

MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA

MIGUEL CHAQUIAM

Re(construindo) Conceitos
de
PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Belém – PA
2023

Marcos Roberto Berredo da Silva
Miguel Chaquiam

Re(construindo) Conceitos de Progressão Geométrica

Produto Educacional aprovado pelo Comitê de Avaliação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Belém - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Marcos Roberto Berredo da

Re (construindo) conceitos de progressão geométrica / Marcos Roberto Berredo da Silva, Miguel Chaquiam. - Belém, 2023.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Progressão geométrica.2.Matemática-Estudo e ensino.3.Prática de ensino.

I. Chaquiam, Miguel (orient.) II. Título.

CDD 23 ed. 510.7

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA”.

Mestrando: **MARCOS ROBERTO BERREDO DA SILVA**

Data da avaliação: 10/03/2023

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

- () Estudantes do Ensino Fundamental ☒ Estudantes do Ensino Médio
() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio
() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional:*

- ☒ Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
() Texto Didático (alunos/professores) () Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: _____

b) *Possui URL:* () Sim, qual o URL: _____
() Não () Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- a) *Possui sumário:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
e) *Possui referências:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível:* ☒ Sim () Não () Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas:* ☒ Sim () Não () Não se aplica



Ben

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

☒ Sim, onde: Grupo de Professores da Educação Básica

☐ Não, justifique: _____

☐ Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

☒ Sim, onde: Instuições de Ensino Médio

☐ Não, justifique: _____

☐ Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

☒ Sim, onde: Grupo Focal

☐ Não, justifique: _____

☐ Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

☐ na escola, como atividade regular de sala de aula

☐ na escola, como um curso extra

☒ outro: Via Google

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

☐ Alunos do Ensino Fundamental

☐ Alunos do Ensino Médio

☒ Professores do Ensino Fundamental

☒ Professores do Ensino Médio

☐ outros membros da comunidade escolar, tais como _____

☐ outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

☒ APROVADO

☐ APROVADO COM MODIFICAÇÕES

☐ REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)

Doutor em Educação

IES de obtenção do título: UFRN

Miguel Chaquiam

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)

Doutor em Ciências Humanas

IES de obtenção do título: PUC/RJ

Natanael Freitas Cabral

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)

Doutor em Educação, Ciências e Matemáticas

IES de obtenção do título: IFPA

Alailson Silva de Lira

APRESENTAÇÃO	4
1 – APOSTES TEÓRICOS E METODOLÓGICO	6
1.1 – TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	6
1.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	12
1.3 – UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL	18
1.4 – RECURSO DE APRENDIZAGEM	25
1.5 – INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.....	27
2 – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E EPISTEMOLÓGICAS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.....	30
2.1 – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS.....	30
2.2 – CONCEITO DE FUNÇÃO	44
2.3 – SEQUÊNCIAS.....	52
2.4 – SEQUÊNCIA ARITMÉTICA E SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA	55
3 – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	60
3.1 – UARC-1	60
3.2 – UARC-2	65
3.3 – UARC-3	69
3.4 – UARC-4	74
3.5 – UARC-5	78
4 – ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES	82
5 – ORIENTAÇÕES PARA ALUNOS	86
5.1 – POTENCIAÇÃO.....	86
5.2. – FUNÇÃO EXPONENCIAL	90
5.3 – SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	92
5.4 – NÚMEROS FIGURADOS	93
5.5 – ATIVIDADES DE FIXAÇÃO.....	95
6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	100

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional está vinculado a uma sequência didática para o ensino de progressão geométrica que surgiu como desdobramento da dissertação de mestrado associada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do estado do Pará (UEPA). Este produto é destinado a professores e alunos do Ensino Médio para o ensino e aprendizagem de progressão geométrica no âmbito escolar. Trata-se de um recurso didático validado experimentalmente, por um grupo de professores que atuam na Educação Básica, que apresentou potencialidades associadas ao seu objetivo que é o de ensinar o conteúdo em destaque para alunos do 1º ano do Ensino Médio por meio da interatividade dialógica promovida pelo espírito investigativo, de comunicação e argumentação em língua materna e da linguagem matemática de forma interligada.

A elaboração deste constructo foi baseada em um campo de pesquisa da área da Educação Matemática, denominado Didática da Matemática. Com o qual, elencamos como aporte teórico para subsidiar as correlações entre o professor, o aluno e o saber a Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau (1996). Bem como, nos embasamos nas percepções de Zabala (1998) acerca da definição de sequência didática. Para sua elaboração fizemos uso das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017). Assim como, buscamos elencar as atividades através de um processo investigativo, no qual elencamos a Investigação Matemática (IM) com base nos estudos de Ponte *et al.* (1998), para verificar os padrões geométricos, em que tomamos como recurso de aprendizagem o uso de calculadoras, descrito por Fedalto (2006), para verificar as regularidades numéricas que representam os padrões geométricos existentes em progressão geométrica.

Tínhamos como pretensão, utilizar as perspectivas da Análise Microgenética de Goes (2000) e Análise do Discurso de Montiman e Scott (2002). Entretanto, devido as circunstâncias ocasionadas pela pandemia da COVID-19 houve a necessidade de um redirecionamento do processo de aplicação e validação da sequência didática com alunos para um grupo de professores por meio da avaliação de um questionário. Preliminarmente a estruturação da sequência didática, buscamos realizar uma revisão de estudos afim de compreender os tipos e níveis de abordagens do objeto matemático por outros pesquisadores.

Além disso, buscamos entender as perspectivas de alunos egressos, bem como, de professores a respeito do conteúdo. Assim como, de que forma os livros didáticos o abordam, se os níveis de exercícios correspondem as definições propostas, além da análise conceitual e do rigor matemático está de acordo com o nível de ensino. Paralelamente elaboramos, um

tratamento matemático afim de subsidiar a elaboração do constructo, bem como, apresentar aos professores correlações do objeto matemático como outros conteúdos em diversos níveis (Ensino Fundamental, Médio e Superior). De posse de todo esse levantamento e compreensões realizadas acerca do objeto, elaboramos a sequência didática, ramificada em 5 atividades denominadas de UARC-1, UARC-2, UARC-3, UARC-4 e UARC-5. Desta forma, sugerimos aos professores que antes da sua utilização seja realizado com a turma um teste de conhecimentos básicos necessários para a construção do conteúdo da sequência didática, como: Potenciação (definição e propriedades); Função exponencial (Equação exponencial e análise gráfica); Sequências Numéricas (Lei de formação), e Números figurados (Representação numérica de padrões geométricos).

Caso o professor note que os alunos apresentam domínio, pode prosseguir com a sua utilização. Entretanto, em caso de dificuldades dos alunos, indicamos que seja feita uma oficina de conhecimentos básicos destes conteúdos para preparar cognitivamente os estudantes para os novos conhecimentos desenvolvidos na execução das atividades. Portanto, apresentamos a seguir o material necessário para utilização deste produto educacional. Sua fundamentação teórica, bem como, a sequência didática elaborada na versão dos alunos, assim como, as orientações para professores de utilização e adaptações a serem realizadas dependendo da necessidade do aluno, orientações para o aluno, dos conhecimentos que devem buscar para a realização das atividades, no qual antecedem o conhecimento do objeto matemático e o tratamento matemático acerca do objeto da sequência didática.

Marcos Roberto Berredo da Silva

Miguel Chaquiam

1 – APOSTES TEÓRICOS E METODOLÓGICO

Neste capítulo iremos fazer um estudo teórico sobre os aportes teóricos que utilizamos como base metodológica desta pesquisa, no qual descrevemos algumas teorias importantes para o método de pesquisa, primeiramente falaremos da *Teoria das Situações Didáticas (TSD)* descrita pelo pesquisador Brousseau (1996), e por fim apresentaremos uma proposta pedagógica para o ensino por investigação conhecida como Sequência Didática definida por Zabala (1998), e dentro da proposta da *Sequência Didática (SD)*, destacamos uma abordagem sobre uma proposta metodológica para a estrutura e elaboração de uma Sequência Didática que teve como principal idealizador Cabral (2017) e que ele nomeia como *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)*.

1.1 – TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A *Teoria Das Situações Didáticas (TSD)* surgiu na conhecida “Escola Francesa da Educação Matemática” que segundo Reis (2012, p. 41), “nascida dentro do movimento da matemática moderna no final da década de 60, através de um grupo de pesquisadores, entre eles Brousseau¹ com a Teoria Das Situações Didáticas”.

O objetivo deste grupo de pesquisadores era estudar a aprendizagem e o ensino do conhecimento matemático e daí surgiram outras teorias, tais como: Antropologia da Matemática, Dialética ferramenta-objeto, Registros de representações semióticas e a Teoria dos campos conceituais.

Em 1970, licenciado em matemática e com o cargo de assistente de matemática na Universidade de Bordeaux, Brousseau apresenta numa conferência do Congresso da Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público, os primeiros elementos da *teoria das situações*, os quais, ao longo de 20 anos, seriam aperfeiçoados dando origem à Teoria das Situações Didáticas, trazendo grandes contribuições para o desenvolvimento da Didática da Matemática enquanto campo científico, “cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações”. (BROUSSEAU, 2008, *apud* MOÇAMBITE, 2016, p. 42).

Para que haja a comunicação dos conhecimentos matemáticos, deverá haver também uma relação entre o professor, o aluno e um determinado conhecimento a ser ensinado, e para

¹ Guy Brousseau (1933) é um educador matemático francês. Em 2003 recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das situações didáticas. É um dos pioneiros da didática da matemática, ele desenvolveu uma teoria para compreender as relações que se operam na sala de aula. Os educadores e os educandos são atores da relação ensino-aprendizagem. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Guy_Brousseau>. Acesso em: 01/05/2020.

que essa relação exista cada um destes elementos possui um papel importante, para que a comunicação seja concretizada, ou seja, o professor prepara suas aulas e organiza o conteúdo, baseado na forma em que convém a ele a melhor forma de ensinar. E o aluno se prepara para receber as informações que o professor transmite e adquirir o conhecimento que é importante para ele no momento. Segundo Brousseau (2008), *apud* Moçambique (2016, p. 42), “dessa forma, interpreta-se a relação didática como uma comunicação de informações”.

Neste contexto, o conteúdo matemático serve como um processo de ligação para a comunicação entre a transmissão do professor do conhecimento matemático e a compreensão do aluno deste conhecimento. Neste processo de ligação, entra em questão a didática em que o professor utiliza para transmitir o conhecimento matemático ao aluno, e Brousseau buscou conhecer esse processo didático, tanto através das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da matemática, quanto nas técnicas para facilitar o ensino. É de prática o professor apresentar os conteúdos matemáticos como modelos axiomáticos, pelo fato de ser uma forma que facilita a organização e a apresentação de tal conteúdo. Porém, para Brousseau (1996), *apud* Ferreira (2016, p. 57), afirma que, “saber matemática, não é apenas aprender definições e teoremas, para reconhecer o momento de utilizá-las, considerando assim uma omissão de onde o conhecimento se estabeleceu, tais como conjecturas, erros e discussões históricas do mesmo”.

Partindo dessa ideia, o ensino de matemática para que seja eficaz, o processo precisa ir além das apresentações axiomáticas e expositivas do conteúdo matemático, no qual a inovação, busca por ensinar algo que seja significativo para o aluno pode trazer grandes benefícios para o mesmo e concretizar a aprendizagem.

Segundo Oliveira (2015, p. 35), na TSD, “a aprendizagem matemática acontece, de fato, sempre que o conhecimento que foi ensinado para o estudante tem sentido e significado, e aquele conhecimento aprendido pode ser aplicado em outros contextos”.

Por esse motivo que Brousseau (1996) idealizou a TSD, no qual para sanar as dificuldades da aprendizagem matemática, faz-se necessário fazer o uso da aprendizagem significativa. Para isso, o professor passa de expositor do conhecimento para mediador do conhecimento e o aluno projeta o próprio conhecimento sendo-o um aluno ativo, ou seja, o professor irá propor uma série de problemas que fazem com que o aluno pense sobre tais problemas tomando como base conhecimentos prévios.

Em uma situação de ensino, existem algumas regras (contrato didático), acordado entre o professor e o aluno que funcionam como se fosse cláusulas de um contrato. O aluno desenvolve atividades onde realiza ações de formular, testar e construir modelos de linguagem, conceitos e teorias e estabelecer intercâmbios com outros, reconhecendo a oportunidade de aplicá-los. O professor incorpora o trabalho de investigador, onde o mesmo produz método (re) personalizado do conhecimento, pois este passará a ser conhecimento do aluno devendo ser gerado uma adaptação a uma situação específica. (REIS, 2012, p. 42-43).

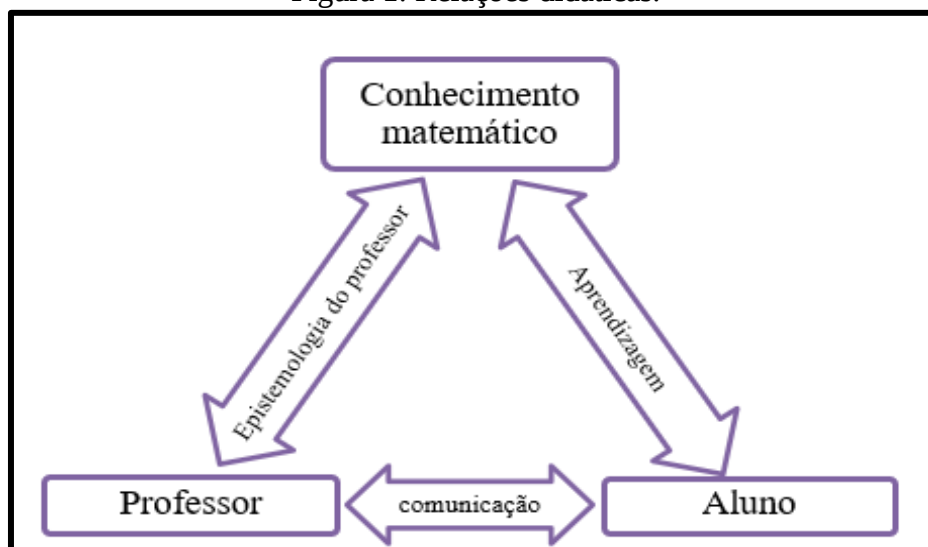
Desta forma o professor começa a adaptar métodos de ensino e através do contrato didático com o aluno, faz este aluno elaborar métodos intuitivos que o possibilita encontrar a melhor forma de solucionar determinado problema, no qual o mesmo utiliza modelos, conceitos e teorias que o professor formalizou ou poderá formalizar de conhecimentos anteriores para solucionar tal problema que será novo para ele. Para Teixeira e Passos (2013) *apud* Silva Junior (2016, p. 55) a TSD “integra dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, o que permite a interação entre a escola, o professor e o aluno e gera o aprendizado”.

Essas relações entre o sistema educacional, o professor e o aluno ficaram conhecidas como Situações Didáticas, idealizada por Brousseau (1996), destaca todo o meio que cerca o aluno, seja ela gerada pelo professor ou pela instituição escolar.

Uma Situação Didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber construído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (BROUSSEAU, 1986; CAVALCANTE, 2011, *apud* SILVA JUNIOR, 2016, p. 55).

Isto significa dizer que as estruturas das situações didáticas formam o ambiente escolar, no qual dependem das diversas relações pedagógicas e o desenvolvimento de atividades motivam os estudantes a produzirem conhecimento. Observe a Figura 1 que aborda tais relações didáticas para adquirir o conhecimento matemático.

Figura 1: Relações didáticas.



Fonte: Brousseau (1998), Reis; Allevato (2015), *apud* Silva Junior (2016).

Na Figura 1, o professor dispõe de uma relação didática, que através da comunicação, pretende alcançar o aluno e em conjunto com sua epistemologia dispõe o conhecimento matemático para esse aluno, e através deste se obtém uma relação entre o aluno e o conhecimento matemático, que gera a aprendizagem, e dentro destas relações existem diversos obstáculos que o professor e o aluno precisam superar para que haja a aprendizagem do conhecimento.

Segundo Reis e Allevato (2015) *apud* Junior (2015, p. 56), “o conjunto dos três elementos, conhecimento, professor e aluno, constituem uma relação dinâmica conhecida como Relações Didáticas”.

Além da relação dinâmica que ocorre entre o conhecimento, professor e aluno (Relações didáticas) que se preocupam em superar obstáculos para que haja aprendizagem, também ocorrem interações simultâneas entre o sistema educacional, o aluno e o conhecimento, onde não se preocupam com o processo didático que o professor utiliza, apenas esperam a comunicação professor – aluno, ou seja, ocorre uma interação entre o aluno e o professor, sem se preocupar com a epistemologia do professor, no qual o mediador é o sistema educacional, no qual esse processo é conhecido como Situações de Ensino.

Suleiman (2015, p. 203) afirma que, “na situação de ensino em que há somente interação professor-aluno ocorre redução da ação do professor e na situação didática o professor cria outro *meio* em que o aluno pode atuar de forma autônoma”.

Na situação de ensino, quando o professor começa a fazer alterações no processo interativo, ou seja, se preocupa no meio que irá utilizar como didática para apresentar o

conhecimento ao aluno, esse professor cria uma situação didática, e este meio que ele utiliza é conhecido como meio didático.

Ainda em Suleiman (2015, p. 203), “o *meio didático* pode ocorrer de duas maneiras: *meio material* (quando o professor prepara a sua aula, organiza um meio) e *meio objetivo* (é o aluno que atua num meio efetivo, de ação)”.

Assim, o meio didático é formalizado através do contrato didático, e que por diversas formas de ser visualizada, permite a existência das situações didáticas.

Segundo Oliveira (2015, p. 34), a TSD “tem como objetivo caracterizar uma situação em um processo de aprendizagem que ocorre em sala de aula envolvendo o aluno, o professor e o conhecimento”.

A TSD procura estudar o processo investigativo científico que o aluno possui para obter determinado conhecimento, assim modelando o ambiente escolar e tornando a aprendizagem significativa.

Brousseau (2008) *apud* Moçambite (2016, p. 42) afirmam que a TSD “traz grandes contribuições para a Didática da Matemática enquanto campo científico, cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações”.

Os conhecimentos matemáticos transformam-se conforme a sociedade também passa por transformações, ou seja, a sociedade se transforma, a cada geração, a cada ano, ou a cada dia, portanto ao ensinar matemática, em sala de aula há diversos alunos com culturas diferentes, conhecimentos diferentes e dificuldades diferentes, assim é de suma importância que o ensino de matemática também passe por transformações, para que o professor tenha a possibilidade de transmitir o conhecimento para cada aluno.

Reis (2012, p. 50) define a Situação Didática como “o ambiente de modelagem que existe através da educação sempre que podemos caracterizar uma situação de ensino”.

Brousseau (1996) subdividiu a Situação Didática em quatro outras situações que são: Situação de Ação, Situação de Formulação, Situação, Situação de Validação e Situação de institucionalização.

Situação de Ação - caracterizadas pelo aspecto experimental do conhecimento, pelas tentativas e, frequentemente, pela ausência de argumentação. Quando o aluno tem em mente uma estratégia para resolver uma situação, mas não é capaz de verbalizá-la, a situação vivenciada é de ação. Na situação de ação prevalece a intuição, o raciocínio implícito. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

Na situação de ação, o aluno verifica que determinado problema é familiar para ele, ele sabe resolver o problema, mas não consegue explicar os procedimentos utilizados para resolver o problema. Como exemplo podemos citar um jogador de futebol que ao chutar uma bola e

fazer o gol, ele treinou para aplicar aquele procedimento, porém não sabe explicar os conhecimentos científicos que ocorrem na ação de chutar a bola para que seja possível a bola ir certa no gol.

Moçambique (2016, p. 44) afirma que, “na *situação de formulação*, o aluno já faz afirmações sobre a sua resolução, mas sem questionar ou justificar a sua validade”.

Na situação de formulação, o aluno sabe os procedimentos que deve usar para resolver determinado problema, porém o mesmo não consegue perceber se a resolução de fato está correta, ou justificar o porquê de utilizar tal procedimento.

Situação de validação – já aparecem mecanismos de prova, a necessidade de validar aquilo que se afirma, mas sem o rigor matemático. Nessa etapa, procura - se convencer o outro sobre a validade de uma regra ou estratégia e os próprios critérios de validação, por vezes, são questionados. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

O que ocorre na situação de validação é que, o aluno consegue explicar os procedimentos que deve utilizar usando a argumentação para o convencimento, porém não consegue aplicar a argumentação com rigor matemático.

Situação de institucionalização – nesta etapa o conhecimento se torna objetivo e universal. Enquanto as três primeiras etapas podem caracterizar situações adidáticas, esta quarta etapa é de natureza didática, pois cabe ao professor reforçar e generalizar o conhecimento adquirido. (MOÇAMBITE, 2016, p. 44).

Na situação de institucionalização já ocorre a explicação do procedimento utilizado, com o rigor matemático, ou seja, esse aluno tem clareza do conteúdo ensinado.

Assim como a situação didática, no qual a teoria é estudada para melhorar e sanar algumas dificuldades no ensino de matemática, Brousseau (1996) também definiu outras duas situações para complementar na melhoria do ensino de matemática, tais situações são: a *Situação Adidática* e a *Situação Fundamental*.

Segundo Suleiman (2015, p. 202), “na *Situação Adidática*, o professor deve proceder de forma a não dar a resposta ao aluno, que aprende adaptando-se a um meio, no qual o professor provoque as adaptações desejadas”.

Nessa situação, o professor é o mediador do conhecimento, ele não mostra para o aluno o que é preciso fazer para realizar a ação, ele apenas vai adaptando os conhecimentos que o aluno já adquiriu através de questionamentos, para que o aluno chegue ao resultado que o professor espera, ou seja, o aluno constrói seu próprio conhecimento e o professor apenas vai modelando o caminho para que o aluno chegue ao aprendizado.

Suleiman (2015, p. 202) ainda afirma que, “*Situações fundamentais* permitem ao aluno armazenar fundamentos para cada novo conhecimento matemático”.

Para que um novo conhecimento matemático seja adquirido, faz-se necessário que o aluno já possua conhecimentos prévios para que ele seja capaz de obter um aprendizado eficaz.

Desta forma, todas estas situações, adidáticas, fundamentais e as didáticas, e as composições das situações didáticas, formam as situações de ensino, ou seja, todas elas são mencionadas para entender a interação do sujeito (aluno) com um meio que o leva para a aprendizagem de um novo conhecimento. Segundo Suleiman (2015, p. 201), “a teoria das situações de ensino, de Brousseau, está ancorada na busca das condições necessárias à efetivação da aprendizagem”. Assim, outros estudos realizados tomam como base a teoria de Brousseau, no qual buscam idealizar o ensino por investigação e por atividade, no qual a proposta para esta pesquisa são as Sequências Didáticas.

1.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O ensino por investigação está sendo utilizado com bastante frequência em pesquisas e como proposta metodológica no ensino não tão somente na área da matemática, mas em outras disciplinas. O ensino por investigação caracteriza-se pela proposta de um problema que, segundo Carvalho (2013) *apud* Avelino (2017, p.17), “a resolução exige o diálogo, permita a liberdade intelectual dos estudantes e desenvolve interações e práticas discursivas importantes, tais como: descrições, argumentações, generalizações, entre outras”.

Quando falamos em ensino por investigação, o termo mais utilizado para a prática e aplicação desta proposta metodológica eu tive como pioneiro Zabala² que nomeou de *Sequências Didáticas (SD's)*, que permite que haja a interação entre o conhecimento empírico do aluno e o conhecimento científico, e seu principal modelo se dá por meio de generalizações, principalmente no ensino de ciências (Química física e Biologia) e no ensino de Matemática.

A expressão sequência didática apareceu no bojo de uma reforma educacional que ocorreu na França na segunda metade do ano de 1980 e designava um conjunto de atividades ou oficinas de aprendizagem aplicadas ao ensino de qualquer tipo de conteúdo. Anos mais tarde um grupo da Universidade de Genebra que trabalhava na área de linguística, psicologia e filosofia, sistematizou uma proposta teórico-metodológica para o ensino de determinados gêneros textuais, daí o fato da expressão sequência didática ser mais conhecida no campo da linguística, podendo, porém ser aplicada a qualquer outro campo de estudo. (PEREIRA, 2017, p. 19).

² *Antoni Zabala (s/d)*, Catalão, formado em Filosofia e Ciências da Educação pela Universidade de Barcelona, na Espanha, Antoni Zabala preside atualmente o Instituto de Recursos e Investigação para a Formação e é diretor do Campus Virtual de Educação da Universidade de Barcelona. Responsável pela maior transformação do sistema de ensino espanhol, pós-ditadura de Franco, o educador tornou-se uma referência internacional na educação. <<http://educpedcurriculo.blogspot.com/2015/10/biografia-de-antoni-zabala.html>>. Acesso em: 01/05/2020.

As SD's permitem ensinar um determinado conteúdo através de um conjunto de atividades que são interligadas entre si explorando o intelecto do aluno fazendo que os mesmos relacionem os conhecimentos adquiridos anteriormente, sejam elas empíricas ou não, com o novo conhecimento a ser aprendido. Esta proposta metodológica permite que o professor/pesquisador apresenta uma forma inovadora de ensinar, desviando da prática de ensino tradicional, isso não significa dizer que o ensino tradicional não seja eficaz, fazendo uso da aula expositiva (definições, exercícios de fixação, exercícios propostos e prova) e fazendo uso do livro didático, porém o ensino tradicional vem sendo questionado nas últimas décadas pelo fato das produções e resultados que os alunos apresentam não serem satisfatórios.

A utilização da expressão “Sequência Didática” no contexto do planejamento de estratégias organizadoras para o desenvolvimento dos objetivos educacionais no contexto escolar da Educação Básica, vem ganhando notoriedade, nas diferentes áreas do conhecimento, no atual cenário educacional brasileiro. (GONÇALVES, 2019, p. 27).

Tanto no Brasil como em outros países, a prática metodológica da SD vem ganhando cada vez mais espaço dentro das escolas de Educação Básica, e cada vez mais vem sendo introduzido na prática docente de diversos professores/pesquisadores.

As sequências didáticas estão ganhando cada vez mais espaços com a nova geração de materiais didáticos elaborados pelas editoras mais novas no Brasil, diferentemente das editoras tradicionais que, muitas vezes, apenas reformulam seu material editorial. (MOTA, 2019 p. 24).

Assim, espera-se que em breve as diversas editoras venham complementar seus materiais didáticos com essa proposta de ensino, permitindo que o professor venha ter outras opções de poder trabalhar novas propostas em sala de aula, mas para isso é necessário que haja cada vez mais pesquisas nessa área, principalmente entendendo a construção de sequências didáticas, para mostrar a eficácia e a validação dessa proposta, .

Através da sequência didática o professor/pesquisador vai a campo aplicar suas atividades e precisa analisar os tipos de atividades que será aplicada, onde cada atividade realizada pelo aluno possui uma grande importância no desenvolvimento do conhecimento, assim quando é elaborado determinadas atividades que seguem uma sequência significativa, ou seja, são produzidas atividades com um determinado objetivo a ser alcançado, segundo Zabala (1998, p. 18) “é preciso ampliar esta unidade elementar e identificar, também, como nova unidade de análise, *as sequências de atividades* ou *sequências didáticas*”.

As *sequências de atividades* ou *sequências didáticas* permitem analisar a prática da pesquisa, além de verificar o planejamento, a aplicação e a avaliação. Para Zabala (1998, p.

18), define SD como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm início e fim conhecidos pelos professores e pelos alunos”.

A configuração da SD determina as características da prática educativa, mas para isso, deve ser elaborada de forma que sua aplicabilidade seja construtiva e gradual, buscando uma sequência ordenada de atividades. Quando comparamos as variáveis da proposta metodológica da SD com outras propostas metodológicas educacionais, verificamos que é simples de reconhecer a diferença da SD de outras propostas.

Os tipos de atividades de uma SD, mas sobretudo sua maneira de se articular, são um dos traços diferenciais que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas. Mas o primeiro elemento que identifica um método é o tipo de ordem em que se propõem as atividades. Deste modo, pode se realizar uma primeira classificação entre métodos expositivos ou manipulativos, por recepção ou por descoberta, indutivos ou dedutivos, etc. (ZABALA, 1998, p. 53).

A SD possui elementos únicos em suas configurações, no qual a caracteriza por possuir uma sequência ordenada de atividades articuladas, formando unidades temáticas.

"Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula." (PAIS, 2011, *apud* MOTA, 2019, p. 21).

A SD é elaborada de acordo com que o professor/pesquisador objetiva na sua investigação, e a mesma é planejada com base em hipóteses, e as sessões da SD são conectadas entre si, fazendo com que o aluno percorra um caminho que o levam para a aprendizagem do conhecimento matemático que o professor/pesquisador propôs. Segundo Batista *et al.* (2013), *apud* Oliveira (2018, p. 38), o uso da SD “permite que o professor dê sentido aos conteúdos, sendo possível alcançar um ensino investigativo, com a problematização, a organização dos conteúdos e aplicação do conhecimento”.

Ao elaborar uma SD o professor/pesquisador pode ou não se dedicar em atividades apenas na perspectiva de algoritmos, mas pode também buscar outras formas de repassar o conhecimento através da SD, tais como, através da prática da leitura, atividades de pesquisas individuais ou coletivas, atividades orais ou escritas, entre outros. Vieira e Ohira (2013), *apud* Oliveira (2018, p. 39) afirmam que “é necessário um planejamento, atenção durante a aplicação e uma avaliação durante e após a aplicação da sequência. Isso significa dizer que uma SD ocorre em três etapas, que são: *planejamento, aplicação e avaliação*”.

I. *Planejamento*: ao planejar uma sequência didática, o professor deve primeiramente selecionar o conteúdo ou tema a ser ensinado, considerando os significados que ele tem para o aluno, quais conhecimentos prévios ele poderá ter e como introduzi-los de forma a motivá-lo. Em relação às atividades da sequência, é importante considerar o tempo disponível e usar recursos didáticos e estratégias metodológicas que facilitem o aprendizado e a fixação dos conteúdos;

II. *Aplicação*: Durante a aplicação da sequência didática, o professor deverá observar e intervir (se necessário) quando estes não são suficientes para a compreensão dos alunos, ou se ficou alguma lacuna na ligação entre elas, fazendo então o acréscimo de uma ou mais atividades;

III. *Avaliação*: no decorrer da aplicação da sequência didática, o professor fará a avaliação do aluno em cada uma das atividades realizadas [...], e com esses recursos ele fará a análise da sequência, verificando se os conteúdos usados, as metodologias e instrumentos aplicados nas atividades foram suficientes para a aprendizagem do aluno.

(VIEIRA; OCHIRA, 2013, *apud* OLIVEIRA, 2018, p. 39).

Assim, cada uma dessas etapas contribui para a organização do ambiente de aplicação, dos conteúdos propostos, do público, das atividades e das avaliações, além de direcionar o professor/pesquisador em não cometer interferências que impliquem no desenvolvimento do ensino e na concretização da aprendizagem.

Quadro 1: Visão geral sobre Sequência Didática - Zabala.

Para ensinar qual disciplina?	Como é definida?	Prevê etapas?
Qualquer disciplina, de acordo com a natureza do conteúdo da aula: factual; conceitual; procedimental e atitudinal.	Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de objetivos educacionais.	Leva em conta a existência de variáveis que interferem em todas as aulas, tais como: - Relações interativas; - Organização social da classe; - Utilização dos espaços e do tempo; - Organização dos conteúdos; - Materiais curriculares e outros recursos; - Avaliação. De acordo com a natureza dos conteúdos da aula, há maior ênfase na exposição ou na prática.

Fonte: Barbosa (2017).

A Quadro 1 na perspectiva de Zabala, como a SD deve ser entendida como proposta metodológica e a abrangência da mesma na prática educacional. Segundo Zabala (1998), *apud* Pereira (2017, p. 20), a SD “pode ser vista como um modo de orientar as atividades, e não

como um tipo de tarefa e sim como um critério que permite ao professor identificar e caracterizar de forma preliminar o modo de ensinar”.

Para que uma SD tenha sucesso em sua aplicação, é de suma importância o seu planejamento, considerando fases iniciais, os critérios de cada etapas das atividades, o tempo de aplicação, organização e a avaliação do aprendizado da turma, é importante também considerarmos intervenções planejadas em cada etapa da aplicação da SD. Assim, para a aplicação de uma SD faz-se necessário pensarmos em algumas fases primordiais, tais fases, são concebidas no estudo de Cabral (2017).

Em termos de modelo estrutural de acordo com a concepção da Escola de Genebra para (DOLZ; NOVERRAZ E SCHNEUWLY, 2004, P.98) esse procedimento metodológico de SD é concebido por quatro fases distintas, quais sejam: *apresentação da situação de ensino, a produção inicial, os módulos e a produção final*. (CABRAL, 2017, p.33).

Portanto, na concepção de Cabral (2017), podemos descrever e detalhar cada uma das 4 fases propostas pelo mesmo, vejamos:

A primeira fase é a fase da *Apresentação do Projeto*, que para Mota (2019, p. 24), “é o momento em que o professor apresenta aos alunos as atividades e os estudos que irão realizar”.

Nesta primeira fase, o professor/pesquisador irá fazer uma breve explicação para os alunos do que consistem nas atividades, sobre que conteúdo matemático irá estudar, os objetivos de cada atividade, a importância de cada atividade ser realizada com atenção, entre outros.

Na segunda fase, a fase da *Produção Inicial*, os alunos, já informados sobre o projeto, irão expor o que sabem e pensam sobre o assunto, por meio de produção de texto, conversas, etc. A produção inicial trata-se de uma avaliação prévia e é através dela que o professor conhece as dificuldades dos alunos e obtém meios de estabelecer quais atividades deverão ser empregadas na sequência didática. (MOTA, 2019, p. 24).

Na fase da produção inicial, o professor/pesquisador irá fazer uma avaliação diagnóstica sobre o que os alunos já adquiriram de conhecimentos necessários em conteúdos anteriores e necessários já vistos em outras etapas das da vida escolar do mesmo, essa avaliação não necessariamente será uma prova escrita, não descartando essa possibilidade, mas também pode ser por meio de outros instrumentos educacionais. Caso algum aluno não tenha o conhecimento necessário para adquirir o novo conhecimento proposto pelo professor/pesquisador, o professor/pesquisador terá que adequar esse aluno, dando as ferramentas necessárias para tal aluno poder realizar as atividades.

Já na terceira fase, a fase dos *Módulos*, as atividades (exercícios e pesquisas) planejadas metodicamente, com a finalidade de desenvolver as capacidades do aluno. Os módulos devem ser direcionados às dificuldades encontradas na produção inicial dos alunos e visando a superação dessas dificuldades, devem propor atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma. (MOTA, 2019, p. 24).

Já na fase do desenvolvimento dos módulos, o objetivo é a aplicabilidade da SD, onde haverá realização de oficinas, no qual em cada etapa será aplicada uma atividade de nível de dificuldade crescente, e ao mesmo tempo, colocando os alunos em situação que venham suprir as dificuldades encontradas nas etapas anteriores, e tais atividades podem ser realizadas conforme o professor/pesquisador achar necessário para registrar de forma mais prática e efetiva o que ocorre nas ações dos alunos, e conforme os objetivos pretendidos em cada atividade.

Por fim, na quarta fase, a fase da *Produção Final*, segundo Mota (2019, p. 24), “é necessário que ocorra uma avaliação do que os alunos conseguiram aprender no decorrer da sequência didática. Comparação entre produção inicial e produção final”.

Nesta última fase, o professor irá comparar o aprendizado do aluno com o seu desenvolvimento em cada uma das atividades iniciais, esta comparação será realizada através de uma avaliação em que os alunos colocarão em prática tudo que aprendeu nas atividades da terceira fase.

Zabala (1998) coloca que a partir do planejamento do professor, na elaboração de uma SD, um conjunto de relações interativas que favorecem o processo de ensino – aprendizagem, essas relações interativas podem ser descritas como:

- I. Flexibilidade na ação docente de modo a permitir adaptações às necessidades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento da sequência;
 - II. Levar em consideração o conhecimento e as considerações dos alunos do decorrer da sequência;
 - III. Oferecer ajuda de modo adequado aos alunos no sentido de fazer com que eles conheçam o que têm que fazer, sintam-se seguros e confiantes com seus progressos e estimulados a enfrentar os obstáculos nos quais se depara, de maneira autônoma para alcançar as metas estabelecidas;
 - IV. Suscitar meios para a comunicação que possam regular a negociação e a participação de modo a criar um ambiente de respeito mútuo e o sentimento de confiança;
 - V. Avaliar os alunos de acordo com suas evoluções individuais, levando em conta seus esforços, o ponto pessoal de partida, incentivando a autoavaliação para a regulação da própria atividade.
- (PEREIRA, 2017, p. 21).

Além dessas relações interativas, Zabala (1998) ainda aponta três categorias sobre os conteúdos escolhidos para compor a aplicação da SD, que são: os *Conteúdos Conceituais*, *Conteúdos Procedimentais* e os *Conteúdos Atitudinais*.

- I. Os *conteúdos conceituais* são aqueles referentes ao desenvolvimento de capacidades cognitivas para operação de símbolos, imagens, ideias e representações que favorecem uma organização da realidade;
 - II. Os *conteúdos procedimentais* são aqueles que dizem respeito ao conjunto de ações dirigidas de modo a alcançar uma meta. Compreendem os conteúdos procedimentais os atos de ler, escrever, traduzir, calcular, desenhar, observar, classificar, recortar, etc. Sempre com um objetivo a ser alcançado;
 - III. Os conteúdos atitudinais são aqueles que se referem às atitudes e valores formados diante de uma informação recebida, fomentando no aluno uma visão de intervenção de sua realidade nas ações realizadas, refletindo sobre sua atividade e seu desenvolvimento em diferentes contextos.
- (PEREIRA, 2017, p. 21).

Percebe-se que Zabala (1998) aponta alguns aspectos que são importantes para o professor/pesquisador entender como deve proceder na escolha do conteúdo a ser aplicado, entender o ambiente e o público que estará trabalhando e sua relação com esse conjunto de ações.

Segundo Oliveira (2018, p. 39), “entendemos que utilizar sequências didáticas no ensino de matemática pode contribuir com a consolidação de conhecimentos que estão em fase de construção, possibilitando que novas aquisições sejam possíveis”.

Assim, o objetivo de uma SD é propor o ensino de algum conteúdo matemático, estimulando aprendizagem de tal conteúdo a partir da observação de regularidades e do estabelecimento de generalizações num ambiente dinâmico de interações empírico-intuitivas.

Posteriormente, iremos apresentar uma proposta metodológica para o ensino de matemática elaborada por Cabral (2017), onde apresenta um modelo estrutural para a elaboração de uma SD para o ensino de matemática, denominada de Unidade Articuladas de Reconstrução Conceitual.

1.3 – UNIDADE ARTICULÁVEL DE RECONSTRUÇÃO CONCEITUAL

A *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC)* teve como idealizado Cabral³ (2017), no qual através de suas experiências como professor da Educação Básica, percebeu algumas lacunas no processo de ensino – aprendizagem através do ensino tradicional (definição, exemplo e exercício) e isso o motivou como docente do curso de licenciatura em

³ Natanael Fritas Cabral (s/d), Doutor em Educação pela PUC- Rio. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Matemática. Atuou como professor no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Ensino de Matemática I e II no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA) e coordenou o Laboratório de Educação Matemática (LABEM/UEPA) e foi Líder do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), vinculado à Universidade do Estado do Pará. Atualmente está oficialmente aposentado das atividades acadêmicas.

matemática a repassar para seus alunos uma forma de trabalhar conteúdos matemáticos na Educação Básica de forma diferente do qual os mesmos foram ensinados.

O objetivo de Cabral (2017) é criar uma alternativa que simultaneamente afaste os alunos do modelo “tradicional” de aula (definição - exemplo - exercício) e os aproxime de uma prática discursiva dialógica, promotora de interações verbais reflexiva, que de algum modo, perceber mesmo que por intuição, a necessidade e utilidade de se estabelecer generalizações, seria de grande contribuição para o processo de ensino-aprendizagem. (OLIVEIRA, 2018, p. 40).

Assim, Cabral (2017) propõe a elaboração e a construção de uma SD tendo como modelo as UARC, no qual a construção da SD ocorre de forma gradual, onde tem como princípio a reconstrução conceitual de um objeto matemático.

A concepção que proponho aqui se fundamenta numa analogia da reconstrução conceitual de um objeto matemático com o procedimento adotado para se determinar a medida da área de uma superfície a partir de uma unidade previamente definida. Imaginemos que o conceito objeto de reconstrução seja representado, por analogia, a uma superfície S . (CABRAL, 2017, p. 39).

Cabral (2017) coloca que para que haja a reconstrução conceitual de um objeto matemático, é necessário possuir um ponto inicial, no qual pode ser definida por uma variedade de conceitos dentro do que se deseja reconstruir. Como exemplo, Cabral (2017), utiliza a superfície S de uma região como o ponto de partida e tomando uma segunda superfície “ s ” como unidade de medida da superfície S , inicia-se o processo de reconstrução conceitual, onde ele denomina como *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Primeira Geração (UARC -1)*.

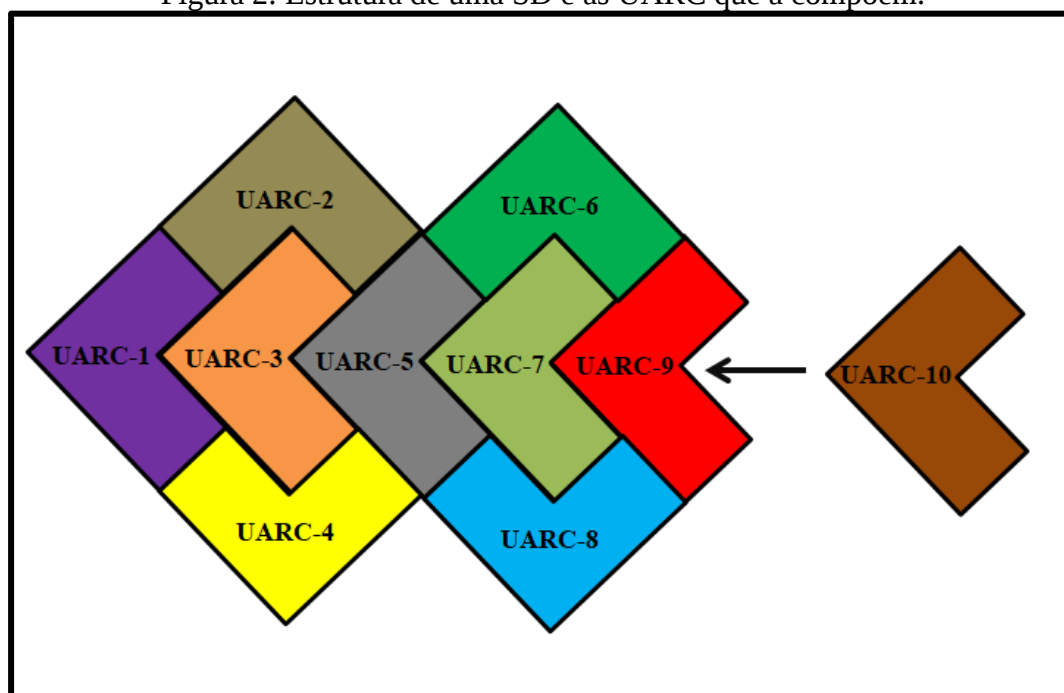
No exemplo acima, Cabral (2017, p. 39) afirma que, “é como se estivéssemos revestindo um piso com placas de área unitária. Podemos começar por uma variedade de posições dentro de S . Denomino de UARC-1 essa primeira escolha”.

A partir da UARC-1 o professor/pesquisador deverá escolher uma segunda ligada a UARC-1.

O professor terá sua segunda escolha condicionada, não podendo este escolher uma unidade qualquer do objeto matemático, deverá então tomar uma peça unitária imediatamente ligada à primeira denominada de *Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Segunda Geração (UARC-2)*. (PEREIRA, 2017, p. 23).

E a partir da UARC-2, haverá outra escolha que define a UARC-3, e assim sucessivamente se define as UARC superiores, sempre condicionadas a uma ligação com as UARC inferiores. Assim, tomando esses procedimentos, todas as UARC são definidas permitindo que na última UARC, que Cabral (2017) definiu como n -ésima UARC, a reconstrução conceitual do objeto matemático seja alcançada.

Figura 2: Estrutura de uma SD e as UARC que a compõem.



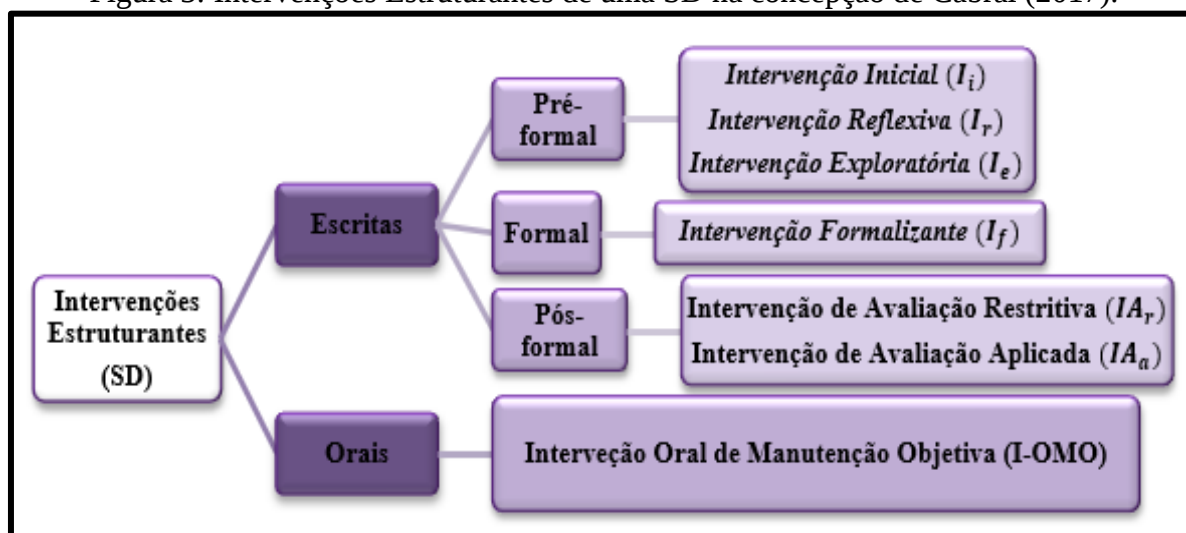
Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

A Figura 2 nos mostra que em uma SD contém várias UARC e que todas estão interligadas entre si, desde a UARC-1 até a última UARC. Percebe-se que nem todas as UARC se conectam diretamente, mas isso ocorre indiretamente, pois, por exemplo, a UARC-1 não se conecta diretamente com a UARC-5, mas pelo fato de a UARC-1 se conectar com a UARC-2, UARC-3 e UARC-4, no qual todas estas citadas se conectam diretamente com a UARC-5, portanto, de forma indireta a UARC-1 se conecta com a UARC-5, já que uma depende da outra no processo de reconstrução conceitual. Porém, poderia ocorrer de forma contrária, onde a UARC-1 se conecta diretamente com a UARC-5, e se conecta indiretamente com as outras UARC, mas o é importante garantir que haja essa conexão.

À medida que as demais UARC de ordem superior são definidas com os mesmos critérios das anteriores, o objeto matemático é reconstruído/revestido. Em tese, os conceitos reconstruídos pelo aluno em cada uma dessas UARC contribuem potencialmente para sua reconstrução do objeto matemático até que, nas interações promovidas numa n-ésima UARC, a reconstrução pretendida é atingida por ele.
(PEREIRA, 2017, p. 24).

Para entendermos melhor essa interação entre as UARC, Cabral (2017) descreve alguns significados para o que ele chama de *Intervenções Estruturantes*, no qual são divididas em *Escritas* e *Orais*. As *Intervenções Estruturantes Escritas* são classificadas em *Pré-formais*, *Formais* e *Pós-formais*, já as *Intervenções Estruturantes Orais* também podemos chamar de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I-OMO)*.

Figura 3: Intervenções Estruturantes de uma SD na concepção de Cabral (2017).



Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

A Figura 3 nos mostra que são descritas seis Intervenções Estruturantes Escritas, proposta por Cabral (2017), que são: *Intervenção Inicial* (I_i), *Intervenção Reflexiva* (I_r), *Intervenção Exploratória* (I_e), *Intervenção Formalizante* (I_f), *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r), e por fim, a *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a).

- I. *Intervenção Inicial* (I_i) é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito;
- II. *Intervenção Reflexiva* (I_r) sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Ainda que, para o aluno, esse questionamento não tenha um sentido mais relacional e, portanto, capaz de suscitar vários desdobramentos, no entanto, as ideias envolvidas tangenciam fatos importantes que vão facilitar a reconstrução final do objeto em jogo;
- III. *Intervenção Exploratória* (I_e) tem com objetivo aprofundar olhar do aluno a respeito das respostas obtidas a partir da *Intervenção Reflexiva* (I_r).

(CABRAL, 2017, p. 40-41).

A proposta de Cabral (2017) descreve três intervenções primárias que compõem as *Intervenções Escritas Pré-formais*, que permite que o professor/pesquisador venha intervir na aplicação de sua SD de forma consciente a adquirir informações úteis para sua pesquisa e ao mesmo tempo auxiliar o aluno a exigir de si mesmo a seguir um caminho que faça o mesmo a ter sucesso em adquirir conhecimento suficiente para passar por todas as UARC superando suas dificuldades e alcançando à aprendizagem do objeto matemático.

- IV. A partir das generalizações (empírica-intuitiva por parte dos alunos) fomentadas pelas *Intervenções Estruturantes (Reflexivas e Exploratórias)* o professor, que orienta o pensamento mediado pela sequência didática, se apropria dessas verdades “empírico-intuitivas” (sugeridas pelos alunos) e, a partir delas, enuncia o que chamo de *Intervenção Formalizante* (I_f). (CABRAL, 2017, p. 42).

A *Intervenção Estruturante Formal*, também pode ser chamada de *Intervenção Formalizante* (I_f), cujo objetivo é tomar as informações adquiridas pelos alunos, a partir de regularidades que permitem que os alunos percebam que determinada proposição é verdadeira, assim formalizando essa proposição a partir do entendimento dos alunos. Finalmente, após a *Intervenção Formalizante* (I_f) o professor pode avaliar o conhecimento adquirido pelos alunos em sua SD de duas formas, através da *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) e da *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a).

V. As *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) buscam aferir as aprendizagens dos alunos em dois aspectos fundamentais do saber matemático, quais sejam: O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, além disso, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações);

VI. As *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a) cuja finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

(CABRAL, 2017, p. 43).

A *Intervenção Avaliativa Restritiva* (IA_r) e *Intervenção Avaliativa Aplicativa* (IA_a), fazem parte das *Intervenções Estruturantes Escritas Pós-formais*, nas quais são intervenções que são elaboradas com a finalidade de serem utilizadas após a reconstrução conceitual de determinado objeto matemático a partir das UARC, onde possui o objetivo de verificar se o aluno foi capaz de adquirir a aprendizagem através da SD, e a primeira etapa para se avaliar a aprendizagem matemática é através do reconhecimento do objeto matemático e seus elementos e a manipulação operatória dos algoritmos e elementos do objeto matemático.

Posteriormente, será realizada a avaliação que é referente aplicabilidade do objeto matemático em meio a elementos do cotidiano ou elementos aplicados cientificamente em laboratórios, ou seja, nessa etapa o aluno irá encontrar solução para determinadas situações – problemas, colocando em prática todo o conhecimento adquirido desde o primeiro contato com a SD até o momento em questão, além de elaborar esquemas empírico-intuitivos que o auxiliarão para chegar a solução da situação a– problema.

Paralelamente às *Intervenções Estruturantes Escritas* ocorre também outro tipo de intervenção proposta por Cabral (2017), que pode ser chamada de *Intervenção Estruturante Oral/verbal*, no qual ele denomina de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva* (I-OMO).

Para definirmos a I-OMO faz-se necessário voltar ao início das intervenções estruturantes escritas, no qual o primeiro passo são as *Intervenções Iniciais* (I_i), onde o

professor/pesquisador faz uso do discurso dialógico-didático referente a o que está escrito na SD, explicando o funcionamento da SD, com a função de estimular o aluno a perceber as regularidades contidas em cada UARC, portanto, o professor/pesquisador necessita de um discurso oral/verbal para expressar tais estímulos aos alunos. Desta forma, Cabral (2017) coloca duas modalidades para as *Intervenções Iniciais* (I_i), que são: *Exploratória Potencial* ($I_i - EP$) e *Conexão Pontual* ($I_i - CP$).

Em ambas as modalidades a condução diretiva-dialógica do professor assume o papel de orientador do pensamento que tem como objetivo a (re)construção de um ou mais conceitos já sistematizados do saber disciplinar da Matemática sugerida no currículo escolar. (CABRAL, 2017, p. 45).

Entendo melhor cada uma dessas modalidades, a $I_i - EP$ é aquela onde o professor/pesquisador irá fazer uma série de questionamentos, que segundo Cabral (2017, p. 46), “permite ao professor desencadear uma série de procedimentos investigativos, simulações, conjecturas, hipóteses, analogias, empíricas, que são procedimentos típicos de construção do saber matemático”.

Já a $I_i - CP$ faz com que a $I_i - EP$ seja intencional para conectar cada questionamento realizado a um ponto em determinada UARC, suprimindo determinadas dificuldades ou impasses para que os alunos prossigam nas atividades. Além das *Intervenções Escritas* que são de suma importância na SD, pois segundo Cabral (2017, p. 45), “ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem”.

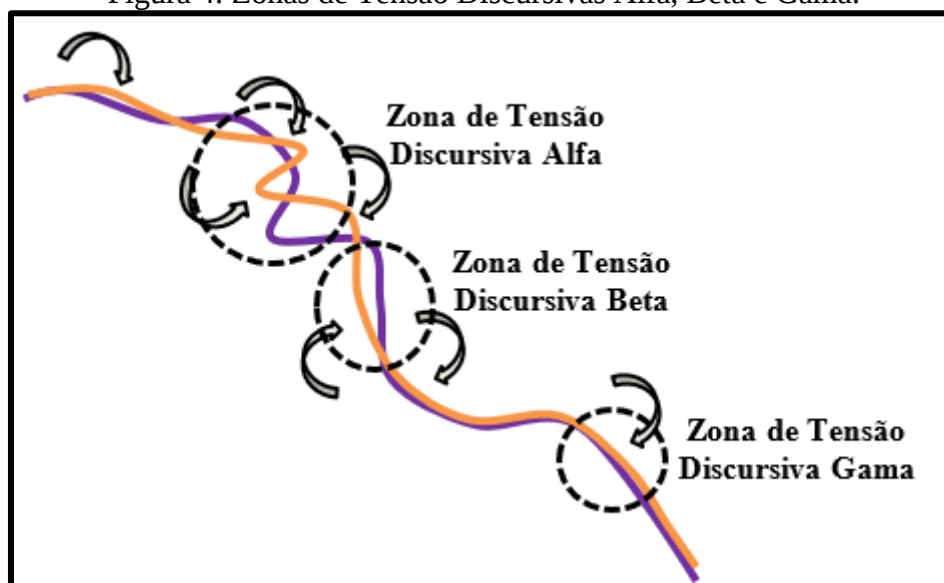
Todas as Intervenções Escritas compõe a estrutura textual da SD, porém com as modalidades da *Intervenção Inicial* (I_i), permitiu que Cabral (2017) elaborasse uma sétima categoria de intervenção já mencionada, chamada de *Intervenção Oral de Manutenção Objetiva* (I-OMO). Cabral (2017, p. 47) afirma que, “a I-OMO tem a finalidade de manter a objetividade planejada, manter o foco da reconstrução pretendida pela sequência didática”. Desta forma, a I-OMO possui um papel fundamental em uma SD, pois permite que o professor/pesquisador estimule o aluno a seguir os objetivos da SD.

Cabral (2017) considera as IOMO fundamentais por dois motivos: “Por um lado, permitem as modulações do professor no sentido de estimular o aluno em direção aos objetivos estabelecidos pela sequência didática e, por outro lado, em possibilitar futuras reformulações no texto utilizado que media a aprendizagem”. (OLIVEIRA, 2018, p. 45).

O aluno, quando realiza as atividades da SD, ele tende a desviar o direcionamento do conhecimento do objetivo da SD, e o professor tem o papel de fazer com que o aluno retorne para o objetivo da SD através das I-OMO's, a essa prática do professor, Cabral (2017)

denominada de Zona de Tensão Discursivas, que são contornos que alinham os desvios dos alunos com as intenções do professor na SD, e que Cabral (2017) classifica essas I-OMO's em três categorias, que são chamadas de Alfa, Beta e Gama.

Figura 4: Zonas de Tensão Discursivas Alfa, Beta e Gama.



Fonte: Adaptado de Cabral (2017).

Antes de definirmos as Zonas de Tensão Discursiva Alfa, Beta, e Gama, iremos entender o funcionamento das linhas “Lilás” e “Laranja” na Figura 4, no qual as setas indicadas na Figura 9 significam as intervenções do professor/pesquisador para que o aluno siga na linha direcionada do objetivo da SD.

A linha “Lilás” representa as pretensões didáticas do professor/pesquisador, ou seja, o percurso previsto das aprendizagens desde a idealização da SD. Já a linha “Laranja” mostra as ações dos alunos a partir das provocações do texto escrito associadas às intervenções orais/verbais desenvolvidas pelo professor/pesquisador ao longo do processo. Representa o caminho percorrido pelo aluno diante do objeto de aprendizagem. Agora podemos definir as Zonas de Tensão Discursivas, descrita por Cabral (2017).

A Zona Alfa é a zona inicial onde as primeiras articulações argumentativas são propostas em direção aos objetos de aprendizagem. Por se tratar de um processo de redescoberta conceitual esse momento é marcado, em geral, por pequenos avanços e frequentes intervenções do professor. (OLIVEIRA, 2018, p. 47).

A *Zona Alfa* funciona baseada no domínio dos alunos diante do objeto matemático, quanto maior for o domínio do aluno, menor será as intervenções do professor, o contrário também ocorre, quanto menor o domínio do aluno diante do objeto matemático, maior será as intervenções do professor.

A *Zona Beta* é a zona intermediária marcada por uma tensão discursiva de baixa intensidade. Aqui o professor percebe que certas conquistas de aprendizagens fundamentais estão sendo consolidadas e os alunos aprendizes já sinalizam atitudes de autonomia em relação tanto às interpretações do protocolo escrito (isto é, a sequência didática) que lhes dirigem o pensamento quanto nas associações entre essas aquisições parciais e fundamentais e os desdobramentos desses conhecimentos na aquisição de novas percepções. (OLIVEIRA, 2018, p. 47).

Já na *Zona Beta*, o aluno já começa entender a funcionalidade do objeto matemático, logo o professor intervém com pouca frequência, permitindo com que o aluno seja mais autônomo que na *Zona Alfa*.

Por fim, a *Zona Gama* enfatiza a avaliação do nível de segurança conceitual e algorítmica do aluno. É um momento em que o professor percebe que o domínio do objeto de conhecimento já se mostrou relativamente consolidado pela classe e, então, passa a propor situações problemáticas mais complexas, inclusive intervindo no discurso. (OLIVEIRA, 2018, p. 48).

A *Zona Gama*, é a zona onde o professor percebe que o aluno já se sente seguro em solucionar problemas um pouco mais complexos que anteriormente, pois já possui certo domínio do objeto matemático, e nesse momento o professor aproveita para avaliar o conhecimento adquirido pelo aluno, e por fim, o aluno alcançou o objetivo da SD.

Durante o processo nas zonas Alfa e Beta, o professor busca levar o aluno a refletir no sentido de “mantê-lo sobre os trilhos” dos objetivos de aprendizagem organizados na sequência didática proposta. Na *Zona Gama*, o professor pode promover intervenções no sentido de “retirá-los dos trilhos” desses objetivos. (OLIVEIRA, 2018, p. 48).

Em uma Sequência Didática (SD), quando estruturada e elaborada conforme a Unidade de Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), proposta por Cabral 2017, requer bastante atenção e dedicação. Pois, percebe-se que existem diversas definições, que quando visualizada de forma geral, é bastante complexa, e com isso, nos fornece resultados bem detalhados do objetivo da aplicação da SD, pois não se preocupa apenas em fornecer o resultado da aprendizagem, mas também informações importantes de todo o processo de ensino – aprendizagem até o objetivo final da SD.

1.4 - RECURSO DE APRENDIZAGEM

Neste tópico, apresentamos o recurso pedagógico utilizado para auxiliar os alunos no processo de resolução das questões propostas na SD. Desta forma, com o princípio de alcançar

os objetivos de cada atividade da sequência didática, tomamos o uso da calculadora como objeto tecnológico no processo de ensino e aprendizagem de progressão geométrica.

Assim, consideramos os estudos de Fedalto (2006), em que apresenta na sua dissertação sobre “O imprevisto futuro das calculadoras nas aulas de matemática no ensino médio”.

Desde os primórdios das operações básicas da matemática, existiram diversos instrumentos para realização de cálculos, principalmente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, além da expansiva evolução destes instrumentos.

Um dos instrumentos mais comum atualmente, é a chamada calculadora eletrônica, em que possui diversos modelos com diferentes funções adaptadas para cálculos matemáticos distintos. Segundo Fedalto (2006, p. 26), “a ideia de uso de uma calculadora seria explorar os conteúdos aproveitando suas capacidades operatórias e desenvolvendo atividades que exijam dos alunos a tomada de decisões, a elaboração de estratégias e a resolução de problemas.

Desta forma, o professor responsável por optar pelo uso da calculadora em suas aulas, além de possuir domínio da ferramenta eletrônica, exigiria um planejamento adequado para inserção do instrumento como recurso didático, estudo e preparação para realizar uma abordagem conectada com as atividades realizadas.

A habilidade de cálculo, a memorização de fórmulas tem sua importância e não devem ser extintas das aulas de Matemática. O que estamos destacando aqui é que a Matemática pode ser estudada e ensinada com o apoio de instrumentos como a calculadora, o computador; e que nossa preocupação deve voltar-se a explorar conceitos, fórmulas e regras de forma que o aluno compreenda o que está fazendo e possa usar os seus conhecimentos em problemas que, na medida do possível, aproximem-se da realidade. (FEDALTO, 2006, p.27).

O uso de calculadoras em atividades do cotidiano é muito comum, principalmente no ramo comercial, em venda de produtos, contabilidade, entre outros, porém ainda é uma barreira seu uso nas aulas de matemática, no qual está diretamente ligada ao uso de cálculos para solucionar problemas. Conforme aponta Fedalto (2006), ironicamente, talvez o único lugar onde não se pode usar uma calculadora seja a sala de aula de matemática, a ideia de que um instrumento de cálculo não seja explorado justamente nas aulas de Matemática, é estranha.

No ambiente escolar brasileiro, infelizmente, os alunos não foram ensinados a utilizar a calculadora para aprimorar seus conhecimentos matemático, no qual, há a ambição por parte dos discente em utilizar o instrumento de cálculo para valorizar sua nota ao invés do aprendizado. Desta forma, fica como esforço do professor em inserir nas suas aulas o uso de calculadoras, como forma de desmitificar a cultura de que usar calculadora em sala de aula não é proveitoso para os alunos.

O uso da calculadora, de forma correta e consciente, é importante, uma vez que, a habilidade de cálculo, a memorização de fórmulas pode ser de fácil compreensão com o auxílio de ferramentas eletrônicas, no qual possibilita explorar padrões e regularidades, capaz de investigar situações matemáticas que geram equações e fórmulas.

1.5 – INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico, apresentamos os objetos teóricos e pedagógicos que tomamos como base para a elaboração das atividades em cada UARC de nossa SD. Desta forma, com o princípio de alcançar os objetivos de cada atividade da sequência didática, tomamos como tendência da educação matemática, o processo de Investigação Matemática (IM) em todas as URAC's, e o uso da calculado como objeto tecnológico no processo.

Dentre as tendências da educação matemática, o que nos inspirou no uso da investigação matemática para a realização das atividades da sequência didática, foi a revisão da literatura sobre o ensino de progressão geométrica, realizada nesse texto, em que os autores apresentam propostas de ensino no qual os alunos se tornam ativos no processo de ensino a partir de investigações de objetos matemáticos.

Assim, consideramos como base teórica o estudo de Ponte *et al.* (1998), cujo título de seu livro é “Histórias de Investigações Matemáticas”, no qual seu estudo surgiu a partir do Projeto Matemática Para Todos — Investigações na Sala de Aula, e teve por objetivo estudar os problemas e dilemas profissionais bem como o conhecimento profissional necessário ao professor que pretende envolver os seus alunos neste tipo de atividade matemática.

Ponte *et al.* (1998) descreve que “uma atividade matematicamente rica por parte dos alunos surge, em especial, quando o professor valoriza e fomenta nas aulas a realização, discussão e avaliação de atividades de investigação”. Desta forma, podemos comparar a sequência didática para o ensino de matemática como uma fomentar a investigação matemática através de resolução de problemas.

“Uma vez que existe uma profusão de formulações sobre o que se entende por “investigações matemáticas”, é necessário explicitar o sentido que lhes atribuímos neste projecto. As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por “actividade matemática”, o que corresponde a identificar aprender Matemática com fazer Matemática”. (PONTE *et al.* ,1998, p. 8).

Desta forma, a IM gera diversas possibilidades de ensino, no qual o aluno aprende através do fazer e do analisar a partir da colaboração entre os atores que promovem o ensino.

Segundo Santos (2018, p. 21), “com a inserção da investigação no ensino de matemática, o mesmo fica cheio de perguntas e inquietações que levam os alunos a perceberem o segredo que norteiam a construção do conhecimento matemático”.

Desta forma, o professor passa a valorizar e incentivar a criatividade tendo uma participação ativa dos alunos, assim, a relação professor-aluno, torna-se fundamental do processo de ensino e aprendizagem, no qual o professor deixa de ser o centro do processo de ensino do objeto matemática, enquanto os alunos percebem o segredo que norteiam a construção do conhecimento matemático, isto é, o aluno se torna ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Conforme afirma Varizo (2007) *apud* Santos (2018, p. 21-22), a investigação matemática “tem por objetivo oferecer oportunidade para os alunos vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e assim motivá-los a estudarem matemática”.

Neste caso, as atividades investigativas proporcionam aos alunos, a possibilidade de, segundo Love (1988) *apud* Ponte *et al.* (1998, p. 9):

- identificar e iniciar os seus próprios problemas;
- expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas;
- testar as suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes;
- defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros à crítica ponderada

A IM é uma importante ferramenta no processo educacional, uma vez que, segundo Brocardo e Oliveira (2016) *apud* Santos (2018):

[...] ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir, como um matemático, não só na formulação de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor. (BROCADO e OLIVEIRA, 2016, *apud* SANTOS, 2018, p. 22).

Brocardo e Oliveira (2016) *apud* Santos (2018), apontam que, é preciso cumprir quatro etapas para realizar investigação matemática, que são:

- *Exploração e formulação*, no qual o aluno deve reconhecer e explorar a situação problemática, e formular uma questão (levantar questionamentos);
- *Conjecturar*, em que deverá organizar dados e formular conjecturas;

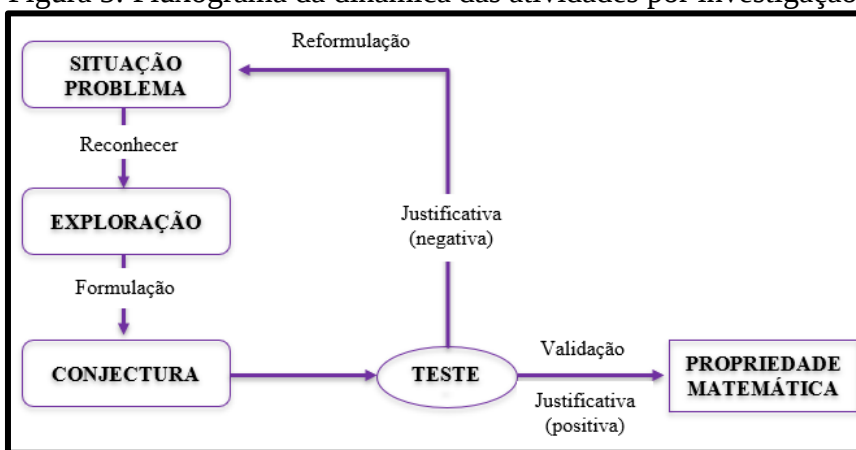
- *Testes e reformulação*, o aluno será capaz de realizar testes com os dados obtidos e refinar a conjectura;
- *Justificativa e validação*, no qual o aluno justificará sua conjectura e avaliará os resultados do raciocínio.

Assim, percebe-se que a IM está diretamente relacionada com a resolução de problemas. Desta forma, Ponte *et al.* (1998) afirma que:

“Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas. Os dois termos são usados muitas vezes de modo indistinto. Ambas as noções se referem a processos matemáticos complexos e ambas envolvem actividade fortemente problemática. A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. “Actividades investigativas” ou “investigações matemáticas” designam, no contexto deste projecto, um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São actividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos”. (PONTE *et al.*, 1998, p. 9).

O fluxograma da Figura 5 exemplifica os caminhos a percorrer, com base nas quatro etapas acima, para que haja investigação matemática.

Figura 5: Fluxograma da dinâmica das atividades por investigação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Observa-se no fluxograma que existe algumas fases de transição, tais como, reconhecer, formulação, validação, em que a justificativa é positiva, e reformulação, em que a justificativa é negativa, desta forma, desta forma, é de suma importância que o ato investigativo seja bem-sucedido nas tarefas propostas, e isso depende do modo como o professor orienta os alunos no processo de resolução das atividades, e como o aluno se comporta mediante os desafios enfrentados.

2 - CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E EPISTEMOLÓGICAS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nesta seção apresento o conteúdo de progressão geométrica de forma mais detalhada, numa perspectiva científica, a partir de uma consideração do rigor matemático e aprofundamento, no qual destaco a evolução histórica e epistemológico do objeto matemático.

Embora esta pesquisa centralize-se na elaboração de uma Sequência Didática para o ensino de progressão geométrica para as turmas do 1º Ano do Ensino Médio, acredito ser importante realizar uma abordagem para contribuir na formação de professores.

2.1 – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Atualmente, o conhecimento humano que foi produzido por estudiosos do passado, nos leva a ter impressão de que está finalizado, porém, com a evolução humana percebe-se que pelo processo de investigação, tais conhecimentos ainda podem evoluir para contribuir com novas aplicações que surgem através da necessidade do ser humano.

Desta forma, todo o processo histórico do conhecimento, nos faz refletir e compreender a origem dos fatos históricos e de como podem contribuir para o conhecimento atual. No ensino de Matemática, o estudo da origem dos objetos matemáticos já formalizados são fundamentadas e investigadas através das pesquisas realizadas na História da Matemática.

Outra proposta metodológica que está cada vez mais ganhando espaço no ensino de matemática é a *História da Matemática*, no qual é inserido no em sala de aula explorando acontecimentos históricos sempre relacionados com conteúdo matemáticos.

Assim, a história da matemática como recurso para ensino da matemática, pesquisas científicas, desenvolvimento e investigação matemática, deverá retratar uma abordagem histórica do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

Desta forma, apresentamos fatos históricos de progressão geométrica que contribuíram para formar as definições e conceitos que são apresentados atualmente, também é de suma importância para a formação de professores de matemática, uma vez que podem tomar como base para introduzir o conteúdo, além de levantar questionamentos de situações históricas que são relacionados com o objeto matemático a ser ensinado e motivar seus alunos.

Assim, a evolução histórica de progressão geométrica tem por base a História das Sequências, uma vez que o objeto matemático em pauta é uma particularidade das Sequências Numéricas.

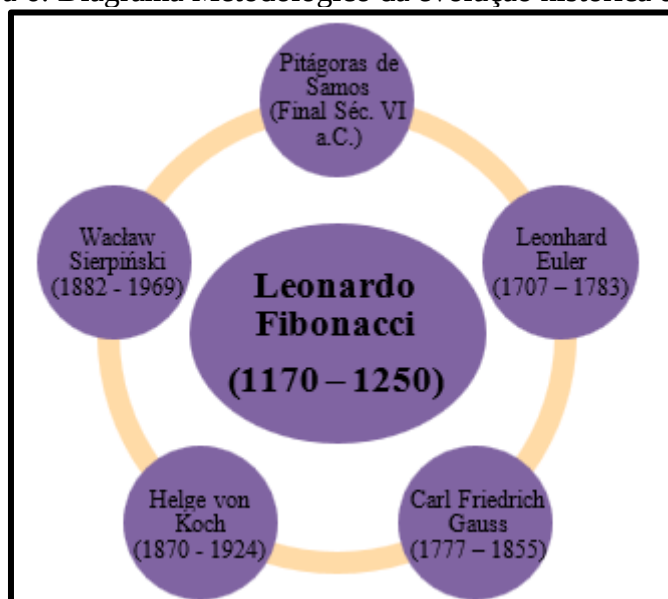
Segundo Chaquiam (2017, p. 175) “a história da matemática nos permite contextualizar o conhecimento, situado e relacionado com variados contextos sociais, também respondem as demandas historicamente situadas em um tempo e espaço”.

Assim, a história da matemática como recurso didático para ensino da matemática, pesquisas científicas, desenvolvimento e investigação matemática, deverá retratar uma abordagem histórica do conhecimento matemático, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação, pelas sociedades, desse conhecimento ao longo do tempo.

Portanto, apresento inicialmente a utilização da História das Sequências com o modelo de diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) como princípio da evolução do conhecimento sobre progressão geométrica.

Para tanto, destaco o diagrama que terá foco nas principais contribuições de Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) para a progressão geométrica, sendo o mesmo personagem principal do contexto histórico. Assim, o Figura 6 destaca os autores que contribuíram para o contexto técnico – científico da evolução do conteúdo de progressão geométrica.

Figura 6: Diagrama Metodológico da evolução histórica de P.G.



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2017).

O objeto matemático progressão geométrica é um caso particular de Sequências Numéricas, desta forma, para ser apresentado a evolução histórica do conteúdo de P.G. busquei destacar inicialmente os indícios da noção de Sequências Numéricas conforme a perspectiva cronológica descrita na Figura 6.

Tanto as Progressões Geométricas, que é o foco deste estudo, quanto às progressões aritméticas já possuíam evidências no contexto histórico da matemática antes mesmo dos estudos dos autores apresentados no diagrama da Figura 6.

As sequências numéricas estão vinculadas aos métodos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração.

É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números. Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época. (EVES, 2014, p. 26).

A partir da representatividade do número e métodos de contagem, de forma intuitiva se organizavam os elementos contados de forma a facilitar o entendimento da contagem numérica, surgindo os primeiros indícios de sequências numéricas. Segundo Chiconato (2013, p. 17) “as progressões são estudadas e aplicadas desde os povos babilônicos, uma de suas primeiras aplicações foi realizada pelos egípcios que precisaram encontrar um padrão para determinar as enchentes no Rio Nilo, e assim evitar perdas de alimentos”.

Com as evidências da aplicação das progressões no cotidiano, começaram a surgir problemas matemáticos relacionados aos padrões numéricos. Na Mesopotâmia surgiram as tabletas babilônicas, no qual se destaca a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.), que segundo Lopes (2017, p. 1), “numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ é encontrada”.

No Egito, por volta de 1650 a.C. foi descoberto o papiro de Rhind, que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Conforme afirma Eves (2014, p. 70), “o papiro Rhind descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso das frações unitárias, a solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas prático”.

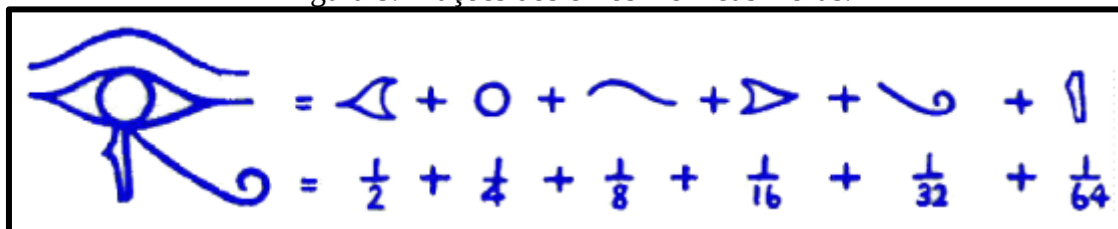
Figura 7: Uma parte do papiro Rhind (Museu Britânico).



Fonte: Eves (2014, p. 74).

Ainda no papiro de Rhind encontra-se o problema conhecido como frações dos olhos do Deus Horus, no qual descreve símbolos associados às frações que forma a progressão geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

Figura 8: Frações dos olhos Do Deus Horus.



Fonte: Arruda (2013).

Conforme afirma Arruda (2013, p. 5), “os egípcios possuíam a habilidade para realizar a soma dos termos desta P.G. usando a técnica de um fator multiplicativo”.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

$$64 \cdot S = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right)$$

$$64.S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$64.S = 63$$

$$S = \frac{63}{64}.$$

A partir dos diversos problemas matemáticos que surgiram, chamou a atenção de vários estudiosos que passaram a fazer uso das progressões e suas aplicações. Desta forma, compreendemos que os autores apresentados na Figura 38 tiveram grandes contribuições para a formalização dos conceitos e definições de progressões na atualidade. Assim, a seguir serão detalhados os trabalhos realizados por Pitágoras de Somos (VI a. C.), Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), Leonard Euler (1707 - 1783), Carl Friedrich Gauss (1710 - 1855), Helge Von Koch (1870 - 1924) e Waclaw Sierpinski (1882 - 1969).

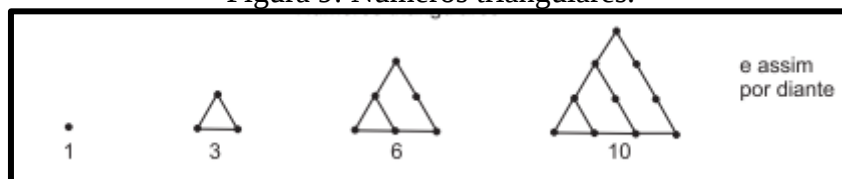
Pitágoras de Somos (VI a. C.) foi um filósofo e matemático grego creditado como fundador do movimento chamado Pitagorismo.

“A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico”. (EVES, 2014, p. 97).

Pitágoras e os pitagóricos com seus embasamentos numéricos desenvolveram, o que ficou conhecido como aritmética pitagórica, no qual apresentavam um elo entre a geometria e a aritmética, em que se verificou os números figurados, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas.

Na Figura 9 é apresentado os números figurados triangulares, no qual os números que representam a forma geométrica triangular formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pela adição do termo anterior com o número 2.

Figura 9: Números triangulares.



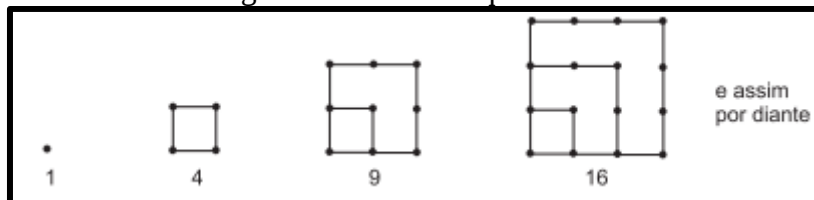
Fonte: Eves (2014).

Segundo Eves (2014), é possível obter-se a representação algébrica genérica do n -ésimo número triangular T_n , no qual é dado pela soma da progressão aritmética,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Na Figura 10 é apresentado os números figurados quadrados, no qual os números que representam a forma geométrica quadrada formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pelo quadrado (potência de expoente 2) do número que representa a posição iterativa de cada quadrado formado.

Figura 10: Números quadrados.



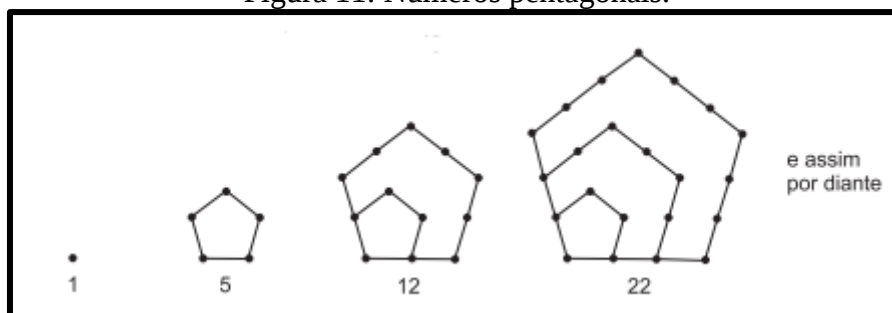
Fonte: Eves (2014).

Desta forma, segundo Eves (2014), é possível obter-se a representação algébrica genérica do n – ésimo número quadrado S_n em função do n – ésimo número triangular T_n da seguinte maneira:

$$S_n = n^2 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} = T_n + T_{n-1}.$$

Na Figura 11 é apresentado os números figurados pentagonais, no qual os números que representam a forma geométrica pentagonal formam uma sequência numérica em que o termo posterior é dado pela diferença positiva dos dois termos anteriores adicionado do termo anterior mais 3.

Figura 11: Números pentagonais.



Fonte: Eves (2014).

Eves (2014) afirma que é possível obter a representação algébrica genérica do n – ésimo número pentagonal P_n em função do n – ésimo número triangular T_n da seguinte maneira:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2} = n + \frac{3n \cdot (n - 1)}{2} = n + 3 \cdot T_{n-1}.$$

Os números figurados são desenvolvimentos diretamente representados através das progressões, porém Pitágoras realizou diversos teoremas importantes para a evolução de conceitos matemáticos, tais como, o Teorema de Pitágoras, os Ternos Pitagóricos, a descoberta das Grandezas Irracionais, as Identidades Algébricas, entre outros.

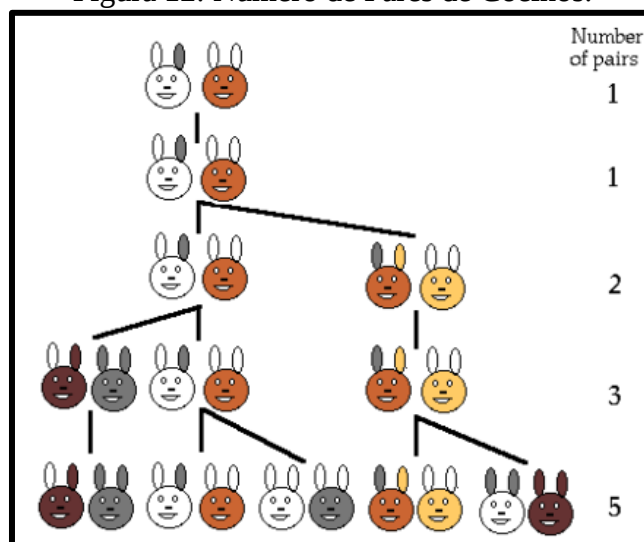
Leonardo Fibonacci (1170 - 1250), o autor principal para a contribuição da evolução das progressões, debruçou-se nos estudos dos problemas mais famosos sobre Sequências.

“No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci (“Leonardo, filho de Bonaccio”, c. 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Leonardo a recebeu parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada *Liberabaci*”. (EVES, 2014 p. 292).

A obra *Liberabaci*, de Fibonacci, discute assuntos como aritmética e álgebra, no qual um dos problemas mais famosos sobre sequências, denominado “O problema dos pares de coelhos”, que ficou conhecida como Sequência de Fibonacci. Conforme afirma Arruda (2013), o problema diz que:

Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar.

Figura 12: Número de Pares de Coelhos.



Fonte: Knott (1999) apud Celuque (2004).

Segundo Celuque (2004), o problema que dá origem à Sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, f(x_n), \dots$, onde $f(x_n) = f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})$, para todo $n > 2 \in N$, isto é, após os dois primeiros, cada termo é a soma dos dois imediatamente precedentes.

Assim como a Sequência de Fibonacci, a Proporção e Número Áureo também fazem parte dos estudos de Fibonacci, e possuem diversas aplicações no contexto histórico da humanidade e da ciência, tais definições podem ser encontradas nas pesquisas de Celuque (2004).

Desta forma, os estudos de Fibonacci acrescentaram de maneira formal para a contribuição das definições das progressões, dando início às teorias de crescimento populacional.

Leonard Euler (1707 – 1783), suíço, nascido na Basileia em 1707, obteve diversas contribuições para o campo da matemática.

“Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego. Aliás, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica as poses com que aparece em seus retratos. A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas, assim como a surdez de Beethoven não o impediu de compor, Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande”. (EVES, 2014, p. 472).

Conforme os estudos de Eves (2014), Euler contribuiu para a implantação das seguintes notações:

- I. $f(x)$ para funções;
- II. e para a base de logaritmos naturais;
- III. a, b, c para os lados de um triângulo ABC ;
- IV. s para o semiperímetro do triângulo ABC ;
- V. r para o inraio do triângulo ABC ;
- VI. R para o circunraio do triângulo ABC ;
- VII. Σ para somatórios; e
- VIII. i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Euler ficou famoso pelo desenvolvimento da fórmula $e^{i.x} = \cos(x) + i.\sin(x)$, que para $x = \pi$, se transforma em $e^{i.\pi} + 1 = 0$.

“Um fato importante que conseguiu estabelecer é que todo número real não nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos imaginários, exceto um, se $r > 0$. Na geometria plana aparece a reta de Euler; nos cursos de teoria das equações encontra-se às vezes o método de Euler de resolução das quárticas; e nos cursos de teoria dos números, mesmo os mais elementares, são presenças certas o teorema de Euler e a função de Euler. Atribuem-se a Euler as funções beta e gama do cálculo avançado, embora elas tenham sido pronunciadas por Wallis. Euler empregou a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, deu-nos o método sistemático usado hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não – homogêneas”. (EVES, 2014, p. 473).

Apesar de Euler não possuir uma relação direta com as progressões, suas contribuições para a matemática são bastante utilizadas nos estudos das sequências e progressões, e para revolucionar as notações e definições das sequências.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), nascido em Brunswick, Alemanha, em 1777, foi considerado um dos maiores matemáticos do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton.

Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de três anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. (EVES, 2014, p. 521).

A tarefa solucionada por Gauss, no qual encontrou a soma dos números de 1 até 100, deu início a origem da fórmula para encontrar a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética, isto é, conforme afirma Eves (2014), Gauss calculou mentalmente a soma $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, em que observou que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$ e assim sucessivamente com os 50 pares possíveis dessa maneira, logo a soma portanto $50 \times 101 = 5050$.

Com base na resolução de Gauss, desenvolveu-se a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer, dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

As descobertas de Gauss foram evoluindo conforme foi amadurecendo seus estudos no campo da matemática. Segundo Eves (2014, p. 520), “Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do teorema fundamental da álgebra. Newton, Euler, d’Alembert e Lagrange haviam feito tentativas frustradas de provar esse teorema”.

Os estudos de Gauss além de possuir grandes contribuições para as progressões e aplicações, também foram notáveis as colaborações à astronomia, à geodésia e à eletricidade.

Helge Von Koch (1870 - 1924) foi um matemático suíço que desenvolveu uma aplicação geométrica das progressões que ficou conhecida como um dos fractais clássicos, denominada como Curva de Koch.

Fractal, desde o momento que foi idealizada por Benoit Mandelbrot, passou por várias definições diferentes, mas todas elas possuem uma única noção, que serviu para idealizar todas as outras definições.

[...] fractal, introduzida por Benoit Mandelbrot através do neologismo Fractal, que surgiu do latino fractus, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, é contudo sabido e como isto é apropriado para os nossos propósitos que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento. (TEODORO e AGUILIAR, 2015, p. 17).

Os fractais são formas geométricas abstratas, onde o estudo de suas formas são bastantes complexas, mas sua estrutura em si, possui uma beleza, formada por padrões bastante interessante e incríveis, podendo perceber que ao ser ampliada, os fragmentos do fractal, esses fragmentos são idênticos a figura inicial, o todo, do fractal.

Para a construção da curva de Koch, temos que considerar um segmento de reta que vai de A até B, onde é chamado de inicializador, após isto, o inicializador é quebrado em quatro partes iguais gerando uma curva que vai do ponto A ao ponto B, chamada de gerador, pois ela irá dar o processo de construção da figura que queremos chegar, formada por quatro segmentos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{3}$ da distância de A até B.

Em cada um dos segmentos da curva anterior, foi reproduzida uma cópia da figura original, reduzida em $\frac{1}{3}$ de seu tamanho, de modo a formar uma nova curva de A até B, agora formada por dezesseis segmentos.

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite, num certo sentido, desse processo. É possível imaginar que em um fractal há partes da figura que são cópia do todo, pois cada etapa da construção é uma união de 4 cópias reduzidas da etapa anterior. Obedecendo a propriedade chamada de auto-semelhança.

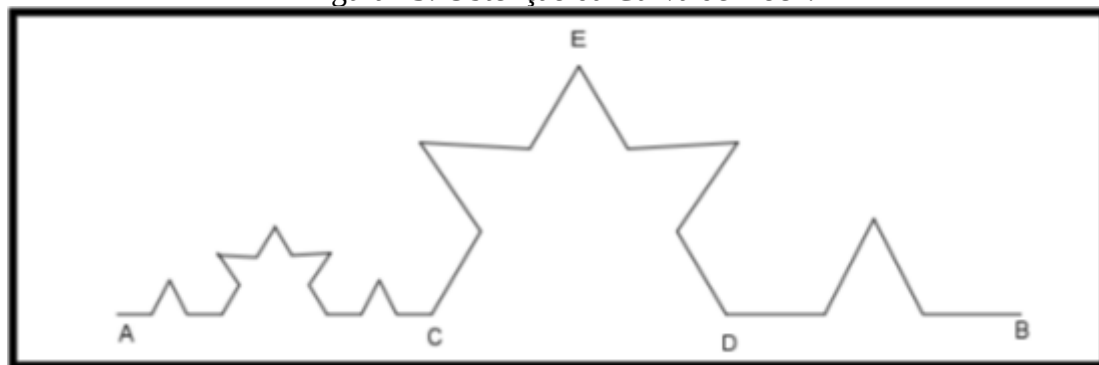
Para a construção da Curva de Koch, primeiramente consideremos que:

- I)** Considerar um segmento de reta AB de comprimento l .
- II)** Dividir o segmento em três segmentos iguais, e suprir o terço médio, colocando em seu lugar os segmentos CE e DE , cada um com um comprimento de $\frac{1}{3}$ do segmento removido. Ficando, assim, com a poligonal $ACEDB$, com comprimento $\frac{4}{3}l$.

III) Repetir com cada um dos quatro segmentos da poligonal $ACEDB$ a mesma operação feita com o segmento original, e assim sucessivamente e iterativamente.

Portanto, segue abaixo na Figura 13, o modelo geométrico da Curva de Koch.

Figura 13: Obtenção da Curva de Koch.



Fonte: Gomes (2007).

Segundo Gomes (2007, p 14.), explorar a Geometria Euclidiana através da Geometria Fractal sugere a análise do número de segmentos, comprimento destes e o comprimento total da curva em cada nível da construção da curva de Koch”.

No Quadro 2, em cada linha verifica-se o aumento do número de segmentos e a redução do comprimento deles, conforme o nível n em questão.

Quadro 2: Comprimento da Curva de Koch.

Figura	Figura inicial	1º iteração	2º iteração	3º iteração	...	n iterações
Número de segmentos	1	4	16	64	...	4^n
Comprimento de cada segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	...	$\frac{l}{3^n}$
Comprimento total da curva	l	$4 \cdot \frac{l}{3}$	$4^2 \cdot \frac{l}{3^2}$	$4^3 \cdot \frac{l}{3^3}$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$

Fonte: Gomes (2007).

Considerando que o comprimento para um dado nível é $\frac{4}{3}$ do nível anterior; o comprimento da curva no nível é $\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$, ou seja, de um nível para outro o comprimento é multiplicado pelo fator $\frac{4}{3} > 1$.

Como o comprimento aumenta de um nível para outro, logo o cresce indefinidamente tendendo a infinito quando o nível de construção tende a infinito.

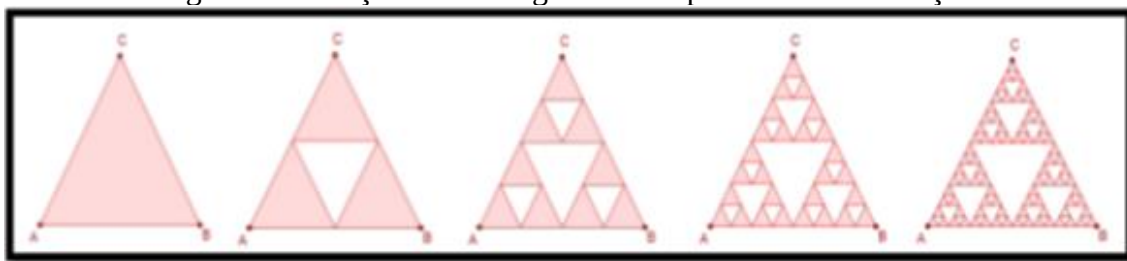
Waclaw Sierpinski (1882 – 1969), assim como Helge Von Koch, desenvolveu um dos fractais clássicos que contribuíram para a evolução do estudo das progressões, através da aplicação na geometria, no qual iremos destacar duas aplicações importantes que são o Triângulo e Carpete de Sierpinski.

Segundo Bemfica e Alves (2010, p. 11) “o Triângulo de Sierpinski foi descrito em 1915 pelo matemático Waclav Sierpinski (1882- 1969)”. É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes.

Para a construção do Triângulo Sierpinski, consideramos inicialmente um triângulo equilátero como figura inicial, e a partir do mesmo começa o processo iteração.

Na 1ª iteração são determinados os pontos médios de cada um dos lados do triângulo equilátero, unimos esses pontos médios dois a dois por segmentos e consideramos os quatro segmentos resultantes, retirando o triângulo central. Obtivemos, portanto, a 2ª figura do processo de construção, obtendo assim dentro do triângulo maior, área de três triângulos menores iguais o triângulo inicial, com vértices no mesmo sentido, porém com lados de dimensões menores, sendo que o triângulo central, cujo desprezamos, além de possuir lados de dimensões menores, também possui seus vértices em sentidos opostos ao do triângulo inicial. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos o Triângulo de Sierpinski no limite deste processo recursivo, como mostra a Figura 14.

Figura 14: Iterações no Triângulo de Sierpinski até a 4ª iteração.



Fonte: Côrtes (2014).

Ao analisar a Figura 14, percebe-se que a cada iteração, que a área do Triângulo de Sierpinski, é igual a área do triângulo anterior multiplicada pelo fator $\frac{3}{4}$ e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo anterior multiplicado pelo fator $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$.

Ao analisar a área do Triângulo de Sierpinski, temos uma P.G. de razão $q = \frac{3}{4}$, onde $|q| < 1$ e o primeiro termo é positivo, a A é a área do triângulo inicial. Somente visualizando

as iterações, percebemos que é uma progressão geométrica decrescente, a partir que o número de iterações aumenta, ou seja, tende ao infinito, a área diminui, tendendo a zero. Portanto quando $n \rightarrow +\infty, A_n \rightarrow 0$, ou seja,

$$A_n = 0$$

Analisando o perímetro do triângulo de Sierpinski temos uma PG de razão $q = \frac{3}{2} > 1$ e 1º termo exatamente o perímetro da figura inicial.

Isto é possível perceber na Quadro 3.

Quadro 3: Área e Perímetro do Triângulo de Sierpinski.

Figura	Área (A)	Perímetro (P)
Figura inicial	A	P
1º iteração	$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A$	$P_1 = \frac{3}{2} \cdot P$
2º iteração	$A_2 = \frac{3}{4} \cdot A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$	$P_2 = \frac{3}{2} \cdot P_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P$
3º iteração	$A_3 = \frac{3}{4} \cdot A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A$	$P_3 = \frac{3}{2} \cdot P_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P$
⋮	⋮	⋮
n iterações	$A_n = \frac{3}{4} \cdot A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$	$P_n = \frac{3}{2} \cdot P_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P$

Fonte: Gomes (2007).

Portanto, quando $n \rightarrow +\infty, P_n \rightarrow +\infty$. Isto significa que o perímetro do triângulo é infinito.

Segundo Gomes (2007, p. 26), “o Carpete de Sierpinski possibilita trabalhar o processo de remoção a partir de um quadrado, apesar do processo de remoção ser o mesmo do Triângulo de Sierpinski, e relacionar a diferença entre o cálculo da área do quadrado e do triângulo”.

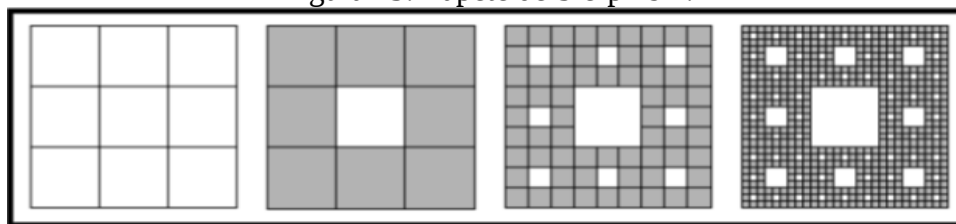
Na perspectiva de Negri (2014), a construção do Tapete de Sierpinski é realizada da seguinte forma:

Na 1ª iteração divide-se o quadrado inicial em 9 subquadrados menores e congruentes, e retira-se o subquadrado central.

Aplicando o mesmo processo da 1ª iteração, na 2ª iteração, divide-se os 8 subquadrados restantes, em 9 quadrados menores mantendo a congruência e remove-se o

quadrado central em cada um dos 8 subquadrados. Assim o processo se repete sucessivamente e iterativamente como mostra a Figura 15.

Figura 15: Tapete de Sierpinski.



Fonte: Gomes (2007).

Conforme diz Luz (2016, p.47), “para facilitar a compreensão do que ocorre com o número de quadrados e o comprimento do lado de cada um deles a cada iteração”.

Apresentaremos as informações obtidas na construção do tapete de Sierpinski no Quadro 4.

Quadro 4: Quantidade e comprimento dos lados dos quadrados em cada iteração do Tapete de Sierpinski.

Número de iterações (i)	Número de quadrados (N)	Comprimento do lado do quadrado (δ)
Figura inicial	1	l
1	8	$\frac{l}{3}$
2	64	$\frac{l}{9}$
3	512	$\frac{l}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	8^i	$\frac{l}{3^i}$

Fonte: Adaptado de Luz (2016).

Analisando a Quadro 4, observa-se que a cada iteração o número de quadrados aumenta oito vezes o número do quadrado da iteração anterior, e o comprimento do lado do quadrado a cada iteração possui um fator de $\frac{1}{3}$. Segundo Gomes (2007, p. 47), “para o cálculo da área, definir A como a área inicial do quadrado, de lado l ”, dada por:

$$A = l^2.$$

A Quadro 5 abaixo descreve a área A_i em cada iteração, assim generalizando.

Quadro 52: Área do Tapete de Sierpinski.

Iterações (i)	Número de quadrados (N)	Comprimento do lado do quadrado (δ)	Área (A)	Área total (A)
Figura inicial	1	l	A	A
1	8	$\frac{l}{3}$	$\frac{A}{9}$	$8 \cdot \frac{A}{9}$
2	8^2	$\frac{l}{3^2}$	$\frac{A}{9^2}$	$8^2 \cdot \frac{A}{9^2}$
3	8^3	$\frac{l}{3^3}$	$\frac{A}{9^3}$	$8^3 \cdot \frac{A}{9^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	8^i	$\frac{l}{3^i}$	$\frac{A}{9^i}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^i \cdot A$

Fonte: Adaptado de Gomes (2007).

Conforme a Quadro 5, o processo de iteração segue infinitamente, com isso a área do Tapete de Sierpinski tende a zero conforme o número de iteração aumenta, então podemos expressar essa área por:

$$A_i = \left(\frac{8}{9}\right)^i = 0.$$

A seguir, apresentamos conceitos e definições matemática de forma aprofundada com base no rigor matemático, que possa ser útil para a formação de professores, assim como, incentivar os docentes da Educação Básica a possuir interesse em realizar formação continuada e se apropriar do objeto matemático e possuir pleno domínio do conteúdo.

2.2 – CONCEITO DE FUNÇÃO

Para definirmos uma Função, necessitamos inicialmente compreendermos os conceitos de Valor Constante e Valor Variável.

O Valor Constante é uma quantidade fixa, que sempre mantém o valor. O Valor Variável é uma quantidade indeterminada ou uma quantidade universal⁴, que inclui todos os valores especificados.

Desta forma, uma Função de Valor Variável é uma expressão analítica, isto é, uma lei que define um gráfico, composta de qualquer maneira, com a mesma quantidade e número, ou Valores Constantes.

Assim, podemos definir função, analiticamente, a partir da condição:

Dado dois conjuntos não vazios A e B . Diz-se que f é uma Função quando todo elemento do conjunto A está em correspondência com um único elemento do conjunto B . Isto é,

$$f: A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) = y$$

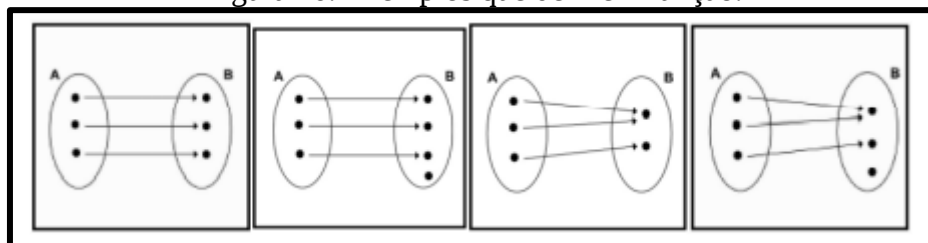
Logo, seja qual for a nomenclatura utilizada para associar elementos de dois conjuntos não vazios (Regra, Aplicação, correspondência, transformação, relação, etc), a importância da definição de função está sujeita a apenas duas condições a saber, como apresenta Lima *et al* (1997):

- I) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in A$ dado.
- II) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B . (LIMA et al 1997, p. 41).

Verifica-se que são critérios necessários para definir uma função, para o conjunto de partida A as condições de não ambiguidade e não exceção, e para o conjunto de chegada B é possível que haja ambiguidades e exceções.

A Figura 16 ilustra situações que se enquadram na definição de função.

Figura 16: Exemplos que definem função.

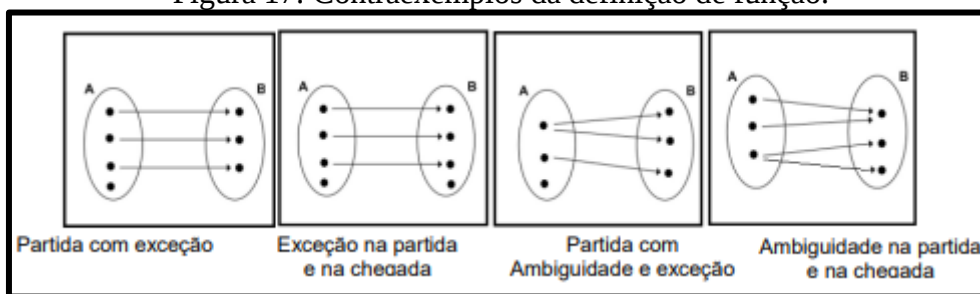


Fonte: Silva (2019).

A Figura 17 ilustra situações que não se enquadram na definição de função.

⁴ Também chamado de **quantificador universal** é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/quantificadores.htm>>. Acesso em: 10/10/2021.

Figura 17: Contraexemplos da definição de função.



Fonte: Silva (2019).

Nas Figuras 16 e 17 os exemplos e contraexemplos da definição de função percebe-se que o comportamento funcional é definido pela partida da correspondência, ou seja, o que chamamos de domínio da função, que deve estar bem definido para que ele ocorra. Assim, a chegada da correspondência, chamada de contradomínio da função.

Deve-se ainda observar que uma função conta de três elementos essenciais: domínio, contradomínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x) = y$. Mesmo quando dizemos simplesmente “a função f ” ficam subentendidos seu domínio A e seu contradomínio B . Sem que eles sejam especificados, não existe a função. (LIMA et al, 1997, p. 39)

Desta forma, de onde partem as correspondências é denominado de domínio, onde ocorre a chegada da correspondência é denominado de contradomínio e os elementos que se associam à partir do domínio e contradomínio são denominados de imagem da função.

Assim, o conjunto A denomina-se domínio de f e pode ser indicado com a notação $D(f)$. Quando uma função tem domínio A , diz-se que ela é definida em A . O conjunto B denomina-se contradomínio de f e pode ser indicado com a notação $CD(f)$. Se x é um elemento qualquer de A , então o único y de B associado a x é denominado imagem de x pela função f ou valor da função f em x e será indicado com a notação $f(x)$. O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A se denomina conjunto-imagem de f , e pode ser indicado com a notação $I(f)$ ou $Im(f)$.

$$Im(f) = \{\exists x, x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Seja a Função f , o Grafo de f é dado por:

$$G(f) = \{x \in D(f); y \in CD(f) \text{ e } y = f(x) \in Im(f)\}.$$

Uma vez que, neste estudo estabelecemos que as funções são do tipo real de variável real, pois as Progressões Geométricas são estabelecidas a partir das sequências de números reais. Logo, destacamos que A e B são conjuntos não vazios formados por números reais, isto é, $A, B \subset \mathbb{R}$, assim, para que toda relação $f: A \rightarrow B$ seja uma função, vale duas condições: se $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

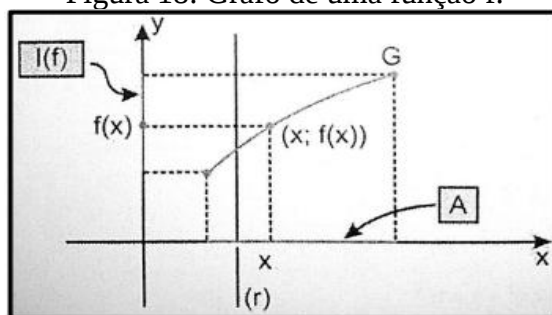
I) Então f existe, pois, $\forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f$, e

II) f é único, pois, $\forall x \in A, \exists! y \in B / (x, y) \in f$.

Portanto, pela definição de função, toda função é uma relação, porém nem toda relação é uma função.

De forma geral, graficamente $G(f)$ é dada por toda função real definida de A e B . Dado um sistema de coordenadas ortogonais xOy o conjunto G da totalidade dos pontos $(x, f(x))$, com x em A , é o grafo de f .

Figura 18: Grafo de uma função f .



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Assim, podemos verificar alguns critérios para construção gráfica e conhecimento do grafo de f , conforme apresenta Oliveira (2010):

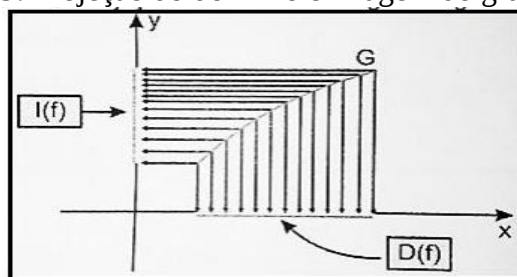
I) Toda reta (r) , vertical, que passa por um ponto de $A = D(f)$, encontra o gráfico G em um único ponto, o que nos dá um critério para decidirmos se uma figura do plano cartesiano pode ser gráfico de uma função.

II) Quando se conhece o gráfico G de uma função f , seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox , na direção Oy ; o conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre Oy .

(OLIVEIRA, 2010, p. 97).

Assim, a projeção do gráfico de G , com relação a seu domínio e imagem é apresentada na Figura 19.

Figura 19: Projeção do domínio e imagem do gráfico de G .



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Quanto à tipologia das funções, estas podem ser Sobrejetora, Injetora ou Bijetora. Seja f uma função de A em B , com domínio $D(f) \subseteq A$.

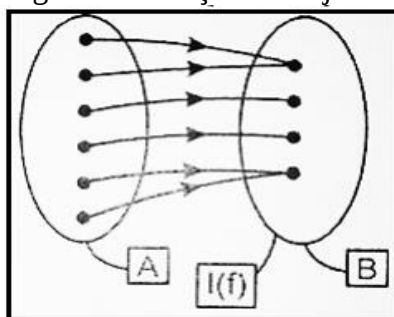
Diz-se que $f: A \rightarrow B$ é Sobrejetora ou Sobrejetiva quando:

- I) $Im(f) = CD(f) = y$,
- II) $\forall y \in CD(f); \exists x \in D(f) \text{ tal que } f(x) = y$, e
- III) $Im(f) = CD(f) = R_+$.

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é sobrejetora} \Rightarrow Im(f) = CD(f)$$

Figura 20: Função Sobrejetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

Percebe-se que se f é sobrejetora, para todo elemento $y \in B$ existe pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, todo $y \in B$ é imagem de “pelo menos um” $x \in A$. Quando a função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora, a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ pelo menos uma solução.

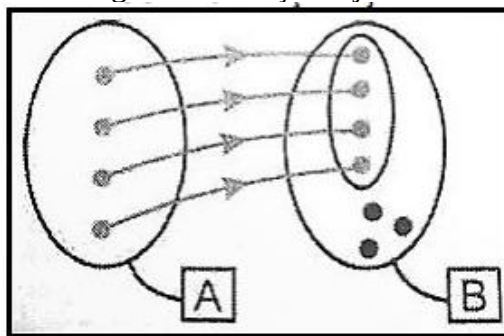
Diz-se que $f: A \rightarrow B$ é Injetora ou Injetiva quando:

- I) $\forall x_1, x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tem – se que $f(x_1) \neq f(x_2)$, e
- II) $\forall x_1, x_2 \in D(f)$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem – se que $x_1 = x_2$.

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é injetiva} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ ou se, }) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Figura 21: Função Injetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

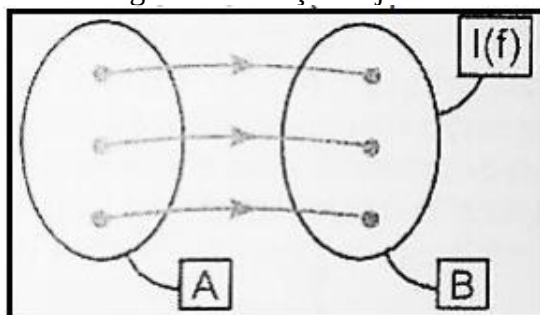
Nota-se que se f é injetora, um elemento $y \in B$ não é necessariamente imagem de algum elemento $x \in A$, mas se não for, é imagem de um único $x \in A$. Quando a função $f: A \rightarrow B$ é injetora, a equação $y = f(x)$ admite no máximo uma solução para todo $y \in B$.

Diz-se que $f: A \rightarrow B$ é Bijetora ou Bijetiva se, e somente se, f é injetora e sobrejetora simultaneamente.

Simbolicamente, temos:

$$f \text{ é bijetiva} \Leftrightarrow (f \text{ é sobrejetora e } f \text{ é injetora})$$

Figura 22: Função Bijetora.



Fonte: Neto et. al. (2010) *apud* Oliveira (2018).

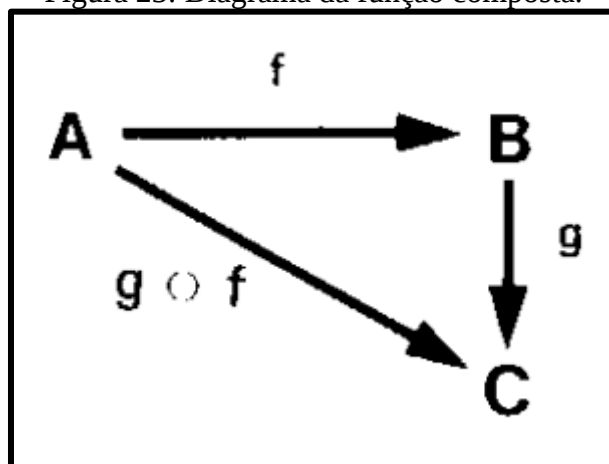
Observa-se que se f é bijetora, para todo elemento $y \in B$ existe um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, todo $y \in B$ é imagem de um e um só $x \in A$. Quando a função $f: A \rightarrow B$ é bijetora, a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ uma solução única.

Quanto a composição de funções, temos que, seja a função $f: A \rightarrow B$ e seja $g: B \rightarrow C$, onde C é um conjunto não vazio, denomina-se a função composta de g e f a função $h: A \rightarrow C$ definida por:

$$h(x) = f(g(x)) = (g \circ f)(x).$$

Podemos representa a função composta $h(x) = (g \circ f)(x)$ pelo diagrama destacado na Figura 55.

Figura 23: Diagrama da função composta.



Fonte: Iezzi et. al. (1977).

Quanto a inversão de funções, temos que, seja a função $f: A \rightarrow B$, a relação $f^{-1} = \{(x, y) \in f\}$ é uma função inversa se, e somente se, f é bijetiva de A em B , isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$, onde $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Quanto a paridade das funções, seja $f: A \rightarrow B$ uma função, então:

- I) Diz-se que f é uma função Par quando $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$, e
- II) Diz-se que f é uma função Ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Em contrapartida, quando $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, dizemos que a função f não é Par nem Ímpar.

Uma função f diz-se *crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Porém, se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$, diz-se que a função f é *estritamente crescente*.

Uma função f diz-se *decrecente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Porém, se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$, diz-se que a função f é *estritamente decrescente*.

A função diz-se *monótona* se é crescente ou decrescente no seu domínio, mas, diz-se que a função f é *estritamente monótona* se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio.

Uma função $f: R \rightarrow R$ é chamada de *Afim* quando existem as constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in R$.

O valor b , chamado de valor inicial, pois para $f(0)$ o valor de $f(0) = b$. O valor de a , pode ser determinado conhecido dois pares ordenados $(x, f(x_1))$ e $(x, f(x_2))$ da função f , assim temos:

$$f(x_1) = a \cdot x_1 + b \text{ e } f(x_2) = a \cdot x_2 + b.$$

Assim, obtém-se:

$$f(x_2) - f(x_1) = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Uma função $f: R \rightarrow R^+$ é chamada de *Exponencial* se existe um elemento $a \in R^+$, com $a \neq 1$, tal que função f é definida por $f(x) = a^x$, onde o elemento a é base da função exponencial.

Observa-se que as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, uma vez que:

I. Para $a = 0$ e x negativo, não teríamos uma função definida em R , mas sim uma indeterminação.

II. Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não teríamos uma função definida em R , mas sim em C .

III. Para $a = 1$ e x qualquer número real, teremos uma função constante.

(Teorema da Caracterização) A caracterização da função exponencial é feita por meio de uma proposição, isto é, seja $f: R \rightarrow R^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

I) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$.

II) $f(x) = a^x$ para todo $x \in R$, onde $a = f(1)$.

III) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$.

Demonstração:

Para demonstrar essa proposição é necessário provar as implicações $I) \Rightarrow II) \Rightarrow III) \Rightarrow I)$.

De $I) \Rightarrow I)$, iniciemos provando que a hipótese $I)$ é válida para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in Z$ e $n \in N$), onde $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, temos $f(r \cdot x)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$.

Logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Se fixarmos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(x)^r = a^r$, para todo $r \in Q$.

Para completar a demonstração de que $I) \Rightarrow II)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in R$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ pode ser tratado de modo análogo). Então, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $I) \Rightarrow II)$. ■

Para seguir de $II) \Rightarrow III)$, seja $f(x) = a^x$, com $x \in R$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in R$, obtemos $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$. ■

De $III) \Rightarrow I)$, seja $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, com $x, y \in R$. Para $n \in N$, vale

$$f(nx) = f(x + x + x + \dots + x) = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x) = f(x)^n$$

Por último, provemos o caso $f(nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Então,

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(-nx) &= f(-x - x - \dots - x) = f(-x) \cdot f(-x) \cdot \dots \cdot f(-x) = \\ &= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A partir da definição, características, propriedades e particularidades do conceito de função, a seguir desenvolvemos o estudo de Sequências Numéricas.

2.3 – SEQUÊNCIAS

Nesta seção será discutido sobre o estudo de Sequências Numéricas, a partir das concepções de Lima (2006) e Chiconato (2013), desta forma, faz-se necessário compreender as definições de Números Naturais e Números Reais, a partir do rigor matemático aprofundado deste estudo.

Obtemos o Conjunto dos Números Naturais, denotado por N , se caracterizado pelas seguintes propriedades, chamadas de axiomas de Peano:

I. Existe uma função injetora $f: N \rightarrow N$, a imagem $f(n)$ de cada número natural $n \in N$ chama-se sucessor de n . Ou seja, todo número natural possui um sucessor, que ainda é um número natural, e ainda, números naturais diferentes possuem sucessores naturais diferentes.

II. Existe um único número natural $1 \in N$ tal que $1 \neq f(n)$ para todo $n \in N$. Ou seja, existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

III. Se um conjunto $A \subset N$ é tal que $1 \in A$ e $f(A) \subset A$, isto é, $n \in A \Rightarrow f(n) \in A$, então, $A = N$. Ou seja, se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais, à essa propriedade chama-se de princípio da indução, uma vez que, todo número natural n pode ser obtido a partir de 1 , tomando-se o seu sucessor $f(1)$, o sucessor deste, $f(f(1))$, e assim por diante.

As definições a seguir foram baseadas em Côrtes (2014).

Considere o subconjunto $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, com $n \in N$. Um conjunto A diz-se infinito quando é vazio ou então existem $n \in N$ uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$ para algum $n \in N$. Neste caso, denotaremos a cardinalidade de A por $\#A = n$.

Sejam A, B conjuntos, tal que $\#A = m$ e $\#B = n$ e seja $f: A \rightarrow B$ uma função. A condição em m e n para que f seja injetiva é $m \leq n \Rightarrow \#A \leq \#B$. A condição em m e n para que f seja sobrejetiva é $m \geq n \Rightarrow \#A \geq \#B$. A condição em m e n para que f seja bijetiva é $m \leq n$ e $m \geq n$ então $m = n \Rightarrow \#A = \#B$.

Primeiramente diremos que A tem zero elementos. Segundamente diremos que $n \in N$ é o número de elementos de A , ou seja, A possui n elementos.

Estes fatos decorrem das definições abaixo.

a) Cada conjunto I_n é finito e possui n .

b) Se $f: A \rightarrow B$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também for finito.

Demonstração:

a) Intuitivamente, uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$ significa uma contagem dos elementos de A , pondo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n$, temos $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito. ■

b) Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua, devemos provar que se existem duas bijeções $f: I_n \rightarrow A$ e $g: I_m \rightarrow A$, então $m = n$.

Considerando a função composta $h = g^{-1} \circ f: I_n \rightarrow I_m$, basta então provar que se existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow I_m$, então tem-se $m = n$. Para fixar idéias, suponhamos $m \leq n$. Daí, $I_m \subset I_n$. ■

Um conjunto A chama-se infinito quando não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$.

Demonstração:

Um conjunto A qualquer é infinito, quando para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, temos $f: I_n \rightarrow A$, seja um $p = f(1) + \dots + f(n)$. Então $p > f(x)$ para todo $x \in I_n$, donde $p \notin f(I_n)$. Logo, nenhuma função $f: I_n \rightarrow A$ é sobrejetiva, portanto A é um conjunto infinito. ■

Um conjunto A chama-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow A$. No segundo caso A é infinito enumerável e, pondo-se $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$, tem-se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Obtemos o Conjunto dos Números Reais R , quando R é um Corpo, Ordenado e Completo.

Dizer que R é um Corpo, significa que estão definidas as seguintes operações:

I. Adição: Sejam $x, y \in R$, sua soma $x + y \in R$.

II. Multiplicação: Sejam $x, y \in R$, seu produto $x \cdot y \in R$.

Dizer que R é um Corpo Ordenado, significa que existe um subconjunto $R^* \subset R$, chamado de conjunto dos números reais positivos, que cumprem as seguintes propriedades:

I. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, isto é, $x, y \in R^* \Rightarrow x + y \in R^*$ e $x \cdot y \in R^*$.

II. Dado $x \in R$, exatamente uma das três alternativas existem: $x = 0$, ou $x \in R^+$, ou $-x \in R^*$.

Considerando R^- o conjunto dos números $-x$ onde $x \in R^+$, a condição

III. diz que $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$ e os conjuntos R^+, R^- e $\{0\}$ são disjuntos dois a dois. Os números $y \in R^-$ são chamados de negativos.

Dizer que R é um Corpo Ordenado Completo, significa todo subconjunto não vazio A de R limitado superiormente em R tem uma cota superior mínima (também chamada de supremo) em R .

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R . Dizemos que um elemento $x \in R$ é uma cota superior de A , se $x \geq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é limitado superiormente.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R . Dizemos que um elemento $x \in R$ é uma cota inferior de A , se $x \leq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é *limitado inferiormente*.

Dizemos que um subconjunto de um corpo ordenado é *limitado* se ele for limitado superiormente e inferiormente.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R limitado superiormente. O supremo de A , denotado por $\sup A$, é a menor das cotas superiores de A . Em outras palavras, $x \in R$ é o supremo de A , se

- I. x for uma cota superior de A
- II. se z for uma cota superior de A , então, $x \leq z$.

Seja R um corpo ordenado e A um subconjunto de R limitado inferiormente. O ínfimo de A , denotado por $\inf A$, é a maior das cotas inferiores de A . Em outras palavras, $x \in R$ é o ínfimo de A , se

- I. x for uma cota inferior de A
- II. se z for uma cota inferior de A , então, $x \geq z$.

Uma *sequência* de números reais é uma função $f: N \rightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n , chamado de n -ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, onde, x_1 representa o primeiro termo, x_2 representa o segundo termo, e assim sucessivamente, no qual os índices numéricos $n \in N$ apontam a posição do termo na sequência.

Uma sequência é dita *recursiva*, ou definida recursivamente, quando o termo x_n é obtido através de seus termos anteriores, isto é, os primeiros termos são estabelecidos, e a partir de uma regra ou lei de formação podemos definir os termos posteriores.

2.4 – SEQUÊNCIA ARITMÉTICA E SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA

Para definirmos uma progressão geométrica, necessita-se fazer uso, inspirado nos estudos de Junior (2015) e Oliveira (2018), das definições de Função Afim, Progressão Aritmética e Função Exponencial, respectivamente.

Seja a função $f: R \rightarrow R$ da forma $f(x) = a \cdot x + b$, para todo $x, a, b \in R$, dado uma sequência de números reais descrito pela função $f: N \rightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n , chamado de n -ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, existe uma constante $r \in R$, tal que, quando $x = x_1$, temos que:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + r \rightarrow f(x_2) = a \cdot (x_1 + r) + b = (a \cdot x_1 + b) + a \cdot r \\
x_3 &= x_1 + 2 \cdot r \rightarrow f(x_3) = a \cdot (x_1 + 2 \cdot r) + b = (a \cdot x_1 + b) + 2 \cdot a \cdot r \\
x_4 &= x_1 + 3 \cdot r \rightarrow f(x_4) = a \cdot (x_1 + 3 \cdot r) + b = (a \cdot x_1 + b) + 3 \cdot a \cdot r \\
&\vdots \\
x_n &= x_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow f(x_n) = a \cdot [x_1 + (n - 1) \cdot r] + b = \\
&= (a \cdot x_1 + b) + (n - 1) \cdot a \cdot r
\end{aligned}$$

Assim, quando $f(x_n) = f(x_1) + (n - 1) \cdot a \cdot r$, dizemos que $x_n = x_1 + (n - 1) \cdot r$ é uma *Progressão Aritmética* de razão r .

Seja a função $f: R \rightarrow R^+$ da forma $f(x) = a^x$, para todo $x \in R$, $a > 0$ e $a \neq 1$ dado uma sequência de números reais descrito pela função $f: N \rightarrow R$ que associa cada número natural n a um número real x_n , chamado de n -ésimo termo da sequência, indicada por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, existe uma constante $r \in R$, tal que, quando $x = x_1$, temos que:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + r \rightarrow f(x_2) = a^{x_1+r} = a^{x_1} \cdot a^r \\
x_3 &= x_1 + 2 \cdot r \rightarrow f(x_3) = a^{x_1+2 \cdot r} = a^{x_1} \cdot (a^r)^2 \\
x_4 &= x_1 + 3 \cdot r \rightarrow f(x_4) = a^{x_1+3 \cdot r} = a^{x_1} \cdot (a^r)^3 \\
&\vdots \\
x_n &= x_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow f(x_n) = a^{x_1+(n-1) \cdot r} = a^{x_1} \cdot (a^r)^{n-1}
\end{aligned}$$

Assim, se $x_n = x_1 + (n - 1) \cdot r$ é uma *Progressão Aritmética* de razão r , então a função $f(x_n) = f(x_1) \cdot (a^r)^{n-1}$ é uma *progressão geométrica* de razão $q = a^r$.

Desta forma, podemos demonstrar que *toda sequência aritmética é transformada numa sequência geométrica*.

Demonstração:

Considerando a função $f: R \rightarrow R^+$ monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ numa progressão geométrica $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots) = f(x_n)$.

Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in R$.

Considerando inicialmente $b = f(0)$. A função $g: R \rightarrow R^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$.

Dado $x \in R$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, assim, $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$.

Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão é $g(x)$. Então seu $(n + 1)$ – ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$.

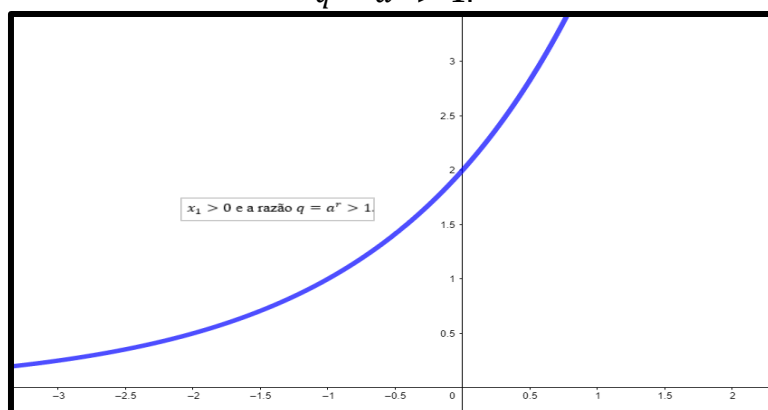
Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema da Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Seja a função, $f(x_n) = f(x_1) \cdot (a^r)^{n-1}$ geradora de uma Sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, chama-se de progressão geométrica *crescente* quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente, $x_n < x_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

- I. $x_1 > 0$ e a razão $q = a^r > 1$.
- II. $x_1 < 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.

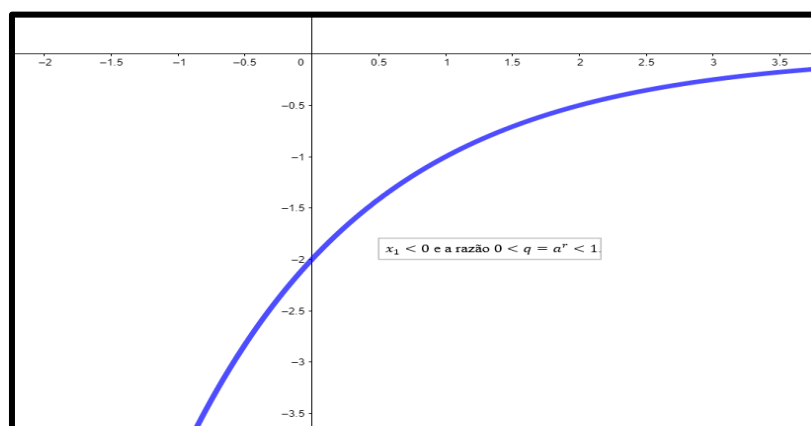
Graficamente a P.G. crescente é apresentada na Figuras 24 e 25.

Figura 24: Gráfico de uma progressão geométrica crescente quando $x_1 > 0$ e a razão $q = a^r > 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Figura 25: Gráfico de uma progressão geométrica crescente quando $x_1 < 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.



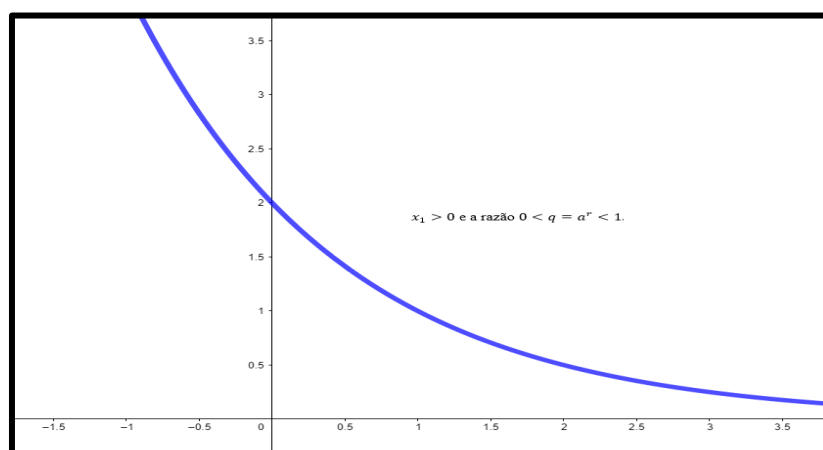
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Seja a função, $f(x_n) = f(x_1) \cdot (a^r)^{n-1}$ geradora de uma Sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, chama-se de progressão geométrica *decrecente* quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente, $x_n > x_{n+1}$. Existem duas condições para que essa situação ocorra:

- I. $x_1 > 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.
- II. $x_1 < 0$ e a razão $q = a^r > 1$.

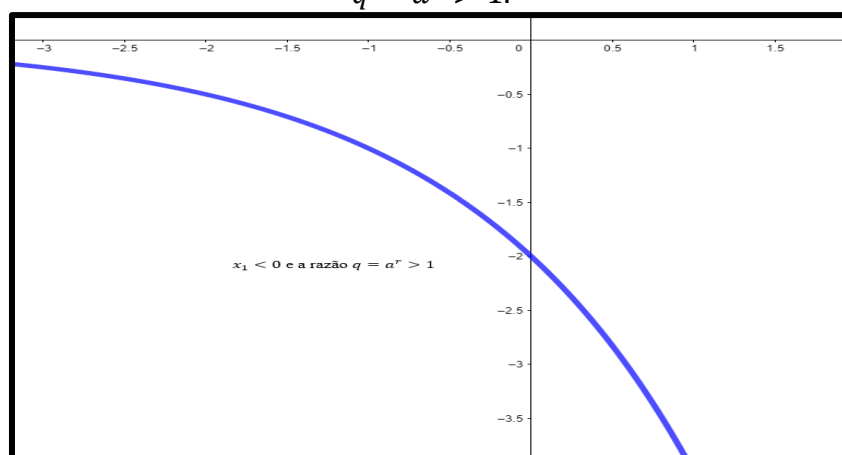
Graficamente a P.G. decrescente é apresentada na Figuras 26 e 27.

Figura 26: Gráfico de uma progressão geométrica decrescente quando $x_1 > 0$ e a razão $0 < q = a^r < 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Figura 27: Gráfico de uma progressão geométrica decrescente quando $x_1 < 0$ e a razão $q = a^r > 1$.

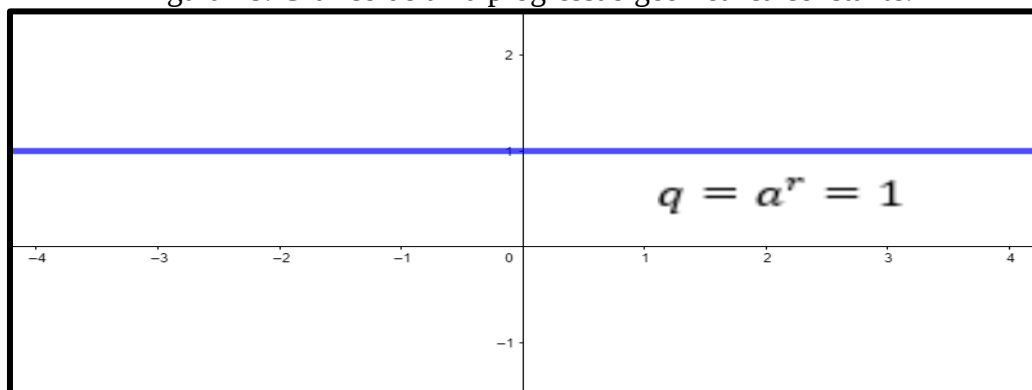


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Uma progressão geométrica é *constante* quando todos os seus termos são iguais. Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja igual a 1, isto é, $q = a^r = 1$.

Graficamente a P.G. constante é apresentada na Figura 28.

Figura 28: Gráfico de uma progressão geométrica constante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Uma progressão geométrica é *alternante* quando cada termo a partir do segundo, possui sinal oposto ao termo imediatamente anterior. Para que isso ocorra, basta que a razão da PG seja negativa, desta forma, como a definição de uma progressão geométrica advém de uma função exponencial, não é possível determinar o gráfico, uma vez que $q = a^r < 1$.

3 – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Na sequência didática aplicada foi desenvolvida cinco atividades proposta para ensino de Progressão Geométrica, em que foi elaborada e estruturada no modelo proposto por Cabral (2017), no qual cada atividade foi intitulada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) e em cada uma dessas UARC's será definido o título, o objetivo e os procedimentos para sua devida realização.

3.1 – UARC-1

Título: Reconhecendo uma sequência em progressão geométrica

Objetivo: Verificar as sequências em progressão geométricas e a sua razão

Materiais: Cartolina, Lápis de cor, Régua, Tesoura, cola branca, fita durex e calculadora.

Procedimentos: Leia o texto abaixo com atenção e responda as perguntas seguintes com o auxílio de uma calculadora.

[I₁] O matemático polonês Wacław Sierpinski (1882-1969), construiu este triângulo em 1919, do seguinte modo:

Passo inicial (0): Construímos um triângulo equilátero de lado a :



Passo 1: Junte os pontos médios dos lados e a figura a seguir resulta:

Três triângulos equiláteros sombreados e um buraco que é outro triângulo equilátero.



Passo 2: Repetimos o processo em cada um dos triângulos sombreados e obtenho o seguinte figura:



Passo 3: Repetimos o mesmo em cada um dos triângulos equiláteros sombreados obtendo a seguinte figura:



E assim sucessivamente.

Notamos que a cada passo o triângulo de Sierpinski é obtido com três figuras da etapa anterior.

Vemos que a cada passo o triângulo de Sierpinski é composto de três cópias auto-semelhante da etapa anterior. Um objeto com essas características que é auto-similar em diferentes escalas é chamado de fractal, assim o triângulo de Sierpinski é um exemplo de um fractal.

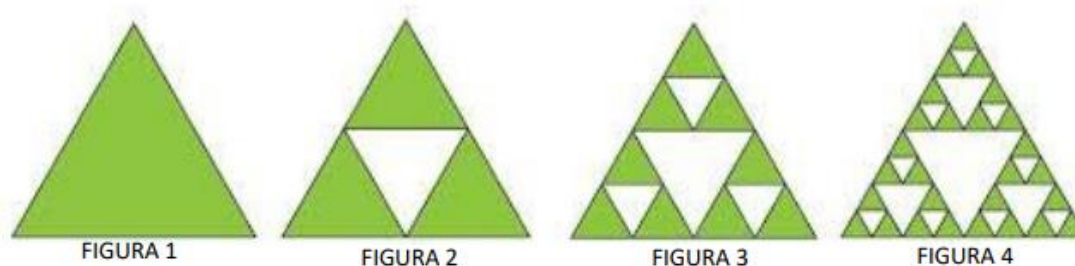
Fonte: <<http://alerce.pntic.mec.es/rgob0004/sierpinski/fichasierpinski.pdf>>. Acesso em: 11/04/2022.

Um triângulo equilátero, é um triângulo que possui as medidas de seus lados todos iguais, desta forma, construa um triângulo $f(x_1)$ equilátero de medida de lado igual à 4 metros e pinte totalmente de verde.

Posteriormente, marque a metade de cada lado, isto é, o ponto médio dos lados de $f(x_1)$. A partir dos pontos médios do triângulo $f(x_1)$, construa um novo triângulo $f(x_2)$ equilátero e pinte $f(x_2)$ de branco.

Assim, como no processo inicial de $f(x_1)$, realize o mesmo processo para construir 3 triângulos $f(x_3)$ equiláteros, isto é, determine os pontos médios de $f(x_2)$, e a partir dele, construa novos triângulos equiláteros, pintando $f(x_3)$ de branco.

Repetindo o mesmo processo de construção, construa $f(x_4)$ e $f(x_5)$, gerando figuras semelhantes a apresentada abaixo.



Onde $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente. Desta forma, com o auxílio de uma calculadora, responda:

[I_r – 01] Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_1)$?

[I_r – 02] Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_2)$?

[I_r – 03] Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_3)$?

[I_r – 04] Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_4)$?

[I_r – 05] Quantos triângulos verdes possui a figura $f(x_5)$?

[I_r – 06] Se fosse construído uma figura $f(x_6)$, seguindo o mesmo padrão das anteriores, quantos triângulos verdes $f(x_6)$ iria possuir?

[I_r – 07] Explique como você chegou à resposta da questão [I_r – 06]?

[I_e – 08] Preencha o quadro abaixo com base nas suas respostas nas questões anteriores.

Figuras	Quantidade de triângulos verdes
$f(x_1)$	
$f(x_2)$	
$f(x_3)$	
$f(x_4)$	
$f(x_5)$	
$f(x_6)$	

[I_r – 09] Determine uma sequência numérica que representa a quantidade de triângulos verdes nas figuras $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ e $f(x_5)$.

[I_r – 10] Existe alguma regularidade/padrão na sequência de números que descrevem a quantidade de triângulos em cada figura? Qual?

[I_r – 11] Sendo $f(x_1)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 1 e $f(x_2)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 2, qual o resultado da divisão $f(x_2):f(x_1)$?

[I_r – 12] Sendo $f(x_2)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 2 e $f(x_3)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 3, qual o resultado da divisão $f(x_3):f(x_2)$?

[I_r – 13] Sendo $f(x_3)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 3 e $f(x_4)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 4, qual o resultado da divisão $f(x_4):f(x_3)$?

[I_r – 14] Sendo $f(x_4)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 4 e $f(x_5)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 5, qual o resultado da divisão $f(x_5):f(x_4)$?

[I_r – 15] Sendo $f(x_5)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 5 e $f(x_6)$ a quantidade de triângulos verdes na figura 6, qual o resultado da divisão $f(x_6):f(x_5)$?

[I_e – 16] Preencha o quadro abaixo com base nas suas respostas nas questões anteriores.

Divisão entre a quantidade de triângulos verdes	Resultado
$f(x_2):f(x_1)$	
$f(x_3):f(x_2)$	
$f(x_4):f(x_3)$	
$f(x_5):f(x_4)$	
$f(x_6):f(x_5)$	

[I_e – 17] Comparando a resposta da questão **[I_r – 10]** e as resposta obtidas no quadro da questão **[I_e – 16]**, o que se pode perceber?

Intervenção Formalizante

[I_f – 01] A regularidade/padrão encontrado nos triângulos é chamado de razão (q) e pode ser obtido através da divisão de um valor numérico e o valor numérico anterior, isto é, a **razão de uma progressão geométrica** pode ser encontrada a partir da **divisão de um termo da sequência numérica pelo termo anterior**. Ao fazer isso, caso ela seja realmente uma progressão geométrica, essa divisão sempre será igual a q .

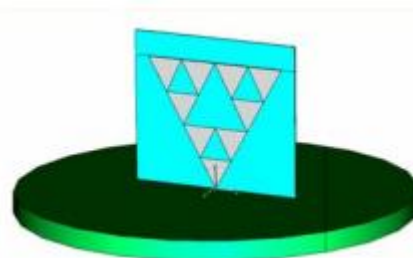
[IA_r – 01] Observe a sequência numérica abaixo.

(1, 3, 9, 27, 81, ...)

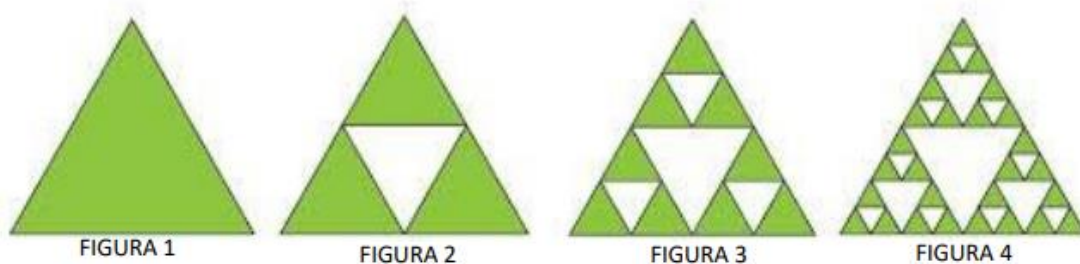
Qual a razão dessa sequência?

[IA_a – 01] O bloqueio de sinais de RF, em especial os de ligações por telefones móveis, é uma aplicação que ganhou destaque nos últimos anos no cenário brasileiro. Talvez o maior responsável por isto tenha sido o uso frequente de celulares em presídios por detentos, problema para o qual as autoridades de segurança pública ainda não conseguiram dar solução satisfatória definitiva.

Observe abaixo um dos simuladores utilizados para o bloqueio de sinais de celulares.



O simulador apresentado na figura acima representa uma forma geométrica, seguindo um padrão lógico baseado no fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski, conforme a imagem abaixo.



Sabendo que a quantidade de triângulos pintados em cada figura (Figuras 1, 2, 3, e 4) forma uma sequência em progressão geométrica, qual a razão dessa sequência?

3.2 – UARC-2

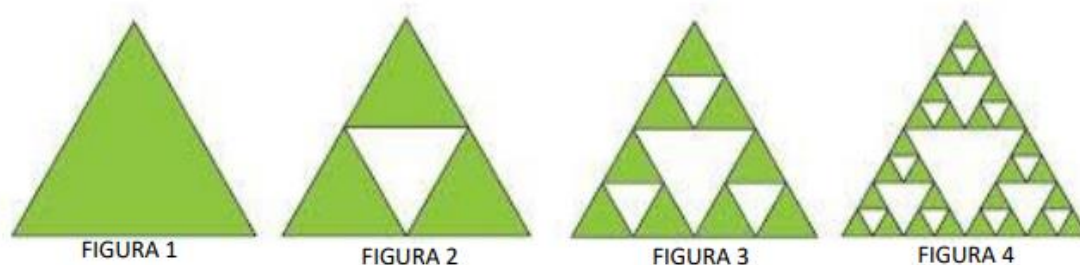
Título: Característica de uma PG

Objetivo: Verificar o crescimento e decrescimento de uma PG.

Materiais: Folha de papel A4, Lápis, Caneta e Borracha.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em **[I₁]**, e responda as perguntas seguintes.

[I₁] Observe o triângulo de Sierpinski abaixo e faça o que se pede.



Considerando que, $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente.

Em uma folha de papel A4, construa o triângulo de Sierpinski representando as figuras pela notação $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n)$.

Preencha a tabela, sabendo que são dados o primeiro termo de uma Progressão Geométrica e suas devidas razões (q) e com o auxílio de uma calculadora, responda:

[I_r – 01] Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão $q=3$:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor positivo para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

- () Sempre crescente , pois aumenta.
- () Constante, pois continua o mesmo valor.
- () Sempre Decrescente, pois diminui.
- () Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

$[I_r - 02]$ Considerando que primeiro termo $f(x_5) = 81$ triângulo verde e a razão $q = \frac{1}{3}$:

Termos da P.G.	$f(x_5)$	$f(x_4)$	$f(x_3)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor fracionário para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

- () Sempre crescente , pois aumenta.
 () Constante, pois continua o mesmo valor.
 () Sempre Decrescente, pois diminui.
 () Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

$[I_r - 03]$ Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão $q = 1$:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor unitário para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

- () Sempre crescente , pois aumenta.
 () Constante, pois continua o mesmo valor.
 () Sempre Decrescente, pois diminui.
 () Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

$[I_r - 04]$ Considerando que primeiro termo $f(x_1) = 1$ triângulo verde e a razão $q = -3$:

Termos da P.G.	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
Quantidade de triângulos verdes					

Ao atribuir um valor negativo para a razão da PG, observa-se que a mesma será:

- () Sempre crescente , pois aumenta.
 () Constante, pois continua o mesmo valor.
 () Sempre Decrescente, pois diminui.
 () Alternante, pois os valores variam entre positivos e negativos.

[I_r – 04] Considerando os valores encontrados na tabela da questão **[I_r – 01]**, qual o valor numérico do primeiro termo $f(x_1)$?

[I_r – 05] Considerando os valores encontrados na tabela da questão **[I_r – 01]**, qual o valor numérico do último termo $f(x_5)$?

[I_r – 06] Considerando os valores encontrados de $f(x_1)$ até $f(x_5)$ na tabela da questão **[I_r – 07]**, a quantidade de termos encontrados é:

- () Finita, possui início e fim.
 () Infinita, não possui fim, isto é, continua indeterminadamente.

[I_r – 08] Se fosse possível continuar construindo triângulos sem que fosse determinado um último termo, podemos afirmar que a quantidade de triângulos seria:

- () Finita, possui início e fim.
 () Infinita, não possui fim, isto é, continua indeterminadamente.

[I_e – 09] Complete o quadro para cada PG apresentada.

	PG	RAZÃO	Classifique se é crescente, decrescente, constante ou alternante	Classifique se é finita ou infinita
PG1	(1, 3, 9, 27, 81)			
PG2	(1, 3, 9, 27, 81, 243, ...)			
PG3	(243, 81, 27, 9, 3, 1)			
PG4	(1, -3, 9, -27, 81, ...)			
PG5	(1, 1, 1, 1, 1)			

Intervenção Formalizante

[I_f – 02] Classifica-se uma PG, pela sua Razão:

- I.** Se $q > 1$ para termos positivos ou $0 < q < 1$ para termos negativos, a PG é Crescente.
- II.** Se $q = 1$, a PG é constante.
- III.** Se $0 < q < 1$ para termos positivos ou $q > 1$ para termos negativos, a PG é decrescente.
- IV.** Se $q < 0$, a PG é alternante.

Classifica-se uma PG, pelo comportamento de seus termos:

- I.** Finita, quando existir uma quantidade limitada de termos.

[IA_r – 02] Dada a sequência numérica em progressão geométrica abaixo, marque a alternativa correta.

(1, 3, 9, 27, 81, 243, ...)

- a) A sequência é crescente e finita.
- b) A sequência é decrescente e infinita.
- c) A sequência é crescente e infinita.
- d) A sequência é decrescente e finita.
- e) A sequência é constante e alternante.

[IA_a – 02] O Triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal autossimilar. Ele recebe esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Sierpiński, que foi o primeiro a descrever essa estrutura.

Como o Triângulo de Sierpinski é formado?



É possível construir o Triângulo de Sierpinski através de um processo iterativo que tem como ponto de partida um triângulo equilátero.

Na primeira iteração determina-se os pontos médios de cada lado dessa figura e une-se esses pontos. Depois, remove-se o triângulo do meio.

Na segunda iteração esses passos são repetidos para cada um dos triângulos restantes.

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, dando origem ao famoso fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

Conforme o texto acima, podemos afirmar que o triângulo de Sierpinski representa uma sequência:

- a) Crescente e finita.
- b) Decrescente e infinita.
- c) Crescente e infinita.
- d) Decrescente e finita.
- e) Constante e alternante.

3.3 – UARC-3

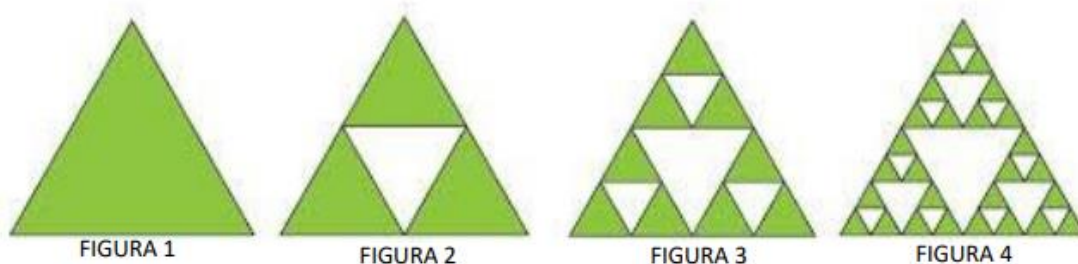
Título: Modelando a equação do termo geral de uma progressão geométrica.

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação do termo geral de uma PG.

Materiais: Folha de papel A4, Lápis, Caneta, Borracha e régua.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em **[I₁]**, e responda as perguntas seguintes.

[I₁] Observe o triângulo de Sierpinski abaixo e faça o que se pede.



Considerando que, $f(x_1)$ representa a figura 1, $f(x_2)$ representa a figura 2, $f(x_3)$ representa a figura 3, e assim sucessivamente.

Em uma folha de papel A4, construa o triângulo de Sierpinski representando as figuras pela notação $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n)$.

Construa em uma folha de papel A4 as figuras $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ e $f(x_4)$ e com o auxílio de uma calculadora responda as perguntas abaixo.

[I_r – 01] Quantos triângulos tem na figura $f(x_1)$?

[I_r – 02] Quantos triângulos tem na figura $f(x_2)$?

[I_r – 03] Quantos triângulos tem na figura $f(x_3)$?

[I_r – 04] Quantos triângulos tem na figura $f(x_4)$?

[I_r – 05] Se construíssemos uma figura $f(x_5)$, quantos triângulos iria possuir essa figura?

[I_e – 06] Com base nas suas respostas nas questões anteriores, complete o quadro abaixo.

Figuras	Quantidade de triângulos
$f(x_1)$	
$f(x_2)$	
$f(x_3)$	
$f(x_4)$	
$f(x_5)$	

[I_r – 07] Calcule os valores das potências abaixo.

[I_r – 07A] $3^0 =$

[I_r – 07B] $3^1 =$

[I_r – 07C] $3^2 =$

[I_r – 07D] $3^3 =$

[I_r – 07E] $3^4 =$

[I_r – 08] O valor da potência calculado em **[I_r – 07A]** é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_1)$ encontrado em **[I_e – 06]**?

[I_r – 09] O valor da potência calculado em **[I_r – 07B]** é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_2)$ encontrado em **[I_e – 06]**?

[I_r – 10] O valor da potência calculado em **[I_r – 07C]** é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_3)$ encontrado em **[I_e – 06]**?

[I_r – 11] O valor da potência calculado em **[I_r – 07D]** é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_4)$ encontrado em **[I_e – 06]**?

[I_r – 12] O valor da potência calculado em **[I_r – 07E]** é igual ao valor da quantidade de triângulos $f(x_5)$ encontrado em **[I_e – 06]**?

[I_e – 13] Sabendo que, na forma de potência, $f(x_1) = 3^0$, $f(x_2) = 3^1$, $f(x_3) = 3^2$, e assim sucessivamente, complete a tabela a seguir.

Figuras	Potências	Quantidade de triângulos
$f(x_1)$	3^0	
$f(x_2)$	3^1	
$f(x_3)$	3^3	
$f(x_4)$		
$f(x_5)$		

[I_r – 13] Qual seria a quantidade de triângulos se construíssemos uma figura $f(x_6)$?

[I_r – 14] Explique como você chegou ao resultado da questão **[I_r – 13]**?

[I_r – 15] Qual o valor da potência 3^5 ?

[I_r – 16] O valor de $f(x_6)$ encontrado na questão **[I_r – 13]** é igual ao valor encontrado na questão **[I_r – 15]**?

() Sim.

() Não.

[I_r – 17] Qual o valor numérico de 3^{n-1} , quando o $n=1$?

[I_r – 18] O resultado encontrado em **[I_r – 17]** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_1)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 19] Qual o valor numérico de 3^{n-1} , quando o $n=2$?

[I_r – 20] O resultado encontrado em **[I_r – 19]** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_2)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 21] Qual o valor numérico de 3^{n-1} , quando o $n=3$?

[I_r – 22] O resultado encontrado em **[I_r – 21]** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_3)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 22] Qual o valor numérico de 3^{n-1} , quando o $n=4$?

[I_r – 23] O resultado encontrado em **[I_r – 22]** é o mesmo valor da quantidade de triângulos em $f(x_4)$?

() Sim.

() Não.

[I_e – 24] Com base nas respostas das questões anteriores, complete o quadro a seguir.

Triângulo	Ordem n de construção dos triângulos	3^{n-1}	Quantidades de triângulos
$f(x_1)$	n=1	3^{1-1}	1
$f(x_2)$	n=2	3^{2-1}	3
$f(x_3)$	n=3	3^{3-1}	9
$f(x_4)$			
$f(x_5)$			
$f(x_6)$			

[I_r – 25] Utilizando os valores obtidos no quadro **[I_e – 24]**, responda:

[I_r – 25A] Qual o valor de $f(x_1) \cdot 3^{n-1}$, quando $n = 1$?

[I_r – 25B] Qual o valor de $f(x_1) \cdot 3^{n-1}$, quando $n = 2$?

[I_r – 25C] Qual o valor de $f(x_1) \cdot 3^{n-1}$, quando $n = 3$?

[I_r – 25D] Qual o valor de $f(x_1) \cdot 3^{n-1}$, quando $n = 4$?

[I_e – 26] Com base nas respostas na questão **[I_r – 25]** e no quadro da questão

[I_e – 24] complete o quadro a seguir.

Triângulo	Ordem n de construção dos triângulos	3^{n-1}	$f(x_1) \cdot 3^{n-1}$	Quantidades de triângulos
$f(x_1)$	n=1	3^{1-1}	$1 \cdot 3^{1-1}$	1
$f(x_2)$	n=2	3^{2-1}	$1 \cdot 3^{2-1}$	3
$f(x_3)$	n=3	3^{3-1}	$1 \cdot 3^{3-1}$	9

$f(x_4)$				
$f(x_5)$				
$f(x_6)$				
$f(x_n)$	N			

[I_r – 27] Observando os resultados obtidos no quadro da questão **[I_e – 26]** e sabendo que a razão da quantidade de triângulos verdes nas figuras é $q=3$, é correto afirmar que uma expressão para determinar a quantidade de triângulos verdes em uma figura $f(x_n)$ qualquer é dado por $f(x_n) = f(x_1) \cdot q^{n-1}$?

() Sim.

() Não.

Intervenção Formalizante

[I_f – 03] A equação geral para determinar um termo qualquer de uma PG é dada por:

$$f(x_n) = f(x_1) \cdot q^{n-1}$$

Onde,

$f(x_n)$ é o termo a ser encontrado.

$f(x_1)$ é o primeiro termo da PG.

q é a razão da PG, e

$n \geq 1$ é a ordem do termo que deve ser encontrado.

[IA_r – 03] Observe a sequência numérica a seguir.

(1, 3, 9, 27, ..., $f(x)$)

Sabendo que $f(x)$ representa o 10º termo dessa sequência, qual o valor numérico de $f(x)$?

[IA_a – 03] A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ e $f(x_5)$, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.



Desta forma, determine a figura da sequência que representa a área de região escura $f(x_8)$.

3.4 – UARC-4

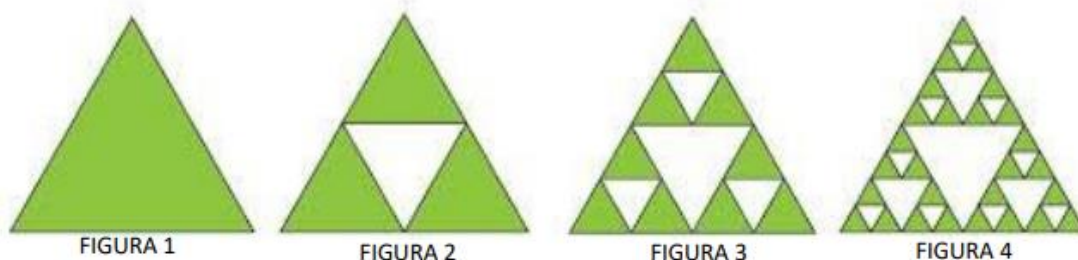
Título: Modelando a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

Materiais: Folha de papel, lápis, borracha, caneta e calculadora.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir da regularidade observada em **[I₁]**, e responda as perguntas seguintes.

[I₁] Observe a quantidade de triângulos verdes em cada figura.



Considerando que, $f(x_1) = 1$ representa a figura 1, $f(x_2) = 3$ representa a figura 2, $f(x_3) = 9$ representa a figura 3, e assim sucessivamente, e que a sequência das figuras formam uma progressão geométrica de razão $q=3$, e com o auxílio de uma calculadora, responda as questões abaixo.

[I_r – 01] Qual a soma $S_2 = f(x_1) + f(x_2)$?

[I_r – 02] Qual a soma $S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$?

[I_r – 03] Qual a soma $S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$?

[I_e – 04] Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Soma da quantidade de triângulos verdes	Resultado da soma
$S_2 = f(x_1) + f(x_2)$	
$S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$	
$S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$	

[I_r – 05] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^2 ?

[I_r – 06] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

[I_r – 07] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^2 - 1$?

[I_r – 08] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1) \cdot (q^2 - 1)$?

[I_r – 09] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1) \cdot (q^2 - 1)}{q - 1}$?

[I_e – 10] Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $q = 3$ e $f(x_1) = 1$	Resultado
q^2	
$q - 1$	
$q^2 - 1$	
$f(x_1) \cdot (q^2 - 1)$	
$\frac{f(x_1) \cdot (q^2 - 1)}{q - 1}$	

[I_r – 11] Conforme o quadro **[I_e – 10]** e **[I_e – 04]**, resultado de $\frac{f(x_1) \cdot (q^2 - 1)}{q - 1}$ é o mesmo valor de $S_2 = f(x_1) + f(x_2)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 12] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^3 ?

[I_r – 13] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

[I_r – 14] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^3 - 1$?

[I_r – 15] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1) \cdot (q^3 - 1)$?

[I_r – 16] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1) \cdot (q^3 - 1)}{q - 1}$?

[I_e – 17] Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $q = 3$ e $f(x_1) = 1$	Resultado
q^3	
$q - 1$	
$q^3 - 1$	
$f(x_1) \cdot (q^3 - 1)$	
$\frac{f(x_1) \cdot (q^3 - 1)}{q - 1}$	

[I_r – 18] Conforme o quadro [I_e – 17] e [I_e – 04], resultado de $\frac{f(x_1) \cdot (q^3 - 1)}{q - 1}$ é o mesmo valor de $S_3 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 19] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de q^4 ?

[I_r – 20] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q - 1$?

[I_r – 21] Sabendo que a razão $q = 3$, qual o valor de $q^4 - 1$?

[I_r – 22] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $f(x_1) \cdot (q^4 - 1)$?

[I_r – 23] Sabendo que a razão $q = 3$ e $f(x_1) = 1$, qual o valor de $\frac{f(x_1) \cdot (q^4 - 1)}{q - 1}$?

[I_e – 24] Com base nas respostas das questões anteriores, preencha o quadro a seguir.

Sendo $q = 3$ e $f(x_1) = 1$	Resultado
q^4	
$q - 1$	
$q^4 - 1$	
$f(x_1) \cdot (q^4 - 1)$	

$\frac{f(x_1) \cdot (q^4 - 1)}{q - 1}$	
--	--

[I_r – 25] Conforme o quadro **[I_e – 24]** e **[I_e – 04]**, resultado de $\frac{f(x_1) \cdot (q^4 - 1)}{q - 1}$ é o mesmo valor de $S_4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 26] É correto afirma que se a quantidade de triângulos de uma figura $f(x_5) = 81$, então $S_5 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) = \frac{f(x_1) \cdot (q^5 - 1)}{q - 1}$?

() Sim.

() Não.

[I_r – 27] É correto afirma que a soma dos termos de uma sequência finita, então $S_n = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \dots + f(x_n)$, que representa a soma da quantidade de triângulos verdes, será igual à $\frac{f(x_1) \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$?

() Sim.

() Não.

intervenção Formalizante

[I_f – 04] A soma dos termos de uma progressão geométrica finita é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{f(x_1) \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Onde,

S_n é a soma dos termos;

$f(x_1)$ é o primeiro termo da PG.

$q \neq 1$ é a razão da PG, e

$n \geq 1$ é a quantidade de termos.

[IA_r – 04] Dada a sequência numérica abaixo, determine a soma de todos os termos dessa sequência.

(1, 3, 9, 27, 81, 243)

[IA_a – 04] O professor de Matemática solicitou que alguns alunos da turma do 1º ano do Ensino Médio desenhasssem triângulos equiláteros de forma que a quantidade de triângulos desenhados pelos alunos formasse uma sequência em progressão geométrica.

A tabela abaixo mostra a quantidade de triângulos desenhados por estes alunos.

Alunos	Quantidade de triângulos
Aluno A	1
Aluno B	3
Aluno C	9
Aluno D	27
Aluno E	81

Qual a soma da quantidade de triângulos desenhados por todos os alunos?

3.5 – UARC-5

Título: Modelando a equação da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Objetivo: Verificar regularidades para desenvolver a equação soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Materiais: Folha de papel, lápis, borracha, caneta e calculadora.

Procedimentos: Com o auxílio de uma calculadora, desenvolva os cálculos necessários a partir do texto motivador apresentado em **[I₁]**, e responda as perguntas seguintes.

[I₁] O Infinito

Infinito... Em que é que pensamos quando ouvimos esta palavra? Em números enormes, incalculáveis, números que nunca mais acabaríamos de contar...? Um céu imenso, sem nunca mais acabar...? Cada um de nós pensará certamente uma coisa diferente, precisamente porque o conceito do infinito não tem por base nenhuma experiência sensível.

Nenhum assunto provocou tanta polémica e tanta discussão entre matemáticos, filósofos e teólogos como a ideia de infinito. Grande parte da matemática fundamenta-se no conceito de infinito... muito embora nada seja mais difícil de definir e a controvérsia a seu respeito pareça interminável.

O conceito de infinito surge assim como um dos mais importantes de toda a matemática e também como um daqueles cujo significado tem sido mais discutido.

O infinito é uma espécie de enigma matemático, de truque de magia, porque o seu conteúdo é inesgotável. Se retirarmos um elemento a um conjunto infinito restarão, não um a menos, mas exactamente o mesmo número de elementos (e o processo pode ser repetido com qualquer número de elementos, tantas vezes quantas se queira). Foram paradoxos como este que forçaram os nossos antepassados a terem cuidado com argumentos envolvendo apelos ao infinito.

Mas de que é que falamos, quando falamos de infinito?

“O conceito de infinito surge, antes de mais, na filosofia com o significado de que não existem limites. É a especulação teológica que dá a este conceito um conteúdo positivo de perfeição (ou grandeza) que é impossível superar”. (Micheli, in Romano, 1997, p. 133)

Fonte: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/cantor/oquee.htm>. Acesso em: 13/04/2022.

Considerando que a quantidade de triângulos verdes forma uma sequência numérica decrescentes, isto é, o primeiro termo $f(x_1) = 81$, o segundo termo $f(x_2) = 27$, o terceiro termo $f(x_3) = 9$, e assim sucessivamente, quando a razão $q = \frac{1}{3}$, e com o auxílio de uma calculadora, responda as questões a seguir.

[I_r – 01] Efetue as divisões abaixo.

[I_r – 01A] $\frac{1}{3} =$

[I_r – 01B] $\frac{1}{9} =$

[I_r – 01C] $\frac{1}{27} =$

[I_r – 01D] $\frac{1}{81} =$

[I_r – 02] Com base nas suas respostas na questão **[I_r – 01]**, conforme aumenta os denominadores, o que ocorre com os resultados da divisão?

() Aumenta, de forma que fique mais distante de zero.

() Diminui, de forma que se aproxima de zero.

[I_r – 03] Considerando a razão $q = \frac{1}{3}$ e com o uso da calculadora, calcule:

[I_r – 03A] $q^2 =$

[I_r – 03B] $q^3 =$

[I_r – 03C] $q^3 =$

[I_r – 03D] $q^4 =$

[I_r – 04] Os resultados da questão **[I_r – 01]** foram os mesmos da questão **[I_r – 03]**?

() Sim.

() Não.

[I_e – 05] Com base nas respostas anteriores, preencha o quadro a seguir.

Razão	Resultado
q^1	
q^2	
q^3	
q^4	

[I_r – 06] Se continuarmos aumentando os expoentes da potência de base q , o que acontece com o resultado?

() Aumenta, de forma que fique mais distante de zero.

() Diminui, de forma que fique muito próximo de zero.

[I_r – 07] Uma vez que o valor q^n se aproxima muito de zero quando o valor de n aumenta infinitamente, então consideramos que $q^n = 0$, assim, qual o valor de $q^n - 1$?

[I_r – 08] Qual fração representa o valor de $1 - q$, quando $q = \frac{1}{3}$?

[I_r – 09] Utilizando o resultado da questão [I_r – 07] e considerado a quantidade de triângulos $f(x_1) = 81$, qual o valor de $f(x_1) \cdot (1 - q^n)$?

[I_r – 10] Utilizando o resultado da questão [I_r – 09] e da questão [I_r – 08], qual o valor de $\frac{f(x_1) \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$?

[I_e – 11] Complete o quadro a seguir com base nas respostas das questões anteriores, considerando $q^n = 0$.

Termos da PG	Quantidade de triângulos verdes	n termos	$1 - q^n$	$\frac{f(x_1) \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$
$f(x_1)$				
$f(x_2)$				
$f(x_3)$				

$f(x_4)$				
----------	--	--	--	--

[$I_r - 12$] Considerando as respostas obtidas na questão [$I_e - 11$], os valores de $\frac{f(x_1) \cdot (1-q^n)}{1-q}$ foram todos iguais?

() Sim.

() Não.

[$I_r - 13$] Sendo a razão $q = \frac{1}{3}$ e $f(x_1) = 81$, com o auxílio de uma calculadora determine o valor de $\frac{f(x_1)}{1-q}$?

[$I_r - 14$] O resultado da questão [$I_r - 13$] foi igual ao resultado de $\frac{f(x_1) \cdot (1-q^n)}{1-q}$?

() Sim.

() Não.

Intervenção Formalizante

[$I_f - 05$] Desta forma, quando uma PG possui infinitos termos, dizemos que a soma $S_n = \frac{f(x_1)}{1-q}$, quando $0 < q < 1$.

Onde,

$f(x_1)$ é o primeiro termo de uma PG decrescente, e q é a razão da PG.

[$IA_r - 05$] Dada a sequência numérica infinita abaixo, determine a soma dos termos dessa sequência.

(243, 81, 27, ...)

[$IA_a - 05$] Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros a seguir.



O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é h ; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente.

Assim, qual a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos?

4 – ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES

Ao considerar as sugestões e adaptações apresentadas pelos professores, desenvolvemos dois recursos auxiliares que podem contribuir para a realização das atividades nas cinco UARC's, tais recursos podem ser utilizados como atividades complementares ou serem integradas paralelamente no decorrer do desenvolvimento das atividades.

Os recursos auxiliares da SD foram desenvolvidos durante o curso de mestrado profissional em ensino de matemática da Universidade do Estado do Pará, no decorrer da disciplina de Tecnologias de Informática no Ensino de Matemática, no qual, foram desenvolvidos dois recursos tecnológicos à contribuir com o ensino de progressão geométrica através dos softwares educacionais GeoGebra⁵ e Scratch⁶, cuja linguagem de programação foi desenvolvida pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT).

Quadro 6: Recursos auxiliares para a sequência didática.

Softwares Educacionais	Título	Endereço eletrônico	UARC abordada
Scratch	Progressão Geométrica	https://scratch.mit.edu/projects/731186086/fullscreen/	UARC-1 UARC-2
GeoGebra	Estudando as Progressões Geométricas	https://www.geogebra.org/m/jh9fa7hm	Todas as UARC's

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

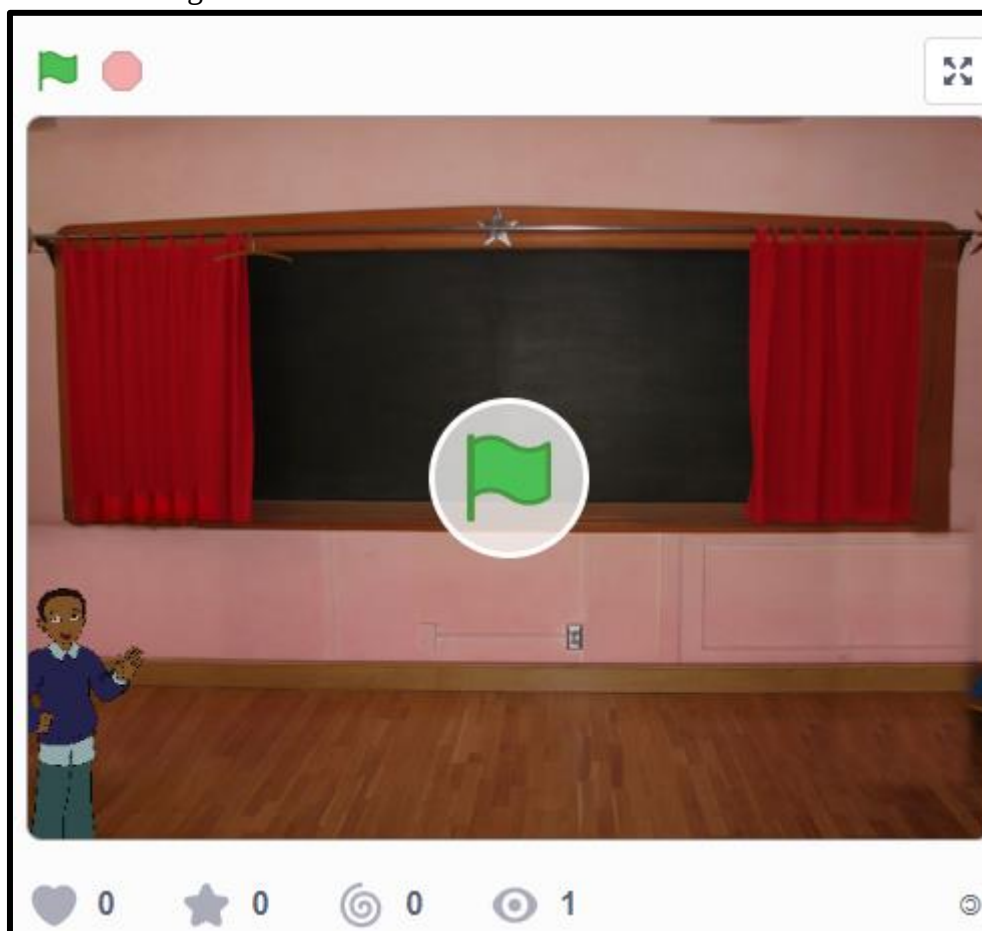
O Quadro 6 apresenta as informações necessárias para que o professor e os alunos possam acessar por meio de um smartphone ou computador com acesso à internet, no qual a interação com as plataformas digitais é totalmente por meio dos endereços eletrônicos indicados.

⁵ **GeoGebra** é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>>. Acesso em: 22/08/2020.

⁶ **Scratch** é uma linguagem de programação criada em 2007 pelo Media Lab do MIT. Desde 2019 o Scratch 3 está disponível on-line e como uma aplicação para Windows, OS X, e Linux. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Scratch>>. Acesso em: 13/09/2022.

O recurso auxiliar denominado de Progressão Geométrica, conforme o Quadro 6, que foi elaborado através do Scratch, compreende a UARC-1, em que apresenta a formalização do conceito de razão de uma PG, e a UARC-2, que apresenta a equação do termo geral de uma PG.

Figura 29: Tela inicial do recurso auxiliar no Scratch.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A Figura 29 apresenta a tela em que o usuário irá se deparar ao acessar o endereço eletrônico destacado no Quadro 6, em que irá possibilitar que o aluno interaja com a plataforma, no qual o recurso permite que o aluno passe pelo mesmo processo das UARC-1 e UARC-2 que compõe a SD de maneira digital e dinâmica, em que as atividades compostas no recurso auxiliar, apresentam vários questionamentos de maneira intencional para a formalização do conceito matemático, isto é, nas atividades elaboradas no Scratch, a plataforma foi programada para realizar o processo de intervenção (I_i , I_r , I_e e I_f). Portanto, este recurso torna as atividades mais atrativas e dinâmicas e que permite a tríade professor-aluno-saber, além de reduzir o tempo de aplicação das UARC's, conforme apontado pelos professores avaliadores da SD.

Já o recurso auxiliar denominado de Estudando as Progressões Geométricas, conforme o Quadro 6, que foi elaborado através do software dinâmico GeoGebra, compreende todas as cinco UARC's da SD proposta, em que apresenta a exposição do conceito de razão de uma PG, equação do termo geral de uma PG, crescimento e decrescimento de sequências numéricas em progressão geométrica e soma dos termos de uma PG finita e infinita, além de realizar associação com temas distintos dentro da área da matemática e aplicações, tal exposição ocorre através de um livro digital elaborado a partir do GeoGebra.

Figura 30: Tela inicial do recurso auxiliar no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A Figura 30 apresenta a tela inicial que o usuário irá interagir no livro digital elaborado no GeoGebra, no qual ao decorrer desta interação, o aluno terá a sua disposição vídeos motivadores e com o conteúdo de progressão geométrica, questões objetivas e discursivas, interação com a geometria dinâmica, linguagem álgebra-geométrico, entre outros, isto é, o professor pode utilizar este recurso como um instrumento complementar da sequência didática no decorrer da realização das atividades em cada uma das cinco UARC's, assim, trabalha-se diversos exemplos distintos, no qual possibilita percepções diferentes sobre o conteúdo de PG, conforme apresentam os professores avaliadores da SD.

Outra possibilidade de adaptação da sequência didática proposta, é que a partir das intervenções iniciais de cada UARC o professor pode fazer uso de materiais manipuláveis para que os alunos percebam os padrões e regularidades das sequências numéricas, uma vez que, as

cinco UARC's são baseadas a partir de construções geométricas associadas a números figurados, assim possibilita que os alunos possam construir tais figura através dos seguinte materiais: Lápis, Papel, tesoura, régua, cartolina, cola, fita métrica e fita adesiva.

Visto que as atividades juntamente com o material manipulável direcionam sob orientação dos professores, os alunos para a construção do conhecimento matemático de forma interativa e atrativa, não apenas visualizando o comportamento das figuras, porém, possibilita construir tal comportamento.

O principal questionamento é, por qual motivo não foi inserido essas adaptações na sequência didática proposta? como resposta, acreditamos que a SD elaborada inicialmente serve como modelo para ser utilizada em qualquer ambiente escolar e por grupos de alunos sem a preocupação se há recursos necessários para a aplicação da SD, uma vez que são necessários apenas as atividades impressas, caneta esferográfica, papel A4 e uma calculadora simples.

Por outro lado, com as adaptações proposta, deve-se haver uma preocupação se a escola possui recursos necessários para a aplicação da SD, que na maioria das vezes necessita-se de verificação se há os materiais necessários e adequados para a utilização dos alunos, tais como, computadores com acesso a internet e que possa ser utilizado por todos os alunos simultaneamente, materiais concretos de uso individual e coletivo, para que a aplicação da sequência didática seja composta por materiais manipuláveis.

Portanto, a sequência didática proposta pode ser aplicada em qualquer ambiente escolar, com adaptações, caso necessário, ou não, uma vez que, as UARC's que compõe a SD possuem potencialidades e é adequada para promover o ensino de matemática.

5 - ORIENTAÇÕES PARA ALUNOS

É de suma importância que os alunos seguem algumas orientações para que desenvolvam as atividades proposta na SD, de forma que possam tomar como princípio os conhecimentos prévios adquiridos como pré-requisitos para obter um conhecimento novo, assim como, fazer uso de calculadoras em todo o processo de resolução das atividades da SD, uma vez que esse recurso de aprendizagem irá fortalecer o caráter investigativos das situações propostas, no qual facilita a observação de padrões e regularidades numéricas.

Desta maneira, desenvolvemos um resumo que os alunos devem recorrer antes de resolverem as atividades da SD, no qual é composto pelos seguintes conteúdos: Potenciação, Equações e Funções Exponenciais, Sequências Numéricas e Números Figurados. Assim, tomamos como base para a descrição do resumo os livros de Viana (2020), Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020), Dante (2016), Balestri (2016) e Diniz (2016).

5.1 – POTENCIAÇÃO

Antes de falar sobre potenciação e suas propriedades, é necessário que primeiro saibamos o que vem a ser uma potência. Observe o exemplo abaixo:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

Note que nesse exemplo o número 2 (chamado de fator) se repete 4 vezes em uma multiplicação que pode ser representada da forma como vem depois da igualdade, ou seja, apenas com o número 2 elevado a 4 onde esse número quatro indica a quantidade de fatores (quantas vezes o 2 se repete).

A essa representação damos o nome de potência. Com isso podemos concluir que, potência nada mais é do que a representação de uma multiplicação de um mesmo número em "n" vezes.

De forma geral, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{vezes}}$$

Vamos conhecer agora as principais partes de uma potência, com o seguinte exemplo abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{expoente} & \\
 & \swarrow & \\
 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & & \\
 \nearrow & & \uparrow \\
 \text{base} & & \text{potência}
 \end{array}$$

➤ Chamamos de base o termo que se repete na multiplicação, é o fator da multiplicação.

Nesse caso, a base é o número 5.

➤ Chamamos de expoente ao número que fica elevado, ele indica o número de fatores da multiplicação.

Nesse caso o número de fatores é "3" ou seja, " $5 \cdot 5 \cdot 5$ " indica que são 3 fatores 5, que possui como resultado 125.

➤ A esse resultado damos o nome de potência, ou seja, é o valor final da multiplicação.

5.1.1 - Propriedades Fundamentais

Potência elevada a expoente zero: Quando uma potência estiver elevada a expoente zero, o seu resultado será sempre igual a 1.

$$a^0 = 1$$

$$5^0 = 1 \quad ; \quad 13^0 = 1 \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

Potência elevada a expoente um: Quando uma potência estiver elevada a um expoente igual a 1, o seu resultado será sempre a própria base.

$$a^1 = a$$

$$4^1 = 4 \quad ; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5} \quad ; \quad 19^1 = 19$$

Potência elevada a expoente par: Quando uma potência estiver elevada a um expoente par, o seu resultado será sempre um número positivo.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

Potência elevada a expoente ímpar: Quando uma potência estiver elevada a um expoente ímpar, o seu resultado terá sempre o mesmo sinal da base.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

Potência elevada a expoente negativo: Quando uma potência estiver elevada a um expoente negativo, devemos inverter a base da potência e trocar o sinal do expoente para positivo.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{81}{16}$$

Observação: Inverter a base de uma potência significa trocar, ordenadamente, o numerador pelo denominador e vice-versa.

Assim, sendo a e b dois números reais, temos:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \longrightarrow \quad 8^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1^2}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{1}\right)^n = a^n \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{1}\right)^4 = 5^4 = 625$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Potência elevada a expoente fracionário: Quando uma potência estiver elevada a um expoente fracionário, devemos transformar a potência em um radical, onde o índice é o denominador do expoente e o radicando é a base elevada ao numerador do expoente.

$$6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^2}$$

Assim: Sejam m e n números inteiros positivos, com $n \geq 2$. Se a é um número real para o qual existe $\sqrt[n]{a}$, então:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Multiplicação de potências de mesma base: Para multiplicar potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$7^4 \cdot 7^5 = 7^{4+5} = 7^9$$

$$13 \cdot 13^3 = 13^{1+3} = 13^4$$

Divisão de potências de mesma base: Para dividir potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ ou } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$5^8 : 5^6 = 5^{8-6} = 5^2 = 25$$

$$2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Potência de potência: Para resolver uma potência de potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$(10^4)^5 = 10^{4 \cdot 5} = 10^{20}$$

Potência de um produto: Para resolver, devemos elevar cada fator do produto (multiplicação) ao expoente indicado.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(6 \cdot 9)^4 = 6^4 \cdot 9^4$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Potência de um quociente: Para resolver, devemos elevar cada termo do quociente (divisão) ao expoente indicado.

$$(a : b)^n = a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(5 : 8)^2 = 5^2 : 8^2 = 25 : 64$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

5.2.– FUNÇÃO EXPONENCIAL

Antes de definirmos função exponencial, é de suma importância que o aluno compreenda como calcular a raiz de uma equação exponencial.

Definição: Seja

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Chamamos de equação exponencial a equação real definida por:

$$a^x = b$$

Observação: Na equação exponencial a variável aparece no expoente.

Exemplos:

$$5^x = 125 \quad ; \quad 16^{x+1} = 512 \quad ; \quad (3^x)^2 = 27 \quad ; \quad 10^{x-4} = 0,001$$

Para resolver uma equação exponencial, partimos do princípio da igualdade: Duas potências de mesma base tem o mesmo valor quando seus expoentes forem iguais.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

bases iguais, expoentes iguais.

$$3^x = 3^4 \longrightarrow x = 4 \text{ (bases iguais, expoentes iguais).}$$

$$6^{2x} = 6^{x-3} \longrightarrow 2x = x - 3 \text{ (bases iguais, expoentes iguais).}$$

$$10^{3x-5} = 10^{x+2} \longrightarrow 3x - 5 = x + 2 \text{ (bases iguais, expoentes iguais).}$$

Etapas para a resolução de uma equação exponencial:

- Usar a decomposição (fatoração) para igualar as bases.
- Aplicar as propriedades de potências, quando necessário.
- Aplicar o princípio da igualdade.
- Resolver a equação resultante. (1º ou 2º grau)
- Analisar o resultado encontrado.

Definição: Seja

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Chamamos de Função Exponencial a função real definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \text{ tal que } f(x) = a^x$$

Observação: A base a é sempre positiva e diferente de 1.

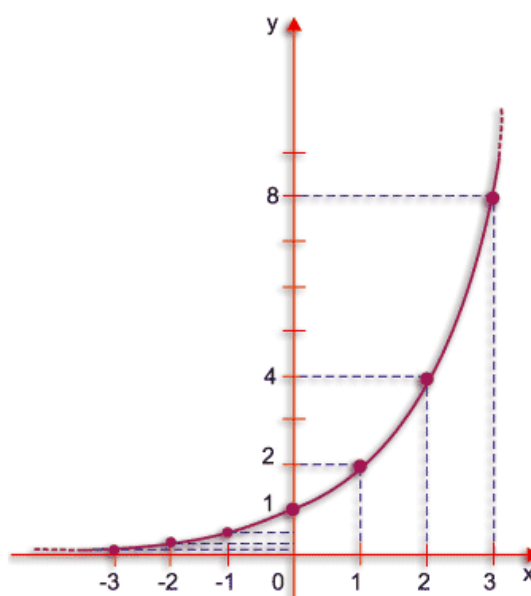
Condição de existência: Base positiva e diferente de 1.

$$0 < a < 1 \text{ e } a \neq 1$$

- a) $f(x) = 3^x$ (a base é 3 – maior que 1).
- b) $f(x) = (1/5)^x$ (a base é $1/5$ – menor que 1).
- c) $f(x) = (4/3)^x$ (a base é $4/3$ – maior que 1).
- d) $f(x) = (0,01)^x$ (a base é 0,01 – menor que 1).

Observe a função $f(x) = x^2$:

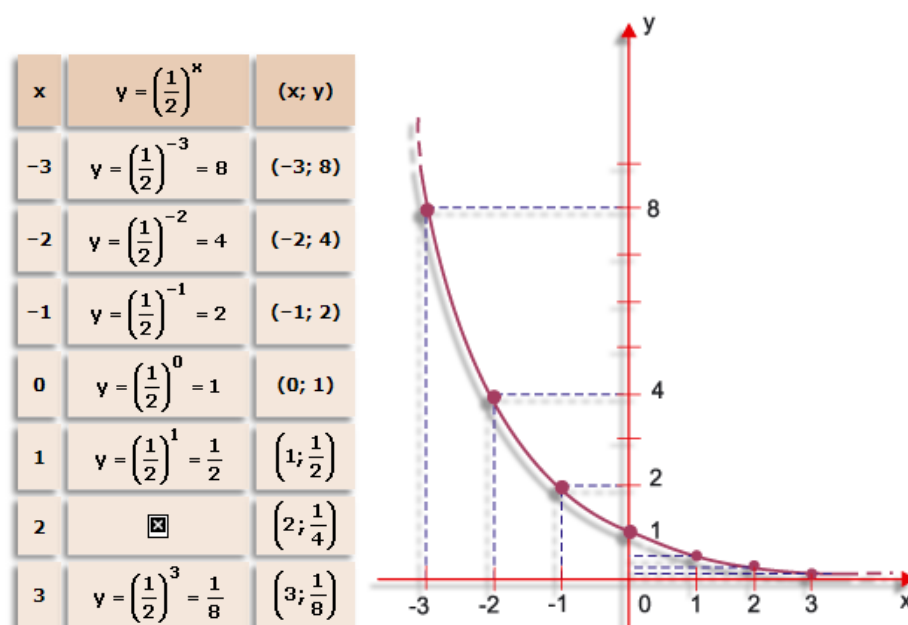
x	y = 2 ^x	(x; y)
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(-3; \frac{1}{8}\right)$
-2	$y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2; \frac{1}{4}\right)$
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$
0	$y = 2^0 = 1$	(0; 1)
1	$y = 2^1 = 2$	(1; 2)
2	$y = 2^2 = 4$	(2; 4)
3	$y = 2^3 = 8$	(3; 8)



Observe que: Se $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, aumentando os valores de x , os valores de y também aumentam. Nesse caso, dizemos que a função é crescente.

Assim: Se $a > 1$, a função é crescente (base maior que 1).

Observe a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:



Observe que: Se $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, aumentando os valores de x , os valores de y diminuem. Nesse caso, dizemos que a função é decrescente.

Assim: Se $0 < a < 1$, a função é decrescente (base entre 0 e 1).

5.3 – SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Para representar uma sequência, utilizamos uma regra ou lei de formação. Pode ser de forma matemática utilizando letras e números para representar os termos, mas também escrita.

Exemplo:

$$\begin{array}{c}
 (2, 5, 8, 11, 14, \dots) \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 (2, \quad 2+3, \quad 5+3, \quad 8+3, \quad 11+3, \dots)
 \end{array}$$

Regra: a partir do primeiro termo, obtemos o próximo somando 3 unidades.

Definição: Uma sequência numérica ocorre quando o termo seguinte pode ser calculado em função do anterior.

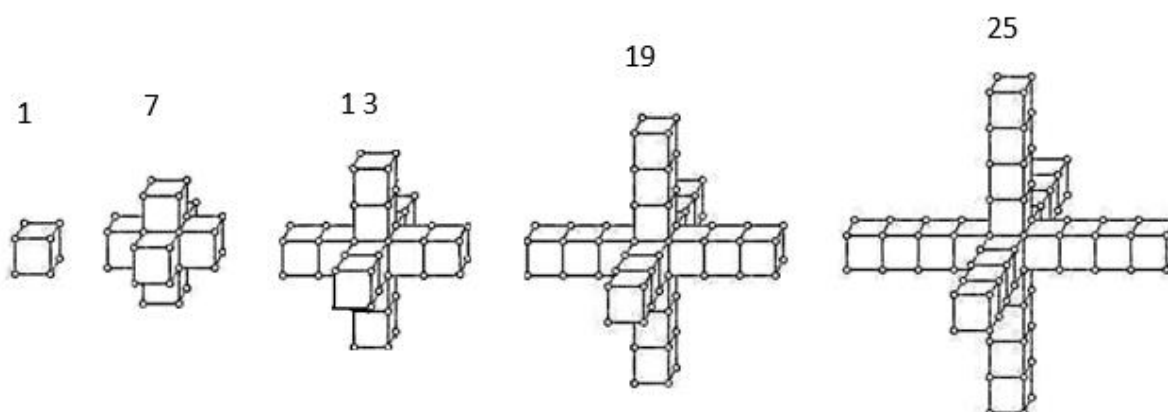
Exemplos:

a) $(2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots)$;

b) $(21, 11, 1, -9, -19, \dots)$.

5.4 - NÚMEROS FIGURADOS

Observe a seguinte sequência de figuras:



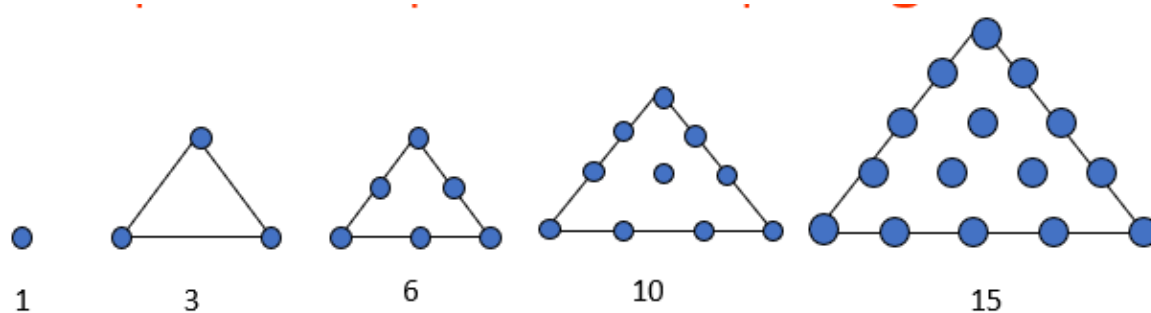
É possível obter uma expressão que permita descobrir o número de cubos de qualquer figura dessa sequência?

Figura	Nº de cubos
1	$1+6 \times 0 = 1$
2	$1+6 \times 1=7$
3	$1+6 \times 2=13$
4	$1+6 \times 3=19$
5	$1+6 \times 4=25$
6	$1+6 \times 5=31$
...	...
N	$1+6 \times (n-1)$

Obtemos a expressão: $1+6 \times (n-1) = 6n-5$ que define a lei de formação dos cubos da figura.

5.4.1 - Números Triangulares

Observe as figuras abaixo.

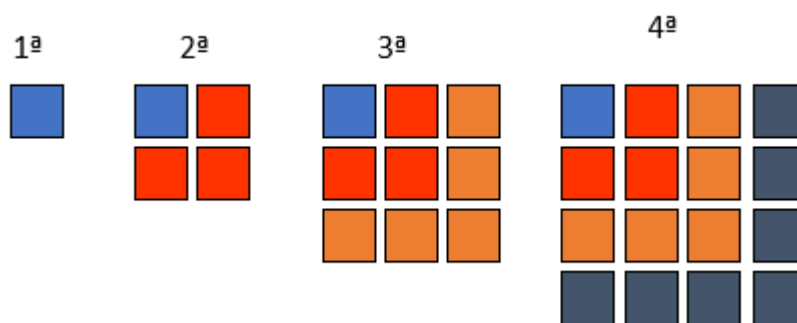


A sequência dos números (1,3,6,10,15,...) é chamada de sequência dos números triangulares. Assim, a lei de formação que define essa sequência de números triangulares é dada por:

$$a_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

5.4.2 - Números Quadrados

Observe as figuras abaixo.



Essa sequência de figuras pode ser representada pela sequência numérica:

$$(1, 4, 9, 16, \dots)$$

Neste caso, a sequência numérica que representa a figura é chamada de sequência dos números quadrados. Assim, a lei de formação que define essa sequência de números quadrados é dada por:

$$a_n = n^2$$

5.5 - ATIVIDADES DE FIXAÇÃO

Compreendemos também que para o aluno resolver os cálculos básicos que será necessário ao resolverem as atividades da SD, faz-se necessário fixar os conhecimentos básicos através de exercícios de fixação, uma vez que, a partir desses cálculos serão analisados padrões e regularidades existentes no conteúdo de progressão geométrica.

5.5.1 – Atividades de potenciação

Questão 01) Calcule as potências abaixo.

a) $2^0 =$

g) $3^0 =$

b) $2^1 =$

h) $3^1 =$

c) $2^2 =$

i) $3^2 =$

d) $2^3 =$

j) $3^3 =$

e) $2^4 =$

k) $3^4 =$

f) $2^5 =$

l) $3^5 =$

Questão 02) Escreva na forma de potência mais simplificada possível, com uma única base e expoente, as expressões abaixo.

a) $2 \cdot 2 =$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

i) $(3^2)^3 =$

b) $2^3 \cdot 2^2 =$

f) $3 \cdot 3 =$

j) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

c) $\frac{2^3 \cdot 2^2}{2^5} =$

g) $3^2 \cdot 3^3 =$

d) $(2^3)^2 =$

h) $\frac{3^2 \cdot 3^3}{3^5} =$

5.5.2 – Atividades de função exponencial

Questão 01) Preencha os quadros abaixo determinando os valores para $f(x)$, dado os valores de x .

a) $f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

g) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) $f(x) = -2^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

h) $f(x) = 3 \cdot 2^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) $f(x) = (-2)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

f) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

i) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

5.5.3 – Atividades de sequência numéricas

Questão 01) Montar as seguintes sequências:

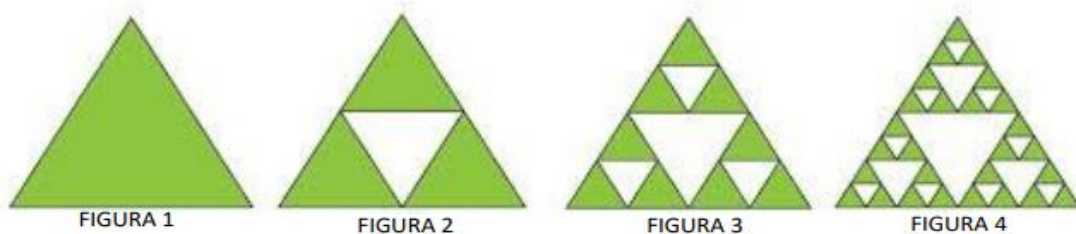
- a) Sequência 1, somar com 3 (2, __, __, __, __, __, __, __)
- b) Sequência 2, subtrair de 3 (27, __, __, __, __, __, __, __)
- c) Sequência 3, multiplicar por 2 (3, __, __, __, __, __, __, __)
- d) Sequência 4, dividir por 2 (512, __, __, __, __, __, __, __)

Questão 02) Observe as sequências e complete-as:

- a) (1, 3, 5, 7, 9, ____)
- b) (18, 15, 12, 9, 6, 3, ____)
- c) (1, 2, 4, 8, 16, ____)
- d) (32, 16, 8, ____)

5.5.4 – Atividades de números figurados

Observe a figura a seguir e responda às questões 1 e 2.



Questão 01) Sabendo que a quantidade de Triângulos Verdes contidos em cada figura representa um número natural, por exemplo:

FIGURA 1: 1 Triângulo Verde

FIGURA 2: 3 Triângulos Verdes

FIGURA 3: 9 Triângulos Verdes

FIGURA 4: 27 Triângulos Verdes

Seguindo o mesmo padrão, se tivéssemos apresentado a FIGURA 5, qual seria o número natural que representaria a quantidade de Triângulos Verdes?

Questão 02) Observando a quantidade de Triângulos Verdes em cada figura e sabendo que são representadas por números naturais, qual padrão você observou para determinar a quantidade de Triângulos Verdes em cada figura posterior a FIGURA 1?

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este produto educacional foi desenvolvido a partir de uma pesquisa durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre o ensino de Progressão Geométrica, com o intuito de promover a melhoria no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

A Sequência Didática estruturada como Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual proposta por Cabral (2017), se fundamenta em estudo minucioso e profundo do objeto matemático e é constituído por intervenções que conduzem e permite ao estudante a construção autônoma e intuitiva de seu conhecimento em gradativos níveis de formalização, no qual a oportunidade de se fazer intervenções orais complementares.

A sequência didática elaborada possui cinco unidades articuladas (atividades) que de forma simultânea e cooperativa possibilitam interações intencionais, através da investigação matemática e do uso de calculadora, entre aluno-aluno e aluno-professor, no qual estimula a qualidade dialógica do processo de ensino e aprendizagem e a construção do conhecimento individual e coletivo de maneira autônoma. Frisamos a importância da realização da oficina de conhecimentos básicos que antecede a aplicação da sequência didática, uma vez que, possibilita uma melhor preparação cognitiva dos alunos para adquirirem um novo conhecimento desenvolvido pela SD.

A elaboração da sequência didática foi um processo ímpar, principalmente para a minha formação profissional, no qual, a grande quantidade de elementos teóricos e práticos que me apropriei possibilitou uma nova perspectiva sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática, em que alterou o meu fazer pedagógico, com destaque a importância de se continuar a busca por metodologias de ensino que favoreçam os processos de ensino e de aprendizagem.

Este produto educacional foi avaliado e validado por um grupo de professores de matemática, no qual aprovaram a compatibilidade da avaliação aplicada com a sequência didática proposta, assim como, nas considerações positivas da tríade didática, no qual bordaram de forma subjetiva as contribuições da sequência didática para a interação entre o professor, o aluno e o saber.

Destacamos também, buscamos as sugestões e contribuições apontadas pelos professores avaliadores para apresentarmos possibilidades de adaptações que contribuem para o ensino de matemática, bem como, reorganiza as atividades conforme a necessidade prevista do ambiente escolar e do público-alvo.

Ao vivenciar o curso de mestrado, e no processo de elaboração e construção do texto teórico, percebi a importância de sempre estarmos refletindo sobre nossa prática pedagógica, de se preocupar se de fato nossos alunos entendem o que é explicado em sala, assim como de se atualizar e trabalhar outras metodologias que venham facilitar a aprendizagem. Trabalhar com sequências didáticas no ensino trouxe grandes contribuições para a minha formação, pois mudou a minha postura como professor, não sendo mais aquele que só aborda os conceitos no quadro branco e explica, mas sim aquele que constrói os conceitos junto com os alunos, assumindo assim o papel de professor-mediador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, José Moysés. **As formulações de Vygotsky sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal**. Amazônia – Revista de Educação em Ciências e Matemática. v.1 – n. 2. Universidade Federal do Pará (UFPA). 2004 – 2005.

ARRUDA, Alexandre Goulart. **Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial**. 125 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.

AVELINO, Karla Cristina. **Sequência didática investigativa para o ensino de ondas sonoras**. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, PB, 2017.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia**. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Leya, 2016. p. 178 – 202.

BEMFICA, Andrios e ALVEZ, Cassiana. **Fractais: Progressão e Série geométrica, uma metodologia de ensino**. Faculdade Cenecista de Osório-FACOS, 2010. <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf>. Acesso em: 21/10/2021.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: Funções e Progressões**. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. p.116 – 144.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Lei de diretrizes e Bases da Educação Brasileira**. Brasília: MEC/SEM, 1996.

BRASIL. Ministérios da Educação. **Plano Nacional de Educação**. Brasília: MEC, 2014.

BRASIL. Presidência da República. **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**. Brasília, 2017.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e métodos da didática da Matemática**. In: BRUM, J. (Org.). Didática das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos**. Ática. São Paulo, 2008.

CABRAL, Natanael Freitas. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – UFPA, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017. 104 p.

CARCANHOLO, Flávia Pimenta de Souza. **Os jogos como alternativa metodológica no ensino de matemática**. 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci: um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes**. 99p. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências Universidade Federal da Bahia /UEFS, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre. Salvador – BA, 2004.

CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. **Um estudo sobre sequências e séries**. 63 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro: [s.n.], 2013.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temáticos: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CHICONATO, Daniele Cristina. **Despoluição de um lago – progressão geométrica**. Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). 149 f. São Carlos - SP: UFSCar, 2013.

CÔRTEZ, Ivana R. C. **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática**. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), programa de pós-graduação em matemática-mestrado (PROFMAT). Rio de Janeiro-RJ, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contextos e aplicações**. Volume 1, 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. p. 208 – 229.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências**. Volume 1, 1. ed. São Paulo: Ática, 2020. p. 106 – 140.

EVES, Howard W. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campina: Editora da Unicamp, 1995.

FEDALTO, Dirceu Luiz. **O imprevisto futuro das calculadoras nas aulas de matemática no ensino médio.** 160 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2006.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

GOMES, Andreia S. **Motivação do estudo de áreas e perímetro de figuras geométricas através dos fractais.** Universidade Federal do Paraná (UFPR). Monografia parcial à conclusão do curso de especialização para professores de matemática. Curitiba-PR, 2007.

GONÇALVES, Fábio Barros. **Uma Sequência Didática para o ensino de função quadrática.** 2019, 288 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos da Matemática Elementar: Conjuntos e Funções.** Vol 1. ed. 3. São Paulo: Atual, 1977. p. 181-A – 197-A.

JUNIOR, Ivonzil José Soares. **Inter-relação entre progressão geométrica e função: aplicada ao Ensino Médio.** 97 f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas. Curitiba, PR, 2015.

LEDUR, José Ricardo. **Construindo o Conceito de Aceleração** – Uma Proposta Voltada para a Aprendizagem Significativa. SCIENTIA CUM INDUSTRIA (SCU REVISTAS) PP.61-64, 2014.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino Médio.** Vol. 1. Coleção do professor de Matemática. SBM. Rio de janeiro, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma variável.** volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LOPES, Fernando Henrique. **O Ensino de progressão geométrica de segunda ordem no Ensino Médio.** 67 f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2017.

LUZ, Emanuelli V. **A geometria fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos.** Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT). São José do Rio Preto, 2016.

MAGNONI, Roberto A. **A física no Ensino Médio: possibilidades pedagógicas para o ensino da cinemática.** Monografia de Especialização. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Medianeira-PR, 2014.

MARCHETO, Raquel. **O uso do software geogebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais.** 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2017.

MASSETI, Cristina. **Análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial.** 163 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2016.

MELO, C. B. da Silva; BISOGNIN, Eleni. **Utilizando a metodologia de ensino através da resolução de problemas para a construção do conceito de progressão geométrica.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo – SP, 2016.

MILANI, Wilton Natal. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio.** 127 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Matemática, Ouro Preto, MG, 2011.

MOÇAMBITE, Nixon da Silva. **Situações didáticas na aprendizagem matemática na perspectiva de construção do conhecimento.** 216 f. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Manaus – AM, 2016.

MOTA, N. O. **Aprendizagem de Progressões Aritméticas:** Suas aplicações por meio de Sequência Didática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao Estudo dos Fractais.** Universidade Federal de Goiás (UFG). Programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT). Goiânia-GO, 2014.

OLIVEIRA, João Batista Araújo; GUIMARÃES, Sonia Dantas Pinto; BOMÉNY, Helena Maria Bousquet; **A política do livro didático.** São Paulo: Summus; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1984.

OLIVEIRA, Marconni Augusto Pock de. **Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial.** 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ORLANDI, Eni Puccinelli. **Análise de Discurso:** princípios & procedimentos. 8. ed. Campinas: Pontes, 2009. 100p.

PEREIRA, Marcos. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas.** 2017. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

PONTE, João Pedro da. *et al.* **Histórias de investigações matemáticas.** Editora: Instituto de Inovação Educacional (IEE), Lisboa – Portugal, 1998.

REIS, Helder Gustavo Pequeno dos. **Compreensão dos conceitos perímetro da circunferência e área do círculo com o auxílio do GeoGebra**. 2012. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2012.

SANTOS, Osmair Carlos dos. **Do ensino tradicional à iniciação a atividades de investigação matemática: desconstruindo velhos hábitos**. 2018. 107 f. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

SILVA JUNIOR, L. M. da. **O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da Teoria das Situações Didáticas**. 2016. 173f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM)- Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVA, Edna Machado. **O conceito de função e suas linguagens**. 2019, 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo**. Volume 1, 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016. p. 140 – 169.

SOUZA, Pâmella de Alvarenga. **Uma proposta didática para o estudo de progressões por meio dos fractais: rotação por estações**. 165 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

SULEIMAN, A. R. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: Conteúdos e métodos de ensino. **Educação: Teoria e Prática**, v. 25, n. 48, 2015, p. 200-206.

TEODORO, Marcelo M. e AGUILAR, Juan C. Z. **Método de Newton e Fractais**. Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). Mestrado profissional em matemática (PROFMAT). São João Del-Rei-MG, 2015.

VYGOTSKY, L. S. **Thinking and Speech**. In: R. W. Rieber, e A. S. Carton (Eds), *The Collected Works of L.S. Vygotsky* (Vol. 1), *Problems of General Psychology*. Nova York: Plenum Press, 1934, p. 39-285.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 1998.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem