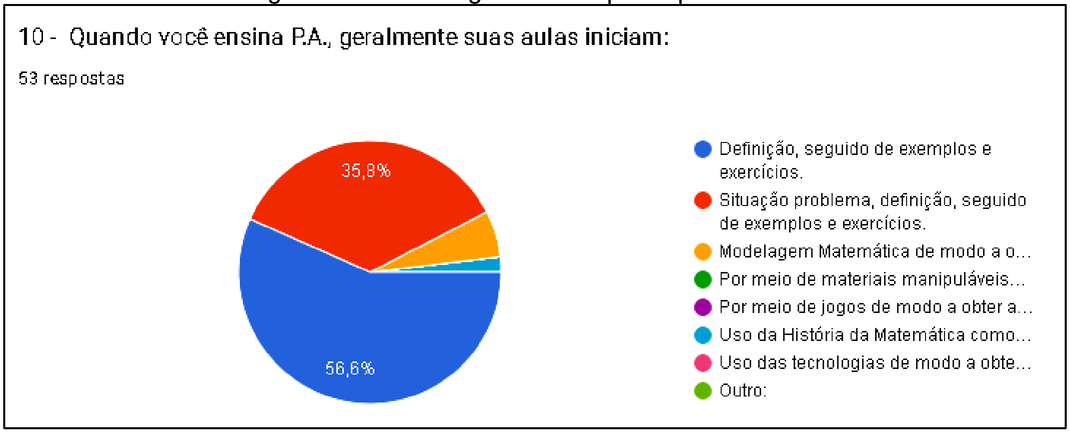


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos professores como eles geralmente iniciam o conteúdo de P.A. as respostas foram; 56,6% responderam que iniciam por definição, seguido de exemplo e exercício, 35,8% por meio de Situação problema, seguido de definição, exemplos e exercícios. Por outro lado, 7,52 responderam por meio de modelagem matemática e por meio da história da matemática.

Assim sendo, concluímos que uma dinâmica ainda muito presente na prática dos professores de matemática quando abordam o conteúdo de P.A. em turmas do 1º ano do ensino médio é iniciar a partir da definição seguido de exemplos conforme Figura 14 sobre abordagem da PA pelos professores.

Figura 14 - Abordagem da PA pelos professores.



Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos professores quantas aulas são utilizadas para ensinar P.A. as respostas foram; 43,4% responderam de 04 a 06 (quatro a seis) aulas, 30,2% de 07 a 09 (sete a nove) aulas, 15,1% de 01 a 03 (um a três) aulas e 11,3% mais de nove aulas.

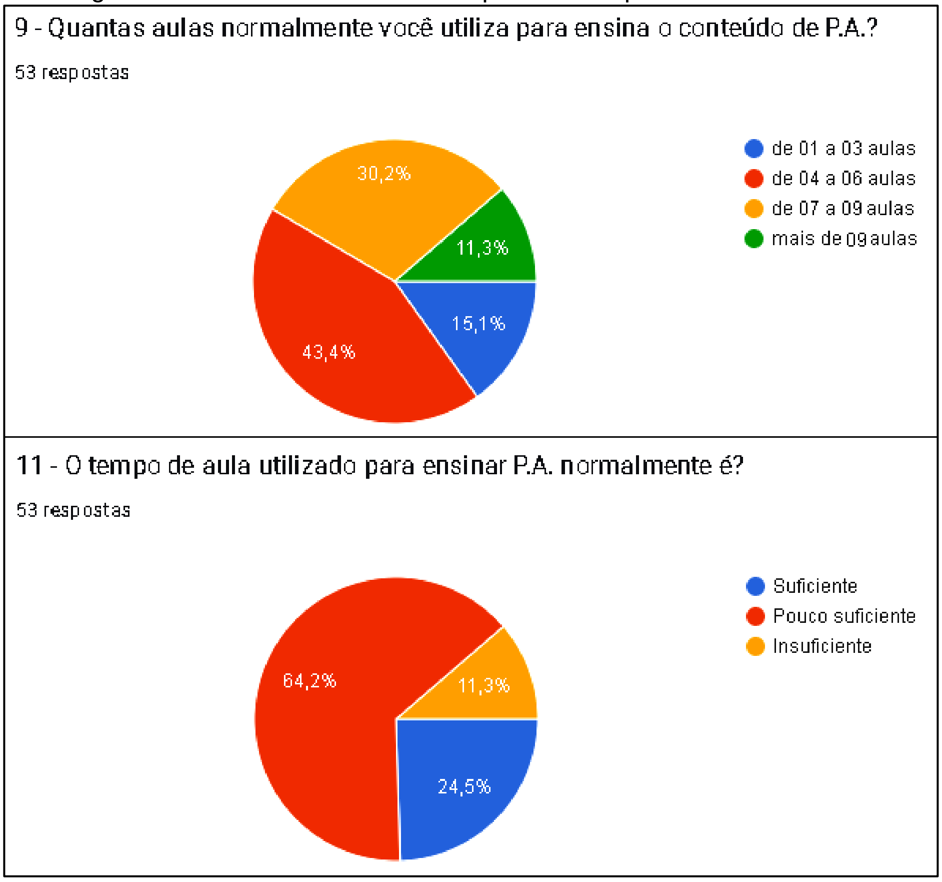
Em síntese, a quantidade de aulas para o ensino de P.A. é relativo e depende de vários fatores, um deles, é a metodologia adotada para o ensino de P.A.. Por essa razão, encontramos nessa amostra de professores uma diversidade acentuada com relação a essa escolha. Entretanto, destaca-se nessa amostra que 15,1% dos professores responderam de 01 a 03 aulas para o ensino de P.A.

Quando indagamos aos professores sobre o tempo de aula para o ensino de P.A., as repostas foram; 64,2% responderam pouco suficiente para o ensino de P.A. 24,5% responderam suficiente para o ensino de P.A. e 11,3% responderam é insuficiente para o ensino de P.A.

De modo que, essa amostra de professores revela uma preocupação com o tempo insuficiente de aula destinado ao ensino de P.A. Por outro lado, 37,5% concordam que o tempo utilizado para o ensino de P.A é suficiente. Por outro lado, indo na contramão da maioria 15,1% dos professores admite que ensinam o conteúdo de

P.A. em um intervalo de 01 a 03 aulas como apresenta a Figura 15 sobre o número de aulas e tempo utilizado para o ensino de PA.

Figura 15 - Número de aulas e tempo utilizado para o ensino de PA.



Fonte: adaptada do Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

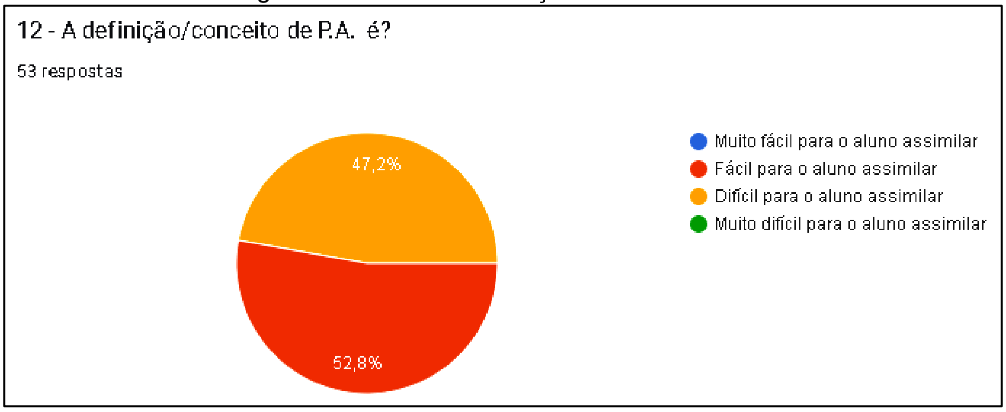
Quando indagamos aos professores sobre a definição/conceito de P.A., obtivemos as respostas; 52,8% responderam que a definição/conceito é fácil para o aluno assimilar. Por outro lado, 47,2% dos professores responderam que a definição/conceito de Progressão Aritmética é difícil para os alunos assimilarem.

Assim sendo, vale ressaltar que a P.A. pode ser definida como uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r. O número r é chamado de razão ou diferença comum da progressão aritmética.

Contudo, a PA também pode ser definida como sendo, uma sequência numérica (a_n) com $n \in \mathbb{N}$ definida recursivamente por $a_n = a_{n-1} + r, n > 1$, onde o primeiro termo a_1, é um número dado. O número r é chamado razão da progressão aritmética.

Desse modo, sem levar em consideração outros fatores, entendemos que a partir de como o conceito/definição é abordado em uma PA pode aumentar ou diminuir o grau de dificuldade e compreensão do aluno. No entanto, destaca-se que embora a maioria 52,8% tenha a percepção de que a definição/conceito é fácil para o aluno. De outro lado um número também significativo 47,2% acreditam que o conceito/definição de PA é difícil para o aluno assimilar conforme Figura 16 sobre definição/conceito de PA.

Figura 16 - Sobre a definição/conceito de PA.

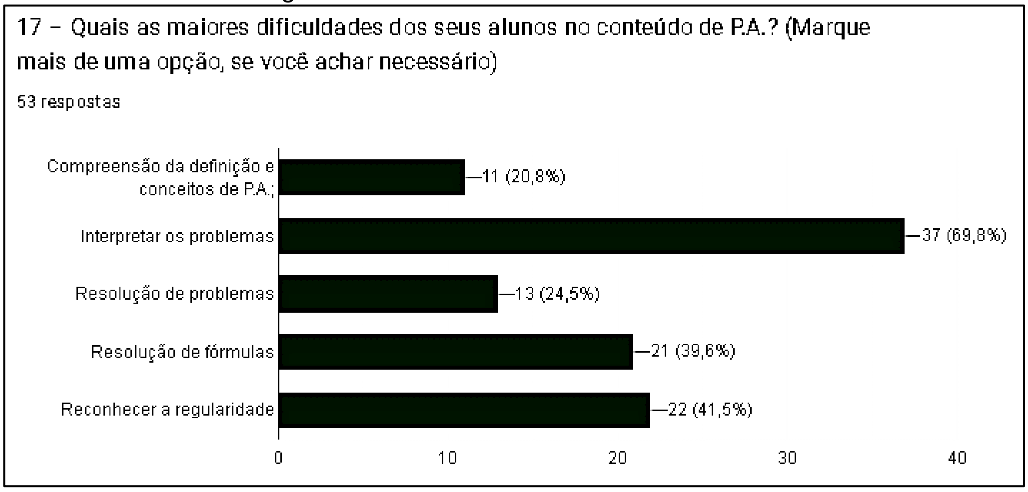


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos professores quais eram as maiores dificuldades dos seus alunos no conteúdo de PA, obtivemos as respostas; 68,8% responderam que está em interpretar os problemas, 41,5% responderam que está em reconhecer a regularidade, 39,6% responderam que está na resolução de fórmulas, 24,5% responderam que está relacionada com a resolução de problemas e 20,8% responderam compreensão da definição/conceito de PA.

Desse modo, percebemos que as dificuldades apontadas pelos professores são múltiplas. O que deixa claro para nós nesse contexto é que algo no ensino de PA não converge para a aprendizagem, uma vez que o básico em sequência numérica (regularidade) não está sendo reconhecida pelos alunos como apresentado na Figura 17 sobre a dificuldade dos alunos em PA.

Figura 17 - Dificuldades dos alunos em PA.



Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Foram realizadas duas perguntas abertas aos professores de matemática onde se indagou levando em conta a experiência profissional, aponte uma ou mais dificuldade do aluno em aprender/assimilar PA a outra pergunta solicitou de forma resumida porque na sua opinião o aluno tem dificuldade com o estudo de PA.

As respostas foram diversas, no entanto, iremos destacar somente aquelas que chamam atenção pelo caráter recorrente ou por sua convergência ou por sua proximidade. Assim sendo, podemos destacar de modo geral, segundo os professores, uma média de 23% disseram que o aluno não sabe aritmética básica, 9%não possuem conhecimentos prévios, 7% têm dificuldade em interpretar os problemas, 5% não sabem tabuada e 2% não estudam em um ambiente fora da escola.

Dessa maneira, sumarizando as percepções dos professores que responderam o questionário de pesquisa, tem-se de maneira resumida que, desde a formação inicial, da maioria desses professores, o ensino e aprendizagem de conteúdos aconteceu de maneira tradicional, ou seja, por meio da definição seguido de exemplo e exercício. Esse modelo de ensino parece influenciar mais adiante nas suas práticas em sala de aula.

Outro fator que merece destaque neste ponto, é a abordagem realizada do conteúdo de PA que é feita predominantemente por meio do livro didático escolhidos a partir do PNLD. Vale ressaltar que, de modo geral, os livros possuem problemas na apresentação do conteúdo de PA.

A opinião dos professores é uma questão que merece relevância nessa narrativa, não só porque reafirmar um dos fios condutores dessa pesquisa, mais também, por nos conceder viés auxiliares para a compreensão dela. Assim sendo, os professores destacam dois problemas fundamentais que os alunos apresentam e que dificultam o ensino e a aprendizagem de PA, são eles; não possuem conhecimentos prévios subjacentes ao conteúdo de PA e possuem dificuldades para a interpretação do problema.

Além do mais, embora esses dois problemas apresentados despontem como um dos maiores problemas dos alunos paro ensino e aprendizagem em PA, existem outros problemas revelados na pesquisa com esses professores e que não são menos importantes. Entretanto, abordarei na conclusão desta pesquisa.

2.2.2. A percepção dos alunos

Este tópico tem o objetivo de apresentar os resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de alunos 2º e 3º ano do ensino médio acerca do ensino e aprendizagem em matemática e, em especial, de PA. Para tanto, solicitei aos professores de três turmas do 2º ano e duas turmas do 3º ano do ensino médio que pudessem estar disponibilizando o meu número do WhatsApp aos seus alunos e explicando aos seus alunos que se tratava de uma pesquisa de mestrado Profissional em Matemática da UEPA.

Assim, obtive efetivamente um grupo com 73 alunos sendo que desses, somente 60 alunos participaram da pesquisa que estava sendo proposta por meio um formulário no google forms. Os demais alunos, por alguma razão não participaram como sujeitos de pesquisa, contudo, permaneceram no grupo criado para esses fins. Vale ressaltar que fiquei a disposição dos alunos para esclarecer qualquer dúvida acerca das perguntas e respostas contidas no formulário.

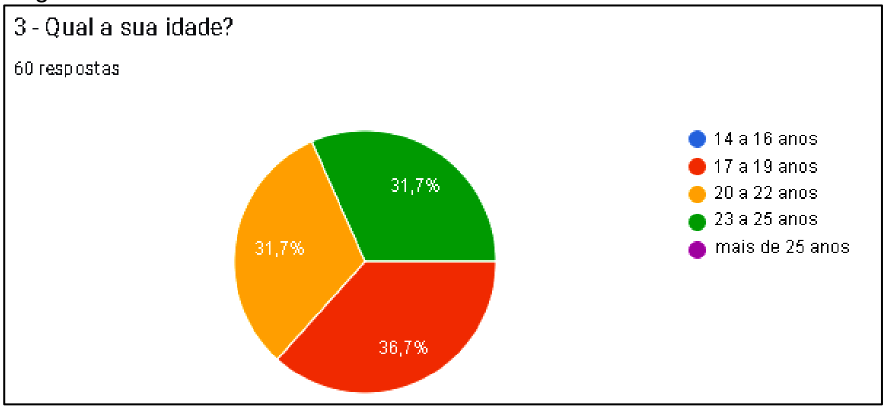
O questionário socioeconômico continha questões abertas e fechadas, totalizando vinte perguntas, versando sobre em qual a rede de ensino eles já estudaram, questões referentes às metodologias de ensino dos seus professores de matemática, o material didático utilizado pelos professores para o ensino de matemática, a avaliação utilizada pelos professores de matemática e como se deu o ensino de Progressão Aritmética.

A aplicação do questionário socioeconômico aos alunos teve como principal objetivo caracterizar a abordagem da Progressão Aritmética. Assim também, identificar as possíveis dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem em matemática especialmente em Progressão Aritmética, bem como, o material didático utilizado para o ensino de Progressão Aritmética. Desse modo, utilizarei somente as perguntas do questionário que se destinam a esses fins.

Quando indagamos aos alunos sobre sua idade, obtivemos as seguintes respostas; 56,7% dos alunos responderam de 20 a 22 anos de idade, 26,7% responderam de 17 a 19 anos e 16,7% responderam 23 a 25 anos. Vale ressaltar, que a idade e série distorcida dos alunos pode estar atrelada ao fato da amostra de alunos ter englobado alunos do turno da noite.

Diante do exposto, vale ressaltar que, segundo o Censo Escolar aponta mais de 7 milhões de alunos estão em situação de distorção idade-série no Brasil[24]. De acordo com a legislação brasileira, a faixa etária de escolarização obrigatória vai dos 4 aos 17 anos. Por lei, aos 4 anos, a criança deve ingressar na pré-escola, aos 6 anos, no ensino fundamental e, aos 15 anos, no ensino médio. Dessa maneira, para essa amostra de alunos, encontramos um percentual significativo de situação de distorção idade-série, ou seja, tem dois ou mais anos de atraso escolar conforme Figura 18 sobre a média das idades dos alunos do 2 e 3 anos do ensino médio.

Figura 18 - Média das idades dos alunos do 2 e 3 anos do ensino médio.



Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos alunos sobre qual o material didático que o Professor de Matemática utiliza em sala de aula, obtivemos as respostas; 85% dos alunos responderam Livro Didático de matemática, 13,3% responderam Apostilas e 1,7% responderam o uso de tecnologia diversas.

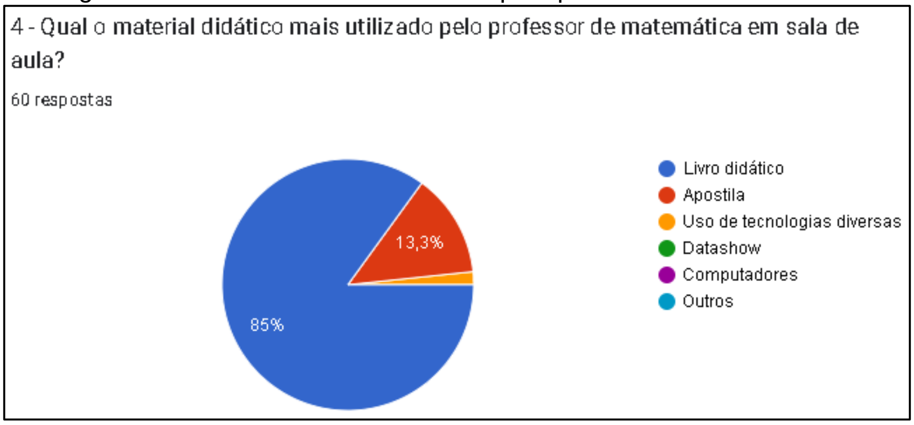
Diante do exposto, os números podem refletir várias coisas, entre elas, segundo os alunos, podemos concluir que a maioria dos professores de matemática 85% faz

[24] Panorama da distorção idade-série no Brasil segundo a Unicef (2018)

uso do livro didático de matemática para dar as suas aulas. Outra parte, 13,3% dos professores de matemática utilizam apostila. Por outro lado, 1,7% segundo os alunos fazem uso de tecnologias diversas.

Sendo assim, as respostas dos alunos, reafirmam as manifestações dos professores que responderam que o livro didático é o material de apoio mais utilizado por eles em sala de aula, assim também, o livro didático é o material mais utilizado para preparar as suas aulas de acordo com a Figura 19 sobre material didático utilizado pelo professor de matemática.

Figura 19 - Material didático utilizado pelo professor de matemática.

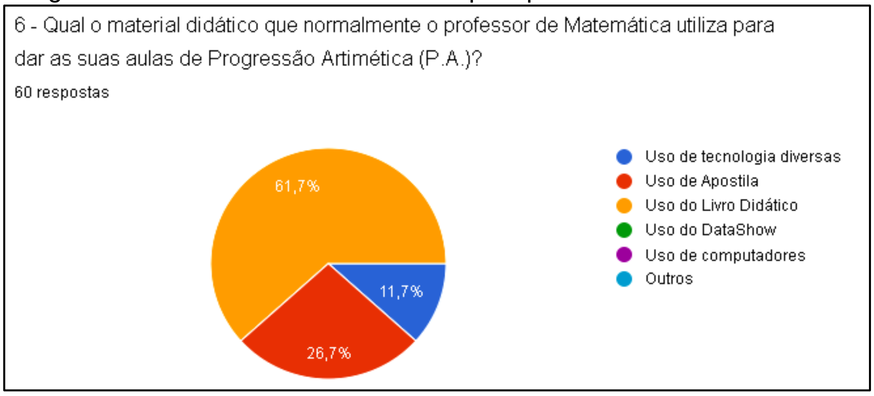


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos dos alunos sobre qual o material didático que normalmente o professor de Matemática utiliza em sala de aula as respostas foram; 61,7% utilizam o livro didático, 26,7% Utilizam apostila e 11,7% uso de tecnologias diversas.

Assim sendo, as respostas dos alunos estão em conformidade com as respostas dos professores quanto a utilização do material didático mais utilizado em sala de aula. De maneira geral, podemos concluir que o livro didático e a apostila nessa ordem são os materiais de apoio mais utilizado pelos professores de Matemática na percepção dos alunos que participaram dessa pesquisa de acordo com a Figura 20 sobre material didático utilizado.

Figura 20 - Material didático utilizado pelo professor no ensino de PA.

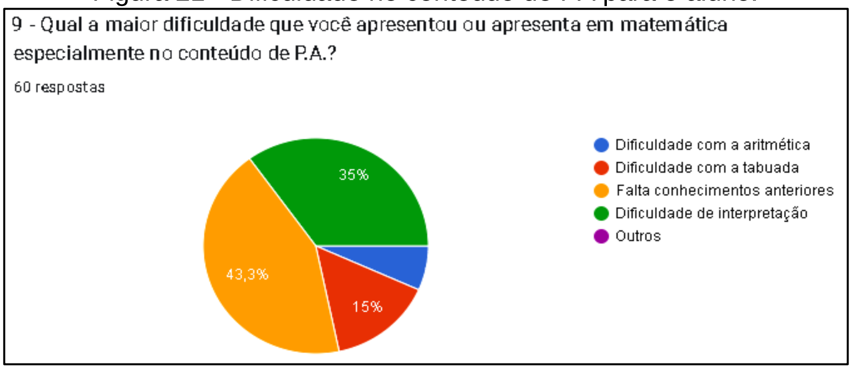


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos dos alunos sobre as dificuldades deles em matemática especialmente em PA as respostas foram; 43,3% dos alunos responderam a falta de conhecimentos prévios (anteriores). 35% responderam dificuldade de interpretação, 15% dificuldade com tabuada, e 6,7% responderam que possuem dificuldade com a aritmética. Vale ressaltar aqui, que antes os alunos que tiveram dificuldade em interpretar as perguntas e respostas entraram em contato comigo pelo grupo do WhatsApp feito para esses fins.

Diante do exposto, concluímos que as respostas dos alunos estão em consonância com as opiniões dos professores que participaram desta pesquisa acerca das dificuldades dos alunos em matemática especialmente no conteúdo de PA de acordos com a Figura 21 sobre as dificuldades no conteúdo de PA para o aluno.

Figura 21 - Dificuldade no conteúdo de PA para o aluno.

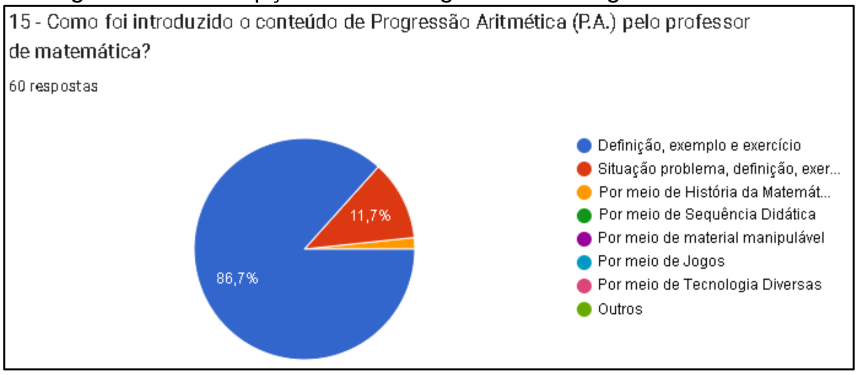


Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

Quando indagamos aos alunos sobre como os professores abordaram o conteúdo de PA nas aulas de matemática, obtivemos as respostas; 86,7% dos alunos responderam que os professores iniciaram as suas aulas de Progressão Aritmética por meio da definição, seguido de exemplo e exercício. Por outro lado, 11,7% responderam situação problema, seguido de definição e exercício, 1,6% responderam que iniciam por meio da História da Matemática.

De maneira geral, podemos concluir que as respostas dadas pelos alunos estão em consonância com as respostas da maioria dos professores quanto a abordagem do conteúdo de P.A., no que desrespeito a iniciarem por definição seguido de exemplo e exercício. Assim, o que fica evidente nas respostas dos alunos é o caráter tradicional de ensino prevalecendo sobre todos os outros aspectos mencionados apresentados na Figura 22 sobre a percepção da abordagem da PA segundo os alunos.

Figura 22 - Percepção da abordagem da PA segundo os alunos.



Fonte: Gerado pelo Google Forms a partir dos dados de pesquisa, 2022.

2.2.3. Contribuições da percepção de professores e alunos

A pesquisa de campo nesse trabalho tem o papel de contribuir na aprendizagem do aluno, possibilitando ao professor aplicador da sequência didática, identificar quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos, sobretudo, quais as necessidades do aluno para aquisição do conteúdo de PA cuja síntese apresentamos no Quadro 5.

Quadro 5 – Síntese das percepções de alunos e professores.

SUJEITO	PERCEOPÇÃO DE DIFICULDADES EM MATEMÁTICA	PERCEPÇÃO DE DIFICULDADES EM PA	ABORDAGEM DA PA	SÍNTESE DAS PERCEPÇÕES E ABORDAGEM
Professores	Dentre as dificuldades de matemática existente, destaca-se a aritmética como “geradora” da dificulta de aprendizagem do aluno.	Predomina nos alunos a dificuldade de interpretação das situações problemas, assim também com a manipulação das fórmulas.	Domina a abordagem pela definição, seguido de exemplos e atividades.	Sobressai o método tradicional de ensino da matemática a partir da aula expositiva por meio do uso da oratória.

Alunos	Destacasse a dificuldade nas operações aritmética. Assim também quando o assunto é tabuada.	Ressalta a dificuldade com as operações aritmética e o exagero de fórmulas matemática.	Predomina na percepção dos alunos a abordagem de PA pelos professores a partir da definição seguido de exemplos e exercícios.	Para o aluno prevalece a percepção de um ensino tradicional.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Dessa maneira, sumarizando as percepções dos alunos e professores, tem-se de maneira resumida que, o ensino e aprendizagem do conteúdo PA aconteceram na maioria das vezes de modo tradicional, ou seja, por meio da definição seguido de exemplo e exercício. Esse modelo de ensino revela o caráter tradicional comumente presente nas práticas dos professores de matemática no ensino de PA.

As respostas sobre as dificuldades em matemática, especialmente em PA identificadas nas respostas das perguntas abertas, apontam para diversas lacunas que dificultam o desenvolvimento e aprendizagem de novos conteúdos. Contudo, sobressai nas respostas dos alunos e que se encontra em conformidade com as respostas dos professores que a falta de conhecimento em aritmética gera dificuldades de aprendizagem. Por outro lado, os alunos notabilizam que a dificuldade com a tabuada acarreta igualmente dificuldades de aprendizagem.

Há também outros fatores que contribuem na aprendizagem dos alunos e que figuram em menor escala, mas que foram lembrados por alunos e professores como, por exemplo, a pobreza, a ambiente escola, a falta de merenda, a falta de livro e outros.

Algumas das principais contribuições dessa pesquisa de campo vieram da percepção das dificuldades em matemática, especialmente em PA. Assim sendo, incluímos um tratamento mais encorpado da aritmética durante o teste e a oficina de conhecimentos básicos.

Outro fator que auxilio este trabalho veio das percepções sobre a abordagem da PA. Desse modo, foi elaborada uma sequência didática que favoreceu ao mesmo tempo, o estímulo, o protagonismo, e a construção do conhecimento matemático pelo próprio aluno.

Por fim, as reflexões sobre as percepções das práticas pedagógicas ajudaram a reformular as ações que foram desenvolvidas durante as oficinas de conhecimentos básicos e a aplicação da sequência didática deste trabalho.

2.3. O OBJETO MATEMÁTICO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Por considerar o livro didático uma das principais fontes de consulta e instrumentos de trabalho do professor, bem como, por exercer forte influência nas atividades de ensino-aprendizagem, assim também, por merecer atenção de pesquisadores quanto sua organização didática. Por essa razão, o estudo que trazemos tem por objetivo mostrar como o ensino de Progressão Aritmética vem sendo abordado nos livros didáticos a luz dos pressupostos teóricos adotados nesta pesquisa.

Para tanto, elegemos alguns livros que compõe o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNDL) de 2018/2020 e, adicionamos a está seleção, um livro de 2013 por considerarmos uma fonte disponível de consulta para alunos e professores que, assim como os outros livros didáticos, também modela as situações de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Assim sendo, procuramos identificar nos livros: Prisma, Bonjorno, 2020; Conexões Matemática e suas Tecnologias, Leonardo, 2020; Matemática – Multiversos, Souza, 2020; Matemática – Quadrante, Chavante e Prestes, 2016; Matemática para Compreender o Mundo, Smole e Diniz, 2016; Matemática Contexto e Aplicações, Dante, 2016 e Fundamentos de Matemática Elementar, Iezzi e Hazzan, 2013, como está se dando a introdução de P.A. nos livros didáticos.

Vale ressaltar que, embora o objetivo principal é caracterizar a abordagem da P.A, nos livros didáticos em conformidade com a TSD[25] e a estrutura da SD conforme Cabral (2017), de maneira idêntica, também iremos analisar como está sendo introduzido o conceito de Sequência nos livros didáticos. Isto porque, considerarmos sequência um subsídio fundamental para desenvolver do assunto de PA.

Além do mais, embora a matemática seja constituída também de repetição de padrões e, de acordo com a nossa prática de sala de aula, o assunto de Sequência é um dos primeiros, se não o único assunto a ser tratado efetivamente com a ideia de repetições de padrões. A esse respeito, Pimentel e Vale adiciona que.

> Muito do insucesso em matemática deve-se ao facto de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. O primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e a estabelecer conexões. A procura de padrões deve constituir o núcleo das aulas em todos

---

[25] A estrutura da SD é organizada através de intervenções, que apresentam a intencionalidade do professor em suas ações dirigidas aos alunos. Assim, a primeira delas é a Intervenção Inicial, onde o professor deve criar motivos para que o aluno queira aprender conforme Cabral (2017)

> os temas, já que eles surgem nas fórmulas que descobrimos, nas formas que investigamos, nas experiências que fazemos. (PIMENTEL E VALE, 2011, p. 1)

Assim sendo, o reconhecimento de padrões é um tema fundamental que consideramos ser levado em conta desde a infância até as fases mais avançadas do ensino e aprendizagem e, por esse motivo merece atenção.

2.3.1. A progressão aritmética em livros didáticos

Antes de tudo, queremos destacar um ponto chave sobre os livros didáticos, no processo de ensino e aprendizagem. Eles funcionam como ferramentas que estão fortemente ligados ao currículo escolar. Além disso, há vários outros fatores que podem fazer com que os professores seguem à risca o livro didático, e apresentarem conceitos aos seus alunos sem considerar a bagagem de conhecimento que eles carregam. Assim sendo, compartilhamos a definição de Lajolo (1996).

> Didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina. (LAJOLO, 1996, p. 4).

Assim, buscamos indícios que pudéssemos caracterizar a maneira de como está sendo feita a abordagem de PA nos livros didáticos do PNLD. Para tanto, aprimoramos nos olhares para identifica uma abordagem que considera a TSD, a SD e a estrutura da SD em conformidade com Cabral (2017).

Desse modo, procuramos identificar se o autor ou autores dos livros didáticos demonstra a preocupação de iniciar o assunto de P.A. com uma questão instigante e ao mesmo tempo provocativa que seja capaz de criar um clima de investigação propício para o aluno, a ponto de conquistá-lo a querer compreender, elaborar estratégias de resolução e solucionar a situação problema a partir dos seus conhecimentos prévios.

2.3.1.1. O livro de Chavante e Prestes (2016)

Assim, fazemos uma análise da introdução de Sequência no livro de Chavante e Prestes (2016). Embora Chavante e Prestes (2016) apresentam na capa da Unidade de Sequência e P.A. foto que ilustra o ensaio da orquestra Thai, composta por deficientes visuais, estabelecendo a relação das sequências com os padrões das notas musicais. Além do mais, os autores abordam características e particularidades entre sequências e progressões aritméticas e geométricas.

Por outro lado, os autores não apresentam as questões motivadoras, ponto chave nas propostas desta pesquisa, assim também, para a TSD e estrutura da SD segundo Cabral (2017).

Por outro lado, iniciam Sequência pela definição seguida de exemplo contextualizado. Fazem uma breve menção ao conteúdo que a situação problema necessita (conhecimentos prévios) e segue generalizando e formalizando o conteúdo referente a Sequência como mostra a Figura 23 sobre a introdução de sequência no livro I.

Figura 23 - Introdução de Sequência no livro I.

Sequências e progressões

Sequências

Sequência é o modelo matemático de situações em que determinados tipos de elementos são postos em sucessão, de modo ordenado. Observe a seguir um exemplo prático em que o conceito de sequência pode ser utilizado.

Mirela aplicou R$ 10 000,00 em um investimento cuja rentabilidade é dada por um juro composto de 1% ao mês. Observe o montante, em reais, mês a mês, a partir do início da aplicação.

1º mês: $a_1 = 10\,000$

2º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01 = 10\,100$

3º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01^2 = 10\,201$

4º mês: $a_3 = 10\,000 \cdot 1{,}01^3 = 10\,303{,}01$

$\vdots$

n-ésimo mês: $a_n = 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}$

$\vdots$

Lembre-se de que, no regime de juro composto, o juro é sempre calculado sobre o montante do período anterior a partir do segundo período considerado na situação. No primeiro período, que é o período inicial, o capital é igual ao montante.

Se fosse possível para Mirela manter esse dinheiro investido por uma quantidade infinita de meses, os valores $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ formariam uma sequência de números reais, que pode ser denotada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ ou, de maneira abreviada, por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (a_n). Cada número a_n, com $n \in \mathbb{N}^*$, é um **termo** da sequência, e o índice n indica a posição ou a ordem desse termo na sequência.

Uma sequência de números reais é uma função em que o domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Denotamos por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (a_n) a sequência $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ em que:

- $f(1) = a_1$ é o 1º termo da sequência;
- $f(2) = a_2$ é o 2º termo da sequência;
- $f(3) = a_3$ é o 3º termo da sequência;

  $\vdots$
- $f(n) = a_n$ é o n-ésimo termo da sequência;

  $\vdots$

A sequência possui uma quantidade infinita de termos e, por isso, também pode ser denominada **sequência infinita**. Por outro lado, se o domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, ..., k\}$, a função corresponde a uma **sequência finita com** k **termos**, e é denotada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Na prática, a sequência dos montantes obtidos na aplicação de Mirela deverá ser finita, pois em determinado mês n, ela retirará o montante.

Fonte: Recorte de Chavante e Prestes, 2016, p. 172 – 173.

Da mesma forma os autores introduzem o conceito de P.A. com uma situação problema, no entanto, não identificamos nesse início uma preocupação clara em construir a P.A. a partir de questões motivadoras com clara intenção dos autores em conquistar a atenção desses alunos. Assim também, é trabalho nesse livro as ideias de classificação segundo o número de termos, as ideias de crescente, decrescente ou constante segundo a razão, igualmente é tratado até a generalização e formalização do assunto de PA, como mostra Figura 24 sobre a introdução ao conceito de PA mo livro I.

Figura 24 - Introdução ao conceito de P.A. no livro I.

Progressão aritmética (PA)

Carlos tornou a leitura um hábito pessoal. Ele havia lido, até o início de janeiro de 2018, 20 livros e se dispôs a ler 2 livros por mês, sem repeti-los. Caso consiga cumprir sua meta, observe a quantidade total de livros que Carlos terá lido, mês a mês, a partir do início de janeiro.

Mês	Quantidade total de livros lidos
1º	20
2º	22
3º	24
4º	26
5º	28

Estudantes da Escola Estadual Professora Leila Mara Avelino, em Sumaré (SP), lendo na biblioteca, em dezembro de 2014. O hábito de ler expande nossa visão de mundo, aumenta nosso vocabulário e torna-se um momento de lazer quando a história é agradável para nós.

A sequência formada pela quantidade total de livros lidos, mês a mês, a partir do início de janeiro, é um exemplo de **progressão aritmética**, abreviadamente conhecida como **PA**. Observe que um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior com 2, ou seja:

- $a_2 = \underbrace{20}_{a_1} + 2 = 22$
- $a_3 = \underbrace{22}_{a_2} + 2 = 24$
- $a_4 = \underbrace{24}_{a_4} + 2 = 26$

Nesse caso, tem-se $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Uma progressão aritmética é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado com um número constante r, chamado **razão** da PA. Se (a_n) é uma PA de razão r, então:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

Uma PA pode ser finita ou infinita, dependendo se a sequência é finita ou infinita.

No exemplo anterior, temos uma PA de razão $r = 2$.

⋮

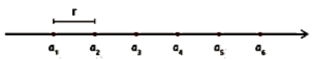
A sequência possui uma quantidade infinita de termos e, por isso, também pode ser denominada **sequência infinita**. Por outro lado, se o domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, ..., k\}$, a função corresponde a uma **sequência finita com k termos**, e é denotada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$.

Na prática, a sequência dos montantes obtidos na aplicação de Mirela deverá ser finita, pois em determinado mês n, ela retirará o montante.

Representação de uma PA na reta real

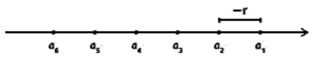
A razão r de uma PA pode ser positiva, negativa ou igual a zero. Observe a representação dos termos da PA na reta real em cada caso, considerando a direita o sentido positivo.

- Se $r > 0$, os termos são dispostos da esquerda para a direita, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a r. Nesse caso, observe que a PA é **crescente**.



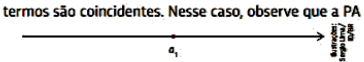
$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < ...$$

- Se $r < 0$, os termos são dispostos da direita para a esquerda, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a $-r$. Nesse caso, observe que a PA é **decrescente**.



$$... < a_6 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$$

- Se $r = 0$, todos os termos são coincidentes. Nesse caso, observe que a PA é **constante**.



$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = ...$$

Uma PA de razão r é:
- **crescente** quando $r > 0$;
- **decrescente** quando $r < 0$;
- **constante** quando $r = 0$.

Exemplos

a) A sequência $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$, em que $a_n = n$, é uma PA crescente de razão $r = 1$.

b) A PA com 4 termos em que $a_1 = 5$ e $r = -2$ é uma PA decrescente $(5, 3, 1, -1)$.

Termo geral de uma PA

Dados os números reais a e r, a PA cujo primeiro termo é a e cuja razão é r pode ser definida por recorrência da seguinte maneira:

$$a_1 = a \text{ e } a_{n+1} = a_n + r$$

Porém, muitas vezes é conveniente expressar o n-ésimo termo da PA utilizando os valores do primeiro termo a_1 e da razão r. Observe.

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r = a_1 + 2r$
- $a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r = a_1 + 3r$

⋮

- $a_n = a_1 + (n - 1)r$

⋮

Fonte: Recorte de Chavante e Pretes, 2016, p. 176 – 177.

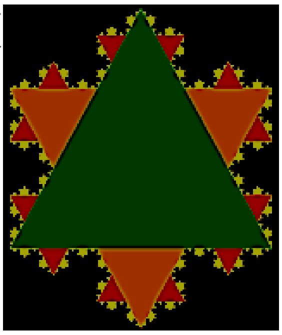
2.3.1.2. O livro de Smole e Diniz (2016)

Consideramos o livro de Smole e Diniz (2016), as autoras optam por inserir o capítulo sobre Sequência e Progressão Aritmética antes das funções exponencias e logarítmica porque, segundo as autoras é possível relacionar o conteúdo de funções e função a fim com Sequência e P.A. Elas ressaltam que a compreensão dessas sequências facilita o estudo de função exponencial e logarítmica.

Assim, as autoras fazem menção ao conteúdo de Sequência explorando a figura conhecida como curva do floco de neve do Koch, apresentam a origem das ideias fundamentais presentes na história, inicia o conteúdo com questões motivadoras, fazem uso das imagens para ilustrar o conceito. Por outro lado, a linguagem matemática utilizada na abordagem da situação problema pode ser um obstáculo de aprendizagem para o aluno como mostra a Figura 25 sobre a introdução de sequência no livro II.

Figura 25 - Introdução de sequência no livro II.

A figura abaixo é conhecida como **curva do floco de neve de Koch**, obtida a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero.

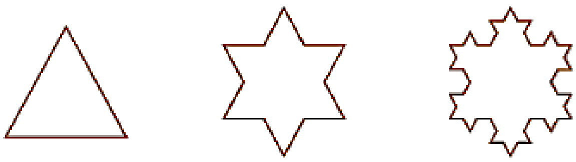


Optamos por inserir este capítulo sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, dessa forma, é possível:

- relacionar o estudo de funções e de função afim com sequências e progressões;
- abordar a noção de crescimento ou decrescimento exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizagem que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo.

Nos próximos três capítulos, há muitas possibilidades de integração da Matemática com a Biologia, o que favorece o desenvolvimento de atividades conjuntas entre as disciplinas, especialmente no que diz respeito ao estudo de populações.

O matemático Helge von Koch (1870-1924), em 1904, obteve essa figura a partir de um triângulo equilátero de lado de medida 1. Observe as três primeiras figuras dessa sequência.



Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira?

Consideremos um triângulo equilátero de lado de medida 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da linha poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números. Como podemos descrever essa sequência?

Fonte: Recorte de Smole e Diniz, 2016, p. 142.

As autoras introduzem o conteúdo de P.A. com objetivo de fazer o aluno chegar à conclusão de que P.A, é uma sequência de números, na qual cada termos a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante. Contudo, não identificamos de imediato a preocupação das autoras em explorar essa tendência inicial e fazer o aluno querer entender muito mais que só um conceito de PA. como indica a Figura 26 sobre a introdução ao conceito de PA no livro II.

Figura 26 - Introdução ao conceito de PA no livro II.

4 Progressão aritmética (P.A.)

Observe estas sequências:

a) 2, 5, 8, 11, ...

b) 35, 30, 25, 20, 15, ...

c) 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; ...

Pense em como você pode obter, em cada uma dessas sequências, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado que, na primeira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido pela adição do 3 ao termo anterior a ele:

$$2 \underbrace{\quad}_{+3} 5 \underbrace{\quad}_{+3} 8 \underbrace{\quad}_{+3} 11 \ldots$$

Já na segunda sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando subtraímos 5, ou somamos −5, ao termo anterior a ele:

$$35 \underbrace{\quad}_{-5} 30 \underbrace{\quad}_{-5} 25 \underbrace{\quad}_{-5} 20 \underbrace{\quad}_{-5} 15 \ldots$$

Finalmente, na terceira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando somamos 0,01 ao termo anterior a ele:

$$1 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}01 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}02 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}03 \underbrace{\quad}_{+0{,}01} 1{,}04 \ldots$$

A esse tipo de sequência chamamos **progressão aritmética.**

Progressão aritmética (P.A.) é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante.

Essa constante, que indicaremos por **r**, é denominada **razão da progressão aritmética.**

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots) \text{ é uma P.A.} \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, n \geqslant 2$$

Notemos que:

$$r = a_2 - a_1, r = a_3 - a_2, \ldots, r = a_n - a_{n-1}, n \geqslant 2$$

ou seja, podemos encontrar a razão da progressão aritmética subtraindo qualquer um dos termos de seu sucessor.

Exemplos:

a) $(2, 4, 6, \ldots)$ é uma P.A. de razão $r = 4 - 2 = 2$.

b) $(99, 96, 93, \ldots, 6, 3)$ é uma P.A. de razão $r = 96 - 99 = -3$.

c) $(5, 5, 5, \ldots)$ é uma P.A. de razão $r = 5 - 5 = 0$.

d) $(-20, -16, -12, \ldots, 16, 20)$ é uma P.A. de razão $r = -16 - (-20) = 4$.

e) $\left(-\frac{5}{2}, -3, -\frac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma P.A. de razão $r = -3 - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Classificação

Uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão **r** é:

- **crescente**, se cada termo é maior que o anterior ($a_n > a_{n-1}$);
- **decrescente**, se cada termo é menor que o anterior ($a_n < a_{n-1}$);
- **constante**, se os termos são iguais entre si ($a_n = a_{n-1}$).

Usando a razão $r = a_n - a_{n-1}$, podemos ter:

P.A. crescente $\Leftrightarrow r > 0$ | P.A. decrescente $\Leftrightarrow r < 0$ | P.A. constante $\Leftrightarrow r = 0$

Média aritmética

Em uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão **r**, os termos consecutivos a_{j-1}, a_j e a_{j+1} são tais que:

$$\left.\begin{array}{l} a_j = a_{j-1} + r \\ a_{j+1} = a_j + r \end{array}\right\} \Rightarrow a_j - a_{j+1} = a_{j-1} - a_j \Rightarrow \boxed{a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}}$$

Portanto, em toda P.A. cada termo, a partir do segundo, é a **média aritmética** entre os termos anterior e posterior.

Fonte: Recorte de Smole e Diniz, 2016, p. 149 – 150.

2.3.1.3. O livro de Dante (2016)

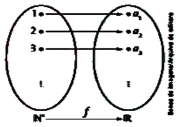
Considerando o livro de Dante (2016), o autor apresenta a página do capítulo que vai trabalhar Sequência e PA a sequência de Fibonacci. Dessa forma, segundo os autores, as margaridas geralmente têm 13, 21 ou 34 pétalas. Os números 13, 21 e 34 fazem parte de uma sequência de números conhecida como sequência de Fibonacci. Esses e outros números dessa sequência podem ser relacionados a elementos presentes na natureza.

Vale destacar que a Sequência de Fibonacci é uma sequência numérica que não é uma P.A. e nem uma P.G.. Assim sendo, a partir do terceiro termo, somando dois números precedentes tem como resultado o número posterior e é formada por recorrência.

Além disso, o autor aborda Sequência de forma contextualizada, invocando elementos do cotidiano do aluno como por exemplo, o dia da semana, mês, números, partindo do conhecimento que o aluno já tem para depois generalizar e formalizar.

Essa abordagem, se afina com a TSD e a estrutura da SD em conformidade com Cabral (2017). Nesse sentindo, está clara a intenção do autor em querer introduzir um assunto a partir dos conhecimentos prévios desses alunos, para além disse, relacionar com outros conteúdos matemáticos, assim como, fazer com que os alunos não somente elaborem suas estratégias de resolução bem como, queiram solucionar o problema. Assim identificados na Figura 27 sobre a introdução de sequência didática no livro III.

Figura 27 - Introdução de Sequência no livro III.



1 Sequências

Em muitas situações cotidianas aparece a ideia de **sequência ou sucessão**. Assim, por exemplo, temos:

- a sequência dos dias da semana (domingo, segunda-feira, ..., sábado);
- a sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro);
- a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...);
- a sequência dos anos, a partir de 2002, nos quais a Copa do Mundo de Futebol foi ou será realizada (2002, 2006, 2010, 2014, 2018, 2022, ...). Peça aos alunos que citem outros exemplos de sequências.

Junte-se com um colega e faça o que se pede.

Determinem qual é o próximo elemento em cada sequência abaixo, se possível:

a) Março, abril, maio, ... junho

b) Janeiro, março, maio, ... julho

c) Sábado, sexta-feira, quinta-feira, quarta-feira, ... terça-feira

d) Domingo, ... Impossível determinar, pois não há características suficientes para determinar o próximo termo.

e) 1, 2, 3, 4, ... 5

f) 1, 2, 4, 8, 16, ... 32

g) 1, ... Impossível determinar, pois não há características suficientes para determinar o próximo termo.

h) 240, −120, 60, −30, 15, ... −7,5

i) 1, 4, 9, 16, ... 25

Em todas essas situações observamos certa ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são também chamados **termos** da sequência. Na sequência dos meses do ano, temos: 1º termo: janeiro; 2º termo: fevereiro; ...; 12º termo: dezembro.

Se representarmos o 1º termo por a_1 (lê-se *a índice um*, ou *a um*), o 2º termo por a_2, o 3º por a_3 e assim por diante, até o termo de ordem n, ou enésimo termo (a_n), essa sequência pode ser representada por ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n$).

Nesse exemplo, temos:

- a_1 = janeiro
- a_7 = julho
- a_{10} = outubro
- a_{12} = dezembro

Definição

Vamos retomar a definição de sequência que estudamos no Capítulo 2.

Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função definida em $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Fique atento! Consideraremos apenas sequências de números reais, ou seja, funções de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$.

Assim, a cada elemento $n \in \mathbb{N}^*$ corresponde um único número real a_n. Os elementos a_n são os termos da sequência, e as notações para a sequência são:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) \text{ ou } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ou } (a_n)$$

Dessa forma, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, ..., f(n) = a_n, ...$

O índice n indica a posição do elemento na sequência. Desse modo, o primeiro termo é indicado por a_1, o segundo é indicado por a_2 e assim por diante.

Fonte: Recorte de Dante, 2016, p. 208.

Sobre a introdução de P.A. Dante (2016), se organiza a partir de uma situação problema, no entanto, diferente da Introdução de Sequência, não identificamos a preocupação do autor em conquistar a atenção do aluno e convencê-lo a buscar soluções dessa situação problema, assim também acontece até a formalização do conteúdo de PA, como iremos notar na Figura abaixo 28 sobre a introdução ao conceito de PA no livro III.

Figura 28 - Introdução ao conceito de PA no livro IIII.

2 Progressão aritmética (PA)

Situações envolvendo grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais são muito comuns. Acompanhe uma delas:

Uma empresa produziu, em 2012, 100 000 unidades de certo produto. Quantas unidades deveria ter produzido, anualmente, de 2012 a 2017, se o aumento anual de produção fosse estabelecido em 20 000 unidades?

Esquematizamos da seguinte forma:

- produção de 2012: 100 000
- produção de 2013:
  (produção de 2012) + 20000 = 100000 + 20000 = 120 000
- produção de 2014:
  (produção de 2013) + 20000 = 120 000 + 20000 = 140 000
- produção de 2015:
  (produção de 2014) + 20 000 = 140000 + 20 000 = 160 000
- produção de 2016:
  (produção de 2015) + 20000 = 160 000 + 20 000 = 180 000
- produção de 2017:
  (produção de 2016) + 20 000 = 180000 + 20 000 = 200 000

Nessas condições, a produção anual desse período pode ser representada pela sequência:

(100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000)

Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior a este e um número fixo (20 000, nesse caso). Ou seja, a produção sofreu aumentos iguais de 20 000 unidades, em intervalos de tempo iguais (1 ano, nesse caso).

Sequências desse tipo são chamadas progressões aritméticas (PAs). Observe que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante (20 000 unidades, nessa sequência).

Fique atento!
Já estudamos alguns aspectos da PA relacionados a funções nos capítulos anteriores. Agora, vamos formalizar o conceito.

A sequência (100 000, 120 000, 140 000, 160 000, 180 000, 200 000) é um exemplo de progressão aritmética. O aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo e é chamado razão da progressão. A razão dessa progressão é 20 000. Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão aritmética.

Definição

Progressão aritmética é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra r.

Representações especiais

Eventualmente podemos recorrer a algumas representações especiais para uma PA, principalmente quando a soma dos termos for conhecida. A vantagem das representações especiais é diminuir a quantidade de cálculos exigidos em algumas situações.

As principais representações especiais são:

- três termos em PA: $(x - r, x, x + r)$;
- cinco termos em PA: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

Classificação das progressões aritméticas

Dependendo da razão r, uma PA pode ser:

- **Crescente:** se cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior, isto é, quando a razão r é positiva.
  Exemplo:
  (3, 7, 11, 15, 19, ...) é uma PA crescente, pois $r = 4 > 0$.
- **Decrescente:** se cada termo, a partir do segundo, é menor que o seu anterior, isto é, quando a razão r é negativa.
  Exemplo:
  (16, 10, 4, −2, −8, ...) é uma PA decrescente, pois $r = -6 < 0$.
- **Constante:** se todos os seus termos são iguais, isto é, a razão r é nula.
  Exemplo:
  (5, 5, 5, 5, 5, ...) é uma PA constante, pois $r = 0$.

Fórmula do termo geral de uma PA

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r, partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar r ao 1º termo $(a_2 = a_1 + r)$; para avançar dois termos basta somar $2r$ ao 1º termo $(a_3 = a_1 + 2r)$; para avançar três termos basta somar $3r$ ao 1º termo $(a_4 = a_1 + 3r)$; e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado **termo geral da PA**, que é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

(ao passar de a_1 para a_n, avançamos $(n - 1)$ termos, ou seja, basta somar $(n - 1)$ vezes a razão ao 1º termo)

Nessa fórmula temos:

a_n = termo geral — n = número de termos (até a_n)

a_1 = 1º termo — r = razão da PA

Observação: Algumas vezes é conveniente indicar o 1º termo por a_0 e não por a_1, ficando o termo geral da PA dado por $a_n = a_0 + nr$. Observe isso no seguinte problema:

Se o preço de um carro novo é R$ 40 000,00, e esse valor diminui R$ 1 200,00 a cada ano de uso, qual será o seu preço com 5 anos de uso?

Temos uma PA com $a_0 = 40000$, razão $r = -1200$, e queremos determinar a_5:

$a_5 = a_0 + 5r = 40\,000 + 5(-1200) = 40000 - 6000 = 34000$

Assim, após 5 anos, o carro custará R$ 34 000,00.

Fique atento!
- Note que $a_6 = a_1 + 5r$, pois, ao passar de a_1 para a_6, avançamos cinco termos; $a_1 = a_{13} - 12r$, pois retrocedemos 12 termos ao passar de a_{13} para a_1, e assim por diante.
- Qualquer PA $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ de razão r e primeiro termo a pode ser definida por recorrência por: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$, para $n \geq 1$

Fonte: Recorte de Dante, 2016, p. 213 – 215.

2.3.1.4. O livro de Bonjorno, Júnior e Câmara (2020)

Considerando o livro de Bonjorno, Júnior e Câmara (2020), identificamos uma preocupação dos autores, em apresentar a origem das ideias fundamentais presentes na história das sequências. Desse modo, apresentam os Sonas, desenhos feitos nas áreas de tribos africanas que revelam ao mundo conceitos de simetria e Sequências.

Além disso, os auotres introduzem Sequência a partir da contextualização do cotidiano, dessa forma, explorando um calendário anual. Entretanto, com base na TSD, assim como, na estrutura da Sd sengundo Cabral (2017), não identificamos nos autores a preocupação de conquistar a atenção dos aluno nesse início, assim também acontece, com a generalização e formalização da Sequência exposta na Figura 29 sobre a introdução de sequência no livro IV.

Figura 29 - Introdução de Sequência no livro IV.

Sequências

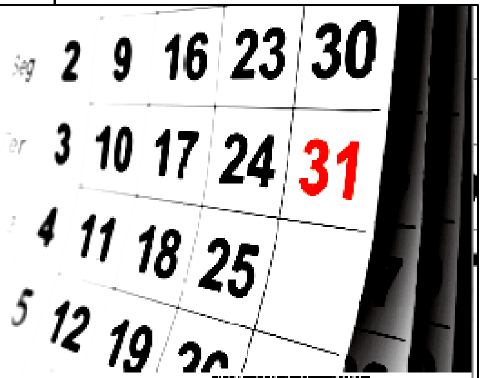
No nosso cotidiano lidamos com diferentes situações que envolvem sequências. Por exemplo:

a) Os dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado.

b) Os meses do ano: janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro.

c) O ano de ocorrência dos Jogos Olímpicos da Era Moderna: 1896, 1900, 1904, 1908, ..., 2012, 2016, ...

Cada elemento que compõe uma sequência é chamado **termo da sequência**.



Cada termo de uma sequência pode ser representado por uma **letra** acompanhada de um **índice**, que informa a posição ou a ordem desse termo na sequência. Por exemplo, considerando a sequência de Fibonacci, temos:

- $a_1 = 1$ é o primeiro termo ou o termo de ordem 1;
- $a_2 = 1$ é o segundo termo ou o termo de ordem 2;
- $a_3 = 2$ é o terceiro termo ou o termo de ordem 3;
- $a_4 = 3$ é o quarto termo ou o termo de ordem 4; e assim por diante.

Podemos representar genericamente uma sequência da seguinte maneira:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$

Nessa representação, utilizamos a_n para indicar o termo de ordem n e dizemos que a_n é o enésimo termo da sequência.

Sequências numéricas

Veja que é possível estabelecer sequências com informações numéricas ou não. Neste Capítulo, trataremos das sequências do primeiro tipo, chamadas **sequências numéricas**.

Podemos classificar esse tipo de sequência em relação à quantidade de elementos: uma sequência numérica pode ser **finita** ou **infinita**. Desse modo, podemos pensar nesses tipos de sequências da maneira a seguir.

Uma sequência numérica finita de n termos, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$, é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, ..., $f(n) = a_n$.

Por exemplo, a sequência numérica (3, 5, 7, 9) é uma sequência finita, na qual $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$ e $a_4 = 9$.

Uma sequência numérica infinita, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$, é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, ..., $f(n) = a_n$, ...

Por exemplo, a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...) é uma sequência infinita, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, ...

Fonte: Recorte de Bonjorno, Júnior e Câmara, 2020, p. 119 – 120.

Do mesmo modo, os autores iniciam o conteúdo de P.A., utilizando uma situação problema que relaciona o crescimento de uma planta a uma sequência numérica. Entretanto, de forma restrita, podemo dizer que a sua identificação com a proposta da TSD e modelo de SD proposto por Cabral (2017) nos parece que se limita a contextualização. Assim também, não identificamos a preocupação com a generalização dos conceitos quanto ao comportamento da P.A., se finita ou inifinta, assim também, com relação a sua razão e por fim, como relação a sua generalização como mostra a Figura 30 sobre a introdução ao conceito de PA no livro IV.

Figura 30 - Introdução ao conceito de PA no livro IV.

Progressão aritmética

Mariana replantou uma muda de árvore que estava com 60 cm de altura. Para estudar seu crescimento, ela mediu e anotou a altura da planta nos cinco meses seguintes. Veja as medidas obtidas.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Altura (cm)	60	96	132	168	204	240

Observando as alturas registradas, Mariana percebeu que a planta cresceu cerca de 36 centímetros por mês.

$$60 \xrightarrow{+36} 96 \xrightarrow{+36} 132 \xrightarrow{+36} 168 \xrightarrow{+36} 204 \xrightarrow{+36} 240$$

Podemos indicar os valores da altura da árvore de Mariana, de acordo com a ordem dos meses de observação, como a sequência numérica (60, 96, 132, 168, 204, 240). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior a 36. Essa sequência é um exemplo de **progressão aritmética (PA)**.

Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de **razão** da progressão.

Podemos classificar uma PA de acordo com o valor da razão r:

- se $r > 0$, a PA é chamada de **crescente**;
- se $r < 0$, a PA é chamada de **decrescente**;
- se $r = 0$, a PA é chamada de **constante**.

Como a razão de uma progressão aritmética é a constante r que adicionamos a cada termo para obter o termo seguinte, podemos determiná-la, a partir do segundo termo, calculando a diferença entre cada termo e o anterior.

Assim, dada uma PA genérica infinita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = ... = \boxed{a_{n+1} - a_n = r}$$

Vale ressaltar que o mesmo raciocínio vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1})$.

Veja alguns exemplos:

a) (2, 5, 8, 11, 14) é uma PA cuja razão é: $r = 3$, pois $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r = 3$. Portanto, essa PA é crescente.

b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{5}{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = -\frac{1}{3}$, pois $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r = -\frac{1}{3}$. Portanto, essa PA é decrescente.

c) $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = 0$, pois todos os termos são iguais. Portanto, essa PA é constante.

SAIBA QUE...

Observe o exemplo da PA do item a. Se escrevermos a sequência ao contrário, isto é, (14, 11, 8, 5, 2), a razão será −3. Note que as progressões aritméticas (2, 5, 8, 11, 14) e (14, 11, 8, 5, 2) não são as mesmas. Esse fato exemplifica uma característica importante das sequências: a ordem em que os elementos são escritos determina a sequência.

Termo geral de uma PA

Vamos considerar a representação genérica de uma progressão aritmética infinita, de razão r, dada por:

$$(a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4, ..., \xrightarrow{+r} a_{n-1} \xrightarrow{+r} a_n \xrightarrow{+r} a_{n+1}, ...)$$

De acordo com essa sequência, temos:

- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r$
- $a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2 \cdot r$
- $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3 \cdot r$

Uma vez que essa relação também vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1})$, é possível perceber que o enésimo termo de uma PA qualquer pode ser escrito como a soma do primeiro termo com o produto da razão pelo fator $(n - 1)$. Portanto:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

em que:
a_n é o termo geral (ou enésimo termo);
a_1 é o primeiro termo;
n é a ordem do termo;
r é a razão.

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral da PA.**

Soma dos termos de uma PA

Considere a PA (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34). Nela, podemos destacar as seguintes informações:

- 6 e 34 são os termos **extremos** cuja soma é 40;
- as duplas 10 e 30, 14 e 26, 18 e 22 são termos equidistantes dos extremos; a soma de cada dupla equidistante também é 40.

Essa é uma propriedade das progressões aritméticas finitas: a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja (a_n) uma PA genérica finita dada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Somando os dois extremos, temos:

. . . .

Como cada dupla de termos, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, e assim sucessivamente, é equidistante dos extremos, suas somas são iguais a $(a_1 + a_n)$. Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

em que:
S_n é a soma dos n termos;
a_n é o enésimo termo;
a_1 é o primeiro termo;
n é o número de termos.

Fonte: Recorte de Bonjorno, Júnior e Câmara, 2020, p. 123 – 126.

2.3.1.5. O livro de Leonardo (2020)

O proposito do livro cujo o editor responsável é Leonardo,(2020), é identificar padrões numéricos e sequências, resolver problemas que envolvam sequência, interpretar gráficos de P.A. e P.G.

Desse modo, o assunto de Sequência é apresentado a partir de um Calendário Chinês (lunissolar). A pesar da contextualização no livro, nós não encontramos uma preocupação inicial em conquistar o aluno por meio de questões motivadoras. Assim, conclumos que a proposta inicial de abordagem é uma ponto relevante, contudo, se distancia por assim dizer da TSD e da estrutura da SD proposta por Cabral (2017).

Do mesmo modo, segue as generalizações com relação ao comportamento da P.A., se finita ou infinita, assim também, acontece com a classificação se crecente, constante e ou decrescente como identifica-se na Figura 31 sobre a introdução de sequência no livro V.

Figura 31 - Introdução de Sequência no livro V.

Observe no quadro os signos do horóscopo chinês nos anos de 1924 a 1931.

rato	boi	tigre	coelho	dragão	serpente	cavalo	cabra	macaco	galo	cão	porco
1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935
1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031

Observando o quadro, os anos relacionados ao dragão no período apresentado são: 1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012 e 2024. Esse conjunto de números exemplifica o objeto de estudo deste capítulo: as **sequências numéricas**.

Diversas situações desse capítulo demandam a utilização de estratégias, de conceitos, de definições e de procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 3 da BNCC.

Explore

Pesquise e obtenha o calendário (gregoriano) do ano em que você nasceu, os calendários de 28 e de 56 anos antes e os de 28 e 56 anos depois de nascido. Compare-os.

a) O que você descobriu sobre esses calendários?

b) Escreva uma sequência de cinco termos com anos que têm calendários semelhantes.

a) A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.
b) resposta pessoal

1 Sequências e padrões

Os anos representados pelo dragão indicados no quadro formam uma **sequência** ou **sucessão**, que podemos representar da seguinte maneira:

(1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012, 2024)

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente usa-se a letra *a*) e um índice, que indica a posição ou a ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1928$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1940$ é o segundo termo e assim sucessivamente até $a_9 = 2024$.

Com os dados fornecidos pelo quadro, também podemos escrever outras sequências, por exemplo:

- a sequência dos anos do rato indicados no quadro: (1924, 1936, 1948, 1960, 1972, 1984, 1996, 2008, 2020);
- os primeiros quatro anos do cavalo a partir de 1970: (1978, 1990, 2002, 2014).

Se a sequência tiver um último termo, ela é **finita**; caso contrário, dizemos que é **infinita** e a indicamos colocando reticências no final.

Exemplos

a) A sequência dos números naturais primos é infinita. Para indicá-la, escrevemos seus primeiros elementos e colocamos reticências no final:
(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

b) A sequência formada pelas letras iniciais dos dias de uma semana é finita: (D, S, T, Q, Q, S, S). Veja que os termos de uma sequência não são necessariamente distintos.

Note que todas essas sequências pressupõem certa ordem em seus termos.

Em uma sequência, a_n representa um termo genérico, na posição *n*. Assim, se $n = 5$, a_5 é o quinto termo; se $n = 100$, a_{100} é o centésimo termo. O termo subsequente a a_n é representado por a_{n+1}, e o antecessor de a_n, a partir do segundo termo, é representado por a_{n-1}.

Nesse tópico, e em todo este capítulo, o aluno vai se deparar com situações em que deverá observar padrões, realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, o que favorece o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC.

1.1 Sequências numéricas

Um tipo importante de sucessão são as sequências numéricas.

Uma **sequência numérica infinita** é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Uma **sequência numérica finita** de *n* termos é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Assim, temos $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. Uma sequência finita de *n* termos é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e uma sequência infinita é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

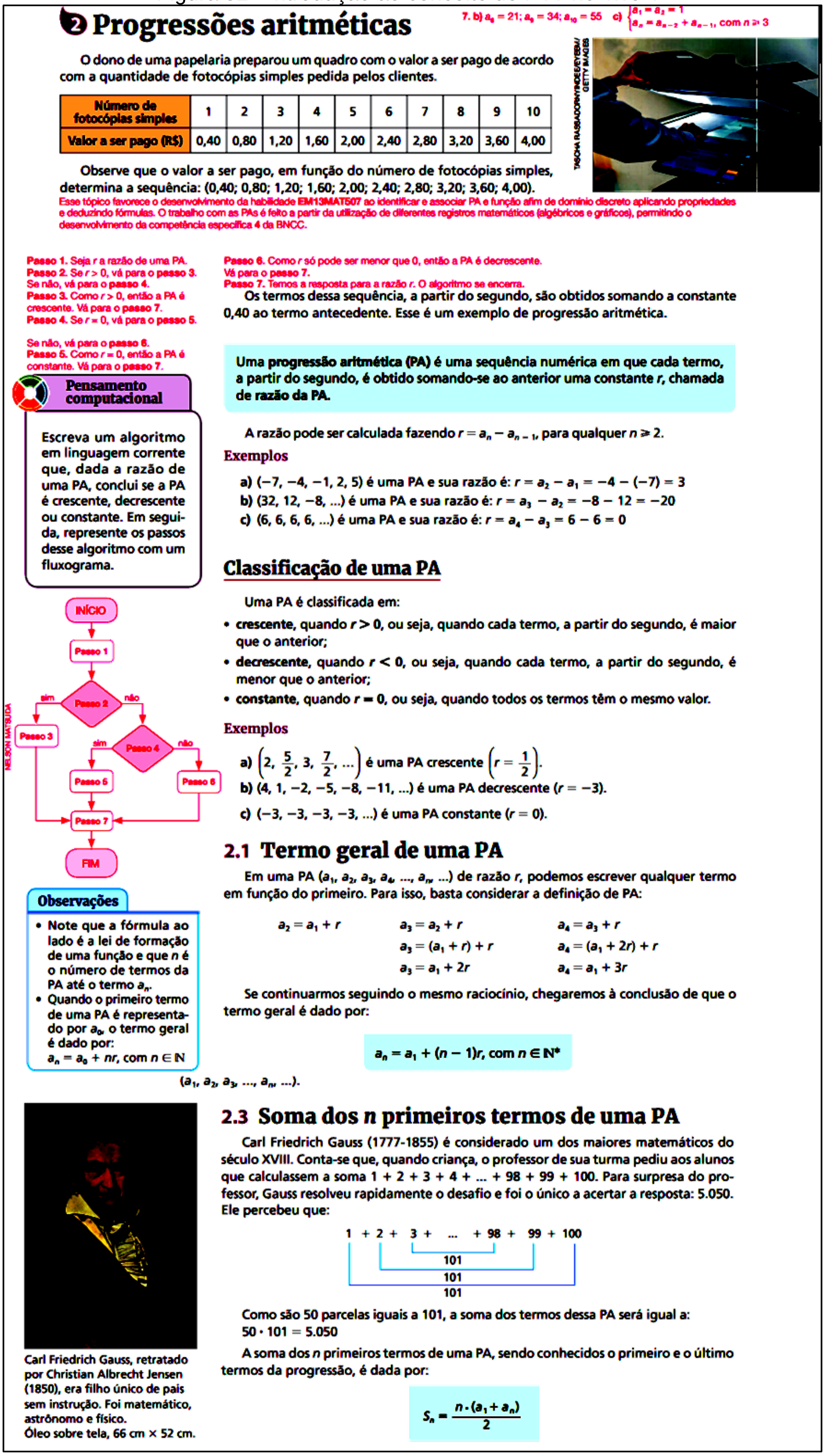
Observação

Quando for conveniente, podemos representar o primeiro termo de uma sequência por a_0, em vez de a_1. Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}$.

Fonte: Recorte de Leonardo, 2020, p. 106 – 107.

Leonardo (2020), apresenta a P.A. com uma situação problema, faz uso de figura e tabela, todavia, não percebemos a preocupação em introduzir nesse início questões motivadoras que julgamos ser necessárias para o ensino de P.A., considerando o próprio assunto da P.A. e a TSD, assim também, a estrutura da SD segundo Cabral (2017), conforme Figura 32 sobre a introdução ao conceito de PA no livro V.

Figura 32 - Introdução ao conceito de P.A. no livro V.



2 Progressões aritméticas

7. b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$ c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geq 3 \end{cases}$

O dono de uma papelaria preparou um quadro com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

Número de fotocópias simples	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor a ser pago (R$)	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00

TASCHA RASSADORNYINDEE/EYEEM/ GETTY IMAGES

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,40; 0,80; 1,20; 1,60; 2,00; 2,40; 2,80; 3,20; 3,60; 4,00).

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT507 ao identificar e associar PA e função afim de domínio discreto aplicando propriedades e deduzindo fórmulas. O trabalho com as PAs é feito a partir da utilização de diferentes registros matemáticos (algébricos e gráficos), permitindo o desenvolvimento da competência específica 4 da BNCC.

Passo 1. Seja r a razão de uma PA.
Passo 2. Se $r > 0$, vá para o **passo 3.** Se não, vá para o **passo 4.**
Passo 3. Como $r > 0$, então a PA é crescente. Vá para o **passo 7.**
Passo 4. Se $r = 0$, vá para o **passo 5.** Se não, vá para o **passo 6.**
Passo 5. Como $r = 0$, então a PA é constante. Vá para o **passo 7.**
Passo 6. Como r só pode ser menor que 0, então a PA é decrescente. Vá para o **passo 7.**
Passo 7. Temos a resposta para a razão r. O algoritmo se encerra.

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos somando a constante 0,40 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Pensamento computacional

Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dada a razão de uma PA, conclui se a PA é crescente, decrescente ou constante. Em seguida, represente os passos desse algoritmo com um fluxograma.

Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, chamada **de razão da PA.**

A razão pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geq 2$.

Exemplos

a) $(-7, -4, -1, 2, 5)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_2 - a_1 = -4 - (-7) = 3$
b) $(32, 12, -8, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_3 - a_2 = -8 - 12 = -20$
c) $(6, 6, 6, 6, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_4 - a_3 = 6 - 6 = 0$

Classificação de uma PA

Uma PA é classificada em:

- **crescente**, quando $r > 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior;
- **decrescente**, quando $r < 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior;
- **constante**, quando $r = 0$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

Exemplos

a) $\left(2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...\right)$ é uma PA crescente $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.
b) $(4, 1, -2, -5, -8, -11, ...)$ é uma PA decrescente $(r = -3)$.
c) $(-3, -3, -3, -3, ...)$ é uma PA constante $(r = 0)$.

2.1 Termo geral de uma PA

Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão r, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$
$a_3 = (a_1 + r) + r$
$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$
$a_4 = (a_1 + 2r) + r$
$a_4 = a_1 + 3r$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Observações

- Note que a fórmula ao lado é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PA até o termo a_n.
- Quando o primeiro termo de uma PA é representado por a_0, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

2.3 Soma dos n primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100. Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. Ele percebeu que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

101
101
101

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a: $50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos n primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termos da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico. Óleo sobre tela, 66 cm × 52 cm.

Fonte: Recorte de Leonardo, 2020, p. 109, 110 e 114.

2.3.1.6. O livro de Souza (2020)

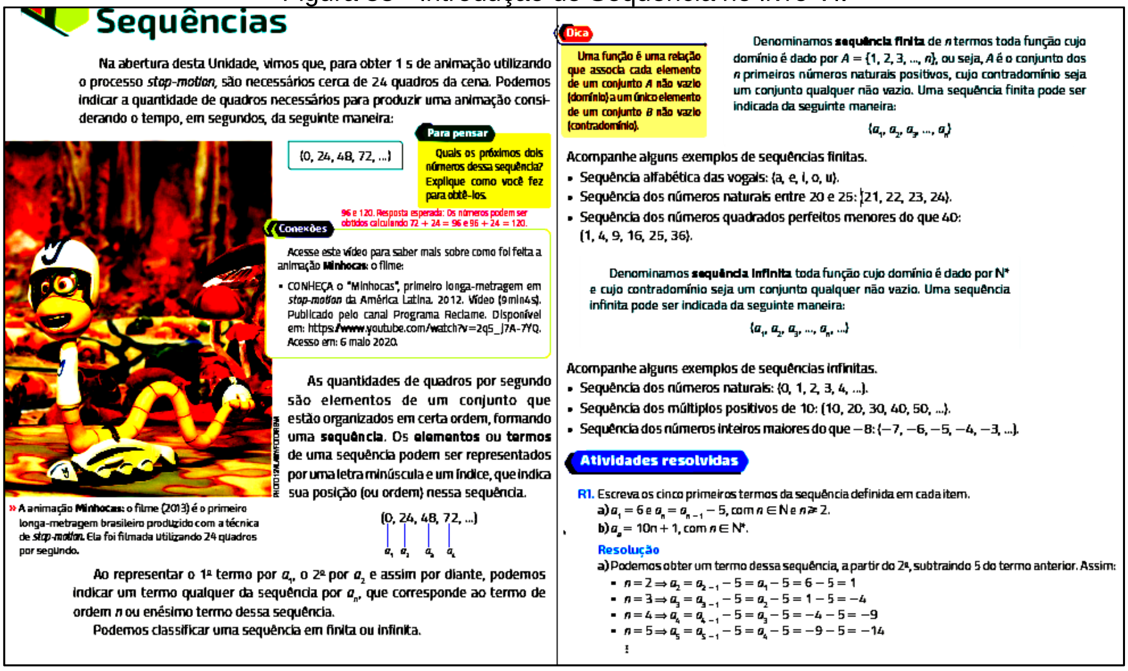
O livro de Souza (2020), tem por objetivo compreender a ideia de sequência numérica como uma função de domínio discreto, formado por números naturais, e classificar essa sequência em finita ou infinita. Assim também, identificar regularidades em uma sequência numérica ou figural e defini-la de maneira recursiva ou não recursiva.

Nessa perspectiva, o autor, apresenta o assunto de Sequência introduzindo noções de linguagem de programação envolvendo Stop-motion, que corresponde uma técnica de animação na qual foi produzido o filme a fuga das galinhas (2000). Além do mais, há uma preocupação, por parte do autor, em apresentar a origem das ideias fundamentais presentes na história.

Dessa forma, o autor parte de uma animação stop-motion do filme Minhocas (2013), procurando contextualizar e chamar atenção do aluno para o assunto. Assim a análise buscou identificar nessa abordagem as ideias contidas na TSD, assim como na estrutura da SD conforme Cabral (2017).

Partindo desse pressuposto, não identificamos de imediato uma proposta que lançasse mão sobre estratégias engajada com ensino por meio de sequência didática que conduzisse os alunos a quererem solucionar o problema como na Figura 33 sobre a introdução de sequência no livro VI.

Figura 33 - Introdução de Sequência no livro VI.



Sequências

Na abertura desta Unidade, vimos que, para obter 1 s de animação utilizando o processo *stop-motion*, são necessários cerca de 24 quadros da cena. Podemos indicar a quantidade de quadros necessários para produzir uma animação considerando o tempo, em segundos, da seguinte maneira:

(0, 24, 48, 72, ...)

Para pensar

Quais os próximos dois números dessa sequência? Explique como você fez para obtê-los.

96 e 120. Resposta esperada: Os números podem ser obtidos calculando 72 + 24 = 96 e 96 + 24 = 120.

Conexões

Acesse este vídeo para saber mais sobre como foi feita a animação **Minhocas**: o filme:

- CONHEÇA o "Minhocas", primeiro longa-metragem em *stop-motion* da América Latina. 2012. Vídeo (9min4s). Publicado pelo canal Programa Reclame. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2q5_J7A-7YQ. Acesso em: 6 maio 2020.

PHOTO12/ALAMY/FOTOARENA

» A animação **Minhocas**: o filme (2013) é o primeiro longa-metragem brasileiro produzido com a técnica de *stop-motion*. Ela foi filmada utilizando 24 quadros por segundo.

As quantidades de quadros por segundo são elementos de um conjunto que estão organizados em certa ordem, formando uma **sequência**. Os **elementos** ou **termos** de uma sequência podem ser representados por uma letra minúscula e um índice, que indica sua posição (ou ordem) nessa sequência.

$(0, 24, 48, 72, \ldots)$ — a_1, a_2, a_3, a_4

Ao representar o 1º termo por a_1, o 2º por a_2 e assim por diante, podemos indicar um termo qualquer da sequência por a_n, que corresponde ao termo de ordem n ou enésimo termo dessa sequência.

Podemos classificar uma sequência em finita ou infinita.

Dica

Uma função é uma relação que associa cada elemento de um conjunto A não vazio (domínio) a um único elemento de um conjunto B não vazio (contradomínio).

Denominamos **sequência finita** de n termos toda função cujo domínio é dado por $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ou seja, A é o conjunto dos n primeiros números naturais positivos, cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Uma sequência finita pode ser indicada da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Acompanhe alguns exemplos de sequências finitas.

- Sequência alfabética das vogais: (a, e, i, o, u).
- Sequência dos números naturais entre 20 e 25: (21, 22, 23, 24).
- Sequência dos números quadrados perfeitos menores do que 40: (1, 4, 9, 16, 25, 36).

Denominamos **sequência infinita** toda função cujo domínio é dado por $\mathbb{N}^*$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Uma sequência infinita pode ser indicada da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

Acompanhe alguns exemplos de sequências infinitas.

- Sequência dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, ...).
- Sequência dos múltiplos positivos de 10: (10, 20, 30, 40, 50, ...).
- Sequência dos números inteiros maiores do que −8: (−7, −6, −5, −4, −3, ...).

Atividades resolvidas

R1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência definida em cada item.

a) $a_1 = 6$ e $a_n = a_{n-1} - 5$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

b) $a_n = 10n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

a) Podemos obter um termo dessa sequência, a partir do 2º, subtraindo 5 do termo anterior. Assim:

- $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_{2-1} - 5 = a_1 - 5 = 6 - 5 = 1$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1} - 5 = a_2 - 5 = 1 - 5 = -4$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_{4-1} - 5 = a_3 - 5 = -4 - 5 = -9$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_{5-1} - 5 = a_4 - 5 = -9 - 5 = -14$

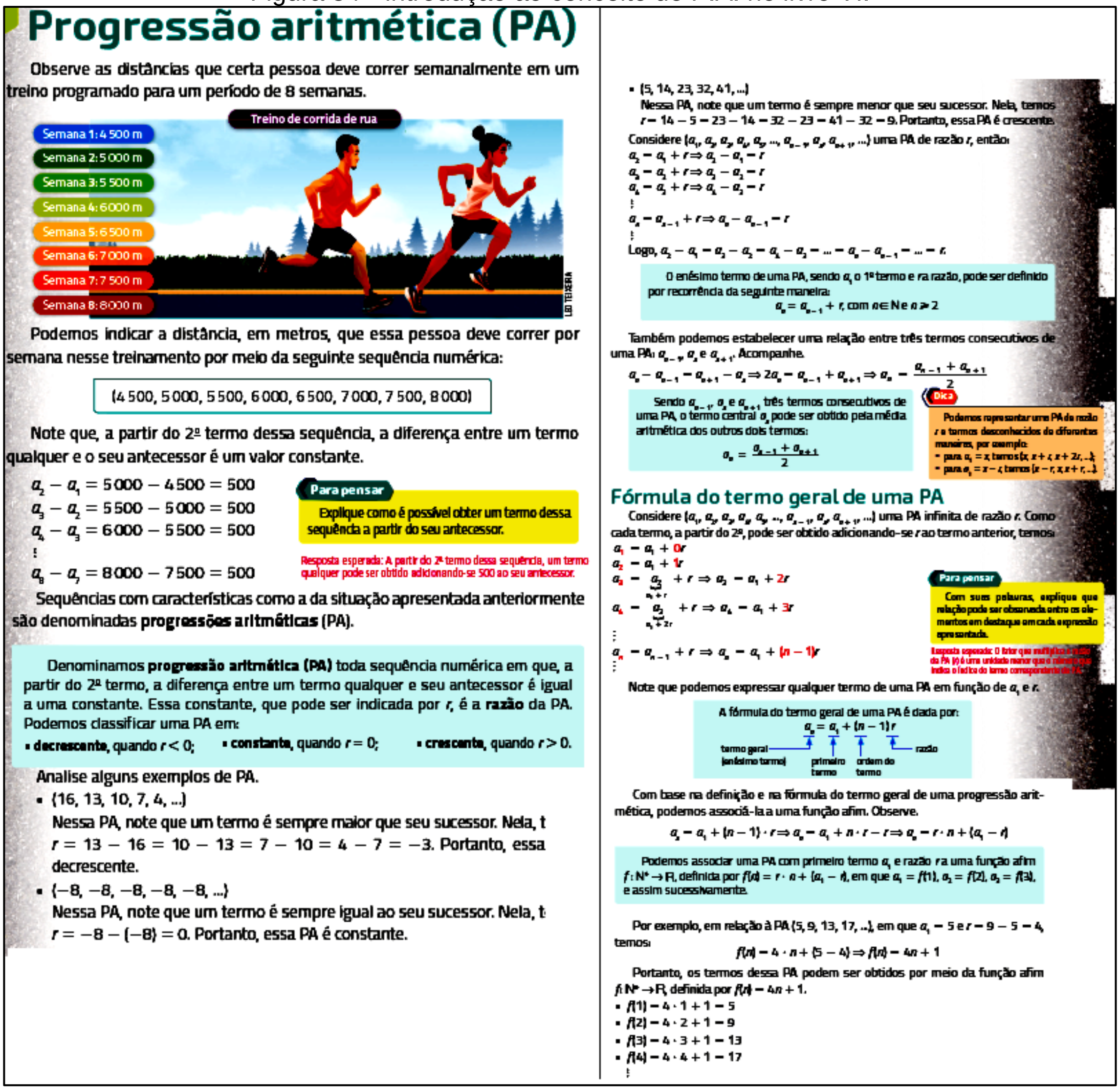
⋮

Fonte: Recorte de Souza, 2020, p. 12 – 13.

O mesmo olhar foi dado para a introdução de P.A.. Dessa forma procuramos identificar situações em que o autor revela preocupação com a abordagem do assunto de P.A. apresentando uma estratégia de ensino e aprendizagem que estimulasse o aluno a querer aprender, querer resolver a situação problema a partir de seus conhecimentos prévios.

Por outro lado, percebemos uma sequência didática que pouco estimula o aluno a resolver o problema, além do mais, a formalização de assuntos considerando a menção de razão crescente, decrescente e constante. Para, além disso, é utilizado um boxe onde é citado que podemos representar uma P.A.de razão r e termo desconhecido de diferentes maneiras sem ter relacionado diretamente essa informação com o objeto matemático em questão. Assim, segue a Figura 34 sobre a introdução ao conceito de PA no livro VI.

Figura 34 - Introdução ao conceito de P.A. no livro VI.



Progressão aritmética (PA)

Observe as distâncias que certa pessoa deve correr semanalmente em um treino programado para um período de 8 semanas.

Treino de corrida de rua

Semana 1: 4 500 m
Semana 2: 5 000 m
Semana 3: 5 500 m
Semana 4: 6 000 m
Semana 5: 6 500 m
Semana 6: 7 000 m
Semana 7: 7 500 m
Semana 8: 8 000 m

Podemos indicar a distância, em metros, que essa pessoa deve correr por semana nesse treinamento por meio da seguinte sequência numérica:

(4 500, 5 000, 5 500, 6 000, 6 500, 7 000, 7 500, 8 000)

Note que, a partir do 2º termo dessa sequência, a diferença entre um termo qualquer e o seu antecessor é um valor constante.

$a_2 - a_1 = 5000 - 4500 = 500$
$a_3 - a_2 = 5500 - 5000 = 500$
$a_4 - a_3 = 6000 - 5500 = 500$
$\vdots$
$a_8 - a_7 = 8000 - 7500 = 500$

Para pensar: Explique como é possível obter um termo dessa sequência a partir do seu antecessor.

Resposta esperada: A partir do 2º termo dessa sequência, um termo qualquer pode ser obtido adicionando-se 500 ao seu antecessor.

Sequências com características como a da situação apresentada anteriormente são denominadas **progressões aritméticas** (PA).

Denominamos **progressão aritmética (PA)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante. Essa constante, que pode ser indicada por r, é a **razão** da PA. Podemos classificar uma PA em:

- **decrescente**, quando $r < 0$;
- **constante**, quando $r = 0$;
- **crescente**, quando $r > 0$.

Analise alguns exemplos de PA.

- (16, 13, 10, 7, 4, ...)
Nessa PA, note que um termo é sempre maior que seu sucessor. Nela, t
$r = 13 - 16 = 10 - 13 = 7 - 10 = 4 - 7 = -3$. Portanto, essa decrescente.
- (−8, −8, −8, −8, −8, ...)
Nessa PA, note que um termo é sempre igual ao seu sucessor. Nela, t
$r = -8 - (-8) = 0$. Portanto, essa PA é constante.

- (5, 14, 23, 32, 41, ...)
Nessa PA, note que um termo é sempre menor que seu sucessor. Nela, temos $r = 14 - 5 = 23 - 14 = 32 - 23 = 41 - 32 = 9$. Portanto, essa PA é crescente.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PA de razão r, então:

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r$
$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r$
$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n - a_{n-1} = r$
$\vdots$

Logo, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = r$.

O enésimo termo de uma PA, sendo a_1 o 1º termo e r a razão, pode ser definido por recorrência da seguinte maneira:
$a_n = a_{n-1} + r$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$

Também podemos estabelecer uma relação entre três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Acompanhe.

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n pode ser obtido pela média aritmética dos outros dois termos:
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Dica: Podemos representar uma PA de razão r e termos desconhecidos de diferentes maneiras, por exemplo:
- para $a_1 = x$, temos $(x, x + r, x + 2r, ...)$;
- para $a_2 = x - r$, temos $(x - r, x, x + r, ...)$.

Fórmula do termo geral de uma PA

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PA infinita de razão r. Como cada termo, a partir do 2º, pode ser obtido adicionando-se r ao termo anterior, temos:

$a_1 = a_1 + 0r$
$a_2 = a_1 + 1r$
$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$
$\vdots$

Para pensar: Com suas palavras, explique que relação pode ser observada entre os elementos em destaque em cada expressão apresentada.

Resposta esperada: O fator que multiplica a razão da PA é uma unidade menor que o número do índice do termo correspondente.

Note que podemos expressar qualquer termo de uma PA em função de a_1 e r.

A fórmula do termo geral de uma PA é dada por:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
termo geral (enésimo termo); primeiro termo; ordem do termo; razão

Com base na definição e na fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos associá-la a uma função afim. Observe.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = a_1 + n \cdot r - r \Rightarrow a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Podemos associar uma PA com primeiro termo a_1 e razão r a uma função afim $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = r \cdot n + (a_1 - r)$, em que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente.

Por exemplo, em relação à PA (5, 9, 13, 17, ...), em que $a_1 = 5$ e $r = 9 - 5 = 4$, temos:
$$f(n) = 4 \cdot n + (5 - 4) \Rightarrow f(n) = 4n + 1$$

Portanto, os termos dessa PA podem ser obtidos por meio da função afim $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 4n + 1$.

- $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$
- $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$
- $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$
- $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17$
$\vdots$

Fonte: Recorte de Souza, 2020, p. 16 -18.

2.3.1.7. O livro de Iezzi e Hazzan (2020)

A abordagem de Sequência no livro de Iezzi e Hazzan (2013), parte da definição de Sequência para o exemplo em seguida atividade proposta. Assim, segundo os autores, a coleção tem por objetivo oferecer uma visão global da Matemática. Desse modo, a coleção dirige-se aos alunos do ensino médio, vestibulando e universitários que necessitam rever a matemática elementar.

Assim, o desenvolvimento do capítulo que aborda Sequência e P.A., procura seguir uma lógica na apresentação dos conceitos e propriedades. Na estruturação das séries de exercícios, procura uma ordenação crescente de dificuldade partindo de uma situação problema simples até chegar em situações problemas que envolva outros assuntos.

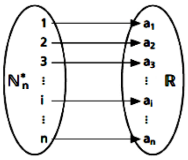
Por outro lado, não identificamos de imediato uma abordagem afinada com os pressupostos teóricos da SDT e com a estrutura SD segundo Cabral (2017), não identificamos de imediato a preocupação dos autores com uma sequência didática que favorece o ensino e aprendizagem em conformidade dos pressupostos teóricos desta pesquisa. Para tanto, segue a Figura 35 sobre a introdução de sequência no livro VII.

Figura 35 - Introdução de Sequência no livro VII.

Sequências

I. Noções iniciais

1. Definição



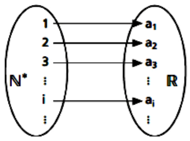
Chama-se **sequência finita** ou **ênupla** toda aplicação *f* do conjunto

$N_n^* = \{1, 2, 3, ..., n\}$ em $\mathbb{R}$.

Assim, em toda sequência finita, a cada número natural *i* ($1 \leq i \leq n$) está associado um número real a_i.

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n)\}$

2. Definição



Chama-se **sequência infinita** toda aplicação *f* de N^* em $\mathbb{R}$.

Em toda sequência infinita, a cada $i \in N^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$.

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (i, a_i), ...\}$

Vamos, daqui em diante, indicar uma sequência *f* anotando apenas a imagem de *f*:

$f = (a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...)$

em que aparecem entre parênteses ordenadamente, da esquerda para a direita, as imagens dos naturais 1, 2, 3, ..., i, ...

Quando queremos indicar uma sequência *f* qualquer, escrevemos

$f = (a_i)_{i \in I}$

e lemos "sequência *f* dos termos a_i em que o conjunto de índices é I".

II. Igualdade

4. Sabemos que duas aplicações, *f* e *g*, são iguais quando têm domínios iguais e $f(x) = g(x)$ para todo *x* do domínio. Assim, duas sequências infinitas, $f = (a_i)_i \in N^*$ e $g = (b_i)_i \in N^*$, são iguais quando $f(i) = g(i)$, isto é, $a_i = b_i$ para todo $i \in N^*$. Em símbolos:

$$\boxed{f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in N^*}$$

III. Lei de formação

Interessam à Matemática as sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:

5. Por fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita *f* cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Temos:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$

então $f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita *g* dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in N$ e $n \geq 2$.

Temos:

$n = 2 \Rightarrow b_2 = 3 \cdot b_1 = 3 \cdot 1 = 3$
$n = 3 \Rightarrow b_3 = 3 \cdot b_2 = 3 \cdot 3 = 9$

6. Expressando cada termo em função de sua posição

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de *n*.

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita *f* cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Temos:

$a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8$ e $a_4 = 2^4 = 16$, então $f(2, 4, 8, 16)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita *g* em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1$, $\forall n \in N^*$.

7. Por propriedade dos termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita *f* de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Temos:

$D(1) = \{1, -1\} \Rightarrow a_1 = 2$
$D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow a_2 = 4$
$D(3) = \{1, -1, 3, -3\} \Rightarrow a_3 = 4$
$D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Rightarrow a_4 = 6$
$D(5) = \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow a_5 = 4$
$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\} \Rightarrow a_6 = 8$

então $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

Fonte: Recortes de Iezzi e Hazzan, 2013, p. 1 - 4.

A abordagem da PA no livro de Iezzi e Hazzan (2013) conforme a Figura 36 sobre a Introdução ao conceito de PA no livro VII segue o mesmo princípio de abordagem da Sequência, um destaque para a sistematização da simbologia algébrica com ênfase em cálculo numérico e propriedades operatórias. Assim sendo, parece não haver uma preocupação dos autores em propor uma abordagem de PA aliada autonomia do aluno.

Figura 36- Introdução ao conceito de P.A. no livro VII.

Progressão aritmética

I. Definição

8. Chama-se **progressão aritmética** (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \end{cases}$$

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante *r* dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $r = 2$

$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$ em que $a_1 = 0$ e $r = -2$

$f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$ em que $a_1 = 4$ e $r = 0$

$f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$ em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $r = 1$

$f_5 = \left(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \ldots\right)$ em que $a_1 = 4$ e $r = -\frac{1}{3}$

II. Classificação

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

1º) **crescentes** são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isso ocorre somente se $r > 0$, pois:

$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$

Exemplos: f_1 e f_4.

2º) **constantes** são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isso só ocorre quando $r = 0$, pois:

$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$

Exemplo: f_3.

3º) **decrescentes** são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior. Isso ocorre somente se $r < 0$, pois:

$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$

Exemplos: f_2 e f_5.

4. Sabemos que duas aplicações, *f* e *g*, são iguais quando têm domínios f(x) = g(x) para todo *x* do domínio. Assim, duas sequências infinitas, f = (a
g = $(b_i)_i \in \mathbb{N}^*$, são iguais quando f(i) = g(i), isto é, $a_i = b_i$ para todo i ∈
símbolos:

$$\boxed{f = g \Leftrightarrow a_i = b_i,\ \forall i \in \mathbb{N}^*}$$

III. Lei de formação

Interessam à Matemática as sequências em que os termos se suce
decendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta
apresentada de três maneiras:

III. Notações especiais

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito prática a notação seguinte:

1º) para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$.

2º) para 4 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ ou $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$, em que $y = \frac{r}{2}$.

3º) para 5 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

IV. Fórmula do termo geral

9. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} + (n-1) \cdot r$$

e, então, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, o que sugere o seguinte:

10. Teorema

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é *r*, o n-ésimo termo é:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

V. Interpolação aritmética

Em toda sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados **extremos** e os demais são chamados **meios**. Assim, na P.A. (0, 3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12.

Interpolar, inserir ou **intercalar** *k* meios aritméticos entre os números *a* e *b* significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.A. é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k + 1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b - a}{k + 1}$$

VI. Soma

Vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma S_n dos *n* termos iniciais de uma P.A.

11. Teorema 1

A soma dos *n* primeiros números inteiros positivos é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

12. Teorema 2

Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r$.

13. Teorema 3

Em toda P.A. tem-se:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Fonte: Recorte de Iezzi e Hazzan, 2013, p. 6 – 17.

2.4. CONTRIBUIÇÕES DA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos foram analisados a luz dos pressupostos teóricos deste trabalho. Assim sendo, procuramos identificar como está sendo feito a abordagem de sequências, a abordagem de progressão aritmética, e a relação de conteúdos com situações do cotidiano cuja síntese das análises dos livros didáticos apresentamos no Quadro 6 .

Quadro 6 – Síntese das análises dos livros didáticos analisados.

LIVRO DIDÁTICO	**ABORDAGEM DE SEQUÊNCIAS**	**ABORDAGEM DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA**	**RELAÇÃO DE CONTEÚDOS COM SITUAÇÕES DO COTIDIANO**	**SÍNTESE DAS ABORDAGENS E CONTEÚDOS RELACIONADOS**
PRISMA Bonjorno (2020)	Em sequência numérica parece haver preferência por a presentar o termo geral a recorrência. Entretanto, não aborda sequência por regularidade.	Utiliza a demonstração das fórmulas em PA como principal recurso de apresentar o conteúdo de PA.	Observa-se minimamente a relação com o cotidiano do aluno.	Observa-se uma tendência para apresentação de definições e relações do objeto na própria matemática. Entretanto não a ênfase com outras ciências. Percebe-se que não se destaca a abordagem por meio de sequência didática.
CONEXÕES MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS, Leonardo (2020)	O autor faz uso como pano de fundo as regularidades de padrões para trabalhar o conceito de sequência numérica associada a função afim. Entretanto, não demonstra preocupação em formalizar as definições.	A abordagem é baseada em resolução de atividade. As fórmula e definições são apresentadas em segundo plano.	Não se destaca a relação do cotidiano do aluno.	Percebe-se uma preferência na abordagem por meio de atividade. Contudo não é uma opção a abordagem por sequência didática. Destaca-se a ocorrência da relação de conteúdos matemáticos. Entretanto não se observa a relação com as outras ciências.
MULTIVERSOS, Souza (2020)	Abordagem de sequências e realizada por meio de contextualização. Entretanto, não se destaca abordagem por regularidade de padrões.	Parece prevalecer a abordagem pelo uso de fórmulas.	Não prece ser um objetivo central porém, o autor estabelece uma comunicação com o cotidiano do aluno.	Percebe-se uma escolha pelo uso de fórmulas e demonstração. De modo geral a abordagem é contextualizada. Entretanto não dá ênfase a sequência didática, ao cotidiano do aluno. Percebe-se a relação com conteúdos matemáticos. Entretanto não se ressalta a relação com as outras ciências.

QUADRANTE, Chavante e Prestes (2016)	Abordagem de sequências é contextualizada. Entretanto, há poucas abordagens explorando regularidades de padrões.	Prevalece a abordagem pelo uso de fórmulas e demonstração durante abordagem.	Apresenta timidamente a relação com o cotidiano do aluno.	Observa-se uma preferência pelo uso de fórmulas e demonstração. De modo geral a contextualização não destaca o cotidiano do aluno. Há também destaque para a relação de conteúdos matemáticos. Entretanto, não se tem visibilidade com as outras ciências.
MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO, Smole e Diniz (2016)	Parece haver uma preocupação de abordar a definição e as fórmulas por meio do termo geral e recorrência. Entretanto, não fica claro a intenção de iniciar sequências explorando a regularidade.	A abordagem de PA seguiu a mesma linha de abordagem das sequências. Parece não apresenta nada de novo. Contudo, a sistematização parece ser o ponto chave do livro	A relação com a realidade do aluno fica em segundo plano.	Observa-se uma tendência a abordagem por recorrência e uso do termo geral. Por outro lado não destaca sequência didática. De modo geral faz abordagem com conteúdos matemáticos. Entretanto não se destaca a relação com outras ciências.
MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES, Dante (2016)	Percebe-se que a exploração de sequências se manifesta por regularidade de padrões. Entretanto, não se observa como proposta a contextualização e aplicação das sequências.	Poderia fazer uma apresentação de PA mais rica e menos parecida as abordagens da educação tradicionais apresentada por meio do exagero de fórmulas.	A relação do conteúdo e o cotidiano do aluno aparece como pano de fundo, em segundo plano.	Percebe-se a preferência pelo uso de fórmulas. Entretanto as atividades não dão ênfase a sequência didática. De modo geral ressalta outros conteúdos matemáticos. Entretanto não relaciona com outras ciências.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR, Iezzi e Hazzan (2013)	Aborda sequências por meio de definição seguido de exemplo. Entretanto, não se observa regularidades de padrões.	Aborda o conteúdo de PA por meio de definição e exagero de fórmulas.	A relação do conteúdo com o cotidiano do aluno não é frequente.	Observa-se a preferência pelo uso de fórmulas. De modo geral percebe-se a relação do objeto na própria matemática. Entretanto não se destaca sequência didática, assim também a relação com as outras ciências.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

A análise realizada em 6 (seis) livros propostos no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD – 2020) além do livro dos autores Iezzi e Hazzan tem o objetivo de caracterizar a abordagem da PA. Assim, identificamos que desses livros analisados, 05 (cinco) livros começam o conteúdo de Sequências ou de PA pela definição, lei de formação seguido de exemplos. Por outro lado, todos os livros utilizam imagens visuais para ilustrar e ajudar no entendimento do conceito. Contudo, na maioria desses livros, esses recursos preliminares se limitam ao caráter mais informativo.

Outro fator que merece destaque, é a abordagem de PA por atividade encontrado em 1 (um) livro. Ademais, nenhuns dos livros analisados recomendam ou fazem alusão aos conhecimentos básicos necessários ao estudo da PA. Por outro lado, a linguagem matemática encontrada nos livros está adequada ao aluno do ensino médio. Contudo, encontramos 4 (quatro) livros que reforçam o caráter excludente ao universo do aluno, quer seja por meio da especificidade da linguagem matemática, quer seja pelo exagero de fórmulas, ou ainda, na abordagem da situação problema.

Outro destaque identificado durante a análise dos livros didáticos aponta que as maiorias dos livros didáticos relacionam o objeto matemático com conteúdos matemáticos. Entretanto, quando os livros não abordam de maneira implícita abordam de modo superficial o conteúdo com outras ciências. Ademais, poucos livros relacionam o objeto matemático com o cotidiano do aluno.

Desse modo, as reflexões em torno da abordagem da PA nos livros didáticos manifestam uma série de necessidades. Assim sendo, entendemos que essas reflexões não se esgotam nessa pesquisa, mas propõe outras reflexões que possam levar a novos conhecimentos sobre a abordagem da Sequência e da Progressão Aritmética nos livros didáticos.

E por fim, as análises realizadas nos livros didáticos nortearam e contribuíram para a elaboração da sequência didática desse trabalho, sugerindo caminhos, repetição de padrões e sequências lógicas.

3. SOBRE O OBJETO MATEMÁTICO

> ...A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva[26]

Para melhor compreender os rumos dessa proposta, a narrativa que segue neste capítulo apresenta conteúdos de Progressão Aritmética com rigor e aprofundamento científico por entender que estas são passiveis de serem repassadas aos alunos do Ensino Médio. Assim, vislumbra-se um outro olhar no raciocínio matemática, assim como, essa abordagem pode possibilitar e ou acrescentar na formação dos leitores desta pesquisa.

Nesse sentindo, tendo em vista um maior aprofundamento e domínio do assunto, além de definições de sequência, séries têm-se a inserção de conteúdos não vistos no Ensino Médio como indução finita, limite e noções de convergência e divergência inseridas no trabalho (como nota de rodapé) em geral tratado apenas no Ensino Superior.

A definição de progressão aritmética (P.A.) em diversos livros são muito semelhantes e atendem perfeitamente a exigência necessária do que vem a ser uma P.A., entretanto, utilizaremos a definição de progressão aritmética extraída de (MORGADO; CARVALHO, 2013), tem-se que: Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de razão da progressão.

Vale ressaltar o fato de que as chamadas progressões aritméticas finitas pela definição[27],são também sequências.

A *classificação* de uma Progressão Aritmética é dada a partir da sua razão. Desse modo, considerando r a razão de uma P.A. temos que, quando $r > 0$ r, a P.A. é crescente e o termo seguinte sempre será maior que o anterior. Por outro lado, quando $r < 0$, a P.A. é decrescente e o termo seguinte sempre será menor que o

[26] BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2015.

[27] Por definição, uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $\mathrm{n} \to a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

termo anterior. Temos ainda que, quando $r = 0$, a P.A. é constante ou estacionária, os elementos serão iguais.

É frequente aparecerem problemas de P.A. com poucos termos. Nestes casos pode ser útil usar *representações especiais*. Assim, vamos considerar dois casos sendo, para número ímpar de termos e número par de termos.

- ✓ *Dessa forma, para o número ímpar de termos de uma P.A. iremos considerar duas situações a saber: A primeira: Se forem 3 (três) termos de razão* r *podemos representá-los por,* $x - r, x, x + r$*. A segunda: Se forem 5 (cinco) termos de razão* r *podemos representá-los por,* $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$*.*
- ✓ *Por outro lado, considerando um número par de termos de uma P.A. temos desse modo. Se forem 4 (quatro) termos de razão* $r = 2y$ *podemos representá-los por:* $x - 3y, x - y, x + y, x + 3y$*. exemplificando no caso de ser 6 termos teremos:* $x - 5y, x - 3y, x - y, x + y, x + 3y, x + 5y$*.*

As Progressões Aritméticas possuem algumas propriedades que são úteis na resolução de problemas comumente encontrados nos livros e ENEM. Assim temos a *primeira propriedade* numa Progressão Aritmética finita com os termos opostos, ou equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância do termo central da PA, têm a mesma soma e sempre igual a $a_1 + a_n$. Assim, para uma PA finita$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. temos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_k + a_{n-k+1}.$$

Assim, uma demonstração dessa primeira propriedade pode ser, considerando a_k e a_{n-k+1} dois termos quaisquer equidistante dos extremos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Utilizando a fórmula do termo geral da PA, para k elementos temos $a_k = a_1 + (k - 1)r$ e para $\mathrm{n - k + 1}$ elementos temos $a_{n-k+1} = a_1 + [(n - k + 1) - 1]r$. Segue daí que a soma de a_k + a_{n-k+1} é igual a $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k - 1).r + a_1 + (n - k).r = 2a_1 + [(k - 1) + (n - k)].r$ logo $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_1 + (n - 1).r$ como $a_n = a_1 + (n - 1).r$ temos $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. Assim, fica demonstrado essa primeira propriedade.

A *segunda propriedade* diz que em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos. Consideremos a PA $(\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots})$, sendo que $\mathrm{a_n} = \frac{\mathrm{a_{n-1} + a_{n+1}}}{2}$, com $\mathrm{n} \geq 2$. Uma demonstração por meio da definição da P.A.

Assim, sabemos que: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, n \geq 2$. Desse modo, sabemos pela definição que: $\left.\begin{matrix} a_n - a_{n-1} = r \\ a_{n-1} - a_n = r \end{matrix}\right\} = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Longrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$. Assim, temos que, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Assim, fica demonstrada a segunda propriedade. Vale ressaltar que essa propriedade pode ser escrita na forma $a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, onde os dois termos a_{n-k} e a_{n+k} , são dois termos quaisquer equidistante da P.A..

A *terceira propriedade* da Progressão Aritmética diz que em uma P.A. $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4, \mathrm{a}_5, \ldots, \mathrm{a}_{n-2}, \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_n, \ldots)$, onde a_p e a_q são dois termos quaisquer, é válido a propriedade $a_n = a_p + (n-p).r$. Uma demonstração a partir da fórmula do termo geral da P.A. $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Assim, $a_p = a_1 + (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - p.r + r$. Substituindo esse resultado na equação do termo geral, temos $a_n = a_p - p.r + r + (n-1).r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + r + n.r - r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + n.r$, Assim, desse modo, $a_n = a_p + (n-p).r$ fica demonstrada a terceira propriedade.

A *quarta propriedade* da Progressão Aritmética, diz que em uma P.A. Se k, m, p e q são índices de termos quaisquer de uma P.A. $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4, \mathrm{a}_5, \ldots, \mathrm{a}_{n-2}, \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_n, \ldots)$ não constate, então: $k + p = m + q$ se, e somete se, $a_k + a_m = a_p + a_q$. Assim, a demonstração dessa quarta propriedade considerando r a razão da Progressão Aritmética. $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_m, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots)$. Assim, $a_k + a_m = a_p + a_q \Rightarrow a_1 + (k-1).r + a_1 + (p-1).r = a_1 + (m-1).r + a_1 + (q-1).r \Rightarrow (k-1).r + (p-1).r = (m-1).r + (q-1).r \Rightarrow (k-1+p-1).r = (m-1+q-1).r \Rightarrow k + p - 2 = m + q - 2 \Rightarrow k + p = m + q$. Assim, fica demonstrada a quarta propriedade.

Interpolação Aritmética em uma sequência finita $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4, \ldots, \mathrm{a}_{n-2}, \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_n)$, sedo os termos a_1 e a_n denominados extremos e os demais termos são chamados de meios. Assim, interpolar k meios aritméticos entre os extremos α e β é determinar quais k úmeros devem ser inseridos entre α e β de tal maneira que se tenha uma P.A. de $k + 2$ termos. Assim, considerando $a_1 = \alpha$ e $a_{k+2} = \beta$, ao inserir k meios aritméticos entre os extremos α e β encontraremos

$(\alpha, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, \beta)$. Substituindo no termo geral da Progressão Aritmética teremos: $\beta = \alpha + (k-1).r$, onde $r = \frac{\beta-\alpha}{k+1}$.

Fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética dada por $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ e razão r. Assim sendo, $r = a_2 - a_1 \rightarrow a_2 = a_1 + r \Rightarrow r = a_3 - a_2 \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = a_4 - a_3 \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow r = a_5 - a_4 \Rightarrow a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$. Assim, ao avançar, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém. Desse modo, um termo qualquer da progressão sempre será igual ao primeiro termo, somado com a multiplicação da razão pelo número de termos, diminuído de uma unidade. Assim, o termo geral de uma PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n > 1 \quad (\text{ I })$$

Assim sendo, uma generalização do Termo geral da Progressão Aritmética considerando-se a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots, a_n, \dots)$ de razão r, pode ser dada por:

$$a_n = a_m + (n-m)r \text{ com } m \leq n \quad (\text{ II })$$

Desse modo, a_n é o n-ésimo termo da P.A. em função de r. Assim, observa-se que por meio da fórmula (I), podemos encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética, desde que sejam conhecidos o primeiro termo e a razão da P. A.. No entanto, nota-se que a fórmula (II) é mais genérica e abrangente que (I), de modo que essa, não apresenta dependência do termo a_n em relação ao primeiro termo da P.A..

Assim, uma abordagem da fórmula do termo geral de uma P.A. comumente usada por professores assim também encontrada nos livros didáticos expressa cada termo em função do termo anterior e da razão. Desse modo, temos o termo geral da P. A. é dado por: $a_n = a_{n-1} + r$ ou ainda $r = a_n - a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$

A demonstração deste resultado pode ser feita por indução, utilizando o Axioma 1. Assim, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1$ Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)r$ então temos, $a_n + r = a_1 + (n-1)r + r$. Logo, $a_{n+1} = a_1 + nr$. Pelo axioma128 da Indução finita[29], a fórmula vale para todo n.

---

[28] Indução Finita (Axioma 1): Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que (i) $P(1)$ é válida.(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ N, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$. Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. (MORGADO; CARVALHO, 2013).

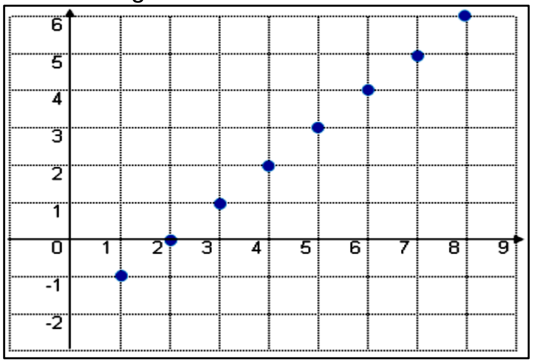
É preciso ressaltar com relação ao princípio da indução finita que segundo Hefez (2014), é importante não confundir Indução Matemática com indução empírica. Nas ciências naturais, é comum, após um certo número - sempre finito - de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Assim, essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Já a indução matemática serve para estabelecer verdades matemáticas válidas sobre o conjunto dos números naturais.

Dessa forma, não se trata de mostrar que determinada fórmula é verdadeira para muitos casos, mas trata-se de provar que tal fórmula é verdadeira para todo número natural. Posto isso, com relação à convergência ou divergência da PA, abalizaremos o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [a_1 + (n-1).r]$$

Com base no limite acima, apresentamos alguns resultados de divergência e convergência de sequências, que usaremos como auxílio visual, alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de a_n. Assim, se $r > 0$, pelo item (ii)[30] da definição apresentada por Guidorizzi (1999), tem-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge como proposto na Figura 37.

Figura 37 - P.A. crescente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

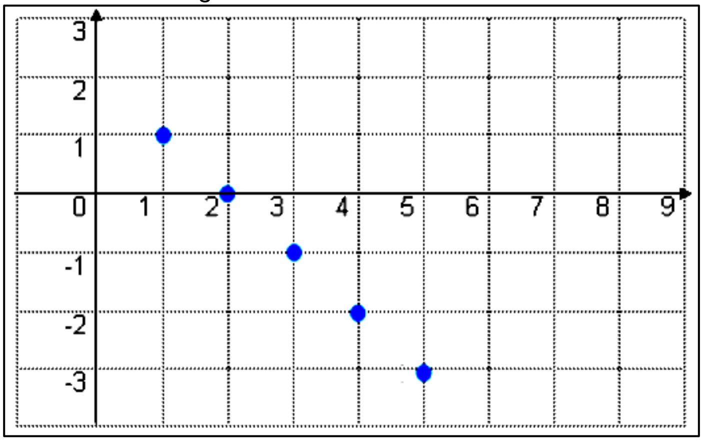
---

[29]O Axioma 1, como diz Elon em Lima (2013), é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos de forma empírica) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira para $n = 1, n = 2, n = 3$e dizemos “assim por diante...”.

[30] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. definimos:(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon$. (GUIDORIZZI, 1999).

Um outro exemplo onde a sequência diverge é quando consideremos $r < 0$, que pelo item (iii)[31] tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge como se apresenta na Figura 38.

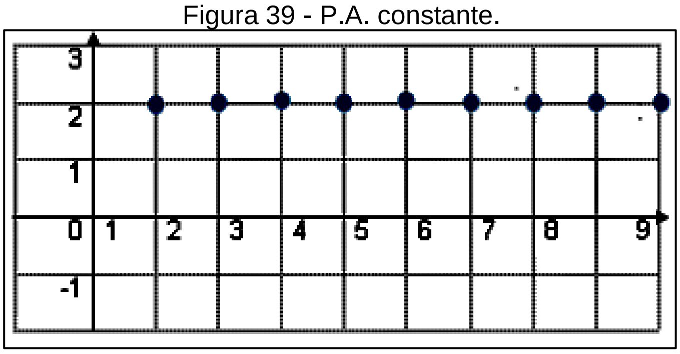
Figura 38 - P.A. Decrescente.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Por outro lado, se considerarmos $\mathrm{r} = 0$ e $a_1 \neq 0$, pelo item (i)[32] tem-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$ Logo, a sequência converge como na Figura 39.

Figura 39 - P.A. constante.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

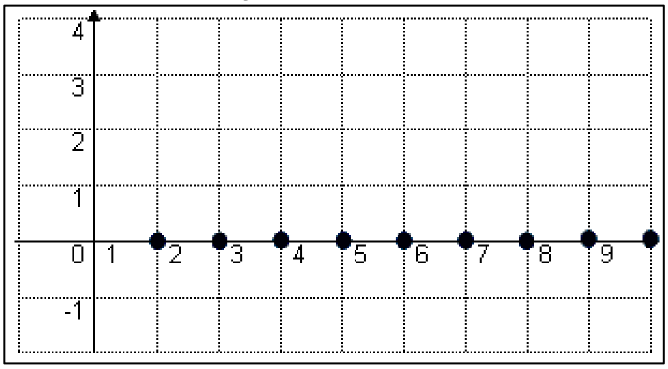
Por fim, se $r = 0$ e $a_n = 0$ então, pelo item (i) da nota 36, tem-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge como na Figura 40.

---

[31] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. definimos:(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = -\infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n_0} \Rightarrow \mathrm{a_n} < -\varepsilon$. (GUIDORIZZI, 1999).

[32] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real.definimos:(i) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{L}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n_0}$ quando $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ (GUIDORIZZI, 1999).

Figura 40 - PA Nula.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Assim, a conclusão que chegamos é de que a sequência formada pelos termos de uma progressão aritmética converge quando a sua razão for igual a zero. Nesse caso, todos os termos da PA são iguais a um mesmo número e a convergência, é para o número considerado. Como se observa nos exemplos a convergência para o número 2 (gráfico 3) e a convergência para zero (Gráfico 4).

Um fato peculiar quando tratam da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética finita está relacionado ao matemático alemão Carl Friederich Gauss. Sobre esse tema, segue um recorte da história contada a despeito de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), considerado um dos maiores matemáticos que já existiu, extraída de (BOYER, 1974):

> Um dia, para manter a classe ocupada o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara de cabeça a soma da progressão aritmética 1+2+3+...+99+100, presumidamente por meio da fórmula n(n + 1)/2.

Desse modo, Gauss visualizou a lista de números e percebeu que, somando o primeiro com o último, teria 101 como resultado; somando o segundo com o penúltimo, o resultado também seria 101 e assim por diante. Como a soma de todos os pares de termos equidistantes dos extremos resultava em 101, Gauss só precisou multiplicar esse número por metade dos termos disponíveis para encontrar o resultado 5050.

Esse feito deu origem a expressão usada para calcular a fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Assim, considerando a progressão aritmética

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão r, podemos escrevê-la na forma $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \ldots, a_n - 2r, a_n - r, a_n)$. Diante disso, iremos calcular a soma dos n primeiros termos dessa PA de razão r, que indicaremos aqui por S_n:

Assim, temos que: $S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$. Do mesmo modo, considere a P.A. de razão r com os mesmos termos, porém, no sentindo decrescente. Assim, dada a P.A. $(a_n, a_n - r, a_n - 2r, \ldots, a_1 + 2r, a_1 + r, a_1)$, temos que a soma dos n primeiros termos é dado por: $2S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 = 2S_n = (a_1 - a_n)n$. Segue daí que, a soma dos termos da P.A. finita é obtida por meio da expressão:

$$S_n = \frac{(a\_1 - a\_n)n}{2}$$

Assim sendo, observe que a soma dos termos da primeira P.A. é igual à soma dos termos da segunda PA. Por isso, ambas foram igualadas a S_n. Considerando que essas duas expressões foram obtidas de uma única P.A. e que os termos equidistantes estão alinhados na vertical. Sendo assim, podemos somar as expressões e obter a fórmula que expressa a soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \quad +$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Desse modo, temos que $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Logo temos que a proposição enunciada por: A soma dos termos dos n primeiros termos de uma progressão aritmética finita por ser obtida por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Essa proposição está assentada na demonstração que podemos considerar proceder por indução, utilizando o Axioma 1[33].

De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos:

---

[33] Indução Finita (Axioma 1): Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que (i) $P(1)$ é válida.(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ N, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$. Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. (MORGADO; CARVALHO, 2013).

$$\mathrm{S_n} = \frac{(a_1 + a_n\,)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1\,).1}{2} = a_1$$

Assumimos que a hipótese da soma para n termos é válida. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $\mathrm{S_n} = \frac{(a_1+a_n\,)n}{2}$, então, também se verifica para $n+1$.

Desse modo, $\mathrm{S_{n+1}} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1+a_n\,)n}{2} + a_{n+1}$. Então, considerando o fato de que $a_{n+1} = a_1 + nr$, substituindo na equação acima temos, $\mathrm{S_{n+1}} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}-r})\mathrm{n}}{2} + \mathrm{a_{n+1}}$. Assim, $\mathrm{S_{n+1}} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}})}{2}\mathrm{n} - \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{n} + \frac{2\mathrm{a_{n+1}}}{2} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}})}{2}\mathrm{n} + \frac{2\mathrm{a_{n+1}}-\mathrm{rn}}{2}$. Assim, temos que, $S_{n+1} = \frac{(a_1+a_{n-1})}{2}n + \frac{a_{n+1}+a_{n+1}-rn}{2}$.

Desse modo, substituindo o termo geral da progressão aritmética, $a_{n+1} = a_1 + nr$, donde se tem que $a_1 = a_{n+1} - nr$ na equação acima temos:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})}{2}n + \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{a_1 + a_{n+1}}{2}$$

Logo, pelo axioma da Indução Finita a fórmula vale para todo n. Por outro lado, o segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão aritmética infinita. Assim, quando soma-se infinitos termos de uma sequência, dá-se o nome série e denota-se por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots\ a_n + \cdots$ (LIMA, 1997). Desse modo, têm-se um caso de série.

Assim sendo, como ela é oriunda de uma PA, chamamos aqui de série aritmética. Dessa maneira, como o termo geral não tende a zero, a série aritmética é divergente, exceto no caso da razão e do primeiro termo serem zero. Nesse caso, a série pode ser convergente. Vamos observar alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de Sn.

Vale ressaltar que essa fórmula só é válida para progressões aritméticas que possuem um número finito de termos. Se a PA for infinita, será necessário limitar o número de termos que serão somados.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A narrativa deste capítulo está organizada para explicar o conjunto de procedimentos metodológicos organizados, a partir dos objetivos almejados, que ajudaram na investigação do problema apresentado neste estudo e que tem como foco principal, identificar em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Progressão Aritmética?

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.41-42)

Assim sendo, após o aporte teórico elucidado, apresentamos aqui as estratégias metodológicas que auxiliaram no desenvolvimento desta pesquisa buscando alcançar seus objetivos.

4.1. TESTE DE VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

A fim de diagnosticar indícios de conhecimentos necessários para o desenvolvimento das atividades da sequência didática, foi realizado um teste de conhecimentos básicos para aferir a base cognitiva dos alunos os quais a sequência didática sobre Progressão Aritmética se destina.

Embora eu seja o professor da turma escolhida para a aplicação da SD, fazer o teste de conhecimento básicos é necessário, não só, por serem alunos de escola pública que não tiveram aulas presenciais há pelos menos um ano letivo, mas também, por não poder garantir que esses alunos possuem conhecimentos básicos para desenvolver o tema da pesquisa em questão. Além disso, o teste me possibilita uma diagnose individual, assim como, uma diagnose geral da turma, de tal modo que me permita potencializar os grupos de alunos na hora de fazer os arranjos por equipes. Desse modo, é possível garantir, equipes de alunos mais equilibradas em termos de competências e habilidades matemática para o que objetivamos alcançar.

Assim, procurei indícios de base cognitiva nos alunos sobre: Conjuntos Numéricos; Sequências Numéricas e Função afim. Nesse contexto, o procedimento que adotei nessa atividade foi aplicá-la de forma individual e sem nenhuma interferência. Para tanto, foi estipulado duas aulas sendo cada uma de 50 minutos para que os alunos respondam as atividades que estavam sendo propostas no Apêndice C.

4.2. OFICINA SOBRE OS CONHECIMENTOS BÁSICOS

A oficina de conhecimentos básicos, é um ambiente favorável para aprendizagem, bem com um espaço de vivências, de partilha e sobretudo de diálogo e de construção coletiva de conhecimentos. Nesse sentido, a partir do resultado do teste de conhecimentos básicos, foi necessária a elaboração e execução de uma oficina que viabilizasse a aprendizagem de Progressão Aritmética por meio de SD, e que levasse em conta o ponto chave da proposta de uma oficina de conhecimentos básicos indicado acima. Desse modo, foi realizada a oficina conforme o Apêndice D.

4.3. ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Considerando que as estratégias metodológicas foram discutidas com profundidade em cada capítulo. Assim sendo, ressalto que estas estratégias direcionam o leitor de um modo global acerca das etapas que corroboram com a construção de todo o processo de pesquisa.

A esse respeito, realizei estudos constituídos de uma revisão da literatura, um estudo detalhado do Objeto Matemático; uma pesquisa de campo com alunos egressos do 1º ano do ensino médio; uma pesquisa de campo com professores de matemática que estão atuando no ensino médio, e um levantamento bibliográfico em livros didáticos sobre a abordagem da PA.

Para tanto, fiz um fichamento bibliográfico contendo 35 fontes catalogadas no período de 2012 a 2022, composta por Teses, Dissertações, Artigos e Livros

Didáticos. Após a seleção preliminar, realizamos posteriormente uma análise mais detalhada dos trabalhos acadêmicos e livros didáticos selecionados que abordassem o assunto de PA, principalmente os que abordam: estudos experimentais em matemática; livro didático de matemática; dificuldade em ensino e aprendizagem em PA; sequência didática de matemática e sequência didática em progressão aritmética.

Vale ressaltar que todo os estudos corroboraram para compor os textos e atividades deste trabalho. Por outro lado, na perspectiva de identificar e caracterizar especificamente, como os professores de matemática estão ministrando suas aulas, o tipo de material didático utilizado por eles na elaboração das suas aulas e em sala de aula, as dificuldades que permeia todo o processo de ensino em especial do ensino de PA, assim também, a percepção desses professores com relação as dificuldades de aprendizagem dos seus alunos nesse processo. Nesse contexto, consegui alcançar 53 professores de matemática que se encontravam como professores do ensino médio e aceitaram participar do questionário socioeducacional.

De outro lado, na perspectiva de identificar como os alunos caracterizam as aulas dos professores de matemática, assim também, as suas dificuldades de aprendizagem em matemática em especial no ensino de PA. Assim, foi elaborado um questionário socioeducacional com alunos egressos do 1º ano tomando como ponto de partida as dificuldades levantadas na revisão de literatura que foram submetidos a 60 alunos.

Por se tratar de uma fonte de trabalho e consulta constantemente solicitadas em sala de aula, por influenciar em muitos casos o planejamento e a maneira de como o professor elabora e ministra suas aula, por considerar que em muitos casos é o único recurso didático de professores e alunos, foi realizado um levantamento bibliográfico com 7 livros didáticos sendo que 6 (seis) desses compõe o PNLD para o Ensino Médio com finalidade de identificar e caracterizar como está sendo feito a abordagem de PA nos livros didáticos facilmente disponíveis de forma presencial e as vezes *on line*.

De posse das interfaces professor, aluno, livro didático, elaboramos um tratamento matemático sobre Progressão Aritmética. Os estudos mais detalhados sobre Progressão Aritmética tiveram como objetivo apresentar um texto conciso sobre o tema para professores de matemática e leitores a fim de situá-lo para além da apresentação dos livros didáticos. Assim também, estabelecer possibilidades de interligação a outros conteúdos.

Além disso, a elaboração da Sequência Didática levou em conta as discussões estabelecidas pelas interfaces citadas. Subsidiada pelo aporte teórico, cuja estrutura da Sequência Didática esteados nos constructos de Cabral (2017). Além do mais foi levado em consideração os resultados obtidos a partir do teste de verificação dos conhecimentos básicos como uma estrutura cognitiva que o aluno precisa ter para dar sequência a sua aprendizagem.

Assim sendo, foi elaborada 5 (cinco) atividades de Progressão Aritmética para ser trabalhadas com alunos do 1º ano do Ensino Médio. As quais abordam os seguintes conteúdos: Classificação de Progressão Aritmética; propriedades de uma Progressão Aritmética; Razão da Progressão Aritmética; Termo Geral da Progressão Aritmética; A Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética como proposto no Apêndice E.

4.3.1. UARC 1 - Sequência numérica regular e lei de formação

A sequência numérica regular é uma sequência ordenada, construída por meio de uma regularidade ou padrão podendo assim, ser expressa por meio de uma lei ou regra de formação, de tal maneira que se pode obter qualquer elemento dessa sequência, até aqueles mais distantes. Assim sendo, temos:

ATIVIDADE 01 – Sequência Numérica Regular

Título: Sequência numérica regular a partir de sua lei de ocorrência.

Habilidades: Reconhecer e representar uma sequência numérica; ler e interpretar a linguagem numérica em linguagem algébrica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.

Objetivos: Identificar regularidades de padrões, sua lei de formação e expressá-las algebricamente.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais e operações com polinômios.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Observe a sequência dos números abaixo:

a) Sequência 1.

02	04	06	08	10	12

b) Sequência 2.

01	05	09	13	17	21

c) Sequência 3.

01	04	05	10	12	30

Responda as questões abaixo.

02). [Ir] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação em cada uma das sequências acima?

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3
( ) Sim	( ) Sim	( ) Sim
( ) Não	( ) Não	( ) Não

03). [Ir] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

Sequência 1. ____

Sequência 2. ____

Sequência 3. ____

04). [Ir] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3
( ) Sim	( ) Sim	( ) Sim
( ) Não	( ) Não	( ) Não

05). [Ir] Baseado nas suas observações, quais os próximos números nas sequências?

a) Sequência 1.

02	04	06	08	10	12			

b) Sequência 2.

01	05	09	13	17	21			

06). [Ir] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na sua observação do item

Sequência 1. ____

Sequência 2. ____

07) [Ie] Determine os próximos números das sequências abaixo

-20		-14	-11	-8			

[If]

Sequência Numérica Regular a partir de sua Lei de Formação é uma sequência numérica que admite um termo qualquer (termo geral, $\boldsymbol{an}$) a partir de relações entre seus termos e sua posição, obedecendo uma determinada lei de formação.

A Lei da Recorrência permite calcular qualquer termo de uma sequência numérica a partir de elementos antecessores: $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1$

08) [IAr] Preencha os próximos números e diga qual opadrão que identifica a sequência numérica abaixo:

0		10	15	20		30	35		45

09) [IAap] Preencha os próximos números e diga qual opadrão que identifica a sequência numérica abaixo:

$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ 89;$ ______

4.3.2. UARC 2 - Definindo e classificando a Progressão Aritmética

A progressão aritmética é uma sequência numérica regular utilizada para descrever o comportamento de fenômenos matemático como por exemplo, o crescimento ou decrescimento permanente, por isso, de um termo para o outro, a diferença será sempre a mesma, e essa diferença é denominada razão da PA. Assim temos:

ATIVIDADE 02 – Classificação da Progressão Aritmética

Título: Definindo e classificando a Progressão Aritmética

Habilidades: Reconhecer, classificar e representar uma sequência numérica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.

Objetivo: Definir a razão de uma P.A.; classificar a PA quanto a razão, neste caso, se crescente, decrescente ou constante. E classificar a P.A. quanto ao número de termos, desse modo, se finita ou infinita.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Complete as sequências abaixo de acordo com o comando:

02) [Ir] Adicionar 3: (7,____, ____, ____, ...)

03) [Ir] Subtrair 2: (10, ____, ____, ___)

04) [Ir } Adicionar 0: (12, ____, ____, ____, ____, ____)

05) [Ii] Identifique nas sequências abaixo o que ocorre entre dois termos consecutivos quaisquer:

06) [Ir] (1, 8, 15, 22, 29, 36, ...):__________________________________

07) [Ir] ($12, \quad 7, \quad 2, \quad -3, \quad -8$):____

08) [Ir] ($3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3$):______________________________________

09) [Ii] Dentre as sequências acima, identifique aquela cujos valores:

10) [Ir] Aumentam: ____

11 [Ir] Diminuem: ____

12) [Ir] Permanecem os mesmos:_______________________________________

13) [Ii] Nas sequências acima correspondente aos itens de 6 a 8 determine a quantidade de termos de cada sequência, destacando o primeiro e o ultimo termo:

14) [Ir] Sequência 6: ____

15) [Ir] Sequência 7: ____

16) [Ir] Sequência 8: ____

17) [Ie] Complete as sequências abaixo considerando que o padrão seja mantido, determine o número que está sendo somado em cada uma delas (razão) e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) ($5, \quad \_\_\_, \quad 5, \quad 5, \quad \_\_\_, \quad 5$) ____

b) ($\_\_\_, \quad 14, \quad 18, \quad \_\_\_, \quad 26, \quad 30, \quad 34, \quad \_\_\_$) ______________________________

c) ($-1, \quad -5, \quad -9, \quad -13, \quad \_\_\_, \quad \_\_\_, \quad \_\_\_, \quad \ldots$) ____________________________

[If] Dada a sequência ($a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n$). Define-se a razão r como $r = a_n - a_{n-1}$; $\forall_n \geq 2$

Diz-se que a sequência é:

Crescente quando $r > 0$;

Decrescente quando $r < 0$;

Constante quando $r = 0$;

Finita quando a sequência apresenta número de termos limitado;

Infinita quando a sequência apresenta número de termos ilimitado.

18) [IAr] Complete as sequências abaixo considerando que o padrão seja mantido, determine o número que está sendo somado em cada uma delas (razão) e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $-16;\ -19;\ -22;\ -25;$ ______

b) $-3;\ -3;\ -3;\ -3;$ _______

c) $0{,}04;\ \ 0{,}107;\ 0{,}174;$ ______

19) [IAap] A quantidade mensal de novos clientes de um determinado clube aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, o clube teve 300 novos clientes; em fevereiro, 380; em março, 460. Esse padrão de crescimento de novos clientes manteve-se nos meses subsequentes. A quantidade total de novos clientes até o mês de agosto desse clube foi de?

4.3.3. UARC 3 - Termo geral da Progressão Aritmética

O termo geral da PA é apresentado por uma fórmula usada para encontrar qualquer valor numérico de um termo de uma PA desde que se conheça a razão, posição do termo e primeiro termo da PA. Assim temos:

ATIVIDADE 03 – Termo geral da progressão aritmética

Título: Definir o termo geral da Progressão Aritmética

Habilidades: ler e interpretar a linguagem numérica em linguagem algébrica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.
Objetivo: Definir o termo geral de uma P.A.; classificar a PA quanto a razão, neste caso, se crescente, decrescente ou constante. E classificar a P.A. quanto ao número de termos, desse modo, se finita ou infinita.
Pré-requisitos: Operações básicas com números reais e operações com polinômios.
Duração prevista: 50 minutos.
Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.
Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.
Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Observe as sequências numéricas e considerando que o padrão permaneça, complete-as:

a) Sequência 1: ($\_\_\_,\ 4,\ 7,\ \_\_\_,\ 13,\ \_\_\_,\ \ldots$)

b) Sequência 2: ($-34,\ -30,\ -26,\ \_\_\_,\ -18,\ \_\_\_,\ -10$)

c) Sequência 3: ($\_\_\_,\ 56,\ 52,\ 48,\ \_\_\_,\ \ldots$)

d) Sequência 4: ($\_\_\_,\ -10,\ \_\_\_,\ \_\_\_,\ -16,\ -18$)

e) Sequência: ($7,\ \_\_\_,\ 7,\ \_\_\_,\ 7,\ 7,\ \_\_\_,\ \_\_\_$)

02) [Ir] Nas sequências de 1 a 5 acima, determine a razão e destaque o primeiro e o último termo.

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3	Sequência 4	Sequência 5
razão =	razão =	razão =	razão =	razão =
primeiro =	primeiro =	primeiro =	primeiro =	primeiro =
último =	último =	último =	último =	último =

03) [Ir] Considerando as sequências de 1 a 5 do item (01 [Ii]) preencha na tabela abaixo cada termo da sequência no formato de uma soma utilizando o termo anterior e a razão:

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____
$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$
$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$
$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$
$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$
$a_6 =$	$a_6 =$		$a_6 =$	$a_6 =$
	$a_7 =$			$a_7 =$
				$a_8 =$

04) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o valor de cada termo da sequência?

____

05) [Ir] Considerando as sequência de 1 a 5 escreva cada termo da sequência no formato de uma soma de produto utilizando somente o primeiro termo e a razão.

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____
$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$
$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$

$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$
$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$
$a_6 =$	$a_6 =$		$a_6 =$	$a_6 =$
	$a_7 =$			$a_7 =$
				$a_8 =$

06) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o cálculo de cada termo da sequência?

____

07) [Ie] Qual o valor do vigésimo termo de uma progressão aritmética onde o primeiro termo é igual a 5 e a razão é igual a 3.?

____

[If] Dada a sequência ($a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \ , \ a_{n-1}, \ a_n$). De razão r com $r = a_n - a_{n-1}$; $\forall_n \geq 2$, onde a_1 é o primeiro termo, a_n é o último termo.

Diz-se que o termo geral da Progressão Aritmética (PA) é:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$ou$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

08) [IAr] Qual o 13º termo de uma progressão aritmética que apresenta o quinto e sexto termo respectivamente igual a 23 e 27?

09) [IAap] Obtenha o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.

4.3.4. UARC 4 - Propriedades da progressão aritmética

Nesta quarta atividade, abordamos a 1ª propriedade de uma PA de números de termos par finita e ou infinita, como sendo a soma dos dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos. Além disso, a 2ª propriedade garante que em uma PA, tendo em vista os três termos consecutivos, o termo médio da PA é igual a média aritmética dos outros dois termos. Assim temos:

ATIVIDADE 04 – Propriedades da Progressão Aritmética

Título: Propriedades da PA

Habilidades: Realizar a identificação de padrões e regularidades em uma sequência numérica; reconhecer e aplicar as propriedades da sequência didática;

Objetivo: Reconhecer, entender e aplicar as propriedades de PA.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

1ª Propriedade

01) [Ii] Observe a sequência numérica (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40) e preencha o valor da soma dos termos:

a) a_1 com a_8 ? ____

b) a_2 com a_7 ? ____

c) a_3 com a_6 ? ____

d) a_4 com a_5 ? ____

02) [Ir] Descreva o que você observou nos itens *a, b, c* e *d*. ____________________

03) [Ie] O valor de m para que $m + 2;\ 2m;\ 2m + 6;\ 28$ sejam nessa ordem uma progressão aritmética é? ______________________________________

2ª Propriedade

04) [Ii] Observe a P.A. (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 36, ...) e responda o valor de cada expressão abaixo.

a) $\frac{a_1+a_3}{2}$? ____

b) $\frac{a_3+a_5}{2}$? ____

c) $\frac{a_5+a_7}{2}$? ____

d) $\frac{a_7+a_9}{2}$? ____

05) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado nos itens *a, b, c* e *d*? ____

06) [Ir) Considerando que o padrão se mantenha, qual o termo que encontramos na expressão $\frac{a_{24}+a_{26}}{2}$? ____

07) [Ir] Qual o termo da P.A. você encontra na expressão $\frac{a_{50}+\ a_{52}}{2}$? e por quê?

____

08) [Ie] Uma sucessão de números igualmente distantes um após o outro, tem como vigésimo terceiro termo e vigésimo quinto termos os valores respectivamente iguais a 43 e 83. Qual o valor vigésimo quarto termo desta sucessão? ________________

[If]
1ª Propriedade: Numa Progressão Aritmética finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$
Sendo assim, em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n-k+1}$$

2ª Propriedade: Em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos. Assim, Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ temos que $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, com $n \geq 2$.

9) [IAr] O quinto termo da P.A. $(8; \quad x; \quad 4; \dots)$ é?

10) [IAp] As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1$; $2x$; $x^2 - 5$, e estão em PA, nesta ordem. O perímetro do triângulo é:

a) 10 b) 12 c) 15 d) 24 e) 25

4.3.5. UARC 5 - Soma dos termos da progressão aritmética finita

Nesta quinta atividade abordaremos a soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA). A demonstração dessa fórmula envolve justamente algumas somas de termos, partindo de um princípio matemático percebido primeiro por Gauss. Desse modo, a soma dos termos de uma progressão aritmética pode ser obtida por meio da metade do número de termos multiplicada pela soma dos seus extremos. Assim temos:

ATIVIDADE 05 – Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Título: Soma dos Termos da P.A. Finita

Habilidades: Realizar a identificação dos termos de uma sequência numérica; padrões e regularidades em uma sequência numérica; reconhecer e aplicar as propriedades da sequência didática;

Objetivo: Reconhecer, entender e aplicar as propriedades de PA.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

Objetivo: Determinar a soma dos termos de uma P.A. através da fórmula da soma dos termos da P.A.

Procedimento: Análise as situações abaixo e responda as questões.

É comum encontrar fórmulas e sugestões para que as pessoas passem a fazer alguma poupança com o dinheiro que ganha. Desse modo, vamos aproveitar para conhecer uma delas encontrada na internet e pensar sobre o assunto.

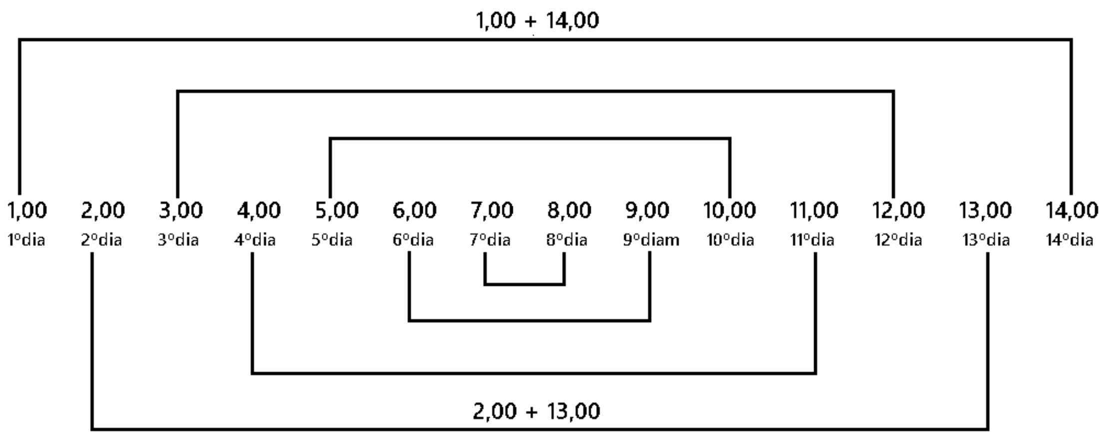
A sugestão é a seguinte: Você deve poupar todos os dias, sem exceção, colocando o dinheiro poupado em uma conta destinada somente para isso. No primeiro dia guarda R$ 1,00, depois, a cada dia, deve guardar o equivalente ao dia anterior acrescido de R$ 1,00. Assim sendo:

01) [Ii] Preencha a sequência de valores a serem poupados durante os dez primeiros dias.

1,00, 2,00, 3,00, _____, _____, _____, _____ , _____, _____, _____
1ºdia 2ºdia 3ºdia 4ºdia 5ºdia 6ºdia 7ºdia 8ºdia 9ºdia 10ºdia

02) [Ir] Qual o valor total poupado no final dos dez dias ______________________

03) [Ir] Observe a sequência abaixo considerando o mesmo comando inicial tendo como objetivo poupar duas semanas.



04) [Ir] O que você observou sobre as somas? _____________________________

05) [Ir] Quantas somas iguais podem ser feita? _____________________________

06) [Ir] Qual o valor que encontramos quando multiplicamos a resposta da questão 04 com a resposta da questão 05? _____________________________________

07) [Ir] Qual o valor total poupado em duas semanas? _______________________

08) [Ie] O que se observa entre os valores encontrados nas questões 06 e questão 07?

____

09) [Ie] Considerando o que você observou na questão 08. O que podemos concluir quando queremos saber o total poupado em duas semanas sem realizar a soma uma a uma até a última? ____

10) [Ie] Use esse procedimento que você descobriu para calcular a soma dos 100 primeiros números pares? ____

[If] Como a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos em uma Progressão Aritmética. Em uma Progressão Aritmética finita, a soma de todos é dada pela soma dos extremos *vezes* a metade do número de termos $\frac{n}{2}$, pois em cada soma estão envolvidos dois termos. Assim, seja PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ temos que $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$

Onde:

S_n = soma dos n termos;

a_1= primeiro termo;

a_n= enésimo termo;

n = número de termos.

11) [IAr] . Uma criança anêmica pesava 8,3 kg. Iniciou um tratamento médico que fez com que engordasse 150 g por semana durante 4 meses. Quanto pesava ao término da 15ª semana de tratamento?

12) [IAap] A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 185 e a soma dos 12 primeiros é 258, então, o 1º termo e a razão são respectivamente:

5. APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No contexto desta pesquisa, observou-se a partir do levantamento dos estudos bibliográfico e pesquisas de campo que há diversas maneiras e métodos de conduzir uma aula. Assim também, há diferentes caminhos que o professor pode lançar mão para trabalhar a autonomia e protagonismo dos alunos, como por exemplo, as atividades propostas e organizadas em uma Sequência Didática. Diante desse quadro, o propósito deste trabalho é estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de progressão aritmética.

A partir desse levantamento obtivemos dados que corroboraram com a elaboração, aplicação e validação da sequência didática e, para tanto, fez-se uso de gravação dos diálogos durante todo o processo da aplicação da sequência didática. Além disso, foi recolhido os registros escritos a partir da devolução das respostas das atividades propostas na sequência didática.

Como aportes teóricos que nortearam e possibilitaram o desenvolvimento da pesquisa, elege-se a Educação Matemática como campo de estudo que promove em níveis teóricos e experimentais a prática docente; A Teoria da Situação Didática como subsídio para o processo de ensino e aprendizagem; Sequência Didática na concepção de Zabala (1998) como proposta que considera a relação entre teoria e prática em sala de aula; as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017) como norteadora das atividades da pesquisa.

Para evidenciar a ocorrência de aprendizagem nos dados que serão coletados, será utilizado as contribuições de Goés (2000) com as noções de Análise Microgenética na investigação da construção do conhecimento a partir das interações verbais e, também, nas contribuições de Mortimer e Scott (2002) a respeito da Análise do Discurso.

5.1. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Nesta secção faremos algumas sugestões ao professor que irá abordar a sequência didática para o ensino das Progressões Aritméticas. Nesse sentindo, recomendamos que seja aplicado um teste de verificação de conhecimentos básicos necessários ao ensino e aprendizagem de PA que irão potencializar a adesão dos alunos, assim como, a participação dos mesmos durante o processo de aplicação da SD.

Desse modo, sugerimos que se faça um teste de conhecimentos básicos sobre conjuntos numéricos, séries numéricas e função afim apresentado no Apêndice C. Além disso, recomendamos a observância aos objetivos de cada atividade visto que, são balizadas nas UARCs e que estão em consonância estabelecida nos documentos oficiais. Por considerar o tempo para a devolução das atividades um ponto chave, cabe avaliar e considerar o ritmo de aprendizagem da turma. Nós sugerimos um tempo de aulas com 50 minutos para cada UARC deste trabalho.

Convém lembrar que após a aplicação do teste de verificação de conhecimentos básicos, o professor deve avaliar o resultado, se satisfatório para os conhecimentos básicos ao estudo de PA o professor pode aplicar a sequência didática, porém, se o resultado for insatisfatório nesse contexto, a sugestão é que o professor realize uma oficina considerando esses conhecimentos básicos necessários ao desenvolvimento da atividade da SD em Progressão Aritmética apresentado no Apêndice D.

Ademais, vale ressaltar que cada professor possui autonomia com relação a aplicação do teste de verificação de conhecimentos básicos, assim também para a realização da oficina de conhecimentos básicos conforme a sua necessidade e conveniência.

5.2. SOBRE APLICAÇÃO DO TESTE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Com o objetivo de extrair uma diagnose individual e geral da turma de 38 (trinta e oito) alunos a respeito dos conteúdos necessários para potencializar o processo de aprendizagem de PA., descrevemos os procedimentos, aplicação e resultados do Teste de Verificação dos Conhecimentos Básicos[34] encontrados no apêndice C.

[34] De modo geral o Teste de Verificação de Conteúdo dos Conhecimentos Básicos envolve conjuntos numéricos, sequência e função afim.

Antes de tudo, e por convicção, determinamos que o teste em questão não deveria ser uma surpresa para os alunos. Assim sendo, foi explicado para eles a finalidade, a relevância, o dia, a hora e a duração da aplicação do teste. Além do mais, por preocupação em diagnosticar os indícios individuais de cada aluno, eles foram informados que durante a aplicação do teste não poderiam socializar as suas respostas com os demais colegas da turma. É válido deixar registrado que o tempo de duração da aplicação do teste foi de duas aulas de 50 (cinquenta) minutos cada uma.

Ademais, sintetizamos no quadro abaixo os resultados obtidos desse processo de apuração de base cognitiva.

5.2.1. Resultado e síntese do teste de verificação dos conhecimentos básicos

Seguramente o resultado do teste de conhecimentos básicos aplicados aos alunos, possibilitou apurar os indícios das bases cognitivas dos alunos, assim também, nos proporciona pistas para elaborar a oficina de conhecimentos básicos condicionados a falta de êxito no teste. Assim sendo, destacamos uma síntese da abordagem dos conteúdos que espelha o resultado da cognição dos alunos.

Antes de tudo, vale ressaltar que o número de acertos nas questões de respostas múltiplas, e questões de cálculo, foram contabilizados como certas se todos os itens da questão foram respondidos corretamente. Desse modo, têm-se Síntese do resultado do teste de conhecimentos básicos no Quadro 7.

Quadro 7 - Síntese do resultado do teste de conhecimentos básicos.

QUESTÃO	Nº DE ACERTO	Nº DE ERRO	Nº EM BRANCO	ABORDAGEM DO CONTEÚDO	SÍNTESE DA ABORDAGEM
01	**3**	**35**	**-**	**Conjuntos Numéricos**: Em síntese, pede-se para colocar (V) para verdadeiro e (F) nas proposições dadas.	Percebe-se que um número significativo dos alunos não reconhece e não sabem relacionar o número ao seu conjunto de origem.
02	**12**	**26**	**-**	**Conjunto do Números Inteiros**: De maneira geral, pede-se para efetuar as operações de soma e subtração entre números inteiros.	Observa-se uma menor dificuldade em operar números com o mesmo sinal. Por outro lado, um número significativo de alunos demonstram dificuldade em operar números com sinais diferentes. É também recorrente erros em matemática por generalização de propriedades.
03	**14**	**24**	**-**	**Conjunto dos números reais**: em síntese é solicitado que se resolva as operações de soma entre números racionais.	Identifica-se basicamente as mesmas dificuldades encontradas em operar com números inteiros.
04	**38**	**-**	**-**	**Classificação da Sequência**: Em síntese, pede-se para analisar e classificar a sequência.	Percebe-se que os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade em identificar e classificar a sequência em crescente, decrescente e oscilante.
05	**18**	**14**	**6**	**Sequência**: Em resumo, pede-se para classificar as sequências conforme sua lei de formação ou recorrência.	Observa-se dificuldade dos alunos em identificar a lei de formação da sequência. Por outro lado, não apresentam dificuldade para identificar e classificar a sequência em finita ou infinita.
06	**6**	**18**	**14**	**Sequência**: Em síntese, é fornecido a lei de formação da sequência e pede-se para calcular o 5º termo.	Percebe-se que a dificuldade em interpretar o comando da questão, retirar os dados do problema, substituírem os dados na fórmula e na resolução.
07	**-**	**21**	**17**	**Expressão Algébrica**: Em síntese, é solicitado o perímetro do retângulo.	Observa-se que os alunos tem dificuldade em apresentar uma expressão algébrica a partir de um contexto.
08	**-**	**13**	**25**	**Expressão Algébrica**: Em suma, pede-se qual expressão algébrica e o valor numérico da expressão algébrica.	Percebe-se que os aluno possuem dificuldade de apresentar uma expressão algébrica. Por outro lado, possuem menos obstáculo em realizar o cálculo numérico.
09	**1**	**22**	**15**	**Função Afim**: em linhas gerais pede-se para calcular quantos litros em função do tempo t.	Percebe-se dificuldades em identificar a função, a variável e a resolução de f(t). Ademais, apresentam problemas com as operações matemática.
10	**-**	**21**	**17**	**Função Afim**: Em síntese, pede-se para determine qual a função e qual o valor do salário.	Percebe-se dificuldade dos alunos em interpretar o problema, identificar os dados do problema, apresentar e resolver a função f(x).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Diante disso, a porcentagem de acertos de 24,21%, enquanto o número de erros 51,05% e em branco 24,73%. Assim sendo, itens errados e em branco ficou em torno de 75,78%. Por essa razão, logo após os resultados do teste foi desenvolvida a Oficina de Conhecimentos Básicos para consolidar os conteúdos necessários ao desenvolvimento da PA.

Logo depois, foi utilizado o mesmo teste de verificação de conhecimentos básicos como um instrumento de aferição e de verificação de aprendizagem para o ensino de PA. Em vista disso, o percentual de acerto do teste de conhecimentos básicos sofreu um aumento 60,29%. Saindo do patamar de 24,21% para 84,5% de itens respondidos corretamente. Assim sendo, estabeleci seguir para a aplicação da sequência didática.

5.3. SOBRE A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta narrativa, apresentamos os sujeitos e lócus da pesquisa. Assim também, os procedimentos, as estratégias e os resultados alcançados da aplicação de cada uma das UARCs. Além do mais, a validação da sequência didática.

Assim sendo, os *episódios didáticos* ocorreram em uma turma de 38 estudantes do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Belém-PA. Além do mais, os estudantes apresentaram autorização de seus responsáveis para participar da pesquisa, (Apêndice D).

Como já foi dito anteriormente, desses 38 (trinta e oito) alunos quatro alunos apresentam déficit de aprendizagem, e um desses com deficiência múltipla. Além disso, um número significativo de alunos desta turma está em idade e série distorcida.

O lócus da pesquisa foi uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Média da Periferia de Belém. Que possui salas de aulas climatizadas, quadra poliesportiva para recreação, laboratório de informática, biblioteca e um índice de aprendizagem em matemática abaixo da expectativa.

Outro fator a ser considerando nesse contexto, que de modo geral auxiliou na formação dos grupos e no desempenho da aplicação da SD, é que além de ser o professor da turma, também sou o aplicador da SD. Assim, contei com a ajuda de pelo menos um aluno de cada grupo para a gravação dos áudios. Além do mais, contei com uma amiga e professora que colaborou para o registro fotográfico.

5.4. SOBRE A ANÁLISE DISCURSIVA EM SALA DE AULA

Nesta narrativa, apresentamos as transcrições de áudios relacionadas aos indícios de aprendizagem gerados durante os episódios didáticos.

Vale ressaltar que o procedimento de transcrição dos diálogos ocorreu diretamente a partir da escuta das gravações dos áudios. Logo depois de realizar as transcrições das interações orais entre aluno e aluno, aluno e professor, foram analisados alguns microeventos[35] que identificamos como indícios de aprendizagem sob os critérios da análise do discurso, os quais denominamos de segmentos.

Assim, para organizar e ao mesmo tempo auxiliar na compreensão dos diálogos e das intervenções orais apreendida nos segmentos transcritos, denominamos os grupos formados por alunos por meio de letras maiúsculas (A, B, C, D, ..., H). Assim também, nomeamos os alunos utilizando a letra do grupo do qual ele faz parte seguido do número 1 a 5, ou seja, (A1, B1, C1, ..., H1). O aplicador da SD foi identificado por P. Ademais, cada fala transcrita são denominadas de turno[36]. Assim sendo, os turnos são identificados por, (T1, T2, T3, ..., T731).

Nesse contexto, os agrupamentos das quatro classes podem ser combinados, onde há a combinação dos dois primeiros tipos de discurso com os outros dois.

Antes de tudo, é preciso dizer que não tivemos auxiliares durante a aplicação de nenhuma atividade proposta pela sequência didática. Por essa razão, o roteiro na maioria das vezes sofreu forte influencia do discurso interativo dialógico do professor aplicador para o coletivo em detrimento do discurso dialógico individualizado.

Desse modo, nesta narrativa, iremos dar início as análises das iterações que resultaram na construção de significados em sala de aula pelos alunos a partir das

---

[35] Góes (2000) refere-se à abordagem metodológica microgenética como "análise microgenética" e conceitua como: [...] uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos.

[36] Turno, se refere às vezes de fala de cada um dos interlocutores na interação, suas oportunidades de assumir o discurso e contribuir com a dinâmica conversacional.

interações verbais. Assim sendo, utilizaremos as concepções proposta por Mortimer e Scott (2002), que nos apresenta uma ferramenta analítica sociocultural.

Para essa estrutura de análise do discurso interativo dialógico, interativo de autoridade e não interativo de autoridade, construiremos segmentos de turnos para cada conjunto de intervenções proposta na atividade da sequência didática que estejam agrupadas com a mesma finalidade.

Além do mais, logo após a cada apresentação dos turnos, iremos tecer uma interpretação nossa sobre o episódio didático imbricado a AD. Vale ressaltar que essa dinâmica seguira para todas as apresentações da análise do discurso.

5.4.1. Resultados e Avaliação da Aplicação da UARC 01:

Nesta narrativa, iremos iniciar a analisar das interações presentes nos turnos da sequência didática 01, comportas por 07 (sete) intervenções as quais deram origem a 254 turnos. Guiada pelo objetivo principal de identificar regularidades, assim também, a lei de formação. Por fim expressá-las algebricamente. Assim temos:

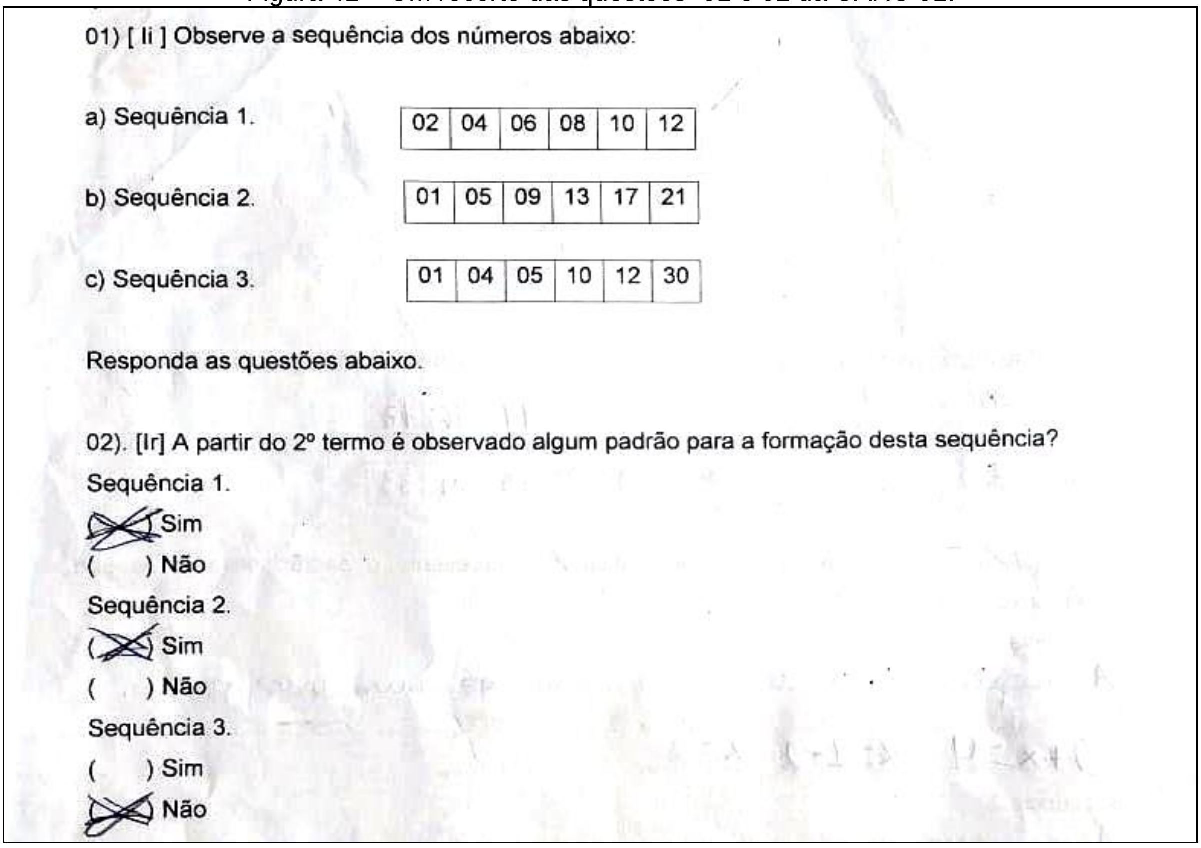
Intervenções 01 e 02

T009-C1: Professor, o padrão é o mesmo que repetição?
T010-C6: Padrão é repetição, não já te falei?
T013-P: O que vocês acham que eu estou querendo nessa questão?
T014-C6: Eu acho que não é repetição. Porque na primeira tem só números pares e na segunda só ímpar.
T015-B1: E na terceira tem par e ímpar né.
T017-B2: Eu já entendi essa!
T023-P: Então o que vocês observam, enxergam quando analisam o que está acontecendo entre os números de cada uma dessas sequências?
T025-F3: A primeira é feita de números pares! Né isso?
T026-P: É mais não é só isso “feita de números pares” que pode ser observado. Tem outra coisa que podemos observar. O que mais pode ser além de números pares?
T027-C1: Professor, eu já sei, a primeira cresce de dois em dois. Acertei?
T026-C4: Cadê mostra aí que eu ainda não entendi. A terceira nem sempre cresce o mesmo valor, que vê olha...
T028-C6: Ah é mesmo, mas a segunda cresce de quatro em quatro. Professor essa terceira está errada, né?
T029-P: O que está sendo perguntado para a primeira e segunda é o mesmo que está sendo perguntado para a terceira?
T038-H2: Essa terceira não tem uma ordem né professor?

Nestes turnos, percebemos nas interações aluno-aluno, aluno-professor que a análise do discurso com ênfase no perceptivo intuitivo de interação dialógica, traz à tona o funcionamento da linguagem que auxilia na construção de significados em sala de aula. Assim também revelam conhecimentos prévios necessários para a aquisição de novos conhecimentos.

Além do mais, percebemos emergir dessas interações a construção de diferentes padrões de interação. Vale destacar que no conjunto desses turnos identificamos indícios de aprendizagem quanto a regularidade de padrões. Para além dessa percepção, trazemos no conjunto de ilustração que corroboram com esses indícios de aprendizagem apresentado na ilustração abaixo.

Figura 41 – Um recorte das questões 01 e 02 da UARC 01.



01) [Ii] Observe a sequência dos números abaixo:

a) Sequência 1.

02	04	06	08	10	12

b) Sequência 2.

01	05	09	13	17	21

c) Sequência 3.

01	04	05	10	12	30

Responda as questões abaixo.

02). [Ir] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação desta sequência?

Sequência 1.

(X) Sim

( ) Não

Sequência 2.

(X) Sim

( ) Não

Sequência 3.

( ) Sim

(X) Não

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 41 acima, observamos que os alunos conseguiram identificar a existência de regularidade de padrão a partir do 2º termo quando sinalizam as sequências que apresentam um padrão de formação.

Intervenções 03 e 04

> **T042-B5**: Eu vou escrever que identifiquei que uma é feita por número par e a outra por número ímpar.
> **T043-B2**: Não é isso não. A primeira tu está sempre somando dois, que vê olha aí !
> **T044-B1**: Concordo!
> **T045-B3**: E a segunda a gente está somando quatro. Né?
> **T053-B1**: É isso aí mesmo, na primeira soma dois e a outra soma quatro agora a terceira eu ainda não descobri.
> **T055-E4**: Professor o que eu coloco na terceira? O nosso grupo observou a mesma coisa que o grupo B mas a gente não entendeu a terceira. Ela está errada?
> **T056-P**: O que vocês acham? O colega de vocês está dizendo que a terceira está errada. É isso que está sendo perguntado? Ele está certou ou errado?
> **T057-A2**: Eu acho que ele está certo professor!
> **T068-A4**: Eu coloquei que ela não tem padrão!
> **T073-A3**: O nosso grupo colocou que as duas tem padrão de somar um valor e a terceira não.
> **T074-B5**: Ah entendi, agora deu para entender.
> **T089-F2**: Professor essa quarta eu não entendi! Como faz essa professor?
> **T090-P4**: Quem pode me ajudar a responder para o colega como fazer essa quarta? O grupo G não tem nenhuma dúvida?
> **T092-G2**: Professor eu já fiz a quarta mas não sei se está certa!
> **T093-P**: Então socialize o que vocês fizeram? Quem fez essa do teu grupo?
> **T094-G1**: Nós fizemos professor, a gente acha que na primeira é dois e na segunda é quatro.
> **T098-P**: Como foi que chegaram nesse resultado de dois e quatro?
> **T103-G2**: A gente pegou na primeira e quatro menos dois e o resultado dá dois. Na segunda a gente pegou um menos o cinco e deu quatro. Está errado professor?
> **T104-P**: Fazer o que você fez, vai dar certo se pegar qualquer número da primeira?
> **T111-G5**: Vai dar professor eu já fiz.
> **T112-A4**: Como foi que você? Ensina aí para a agente!

Nestes turnos, notamos mediante a prática a importância do papel do professor aplicador. Assim sendo, percebemos que o grupo G e outros alunos pouco se envolviam no processo. Nesse ponto, as intenções do professor auxiliam as interações dialógicas com ênfase no perceptivo intuitivo desses alunos.

Por outro lado, engajando os alunos na estória científica, explorando a visão empírica intuitiva desses, bem como, guiando esse aluno na expansão do uso das ideias científicas. Merece destaque que nesse conjunto de turnos identificamos indícios de aprendizagem quanto à legitimação da regularidade de padrões pelos alunos presentes nos turnos **T043**; **T053**; **T073** e **T103.**

Para além dessa observação, trazemos nas ilustrações abaixo a expressão do entendimento a respeito de regularidade de padrões manifestada pelo aluno e materializada pela captura nas ilustrações abaixo.

Figura 42 – Um recorte da questão 03 da UARC 01

03). [Ir] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

Sequência 1.

A sequência 1 São apenas números pares. Aumentan-do de 2 em 2.

Sequência 2.

A sequência 2, aumenta de 4 em 4. Todos os números São impares.

Sequência 3.

A sequência 3, não têm padrão de número. São to-dos aleatorios.

Fonte: Protocolo de Pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 42 acima, observamos que os alunos conseguiram fazer uso dos seus conhecimentos básicos para, reconhecer, ler e, interpretar a linguagem matemática. Assim também, conseguem expressar por meio da escrita o seu entendimento sobre regularidade de padrão.

Figura 43 – Um recorte da questão 04 da UARC 01.

04). [Ir] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

Sequência 1.

(   ) Sim

(X) Não

Sequência 2.

(   ) Sim

(X) Não

Sequência 3.

(X) Sim

(   ) Não

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 43 acima, observamos que os alunos conseguiram identificar que entre dois números consecutivos em uma sequência numérica regular produzem uma diferença constante. Essa observação decorre do fato dos alunos sinalizam, por meio de um X, quais as sequências que produz uma diferença constante entre dois elementos consecutivos.

Intervenções de 05 a 07

> **T119-F5**: Essa é fácil professor, nosso grupo já fez.
> **T120-P**: Sério? Todos já fizeram essa? E como chegaram ao próximo número?
> **T123-F1**: Professor a gente percebeu que uma está crescendo de dois em dois e a outra de quatro em quatro.
> **T125-P**: Ok então. Mais quem me garante que está sempre crescendo de dois em dois ou de quatro em quatro?
> **T126-C1**: É só ver que do primeiro para frente está crescendo. Né?
> **T127-C3**: Explica aí que eu não entendi.
> **T128-P**: Alguém saberia me dizer o que me garante que o valor que você está respondendo está correto e não está errado?
> **T129-C4**: Sim, toda vez que pegar um número e diminuir do outro vai dar o mesmo valor!
> **T130-P**: Hummm... é isso pessoal?
> **T132-H4**: É professor que vê pega o número da frente e diminui.
> **T135-P**: Tá bem ... todos já fizeram até aqui ou tem algum grupo atrasado? Vamos lá ... quem já respondeu essa 06?
> **T142-B2**: Eu já tentei mais não consegui. Está difícil essa!
> **T143-P**: Quem já entendeu essa? Quem já tem uma ideia de como fazer essa?
> **T146-F4**: O senhor quer uma fórmula?
> **T147-F1**: Ele quer como eu posso achar o próximo número não é fórmula.
> **T148-F2**: Ele quer a fórmula nessa questão 06.
> **T150-F5**: Eu acho que ele está querendo saber como eu acho o próximo número. É isso professor?
> **T151-P**: Quem já fez essa questão 06? Como faço para achar qualquer número nessa primeira sequência da questão 06?
> **T153-G2**: Na primeira sequência, vai somar dois com o primeiro número e vai achar o próximo número. É isso?
> **T154-P**: O que vocês acham? Ele está certo? Por exemplo, quero achar o trigésimo número (termo) e conheço somente o primeiro e o segundo número? Como faço para achar o trigésimo número (termo) sem ter que ir somando de dois em dois até encontrar o valor?
> **T163-A5**: Ah... eu pesei assim, o primeiro número eu já tenho o outro pode ser x?
> **T179-A2**: Eu acho que já sei. O X é multiplicado por 2....
> **T180-A1**: Chama o professor aqui!
> **T185-P**: Vamos lá. Se eu tenho o primeiro número e eu somar com X, eu vou encontrar o segundo número certo? O X vale 2 certo? Mas quando eu for achar o terceiro número, e tenho somente o primeiro número e o X o que tenho que fazer para continuar com esse mesmo crescimento?
> **T197-B4**: Ah... entendi, vai multiplicar o X por 2 né? É isso professor?
> **T198-P**: E como ficaria na segunda da questão 06?
> **T199-B1**: Vai multiplicar por 4! É isso?
> **T203-H4**: Essa 07 é fácil! Deixa eu ver como vocês fizeram a 06.
> **T204-B1**: Deixa eu ver como vocês fizeram 07.

Nestes turnos, reparamos a importância do discurso realizado em sala de aula para auxiliar os alunos na construção do campo das ideias, das concepções e da compreensão de conteúdos matemáticos. Além disso, a importância de se ter um roteiro bem definido para guiar as interações que resultem na construção de significados para o aluno do objeto matemático em sala de aula.

Desse modo, a aula foi conduzida eminentemente pela proposição de perguntas e respostas pelo professor aplicador da sequência didática. Por consequência, desencadeamos uma interatividade dialógica, um discurso reflexivo com ênfase no empírico, no perceptivo, no intuitivo. Por fim, com ênfase no teórico quando estabelecemos a visão científica por meio da formalização.

Destacamos nesse conjunto de turno que encontramos indícios de aprendizagem para a sequência numérica regular a partir da sua lei de formação presentes nos turnos **T126**; **T129**; **T153**; **T163**; **T179** e **T199.** Para além dessa observância, apresentamos nas ilustrações abaixo a materialização da manifestação da linguagem matemática desses alunos capturada nas ilustrações abaixo.

Figura 44 – Um recorte da questão 05 da UARC 01.

05). [Ir] Baseado nas suas observações, quais os próximos números nas sequências?

a) Sequência 1.	02	04	06	08	10	12	14	16	18
b) Sequência 2.	01	05	09	13	17	21	25	29	33

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 44 acima, observamos que os alunos conseguem ler, interpretar e expressar a regularidade de padrão. Essa observação decorre do fato dos alunos apresentarem, na ilustração acima, os próximos três números consecutivos que formam a sequência numérica regular.

Figura 45 – Um recorte da questão 06 da UARC 01.

06). [Ir] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na sua observação do item

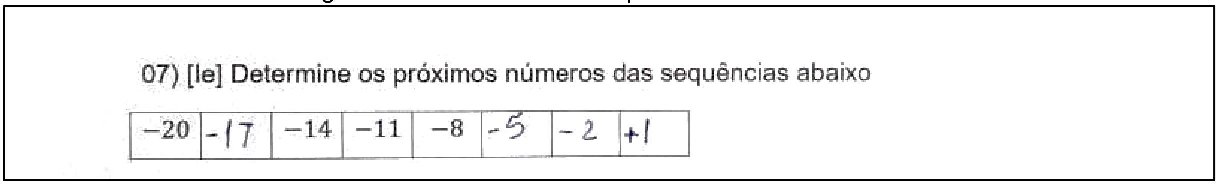
Sequência 1. $2 + 2x$

Sequência 2. $1 + 4x$

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 45 acima, observamos que os alunos conseguem reconhecer, ler, interpretar e representar em linguagem numérica em linguagem algébrica e formular uma lei de formação da sequência numérica regular. Essa observação decorre do fato dos alunos apresentarem, na ilustração acima, as expressões $2 + 2x$ e $1 + 4x$ como lei de formação das sequências 1 e 2.

Figura 46 – Um recorte da questão 07 da UARC 01.



07) [le] Determine os próximos números das sequências abaixo

-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	+1

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 46 acima, observamos que o aluno consegue reconhecer, ler, interpretar uma sequência numérica. Está observação decorre do fato dos alunos completarem o número que falta na sequência a partir de dois ou mais números consecutivos dados. Nesse caso específico, os números: $-17;\ -5;\ -2\ e + 1$.

Assim sendo, concluímos mediante análise dos resultados obtidos nos segmentos de turnos, corroborada pelo conjunto de ilustrações acima, que os alunos apresentaram indícios de aprendizagem durante todo o processo de aplicação da UARC 01. Para além dessas evidências, nós identificamos que os alunos alcançaram o objetivo principal da proposta da atividade, de identificar regularidades de padrões, sua lei de formação e expressá-las algebricamente, o que reforça os traços de aprendizagem observados durante todo o percurso.

5.4.2. Resultados e Avaliação da Aplicação da UARC 02:

Nesta narrativa, iremos analisar as interações presentes nos turnos da sequência didática 02, comportas por 17 (dezessete) intervenções as quais deram origem a 167 turnos. Guiada pelo objetivo principal de definir a razão de uma PA. Assim também, classificar a PA quanto a razão. Além disso, classificar a PA quanto ao número de termos, desse modo, se finita ou infinita. Assim temos:

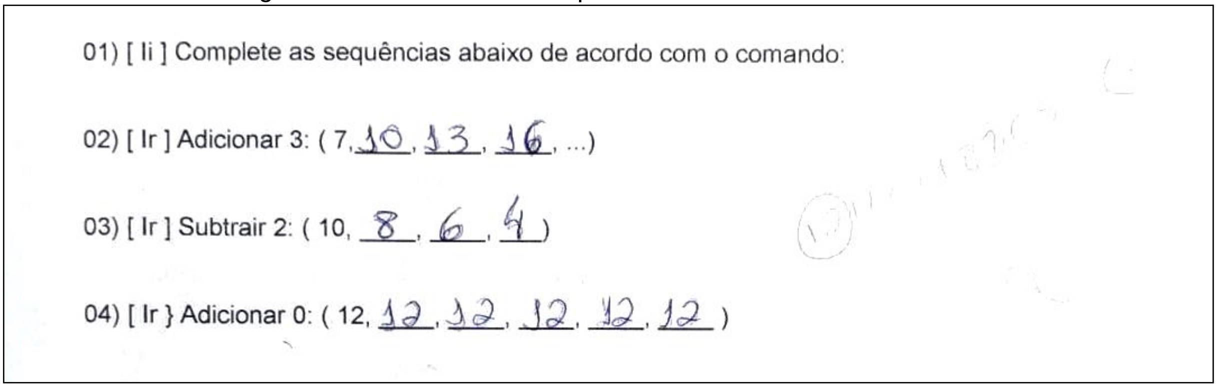
Intervenções de 01 a 04

T015-C4: Estou com dúvida nessa 04.
T016-C1: Sério? É só somar 0 a 12, entendeu?
T017-C2: 0 mais 12 dá 12 né?.
T019-G1: O que vocês colocaram na 04?
T020-C1: Soma 0 a 12 só isso. Entendeu?
T021-C3: As duas primeiras são crescentes e a outra não altera o valor
T022-G1: Beleza entendi sim!
T025-P: nas questões de 01 a 04 tem alguém que está com alguma dúvida?
T029-C4: Não professor!

Nestes turnos, compreendemos que a qualidade do discurso interativo dialetológico em sala de aula em torno do objeto matemático, sofre uma influência direta quando o tempo despendido para a comunicação não é insuficiente. Assim também, a qualidade do discurso dialetológico de interatividade em sala de aula de matemática é comprometida/empobrecida mediante a uma proposta pouco desafiadora para os alunos.

Além do mais, destacamos nesses turnos os indícios de aprendizagem quando os alunos conseguiram completar a sequência de números proposto na atividade que tem por objetivo definir a razão da PA presentes nos turnos **T016**; **T017**; **T020** e **T021**. Para além dessa observação, trazemos nas ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios percebidos no conjunto de turnos.

Figura 47 – Um recorte das questões de 01 a 04 da UARC 02.


01) [Ii] Complete as sequências abaixo de acordo com o comando:

02) [Ir] Adicionar 3: (7, 10, 13, 16, ...)

03) [Ir] Subtrair 2: (10, 8, 6, 4)

04) [Ir } Adicionar 0: (12, 12, 12, 12, 12, 12)

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 47 acima, observamos que os alunos conseguem reconhecer, ler, interpretar elementos em uma sequência. Essa observação decorre do fato dos alunos apresentarem uma sequência numérica regular a partir da adição dos números 3, 2 e 0.

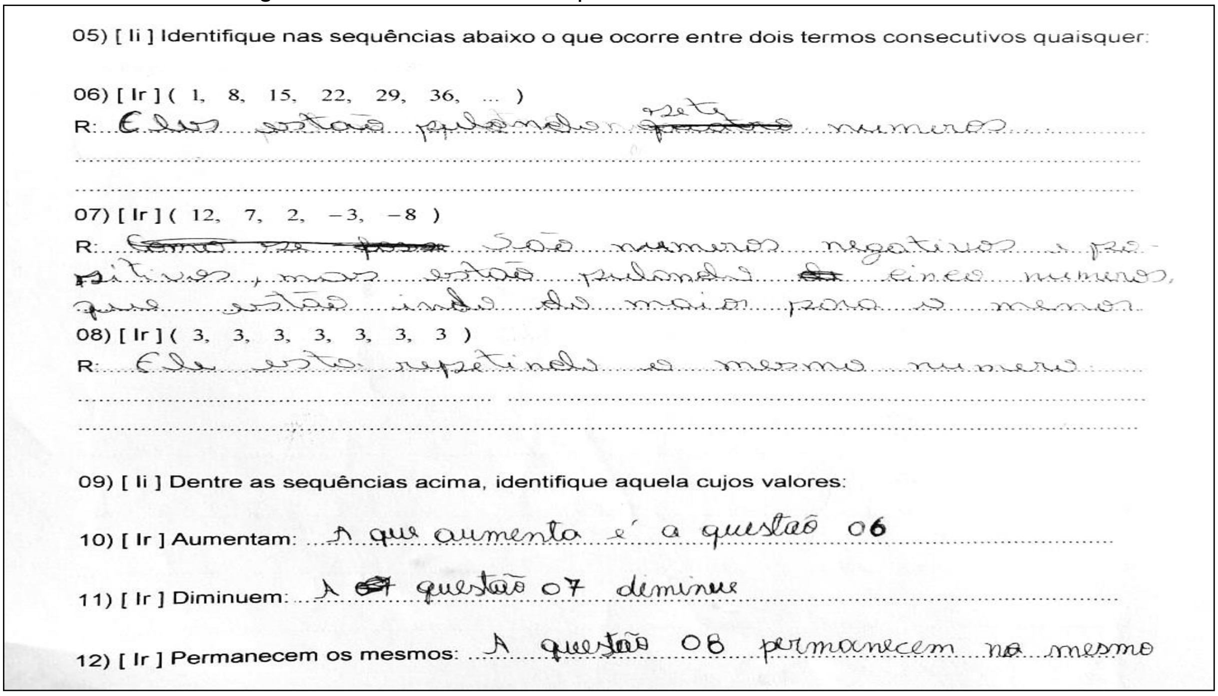
Intervenções de 05 a 12

T032-E4: O que é consecutivo?
T033-E1: Consecutivo eu acho que é próximo!
T034-E3: O que é que tu colocou na 06?
T036-E6: Olha eu não sei o que é consecutivo mas eu acho que é assim.
T037-E5: Pera aí como foi que tu chegou no 7?
T038-E6: Diminui 8 desse 1.
T039-E1: Beleza, eu já entendi, mas e essa 08?
T040-E4: Mano essa vai dar 0
T041-E1: A questão 06 está crescendo e a questão 07 está diminuindo.
T049-P: Alguma dúvida?
T051-H4: Nos estamos com uma dúvida. O que é consecutivo?
T052-P: Alguém sabe me dizer o que é consecutivo?
T054-B1: É o da frente professor!
T056-B3: Tem uma que permanece o mesmo número!

Nestes turnos percebemos emergir mediante os argumentos dos alunos durante as interações a mobilização de conceitos, definições e propriedades com ênfase no perceptivo intuitivo para a construção de significados. Outro fator observado, são os conhecimentos básicos presentes em todas as interações e situações de aprendizagem na sala de aula. De modo geral, percebemos que esses conhecimentos influenciam as suas observações, as inferências durante todo o processo de construção de significados.

Além do mais, destacamos os indícios de aprendizagem no conjunto desses turnos quando os alunos identificaram as sequências numéricas como crescente, decrescente e constantes presentes nos turnos **T038**; **T040**; **T041** e **T056.** Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 48 – Um recorte das questões de 05 a 12 da UARC 02.



Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 48 acima, observamos que os alunos conseguem reconhecer, ler, interpretar, relacionar e nomear grandezas. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido: elas estão pulando sete; são números positivo e negativos, estão pulando cinco, estão indo do maior para o menor; aumenta; diminui e permanece a mesma.

Intervenções de 13 a 17

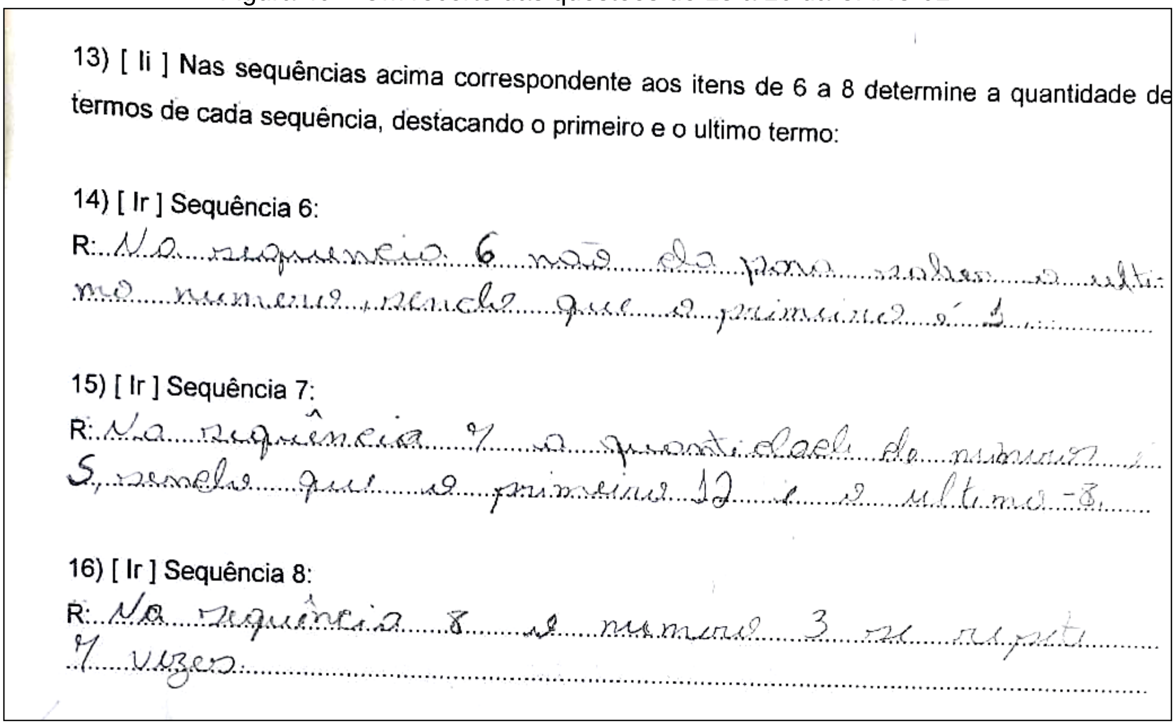
T067-A4: O que é quantidade de termo?
T068-A2: Quantidade de termo também tenho dúvida. Será que é números?
T069-A6: Eu acho que ele quer saber quantos número tem né. Porque ele pede quem é o primeiro termo e o último termo. Será que é isso?
T072-A5: Cara vamos perguntar para ele!
T073-P: Quem sabe me dizer o que é termo na questão 10?
T081-H1: Eu acho que é número professor!
T082-P: Se você acha que é número. Isso vai ajudar a responder toda a questão 10?
T083-H1: Eu acho que vai professor!
T097-H4: O que é razão professor?
T098-P: Alguém sabe me dizer o que é razão nessa questão 14?
T100-H5: É o mesmo número professor!
T101-P: Por que razão seria o mesmo número?
T102-H5: Porque na letra **a** tem 5 se repetindo!
T103-P: Mas se razão for o mesmo número como fica a o item **b** e **c** dessa questão 14?
T114-A2: Professor vem cá por favor!
T115-P:Diga!
T116-A2: A razão é o número que a gente soma?

> **T101-P**: Isso ajuda a responder todos os itens da questão 14?
> **T102-A2**: eu acho que ajuda a responder as letras **b** e **c** mas estou com dúvida na resposta da letra **a**.
> **T124-A5**: Razão tem que ser o mesmo número tipo se você pegar o da frente e menos o de tras for sempre igual.

Para fins de estabelecer uma comunicação interativa dialógica dentro do roteiro do professor, imprimimos uma abordagem comunicativa nestes turnos que buscou trabalhar as intenções de ensino por meio de diferentes intervenções. Desse modo, colhemos como resultado, diferentes padrões de interações apresentados nos discursos.

Além do mais, destacamos no conjunto desses turnos indícios de aprendizagem quando os alunos identificaram o primeiro e o ultimo termo, a quantidade de termos e a razão das sequências numéricas presentes nos turnos **T069**; **T102** e **T124**. Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 49 – Um recorte das questões de 13 a 16 da UARC 02.


13) [Ii] Nas sequências acima correspondente aos itens de 6 a 8 determine a quantidade de termos de cada sequência, destacando o primeiro e o ultimo termo:

14) [Ir] Sequência 6:
R: Na sequencia 6 não da para saber o ultimo numero sendo que o primeiro é 1

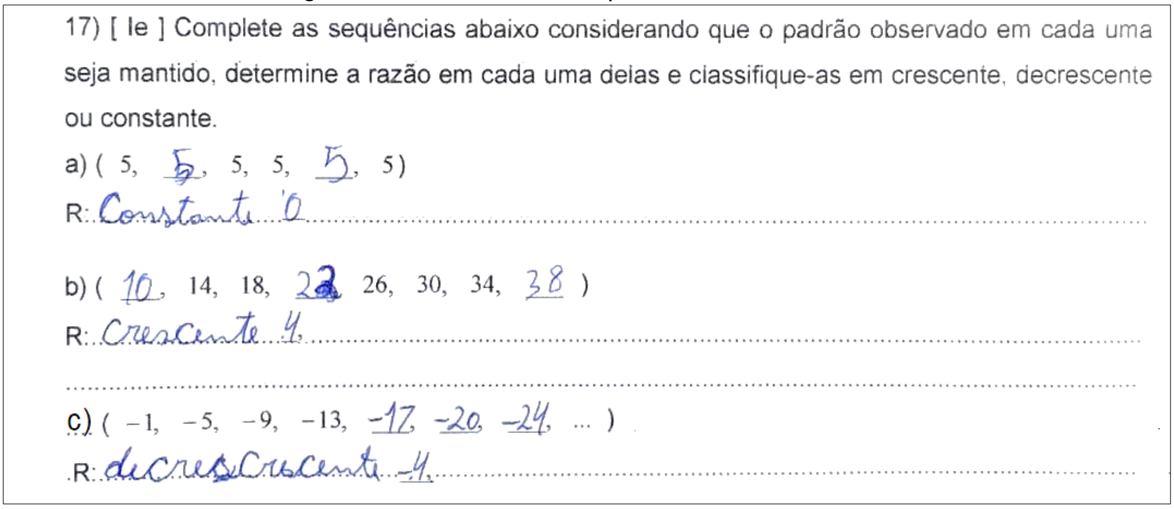
15) [Ir] Sequência 7:
R: Na sequência 7 a quantidade de numero é 5, sendo que o primeiro 12 e o ultimo -8.

16) [Ir] Sequência 8:
R: Na sequência 8 o numero 3 se repete 7 vezes

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 49 acima, observamos que os alunos conseguem identificar a quantidade de número de termos, se finita ou infinita, o primeiro e o último termo. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido: Na sequência 6, não da para saber o último termo e o primeiro termos é um; Na sequência 7, a quantidade de número de termo é cinco, o primeiro termo é doze e o último temo é menos oito; Na sequência 8, o número é três que se repete sete vezes.

Figura 50 – Um recorte da questão 17 da UARC 02.


17) [le] Complete as sequências abaixo considerando que o padrão observado em cada uma seja mantido, determine a razão em cada uma delas e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (5, 5, 5, 5, 5, 5)
R: Constante 0

b) (10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38)
R: Crescente 4

c) (−1, −5, −9, −13, −17, −20, −24, ...)
R: decrescCrescente −4

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 50 acima, observamos que os alunos conseguem identificar quando a sequência é constante, crescente e decrescente e a razão da sequência numérica.

Assim sendo, concluímos mediante análise dos resultados obtidos nos segmentos de turnos, corroborada pelo conjunto de ilustrações acima, que os alunos apresentaram indícios de aprendizagem durante todo o processo de aplicação da UARC 02. Para além dessas evidências, nós identificamos que os alunos alcançaram o objetivo principal da proposta da atividade, de definir a razão de uma P.A, classificá-la quanto a razão, neste caso, se constante, crescente e ou decrescente. Assim também, classificá-la quanto ao número de termos, em finita ou infinita, o que reforça os traços de aprendizagem observados durante todo o percurso.

5.4.3. Resultados e Avaliação da Aplicação da UARC 03:

Nesta narrativa, iremos analisar as interações presentes nos turnos da sequência didática 03, comportas por 7 (sete) intervenções as quais deram origem a

314 turnos. Guiada pelo objetivo principal de identificar o termo geral da PA. Assim temos:

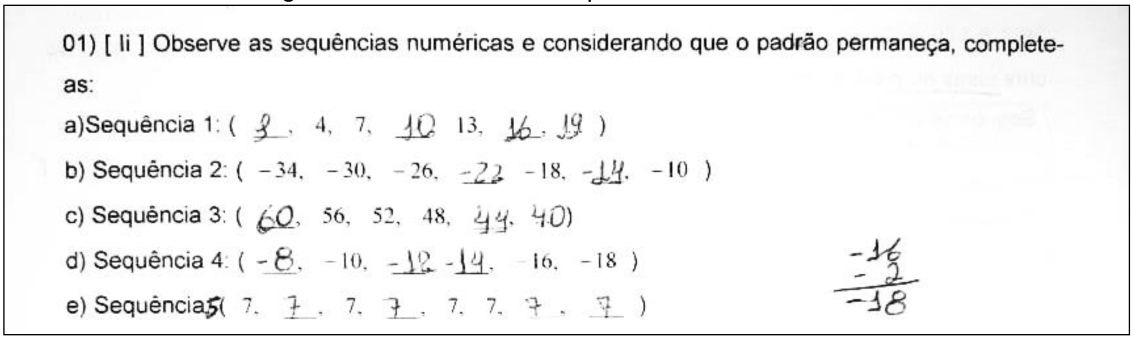
Intervenções 01 a 04

> **T003-F4**: Como foi que você achou a resposta dessa letra **b**?
> **T005-F2**: Essa letra **c** está diminuindo né?
> **T012-F5**: Quem já fez a letra **e**? quanto deu a razão dessa?
> **T021-H5**: Deixa eu ver como tu fez essa?
> **T035-B1**: O professor falou o que era termo?
> **T037-B6**: Essa questão 02 tem que ver a questão 01 para dá a resposta?
> **T040-B1**: Pera aí que eu vou confirmar a resposta dessa.
> **T042-B2**: Essa aí vai dar -4 né. Que vê... faz aí!
> **T043-B4**: Essa eu peguei o sete e subtrai de 4.
> **T054-H4**: Eu não entendi essa questão 03 professor!
> **T056-P**: Você não entendeu o comando? Alguém sabe me dizer o que é para fazer na questão 03?
> **T0069-H5**: É preencher a tabela com a soma da razão!
> **T070-P**: É quase isso. Pensa bem... vocês devem expressar o segundo termo como a soma de que com a razão?
> **T078-P**: Então, se vocês está me dizendo que o segundo termo é igual o primeiro termo mais a razão. O terceiro termo será a soma de quem?
> **T085-H5**: humm.. já entendi, já entendi.
> **T087-H3**: Como vai ser a resposta dessa?
> **T089-H5**: que vê soma aí o segundo termo e a razão vê se bate.
> **T092-P**: Olha o tempo... quem está na questão 02? quem ainda não fez essa questão 02?
> **T134-E4**: Essa questão 04 eu ainda não entendi professor!
> **T135-P**: Quem já entendeu essa questão 04?
> **T146-E1**: Eu acho que temos que escrever a nossa conclusão. Tipo, como a gente achou o número. É isso?
> **T159-E4**: Por exemplo, eu achei o termo quatro somando a razão e o termo três. Certo?
> **T168-F1**: Explica como vocês fizeram essa questão 04.
> **T174-F3**: A razão dessa vai dar menos quatro.
> **T202**-F2: É o primeiro termo mais a razão né? Tipo sessenta mais menos quatro.

A abordagem comunicativa desses turnos deixa em evidência que há pluralidade de formas de interação entre professor-aluno e aluno-aluno, não ficando limitado em apenas um determinado discurso ou outro.

Além do mais, destacamos os indícios de aprendizagem no conjunto desses turnos quando os alunos conseguem reconhecer, ler e completar uma sequência numérica a partir de dois números consecutivos quaisquer presentes nos turnos **T042**; **T043**; **T159**; **T174**; **T202** e **T089**. Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 51 – Um recorte da questão 01 da UARC 03.


01) [Ii] Observe as sequências numéricas e considerando que o padrão permaneça, complete-as:

a)Sequência 1: (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19)

b) Sequência 2: (−34, −30, −26, −22, −18, −14, −10)

c) Sequência 3: (60, 56, 52, 48, 44, 40)

d) Sequência 4: (−8, −10, −12, −14, −16, −18)

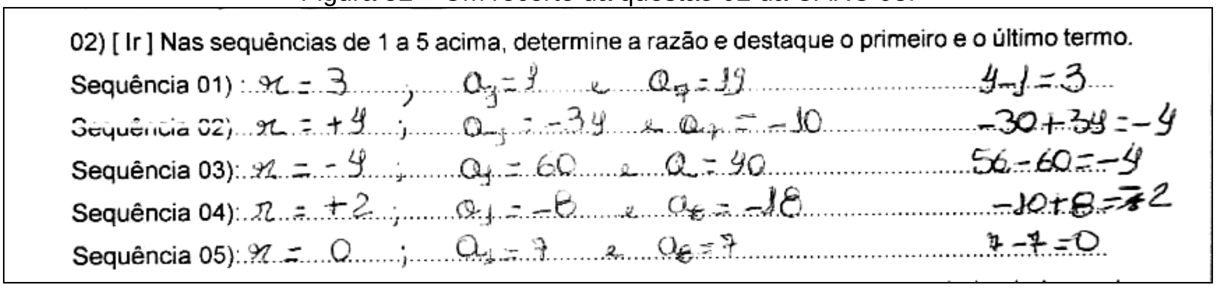
e) Sequência 5(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)

-16
-2
-18

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 51 acima, observamos que os alunos conseguem construir uma sequência numérica regular a partir de dois números consecutivos quaisquer. Essa observação decorre do fato dos alunos terem completado as sequências numéricas com os números: 1; 10;16 e 19 na sequência 1. Como os números: -22 e -14, na sequência 2. Com os números: 60, 44 e 40 na sequência 3. Com os números: $-8;\ -12\ e - 14$. Com o número 7 na sequência 5.

Figura 52 – Um recorte da questão 02 da UARC 03.


02) [Ir] Nas sequências de 1 a 5 acima, determine a razão e destaque o primeiro e o último termo.

Sequência 01): $r = 3$; $a_1 = 1$ e $a_7 = 19$ ... $4-1=3$

Sequência 02): $r = +4$; $a_1 = -34$ e $a_7 = -10$ ... $-30+34 = -4$

Sequência 03): $r = -4$; $a_1 = 60$ e $a = 40$ ... $56-60=-4$

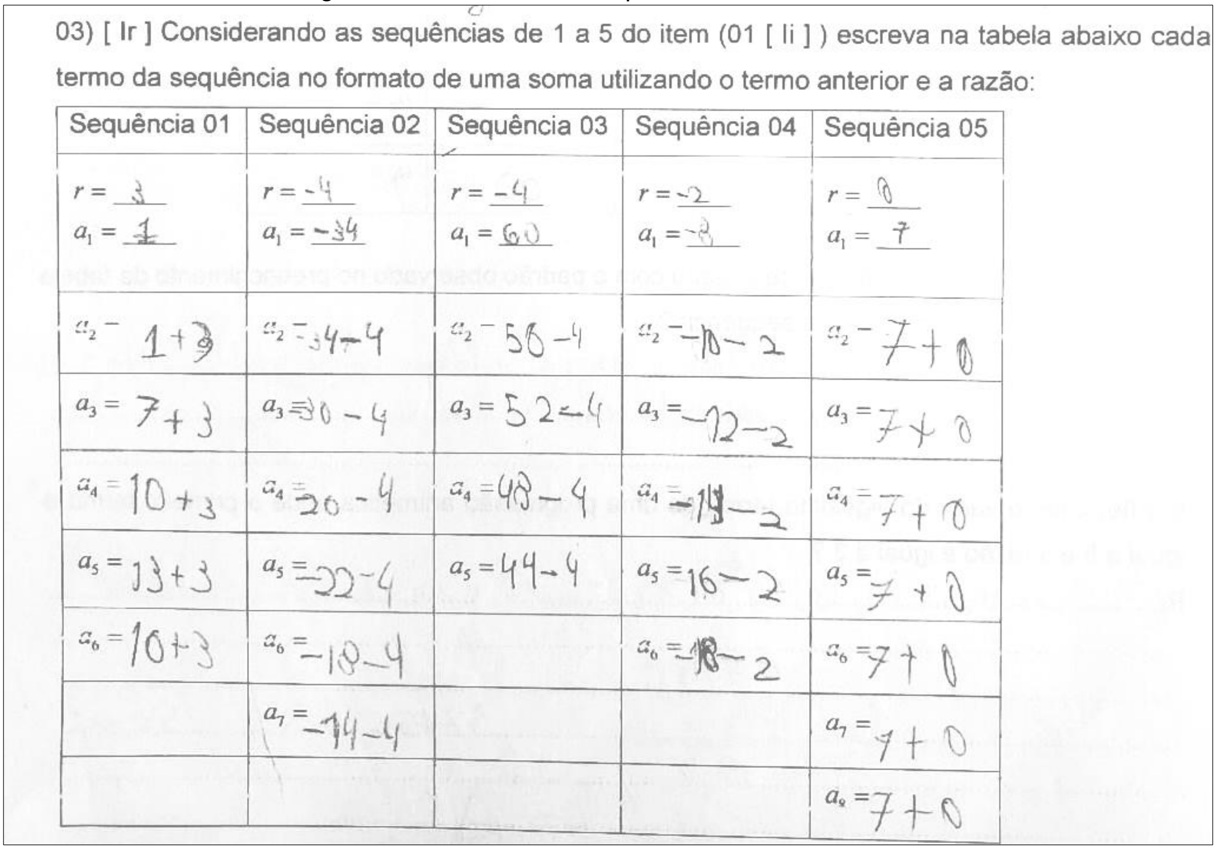
Sequência 04): $r = +2$; $a_1 = -8$ e $a_6 = -18$ ... $-10+8=\cancel{7}2$

Sequência 05): $r = 0$; $a_1 = 7$ e $a_8 = 7$ ... $7-7=0$

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 52 acima, observamos que os alunos conseguem identificar os elementos de uma PA, calcular a razão e identificar o primeiro e o último termo da PA. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido que: Na sequência 1 a razão é igual a três, o primeiro termo é 1 e o sétimo termo, último termo é 19. Na sequência 2 a razão é mais quatro, o primeiro termo é menos trinta e quatro e o sétimo termo é menos dez. Na sequência 3 a razão é menos quatro, o primeiro termo é sessenta e o último termo é quarenta. Na sequência 4 a razão é igual a mais dois, o primeiro termo é mesmo oito, o sexto termo é menos dezoito. Na sequência 5 a razão é igual a zero, o primeiro termo é sete e o oitavo termo é 7.

Figura 53 – Um recorte da questão 03 da UARC 03.



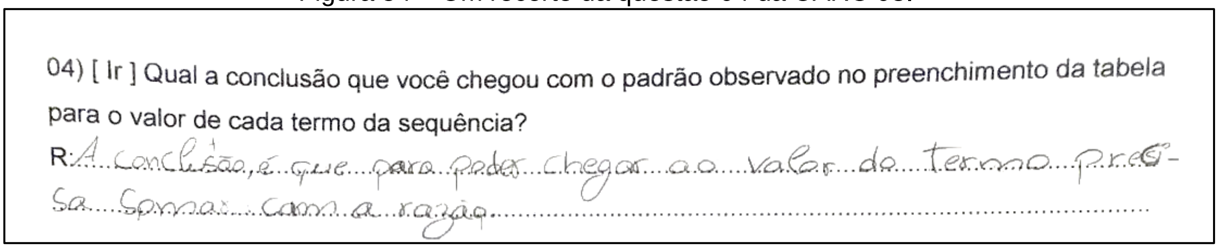
03) [Ir] Considerando as sequências de 1 a 5 do item (01 [li]) escreva na tabela abaixo cada termo da sequência no formato de uma soma utilizando o termo anterior e a razão:

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
$r = 3$ $a_1 = 1$	$r = -4$ $a_1 = -34$	$r = -4$ $a_1 = 60$	$r = -2$ $a_1 = -8$	$r = 0$ $a_1 = 7$
$a_2 = 1+3$	$a_2 = -34-4$	$a_2 = 56-4$	$a_2 = -10-2$	$a_2 = 7+0$
$a_3 = 7+3$	$a_3 = -30-4$	$a_3 = 52-4$	$a_3 = -12-2$	$a_3 = 7+0$
$a_4 = 10+3$	$a_4 = 20-4$	$a_4 = 48-4$	$a_4 = -14-2$	$a_4 = 7+0$
$a_5 = 13+3$	$a_5 = -22-4$	$a_5 = 44-4$	$a_5 = 16-2$	$a_5 = 7+0$
$a_6 = 16+3$	$a_6 = -18-4$		$a_6 = -18-2$	$a_6 = 7+0$
	$a_7 = -14-4$			$a_7 = 7+0$
				$a_8 = 7+0$

Fonte: Protocolo de pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 53 acima, observamos que os alunos conseguem escrever cada termo da PA na forma de uma soma dos termos anterior mais a razão. Essa observação decorre do fato dos alunos terem preenchido a tabela com os valores da soma do termo anterior mais a razão em cada uma das sequências.

Figura 54 – Um recorte da questão 04 da UARC 03.



04) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o valor de cada termo da sequência?

R: A conclusão, é que para poder chegar ao valor do termo preci-sa somar com a razão.

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 54 acima, observamos que os alunos conseguem identificar que para encontrar qualquer termo de uma PA, deve-se somar a esse termo a razão. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido que para poder chegar ao valor do termo precisa somar com a razão.

Intervenções 05 a 07

> **T202-C4**: Achar o segundo temo é fácil.
> **T203-P**: E o terceiro como eu posso achar usando somente o primeiro termo e a razão?
> **T212-C6**: Ele não quer assim. Assim era a outra tabela.
> **T213-P**: Quem já fez essa questão 0¨5?
> **T235-D1**: Eu fiz assim, peguei o primeiro termo e somei a razão duas vezes.
> **T237-D2**: Tu já mostrou para o professor?
> **T239-D1**: Professor eu acho que pode achar somando o primeiro termo e aqui vou somar a razão duas vezes.
> **T242-P**: Mais quando você for achar o quarto termo como você vai fazer? E quando for achar o sexto, sétimo e oitavo termo? ...você acha que essa estrutura é pratica para achar qualquer termos?
> **T246-D1**: humm... então eu posso multiplicar a razão é isso?
> **T247-P**: Não sei testa aí e vê se fica prático para calcular qualquer termo.
> **T252-C1**: Como foi que vocês fizeram essa 06?
> **T268-G2**: A questão 06 é para escrever como acha um termo.
> **T273-G4**: Eu respondi assim, pego o primeiro e somo com a razão multiplicada.
> **T292-G2**: Essa questão 07 eu somei o cinco com a razão e multipliquei por seis.
> **T296-G3**: Me explica aí essa.
> **T316-G5**: o quinto termo então é o primeiro temo mais quatro vezes a razão.

Notamos no decorrer das transcrições desses turnos a construção de um discurso interativo dialógico no sentindo da negociação e compartilhamento das ideias e dos significados. Percebemos que as perguntas feitas pelo professor nesse turno funcionam como um instrumento para ajudar a destravar as concepções dos alunos. Promovendo desse modo, a interação das múltiplas vozes que constituem e atravessam os turnos.

Além disso, observamos no conjunto de turnos indícios de aprendizagem quando os alunos conseguiram reconhecer, ler e expressar que um termo pode ser interpretado como a soma do primeiro termo com o produto da razão por um número natural maior ou igual a um, presentes nos turnos **T235**; **T239**; **T246**; **T273**; **T292** e **T316**. Para além dessa observação, trazemos nas ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 55 – Um recorte da questão 05 da UARC 03.

05) [Ir] Considerando as sequência de 1 a 5 escreva cada termo da sequência no formato de uma soma de produto utilizando somente o primeiro termo e a razão.

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
r = 3 a_1 = 1	r = 4 a_1 = -34	r = -4 a_1 = 60	r = -2 a_1 = -8	r = 0 a_1 = 7
a_2 = 1 + 1.r	a_2 = -34 + 1r	a_2 = 60 + 1r	a_2 = -8 + 1r	a_2 = 7 + 1r
a_3 = 1 + 2r	a_3 = -34 + 2r	a_3 = 60 + 2r	a_3 = -8 + 2r	a_3 = 7 + 2r
a_4 = 1 + 3r	a_4 = -34 + 3r	a_4 = 60 + 3r	a_4 = -8 + 3r	a_4 = 7 + 3r
a_5 = 1 + 4r	a_5 = -34 + 4r	a_5 = 60 + 4r	a_5 = -8 + 4r	a_5 = 7 + 4r
a_6 = 1 + 5r	a_6 = -34 + 5r		a_6 = -8 + 5r	a_6 = 7 + 5
	a_7 = -34 + 6r			a_7 = 7 + 6r
				a_8 = 7 + 7r

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 55 acima, observamos que os alunos conseguem identificar que cada termo da sequência pode ser escrito como a soma de um produto utilizando somente o primeiro termo e a razão. Essa observação decorre do fato dos alunos terem preenchido a tabela das sequências como uma soma de produto utilizando somente o primeiro termo e a razão. A esse respeito temos concluído por aluno que o terceiro termo é igual ao primeiro termo mais duas vezes a razão.

Figura 56 – Um recorte da questão 06 da UARC 03.

06) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o cálculo de cada termo da sequência?

R: (a_x + x r) temos que pegar o primeiro termo e repeti em toda coluna que pede, e soma com o, os radicais na seguinte ordem 1, 2, 3...

07) [Ie] Qual o valor do vigésimo termo de uma progressão aritmética onde o primeiro termo é igual a 5 e a razão é igual a 3.?

R: (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62). O valor do vigésimo termo é = 62

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Por fim, na imagem da Figura 56 acima, observamos que os alunos conseguem identificar qual o padrão observado no preenchimento da tabela e qual o valor do vigésimo termo das PA. Essa observação decorre do fato dos alunos, na sexta questão, terem apresentado o termo geral $(a_1 + yr)$.

Uma interpretação nossa sobre $(a_1 + yr)$ é que "yr" , é a razão "r" multiplicada por "y" que entendemos ser o número de termo menos um. Isto porque, os alunos respondem na sequência que: “temos que pegar o primeiro termo e repeti em toda coluna que pede, e soma com os radicais na seguinte ordem”. Onde, “radicais” quer dizer, o número de termo menos um que multiplica a razão.

Na questão 7, embora os alunos tenham admitido na questão 5 a dinâmica de encontrar um termo qualquer utilizando a soma do primeiro termo com o produto da razão pela subtração do número de termo menos um. Eles utilizaram outro modo para chegar ao vigésimo termo.

Assim sendo, concluímos mediante análise dos resultados obtidos nos segmentos de turnos, corroborada pelo conjunto de ilustrações acima, que os alunos apresentaram indícios de aprendizagem durante todo o processo de aplicação da UARC 03. Para além dessas evidências, nós identificamos que os alunos alcançaram o objetivo principal da proposta da atividade, de definir o termo geral de uma PA, o que reforça os traços de aprendizagem observados durante todo o percurso.

5.4.4. Resultados e Avaliação da Aplicação da UARC 04:

Nesta narrativa, iremos analisar as interações presentes nos turnos da sequência didática 04 (quatro), comportas por 8 (oito) intervenções as quais deram origem a 152 turnos. Guiada pelo objetivo principal de reconhecer e aplicar as propriedades de uma PA de números de termos par finita e ou infinita, como sendo a soma dos dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos. Além disso, atendendo o termo médio de uma PA considerando três números consecutivos. Assim temos:

Intervenções 01 a 03

> **T003-F6**: Essa letra **a** da questão 01é só somar?
> **T005-F2**: O que tu escreveu na questão 02?
> **T006-F6**: eu escrevi que todas deram o mesmo resultado!
> **T017-H5**: Deixa eu ver como tu fez essa 02?
> **T019-F6**: Professor a questão está dando o mesmo resultado né?
> **T020-P**: É só isso que vocês observaram. Que todas dão o mesmo resultado?
> **T032-B1**: Só vejo isso, tu vê outra coisa nessa questão 02?
> **T042-B2**: O resultado é 45 em todas!
> **T043-P**: Quer dizer que se eu somar qualquer termo vai dar o mesmo resultado?
> **T047-B1**: ah... já entendi, só o primeiro com o último. Né?
> **T050-B2**: Eu coloquei assim, se eu pegar um termo par e somar com um ímpar vai dar o mesmo resultado.
> **T058-P**: Do jeito que vocês estão dizendo não da muito certo. Soma qualquer termo par com qualquer termo ímpar! Vai dar o mesmo resultado?
> **T085-B5**: somar o primeiro com o da ponta da o mesmo resultado.
> **T087-H3**: A questão 03 deu oito?
> **T093-B5**: Como vocês fizeram essa questão 03?
> **T101-B2**: o valor de m deu oito né?

Nesse ponto, apresentamos uma abordagem comunicativa que privilegia o discurso reflexivo por tornar o discurso do interlocutor como objeto de consideração e comentário. Assim, na abordagem comunicativa do professor, evidenciamos o envolvimento do assunto foco em discurso de forma a desenvolver significados em sala de aula do objeto matemático em questão. Por outro lado, evidenciamos o discurso interativo dialógico do aluno com ênfase no perceptivo intuitivo se encaminhando para uma pé-formalização.

Além disso, observamos nos turnos acima indícios de aprendizagem quando os alunos identificaram que a soma dos dois termos equidistantes é igual á soma dos extremos presentes nos turnos **T019**; **T042**; **T047**; **T050**; **T085**; **T087** e **T087** . Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 57 – Um recorte da questão 01 da UARC 04.

01) Observe a sequência numérica (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40) e preencha o valor da soma dos termos:

a) a_1 com a_8 ? 45

b) a_2 com a_7 ? 10+35=45

c) a_3 com a_6 ? 15+30=45

d) a_4 com a_5 ? 20+25=45

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 57 acima, observamos que os alunos conseguem ler, interpretar, adicionar, e identificar que a soma dos dois termos equidistantes é igual a soma dos extremos. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido que a soma é igual a quarenta e cinco em todos os itens. Exemplo, a_1 com a_8 é igual a 45.

Figura 58 – Um recorte da questão 02 da UARC 04.

02) [Ir] Descreva o que você observou nos itens *a, b, c* e *d.*

Que a soma desses números estão dando 45

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 58 acima, observamos que os alunos conseguem além de ler, interpretar, adicionar números, também conseguiram identificar padrões. Essa observação decorre do fato dos alunos terem respondido que a soma desses números estão dando quarenta e cinco.

Figura 59 – Um recorte da questão 03 da UARC 04.

03) [Ie] O valor de m para que $m+2$; $2m$; $2m+6$; 28 sejam nessa ordem uma progressão aritmética é?

$m+2+28=2m+2m+6$

$m+30=4m+6$

$m+30-6=4m$

$m+24=4m$

$24=4m-m$

$24=3m$

$\frac{24}{3}=m$

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 59 acima, observamos que os alunos conseguem além de ler, interpretar, adicionar números, e identificar padrões, também conseguiram generalizar suas observações e solucionar um problema numérico. Essa observação decorre do fato dos alunos terem empregado a soma dos dois temos equidistante é igual a soma dos extremos.

Intervenções 04 a 08

T113-A6: Quando deu a letra “a” da quarta questão?
T115-A2: Depois que soma e divide o resultado é o termo do meio né?

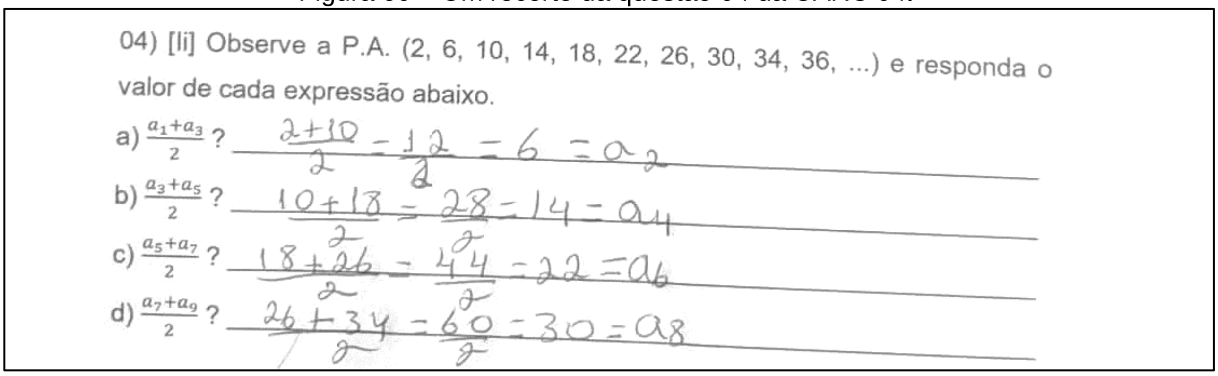
T119-P: O que está acontecendo nessa questão 05?
T122-A5: Toas as vezes que eu somo o primeiro termo e o terceiro termo eu encontro o do meio.
T129-A2: A questão é como eu vou colocar essa resposta da questão 06.
T130-A3: Já repararam que ta dando o número do meio?
T142-B2: Sempre que eu pegar dois pares eu encontro o termo ímpar.
T143-B1: Olha aí, na questão 06, pega o vinte e quatro mais o vinte seis dá cinquenta. Certo? Agora dividi por dois da vinte e vinte e cinco. O do meio, né isso?
T144-B4: A questão 07 da cinquenta e um!
T167-P: Todos já fizeram a questão 05?
T171-H2: O que é o vigésimo termo?
T172-H1: é o 23!
T173-H5:É uma regra, ta dando o termo do meio!
T175-H2: Essa questão 06 deu vinte e cinco.

Neste ponto, destacamos a importância do planeamento, do roteiro do professor e do tempo estimado para a realização das atividades. Isto porque, não fazia parte do planeamento, e tão pouco do roteiro do professor que os alunos a essa altura já haviam se adaptado ao sistema de ensino, ou ainda, que o tempo estimado era mais que suficiente.

Desse modo, notamos durante a transcrição dos turnos que os discursos emergiram coletivamente por diferentes pontos de vista acerca de uma pré formalização das propriedades de PA.

Além disso, observamos nos turnos acima indícios de aprendizagem quando os alunos conseguiram ler, interpretar, adicionar números, dividir números. Sobre tudo, relacionar e generalizar (pré-formalização) tendo em vista os três números consecutivos em PA, o temos do médio é a média aritmética dos dois outros presente nos turnos **T115**; **T122**; **T130**; **T142**; **T143** e **T144** . Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 60 – Um recorte da questão 04 da UARC 04.



04) [Ii] Observe a P.A. (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 36, ...) e responda o valor de cada expressão abaixo.

a) $\frac{a_1+a_3}{2}$? $\frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6 = a_2$

b) $\frac{a_3+a_5}{2}$? $\frac{10+18}{2} = \frac{28}{2} = 14 = a_4$

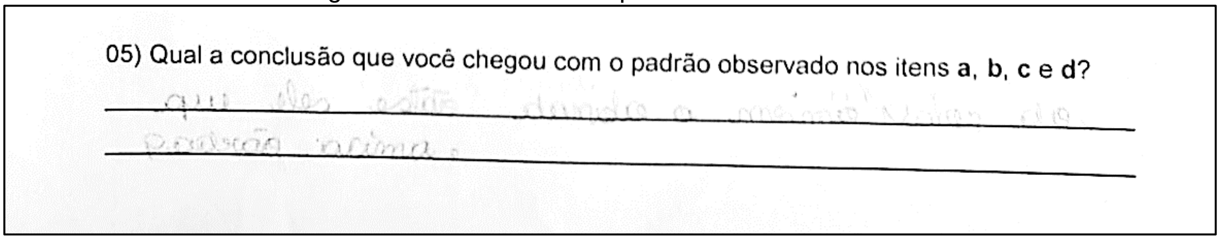
c) $\frac{a_5+a_7}{2}$? $\frac{18+26}{2} = \frac{44}{2} = 22 = a_6$

d) $\frac{a_7+a_9}{2}$? $\frac{26+34}{2} = \frac{60}{2} = 30 = a_8$

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 60 acima, observamos que os alunos conseguiram, além de ler, interpretar, identificar padrões, somar e dividir números. Também conseguiram identificar que em três números consecutivos, o termo médio é a soma aritmética dos dois outros termos. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando resolvem a expressão: $\frac{a_1+a_3}{2}$ e acrescentam que é igual a a_2.

Figura 61- Um recorte da questão 05 da UARC 04.



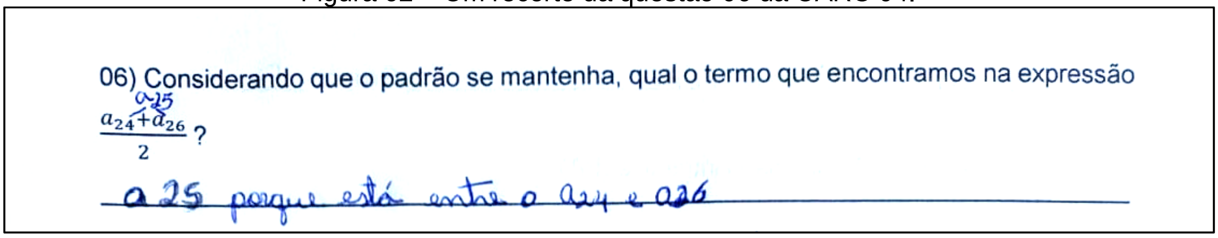
05) Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado nos itens **a**, **b**, **c** e **d**?

que eles estão dando o mesmo valor do padrão acima.

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 61 acima, observamos que os alunos conseguiram, além de ler, interpretar, também conseguiram identificar padrão. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando expressam: “que eles estão dando o mesmo valor do padrão acima”.

Figura 62 – Um recorte da questão 06 da UARC 04.



06) Considerando que o padrão se mantenha, qual o termo que encontramos na expressão $\frac{a_{24}+a_{26}}{2}$?

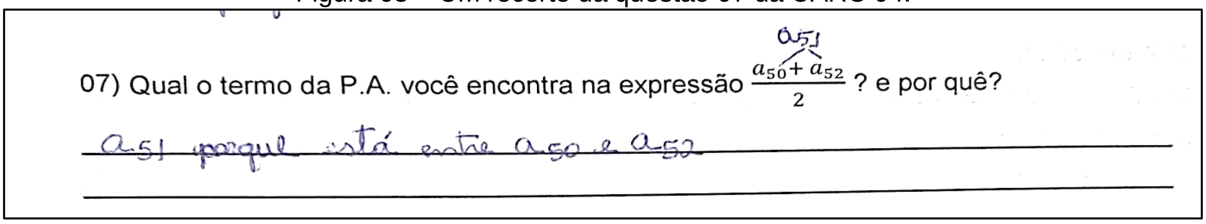
a_{25}

a 25 porque está entre o a24 e a26

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 62 acima, observamos que os alunos conseguiram identificar que em três números consecutivos, o termo médio é a soma aritmética dos dois outros termos. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando expressam que o termo “a_{25} está entre os termos a_{24} e a_{26}".

Figura 63 – Um recorte da questão 07 da UARC 04.



07) Qual o termo da P.A. você encontra na expressão $\frac{a_{50}+a_{52}}{2}$? e por quê?

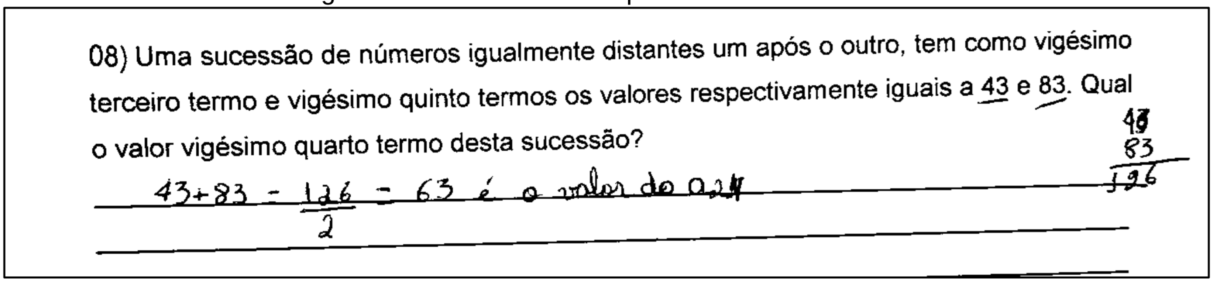
a_{51}

a51 porque está entre a50 e a52

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 63 acima, observamos o que já havíamos percebido na questão 06, que os alunos conseguiram, identificar que em três números consecutivos, o termo médio é a soma aritmética dos dois outros termos. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando expressam que o termo “a_{51} está entre os termos a_{50} e a_{52}".

Figura 64 – Um recorte da questão 08 da UARC 04.



08) Uma sucessão de números igualmente distantes um após o outro, tem como vigésimo terceiro termo e vigésimo quinto termos os valores respectivamente iguais a 43 e 83. Qual o valor vigésimo quarto termo desta sucessão?

$\frac{43+83}{2} = \frac{126}{2} = 63$ é o valor do a_{24}

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\ 83 \\ \hline 126 \end{array}$$

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 64 acima, observamos que os alunos conseguiram, empregar o que foi discutido nas questões anteriores. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando a média aritmética do vigésimo terceiro termo com o vigésimo quinto da origem ao vigésimo quarto termo em uma PA.

Assim sendo, concluímos mediante análise dos resultados obtidos nos segmentos de turnos, corroborada pelo conjunto de ilustrações acima, que os alunos apresentaram indícios de aprendizagem durante todo o processo de aplicação da UARC 04. Para além dessas evidências, nós identificamos que os alunos alcançaram o objetivo principal da proposta da atividade, de reconhecer, entender e aplicar as propriedades de PA, o que reforça os traços de aprendizagem observados durante todo o percurso.

5.4.5. Resultados e Avaliação da Aplicação da UARC 05:

Nesta narrativa, iremos analisar as interações presentes nos turnos da sequência didática 05, comportas por 10 (dez) intervenções as quais deram origem a 145 turnos. Guiada pelo objetivo principal de reconhecer/adotar e aplicar que a soma dos termos de uma progressão aritmética pode ser obtida por meio da metade do número de termos multiplicada pela soma dos seus extremos. Assim temos:

Intervenções 01 a 06

> **T002-H2**: No quarto dia é quatro reias né?
> **T003-E2**: Essa questão 02 vai dar cinquenta e cinco.
> **T004-E4**: É só somar todo o dinheiro poupado do primeiro ao décimo dia. É isso?
> **T009-B1**: A soma delas vão dar iguais.
> **T021-H2**: Explica essa aí. Porque igual?
> **T025-F1**: Professor pode vim aqui por favor?
> **T026-P**: O que vocês observaram sobre a soma? Lembram das propriedades da PA. que vimos na atividade passada?
> **T036-F1**: humm... tipo a soma do primeiro e do último dão valores iguais? É isso professor?
> **T039-G1**: Todas as somas estão dando quinze.
> **T041-G6**: Tem sete somas iguais. Né?
> **T045-G4**: o total dessas somas vai dar cento e cinco.

Nesse ponto do discurso, já depois de formalizações das atividades anteriores, percebemos que os alunos já possuíam uma certa bagagem no seu discurso interativo dialógico. Assim sendo, constatamos esse novo patamar de nível sobre a interação aluno-professor, aluno-aluno quando a ênfase do discurso das interações do perceptivo, empírico intuitivo se deslocavam durante o discurso vez por outra para dar ênfase no teórico.

Além disso, observamos nos turnos acima indícios de aprendizagem quando, os alunos conseguiram ler, interpretar, adicionar números, reconhecem a multiplicação como a soma sucessiva de um número por ele mesmo, generalizar e utilizar a soma de todos os termos de uma PA presentes nos turnos **T003**; **T004**; **T036**; **T039**; **T041** e **T045**. Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 65 – Um recorte das questões 01 e 02 da UARC 05.

É comum encontrar fórmulas e sugestões para que as pessoas passem a fazer alguma poupança com o dinheiro que ganha. Desse modo, vamos aproveitar para conhecer uma delas encontrada na internet e pensar sobre o assunto.

A sugestão é a seguinte: Você deve poupar todos os dias, sem exceção, colocando o dinheiro poupado em uma conta destinada somente para isso. No primeiro dia guarda R$ 1,00, depois, a cada dia, deve guardar o equivalente ao dia anterior acrescido de R$ 1,00. Assim sendo:

01) [li] Preencha a sequência de valores a serem poupados durante os dez primeiros dias.

1,00,	2,00,	3,00,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
1ºdia	2ºdia	3ºdia	4ºdia	5ºdia	6ºdia	7ºdia	8ºdia	9ºdia	10ºdia
		6	10	15	21	28	36	45	55

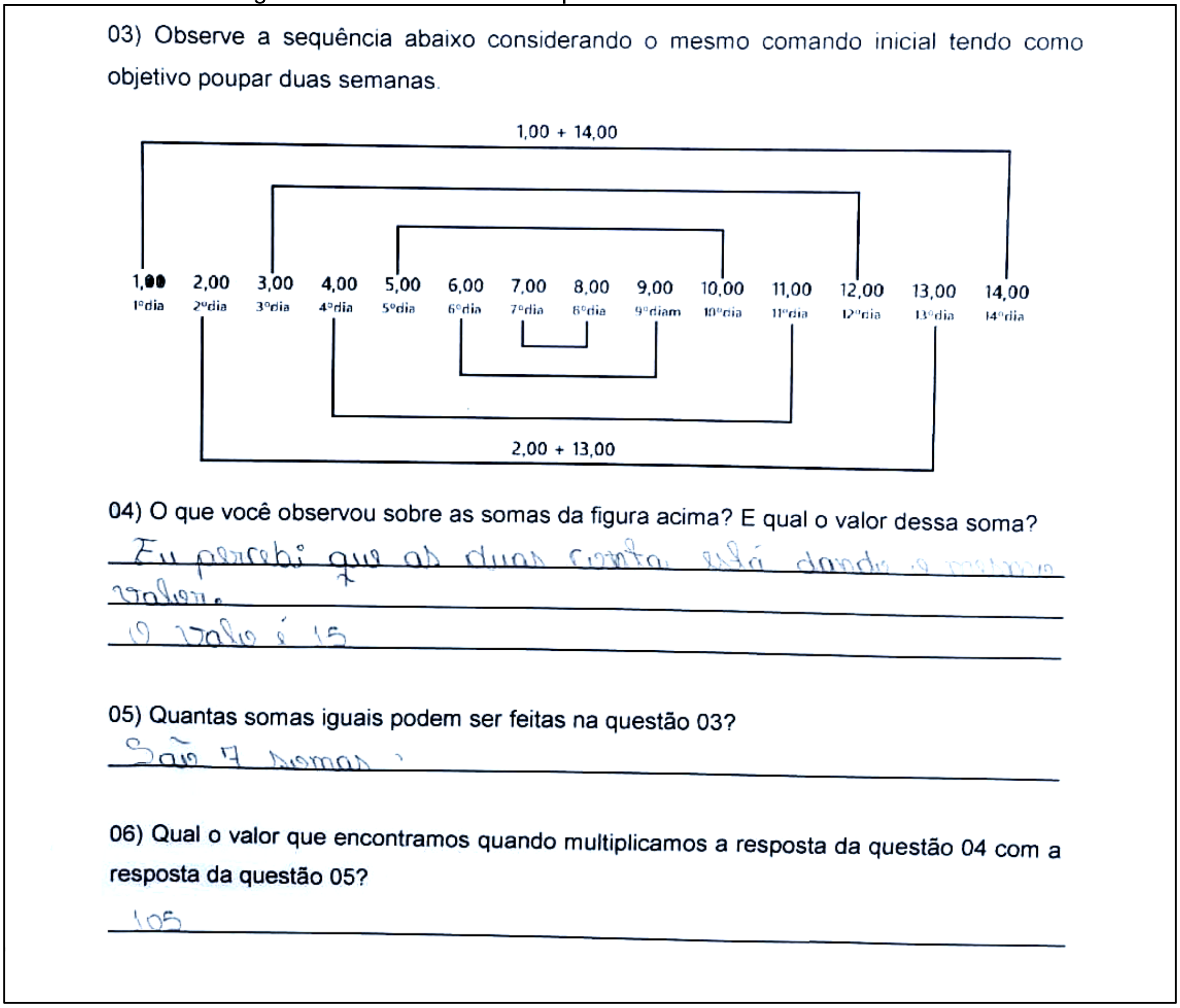
02) [lr] Qual o valor total poupado no final dos dez dias

O valor poupado no final dos dez dias foi de 55 reais

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 65 acima, observamos que os alunos conseguiram ler, interpretar e solucionar um problema da soma do dinheiro poupado em dez dias. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando responde; “o valor poupado no final dos dez dias foi de 55 reais”.

Figura 66 – Um recorte das questões de 03 a 06 da UARC 05.



03) Observe a sequência abaixo considerando o mesmo comando inicial tendo como objetivo poupar duas semanas.

04) O que você observou sobre as somas da figura acima? E qual o valor dessa soma?

Eu percebi que as duas conta está dando o mesmo valor.
O valo é 15

05) Quantas somas iguais podem ser feitas na questão 03?

São 7 somas.

06) Qual o valor que encontramos quando multiplicamos a resposta da questão 04 com a resposta da questão 05?

105

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 66 acima, observamos que os alunos conseguiram ler, interpretar, adicionar, multiplicar e identificar que a soma dos termos equidistantes é igual a soma dos extremos. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando responde: “eu percebi que as duas somas estão dando o mesmo valor”. “O valor é quinze e são sete somas iguais”.

Intervenções 07 a 09

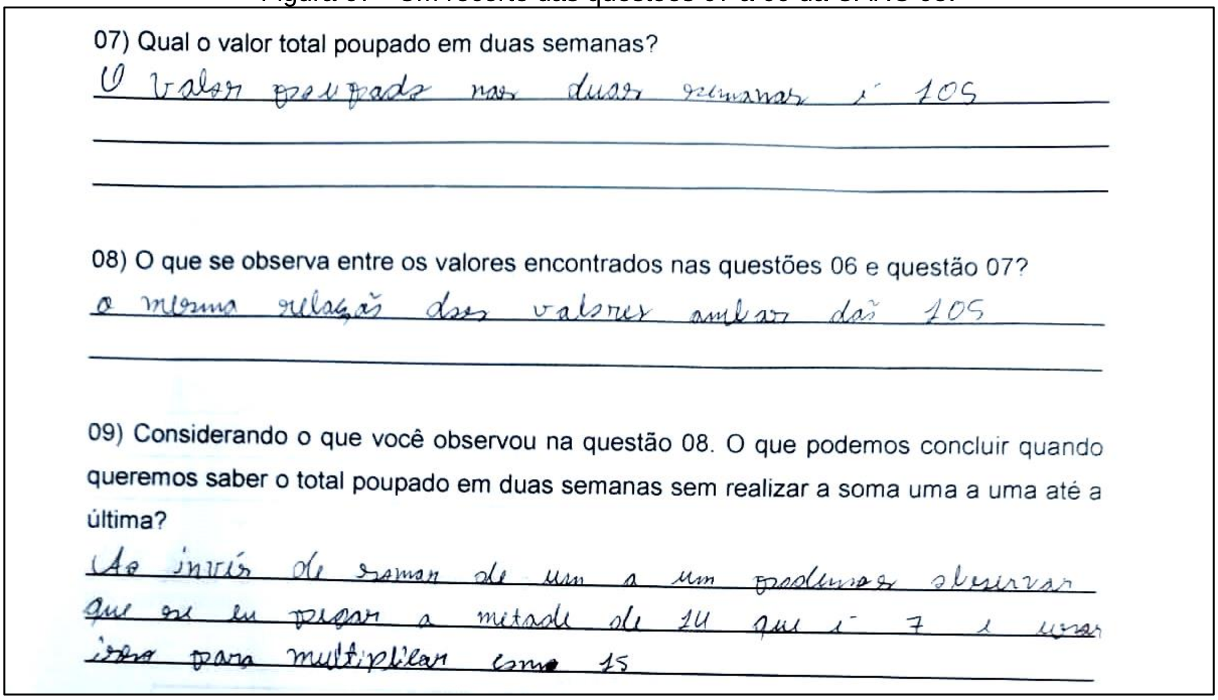
T057-P: Foi desse jeito que eu falei na atividade passada?
T056-F1: A soma dos equidistantes serão iguais em uma PA.
T057-H2: Essa questão 05 é a metade né?
T063-H6: ah... entendi, então da sete!
T069-B1: A soma delas vai dar igual.
T071-B2: O valor poupado em duas semanas vai dar cento e cinco.
T072-F1: A resposta é a mesma, vai dar o mesmo valor.
T076-P: Façam a questão 07 para depois responderem a questão 06!

T077-F2: As questões 06, 07 e 08 são parecidas!
T082-F1: Essa questão 08 é a mesma resposta tipo uma você somo tudo e a outra você multiplicou.
T134-F5: Da pra resolver sem somar de um a um né? Vê como fiz e deu a mesma coisa.

Nesse ponto percebemos que os alunos foram melhorando suas interações. Embora ainda presente na análise desses turnos o conflito do senso comum e a visão da ciência. Percebemos nas interações verbais dos alunos, que os seus discursos já se caminhavam por si só para a pré-formalização do objeto matemático. Assim, compreendemos que o discurso com ênfase no intuitivo se deslocam gradualmente para um discurso com ênfase no teórico.

Além disso, observamos nos turnos acima indícios de aprendizagem quando, os alunos conseguiram reconhecem a multiplicação como a soma sucessiva de um número por ele mesmo presentes nos turnos **T052**; **T069**; **T071**; **T082** e **T134**. Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 67 - Um recorte das questões 07 a 09 da UARC 05.



07) Qual o valor total poupado em duas semanas?

O valor poupado nas duas semanas é 105

08) O que se observa entre os valores encontrados nas questões 06 e questão 07?

a mesma relação dos valores ambas dão 105

09) Considerando o que você observou na questão 08. O que podemos concluir quando queremos saber o total poupado em duas semanas sem realizar a soma uma a uma até a última?

Ao invés de somar de um a um podemos observar que se eu pegar a metade de 14 que é 7 e usar isso para multiplicar com 15

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 67 acima, evidenciamos indícios de aprendizagem uma vez que os alunos conseguiram estabelecer uma equivalência entre as resposta das duas questões, assim também, generalizar que a soma de todos os termos de uma PA pode ser dada pelo produto da metade do número de termos pela soma do primeiro termo com o último termo. Essa observação decorre da conclusão dos próprios alunos, quando responde: “ao invés de somar de um a uma, podemos observar que se pegar a metade de 14 que é 7 e usar isso para multiplicar com 15”.

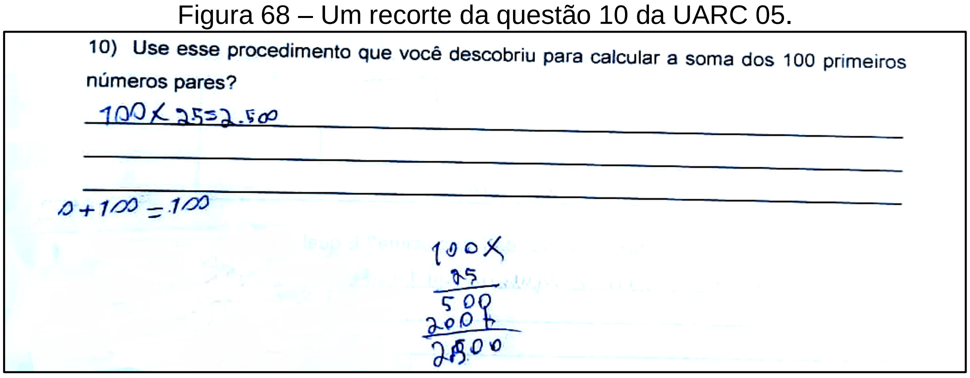
Intervenção 10

> **T097-P**: Olhem para a figura da questão 03. E olhem para a respostas que vocês deram na questão 06. Analisem o que pode ser feito para responder sem ter que somar tudo.
> **T103-C1**: tem que somar né o primeiro com o último professor?
> **T104-P**: Tem sim, mais não é só isso a resposta. Se você somar o primeiro com o último não vai saber a soma de todos né? Além disso o que temos que fazer?
> **T123-H6**: ah... entendi, tem que somar e multiplicar né isso?
> **T124-P**: Alguém me dizer por quem devo multiplicar?
> **T135-B2**: Multiplica pela metade! Né isso professor?
> **T174-B4**: É a metade de cem vezes cem né isso?

Nesse ponto percebemos que a quantidade de turnos, assim também, de discursos interativos empíricos intuitivos foram deixando de ser frequente na medida em que, os alunos se apossavam de significados em sala de aula. E ainda, a visão formalista, com ênfase no ensino da Matemática se dava com mais naturalidade e significados para os alunos.

Além disso, observamos nos turnos acima indícios de aprendizagem quando, os alunos conseguiram apreender e aplicar suas estratégias para solucionar o problema proposta da soma dos cem primeiros números pares presentes nos turnos **T103**; **T123; T135** e **T174**. Logo, concluímos que os alunos demonstram traços de aprendizagem em suas interações verbais. Para além dessa observação, trazemos no conjunto de ilustrações abaixo a expressão que materializa esses indícios de aprendizagem.

Figura 68 – Um recorte da questão 10 da UARC 05.


10) Use esse procedimento que você descobriu para calcular a soma dos 100 primeiros números pares?

100 x 25 = 2.500

0 + 100 = 100

Fonte: Protocolo da pesquisa, 2023.

Na imagem da Figura 68 acima, identificamos que os alunos conseguiram ler, interpretar e aplicar o que foi discutido nas questões anteriores. Essa observação decorre da resposta dada por eles quando eles apresentam a soma do primeiro com o último número par e multiplicam pela metade do número de termos 100 x 25 = 2.500.

Assim sendo, concluímos mediante análise dos resultados obtidos nos segmentos de turnos, corroborada pelo conjunto de ilustrações acima, que os alunos apresentaram indícios de aprendizagem durante todo o processo de aplicação da UARC 05. Para além dessas, nós identificamos que os alunos alcançaram o objetivo principal da proposta da atividade, de reconhecer/adotar e aplicar a soma dos termos de uma progressão aritmética, o que reforça os traços de aprendizagem observados durante todo o percurso.

5.4.6. Síntese da aplicação dos resultados das UARCs

Neste ponto, discorremos sobre a síntese dos resultados da aplicação das Sequências Didáticas. Que apresenta como objetivo geral, verificar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada para o ensino e a aprendizagem de Progressão Aritmética. Assim sendo, apresentamos a análise dos dados após sua apuração, organizadas por aplicação de UARCs:

- ✓ *Sobre a aplicação da UARC 01*: Observamos uma menor dificuldade dos alunos em reconhecer regularidade de padrões. Por outro lado, um número significativo de alunos teve dificuldade de descrever a sua percepção quanto a regularidade que eles identificaram. De outro lado, os alunos não tiveram dificuldade em expressar a sua percepção de regularidade matematicamente. Possivelmente por se tratar de números. No entanto, identificamos que um número expressivo de alunos teve dificuldade em apresentar uma expressão algébrica que representasse o padrão percebido por eles.

- ✓ *Sobre a aplicação da UARC 02*: Observamos que os alunos não apresentaram dificuldade em identificar o que ocorre entre dois termos consecutivos quaisquer de uma sequência. Ademais, observamos que os alunos não encontraram dificuldade em classificar a PA quanto a razão, desse modo, se constante, crescente ou decrescente. Do mesmo, não apresentaram dificuldade de identificar o número de termos, o primeiro e o último termo, assim também, em classificá-las quando ao número de termo, assim, se finita ou infinita.

- ✓ *Sobre a aplicação da UARC 03*: Observamos que os alunos não apresentaram dificuldade em construir uma sequência numérica regular considerando que o padrão da sequência dada permaneça. Assim também, não apresentaram dificuldade em escrever cada termo da PA na forma de uma soma de termos anterior mais a razão. Por outro lado, um número significativo de alunos apresentou dificuldade em elaborar uma expressão algébrica que calculasse o termo geral da PA. Assim também, tiveram dificuldade em perceber que o termo geral pode ser escrito como a soma de um produto utilizando somente o primeiro termo e a razão.

- ✓ *Sobre a aplicação da UARC 04*: Observamos que embora o aluno tenha entendido que a soma dos dois termos equidistantes é igual a soma dos extremos, um número significativo dos alunos teve dificuldade de expressar essa percepção em linguagem escrita. Por outro lado, não apresentam dificuldade em identificar que em três números consecutivos, o termo médio é a soma aritmética dos dois outros termos. No entanto, apresentaram dificuldades de expressar essa percepção da linguagem escrita para a linguagem matemática.

- ✓ *Sobre a aplicação da UARC 05*: Observamos que um número significativo de alunos não apresentou dificuldade em identificar, ler, interpretar e expressar que a soma de todos os termos de uma PA pode ser obtida pela multiplicação da metade do seu número de termos pela soma do primeiro com o último termo. Por outro lado, eles tiveram dificuldade em calcular o valor da soma. Possivelmente, por não reconhecer o zero como um número par.

Vale destacar nesse ponto, segundo a nossa opinião, o êxito da aplicação da SD depende, em grande parte, da assimilação das teorias e da atitude do professor.

Ademais, do *milieu,* dos alunos e da própria sequência didática. Em virtude disso, chegamos a conclusão que o conjunto desses aspectos e outros subjacentes, beneficiaram a aplicação conforme as manifestações acima.

Assim sendo, concluímos que os resultados mostraram a potencialidade da SD aplicada em sala de aula como um instrumento de ensino de PA.

5.5. CONTRIBUIÇÕES DA SD ALUNO-SABER-PROFESSOR

Nesta narrativa, apresentamos uma síntese das contribuições da SD a tríade aluno-saber-professor. Assim temos:

- ✓ *Contribuição da SD para o Aluno: Neste ponto, percebemos que houve um aprimoramento* da interação sociocultural e cognitiva em sala de aula entre aluno e aluno, aluno e o saber e aluno e o professor. Constatamos também que essa SD viabilizou o estímulo e a afetividade como sendo ações fundamentais na aprendizagem do aluno.

  Além disso, notamos que a SD favoreceu não só o debate das ideias em torno do objeto matemático, como também, possibilitou a aquisição e solidificação de alguns fundamentos matemáticos adjacentes ao objeto matemático, como por exemplo: operações numéricas, reconhecimento de padrões em matemática, conjuntos, funções afim e ampliação de expressões algébricas.

  Ainda nesse contexto, identificamos que a SD não só ofereceu aos alunos um melhor domínio do gênero textual, permitindo-lhes escrever ou falar matematicamente melhor e mais adequado numa dada situação de comunicação, mais também, auxiliou os alunos na compreensão de algumas estruturas mais complexas, especialmente estruturas importantes da linguagem matemática de caráter mais formal.

  Além do mais, percebemos que a SD não só promoveu a interação do aluno e o professor, do aluno e seus colegas, do aluno e o saber, como também, proporcionou ao aluno ser o personagem principal do seu próprio processo de ensino.

- ✓ *Contribuições da SD para o Saber*: Neste ponto, observamos durante a aplicação das atividades que uma das contribuições da SD para o saber foi servir como fonte de aproximação do conhecimento do senso comum ao conhecimento científico. Além disso, verificamos também que a SD tornou a abordagem mais fecunda e vantajosa para compreensão/assimilação do objeto matemático.

  Outro aspecto que observamos proporcionado pela SD ao saber, é a acomodação de maneira mais naturalizada do conhecimento empírico intuitivo ao conhecimento científico, especialmente o conhecimento matemático de caráter formal.

- ✓ *Contribuição da SD para o Professor*: Neste ponto, com base na consideração dos conhecimentos prévios dos alunos, reparamos que a SD viabilizou a configuração da nossa prática em sala de aula, em ações concretas, que aprofundaram o debate das ideias a cerca do objeto matemático. Assim também, mobilizaram e ensejaram reflexões sobre os conhecimentos básicos adjacentes e necessários para apreender soluções das atividades propostas.

  Neste ponto, reparamos que a SD não só alavancou a nossa prática pedagógica em níveis teóricos pois, foi preciso estudar a teoria SD e teorias adjacentes a ela para melhor executá-las experimentalmente, mais também, em níveis prático, pois incorporamos a nossa prática um modelo de ensino que auxilia o protagonismo do aluno em ser autor do seu próprio conhecimento, diferente do modelo tradicional de dar aula. Assim sendo, a SD contribuiu para a nossa formação profissional continuada.

  Além disso, para professores como nós, que buscamos uma aprendizagem mais significativa, reparamos que a ação desenvolvida pela SD em sala de aula, é qualitativamente diferente e mais eficaz da ação que se baseia na transmissão de conhecimento. Notamos também, que a SD nos permitiu uma interação professor-aluno-saber suficientemente rica capaz de possibilitar o desenvolvimento autônomo do aluno.

  Além do mais, verificamos que a SD nos oportunizou formalizar com mais naturalidade e desembaraço o objeto matemático, em particular o conteúdo de PA. Por último, concluímos que a SD aperfeiçoou a nossa abordagem de conteúdos matemáticos e o nosso ofício de ser professor.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentei os resultados de uma pesquisa desenvolvida no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre Progressão Aritmética que gerou o Produto Educacional[37] que indaga como questão norteadora de pesquisa: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Progressão Aritmética?

Priorizamos a Teoria da Situação Didática de Brousseau (1998) por defender que o objetivo principal de estudo não é a cognição do aluno, mas a situação didática, na qual são potencializadas as interações da tríade aluno–saber–professor. Além do mais, por assumir que professores e alunos são sujeitos indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) presente nas situações didáticas sempre que houver uma intenção clara do professor de proporcionar ao seu aluno aquisição de saberes por meio da sequência didática. Por essa razão, nos ofereceu suporte teórico para a apresentação do conteúdo de Progressão Aritmética por meio da sequência didática planejada.

Escolhemos a Educação Matemática, por discutir que a didática matemática promove em níveis teóricos e experimentais a prática docente. Assim também, a Sequência Didática idealizada por Zabala (1998) por admitir ser um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas que compõe uma unidade temática. Esse arcabouço nos forneceu auxílio para organização, planejamento e elaboração da sequência didática.

Abordamos as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), não só por ser fundamentada e constituída por intervenções que servem ao propósito da teoria da situação didática, mais também, por ter sido o modelo estruturante destinado a elaboração da sequência didática. O seu constructo ofereceu suporte indispensável a formalização gradual dos conceitos de Progressão Aritmética por meio das interações dialógicas.

Empregamos as considerações da Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), por subsidiar a validação ou refutação dos esquemas de aprendizagem constituídos durante a

[37] Falta gerar o link do produto educacional

aplicação da sequência didática. A combinação desse constructo nos permitiu evidenciar os indícios de aprendizagem de Progressão Aritmética após aplicação da sequência didática apresentado no capítulo 6 (seis).

Considerando a revisão da literatura, destacamos diversos aspectos do ensino e aprendizagem de Progressão Aritmética. Desses estudos sobressaíram as abordagens das percepções e dificuldades de professores e alunos no ensino e aprendizagem de matemática; o traquejo com os alunos com déficit de aprendizagem; análise dos livros didáticos; o processo de elaboração, aplicação e validação da sequência didática. Essa coleção nos garantiu o embasamento teórico e científico além de oferecer a confiabilidade técnica e científica de opinião de outros autores renomados.

O levantamento socioeconômico com questões abertas e fechadas direcionadas a professores e alunos nos permitiu coletar dados de modo prático e eficiente das percepções de professores e alunos centrados na dificuldade do ensino de Progressão Aritmética. Assim também nos permitiu escolher os conteúdos matemáticos para o teste e oficina de conhecimentos básicos além de nos fornecer respostas para as questões de pesquisa.

Trazemos a análise das abordagens da Progressão Aritmética nos livros didáticos, por admitir que os livros didáticos em grande parte influenciam, interferem e determinam em muitos casos a apresentação do conteúdo de Progressão Aritmética em sala de aula. Desse levantamento bibliográfico adotamos algumas ideias fundamentais como fonte de inspiração. Entretanto, a pesquisa bibliográfica do livro didático apontou que há problemas na abordagem e ensinamentos equivocados desse conteúdo matemático.

Apresentamos um estudo da Progressão Aritmética que nos permitiu aprofundar o conhecimento matemático científico sobre PA. Além disso, oferecer subsídio no contexto da formação de professor que ensina matemática, uma formação continuada uma outra abordagem desse conteúdo.

Efetuamos um teste de verificação de conhecimentos básicos para conferir se os alunos apresentam proficiência para desenvolverem o estudo da Progressão Aritmética. Esse procedimento nos concedeu auxílio para programar uma oficina de conhecimentos básicos. Esta por sua vez nos forneceu ajuda para superar as dificuldades encontradas e nos proporcionou aprimora habilidades e competências fundamentais para o desenvolvimento do estudo de PA.

Sobre a aplicação da Sequência Didática, é possível concluir que as etapas foram bem executadas, e isso nos garantiu o alcance do objetivo proposto deste trabalho. Dessa dinâmica, foi possível identificar nos segmentos de turnos e registros apresentados no capítulo 6 (seis) que, a SD apresentou, fundamentado na Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), traços de aprendizagem para a Progressão Aritmética.

Quanto à desenvoltura alcançada durante a aplicação das atividades, pode se dever, em partes, a ser o aplicador da sequência didática o professor da turma. Nesse contexto, é possível inferir que o desempenho do arranjo didático montado para compor o grupo de alunos, viabilizou com desenvoltura a evolução das interações dialógicas que pôde ser observada durante as intervenções estruturantes das UARCs propostas por Cabral (2017).

As intervenções de manutenção escritas e orais que estruturam a SD proposta Cabral (2017), fundamentaram-se em uma abordagem qualitativa que propiciou não só o interesse em querer participação do jogo, como também, a construção de saberes matemáticos pelo próprio aluno. Essa percepção está fundamentada nas interações dialógicas e nos registros das atividades presentes no capítulo 6 (seis) e confirmada pela Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002).

O conjunto das intervenções de manutenção escritas e orais que estruturam a SD propostos por Cabral (2017), não só favoreceu as nossas interações dialógicas com o aluno em sala de aula, como também, ajudou nas acomodações de saberes matemáticos formais de modo mais naturalizado pelos alunos. Além disso, nos proporcionou a ter uma abordagem de conteúdo que oferece aos alunos a possibilidade de serem autônomos na construção de seus próprios conhecimentos, além de ter contribuiu para a abordagem e o ensino de Progressão Aritmética de forma mais dinâmica.

Sobre as intervenções estruturantes de manutenção oral da SD, proposto por Cabral (2017), concluímos que são na verdade, um trunfo que temos durante a aplicação da sequência didática. Assim sendo, é por meio delas, que podemos ou não auxiliar de fato os alunos a serem protagonistas da construção de seus saberes. Isto porque, são elas que irão destravar os obstáculos epistemológicos dos alunos durante a aplicação da SD.

A Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), nos permitiu a partir da análise das transcrições dos discursos geradas pelas intervenções estruturantes proposto por Cabral (2017), inferir o funcionamento da SD para o ensino de Progressão Aritmética em concordância com a questão de pesquisa, cujas evidências estão apresentadas no capítulo 6 (seis).

Apesar de a pesquisa ter um caráter qualitativo exploratório do processo interativo e discursivo de ensino e aprendizagem em Progressão Aritmética, obtivemos respostas quantitativas mediante análise realizada após a aplicação das atividades de sequência didática. Diante disso, recomendamos numa próxima prática experimental, a aplicação de exercícios de fixação logo após a aplicação da Sequência Didática para que os alunos possam acomodar a formalização alcançada.

Considerando todo o processo da pesquisa e aplicação da Sequência Didática, é possível inferir que o produto educacional apresentado traz contribuições para tríade aluno-saber-professor quanto aos aspectos de apresentação do conteúdo de Progressão Aritmética, de conteúdos conceituais e procedimentais para o ensino e aprendizagem além de contribuir com a formação do professor de matemática.

Desse estudo, é possível concluir que o ensino de Progressão Aritmética por meio de Sequência Didática, nos proporcionou conhecimento matemático teórico específico de Progressão Aritmético. Viabilizou discussões sobre as teorias de ensino e aprendizagem para conteúdo de matemática, nos forneceu uma nova abordagem para o ensino de Progressão Aritmética diferente das abordagens centradas na exposição do conteúdo pelo professor e nos permitiu compreender e fazer uso das UARCs para acomodações mais naturalizadas do conteúdo de Progressão Aritmética.

A pesquisa apresentar uma estreita relação com a nossa prática pedagógica, suas contribuições vão além de aguçar a reflexão da nossa atuação profissional. Assim, inseriu em nossa práxis, conhecimentos teóricos e experimentais sobre o ensino de Progressão Aritmética. Além disso, não só implementou em nossas aulas uma proposta pedagógica de abordagem de conteúdo diferente das tradicionais, como também, auxiliou e forneceu um aprimoramento das interações dialógicas com os nossos alunos.

A Teoria da Situação Didática adicionou em nossa proposta pedagógica e plano didático uma estratégia que auxilia o aluno a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento matemático. Além do mais, estabeleceu em nossa dinâmica uma proposta que melhora a relação da tríade aluno-professor-saber.

De modo geral, percebemos que a Sequência Didática balizada por Zabala (1999) e estruturada segundo o modelo proposto por Cabral (2017), forneceu auxílio ao nosso plano didático centrado na aprendizagem do aluno. Forneceu à nossa ação pedagógica um mecanismo de formalização do conteúdo matemático de Progressão Aritmética com mais naturalidade e desenvoltura.

Uma observação que fazemos a partir do conhecimento adquirido após a prática experimental de aplicação da SD é que, a composição do grupo de alunos não pode ser aleatória. Sugerimos que se o aplicador da sequência didática for professor da turma, leve em consideração as variáveis habilidade e competência matemática de seus alunos para potencializar o ensino e aprendizagem por meio de SD. Assim, (re)distribuindo pelo menos um aluno matematicamente habilidoso para compor um grupo.

Embora não seja o foco principal dessa pesquisa, mas um possível desdobramento recai também sobre a análise dos livros didáticos de matemática que apresentou possíveis problemas na abordagem e ensinamentos equivocados de Sequência Numérica Regular e Progressão Aritmética.

Recomendo a realização de novas aplicações da Sequência Didática “Ensino de Progressão Aritmética por Meio de Sequência Didática”, em outros contextos escolares, bem como a implementação de tecnologias digitais ou materiais manipuláveis.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, Neusa Maria Costa; COLUCI, Marina Zambon Orpinelli. Validade de conteúdo nos processos de construção e adaptação de instrumentos de medidas. **Ciência & Saúde** Coletiva. v. 16, n. 7, p. 3061-3068, 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Elementos de Didática da Matemática**. Campinas: Cad. Cedes, vol. 28, n. 74, p. 123-125, jan./abr. 2008. Disponível em https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100008 Acessado em 06 de Out. de 2021.

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade**. Amazônia | Revista de Educação em Ciências e Matemática | v.13 (27) Set 2017. p.05-35.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 410f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des mathematiques 1970-1990, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, (trans, and eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2002.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p. 34-113.Tradução-Maria José Figueiredo.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b, p. 48-72.

CABRAL, NATANAEL FREITAS. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração/ Natanael Freitas Cabral. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CARBONELL, J. **A aventura de inovar: a mudança na escola**. São Paulo: Artes Médicas, 2002.

CARR, W. Una teoria para la educación: **hacia una investigación educativa crítica**. Madrid: Morata, 1996.

CHEVALLARD, Y. (1991). **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage
Editions.

D'AMAORE, B. **Elementos da Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B**. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. Bolema, Rio Claro, v. 20, n. 28, 2007. Disponível em: Acesso em 19 jul. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

DOUADY, R. (1995). **La ingeniería didáctica y la evolución de su relacíon com el conocimiento**. In Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas Autores: Michèle Artigue, Régine Douady, Luis Moreno e Pedro Gómez (Ed.). Bogotá.

FRANCO, M. A. DO R. S. **Prática pedagógica e docência: um olhar a partir da epistemologia do conceito.** Revista Brasileira de estudos Pedagógicos. Brasília, v. 97, n. 247, p. 534-551. Disponível em https://doi.org/10.1590/S2176-6681/288236353 Acessado em 20 de set. 2021.

GÁLVEZ, G. **A Didática da Matemática**. In: PARRA, C.; SAIZ, I. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 26-34.

GÓES, M. C. R. (2000). A abordagem microgenética na matriz históricocultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes, 50, 9–25.

GONÇALVES, Fábio Barros. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Função Quadrática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2019.

GRANDO, N. I.; MARASINI, S. M. **Educação Matemática: a sala de aula como espaço de pesquisa**. 2. ed. Passo Fundos: UFP Editora, 2014.

LAVELLI, M., PANTOJA, A. P., HSU, H., MESSINGER, D., e FOGEL, A. (2005). Using microgenetic designs to study change processes. Em D. M. Teti (Ed.), Handbook of research methods in developmental science (pp. 40–65). Oxford: Blackwell.

MARGOLINAS, C. **Situations, milieux, connaissances:** analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Grenoble La Pensée Sauvage, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PCNs (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática** / Ministério de Educação. Secretaria de Educação., 1 edição.

UNICEF. **Panorama da Distorção Idade-Série no Brasil**. Brasília: UNICEF, 2018. Acesso em 26/02/2023 https://www.unicef.org/brazil/media/461/file/Panorama_da_distorcao_idade-serie_no_Brasil.pdf.

PERRIN-GLORIAN, M.J. **From producing optimal teaching to analysing usual classroomsituations.** Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: thenotion of milieu. Acesso em 12/11/2022 http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ WG5/Papers/PERRIN.pdf, 2007.

PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra; HAŠEK, Roman. Financial education demands concerning **teacher training.** Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics, v. 12, 2012.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: o problema central do desenvolvimento**. Tradução de Marion Merlone dos Santos Penna. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

POMMER, M. W. A **Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2013. Disponível em: < http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+201 3.pdf>. Acessado em 10 set. 2021.

SOUZA, C. **Circulação e apropriação de ideias em Educação Matemática – aproximações**. Orientador: Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, 2016. 422 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2016. Disponível em https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-14092016-122421/pt-br.php Acesso em 21 de nov. 2021.

The Story of Matematics, 2021, Luke Mastin; The Story of Matematics, CARL FRIEDRICH GAUSS The Story of Matematics; **The Story of Matematics**, 2022. Disponível no site https://www.storyofmathematics.com/19th_gauss.html; Acesso em 19 de set. 2021.

TREVIZAN, Vanessa Aparecida. **Ensinando Matemática por meio de Situações Potencialmente Adidáticas: Estudo de Casos Envolvendo Análise Combinatória**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

KLOSOUSKI, S.S.; REALI, K.M. **Planejamento de ensino como ferramenta básica do processo ensino-aprendizagem.** In.: Revista Eletrônica Lato Sensu. Guarapuava: UNICENTRO. Ed.5, 2008. Disponível em https://sistemas.ufrn.br/shared/verArquivo?idArquivo=2557996&key=07374bb66a6bb990ca1fe6966ad1ea3c Acesso em 25 de ago. 2021.

LIBÂNEO, J.C. **Didática**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. de C. **Tendências em educação matemática**. Revista Roteiro, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez., 1994.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2 ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2009.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Único.

MOTA, Natanael de Oliveira. **Aprendizagem de Progressões Aritméticas e suas Aplicações por meio de Sequência Didática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2019.

NÉLISSE, Claude. L'intervention: catégorie floue et coonstruction de l'objet. In: NÉLISSE, Claude (Dir.). **L'intervention: les savoirs en action**. Sherbrooke, Éditions GGC, 1997. p. 17-24.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. SPRINGER, 2010, pp. 3-32.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZABALA, Antoni. **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA OS PROFESSORES

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Professor(a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA sob a responsabilidade dos pesquisadores **Miguel Chaquiam** (orientador) e **Ernani Soeiro da Costa** (orientando), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

A sua colaboração será de permitir que as atividades sejam realizadas em sua turma e auxiliar os pesquisadores durante a execução das atividades, dentre outras. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **Miguel Chaquiam** (miguelchaquiam@gmail.com) ou **Ernani Soeiro da Costa** (profsoeirocosta@gmail.com). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo. Belém (PA) - CEP: 66113 - 010.

Belém, _______ de _______________ de 20____

____

Assinatura do pesquisador

Eu, professor(a) ____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____
Assinatura do professor participante da pesquisa

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE DOS ALUNOS EGRESSOS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Aluno(a),

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA sob a responsabilidade dos pesquisadores **Miguel Chaquiam** (orientador) e **Ernani Soeiro da Costa** (orientando), vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

O objetivo desta pesquisa é propor alternativas metodológicas de ensino que venham minimizar as dificuldades de aprendizagem em Matemática. A sua colaboração será em participar das tarefas que iremos propor a vocês. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Também não envolve nenhum risco de qualquer natureza. Os benefícios serão de cunho acadêmico objetivando melhorias no processo de ensino aprendizagem de matemática na Educação Básica. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você, contendo a sua assinatura e de assinatura de seu responsável.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores: **MIGUEL CHAQUIAM** (miguelchaquiam@gmail.com) ou **ERNANI SOEIRO DA COSTA** (profsoeirocosta@gmail.com). Você poderá também entrar em contato com a Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Bairro: Telégrafo sem Fio. Belém - Pará - CEP: 66113 - 010.

Belém, ________ de _______________ de 20____

____
Assinatura do Pesquisador

Eu, aluno(a)____, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_________________________   _____________________________________
Assinatura do Aluno(a)   Assinatura do Responsável do aluno(a)

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

Prezado (a) Professor (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino aprendizagem da Matemática. Para tanto, necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

01 – Gênero:
( ) Masculino
( ) Feminino

02 – Tempo de serviço?
( ) 1 – 5 anos
( ) 6 – 10 anos
( ) 11 – 15 anos
( ) 16 – 20 anos
( ) 21 – 30 anos
( ) 31 – 35 anos
( ) mais de 35 anos

03 – Durante a sua formação inicial (graduação) como foi introduzido este conteúdo de P.A.?
( ) Definição, seguido de exemplo e exercícios.
( ) Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Modelagem Matemática de modo a obterá definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição, exemplos e exercícios.
( ) Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Não vi esse conteúdo na graduação.
( ) Outro.

04 – Quando você ensina sobre a P.A. em sala de aula, qual documento oficial você utiliza para elaborar suas aulas e atividades?
( ) Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM.

( ) Base Nacional Comum Curricular – BNCC.
( ) Livro Didático de Matemática.
( ) Outros.
05 – Você está atualmente como Professor de qual Rede de Ensino? (Marque mais de uma opção, se for necessário)
( ) Pública Estadual.
( ) Pública Municipal.
( ) Privada.

06 – Qual a sua formação acadêmica? (maior titulação).
( ) Graduação
( ) Especialização (em andamento)
( ) Especialização
( ) Mestrado (em andamento)
( ) Mestrado
( ) Doutorado (em andamento)
( ) Doutorado
( ) Pós-doutorado (em andamento)
( ) Pós-doutorado
( ) Outro

07 – Quais as principais formas de avaliação que você costuma utilizar em sala de aula? (Se necessário, você pode selecionar mais de uma opção).
( ) Prova oral
( ) Prova escrita
( ) Lista de Exercícios
( ) Auto – avaliação
( ) Produções no caderno
( ) Fichas de observação
( ) Outro

08 – Quando você ministra o conteúdo P.A., você utiliza geralmente na apresentação desse conteúdo:
( ) Sequências Didáticas.
( ) História da Matemática.
( ) Resolução de Problemas.
( ) Modelagem Matemática.
( ) Livro Didático de Matemática.
( ) Outro

09 – Quantas aulas normalmente você utiliza para ensinar o conteúdo de P.A.?
( ) de 01 a 03 aulas
( ) de 04 a 06 aulas
( ) mais de 8 aulas

10 – Quando você ensina P.A., geralmente suas aulas iniciam:
( ) Definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Situação problema, definição, seguido de exemplos e exercícios.

( ) Modelagem Matemática de modo a obterá definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de materiais manipuláveis de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Por meio de jogos de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Uso da História da Matemática como recurso didático, seguido de definição, exemplos e exercícios.
( ) Uso das tecnologias de modo a obter a definição, seguido de exemplos e exercícios.
( ) Outro.

11 – O tempo de aula utilizado para ensinar P.A. normalmente é?
( ) Suficiente
( ) Pouco suficiente
( ) Insuficiente

12 – A definição/conceito de P.A. é?
( ) Muito fácil para o aluno assimilar
( ) Fácil para o aluno assimilar
( ) Difícil para o aluno assimilar
( ) Muito difícil para o aluno assimilar

13 – Quando você ensina P.A., geralmente suas aulas iniciam?
( ) Definição, seguido de exemplo e exercício
( ) Situação problema, definição e exercício
( ) Uso de Sequência Didática
( ) Por meio de materiais manipuláveis
( ) Por meio de Jogos
( ) Por meio da História da Matemática
( ) Por meio da tecnologia
( ) Outro

14 – Com relação ao ensino de P.A., na sua opinião, de que forma é mais didático para o "ensino e aprendizagem"?
( ) fazer a utilização de definição/conceito de função seguido de aplicação de fórmulas.
( ) fazer a resolução de atividades seguido de definição/conceito de função
( ) fazer a contextualização de função seguido de resolução de problema
( ) Outro

15 – Com relação a contextualização do conteúdo de P.A. você?
( ) Sempre faz
( ) Quase sempre faz
( ) Raramente faz
( ) Não tem esse hábito

16 – Para fixar o conteúdo de P.A., você costuma?
( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto
( ) Mandar resolver os exercícios do livro didático
( ) Não propor questões de fixação
( ) Propõe a resolução de questões por meio de softwares
( ) Outro

17 – Quais as maiores dificuldades dos seus alunos no conteúdo de P.A.? (Marque mais de uma opção, se você achar necessário)
( ) Compreensão da definição e conceitos de P.A.
( ) Interpretar os problemas
( ) Resolução de problemas
( ) Resolução de fórmulas
( ) Reconhecer a regularidade

18 – Considerando a sua experiência profissional, aponte uma ou mais dificuldade(s) do aluno em aprender P.A. .

____

19 – Levando em conta a sua experiência profissional, resumidamente nos conte por que na sua opinião o aluno tem dificuldade com estudo de P.A.

____

20 – Você costuma ensina P.A. de maneira funcional?
( ) Sim, sempre
( ) Sim, as vezes
( ) Não tenho esse hábito

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS EGRESSOS

Prezado(a) aluno(a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

01 – Gênero
(   ) Masculino
(   ) Feminino

02 – Em qual ou quais rede de ensino você já estudou? (pode marcar mais de um caso necessário)
(   ) Estadual
(   ) Municipal
(   ) Particular

03 – Qual a sua idade?
(   ) 14 – 16 anos
(   ) 17 – 19 anos
(   ) 20 – 22 anos
(   ) 23 – 25 anos
(   ) mais de 25 anos

04 – Qual o material didático mais utilizado pelo professor de matemática em sala de aula?
(   ) Livro didático
(   ) Apostila
(   ) Uso de tecnologias diversas
(   ) Datashow
(   ) Computadores
(   ) Outros

05 – Possui dificuldade de interpretar um texto matemático proposto para a resolução de um problema?
( ) Sempre 100%
( ) Frequentemente 80%
( ) Ocasionalmente 30%
( ) Poucas vezes 10%
( ) Nunca 0%

06 – Qual o material didático que normalmente o professor de Matemática utiliza para dar as aulas de Progressão Aritmética (P.A.)?
(   ) Uso de tecnologia diversas
(   ) Uso de Apostila
(   ) Uso de Livro Didático
(   ) Uso do DataShow
(   ) Uso de computadores
(   ) Outros

07 – Possui dificuldade com operações numéricas?
( ) Sempre 100%
( ) Frequentemente 80%
( ) Ocasionalmente 30%
( ) Poucas vezes 10%
( ) Nunca 0%

08 – Que estratégia o professor de matemática utilizou para fixar o assunto de Progressão Aritmética (P.A.)?
(   ) propôs exercício do livro didático
(   ) propôs um lista de exercício
(   ) Não propôs nenhum exercício
(   ) outros

09 – Qual a maior dificuldade que você apresenta ou apresentou em matemática especialmente no conteúdo de P.A.?
(   ) dificuldade com a aritmética
(   ) dificuldade com a tabuada
(   ) falta conhecimentos anteriores
(   ) dificuldade de interpretação
(   ) outros

10 – Normalmente o professor de matemática contextualiza o assunto de matemática durante suas aulas?
(   ) Não tem esse hábito
(   ) Nunca faz
(   ) Raramente faz
(   ) Quase sempre faz
(   ) Sempre faz

11 – O professor de matemática contextualizou o conteúdo de Progressão Aritmética (P.A.)?
(   ) Sim
(   ) não

12 – O professor de matemática tem hábito de fazer alguma revisão de conteúdo antes de iniciar um assunto novo?
(   ) Não tem esse hábito

( ) Nunca faz
( ) Raramente faz
( ) Quase sempre faz
( ) Sempre faz

13 – O professor de matemática fez alguma revisão de conteúdo antes de iniciar o conteúdo de Progressão aritmética (P.A.)?
( ) Sim
( ) Não

14 – O professor de matemática relacionou o conteúdo de Progressão Aritmética (P.A.) com algum outro conteúdo?
( ) Sim
( ) Não

15 – Como foi introduzido o conteúdo de Progressão Aritmética (P.A.) pelo professor de matemática?
( ) definição, exemplo e exercício
( ) Situação Problema, definição e exercício
( ) Por meio de História da Matemática
( ) Por meio de Sequência Didática
( ) Por meio de material manipulável
( ) Por meio de jogos
( ) Por meio de tecnologia diversas
( ) Outros

16 – Oprofessor costuma passar uma lista de exercícios após o assunto de PA? ____

17 – O professor corrigir a lista de exercícios solicitadas emcaminhada para fazer em casa?
( ) Sim
( ) Não

18 – Qual a sua maior dificuldade em matemática? ___________________________

17 – Qual a sua maior dificuldade em Progressão Aritmética (P.A.)? ______________

18 – Você costuma estudar quando não está na escola?
( ) Não tem esse hábito
( ) Nunca faz
( ) Raramente faz
( ) Quase sempre faz
( ) Sempre faz

19 – Possui dificuldade em revolver expressão numérica?
( ) Sempre 100%
( ) Frequentemente 80%
( ) Ocasionalmente 30%
( ) Poucas vezes 10%
( ) Nunca 0%

20 – Possui dificuldade com operação algébrica?
( ) Sempre 100%
( ) Frequentemente 80%
( ) Ocasionalmente 30%
( ) Poucas vezes 10%
( ) Nunca 0%

APÊNDICE C – TESTE DE VERIFICAÇÃO DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Universidade do Estado do Pará
Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática

Mestrando: Ernani Soeiro da Costa

Público alvo: Estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Local: Escola Pública Estadual

Teste sobre conteúdos matemáticos pré-requisitos para a aprendizagem de Progressão Aritmética

Aluno: ________________________________ Data: _____ / _____ / _______

Questão 1 - Escreva V para verdadeiro e F para falso.
a) – 5 é um número real (   )
b) 5,555... é um número real (   )
c) 5,5 é um número irracional (   )
d) 5 é um número racional (   )
e) 0,11011101111... é um número irracional (   )
f) 100 é um número irracional (   )
g) 0,565656... é um número racional (   )

Questão 2 - Efetue as operações com os números inteiros abaixo:
a) 5 + 3 =
b) – 7 + 2 =
c) – 3 – 2 +6 – 4=
d) + 4 – 7 +8=

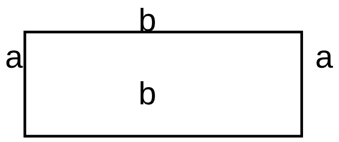
Questão 3 - Resolva as operações:
a) +3 + 0,2+1,3 =
b) – 0,5 – 0,7 =
c) +0,2 + 0,2+ 0,2 =
d) +0,5 – 0,3

Questão 4 - Analise as sequências numéricas a seguir:
I. (1, -2, 3, -4, 5, -6, ...)
II. (13, 13, 13, 13, 13, ...)
III. (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)
Podemos afirmar que as sequências I, II e III são classificadas respectivamente como:
a) crescente, oscilante e decrescente.
b) decrescente, crescente e oscilante.
c) oscilante, constante e crescente.
d) decrescente, oscilante e constante.
e) oscilante, decrescente e crescente.

Questão 5 - Considerando as sequências de números abaixo, classifique-as conforme sua lei de formação ou recorrência.
a) (0, 2, 4, 6, 8, 10 ...)
b) (2, 3, 5, 7, 11, 13)
c) (2, 10, 12, 16, 18, 19)
d) Das sequências acima, qual delas é infinita e quais são finitas?

Questão 6 - Uma sequência numérica possui lei de formação igual a $a_n = n^2 + 1$. Analisando essa sequência, podemos afirmar que o valor do 5º termo da sequência será:
a) 6
b) 10
c) 11
d) 25
e) 26

Questão 7 - Considerando que o perímetro de um retângulo é dado pela soma de todos os lados. Dessa forma o perímetro do retângulo abaixo é:



Questão 8 - Para uma sessão de cinema, foram vendidas uma quantidade x de ingressos para adultos e uma quantidade y de ingressos para crianças.
a) Que expressão algébrica, representa o total arrecadado para a sessão?
b) Quantos reais foram arrecadados na sessão, se x = 200 e y = 150

Questão 9 - A quantidade de água (V), em litros, que uma bomba pode elevar é dada pela expressão V= 10. t + 10, onde t é o tempo em minutos. Quantos litros essa bomba terá colocado na caixa d'agua depois de:

a) 5 minutos de funcionamento.
b) 20 hora de funcionamento.

Questão 10 - Hélio trabalha como funcionário de uma loja e recebe R$880,00 todo mês mais R$10,00 por cada produto vendido. Se utilizarmos x para representar a quantidade de produtos que ele vendeu, responda:

a) Qual a função que representa o seu salário?
b) Para receber R$2.000,00 de salário em um mês quantos produtos ele deverá vender?

APÊNDICE D - OFICINA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS

Conjuntos

Questão 1 - Descreva cada um dos conjuntos numéricos abaixo e em seguida represente-os em diagrama:

a) Conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N}$ = { ________________________________}

b) Conjunto dos Números Inteiros: $\mathbb{Z}$ = { ________________________________}

c) Conjunto dos Números Racionais: $\mathbb{Q}$ = { ________________________________}

d) Conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$ = { ________________________________}

e) Conjunto dos Números Irracionais: I = { ________________________________}

Questão 2 - Represente as relações que o conjunto dos reais mantém com os demais por meio de diagrama.

____

Questão 3 - (Ueg – 2015) Se colocarmos os números reais $-\sqrt{5}$, 1, $-$ 3/5 e 3/8 em ordem decrescente, teremos a sequência:

a) 3/8 , 1, $-$ 3/5 , $-\sqrt{5}$

b) 3/8 , 1, $-\sqrt{5}$, $-$ 3/5

c) 1, 3/8 , $-$ 3/5 , $-\sqrt{5}$

d) 1, 3/8 , $-\sqrt{5}$, $-$ 3/5

Questão 4 - (Ifce – 2014) Considere os seguintes números reais 23/24, 7/8, 47/48, 1, 11/12, 4/3, 11/8. Colocando-se esses números em ordem crescente, o menor e o maior deles são, respectivamente:

a) 23/24 ? 1

b) 11/12 ? 4/3

c) 7/8 ? 4/3

d) 7/8 ? 11/8

e) 47/48 ? 4/3

Questão 5 - (Enem – 2015) Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de:

a) 2,099

b) 2,96

c) 3,021

d) 3,07

e) 3,10

Sequência Numérica

Questão 6 - Dados os conjuntos a seguir, descritos em linguagem cotidiana, encontre, em cada caso, seus elementos e traduza a descrição dada para a linguagem matemática.

a) O conjunto A é formado por números pares.

____

b) O conjunto B é formado por números ímpares maior que 5 e menores que 20.

____

c) O conjunto C é formado por números inteiros maiores ou iguais a –2 e menores do que 7.

____

O conjunto D é formado por números primos.

____

Questão 7 - Descreva qual a lei de ocorrência da sequência numérica e classifique-a quanto ao seu comportamento se finita ou infinita:

a) (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)

____

b) (-1, - 2, - 3, - 4, - 5, - 6, -7 ...)

____

c) (0, 3, 6, 9, 12, 15)

____

d) (2, 3, 5, 7, 11)

____

Questão 8 - A seguir, são apresentadas três sequências numéricas infinitas. Observando cada uma delas, responda:

a) Qual é o 30º termo nesta sequência: 1, 1, 1, 1, 1, ...?

____

b) Qual é o 33º termo nesta sequência: 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, ...?

____

c) Qual é o 25º termo nesta sequência: 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, ...?

____

Questão 9 - Em uma sequência numérica, o primeiro termo é igual a 2, e os seguintes são obtidos pelo acréscimo de três unidades ao termo imediatamente anterior. Sendo assim, responda:

a) quais são os cinco primeiros termos? ___________________________________

b) qual é o termo a_{10}?____

c) qual é o termo a_{20}?____

d) como se pode determinar um termo qualquer a_n dessa sequência? ___________

Questão 10 - Enem 2011 – O número mensal de passageiros de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38000

b) 40500

c) 41000

d) 42000

e) 48000

Função Afim

Questão 11 - Considere a função f(x) = -2x + 1. Os valores de f(0), f(2), f(-1) e f(5), são, respectivamente:

a) 1, -3, 3, -9

b) -1, 3, -3, -9

c) 1, 5, 3, 11

d) -1, -5, -3, -11

e) 1, 2, 1, 5

Questão 12 - (Enem Digital 2020) Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12.800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos. Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26

b) 46

c) 109

d) 114

e) 115

Questão 13 - (Enem Digital 2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 23 out. 2022 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

a) $L(x) = 50x – 1\ 200$

b) $L(x) = 50x – 12\ 000$

c) $L(x) = 50x + 12\ 000$

d) $L(x) = 500x - 1\,200$

e) $L(x) = 1\,200x - 500$

Questão 14 - (Cefet - MG - 2015) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado (R) num dia é função da quantidade total (x) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $R(x) = ax + b$, em que a é o preço cobrado por quilômetro e b, a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de

a) 14

b) 16

c) 18

d) 20

Questão 15 - Sabe-se que o preço de venda de um livro é de R$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R$ 4,00 mais R$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de x livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br