PRODUTO EDUCACIONAL

Ensino de Progressão Aritmética Por Meio de Sequência Didática

ERNANI SOEIRO DA COSTA
MIGUEL CHAQUIAM

Belém – Pa
2023

Ernani Soeiro da Costa
Miguel Chaquiam

Ensino de Progressão Aritmética por Meio de Sequência Didática

Produto educacional apresentado ao comitê de avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Belém - Pa
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Costa, Ernani Soeiro da

Ensino de progressão aritmética por meio de sequência didática / Ernani Soeiro da Costa, Miguel Chaquiam.- Belém, 2023.

ISBN:

Produto educacional vinculado à dissertação “Ensino de progressão aritmética por meio de sequência didática” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. - Belém, 2023.

1.Aritmética-Estudo e ensino. 2.Matemática-Estudo e ensino. 3.Sequência didática. I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD 513 23º ed.

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA".**

Mestrando: **ERNANI SOEIRO DA COSTA**

Data da avaliação: **27/10/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ____________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ____________________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ____________________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* ( ) Sim ( ) Não (X) Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(x) Sim, onde: Escola de Ensino Médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(x) Sim, onde: Instituições de Ensino Médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(x) Sim, onde: Escola de Ensino Médio da Capital.

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

(x) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

( ) outro:

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

(x) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como

( ) outros membros da comunidade, tais como

O produto educacional foi considerado:

(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: IFPA

APRESENTAÇÃO

Temos nos deparado com a preocupação constante em relação a melhoria no aprendizado dos alunos, principalmente na Educação Básica, essa inquietação é um dos principais incentivadores de vários estudos na área educacional[1] e amplamente discutida nos documentos oficiais. Por trás dessa situação existem causas diversas, desde a falta de conexão de conteúdos com interesse dos alunos e aprendizagem por descoberta, a predominância de práticas pedagógicas que não incluem a perspectiva de grupos historicamente excluídos. Assim sendo, dificultando ainda mais para que haja um processo sólido de aprendizagem e continuidade nos estudos.

Sobre o ensino e a aprendizagem dos alunos temos que, uma das finalidades da educação básica segundo o artigo 22 da Lei de Diretrizes e Base (LDB) é, “desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) auxiliam o professor na tarefa de reflexão e discussão de aspectos do cotidiano da prática pedagógica. Assim, encontramos a importância do objeto matemático e uma orientação clara desse documento com relação ao estudo de séries e sequências[2].

Assim sendo, no estudo de progressão aritmética é possível estabelecer a relação com o cotidiano do aluno, assim também, envolver o aluno no processo de ensino e aprendizagem de modo que, ele possa observar e explorar regularidades em padrões numéricos, desenvolver ideias que são essenciais para desenvolvimento da ciência na atualidade.

Admitindo que este produto educacional poderá colaborar nos debates que auxiliam o ensino e a aprendizagem, este estudo vem mostrar uma abordagem dos conceitos presentes em Progressão Aritmética por meio da Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual segundo Cabral (2017). Assim sendo, uma “nova” abordagem para tratar velhos problemas na aprendizagem de Progressão Aritmética (PA).

---

[1] D’AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

[2] Com relação a abordagem das sequências. BRASIL, 1998, p. 118.

Dessa forma, por acreditar, que a abordagem por meio de sequência didática poderá proporcionar aos alunos do Ensino Médio incentivo e condições de aprendizagem em PA. Elaboramos um produto educacional vinculado a uma sequência didática para o ensino de Progressão Aritmética gerado a partir do desdobramento da dissertação de mestrado associada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do estado do Pará (UEPA).

Este produto é destinado a professores e alunos do Ensino Médio para o ensino e aprendizagem de Progressão Aritmética no âmbito escolar. Trata-se de um recurso didático que foi submetido a Análise Microgenética de Goes (2000) e Análise do Discurso de Montiman e Scott (2002) cuja SD mostrou desempenho satisfatório para o ensino de progressão aritmética.

Ernani Soeiro da Costa
Miguel Chaquiam

1 – APOSTES TEÓRICOS E METODOLÓGICO

Antes de tudo, destacamos a resposta dos autores quando nos perguntamos por que precisamos de teorias:

> Teorias são úteis porque direcionam a atenção dos pesquisadores para relações particulares, fornecendo significado para os fenômenos estudados, avaliam a relativa importância da questão de pesquisa, e as descobertas de estudos individuais dentro de um contexto mais amplo. Teorias sugerem para onde olhar quando formular as próximas questões de pesquisa e fornecem um esquema organizacional, ou uma linha histórica, dentro da qual se acumulam e ajustam-se conjuntos individuais de resultados. (SILVER & HERBST, 2007. HIEBERT & GROUWS, 2007, apud SRIRAMAN E ENGLISH, 2010, p. 24, tradução ALMOULOUD, 2017).

Assim, neste capítulo, abordaremos não só a Educação Matemática, por discutir que a didática matemática promove em níveis teóricos e experimentais a prática docente, como também, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1996) por defender que o objetivo principal de estudo não é a cognição do aluno, mas a situação didática, na qual são potencializadas as interações da tríade aluno–saber–professor.

Além disso, consideramos a Sequência Didática idealizada por Zabala (1999) por admitir ser um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas que compõe uma unidade temática. E as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), não só por ser fundamentada e constituída por intervenções que servem ao propósito da teoria da situação didática, mais também, por ter sido o modelo estruturante destinado a elaboração da sequência didática.

1.1. SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Por considerar que a Educação Matemática (EM) vem contribuindo para aprofundar conhecimentos e práticas que envolvam a formação humana nas suas relações com o conhecimento matemático, razão pela qual a narrativa desse tópico traz fundamentos sobre a origem da Didática da Matemática enquanto campo científico, e um outro olhar, nos fundamentos teóricos que promove em níveis teórico e experimental a prática docente e que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Situações Didática (TSD).

Além do que, o objeto da Didática é a compreensão do processo de aprendizagem na sua totalidade. Ela se interessa pelas relações existentes entre o professor, o aluno e o conhecimento a ser ensinado, o que caracteriza o triângulo didático (Brousseau 1990, 1998) fios condutores por onde se desloca esse trabalho.

Desse modo, a partir da década de 50, a Unesco organiza congressos sobre educação matemática, também chamada de didática matemática em países europeus[3]. E a partir da década de 70 surge, inicialmente na França, a Didática da Matemática enquanto campo de estudos para sistematizar o ensino da matemática. Alguns teóricos que contribuíram com os estudos nesse campo, são Gastão Bachelard (Obstáculos Epistemológicos), Yves Chevallard (Transposição Didática), Gérard Vergnaud (Teoria dos Campos Conceituais), Guy Brosseau (Teoria das Situações Didáticas).

Os estudiosos dessa área, didática da matemática[4], reconhecem que não poderia haver um campo de estudo único que atendesse as especificidades de cada campo de conhecimento, razão pela qual, defendiam que cada área de ensino deveria pensar em sua própria didática. Nessa perspectiva, segundo Pais (2001), a Didática da Matemática "é uma tendência da educação matemática", cujo objetivo de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade do saber matemático.

Dessa forma, pode se dizer que, a Didática da Matemática é a ciência que pode auxiliar e promover a prática docente, tanto no nível teórico como na prática experimental. Corroborando com a ideia, D'Amore (2007)[5] sinaliza duas maneiras de vislumbrar a didática: a primeira interpretação é como divulgador de ideias, concentrando a atenção na fase do ensino, onde o professor é um especialista em didática e o centro da atenção é o conteúdo.

---

[3] NISS, Moggens. Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics Volume 40, Number 1. Springer Netherlands, setembro de 1999. p.1 e 2

[4] Para Brousseau (1996), a Didática da Matemática estuda as atividades didáticas que tem como objetivo o ensino naquilo que tem de específico dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos (referência a Piaget), além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

[5] D"Amore (2007) complementa como objetivo da Didática da Matemática "a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito" (D'Amore, 2007,p.3).

A segunda interpretação, é como pesquisa empírica, concentrando sua atenção na aprendizagem, mas do ponto de vista dos fundamentos não aceitando um modelo único de teoria de aprendizagem. Nessa perspectiva, a Didática faz parte da ciência pedagógica sendo responsável por estudar os processos de ensino e aprendizagem.

Nesse sentindo, para trazer luz e compreensão de fenômenos complexos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de objetos matemáticos no campo de estudo da didática da matemática, e que estão inseridos implicitamente ou explicitamente neste trabalho, discorre o que segue:

Sobre o *obstáculo epistemológico* sabe-se que se trata da resistência oferecida por conceitos considerados verdadeiros em um determinado período, e que, dificultam a formação de um novo saber no processo de ensino e aprendizagem. Ademais, a transposição didática permite uma visão panorâmica das transformações no qual o saber matemático é submetido, que vai desde sua gênese acadêmica, passando pelas ideias dos autores de livros, por especialistas em educação, responsáveis pela política educacional (documentos oficiais), pelas interpretações do professor, até chegar ao espaço conflituoso da sala de aula e, daí, para o nível intelectual do aluno.

De outro lado, tem-se a *teoria dos campos conceituais* está em sintonia com o problema do significado do saber escolar visando a realização dos valores educacionais da matemática. É preciso destacar que, a teoria dos campos conceituais supõe que o âmago do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização (1996a, p. 118). É ela a pedra angular da cognição (1998, p. 173). Logo, deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os alunos desenvolvem seus esquemas, na escola ou fora dela (1994, p. 58).

Esse produto educacional, será baseado na *Teoria das Situações Didáticas* que trata das formas de apresentação de determinado conteúdo matemático, ou parte dele, para os alunos, “sempre” que houver uma intenção clara do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem, por meio de uma sequência didática planejada.

A discussão, não exaustiva a respeito da Didática da Matemática encontra reforço na resenha do livro de Bruno D’Amore (2007) apud Almouloud (2008) a "Didática da Matemática como epistemologia da aprendizagem matemática", D’Amore (2007) adota a didática da disciplina com sendo a epistemologia da aprendizagem, em outros termos, a pesquisa empírica, fixando a atenção na fase de aprendizagem.

Neste âmbito, segundo D'Amore (2007) citado por Almouloud (2008), algumas das problemáticas que parecem emergir nos últimos anos, como o da pesquisa em curso, que trata do ensino e aprendizagem, e que se constitui como elementos de investigação, e que parecem "proporcionar sustentação sólida e significativa para uma possível generalização, fornecendo também contribuições a uma definição de uma Didática Geral" (p. 58).

Nesse contexto, D'Amore (2007) apud Almouloud (2008), a epistemologia é entendida como um "ramo da Filosofia que estuda a maneira pela qual os conhecimentos científicos de certa área específica são constituídos, até mesmo para delimitar e caracterizar essa especificidade" (p. 66). Discute diferentes posições e significados de Didática da Matemática e os fundamentos teóricos associados. Motivo pelo qual abordaremos foi abordado no trabalho a Educação Matemática versos a Prática Docente.

Por considerar o planejamento um ponto chave para uma Sequência Didática na prática do professor, a narrativa deste tópico, aborda a prática do professor vista como um espaço de compreensão e transformação para a aprendizagem na educação matemática, dizendo de outra maneira, da importância da prática do professor que favorece o ensino, da elaboração do planejamento de ensino para uma "boa" prática docente, bem como, a utilização da Sequência Didática como mediadora nesse processo.

Assim, consideramos a Educação Matemática como um ponto de partida neste referencial teórico uma vez que trata de uma área de conhecimento que tem por finalidade o estudo de fenômenos relacionados a aprendizagem, realçando um dos fios condutores deste trabalho que envolve Sequência Didática de Progressão Aritmética.

É importante ressaltar, antes de tudo, que não existe uma metodologia de ensino mais competente ou melhor que outra. Partindo desse pressuposto e considerando a prática do professor, o que há na verdade são metodologias que se encaixam mais adequadamente à proposta e as necessidades de ensino em relação a uma outra.

Considerando essa premissa, é possível dizer que a escolha de uma metodologia precisa ser coerente para que não resulte em problemas futuro de aprendizagem.

Assim, consideramos que uma Sequências Didáticas afiance a prática docente conferindo sentindo às intencionalidades. Contudo, vale salientar que as Sequências Didáticas propostas neste trabalho, não tem a pretensão de serem “receitas” como prática pedagógica; entretanto, nelas são explorados ideias e conceitos considerados importantes para que o estudante lhes atribua sentido.

1.2. SOBRE A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Como consideração pertinente para este produto educacional (Teoria das Situações Didáticas), é necessário voltar às origens, de modo que a narrativa desse tópico aborda fundamentos, da implementação, das discussões, dos movimentos e da visão dominante que antecederam a teoria das Situações Didáticas.

Assim, destacamos a implementada na França aconteceu no final da década de 60 do séc. XX, surgiu em meio a estudos desenvolvidos no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática, em contraposição aos trabalhos formalistas durante o movimento da Matemática Moderna. Na época, o Investigação do Ensino de Matemática desenvolvia uma complementação na formação de professores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula.

Vale ressaltar que, um alvo das discussões no âmbito da Investigação do Ensino de Matemática se concentrava para a “[...] produção de conhecimento para controlar e produzir [...] ações sobre o ensino” (GÁLVEZ, 1996, p. 26), promovendo assim o surgimento da Teoria da Situação Didática, aceita por pesquisadores da corrente da Didática da Matemática francesa, que a adotaram como objeto de estudo para as situações didáticas, proposta por Brousseau (1996).

Nesse contexto, a visão dominante no campo da Educação era fundamentalmente cognitiva, sobretudo, devido aos estudos de Piaget (1976) e colaboradores. Dentro da concepção Piagetiana, os estudos desenvolvidos evidenciaram: 1) o papel central da ação no desenvolvimento; 2) a originalidade do pensamento matemático e 3) as etapas de seu desenvolvimento nas crianças.

Porém, é preciso destacar que para Vernaud (1981), Piaget não levou em conta de quanto o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas necessárias para lidar com elas. Segundo Vergnaud (1994), Piaget também não percebeu o infrutífero que é tentar reduzir a complexidade conceitual, progressivamente dominada pelas crianças, a algum tipo de complexidade lógica geral. Por outro lado, Vergnaud (1994) ressalta a importância da teoria de Piaget, destacando as ideias de adaptação, desequilibração e reequilibração como pedras angulares para a investigação em didática das Ciências e da Matemática.

Em consonância, Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau é denominada de construtivismo didático por ser uma proposta alternativa dentro da Psicologia Cognitiva que se baseou em alguns conceitos do construtivismo piagetiano como desequilíbrio, adaptação e acomodação, mas rejeita a ideia das fases de desenvolvimento infantil.

> Inicialmente, é muito importante entender que a teoria é uma abordagem sistêmica com foco na relação didática; não no professor, não no aluno, nem no próprio conteúdo de matemática, mas nos três ao mesmo tempo, o famoso triângulo didático. (PERRIN-GLORIAN, 2020, p. 17)

Assim, a narrativa que segue apresenta as principais ideias da Teoria das Situações Didáticas como subsídio para o processo de ensino e aprendizagem e, como parte complementar da sistematização metodológica considerando sequências didáticas como mecanismo de ensino, induzindo a considerar a relação que existe entre a teoria e a prática, isto porque, o professor e o aluno firmam um contrato didático, pelo qual o aluno se compromete, tendo o professor como mediador, a se apropriar de saberes que o professor propõe ao aluno na execução das atividades propostas na sequência didática, alvo e fio condutor deste trabalho.

Vale destacar que na década de 70, as situações didáticas serviam para ensinar um conhecimento sem que fosse levado em conta o papel do professor. Assim, no início da década de 70 do século XX, na Universidade de Bordeaux (França), Brousseau desenvolveu uma pesquisa científica objetivando analisar, e eventualmente criticar, modelos das situações didáticas usadas no ensino da Matemática sugerindo a construção de outras mais adequadas.

No Brasil, as obras de Brousseau passaram a ser conhecidas nos anos 90. Brousseau baseou seus estudos não apenas em teorias, como as de Piaget e Bachelard, mas também na observação e análise de sua prática docente para propor a Teoria das Situações Didática (TSD)[6]. É preciso destacar que a TSD é uma teoria de aprendizagem desenvolvida por Brousseau (1986) em contraposição aos trabalhos formalistas característicos da Matemática Moderna.

Considerando a TSD de Brousseau (1986), podemos conceituar situações didáticas como um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema didático com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou uma via de constituição.

Nesse contexto, vale ressaltar que o professor e o aluno firmam um contrato didático[7], pelo qual o aluno se compromete, a se apropriar de saberes que o professor propõe ao aluno na execução das atividades propostas na sequência didática. De acordo com Brousseau (1986), um sistema didático é baseado na interação entre o professor, o aluno e o saber em um meio denominado "*milieu*[8]". O conjunto das múltiplas relações entre esses três elementos – professor – aluno – saber – descreve uma situação didática. Que para Brousseau (1986).

> Uma situação é caracterizada em uma instituição por um conjunto de relações e de papéis recíprocos de um ou vários sujeitos (aluno, professor, etc.) com um meio, visando à transformação deste meio segundo um projeto. O meio é constituído por objetos (físicos, culturais, sociais, humanos) comos quais o sujeito interage em uma situação. (BROUSSEAU, 1998, p.2)

Considerando esse prospecto, é possível que na dinâmica de sala de aula, haja momentos em que só dois desses elementos se relacionam, essas situações, no entanto, não serão denominadas de situações didática. O fim de uma situação didática

[6] As principais construções desta teoria foram desenvolvidas na tese de doutorado: La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques", de 1986: situação didática, situação a-didática, contrato didático, devolução e milieu (antagonista e aliado).
[7] Brousseau define contrato didático como "o conjunto de comportamentos específicos do professor esperados pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperados pelo professor" (Brousseau, 1986).
[8] Brousseau utiliza o termo *Milieu* para referir-se ao meio (ambiente ou entorno) que interage com o aluno. Esse meio produz incertezas, contradições, atitudes e emoções que levam à aprendizagem

corresponde a possibilidade de interação livre do aluno com o meio não didático e que iremos chamar de situações adidáticas. Nesse sentido segundo Brousseau (2008).

> Um “meio adidático” é a imagem na relação didática do meio exterior ao ensino em si, ou seja, desprovido de intenções e pressupostos didáticos. Esse meio é denominado adidático, pois considera o funcionamento normal dos conhecimentos, fora das condições didáticas (aquelas em que alguém decidiu pelo aluno que saber ele deveria aprender). (BROUSSEAU, 2008, p. 89)

Nessa perspectiva segundo Brousseau (1986), a aprendizagem ocorre quando o sistema didático sofre um desiquilíbrio, ou seja, uma mudança, um novo problema que exige novos conhecimentos. Vale ressaltar que é pelo meio (*Milieu*) que se pode provocar ações para desestabilizar o sistema didático.

Brousseau (2008) discorre sobre a situação didática no livro “Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino”, neste livro encontraremos alguns questionamentos tais como: Quais são os conhecimentos matemáticos “necessários” para a educação e a sociedade e como realizar a sua difusão? A “transmissão” dos conhecimentos matemáticos depende das ciências da educação, da psicologia ou da própria matemática? Que lugar os conhecimentos de didática da matemática ocupam nessa difusão? Quais instituições podem garantir a coerência e a pertinência desses conhecimentos? Nesse âmbito, a TSD ambiciona responder a essas e outras perguntas.

A esse respeito, Saddo (2008) diz que “os estudos de fenômenos de ensino e aprendizagem trouxe à tona a necessidade de desenvolver modelos teóricos que pudessem caracterizar os conhecimentos e saberes”. Dessa forma, A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Brousseau (1986), teve sua origem durante o Movimento da Matemática Moderna.

Para Brousseau (2008) o objetivo dessa teoria é de promover a reflexão sobre as relações entre os conteúdos do ensino e os métodos educacionais, assim como, abordar a didática como campo de investigação. Razão pela qual, para Brousseau (2008), o ensino é concebido a partir de relações entre o sistema educacional e o aluno, vinculado à promoção de determinado conhecimento.

Nessa perspectiva, Brousseau (2018) coloca como pressuposto a aproximação do trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador, como no sentindo da busca pela solução, pela formulação de hipóteses, abonando, arquitetando modelos, conceitos, teorias e socializando os resultados. Nesse sentindo, segundo Brousseau (1986a) é necessário criar uma situação didática que favoreça o ensino e aprendizagem.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos. (BROUSSEAU, 1986a, p. 8)

Nesse sentindo de acordo com Brousseau (1968), é necessário que o professor providencie situações favoráveis para que o aluno, agindo sobre o saber, construa o seu próprio conhecimento. A esse respeito, Margolinas (1993) apud Brito Menezes (2006) afirma que a relação entre professor e aluno com o saber, revela-se assimétrica, espera-se que a prática docente proporcione uma evolução do aluno frente ao saber.

Para Brousseau (1996b), essa evolução é possível quando o professor propõe situações adequadas para aprendizagem. Corroborando com as ideias dos autores citados, Oliveira (2013), sinaliza que essa ferramenta pedagógica é "...um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade".

Dessa forma, Brousseau (1996a) em seu livro intitulado a "Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino", ressalta a importância da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno. A esse respeito segundo Zaballa (1998) uma Sequência Didática por se tratar de "Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Considerando esse contexto, o aluno sabe que o problema tem fins didáticos e deve saber que o novo conhecimento se justifica pela lógica interna da situação didática.

Diz-se que uma situação é didática quando predomina o controle do professor sobre a atividade. Em contradição, a situação adidática ocorre quando o aluno trabalha sem a intervenção do professor, ou seja, de forma livre e autônoma. Vale ressaltar que, nesse caso, apesar da intencionalidade didática do professor sobre a tarefa, sua interferência direta na aprendizagem não ocorre.

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (BROUSSEAU, apud PAIS 2002, p.68)

Segundo Almouloud (2007), a situação adidática é a parte essencial da situação didática, onde a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas é imaginada, planejada e construída pelo professores com finalidade de proporcionar ao aluno condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar.

Nessa perspectiva, a narrativa desta vez está organizada a partir de disposições diversas que emergem da relação entre os polos do Triângulo Didático da Teoria da Situação Didática, proposta por Guy Brousseau (1996) como hipótese de ensino e aprendizagem. Nesse âmbito, discutiremos os esquemas, o meio, as formas de apresentação e interações de um determinado conteúdo matemático – ou parte dele – para os alunos, através de uma sequência didática planejada.

> O professor continua necessário na criação de situações e de idealizar projetos iniciais que introduzam problemas significativos à criança. O que se deseja é que o professor deixe de ser um transmissor de soluções prontas e exerça o seu papel de um mentor, estimulando a iniciativa à autonomia da pesquisa (PIAGET, 1973, p. 16, tradução nossa).

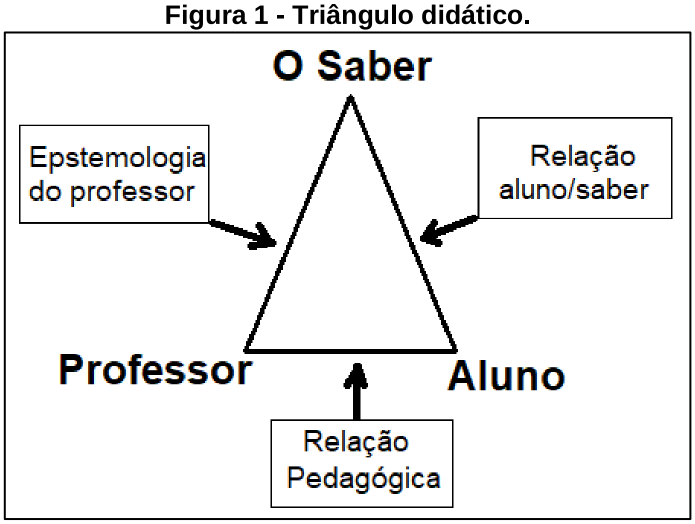
Assim, para Brousseau (1996a), situação didática é o modelo, que através da prática docente, possibilita a interação do aluno com o meio específico “milieu” que determina apreensão de certo conhecimento, é também um recurso que o aluno dispõe para alcançar ou conservar um estado favorável de compreensão. Em oposição a este conceito, na década de 70, as situações didáticas serviam para ensinar um conhecimento sem que fosse levado em conta o papel do professor. Contrapondo-se a esse pensamento, a situação didática para Brousseau (1996a), é utilizada para descrever os modelos que delineiam as atividades do professor e do aluno.

Dito de outra forma, a situação didática é todo contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional. Nessa perspectiva, a situação é criada para ensinar um conhecimento ou controlar a sua aquisição e, o seu desenvolvimento pode produzir um efeito de ensino. Dessa forma, a aprendizagem é alcançada pela adaptação do aluno, que assimila o meio criado intencionalmente por essa situação didática.

No contexto da situação didática, o espaço da sala de aula é caracterizado de acordo com a Teoria das Situações Didáticas pela tríade professor, aluno e o saber. Esses três elementos são os componentes principais de um sistema didático. Desse modo, a relação dessa tríade (professor-aluno-saber) constitui uma relação triangular, que é denominada por Brousseau (1996) como Triângulo das Situações Didáticas.

Assim sendo, Pommer (2013) lembra que para modelar a Teoria das Sequências Didáticas, Brousseau (1996a, b) propõe o triângulo didático (figura 1), composto por três elementos fundamentais para que a situação didática ocorra - o aluno, o professor e o saber. Esses elementos constituem uma relação dinâmica e complexa que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber (elemento não-humano), que determina a forma como tais relações irão se desenvolver como mostra a figura abaixo.

Figura 1 - Triângulo didático.



Fonte: Brousseau (1996a).

Nesse âmbito, segundo Brousseau (1996a), a Teoria da Situação Didática está associada a quatro situações didáticas fundamentais para desenvolvimento da situação didática proposta: sendo i) situação de ação, ii) situação de formulação, iii) situação de validação e iiii) situação de Institucionalização, as quais podem ser:

i) *Situação de ação* é a fase em que os alunos analisam a situação didática proposta, elaboram suas estratégias para a resolução do problema, tomam suas decisões e ao fim de suas tentativas de resolução, observam o resultado obtido. Nesse percurso da atividade proposta, desenvolve novas estratégias e tomam novas decisões (algumas intuitivas), até que o aluno seja capaz de formular uma tática, justificá-la e, finalmente, tirar suas próprias conclusões. A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual espera-se que o aluno aprenda um método de resolução de problema.

ii) *Situação de formulação* entende-se que a formulação de um conhecimento corresponde a capacidade alcançada pelo aluno de retomar e ressignificar todo o processo de resolução elaborado por ele. Nesse sentido, a formulação deve envolver a comunicação entre alunos, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. Para determinar o objeto do conhecimento da comunicação, é necessário que ambos os interlocutores (alunos) cooperem no controle de um meio externo a fim de obter a formulação dos conhecimentos proposto. Este processo de comunicação é dividido em dois momentos: 1) a do representante da equipe e 2) o debate da equipe.

iii) *Situação de validação* nessa fase, a situação de validação permite distinguir um novo tipo de formulação: os componentes da equipe (alunos) discutem entre si o desafio proposto. Nessa perspectiva, um emissor (aluno) já não é um informante, mas um proponente, e o receptor (aluno), um oponente. Os dois colaboram na busca da verdade, e se esforção para vincular um conhecimento a um campo de saberes já consolidados. Durante esse processo de validação cada qual pode se posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, solicitar uma demonstração ou exigir que o outro exponha suas ideias para o componente da equipe.

iv) *Institucionalização* nas fases anteriores a institucionalização, o professor procura não intervir diretamente durante o processo, limitando-se a orientações quando julgar necessário, para evitar possíveis bloqueios. O professor reassume a ação, estabelecendo quais conhecimentos obtidos nas etapas anteriores são relevantes e quais são descartáveis, configurando o estatuto de objeto aos conhecimentos obtidos.

Brousseau (1996a) ressalta a importância dessa fase da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno. Segundo o autor, a origem de um conhecimento pode ser fruto de uma sucessão de novas perguntas e respostas. As sucessões de situações que antecede a institucionalização, ação, formulação e validação podem conjugar-se para acelerar as aprendizagens. Nesse sentindo, acrescentando a institucionalização teremos uma ordem para a construção de novos saberes.

Nessa perspectiva, a narrativa da vez e a Sequência Didática como perspectiva de produção de conhecimento e como proposta para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula da pesquisa em curso. Sabe-se que a Sequência Didática (SD), é amplamente difundida e utilizada pelos pesquisadores da Didática da Matemática francesa. Nessa perspectiva, do ponto de vista da investigação de ensino de matemática conforme Souza (2016) apud Douady (1995**)** é evidente a necessidade de se fazer uma aproximação científica aos problemas gerados pelo saber matemáticos que emergem da relação entre o ensino e aprendizagem, dessa forma, a aproximação deveria considerar a aula em sua globalidade, como objeto de estudo.

Para Guy Brosseau (1998). O objetivo central de estudo é a relação pedagógica professor, aluno e saber. Nesse sentido, "os objetivos educacionais são uma exigência indispensável para o trabalho docente, requerendo um posicionamento ativo do professor em sua explicitação, seja no planejamento escolar, seja no desenvolvimento das aulas" (LIBÂNEO, 2013, p. 134). Em concordância, Zabala (1998) salienta que os objetivos são pontos de partida da prática educativa, é através deles que o professor pode encaminhar o ensino tendo como foco a aprendizagem dos alunos.

1.2.1. O milieu

A narrativa da vez lança um olhar para o milieu[9] e a situação adidática como dinâmica, diretriz, estratégias que auxiliam o aluno na resolução de problemas e na promoção da interação independente e autônoma. Sobre o desempenho do aluno, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008), revela a importância do funcionamento do meio. Nesse sentindo, considera que o meio que deve ser modelado, ou seja, um meio que seja ao mesmo tempo autônomo e antagônico ao aluno.

Diz-se autônomo porque o aluno nesse contexto de ensino e aprendizagem deve se conduzir a partir das situações didática elaborada intencionalmente pelo professor. E

---

[9] A partir de agora, a não ser em títulos e gráficos, usarei o itálico para o termo *milieu*.

antagônico porque deve haver certo equilíbrio entre o que se propõe na situação didática e a capacidade de o aluno se valer dos seus construtos para solucionar o desafio que está sendo proposto.

Nesse sentindo, a atividade proposta intencionalmente deve ser dosada de tal forma que; i) não deve ser difícil a ponto de o aluno não conseguir avançar, ii) não deve ser fácil a ponto de o aluno não se sentir motivado. Como já foi dito, Brousseau (1996) denominou este meio de *milieu*, para o autor, o meio deve ser planejado e organizado pelo professor para que a aprendizagem ocorra em uma interação baseada em desequilíbrios, assimilações e acomodações conforme propôs Piaget (1976; 1990).

Assim, segundo Brousseau (1996a), o *milieu* deve possibilitar a interação independente e autônoma do aluno em relação às situações propostas sem ajuda do professor. Desse modo, o *milieu*, em uma situação didática, deve ser planejado a partir de uma situação adidática. Dentro desse processo de construção, Silva (2008) lembra que, para Brousseau, o planejamento de uma situação didática requer momentos em que o aluno se encontre sozinho diante do problema a resolver, sem a intervenção do professor.

Para Silva (2008), as situações didáticas e adidáticas coexistem de forma harmônica, sem que uma altere a outra, mas uma complementando a outra. É preciso ressaltar que nesse contexto, o professor não deve intervir diretamente nas opções de solução para o problema proposto, pelo contrário, deve permitir e induzir que o aluno construa a solução de forma autônoma.

Vale destacar que as situações adidáticas constituem o momento de grande potencialidade justamente por poder vir a romper as condenáveis práticas da repetição sistematicamente vivenciadas em salas de aulas. Nessa estrutura, segundo Brousseau (1996a), a situação mais adequada para a aprendizagem ocorre quando o *milieu* oferece resistência dosada ao aluno, sendo denominado de *milieu* antagonista[10].

Dessa forma, se a distância entre os conhecimentos anteriores dos alunos e os novos conhecimentos for grande, o *milieu* será ineficaz. Isto porque, na perspectiva de

[10] Segundo Amouloud (2007), na TSD, o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão ao respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (AMOULOUD, 2007, p. 35).

diminuir a distância, o professor tende a exagerar em seu auxílio ao aluno, e a função antagonista do *milieu* desaparecerá, e se instalará um *milieu* inadequado, prejudicando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

É preciso destacar que, um *milieu* dito adequado é aquele em que a distância entre o conhecimento almejado e o anterior seja alcançável, pelo menos em parte, pelo próprio esforço do aluno, pois ele assume o papel de sujeito-pesquisador. Dessa forma, a narrativa que segue, pretende ampliar o debate da produção do ensino ideal à análise das situações comuns em sala de aula.

Nessa perspectiva, é indispensável lança o olhar sobre a noção de *milieu* como conceito fundamental na teoria das situações didáticas, que valoriza não somente os conhecimentos mobilizados pelo aluno e o seu envolvimento na construção do saber matemático, mas também o trabalho do professor fio condutor que desenvolve todo o processo de ensino.

Segundo Perrin-Glorian (2007), o aprimoramento da teoria a torna mais adequada para endereçar questões cada vez mais ligadas ao “verdadeiro” trabalho do professor em relação ao conhecimento matemático e à aprendizagem do aluno. Para explicar essa afirmação, a autora parte da sua própria perspectiva, alguns aspectos desse conceito, elucidado pela observação histórica e formação epistemológica.

Nessa perspectiva, encontramos diversos autores que debatem de forma ampla sobre essa temática. Entre esses autores destacamos a ideia e contribuições Almouloud (2007), Margolinas (2002) e Petráskova e Hasek (2012), Berthelot & Salin (1998) bem como as teorias de Brousseau, Marie-Jeanne e Perrin-Glorian (2020).

1.3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E SUA ESTRUTURAÇÃO

Uma Sequência Didática (SD) permite a organização metodologica sequencial da execução das atividades. Elas auxiliam a melhorar a educação e a interação do professor e aluno, e deste com os demais colegas. Para Zabala (1998, p. 18), define SD como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm início e fim conhecidos pelos professores e pelos alunos".

Para que uma SD tenha sucesso em sua aplicação, é de suma importância o seu planejamento, considerando fases iniciais, os critérios de cada etapas das atividades, o tempo de aplicação, organização e a avaliação do aprendizado da turma, é importante também considerarmos intervenções planejadas em cada etapa da aplicação da SD. Assim, para a aplicação de uma SD faz-se necessário pensarmos em algumas fases primordiais, tais fases, são concebidas no estudo de Cabral (2017).

> Em termos de modelo estrutural de acordo com a concepção da Escola de Genebra para (DOLZ; NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, P.98) esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final. (CABRAL, 2017, p.33).

Assim sendo, apresenta-se a estrutura da Sequência Didática para o Ensino de Progressão Aritmética baseada no modelo proposto por Cabral (2017) cuja obra intitulada Sequências Didáticas: Estrutura e elaboração que tem o objetivo de ensinar conteúdos curriculares da disciplina Matemática no ensino Médio e no ensino Fundamental. Segundo o autor, a estrutura da sequência didática da qual estamos falando é composta por Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), onde cada uma trata de um ou mais tópicos relacionados ao tema em questão.

Para o autor a primeira dessas unidades de "unidade articulável de reconstrução conceitual de primeira geração" - UARC-1. Segundo Cabral (2017), esse é um ponto de partida que não "necessita ser exatamente um problema". No entanto, a primeira escolha deve ser consciente e profissional, de modo que o aluno perceba e explore regularidades, e consiga estabelecer generalizações a partir das intervenções. Dessa forma a primeira das UARC's não é, e não pode ser uma escolha aleatória. Segundo Cabral (2017) essa escolha depende de vários fatores[11].

A elaboração da próxima Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual denominada UARC-2 deve estar condicionada a primeira escolha, ou melhor, a UARC-1. Segundo Cabral (2017), "o mesmo critério é adotado para a definição das demais

---

[11] Para Cabral (2017), esta primeira escolha depende de uma série de variáveis. O tempo disponível, a experiência didática e conceitual do professor, o conhecimento que ele tem sobre o que o que os alunos dominam sobre certos conhecimentos prévios, os objetivos de aprendizagem, etc.

UARC'S de gerações superiores". Nesse sentido, à medida que as UARC's são evocadas, o conceito a ser ensinado é "reconstruído/revestido", o que em tese, espera-se que a cada UARC requisitada, tenha-se potencializada a capacidade de reconstrução conceitual, de tal modo que, a reconstrução pretendida é atingida pelo aluno.

Cabral (2017) descreve sete categorias estruturantes no modelo das UARC'S que materializam o texto de uma Sequência Didáticas sendo seis intervenções estruturantes escritas, destas três Pré-formal; Intervenção Inicial (Ii), Intervenção Reflexiva (Ir), Intervenção Exploratória (Ie), e três intervenções escritas Formal; Intervenção Formalizante (If), Intervenção Avaliativa Restrita (IAr) e, Intervenção Avaliativa Aplicativa (IAap) e Intervenções orais a saber; Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (IOMO).

A *Intervenção Inicial (Ii)* é a primeira intervenção estruturante das Unidade Articuladas de Reconstrução Conceitual orquestrada pelo professor com propósito bem definidos do começo ao fim. É também um ponto chave para que tudo ocorra bem durante as ações, isto porque, corresponde a uma das categorias do discurso dialógico-didático que serve de "aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito" (Cabral, 2017, p. 40).

Vale ressaltar que, essa Intervenção define a natureza das outras intervenções, são ações eleitas intencionalmente pelo professor com a intenção de promover segundo os pressupostos da Psicologia Histórico-Cultural (Vygotsky) as chamadas Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Dessa forma, espera-se que o aprendiz avançar de um Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) para um Nível de Desenvolvimento Efetivo (NDE).

A *Intervenção Reflexiva (Ir)* "Aqui o aluno é estimulado/orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências", Cabral (2017). Nesse ponto, é também papel do professor estimular o aluno, nesse contexto, as ações interativas e dirigidas pelo professor se materializem através de questionamentos a um ou mais aspectos de reconstrução conceitual do objeto.

Com base em Cabral (2017), "o aluno é estimulado durante todo o tempo" das ações interativas a refletir sobre "o que está fazendo e as consequências de esse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve". Segundo o autor, "tudo passa por uma perspectiva de planejamento e de identificação, por parte do professor". Nesse ponto entendemos que no planejamento das ações interativas há um destaque para a organização dos conceitos circunscritos que de forma associada promovam e potencializam a (re)descoberta do conceito objeto de reconstrução.

A *Intervenção Exploratória (Ie)* Nesse ponto, o objetivo é aprofundar o olhar dos alunos a respeito das respostas alcançadas por cada e um e por todos a partir das Intervenções Reflexivas (Ir). Para Cabral (2017), as respostas “não serão dadas por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos”.

Nesse contexto, os alunos são convocados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e fazerem observações durante o processo. É nesse contexto segundo o autor, a utilização colaborativa das intervenções reflexivas e intervenções exploratórias – Ir e Ie – estimula o aluno à percepção de “regularidades envolvidas no processo de reconstrução conceitual”.

Nesse ponto, o autor declara que, “é justamente a percepção dessas regularidades que permitem aos alunos, ainda que intuitivamente, numa lógica fundamentalmente empírica, serem convencidos de certas verdades do saber matemático”. Vale destacar que as ações combinadas das Intervenções Reflexivas e Exploratórias, torna favorável “um cenário didático estimulante de intervenções estruturantes pré-formais” Cabral (2017).

Nesse contexto segundo o autor, a partir das generalizações empírica-intuitiva dos alunos fomentadas pelas Intervenções Estruturantes Reflexivas e Intervenções Exploratórias o professor, se apropria dessas verdades “empírico-intuitivas” sugeridas pelos alunos e, a partir delas, enuncia a Intervenção formalizante (If).

Intervenção formalizante (If) Nesse ponto, o professor reelabora as generalizações empírico-intuitivas dos alunos e, a partir das principais afirmações em torno dos objetos o professor que aplicou a sequência didática, reorganiza tais proposições de modo formal e disponibilizar a todos os alunos imprimindo o caráter disciplinar formal da Matemática.

Desse modo, as percepções dos alunos são materializadas pelo professor que aplicou a sequência didática com uma linguagem mais abstrata e adequado a natureza da matemática. Após as Intervenções Formalizantes (If) o professor pode inserir as

Intervenções Avaliativas Restritas (IAr) cuja finalidade é de se “estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução conceitual”.

Intervenções Avaliativas Restritivas (IAr) Nesse ponto, logo após as intervenções anteriores do conceito objeto de reconstrução. Segundo Cabral (2017), essa Intervenção é o primeiro parâmetro de aferição e o professor é o responsável de averiguar as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, quais sejam: qual o significado e o sentindo do objeto matemático em estudo? E como se justificam e operam as propriedades e operações decorrentes?

Intervenções Avaliativas Aplicativas (IAap) Nesse ponto, temos um nível mais elevado de avaliação do processo de reconstrução conceitual e, espera-se que o aluno seja capaz de mobilizar as noções associadas as propriedades operacionais do objeto de reconstrução conceitual. Nesse contexto, o objetivo das Intervenções Avaliativas Aplicativa segundo o autor, é aferir a capacidade dos alunos com relação a Resolução de Problemas aplicado em diversos contexto reais e/ou abstratos adequados ao nível de ensino.

Assim, de acordo com o que vimos até aqui, vejamos um quadro esclarecedor que relaciona as situações didáticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e as Intervenções na estrutura da Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) fios condutores deste trabalho.

Aspectos que relacionam a TSD a UARC

Teoria das Situações Didáticas	Unidade Articulada deReconstrução Conceitual
Situação de Ação (Sa)	Intervenção Inicial (Ii)
Situação de Formulação (Sf)	Intervenção Reflexiva (Ir)
Situação de Validação (Sv)	Intervenção Exploratória (Ie)
Situação de Institucionalização (Si)	Intervenção Formalizante (If)

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A esse respeito, considera-se que os alunos deverão passar por todas as situações didáticas que compõe o esquema da TSD em consonância com as intervenções propostas na Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) segundo modelo de Cabral (2017), com a finalidade de validar ou refutar esses esquemas constituídos durante a aplicação da sequência didática tendo como propósito final a formalização do conhecimento pelo professor que aplicou a SD, ou seja, apresentar aos alunos o registro formal segundo as fórmulas ou regras com adequado rigor matemático.

1.4. A MICROGENÉTICA E A ANÁLISE DO DISCURSO

É consenso entre os estudiosos que a microgenética em consonância com a análise do discurso consolida as potencialidades na área da educação considerando o processo interativo do ensino e aprendizagem (MOTA, 2019; GONÇALVES, 2019; SILVA, 2020). Desse modo, apresentamos algumas reflexões que julgamos necessária para fundamentar a adoção da microgenética e análise do discurso neste trabalho. Assim, baseado nas proposições e pesquisas de Vygotsky, Wertsch (1985), define, a análise microgenética como aquela que abarca o acompanhamento minucioso da concepção de um processo, considerando as manifestações dos sujeitos, as relações interpessoais, e um curto espaço de tempo.

Considerando a microgenética segundo Weltsch (1998a), é parte fundamental da pesquisa sociocultural que procura "[...] entender a relação entre o funcionamento metal humano, por um lado, e o contexto cultural, histórico e institucional, por outro lado". Oferece ainda uma interpretação analítica que divide as pesquisas em duas categorias; uma prioriza a análise do funcionamento mental nos fenômenos socioculturais, a outra analisa os processos psicológicos ou outros conduzidos pelos indivíduos como forma de entendimento dos fenômenos socioculturais. Em concordância, Goés (2000), refere-se à abordagem metodológica microgenética como "análise microgenética" e conceitua como:

> [...] uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (GOÉS, 2000, p. 09)

Segundo Goés (2000) "a análise microgenética pode ser o caminho exclusivo de uma investigação ou articular-se a outros procedimentos, para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante". Nesse contexto, e com intento de identificar os indícios de aprendizagem, Goés (2000) destaca, a partir de vídeo gravação e posterior transcrição das falas dos alunos participantes afim de capitar os detalhes das ações, interações e do cenário sociocultural, para fins de análise das relações que se estabelecem dos microeventos em condições macrossociais.

Sobre a análise minuciosa a qual Goés (2000) se refere, trata-se de um estudo que considera trechos dos eventos das ações de ensino e aprendizagem. Nesse sentindo, esses trechos são objetos de estudos desmembrados em microunidades que carregam informações fundamentais que remonta a compreensão do objeto de estudo. Para a autora, essa análise não é micro porque se refere a curta duração dos eventos, mas sobretudo, por ser orientada para minúcias indiciais.

Ainda segundo Goés (2000, p. 14), Vygotsky propõe uma análise por unidades, contrapondo-se a análise por elementos. Desse modo, define a unidade como aquela instância de recorte que conserva as propriedades do todo que se pretende investigar. O autor justifica sua escolha no fato de que a unidade é o componente vivo do todo. Assim, com base nessas considerações, pretendemos investigar a partir das interações verbais dialógica entre os pares aluno-aluno, professor-aluno o nível de compreensão, empírico e teórico do aluno sobre o objeto matemático ensinado.

Dessa forma, avaliarei as potencialidades de uma sequência didática voltada para o ensino de Progressão Aritmética a partir dos recortes dos trechos registrados em áudios durante a aplicação da SD. Para tanto, articula-se a estrutura analítica proposta por Mortimer e Scott (2002) para analisar as interações verbais e a produção de significados que emergem em salas de aula.

A análise do discurso segundo Mortimer e Scott (2002) é de modo geral, o produto resultante da tentativa de criar uma linguagem que pudesse descrever o gênero do discurso (BAKHTIN, 1986, apud MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 284). Para Bakhtin (1953/1986, p 60 apud MORTIMER e SCOTT, 2002, p. 284), desse modo, “cada esfera na qual a linguagem é usada desenvolve seus tipos relativamente estáveis de enunciados. A isso nós podemos chamar de gênero de discurso”. Neste sentido, Mortimer e Scott (2002), ressaltam:

> Os significados são vistos como polissêmicos e polifônicos, criados na interação social e então internalizados pelos indivíduos. Além disso, o processo de aprendizagem não é visto como substituição das velhas concepções, que o indivíduo já possui antes do processo de ensino, pelos novos conceitos científicos, mas como a negociação de novos significados num espaço

> comunicativo no qual há o encontro entre diferentes perspectivas culturais, num processo de crescimento mútuo. As interações discursivas são consideradas como constituintes do processo de construção de significados. (*Ibidem*, 2002, p. 284)

Para Mortimer e Scott (2002), pouco é conhecido como os professores dão suporte no processo de construção de significados pelos alunos em sala de aula, assim também, como são produzidas as interações e como os variados tipos de discurso podem auxiliar a aprendizagem dos alunos.

Nesse sentindo, Mortimer e Scott (2002) apresentam uma estrutura analítica baseada em cinco aspectos inter-relacionados que focalizam o papel do professor e são organizadas em termos de focos do ensino – intenções do professor e conteúdo; abordagem – abordagem comunicativa; e ações – padrões de interação e intervenção do professor organizado no quadro abaixo:

Quadro 2 - Aspectos da Análise do Discurso.

Focos do ensino	**Intenções do professor**	-Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente; -Explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos; -Disponibilizar as ideias científicas; -Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a toda a classe. -Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade pelo uso dessas ideias; -Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.
	Conteúdo	**Descrição:** envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. **Explicação:** envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. **Generalização:** envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.

Abordagem	Abordagem comunicativa	**Interativo/dialógico:** professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. **Não-interativo/dialógico:** professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. **Interativo/de autoridade:** professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. **Não-interativo/de autoridade:** professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	Padrões de interação	**Tríade I-R-A:** Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor. **Cadeias não triádicas**: exemplo I-R-P-R-P.… ou I-R-F-R-F.… onde o P significa uma ação discursiva que permite o prosseguimento da fala do aluno e F um feedback para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.
	Intervenções do professor	- Introduz um termo novo; parafrasear uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados; - Considera a resposta do estudante na sua fala; ignora a resposta de um estudante; - Repete um enunciado; pede ao estudante que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma ideia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado; - Repete a ideia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas ideias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe. - Pede a um estudante que explique melhor sua ideia; solicita ao estudante que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados. **-** Sintetiza os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

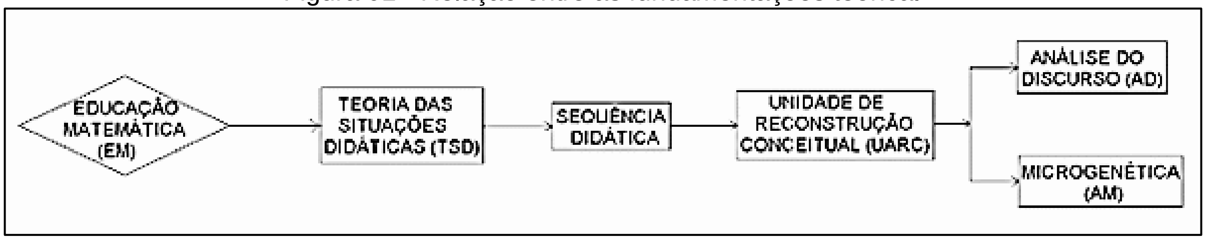
Fonte: Silva (2020) adaptado de Mortimer e Scott (2002).

Ainda segundo os autores, o conceito de abordagem comunicativa, ocupa o centro da estrutura analítica descrita anteriormente. Desse modo, fornece o olhar sobre como o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por intermédio das inúmeras intervenções pedagógicas proporcionando diferentes padrões de interações.

Para Mortimer e Scott (2002) a análise do discurso é uma ferramenta que estuda a forma como os professores podem guiar as interações em sala de aula com finalidade de construir significados. Desse modo, é possível acrescentar maior intencionalidade às intervenções do professor a fim de conduzir o aluno à apreensão do objeto matemático.

Em resumo, a figura abaixo apresenta uma síntese demostrando às ligações entre as teorias abordadas nesse produto educacional.

Figura 01 - Relação entre as fundamentações teórica.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

2. SOBRE O OBJETO MATEMÁTICO

> ...A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva[12]

Para melhor compreender os rumos dessa proposta, a narrativa que segue neste capítulo apresenta conteúdos de Progressão Aritmética com rigor e aprofundamento científico por entender que estas são passiveis de serem repassadas aos alunos do Ensino Médio. Assim, vislumbra-se um outro olhar no raciocínio matemática, assim como, essa abordagem pode possibilitar e ou acrescentar na formação dos leitores desta pesquisa.

Nesse sentindo, tendo em vista um maior aprofundamento e domínio do assunto, além de definições de sequência, séries têm-se a inserção de conteúdos não vistos no Ensino Médio como indução finita, limite e noções de convergência e divergência inseridas no trabalho (como nota de rodapé) em geral tratado apenas no Ensino Superior.

A definição de progressão aritmética (P.A.) em diversos livros são muito semelhantes e atendem perfeitamente a exigência necessária do que vem a ser uma P.A., entretanto, utilizaremos a definição de progressão aritmética extraída de (MORGADO; CARVALHO, 2013), tem-se que: Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de razão da progressão.

Vale ressaltar o fato de que as chamadas progressões aritméticas finitas pela definição[13],são também sequências.

A *classificação* de uma Progressão Aritmética é dada a partir da sua razão. Desse modo, considerando r a razão de uma P.A. temos que, quando $r > 0$ r, a P.A. é crescente e o termo seguinte sempre será maior que o anterior. Por outro lado, quando

---

[12] BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2015.

[13] Por definição, uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \to a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

$r < 0$, a P.A. é decrescente e o termo seguinte sempre será menor que o termo anterior. Temos ainda que, quando $r = 0$, a P.A. é constante ou estacionária, os elementos serão iguais.

É frequente aparecerem problemas de P.A. com poucos termos. Nestes casos pode ser útil usar *representações especiais*. Assim, vamos considerar dois casos sendo, para número ímpar de termos e número par de termos.

- ✓ *Dessa forma, para o número ímpar de termos de uma P.A. iremos considerar duas situações a saber: A primeira: Se forem 3 (três) termos de razão r podemos representá-los por, $x - r, x, x + r$. A segunda: Se forem 5 (cinco) termos de razão r podemos representá-los por, $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$.*
- ✓ *Por outro lado, considerando um número par de termos de uma P.A. temos desse modo. Se forem 4 (quatro) termos de razão $r = 2y$ podemos representá-los por: $x - 3y, x - y, x + y, x + 3y$. exemplificando no caso de ser 6 termos teremos: $x - 5y, x - 3y, x - y, x + y, x + 3y, x + 5y$.*

As Progressões Aritméticas possuem algumas propriedades que são úteis na resolução de problemas comumente encontrados nos livros e ENEM. Assim temos a *primeira propriedade* numa Progressão Aritmética finita com os termos opostos, ou equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância do termo central da PA, têm a mesma soma e sempre igual a $a_1 + a_n$. Assim, para uma PA finita$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. temos:
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_k + a_{n-k+1}$.
Assim, uma demonstração dessa primeira propriedade pode ser, considerando a_k e a_{n-k+1} dois termos quaisquer equidistante dos extremos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. Utilizando a fórmula do termo geral da PA, para k elementos temos $a_k = a_1 + (k-1)r$ e para $\mathrm{n - k + 1}$elementos temos $a_{n-k+1} = a_1 + [(n-k+1) - 1]r$. Segue daí que a soma de $a_k + a_{n-k+1}$ é igual a $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1).r + a_1 + (n-k).r = 2a_1 + [(k-1) + (n-k)].r$ logo $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_1 + (n-1).r$ como $a_n = a_1 + (n-1).r$ temos:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \ .$$

Assim, fica demonstrado essa primeira propriedade. A *segunda propriedade* diz que em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos. Consideremos a PA $(\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots})$, sendo que $\mathrm{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}$, com $\mathrm{n} \geq 2$. Uma demonstração por meio da definição da P.A. Assim, sabemos que: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, n \geq 2$. Desse modo, sabemos pela definição que: $\left.\begin{matrix} a_n - a_{n-1} = r \\ a_{n-1} - a_n = r \end{matrix}\right\} = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Longrightarrow$ $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$. Assim, temos que, $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Assim, fica demonstrada a segunda propriedade. Vale ressaltar que essa propriedade pode ser escrita na forma $a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, onde os dois termos a_{n-k} e a_{n+k} , são dois termos quaisquer equidistante da P.A..

A *terceira propriedade* da Progressão Aritmética diz que em uma P.A. $(\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots})$, onde a_p e a_q são dois termos quaisquer, é válido a propriedade $a_n = a_p + (n-p).r$. Uma demonstração a partir da fórmula do termo geral da P.A. $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Assim, $a_p = a_1 + (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - (p-1).r \Rightarrow a_1 = a_p - p.r + r$. Substituindo esse resultado na equação do termo geral, temos $a_n = a_p - p.r + r + (n-1).r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + r + n.r - r \Rightarrow a_n = a_p - p.r + n.r$, Assim, desse modo, $a_n = a_p + (n-p).r$ fica demonstrada a terceira propriedade.

A *quarta propriedade* da Progressão Aritmética, diz que em uma P.A. Se k, m, p e q são índices de termos quaisquer de uma P.A. $(\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots})$não constate, então: $k + p = m + q$ se, e somete se, $a_k + a_m = a_p + a_q$. Assim, a demonstração dessa quarta propriedade considerando r a razão da Progressão Aritmética. $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots)$. Assim, $a_k + a_m = a_p + a_q \Rightarrow a_1 + (k-1).r + a_1 + (p-1).r = a_1 + (m-1).r + a_1 + (q-1).r \Rightarrow (k-1).r + (p-1).r = (m-1).r + (q-1).r \Rightarrow (k-1+p-1).r = (m-1+q-1).r \Rightarrow k+p-2 = m+q-2 \Rightarrow$ $k + p = m + q$. Assim, fica demonstrada a quarta propriedade.

Interpolação Aritmética em uma sequência finita $(\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n})$, sedo os termos a_1 e a_n denominados extremos e os demais termos são chamados de meios. Assim, interpolar k meios aritméticos entre os extremos α e β é determinar quais k úmeros devem ser inseridos entre α e β de tal maneira que se tenha uma P.A. de $k + 2$ termos. Assim, considerando $a_1 = \alpha$ e $a_{k+2} = \beta$, ao inserir k meios aritméticos entre os extremos α e β encontraremos $(\alpha, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, \beta)$. Substituindo no termo geral da Progressão Aritmética teremos: $\beta = \alpha + (k-1).r$, onde $r = \frac{\beta-\alpha}{k+1}$.

F*órmula do termo geral de uma Progressão Aritmética dada por* $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \dots, \mathbf{a_n}, \dots)$e razão $\mathbf{r}$. Assim sendo, $\mathbf{r} = \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} \rightarrow \mathbf{a_2} = \mathbf{a_1} + \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{a_3} - \mathbf{a_2} \Rightarrow \mathbf{a_3} = \mathbf{a_2} + \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a_3} = \mathbf{a_1} + \mathbf{2r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{a_4} - \mathbf{a_3} \Rightarrow \mathbf{a_4} = \mathbf{a_3} + \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a_4} = \mathbf{a_1} + \mathbf{3r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{a_5} - \mathbf{a_4} \Rightarrow \mathbf{a_5} = \mathbf{a_4} + \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a_5} = \mathbf{a_1} + \mathbf{4r}$. Assim, ao avançar, termo a termo, percebe-se que o padrão se mantém. Desse modo, um termo qualquer da progressão sempre será igual ao primeiro termo, somado com a multiplicação da razão pelo número de termos, diminuído de uma unidade. Assim, o termo geral de uma PA é dado por:

$a_n = a_1 + (n-1)r, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$ (I)

Assim sendo, uma generalização do Termo geral da Progressão Aritmética considerando-se a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots, a_n, \dots)$ de razão r, pode ser dada por:

$a_n = a_m + (n-m)r$ com $m \leq n$ (II)

Desse modo, a_n é o n-ésimo termo da P.A. em função de r. Assim, observa-se que por meio da fórmula (I), podemos encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética, desde que sejam conhecidos o primeiro termo e a razão da P. A.. No entanto, nota-se que a fórmula (II) é mais genérica e abrangente que (I), de modo que essa, não apresenta dependência do termo a_n em relação ao primeiro termo da P.A..

Assim, uma abordagem da fórmula do termo geral de uma P.A. comumente usada por professores assim também encontrada nos livros didáticos expressa cada termo em função do termo anterior e da razão. Desse modo, temos o termo geral da P. A. é dado por: $a_n = a_{n-1} + r$ ou ainda $r = a_n - a_{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$

A demonstração deste resultado pode ser feita por indução, utilizando o Axioma 1. Assim, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $\mathrm{n} = 1$, temos $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_1 + (1-1)\mathrm{r} = \mathrm{a}_1$ Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n ou seja, $\mathrm{a_n} = \mathrm{a}_1 + (\mathrm{n}-1)\mathrm{r}$ então temos, $\mathrm{a_n} + \mathrm{r} = \mathrm{a}_1 + (\mathrm{n}-1)\mathrm{r} + \mathrm{r}$. Logo, $\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{nr}$. Pelo axioma114 da Indução finita[15], a fórmula vale para todo n.

[14] Indução Finita (Axioma 1): Seja $\mathrm{P(n)}$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que (i) $\mathrm{P}(1)$ é válida.(ii) Para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ N, a validez de $\mathrm{P(n)}$ implica na validez de $\mathrm{P(n+1)}$. Então, $\mathrm{P(n)}$ é válida para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. (MORGADO; CARVALHO, 2013).

É preciso ressaltar com relação ao princípio da indução finita que segundo Hefez (2014), é importante não confundir Indução Matemática com indução empírica. Nas ciências naturais, é comum, após um certo número - sempre finito - de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Assim, essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Já a indução matemática serve para estabelecer verdades matemáticas válidas sobre o conjunto dos números naturais.

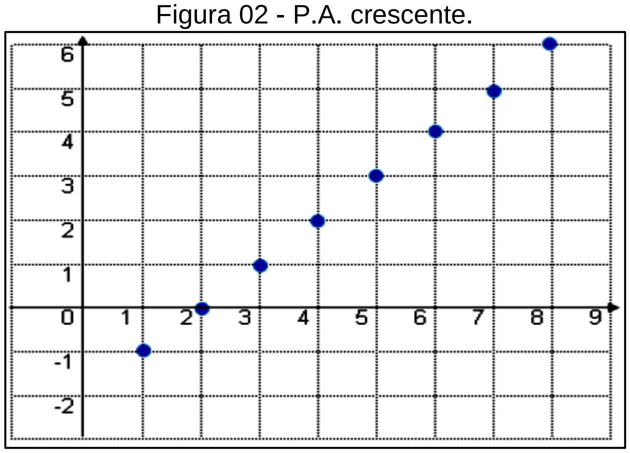
Dessa forma, não se trata de mostrar que determinada fórmula é verdadeira para muitos casos, mas trata-se de provar que tal fórmula é verdadeira para todo número natural. Posto isso, com relação à convergência ou divergência da PA, abalizaremos o limite de seu termo geral, com n tendendo ao infinito, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[a_1 + (n-1).r]$$

Com base no limite acima, apresentamos alguns resultados de divergência e convergência de sequências. De modo que usaremos como auxílio visual, alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de $\mathrm{a_n}$.

Assim, se $\mathrm{r} > 0$, pelo item (ii)[16] da definição apresentada por Guidorizzi (1999), tem-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Logo, a sequência diverge.

Figura 02 - P.A. crescente.



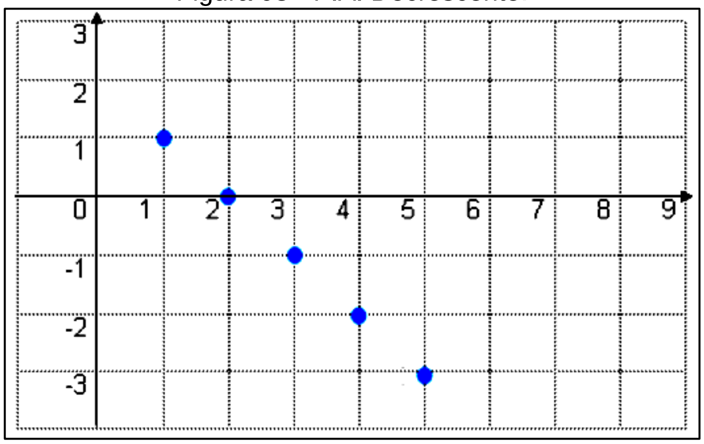
[15]O Axioma 1, como diz Elon em Lima (2013), é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. Ele está presente (pelo menos de forma empírica) sempre que, ao afirmarmos a veracidade de uma proposição referente aos números naturais, verificamos que ela é verdadeira para $\mathrm{n} = 1, \mathrm{n} = 2, \mathrm{n} = 3$e dizemos “assim por diante...”.

[16] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. definimos:(ii) $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = \infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n_0} \Rightarrow \mathrm{a_n} > \varepsilon$. (GUIDORIZZI, 1999).

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Um outro exemplo onde a sequência diverge é quando consideremos $r < 0$, que pelo item (iii)[17] tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Logo, a sequência diverge.

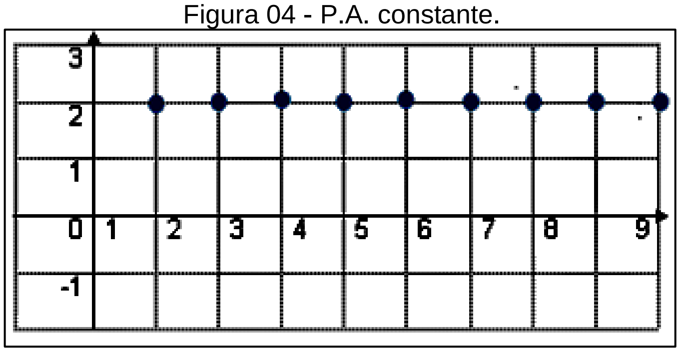
Figura 03 - P.A. Decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Por outro lado, se considerarmos $\mathrm{r} = 0$ e $a_1 \neq 0$, pelo item (i)[18] tem-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$ Logo, a sequência converge.

Figura 04 - P.A. constante.



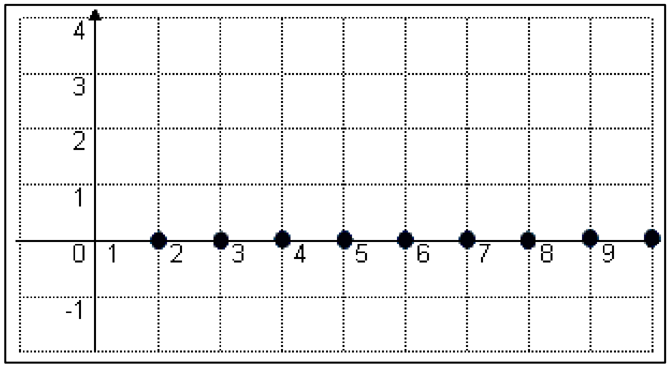
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

[17] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. definimos:$(\mathrm{iii})\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = -\infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n_0} \Rightarrow \mathrm{a_n} < -\varepsilon$. (GUIDORIZZI, 1999).

[18] Definição: Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real.definimos:$(\mathrm{i})\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{L}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n_0}$ quando $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ (GUIDORIZZI, 1999).

Por fim, se $r = 0$ e $a_n = 0$ então, pelo item (i) da nota 36, tem-se que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Logo, a sequência converge.

Figura 05 - PA Nula.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Assim, a conclusão que chegamos é de que a sequência formada pelos termos de uma progressão aritmética converge quando a sua razão for igual a zero. Nesse caso, todos os termos da PA são iguais a um mesmo número e a convergência, é para o número considerado. Como se observa nos exemplos a convergência para o número 2 (gráfico 3) e a convergência para zero (Gráfico 4).

Um fato peculiar quando tratam da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética finita está relacionado ao matemático alemão Carl Friederich Gauss. Sobre esse tema, segue um recorte da história contada a despeito de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), considerado um dos maiores matemáticos que já existiu, extraída de (BOYER, 1974):

> Um dia, para manter a classe ocupada o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre uma mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, "Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara de cabeça a soma da progressão aritmética 1+2+3+...+99+100, presumidamente por meio da fórmula n(n + 1)/2.

Desse modo, Gauss visualizou a lista de números e percebeu que, somando o primeiro com o último, teria 101 como resultado; somando o segundo com o penúltimo, o resultado também seria 101 e assim por diante. Como a soma de todos os pares de termos equidistantes dos extremos resultava em 101, Gauss só precisou multiplicar esse número por metade dos termos disponíveis para encontrar o resultado 5050.

Esse feito deu origem a expressão usada para calcular a fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Assim, considerando a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão r, podemos escrevê-la na forma $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \ldots, a_n - 2r, a_n - r, a_n)$. Diante disso, iremos calcular a soma dos n primeiros termos dessa PA de razão r, que indicaremos aqui por S_n:

Assim, temos que: $S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$. Do mesmo modo, considere a P.A. de razão r com os mesmos termos, porém, no sentindo decrescente. Assim, dada a P.A. $(a_n, a_n - r, a_n - 2r, \ldots, a_1 + 2r, a_1 + r, a_1)$, temos que a soma dos n primeiros termos é dado por: $2S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 = 2S_n = (a_1 - a_n)n$. Segue daí que, a soma dos termos da P.A. finita é obtida por meio da expressão:

$$S_n = \frac{(a\_1 - a\_n)n}{2}$$

Assim sendo, observe que a soma dos termos da primeira P.A. é igual à soma dos termos da segunda PA. Por isso, ambas foram igualadas a S_n. Considerando que essas duas expressões foram obtidas de uma única P.A. e que os termos equidistantes estão alinhados na vertical. Sendo assim, podemos somar as expressões e obter a fórmula que expressa a soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$$
$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \quad +$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Desse modo, temos que $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Logo temos que a proposição enunciada por: A soma dos termos dos n primeiros termos de uma progressão aritmética finita por ser obtida por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Essa proposição está assentada na demonstração que podemos considerar proceder por indução, utilizando o Axioma 1[19].

De fato, temos que a Propriedade (i) do Axioma é satisfeita, pois, para $n = 1$, temos:

$$\mathrm{S_n} = \frac{(a_1 + a_n\,)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1\,).1}{2} = a_1$$

Assumimos que a hipótese da soma para n termos é válida. Além disso, a Propriedade (ii) é satisfeita, pois, se a fórmula vale para n, ou seja, $\mathrm{S_n} = \frac{(a_1+a_n\,)n}{2}$, então, também se verifica para $n + 1$.

Desse modo, $\mathrm{S_{n+1}} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1+a_n\,)n}{2} + a_{n+1}$. Então, considerando o fato de que $a_{n+1} = a_1 + nr$, substituindo na equação acima temos, $\mathrm{S_{n+1}} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}-r)n}}{2} + \mathrm{a_{n+1}}$. Assim, $\mathrm{S_{n+1}} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}})}{2}\mathrm{n} - \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{n} + \frac{2\mathrm{a_{n+1}}}{2} = \frac{(\mathrm{a_1+a_{n-1}})}{2}\mathrm{n} + \frac{2\mathrm{a_{n+1}-rn}}{2}$. Assim, temos que, $S_{n+1} = \frac{(a_1+a_{n-1})}{2}n + \frac{a_{n+1}+a_{n+1}-rn}{2}$.

Desse modo, substituindo o termo geral da progressão aritmética, $a_{n+1} = a_1 + nr$, donde se tem que $a_1 = a_{n+1} - nr$ na equação acima temos:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})}{2}n + \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} = (n + 1)\frac{a_1 + a_{n+1}}{2}$$

Logo, pelo axioma da Indução Finita a fórmula vale para todo n. Por outro lado, o segundo caso a considerar é com relação a soma dos termos de uma progressão aritmética infinita. Assim, quando soma-se infinitos termos de uma sequência, dá-se o nome série e denota-se por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots\ a_n + \cdots$ (LIMA, 1997). Desse modo, têm-se um caso de série.

Assim sendo, como ela é oriunda de uma PA, chamamos aqui de série aritmética. Dessa maneira, como o termo geral não tende a zero, a série aritmética é divergente, exceto no caso da razão e do primeiro termo serem zero. Nesse caso, a série pode ser convergente. Vamos observar alguns exemplos gráficos, em que o eixo das abscissas é o valor de n, e o eixo das ordenadas é o valor de Sn.

[19] Indução Finita (Axioma 1): Seja $\mathrm{P(n)}$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que $(\mathrm{i}\,)$ $\mathrm{P(1)}$ é válida.(ii) Para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ N, a validez de $\mathrm{P(n)}$ implica na validez de $\mathrm{P(n+1)}$. Então, $\mathrm{P(n)}$ é válida para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. (MORGADO; CARVALHO, 2013).

Vale ressaltar que essa fórmula só é válida para **progressões aritméticas** que possuem um **número finito** de termos. Se a PA for infinita, será necessário limitar o número de termos que serão somados.

3. ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES

Nesta secção faremos algumas sugestões ao professor que irá abordar a sequência didática para o ensino das Progressões Aritméticas. Nesse sentindo, recomendamos que seja aplicado um teste e se necessário uma oficina respectivamente de verificação e acomodações de conhecimentos básicos necessários ao ensino e aprendizagem de PA. Cujo objetivo é potencializar a o ensino de progressão aritmética e a adesão dos alunos no processo de participação durante a aplicação da SD.

Assim, sugerimos que se faça um teste de conhecimentos básicos sobre: conjuntos numéricos; séries numéricas; expressões algébricas e função afim. Isto porque, achamos que o domínio destes conteúdos potencializando o ensnio e aprendizagem de PA. Além disso, recomendamos a observância aos objetivos de cada atividade visto que, são balizadas nas UARCs e que estão em consonância estabelecida nos documentos oficiais.

Convém lembrar que após a aplicação do teste de verificação de conhecimentos básicos, o professor deve avaliar o resultado, se satisfatório para os conhecimentos básicos ao estudo de PA o professor pode aplicar a sequência didática, porém, se o resultado for insatisfatório nesse contexto, a sugestão é que o professor realize uma oficina considerando esses conhecimentos básicos necessários ao desenvolvimento da atividade da SD em Progressão Aritmética apresentado no Apêndice D.

Por considerar o tempo para a devolução das atividades um ponto chave, cabe avaliar e considerar o ritmo de aprendizagem da turma estipulando um tempo limite para a realização de cada uma das questões. Por essa razão, nós sugerimos um tempo de aulas com 50 minutos para cada UARC deste produto educacional uma vez que se trata de um desdobramento da dissertação de mestrado profissional da Universidade Estadual do Pará – UEPA já expeerimentado.

Vale ressaltar aos professores que, embora o pressuposto teórico adodatado no produto educacional não faz mensão sobre aferição de cognição do aluno pós oficina de conhecimentos básicos, foi realizado um teste de verificação “rápido” balisado nas atividades propostas no teste e oficina para comparar as acomodações cognitivas do aluno. Pode inferir que essa atitude tenha garantindo algum êxito nas atividades propostas da dissertação apresentada no curso de pós-graduação de mestrados profissional em ensino de matemática da Universidade Estadual do Estado do Pará.

Uma observação que faço aos professores, ocasionada a partir do conhecimento adquirido após a prática experimental de aplicação da SD é que, a composição do grupo de alunos não pode ser aleatória. Sugerimos que se o aplicador da sequência didática for professor da turma, leve em consideração para potencializar os grupos de alunos as variáveis habilidade e competência matemática de seus alunos. Assim, (re)distribuindo pelo menos um aluno matematicamente habilidos para compor um grupo.

Sobre as intervenções de manutenção orais, proposto por Cabral (2017), são na verdade, um trunfo que temos durante a aplicação da sequência didática. Por meio delas, poderemos ou não auxiliar os alunos a serem protagonistas da construção de seus saberes. Isto porque, são elas que irão destravar os obstáculos epistemológicos de seus alunos.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este produto educacional é de uma sequência didática elaborada com 5 (cinco) atividades de Progressão Aritmética para ser trabalhadas com alunos do 1º ano do Ensino Médio. As quais abordam os seguintes conteúdos: Classificação de Progressão Aritmética; propriedades de uma Progressão Aritmética; Razão da Progressão Aritmética; Termo Geral da Progressão Aritmética; A Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética balisadas segundo os pressupostos das Unidades Articuladas de Reconstrução Coinceitual proposto por Cabral (2017).

4.1. UARC 1 - Sequência numérica regular e lei de formação

A sequência numérica regular é uma sequência ordenada, construída por meio de uma regularidade ou padrão podendo assim, ser expressa por meio de uma lei ou regra de formação, de tal maneira que se pode obter qualquer elemento dessa sequência, até aqueles mais distantes. Assim sendo, temos:

ATIVIDADE 01 – Sequência Numérica Regular

Título: Sequência numérica regular a partir de sua lei de ocorrência.

Habilidades: Reconhecer e representar uma sequência numérica; ler e interpretar a linguagem numérica em linguagem algébrica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.

Objetivos: Identificar regularidades de padrões, sua lei de formação e expressá-las algebricamente.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais e operações com polinômios.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Observe a sequência dos números abaixo:

a) Sequência 1.

02	04	06	08	10	12

b) Sequência 2.

01	05	09	13	17	21

c) Sequência 3.

01	04	05	10	12	30

Responda as questões abaixo.

02). [Ir] A partir do 2º termo é observado algum padrão para a formação em cada uma das sequências acima?

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3
( ) Sim	( ) Sim	( ) Sim
( ) Não	( ) Não	( ) Não

03). [Ir] Caso você tenha identificado algum padrão, descreva-o

Sequência 1. ____

Sequência 2. ____

Sequência 3. ____

04). [Ir] Esse padrão produz, entre dois elementos consecutivos, uma diferença de valor constante?

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3
( ) Sim	( ) Sim	( ) Sim
( ) Não	( ) Não	( ) Não

05). [Ir] Baseado nas suas observações, quais os próximos números nas sequências?

a) Sequência 1.

02	04	06	08	10	12			

b) Sequência 2.

01	05	09	13	17	21			

06). [Ir] Apresente uma expressão matemática que represente o padrão descrito na sua observação do item

Sequência 1. ____

Sequência 2. ____

07) [Ie] Determine os próximos números das sequências abaixo

-20		-14	-11	-8			

[If]

Sequência Numérica Regular a partir de sua Lei de Formação é uma sequência numérica que admite um termo qualquer (termo geral, $\boldsymbol{an}$) a partir de relações entre seus termos e sua posição, obedecendo uma determinada lei de formação.

A Lei da Recorrência permite calcular qualquer termo de uma sequência numérica a partir de elementos antecessores: $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1$

08) [IAr] Preencha os próximos números e diga qual opadrão que identifica a sequência numérica abaixo:

0		10	15	20		30	35		45

09) [IAap] Preencha os próximos números e diga qual opadrão que identifica a sequência numérica abaixo:

$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ 89;$ ______

4.2. UARC 2 - Definindo e classificando a Progressão Aritmética

A progressão aritmética é uma sequência numérica regular utilizada para descrever o comportamento de fenômenos matemático como por exemplo, o crescimento ou decrescimento permanente, por isso, de um termo para o outro, a diferença será sempre a mesma, e essa diferença é denominada razão da PA. Assim temos:

ATIVIDADE 02 – Classificação da Progressão Aritmética

Título: Definindo e classificando a Progressão Aritmética

Habilidades: Reconhecer, classificar e representar uma sequência numérica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.

Objetivo: Definir a razão de uma P.A.; classificar a PA quanto a razão, neste caso, se crescente, decrescente ou constante. E classificar a P.A. quanto ao número de termos, desse modo, se finita ou infinita.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Complete as sequências abaixo de acordo com o comando:

02) [Ir] Adicionar 3: (7,____, ____, ____, ...)

03) [Ir] Subtrair 2: (10, ____, ____, ___)

04) [Ir } Adicionar 0: (12, ____, ____, ____, ____, ____)

05) [Ii] Identifique nas sequências abaixo o que ocorre entre dois termos consecutivos quaisquer:

06) [Ir] ($1, \quad 8, \quad 15, \quad 22, \quad 29, \quad 36, \quad \ldots$):______________________________

07) [Ir] ($12, \quad 7, \quad 2, \quad -3, \quad -8$):______________________________

08) [Ir] ($3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3$):______________________________

09) [Ii] Dentre as sequências acima, identifique aquela cujos valores:

10) [Ir] Aumentam: ______________________________

11 [Ir] Diminuem: ______________________________

12) [Ir] Permanecem os mesmos:______________________________

13) [Ii] Nas sequências acima correspondente aos itens de 6 a 8 determine a quantidade de termos de cada sequência, destacando o primeiro e o ultimo termo:

14) [Ir] Sequência 6: ______________________________

15) [Ir] Sequência 7: ______________________________

16) [Ir] Sequência 8: ______________________________

17) [Ie] Complete as sequências abaixo considerando que o padrão seja mantido, determine o número que está sendo somado em cada uma delas (razão) e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) ($5, \quad \_\_\_, \quad 5, \quad 5, \quad \_\_\_, \quad 5$) ______________________________

b) ($\_\_\_, \quad 14, \quad 18, \quad \_\_\_, \quad 26, \quad 30, \quad 34, \quad \_\_\_$) ______________________________

c) ($-1, \quad -5, \quad -9, \quad -13, \quad \_\_\_, \quad \_\_\_, \quad \_\_\_, \quad \ldots$) ______________________________

[If] Dada a sequência ($a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$). Define-se a razão r como $r = a_n - a_{n-1}$;

$\forall_n \geq 2$

Diz-se que a sequência é:

Crescente quando $r > 0$;

Decrescente quando $r < 0$;

Constante quando $r = 0$;

Finita quando a sequência apresenta número de termos limitado;

Infinita quando a sequência apresenta número de termos ilimitado.

18) [IAr] Complete as sequências abaixo considerando que o padrão seja mantido, determine o número que está sendo somado em cada uma delas (razão) e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $-16;\ -19;\ -22;\ -25;$ ______

b) $-3;\ -3;\ -3;\ -3;$ _______

c) $0{,}04;\ \ 0{,}107;\ 0{,}174;$ ______

19) [IAap] A quantidade mensal de novos clientes de um determinado clube aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, o clube teve 300 novos clientes; em fevereiro, 380; em março, 460. Esse padrão de crescimento de novos clientes manteve-se nos meses subsequentes. A quantidade total de novos clientes até o mês de agosto desse clube foi de?

4.3. UARC 3 - Termo geral da Progressão Aritmética

O termo geral da PA é apresentado por uma fórmula usada para encontrar qualquer valor numérico de um termo de uma PA desde que se conheça a razão, posição do termo e primeiro termo da PA. Assim temos:

ATIVIDADE 03 – Termo geral da progressão aritmética

Título: Definir o termo geral da Progressão Aritmética

Habilidades: ler e interpretar a linguagem numérica em linguagem algébrica; fazer a identificação e reconhecer padrões e regularidades numa sequência numérica.

Objetivo: Definir o termo geral de uma P.A.; classificar a PA quanto a razão, neste caso, se crescente, decrescente ou constante. E classificar a P.A. quanto ao número de termos, desse modo, se finita ou infinita.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais e operações com polinômios.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

01) [Ii] Observe as sequências numéricas e considerando que o padrão permaneça, complete-as:

a) Sequência 1: (___, $4,\ 7,$ ___, $13,$ ___, ...)

b) Sequência 2: ($-34,\ -30,\ -26,$ ___, $-18,$ ___, -10)

c) Sequência 3: (___, $56,\ 52,\ 48,$ ___, ...)

d) Sequência 4: (___, $-10,$ ___, ___, $-16,\ -18$)

e) Sequência: ($7,$ ___, $7,$ ___, $7,\ 7,$ ___, ___)

02) [Ir] Nas sequências de 1 a 5 acima, determine a razão e destaque o primeiro e o último termo.

Sequência 1	Sequência 2	Sequência 3	Sequência 4	Sequência 5
razão =	razão =	razão =	razão =	razão =
primeiro =	primeiro =	primeiro =	primeiro =	primeiro =
último =	último =	último =	último =	último =

03) [Ir] Considerando as sequências de 1 a 5 do item (01 [Ii]) preencha na tabela abaixo cada termo da sequência no formato de uma soma utilizando o termo anterior e a razão:

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
$r =$ ____ $a_1 =$ ____	$r =$ ____ $a_1 =$ ____	$r =$ ____ $a_1 =$ ____	$r =$ ____ $a_1 =$ ____	$r =$ ____ $a_1 =$ ____
$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$
$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$
$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$
$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$
$a_6 =$	$a_6 =$		$a_6 =$	$a_6 =$
	$a_7 =$			$a_7 =$
				$a_8 =$

04) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o valor de cada termo da sequência?

____

05) [Ir] Considerando as sequência de 1 a 5 escreva cada termo da sequência no formato de uma soma de produto utilizando somente o primeiro termo e a razão.

Sequência 01	Sequência 02	Sequência 03	Sequência 04	Sequência 05
$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____	$r =$ _____ $a_1 =$ _____
$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$	$a_2 =$
$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$	$a_3 =$
$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$	$a_4 =$
$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$	$a_5 =$
$a_6 =$	$a_6 =$		$a_6 =$	$a_6 =$
	$a_7 =$			$a_7 =$
				$a_8 =$

06) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado no preenchimento da tabela para o cálculo de cada termo da sequência?

____

07) [Ie] Qual o valor do vigésimo termo de uma progressão aritmética onde o primeiro termo é igual a 5 e a razão é igual a 3.?

____

[If]

Dada a sequência ($a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \ , \ a_{n-1}, \ a_n$). De razão r com $r = a_n - a_{n-1}$; $\forall_n \geq 2$, onde a_1 é o primeiro termo, a_n é o último termo. .

Diz-se que o termo geral da Progressão Aritmética (PA) é:

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$ou$$
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

08) [IAr] Qual o 13º termo de uma progressão aritmética que apresenta o quinto e sexto termo respectivamente igual a 23 e 27?

09) [IAap] Obtenha o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.

4.4. UARC 4 - Propriedades da progressão aritmética

Nesta quarta atividade, abordamos a 1ª propriedade de uma PA de números de termos par finita e ou infinita, como sendo a soma dos dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos. Além disso, a 2ª propriedade garante que em uma PA, tendo em vista os três termos consecutivos, o termo médio da PA é igual a média aritmética dos outros dois termos. Assim temos:

ATIVIDADE 04 – Propriedades da Progressão Aritmética

Título: Propriedades da PA

Habilidades: Realizar a identificação de padrões e regularidades em uma sequência numérica; reconhecer e aplicar as propriedades da sequência didática;

Objetivo: Reconhecer, entender e aplicar as propriedades de PA.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

1ª Propriedade

01) [Ii] Observe a sequência numérica (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40) e preencha o valor da soma dos termos:

a) a_1 com a_8 ? ____

b) a_2 com a_7 ? ____

c) a_3 com a_6 ? ____

d) a_4 com a_5 ? ____

02) [Ir] Descreva o que você observou nos itens *a, b, c* e *d*. ____________________

03) [Ie] O valor de m para que $m+2;\ 2m;\ 2m+6;\ 28$ sejam nessa ordem uma progressão aritmética é? ____

2ª Propriedade

04) [Ii] Observe a P.A. (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 36, ...) e responda o valor de cada expressão abaixo.

a) $\frac{a_1+a_3}{2}$? ____

b) $\frac{a_3+a_5}{2}$? ____

c) $\frac{a_5+a_7}{2}$? ____

d) $\frac{a_7+a_9}{2}$? ____

05) [Ir] Qual a conclusão que você chegou com o padrão observado nos itens *a, b, c* e *d*? ____

06) [Ir) Considerando que o padrão se mantenha, qual o termo que encontramos na expressão $\frac{a_{24}+a_{26}}{2}$? ____

07) [Ir] Qual o termo da P.A. você encontra na expressão $\frac{a_{50}+a_{52}}{2}$? e por quê?

____

08) [Ie] Uma sucessão de números igualmente distantes um após o outro, tem como vigésimo terceiro termo e vigésimo quinto termos os valores respectivamente iguais a 43 e 83. Qual o valor vigésimo quarto termo desta sucessão?

____

[If]

1ª Propriedade: Numa Progressão Aritmética finita com n termos, a soma de dois termos quaisquer equidistante dos extremos é constante e sempre igual a $a_1 + a_n$ Sendo assim, em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n-k+1}$$

2ª Propriedade: Em quaisquer três termos consecutivos de uma Progressão Aritmética (finita ou infinita), o termo do meio é a média aritmética dos extremos. Assim, Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ temos que $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, com $n \geq 2$.

9) [IAr] O quinto termo da P.A. $(8;\ \ x;\ \ 4; \ldots)$ é?

10) [IAp] As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1;\ 2x;\ x^2 - 5,$ e estão em PA, nesta ordem. O perímetro do triângulo é:

a) 10 b) 12 c) 15 d) 24 e) 25

4.5. UARC 5 - Soma dos termos da progressão aritmética finita

Nesta quinta atividade abordaremos a soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA). A demonstração dessa fórmula envolve justamente algumas somas de termos, partindo de um princípio matemático percebido primeiro por Gauss. Desse modo, a soma dos termos de uma progressão aritmética pode ser obtida por meio da metade do número de termos multiplicada pela soma dos seus extremos. Assim temos:

ATIVIDADE 05 – Soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Título: Soma dos Termos da P.A. Finita

Habilidades: Realizar a identificação dos termos de uma sequência numérica; padrões e regularidades em uma sequência numérica; reconhecer e aplicar as propriedades da sequência didática;

Objetivo: Reconhecer, entender e aplicar as propriedades de PA.

Pré-requisitos: Operações básicas com números reais.

Duração prevista: 50 minutos.

Materiais necessários; Folhas de atividades, lápis e caneta.

Organização da turma: em equipe de cinco e ou seis alunos.

Procedimento: Analise as sequências e suas determinadas leis e em seguida responder as questões.

Objetivo: Determinar a soma dos termos de uma P.A. através da fórmula da soma dos termos da P.A.

Procedimento: Análise as situações abaixo e responda as questões.

É comum encontrar fórmulas e sugestões para que as pessoas passem a fazer alguma poupança com o dinheiro que ganha. Desse modo, vamos aproveitar para conhecer uma delas encontrada na internet e pensar sobre o assunto.

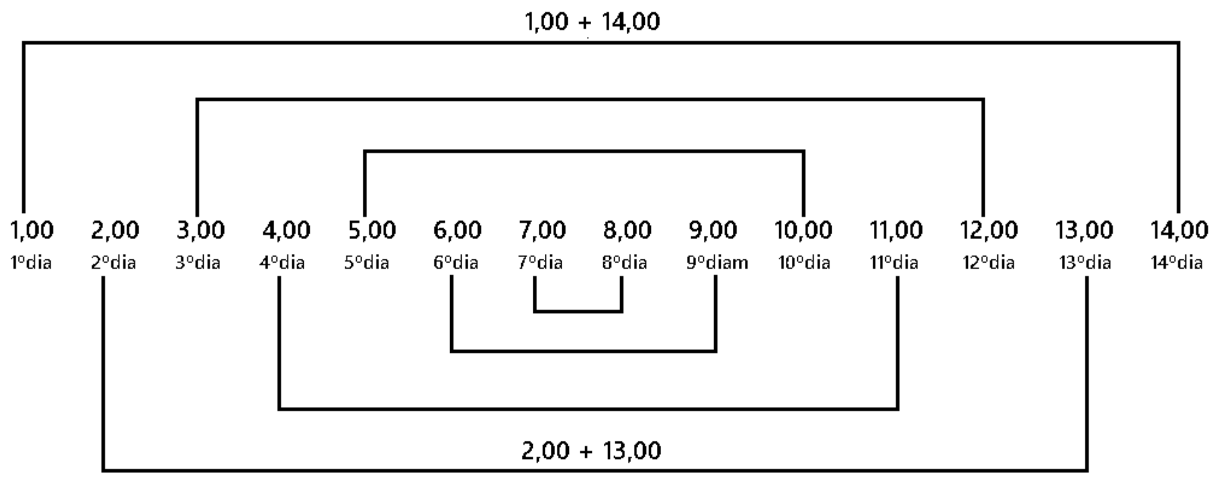
A sugestão é a seguinte: Você deve poupar todos os dias, sem exceção, colocando o dinheiro poupado em uma conta destinada somente para isso. No primeiro dia guarda R$ 1,00, depois, a cada dia, deve guardar o equivalente ao dia anterior acrescido de R$ 1,00. Assim sendo:

01) [Ii] Preencha a sequência de valores a serem poupados durante os dez primeiros dias.

1,00,	2,00,	3,00,	_____,	_____,	_____,	_____ ,	_____,	_____,	_____
1ºdia	2ºdia	3ºdia	4ºdia	5ºdia	6ºdia	7ºdia	8ºdia	9ºdia	10ºdia

02) [Ir] Qual o valor total poupado no final dos dez dias _______________________

03) [Ir] Observe a sequência abaixo considerando o mesmo comando inicial tendo como objetivo poupar duas semanas.



04) [Ir] O que você observou sobre as somas? _________________________________

05) [Ir] Quantas somas iguais podem ser feita? _________________________________

06) [Ir] Qual o valor que encontramos quando multiplicamos a resposta da questão 04 com a resposta da questão 05? ____

07) [Ir] Qual o valor total poupado em duas semanas? ___________________________

08) [Ie] O que se observa entre os valores encontrados nas questões 06 e questão 07?

____

09) [Ie] Considerando o que você observou na questão 08. O que podemos concluir quando queremos saber o total poupado em duas semanas sem realizar a soma uma a uma até a última? ____

10) [Ie] Use esse procedimento que você descobriu para calcular a soma dos 100 primeiros números pares? ____

[If] Como a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos em uma Progressão Aritmética. Em uma Progressão Aritmética finita, a soma de todos é dada pela soma dos extremos *vezes* a metade do número de termos $\frac{n}{2}$, pois em cada soma estão envolvidos dois termos. Assim, seja PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ temos que $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$

Onde:

S_n = soma dos n termos;

a_1= primeiro termo;

a_n= enésimo termo;

n = número de termos.

11) [IAr] . Uma criança anêmica pesava 8,3 kg. Iniciou um tratamento médico que fez com que engordasse 150 g por semana durante 4 meses. Quanto pesava ao término da 15ª semana de tratamento?

12) [IAap] A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 185 e a soma dos 12 primeiros é 258, então, o 1º termo e a razão são respectivamente:

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos os resultados de um desdobramento de uma pesquisa desenvolvida no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre Progressão Aritmética que gerou o Produto Educacional[20] que indaga como questão norteadora de pesquisa: Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de Progressão Aritmética?

Priorizamos a Teoria da Situação Didática de Brousseau (1998) por defender que o objetivo principal de estudo não é a cognição do aluno, mas a situação didática, na qual são potencializadas as interações da tríade aluno–saber–professor. Além do mais, por assumir que professores e alunos são sujeitos indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) presente nas situações didáticas sempre que houver uma intenção clara do professor de proporcionar ao seu aluno aquisição de saberes por meio da sequência didática. Por essa razão, nos ofereceu suporte teórico para a apresentação do conteúdo de Progressão Aritmética por meio da sequência didática planejada.

Escolhemos a Educação Matemática, por discutir que a didática matemática promove em níveis teóricos e experimentais a prática docente. Assim também, a Sequência Didática idealizada por Zabala (1998) por admitir ser um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas que compõe uma unidade temática. Esse arcabouço nos forneceu auxílio para organização, planejamento e elaboração da sequência didática.

Abordamos as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), não só por ser fundamentada e constituída por intervenções que servem ao propósito da teoria da situação didática, mais também, por ter sido o modelo estruturante destinado a elaboração da sequência didática. O seu constructo ofereceu suporte indispensável a formalização gradual dos conceitos de Progressão Aritmética por meio das interações dialógicas.

[20] Falta gerar o link do produto educacional

Empregamos as considerações da Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), por subsidiar a validação ou refutação dos esquemas de aprendizagem constituídos durante a aplicação da sequência didática. A combinação desse constructo nos permitiu evidenciar os indícios de aprendizagem de Progressão Aritmética após aplicação da sequência didática apresentado no capítulo 6 (seis).

Apresentamos um estudo da Progressão Aritmética que nos permitiu aprofundar o conhecimento matemático científico sobre PA. Além disso, oferecer subsídio no contexto da formação de professor que ensina matemática, uma formação continuada uma outra abordagem desse conteúdo.

Mesmo que tenha havido algum tropeço durante a aplicação da Sequência Didática, é possível inferir que as etapas foram bem executadas, e isso nos garantiu o alcance do objetivo proposto deste trabalho. Dessa dinâmica, foi possível identificar nos segmentos de tunos e registros apresentados no capítulo 6 (seis) da nossa dissertação que, a SD apresentou, fundamentado na Análise Microgenética e Análise do Discurso de acordo com Goés (2000) e Mortimer e Scott (2002), traços de aprendizagem para a Progressão Aritmética.

As intervenções estruturantes realizadas durante a aplicação da SD segundo Cabral (2017), fundamentaram-se em uma abordagem de cunho qualitativo e informativo que propiciou o interesse à participação e construção de saberes matemáticos pelo próprio aluno. Essa percepção é fundamentada a partir das interações e registros das atividades presentes no capítulo 6 (seis) da dissertação apresentada do curso de pós-graduação em mestrado profissional da Universidade estadual do Pará.

Apesar de a pesquisa ter um caráter qualitativo exploratório do processo interativo e discursivo de ensino e aprendizagem em Progressão Aritmética, obtivemos respostas quantitativas mediante análise realizada após a aplicação das atividades de sequência didática. Diante disso, recomendamos numa próxima prática experimental, a aplicação de exercícios de fixação logo após a aplicação da Sequência Didática para que os alunos possam acomodar a formalização alcançada.

Considerando todo o processo da pesquisa e aplicação da Sequência Didática durante o curso de pós-graduação em metrado profissional da Unioversidade Estadual do Pará, é possível inferir que o produto educacional apresentado traz contribuições para tríade aluno-saber-professor quanto aos aspectos de apresentação do conteúdo de Progressão Aritmética, de conteúdos conceituais e procedimentais para o ensino e aprendizagem além de contribuir com a formação do professor de matemática.

Desse estudo, é possível concluir que o ensino de Progressão Aritmética por meio de Sequência Didática, nos proporcionou conhecimento matemático teórico específico de Progressão Aritmético. Viabilizou discussões sobre as teorias de ensino e aprendizagem para conteúdos de matemática, nos forneceu uma nova abordagem para o ensino de Progressão Aritmética diferente das abordagens centradas na exposição do conteúdo pelo professor e nos permitiu compreender e fazer uso das UARCs para acomodações mais naturalizadas do conteúdo de Progressão Aritmética.

A pesquisa apresentar uma estreita relação com a nossa prática pedagógica, suas contribuições vão além de aguçar a reflexão da nossa atuação profissional. Assim, inseriu em nossa práxis, conhecimentos teóricos e experimentais sobre o ensino de Progressão Aritmética. Além disso, não só implementou em nossas aulas uma proposta pedagógica de abordagem de conteúdo diferente das tradicionais, como também, auxiliou e forneceu um aprimoramento das interações dialógicas com os nossos alunos.

A Teoria da Situação Didática adicionou em nossa proposta pedagógica e plano didático uma estratégia que auxilia o aluno a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento matemático. Além do mais, forneceu a nossa ação pedagógica um mecanismo de formalização do conteúdo matemático de Progressão Aritmética centrado na aprendizagem do aluno e estabeleceu em nossa dinâmica uma proposta que melhora a relação da tríade aluno-professor-saber.

De modo geral, percebemos que a Sequência Didática balizada por Zabala (1999) e estruturada segundo o modelo proposto por Cabral (2017), forneceu auxilio ao nosso processo de planejamento da nossa ação docente e o plano didático. Nos ajudou a formalizar conteúdos matemáticos com mais naturalidade e desenvoltura.

O conjunto das interveções escritas e orais propostos por Cabral (2017) favoreceu as nossas interações dialógicas com o aluno em sala de aula. Nos ajudou nas acomodações de saberes matemáticos formais de modo mais naturalizado pelos alunos. Nos inferiu uma abordagem de conteúdo que oferece aos alunos a possibilidade de serem autônomos na construção de seus próprio conhecimento e, contribuiu para o ensino de Progressão Aritmética de forma mais dinâmica.

Uma observação que fazemos a partir do conhecimento adquirido após a prática experimental de aplicação da SD é que, a composição do grupo de alunos não pode ser aleatória. Sugerimos que se o aplicador da sequência didática for professor da turma, leve em consideração para potencializar os grupos de alunos as variáveis habilidade e competência matemática de seus alunos. Assim, (re)distribuindo pelo menos um aluno matematicamente habilidoso para compor um grupo.

Sobre as intervenções de manutenção orais, proposto por Cabral (2017), concluímos que são na verdade, um trunfo que temos durante a aplicação da sequência didática. Por meio delas, poderemos ou não auxiliar os alunos a serem protagonistas da construção de seus saberes. Isto porque, são elas que irão destravar os obstáculos epistemológicos dos alunos durante a aplicação da SD.

Recomendo a realização de novas aplicações da Sequência Didática “Ensino de Progressão Aritmética por Meio de Sequência Didática”, em outros contextos escolares, bem como a implementação de tecnologias digitais ou materiais manipuláveis.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Elementos de Didática da Matemática**. Campinas: Cad. Cedes, vol. 28, n. 74, p. 123-125, jan./abr. 2008. Disponível em https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100008 Acessado em 06 de Out. de 2021.

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade**. Amazônia **|** Revista de Educação em Ciências e Matemática **|** v.13 (27) Set 2017. p.05-35.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na6ª série do ensino fundamental. 2006. 410f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des mathematiques 1970-1990, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, (trans, and eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2002.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p.34-113.Tradução- Maria José Figueiredo.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b, p. 48-72.

CABRAL, NATANAEL FREITAS. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração/ Natanael Freitas Cabral. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

D'AMAORE, B. **Elementos da Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B**. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino**. Bolema, Rio Claro, v. 20, n. 28, 2007. Disponível em: Acesso em 19 jul. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

FRANCO, M. A. DO R. S. **Prática pedagógica e docência: um olhar a partir da epistemologia do conceito.** Revista Brasileira de estudos Pedagógicos. Brasília, v. 97, n. 247, p. 534-551. Disponível em https://doi.org/10.1590/S2176-6681/288236353 Acessado em 20 de set. 2021.

GÓES, M. C. R. (2000). A abordagem microgenética na matriz históricocultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. Cadernos Cedes, 50, 9–25.
GRANDO, N. I.; MARASINI, S. M. **Educação Matemática: a sala de aula como espaço de pesquisa**. 2. ed. Passo Fundos: UFP Editora, 2014.

MARGOLINAS, C. **Situations, milieux, connaissances:** analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Grenoble La Pensée Sauvage, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PCNs (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática** / Ministério de Educação. Secretaria de Educação., 1 edição.

PERRIN-GLORIAN, M.J. **From producing optimal teaching to analysing usual classroomsituations.** Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: thenotion of milieu. Acesso em 12/11/2021 http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ WG5/Papers/PERRIN.pdf, 2007.
PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra; HAŠEK, Roman. Financial education demands concerning **teacher training.** Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics, v. 12, 2012.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: o problema central do desenvolvimento**. Tradução de Marion Merlone dos Santos Penna. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

POMMER, M. W. A **Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2013. Disponível em: < http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+201 3.pdf>. Acessado em 10 set. 2021.

SOUZA, C. **Circulação e apropriação de ideias em Educação Matemática – aproximações**. Orientador: Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, 2016. 422 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2016. Disponível em https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-14092016-122421/pt-br.php Acesso em 21 de nov. 2021.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. de C. **Tendências em educação matemática**. Revista Roteiro, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez., 1994.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2 ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2009.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Único.

NÉLISSE, Claude. L’intervention: catégorie floue et coonstruction de l’objet. In: NÉLISSE, Claude (Dir.). **L’intervention: les savoirs en action**. Sherbrooke, Éditions GGC, 1997. p. 17-24.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZABALA, Antoni. **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem