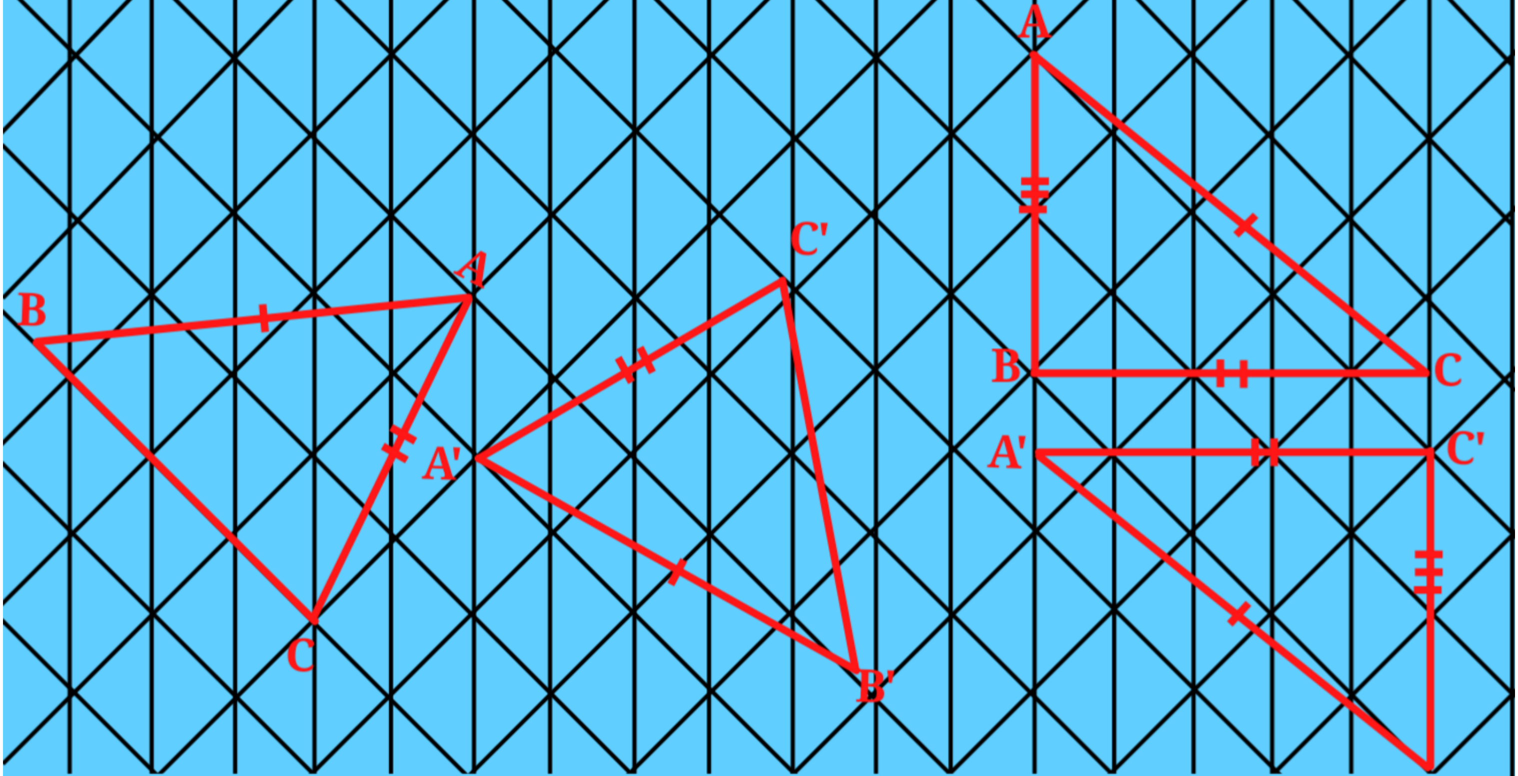
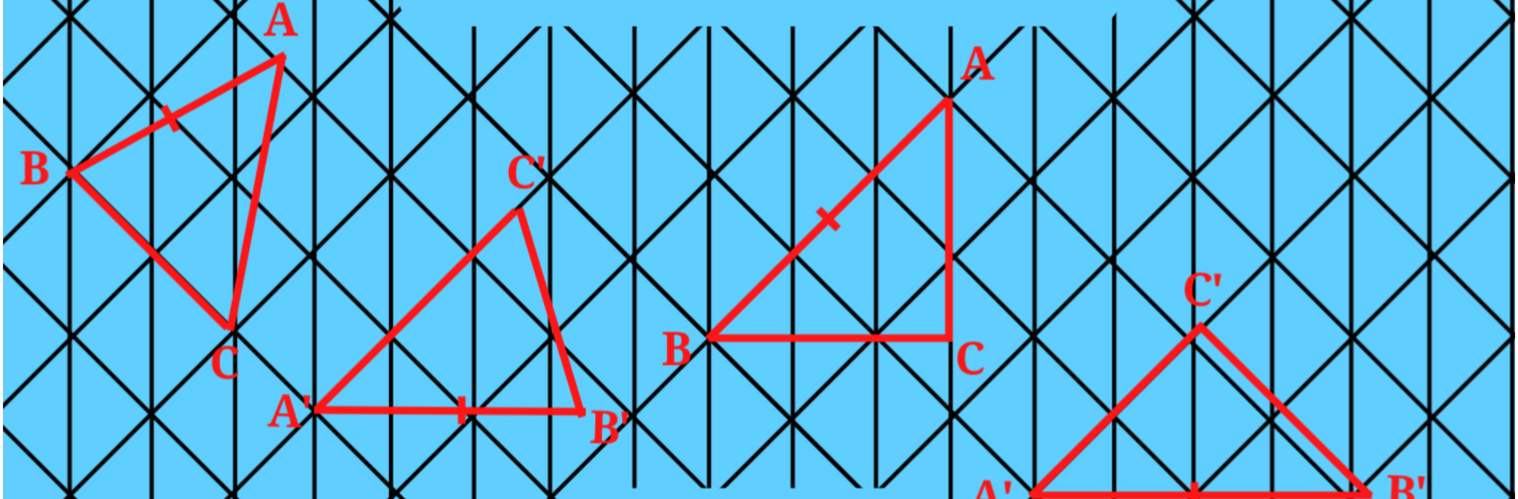
Nilson Osvaldo Gama Santa Maria
Miguel Chaquiam



Uma Sequência Didática para o Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica

Produto Educacional



Belém/PA
2023

Nilson Osvaldo Gama Santa Maria
Miguel Chaquiam

Uma Sequência Didática para o ensino de Congruência de Triângulos

Produto Educacional

Produto educacional vinculado à dissertação “**Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica**” do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Belém/PA
2023

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os autores
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Santa Maria, Nilson Osvaldo Gama
Ensino de congruência de triângulos com uso de malha isométrica / Nilson Osvaldo Gama Santa Maria; Miguel Chaquiam – Belém, 2023.
ISBN:
Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de congruência de triângulos com uso de malha isométrica” da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.
1.Geometria-Estudo e ensino.2.Triângulo-Estudo e ensino.3.Prática de ensino. I. Chaquiam, Miguel. II. Título.
CDD 23. ed. 516.1

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/73

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"ENSINO DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS COM USO DE MALHA ISOMÉTRICA"**.

Mestrando: **NILSON OSVALDO GAMA SANTA MARIA**

Data da avaliação: **27/10/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado a:*

(x) Estudantes do Ensino Fundamental (x) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(x) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______

b) *Possui URL:* (x) Sim, qual o URL: ______

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ______

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ______

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(x) Sim

( ) Não. Justifique? ______

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
b) *Possui orientações ao professor.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
c) *Possui orientações ao estudante.*	( ) Sim	( ) Não	(x) Não se aplica
d) *Possui objetivos/finalidades.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
e) *Possui referências.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
f) *Tamanho da letra acessível.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica
g) *Ilustrações são adequadas.*	(x) Sim	( ) Não	( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(x) Sim, onde: Escola de Ensino Fundamental

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(x) Sim, onde: Instituição de Ensino de Educação Básica

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(x) Sim, onde: Escola de Ensino Fundamental

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

(x) na escola, como um curso extra

( ) outro: ______

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

(x) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ______

( ) outros membros da comunidade, tais como ______

O produto educacional foi considerado:

(x) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Examinador 01)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: IFPA

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O produto educacional intitulado “Uma Sequência Didática para o Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica” trata-se de uma construção estruturada com Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual. que experimentada e validada durante uma pesquisa de Mestrado Profissional em ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Nessa pesquisa, este produto apresentou potencialidades didáticas e pedagógicas no ensino de geometria e mais especificamente para o ensino de Congruência de Triângulos.

O material a seguir apresentado destina-se para professores e estudantes da Educação Básica especificamente para ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos. Como recurso didático, adotou-se a Malha Isométrica, formada por triângulos equiláteros na qual é possível construir diversas figuras geométricas, incluindo triângulos.

O professor que adotar este produto estará proporcionando a seus educandos um instrumento de ensino e aprendizagem de Congruência de Triângulos experimentado e validado com potencialidades didáticas que envolvem a relação entre aluno, professor e saber matemático:

Aluno	**Professor**	**Saber**
• Aprendizagem por meio de manipulação e investigação; • Aprendizagem colaborativa; • Estímulo da curiosidade; • Mobilização de conhecimentos base; • Processo interativo de aprendizagem; • Gradual formalização de conhecimentos; • Promoção de envolvimento dos alunos com o que está sendo estudado; • Desenvolvimento vocabular científico.	• Maior interação professor-aluno; • Feedback durante o processo de ensino, podendo intervir; • Material didático e recurso didático eficiente para o ensino; • Cria maior desenvoltura vocabular do professor; • Proporciona ao professor uma postura de mediador da aprendizagem;	• Apresentação de diferentes abordagens sobre objeto Congruência de Triângulos; • Gradual formalização da ideia de congruência de triângulos por meio da razão de semelhança igual a 1; • Conexão com outros outros objetos matemáticos; • Compreensão visual e empírica da Congruência de Triângulos em diferentes transformações isométricas.

Neste material também disponibiliza-se uma seção sobre o objeto matemático Congruência de Triângulos com um estudo histórico, epistemológico e teórico sobre esse objeto. Aliado a isso, primeira seção tem-se toda a fundamentação teórica e metodológica da Sequencia didática, seguida de toda instrução de aplicação e material para ser reproduzido para os educandos.

A sequência didática a seguir apresentada possui três atividades que de forma gradual e colaborativa conduzem para o alcance das habilidades necessárias para a aprendizagem de Congruência de Triângulos, quais sejam sua definição e os casos de Congruência de Triângulos.

Nilson Osvaldo Gama Santa Maria
Miguel Chaquiam

1 APORTES TEÓRICOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste primeiro capítulo apresentamos a fundamentação teórica e metodológica que embasou a construção deste produto educacional. Considerando que em nosso Programa de Pós- Graduação existe uma estrutura metodológica de pesquisa sendo construída e reconhecida no meio científico da Educação Matemática, nos baseamos em trabalhos anteriores que desenvolveram pesquisa deste mesmo caráter na área de ensino de matemática para outros objetos matemáticos. Nesta pesquisa, o enfoque é o ensino de Congruência de Triângulos, mas o percurso metodológico é similar ao desenvolvido por Silva (2020) e publicado em Silva, Chaquiam, Cabral (2022).

Nessa estrutura metodológica, partiu-se de uma pesquisa preliminar composta de:

a) Revisão de estudos sobre pesquisas que envolvam o ensino de determinado objeto matemático;
b) Análise de livros didáticos, para avaliação do material que vem sendo adotado na rede pública de ensino;
c) Pesquisa de campo com estudantes e/ou professores, para diagnosticar dificuldades de ensino e aprendizagem, tendo como base o currículo escolar de Matemática;
d) Estudo do objeto matemático nos aspectos históricos e epistemológicos.

Após o estudo preliminar, houve a construção desta sequência didática planejada conforme modelo estruturante desenvolvido por Cabral (2017) e fundamentada em teorias a seguir apresentadas nas subseções deste capítulo. Nessa construção, as evidências levantadas na pesquisa preliminar também são consideradas, haja vista que a proposta é colaborar na superação de dificuldades de ensino e de aprendizagem em Matemática, lançando intervenção científica sobre a Matemática escolar, neste caso sobre o ensino do objeto matemático Congruência de Triângulos.

Para melhor compreensão do processo de validação deste produto, acessar a dissertação “Ensino de Congruência de Triângulos com uso de Malha Isométrica”.

1. 1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Guy Brousseau surgiu com perspectivas que dialogavam em muitos pontos com as teorias de Piaget e Vygotsk sobre o desenvolvimento do pensamento do educando. Em Brousseau (1986) existe uma preocupação com a didática de sala de aula, considerando as contradições e dificuldades da sociedade humana em que a aprendizagem é desenvolvida, sendo esta uma resposta à lógica interna da situação didática ou adidática que dá significado ao que é aprendido.

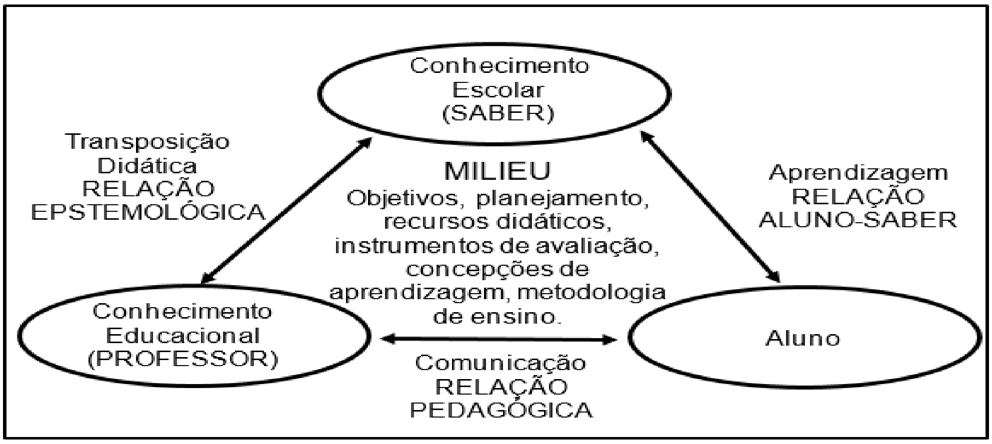
Neste sentido, Brousseau descreve:

> as situações em que o aluno se encontra em ambiente escolar, assim como a clareza do contrato didático que o aluno e professor estabelecem na construção do aprendizado[...]o aprendizado ocorre quando o aluno começa a se adaptar a um ambiente, essa adaptação traz ao aluno novos desafios que quando superados mudam as estruturas cognitivas do aluno resultando no aprendizado. (Chaquiam et al, 2020, p. 6)

Nas situações didáticas, isto é, as criadas intencionalmente pelo professor deseja-se criar diferentes formas de desafios e adaptações. Segundo Amouloud (2007) há quatro situações a saber: a) de *ação*, as de interação sobre o meio didático; b) de *formulação*, momento de discussão e formulação de ideias; c) de *validação*, elaboração de um modelo, generalização de um padrão observado; d) de *Intitucionalização*, sistematização e formalização de conhecimentos. Segundo Chaquiam *et al.* (2020), nessa configuração, o aluno é inserido em uma simulação de atividade científica com formulação de hipóteses até a construção de modelos, tendo o professor como intermediador do processo de construção do saber.

Assim, a intenção de aprendizagem conduz ao planejamento das situações criadas. Essas situações envolvem três elementos, estabelecendo “uma tríplice aliança entre elementos essenciais desse fenômeno: o professor (conhecimento educacional), o saber (conhecimento escolar) e o aluno” (SILVA, CHAQUIAM, CABRAL, 2022, p. 20). Esses elementos estabelecem relações entre entre si e entre o Milieu, meio didático, conforme ilustrado na figura 1:

Figura 1- Tríplice aliança: Professor-aluno-saber



Fonte: Silva (2020)

Pela figura 1, temos que entre o saber e o aluno existe uma relação de *aprendizagem*, entre o professor e o aluno uma relação *pedagógica* e entre o professor e o saber uma relação *epistemológica* onde é promovida a transposição didática, isto é, a aproximação entre o saber científico e o saber escolar. Essas três relações permeiam o *Milieu* criado pelo professor, que está diretamente ligado a seu modo de ensinar, modo este que passa suas concepções formativas e escolhas metodológicas.

A para Pais (2018, p. 18), no que se refere às escolhas metodológicas e à transposição didática, fala que se faz necessário um permanente espírito de vigilância que deve prevalecer ao longo de toda análise didática, diferenciando-se o que é saber científico e o que é saber ensinado, observando que alguns objetos matemáticos podem servir meramente como recurso para facilitar a aprendizagem, o que chama de criações didáticas.

Ilustrando com a nossa temática, queremos tratar didaticamente o objeto científico Congruência de Triângulos de modo que o educando seja capaz de reconhecer seu significado em situações práticas de sua realidade e sua utilidade na aprendizagem de outros objetos matemáticos, dando uma visão conectada entre os conteúdos matemáticos escolares e menos fragmentada. Essa conexão pode é indicada no currículo de Matemática do Ensino Fundamental: “(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.” (BRASIL, 2017, p. 316).

Considerando-se o meio didático associado às relações professor-aluno-saber, apresenta-se na seção 1.2 a escolha metodológica de ensino adotada nesta pesquisa, *Sequência Didática estruturada por UARC*.

1. 2 UARC EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Faz-se importante evidenciar aqui que existe um apelo das atuais orientações curriculares para um exercício efetivo da linguagem matemática, comunicar matematicamente significa argumentar e negociar ideias próprias (intuitivas dos educandos). Para que isso ocorra, as habilidades que os estudantes precisam desenvolver exige que o professor crie situações em que o educando resolva problemas e investigue.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 519).

Ocorre que essa é uma tarefa que exige um envolvimento suficiente e necessário para que o educando externalize seu modo próprio de pensar, sendo colocado num ambiente propício a reflexão. Para ser mais claro, na pesquisa de Silva (2020, p.145) esse ambiente precisa contribuir, dentre outros fatores, para que o educando possa desenvolver:

- Valores sociais de autonomia, autoconfiança, cooperação, senso crítico;
- Diálogo, discussões e validações conjuntas;
- Habilidade de comunicar e argumentar em língua materna e linguagem matemática, elaborando, interpretando e convertendo diferentes representações;
-Oportunidade de aprender com os erros;
-Liderança entre os pares;
-Engajamento coletivo.

As Sequências Didáticas muito conhecidas no ambiente educacional e acadêmico, no ensino de Matemática, em especial, fornecem a possibilidade de o professor desenvolver um ensino planejado e sistematizado e:

> essa sistematização proporcionada pela sequencia didática possibilita ao professor organizar as atividades de ensino em função dos núcleos temáticos – dimensão conceitual dos objetos de estudo – e dos procedimentos estruturais – dimensão técnica e estética (CABRAL, 2017, p. 31)

Para Costa e Gonçalves (2022) o termo Sequência Didática (SD), dentro do campo da Educação Matemática, tornou-se um conceito por mobilizar, dentro de si, certas dinâmicas e relações com outros conceitos, além de em sua estrutura agregar-se outras perspectivas teóricas. Assim, a estrutura de uma sequência didática dependerá do aporte teórico em que se baseia.

Embora essa seja uma grande contribuição e alternativa que esteja disponível em pesquisas sobre ensino de matemática (vide seção 2.1), para uma reaplicação nem sempre é evidente para um professor da educação básica, por exemplo, como reaplicar em suas aulas tais materiais, haja vista que nessa aplicação seja necessária uma consciência epistêmica que é inerente a quem planejou as atividades didáticas.

Na estrutura proposta por Cabral (2017) é apresentada uma maneira de articular atividades de Sequências Didáticas para a construção de um conceito, por meio de um roteiro de intervenções escritas, bem como a instrução da mediação oral que o professor deve recorrer sempre que perceber que o educando sozinho ou com seus pares não alcança ou se desvia do objetivo da atividade. Essa maneira de articular Sequências Didáticas é nomeada como Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) e tem as seguintes fases apresentadas no Quadro 1:

Quadro 1 - Etapas de construção de Sequências Didáticas.

Primeira fase	Os alunos recebem do professor uma descrição minuciosa da relevância do projeto de ensino em questão bem como dos objetivos, estrutura e condições coletivas de produção dos saberes envolvidos.
Segunda fase	A produção inicial, guarda as intervenções que visam diagnosticar as capacidades já adquiridas pelos alunos em relação ao gênero objeto de ensino e, além disso, procura adequar às ações de ensino posteriores a partir das quais se pretende atingir os objetivos de aprendizagem.
Terceira fase	Desenvolvimento dos módulos – na qual serão ministradas as oficinas que se constituem em diversas atividades, relativas ao desenvolvimento das capacidades de linguagem, envolvendo as três práticas linguísticas: leitura, produção e análise da língua. (Neste caso, linguagem matemática)
Quarta fase	A produção final, na qual o aluno coloca em prática os conhecimentos adquiridos e, juntamente com o professor, avaliam os progressos alcançados.

Fonte: Adaptado de Cabral (2017, p. 34)

Chamamos a atenção do leitor para o apelo ao desenvolvimento da linguagem na construção de sequências didáticas. Perceba na primeira fase que o educando é consciente do que vai aprender, na segunda fase os conhecimentos base são mobilizados e/ou nivelados, na terceira fase os novos conhecimentos são construídos por meio de discussões e registros escritos, por fim, na quarta fase, professor e alunos chegam a um consenso do que seria esse novo conhecimento.

Perceba também que as fases apresentadas no Quadro 1 possuem similaridades com as situações da TSD, apresentadas na seção 1.1. Essas fases são caracterizadas pelo tipo de intervenção que for utilizada, como ilustramos no Quadro 2.

Quadro 2 - As intervenções da UARC

ESCRITAS	**Pré-formais**	**Inicial** - é a primeira peça de jogo de ideias na esfera do discurso dialógico-didático que serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito.
		Exploratória - tem com objetivo aprofundar olhar do aluno, não serão dadas por meio de questionamentos, mas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos por parte dos alunos. Aqui os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.
		Reflexiva - sempre se materializa por meio de um questionamento. Esse questionamento se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. O aluno é estimulado durante todo o tempo do jogo da aprendizagem em refletir sobre o que está fazendo e as consequências desse fazer sobre outros aspectos da atividade que se desenvolve.
	Formal	**Formalizante** o professor, que orienta o pensamento mediado pela sequência didática, se apropria dessas verdades "empírico-intuitivas" (sugeridas pelos alunos) e, a partir delas, enuncia o que chama de Intervenção formalizante. Aqui o professor reelabora as verdades "redescobertas" pelos alunos com as vestes da formalidade Matemática. Aqui as percepções dos alunos são consolidadas com uma linguagem mais abstrata que procurar satisfazer as exigências do saber disciplinar formal, axiomático, próprio da natureza matemática.
	Pós-formais	**Avaliativa Restritiva -** concebidas com a finalidade de se estabelecer um primeiro parâmetro de aferição de aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. Trata-se de uma espécie de "primeiros passos" para se checar os rudimentos do conceito em tese apreendido. A ênfase nesse momento é para as implicações conceituais do

		objeto reconstruído e para as propriedades operacionais com a manipulação de algoritmos envolvidos.
		Avaliativa Aplicativa – a finalidade é a Resolução de Problemas de Aplicação. Aqui temos o nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual. O aluno precisa ser capaz de mobilizar as noções conceituais associadas às propriedades operacionais decorrentes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados aos diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.
ORAIS	**Todos os níveis de formalização**	**I-OMO** - O aluno é envolvido numa espécie de "ping-pong discursivo" provocado, por um lado, pelas Intervenções Estruturantes que se materializam de forma escrita nas Sequências Didáticas e, por outro lado, num tipo oculto de intervenções ao texto da Sequência Didática denominado de Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO). Essas intervenções são extremamente necessárias, pois ajudam o professor a modular as aproximações e distanciamentos dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem.

Fonte: Adaptado de Cabral (2017)

Note, pelo quadro 2, que as I-OMOS, nada mais são do que um reforço para as demais intervenções estruturantes que vão escritas ao longo da atividade, sendo elaboradas pelo professor durante a mediação. As intervenções exploratória e reflexiva, não possuem necessariamente uma ordem de proposição, mas distinguem-se, respectivamente, pelo "fazer" e o "pensar sobre o que fez", o que pode ser feito conjuntamente, ou alternadamente quantas vezes for necessário, como peças estratégicas desse jogo didático. A intervenção formalizante tem o mesmo caráter da situação de Intitucionalização da TSD (seção 1.1), sendo o momento exclusivo do professor apresentar as definições e propriedades com o devido formalismo matemático.

O ping-pong discursivo proposto pela UARC tem intenção de elevar a "segurança conceitual e algorítmica do aprendiz" (CABRAL, 2017, p. 50). Neste sentido elaborar questões que o educando tenha que contruir respostas cada vez mais sofisticadas é fundamental. Responder apenas sim ou não basta, é preciso fazê-lo explicar seu raciocínio, estratégias adotadas, quais conhecimentos foram mobilizados para formular suas respostas. Para tanto, as questões/intervenções possuem uma intenção didática, por meio das respostas orais ou escritas do educando é possível verificar o nível epistemológico de aprendizagem.

Assim, na próxima seção, apresentamos como é a analisado esse nível de aprendizagem por meio do discurso dos aprendizes.

1. 3 ANÁLISE MICROGENÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Como enfatizado até aqui, nosso objetivo é elaborar uma sequência didática para o ensino de Congruência de Triângulos que possa promover uma aprendizagem autônoma e colaborativa por meio da interação dialógica aluno-aluno e aluno-professor.

Para tanto, na fase de construção e planejamento da sequência didática o discurso do professor é impregnado de intenções didáticas. Essas intenções didáticas estão diretamente ligadas aos objetivos de aprendizagem, habilidades e competências a serem desenvolvidas, muitas previstas no currículo escolar de Matemática. Para ser mais claro, por exemplo, se o objetivo da atividade é fazer que o aluno compreenda a noção de semelhança e congruência, as intervenções devem inserir o educando numa situação de construção/observação que ele possa responder perguntas do tipo: Quais diferenças ou semelhanças entre determinadas figuras? O que diferencia um determinado grupo de figuras de outro grupo? O que você faria para que determinada figura atendesse a determinado critério? O que falta em determinada figura para que ela atenda a determinada condição? Perceba que nenhuma dessas perguntas poderiam ser respondidas com um simples “sim” ou “não”, é necessário refletir e estabelecer conexões para elaborar as respostas.

O mais desafiador é que a resposta pode não ser a “desejável”, mas saber o entendimento do educando dá ao professor a oportunidade de “um feedback imediato de como a aprendizagem está ocorrendo, podendo intervir para que o conhecimento não se sedimente de forma equívoca;” (SILVA, 2020, p. 147).

Assim, na fase de experimentação de nossa pesquisa feita com estudantes do oitavo ano do ensino fundamental do ensino regular, serão organizados em grupos de 3 a 5 alunos, para que interajam entre si. Todos os episódios didáticos serão gravados em áudio e o anonimato dos sujeitos preservado. As falas dos sujeitos serão chamadas de *turnos*, as discussões feitas a respeito de cada intervenção escrita, chamadas de seguimentos e cada UARC (atividades) chamaremos de episódios.

Goés (2000) apresenta a Análise Microgenética como uma forma de coletar e tratar indícios de aprendizagem em episódios didáticos e é aporte de grande influência no constructo proposto por Cabral (2017). Goés (2020) enfatiza que essa maneira de construção de dados requer atenção a detalhes para que os recortes de episódios interativos, chamados de micro eventos, revelem as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação. Este autor recorre a Vygotsky para justificar que é uma análise genética por considerar que os discursos resultam de eventos sociais e culturais singulares para cada indivíduo.

Para complementar a análise de dados, agregaremos a Análise do Discurso, segundo Mortimer e Scott (2002) para validação de nosso constructo. A Análise Microgenética e a Análise do Discurso, segundo Chaquiam et al. (2020) se mostraram eficazes para verificação de potencialidades do desenvolvimento de sequências didáticas. Apresenta-se na figura 2 a estrutura de análise de episódios didáticos estabelecida por Mortimer e Scott (2002).

Figura 2 - Análise do discurso em episódios didáticos.

Foco no Ensino	**Intenções do professor**	• Engajar os estudantes; explorar ideias e situações específicas; oportunizar aos estudantes de falar e pensar frente novas ideias; dar suporte para aplicar ideias noutros contextos, etc.
	Conteúdo	• Descrição; Explicação; Generalização.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	• Interativo / dialógico: Professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. • Não-interativo / dialógico: Professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. • Interativo/de autoridade: Professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. • Não-interativo / de autoridade: Professor apresenta um ponto de vista específico.
Ações	**Padrões de interação**	• Definir padrões entre aluno-professor, a exemplo, inicialização pelo professor, ora pelo aluno, com feedback para prosseguimento da fala pelo aluno e avaliação pelo professor. O principal padrão de interação é o I-R-A (iniciação do professor (I), resposta do aluno (R) e avaliação do professor (A)); esse padrão pode ser desdobrado ou alterado, na formação de cadeias de discursos variados (debates) em que as respostas e réplicas constroem conhecimento, a saber, o padrão não triádico I-R-F-R-F, sendo feedback (F).
	Intervenções do professor	• Interações entre professor e aluno que tem por finalidade, dentre outras, introduzir um termo novo; diferenciar significados; compartilhar resultados dos grupos; solicitar esclarecimentos; sintetizar resultados, etc.

Fonte: Silva, Chaquiam, Cabral (2022, p. 25)

Perceba que nesse tipo de análise vários elementos são reunidos para que se desenvolvam as conclusões sobre a aprendizagem, sendo uma análise em três perspectivas: Ensino, Abordagem e Ações. Na perspectiva do ensino é analisada a maneira como o professor envolve os educandos de modo a participarem da aula, estabelecendo suas intenções de ensino e desenvolvimento de conteúdos a serem abordados.

Quando o enfoque passa a ser a abordagem ocorre uma espécie de modulação da interação, as abordagens comunicativas, interativa ou não interativa, referem-se à ocorrência ou não de diálogo entre os sujeitos aluno-aluno e aluno-professor. Quanto à abordagem ser dialógica ou de autoridade refere-se à ocorrência ou não negociação de ideias, isto é, o jogo didático passa por um intenso debate chegando a um ápice de consenso de ideias em que só resta a formalização feita pelo professor. Deste modo existe quatro possibilidades de abordagem comunicativa: interativa/dialógica, interativa/de autoridade, não interativa/dialógica e não interativa/de autoridade.

Ao analisarmos na perspectiva das ações verificamos os padrões de interação estabelecidos por meio das intervenções do professor. Essas intervenções, como nas intervenções da UARC, possuem uma intenção que vai conduzindo o discurso do educando. Logo, dependendo da intenção da interação os padrões de comunicação mudam. Ao analisarmos essas mudanças de padrão podemos definir o nível epistemológico de aprendizagem do educando sendo que basicamente ocorrem dois tipos de padrão de comunicação a saber: I-R-F (Iniciação, Resposta, Feedback) e I-R-A (Iniciação, Resposta, Avaliação). Esses padrões vão sendo combinados formando cadeias discursivas ou debates em torno do objeto de estudo.

O debate criado durante a execução das atividades vão revelar em que nível de epistemológico de aprendizagem o aluno se encontra. Mortimer e Scott (2002) definiram esses níveis como sendo perceptivo/intuitivo, empírico e teórico. Esse modo de análise pós-experimentação coaduna com os níveis de formalização da UARC apresentado na seção 1.2. Para melhor compreensão de como a estrutura metodológica aqui adotada se baseia, apresentamos o quadro 3.

Quadro 3 - Conexões entre a construção da SD e a Análise de resultados.

TSD Situação	**UARC Intervenção**		**A D com AM Interação**		**Intenção do Professor**
Ação	Inicial	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Perceptivo / Intuitivo	• Engajar os alunos tanto intelectual quanto emocionalmente.
Formulação	Exploratória	Pré-Formal	Interativa Dialógica	Ênfase no Empírico	• Apresentar o problema e explorar as ideias e argumentos dos alunos.
Validação	Reflexiva	Pré-	Interativa	Ênfase no	• Dar oportunidades ao aluno de

		Formal	Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo	falar, refletir e expor suas ideias em pequenos grupos ou turma.
Institucio-Nalização	Formalizante	Formal	Não-Interativa /de Autoridade	Ênfase no Teórico	• Estabelecer a visão científica por meio da formalização e generalização dos conceitos pretendidos do saber escolar disciplinar; • Transferir para o aluno o significado do saber escolar elaborado e controle pelo uso e aplicação desse saber.
Monitoramento Processual das aprendizagens	Avaliativa	Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	• Avaliar a mobilização de conceitos, definições e propriedades do saber escolar elaborado em situações reais e/ou fictícias.
Ação Formulação Validação	IOMO	Pré-Formal Pós-Formal	Interativa Dialógica / Interativa de Autoridade	Perceptivo / Intuitivo Empírico e Teórico	• Balizar o aluno de modo que este permaneça numa trajetória próxima a pré-estabelecida pelo professor.

Fonte: Silva (2020, p. 116)

No quadro 3 apresenta-se as conexões entre os aportes adotados na construção e na análise da Sequência Didática. Perceba que a ênfase na interação dialógica durante todo o percurso metodológico requer do professor um domínio sobre o objeto matemático que vai além do que está posto nos livros, é necessário pensar sobre a base cognitiva do educando, sobre uma iniciação que envolva os educandos, um ambiente de comunicação sadia em que o modo de pensar seja respeitado, onde o erro seja uma possibilidade de rever as conclusões. Para Silva (2020), nessa estrutura metodológica o professor ganha no sentido de ter visão sistêmica do processo, considerando formas de pensar diferentes da dele e tornando-se mais experiente frente às dificuldades de ensino e de aprendizagem.

Tendo em vista que os principais dados analisados nesta pesquisa são as falas dos sujeitos em língua natural, consideramos que Silveira (2015, p. 39) explica que é por meio da língua que em seu discurso o sujeito resignifica, reconhece e estranha as suas próprias palavras e a dos outros, formando teias de sentidos e negociação de vozes impregnadas de heterogeneidade. Essa perspectiva enriquece a nossa visão da contribuição da análise microgenética, que valoriza aspectos socioculturais (essencialmente heterogêneos) próprios de cada indivíduo que possam modular seus discursos.

Na seção que segue apresentamos a Sequência Didática para o ensino de Congruência de Triângulos com as devidas instruções ao professor e com o material escrito a ser reproduzido para o estudante e para professores.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresentamos a Sequência Didática objeto de estudo desta pesquisa, baseando-nos nos aportes teóricos e metodológicos apresentados na seção 1 e nos estudos realizados durante a pesquisa de mestrado.

Para aplicação da Sequência Didática que apresentamos se faz necessário que os sujeitos tenham conhecimentos base sobre a condição de existência de um triângulo, representação de lados e ângulos de um triângulo, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, transformações geométricas e representação algébrica.

As atividades foram embasadas em nossas pesquisas preliminares e nas indicações das diretrizes curriculares para o ensino de matemática no Ensino Fundamental sobre a manipulação de transformações isométricas.

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2017, p.527)

A sequência é composta por três atividades conforme o quadro a seguir:

Título	Objetivo de aprendizagem	Material	Tempo estimado
UARC 1: É semelhante, mas é congruente?	Definir triângulos congruentes	Material impresso, caneta ou lápis.	2 h/a de 45 min
UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?	Estabelecer critérios suficientes para ocorrência de congruência de triângulos.	Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha triangular.	3 h/a de 45 min
UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.	Identificar caso de congruência em triângulos retângulos.	Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha triangular.	1 h/a de 45 min

Apresentamos a seguir cada uma das atividades como um roteiro de aplicação.

2. 1 MATERIAL DO PROFESSOR

A seguir apresentamos as instruções de aplicação da Sequência Didática ao professor.

2. 1. 1 UARC 1: É parecido, mas não é igual.

Objetivo: Definir triângulos congruentes

Material: Material impresso, caneta ou lápis.

Procedimento: Após a formação de grupos e distribuição do material impresso da atividade, o professor deve ler o comando da primeira questão em que os estudantes farão comparações entre cada figura do quadro e a figura de referência, conforme o comando da questão 1.

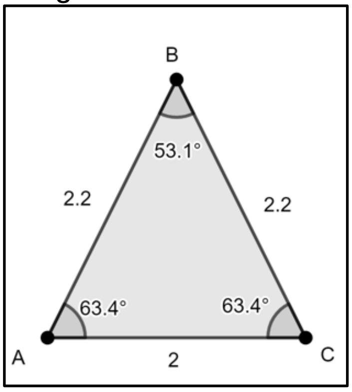
Nas intervenções reflexivas, questões de 2 a 5, os estudantes devem perceber que a semelhança tem a ver apenas com a forma, e que a forma pode ser preservada mesmo que a figura seja ampliada ou reduzida segundo uma razão de semelhança. Devem concluir também que quando não ocorre mudança no tamanho da figura semelhante, a razão de semelhança é igual a 1.

Na questão 6, os estudantes deverão organizar suas observações num quadro e concluir quais figuras atendem a três critérios: mesma forma, ângulos e lados correspondentes de mesma medida.

Nas questões de 7 a 8 os estudantes deverão sistematizar a sua ideia pré-formal do que seriam triângulos congruentes e perceber que a posição do triângulo correspondente não interfere na congruência entre eles.

1) Intervenção inicial: Considerando medidas de ângulos e lados correspondentes de triângulos, compare e marque no quadro de figuras quais são semelhantes (mesma forma) a figura de referência a seguir:

Figura de referência.



Quadro de figuras

Figura 1

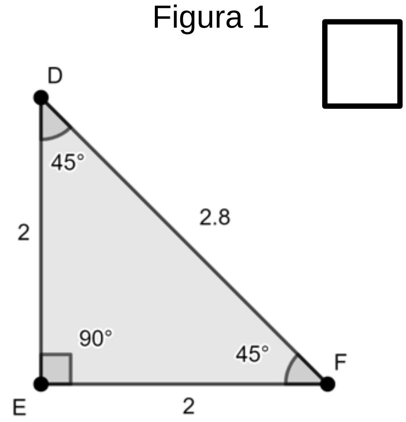


Figura 2

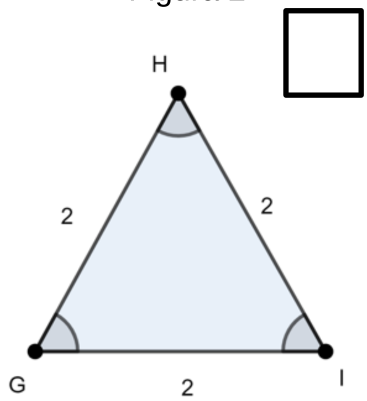


Figura 3

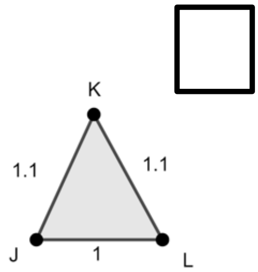


Figura 4

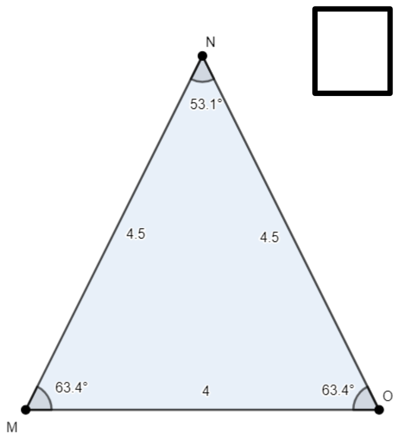


Figura 5

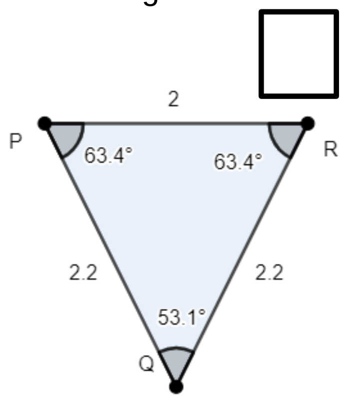
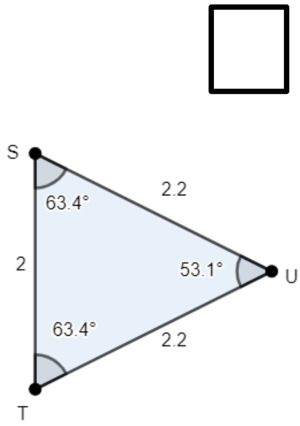


Figura 6



Orientação ao professor: É possível que os estudantes num primeiro momento não identifiquem todos os triângulos semelhantes devido a posição em relação ao triângulo de referência. O professor deve então instigar os estudantes a compararem em sob diferentes ângulos. Para isso o pareamento de ângulos e lados correspondentes congruentes será fundamental, assim devem ser orientados a usar a simbologia matemática $AB = ST$ ou $\hat{S} = \hat{A}$, por exemplo.

2) (Intervenção reflexiva): Que características você observou para estabelecer a comparação da forma dos triângulos?

Orientação ao professor: O professor deve instigar que os estudantes verifiquem se as medidas dos lados correspondentes estão na mesma proporção e os ângulos com mesma medida do triângulo de referência.

3) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados ampliada em relação a referência? Qual a razão dessa ampliação?

Orientação ao professor: dividir as medidas dos lados correspondentes da figura do quadro pelas medidas do triângulo de referência.

4) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados reduzida em relação a referência? Qual a razão dessa redução?

5) (Intervenção reflexiva): Quais figuras selecionadas possuem mesmas medidas de lados e ângulos em relação a referência? Qual seria a razão entre essas medidas?

6) (Intervenção exploratória): Considerando as observações que você fez até aqui preencha o quadro a seguir com **X**:

Figura	Mesma forma da referência	Todos os ângulos têm mesma medida da referência	Todos os lados têm mesma medida da referência
1			
2			
3	**X**	**X**	
4	**X**	**X**	
5	**X**	X	X
6	**X**	**X**	**X**

7) (Intervenção reflexiva): Considerando sua resposta na questão 5 e as marcações realizadas no quadro da questão 6, responda: O que é necessário para que triângulos semelhantes sejam iguais?

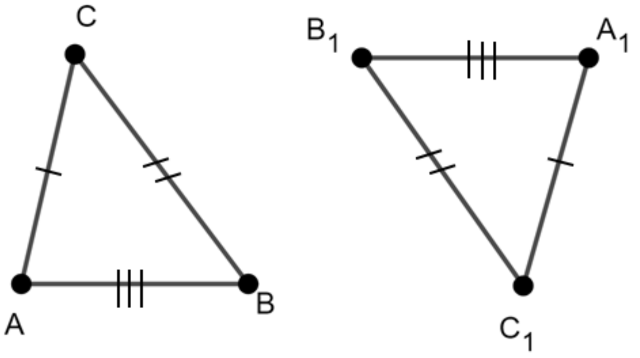
8) (Intervenção reflexiva): Considerando os triângulos que atenderam as três características do quadro da questão 5, responda: Quais diferenças de posição esses triângulos possuem entre o triângulo de referência?

Orientação ao professor: As figuras 5 e 6 são as congruentes ao triângulo de referência, mas não estão na mesma posição (Rotação, translação, reflexão), é possível que os estudantes usem expressões como "a figura está virada", "girou", "espelhada".

9) (Intervenção reflexiva): Que critérios você estabeleceria para afirmar que dois triângulos são iguais?

FORMALIZAÇÃO

Dizemos que dois triângulos são congruentes (≡) quando for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.



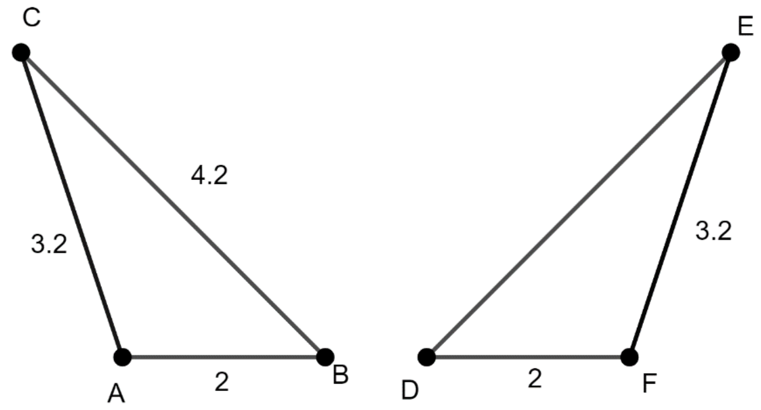
$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}\ , \overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1},\ \ \overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1} \\ \hat{A} = \hat{A}_1\ \ ,\ \ \hat{B} = \hat{B}_1,\ \ \hat{C} = \hat{C}_1 \end{cases} \Leftrightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

Obs 1: Dois triângulos congruentes possuem razão de semelhança igual a 1.

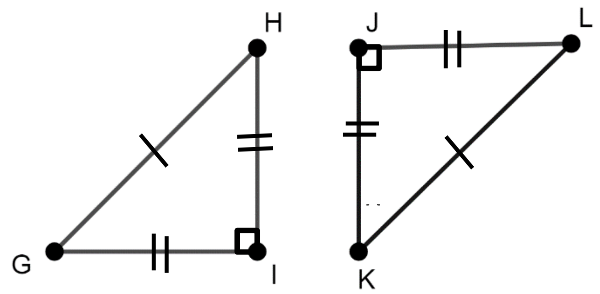
Obs 2: Triângulos congruentes preservam sua forma e medidas ainda que mude sua posição, isto é, o triângulo congruente pode ser um triângulo refletido ou rotacionado do triângulo correspondente.

9) **(Intervenção Avaliativa restritiva):** Sabendo que os pares de triângulos a seguir são congruentes, estabeleça a correspondência entre ângulos e lados e deduza a medida desconhecida $\overline{DE}$ e $\hat{K}$.

a)

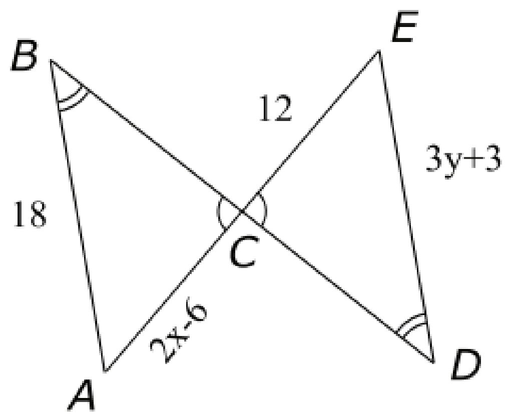


b)



10) **Intervenção Avaliativa Aplicativa:** Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.

Orientação ao professor: (O aluno terá que lembrar sobre ângulos opostos pelos vértices)



2. 1. 2 UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

Objetivos: Estabelecer critérios suficientes para ocorrência de congruência de triângulos.

Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha triangular.

Procedimento: Formar grupos. Inicialmente o professor deve apresentar a malha triangular e suas características, enfatizando que os lados ($\boldsymbol{L}$) são iguais e que as alturas ($\boldsymbol{h}$) também podem ser usadas como parâmetro de medida. Além disso, todos os ângulos são de 60^0, mas quando utilizarem a altura como medida criarão bissetrizes a esses ângulos e novos ângulos de medida 30^0. O professor pode projetar uma malha triangular em branco na lousa e criar diferentes triângulos e assim fixar essa caracterização da utilização da malha triangular. Também deve apresentar a contagem de lados e ângulos de um triângulo (A-L-A-L-A-L) e que essa contagem pode ser feita no sentido horário e anti-horário.

Na questão 1 são apresentados pares de triângulos que os estudantes deverão identificar, pelo que aprenderam até aqui, se são ou não congruentes. O professor deve nessa primeira questão enfatizar como corresponder lados e ângulos, seja por letras ou por traços. Nessa fase o professor apenas acolhe as proposições e pede que registrem sem negociação de ideias, ou pode deixar registrado na lousa.

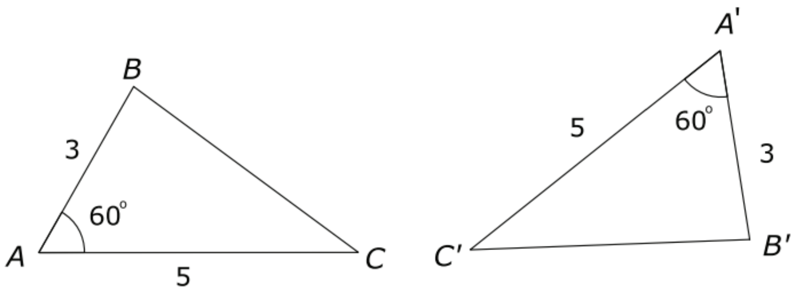
Na segunda questão os estudantes vão reunir as informações de cada bloco para criar um triângulo referência, um congruente a este e outro não congruente. Em algumas malhas referentes aos triângulos congruentes há um lado fixado apenas para que o estudante possa construir triângulo em posição diferente ao da referência (rotacionado e/ou refletido), sendo opcional, conforme a dificuldade do grupo, fazer na mesma posição do triângulo de referência. Para que o aluno consiga adotar a posição sugerida deve ser enfatizada a ordem de lados e ângulos que pode ser feita nos sentidos horários e anti-horários. (O professor pode desenhar no quadro como se o triângulo fosse um relógio e treinar essa contagem nos dois sentidos).

O estudante deverá perceber que em alguns casos, com as informações que foram inicialmente fixadas, é impossível criar um triângulo não congruente ao de referência. Para que não se alonguem tentando fazer algo que somente o professor sabe que é impossível estabeleça prazo de 10 minutos para cada bloco.

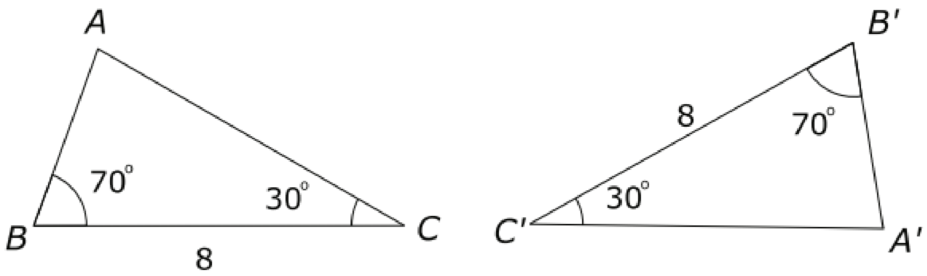
Durante as intervenções reflexivas e orais do professor, os estudantes vão concluir em quais casos existem condições mínimas para ocorrência de congruência de triângulos. Pensando de forma contrapositiva, que se não é possível criar um triângulo não congruente ao de referência é porque nos casos em que haja uma correspondência de congruência de LLL, LAL,ALA e LAA$_{O}$, consequentemente, esses pares de triângulos são congruentes.

1) Intervenção inicial: Baseando-se nas informações da atividade anterior, explique se é possível afirmar que os pares de triângulos a seguir sejam congruentes.

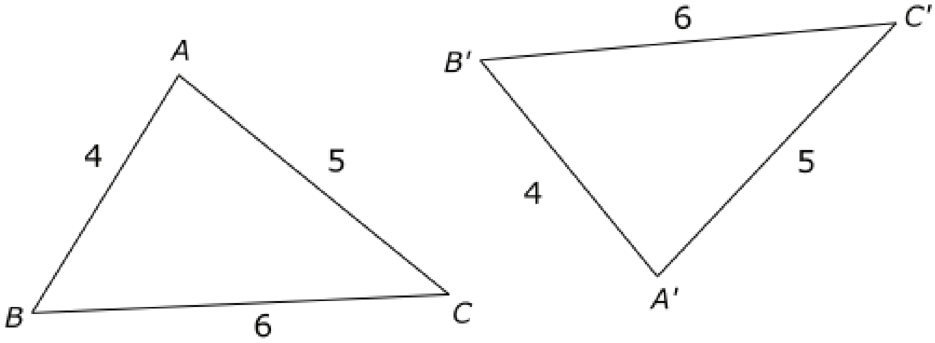
a)



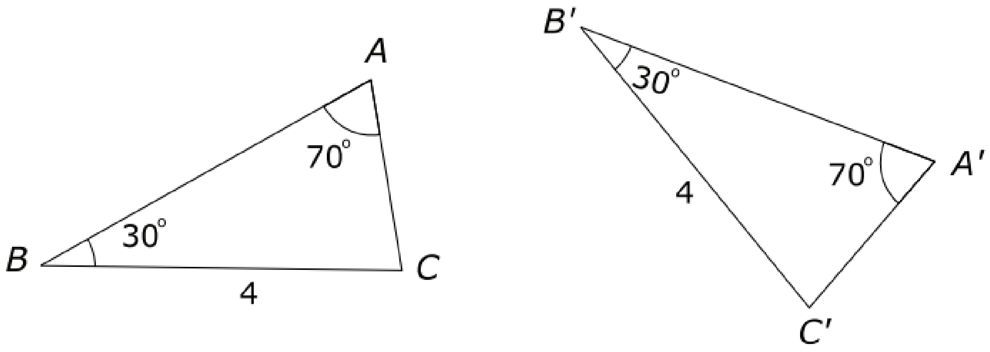
b)



c)



d)

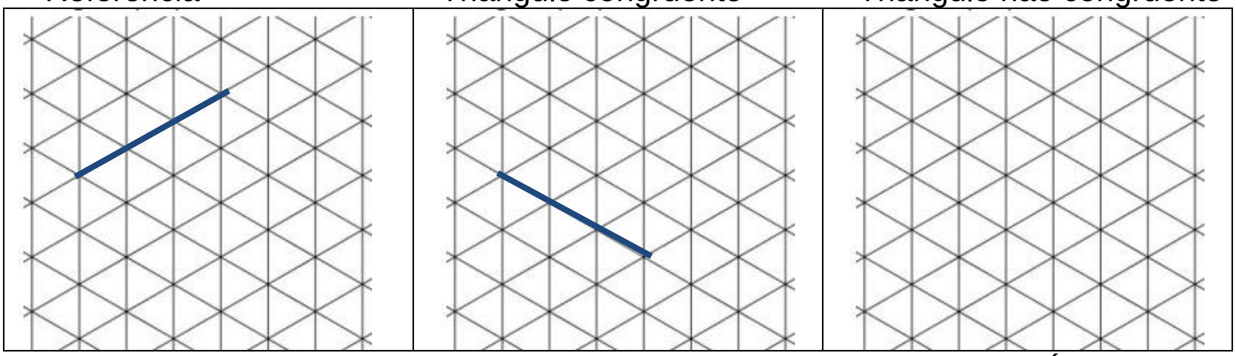


2) Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes. Linhas em azul apresentam medidas fixas, linhas em vermelho devem ser completadas.

Obs.: A malha triangular adotada é formada por triângulos equiláteros de lado L e altura h, logo todos os ângulos internos são de 60^0.

(I) Medida informada:______________________________

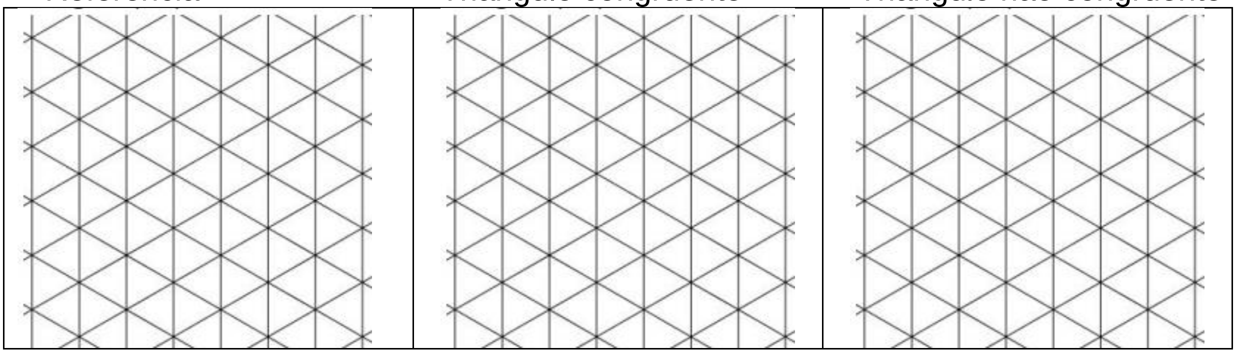
Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Aqui está fixado apenas um lado do triângulo. É possível fazer os três triângulos solicitados.

(II) Medidas informadas: Todos os ângulos iguais (AAA)

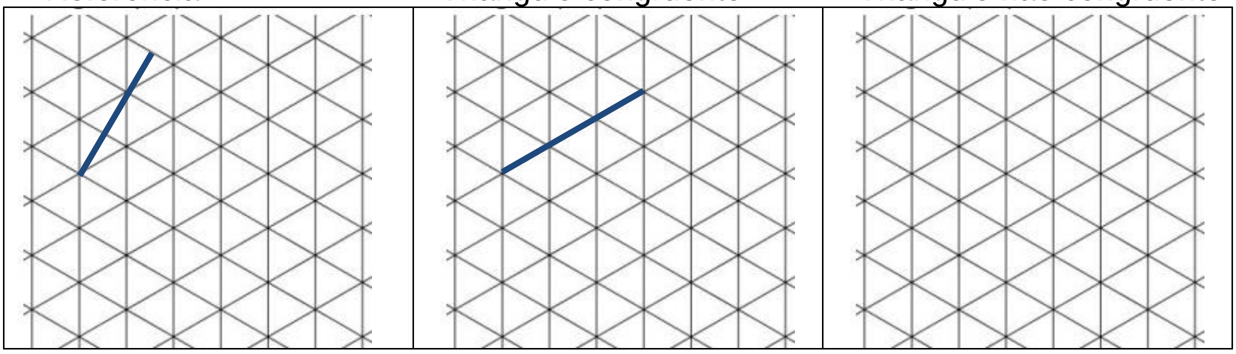
Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Caso os alunos não concluam com a informação dada que todos os ângulos medem 60^0, deve relembrar sobre soma dos ângulos internos de um triângulo para ajuda-los. É possível fazer os três triângulos solicitados.

(III) Medidas informadas: Lados com medidas $3L, 1{,}5L\ e\ 3h$, respectivamente.

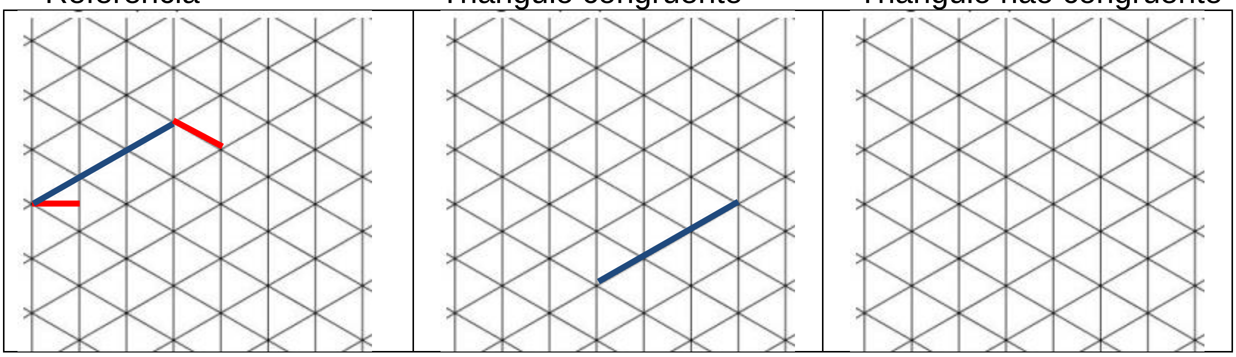
Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Caso LLL, não será possível fazer o triângulo não congruente, mas só final o aluno poderá ter essa confirmação do professor, mesmo que o grupo chegue a essa conclusão. Se os alunos não conseguirem fazer o triângulo na posição sugerida na malha destinada ao triângulo congruente ao de referência, é opcional fazer na mesma posição.

(IV) Medidas informadas: ____________________________________

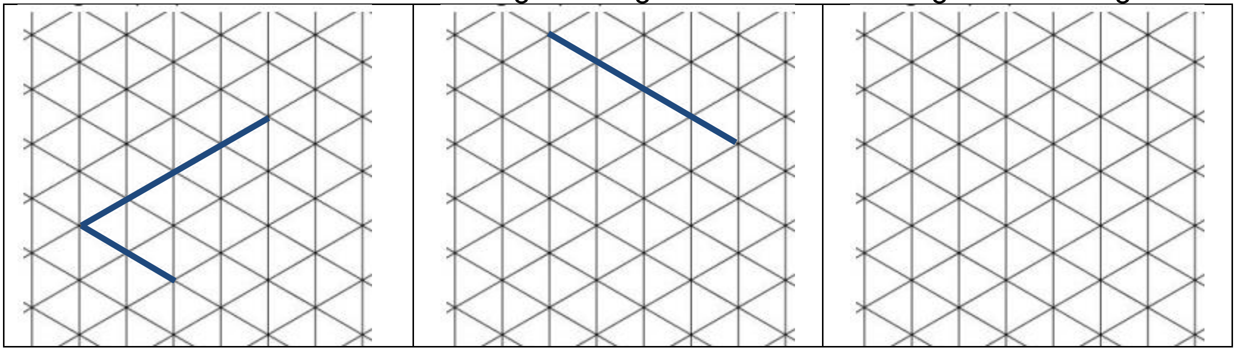
Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Caso ALA, não será possível fazer o triângulo não congruente, mas só final o aluno poderá ter essa confirmação do professor, mesmo que o grupo chegue a essa conclusão. Se os alunos não conseguirem fazer o triângulo na posição sugerida na malha destinada ao triângulo congruente ao de referência, é opcional fazer na mesma posição.

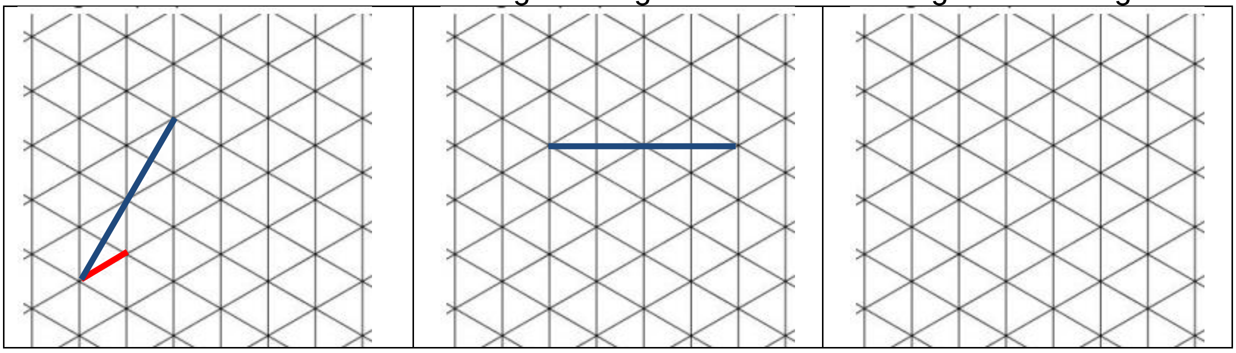
(V) Medidas informadas: ___________________________________

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



(VI) Medidas informadas: Lado $4h$, ângulo 30^0, Ângulo de 60^0 oposto ao lado informado.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Caso LAA_o, não será possível fazer o triângulo não congruente, mas só final o aluno poderá ter essa confirmação do professor, mesmo que o grupo chegue a essa conclusão. Se os alunos não conseguirem fazer o triângulo na posição sugerida na malha destinada ao triângulo congruente ao de referência, é opcional fazer na mesma posição.

3) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos de referência**? Quais dificuldades você teve?

4) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

5) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos não congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

Instrução ao professor: Será necessária aqui uma pausa nos grupos para socialização com a turma, o professor deve comparar as dificuldades e deixar que os alunos falem que estratégias tiveram para superá-las. Caso as conclusões estejam muito divergentes da desejável (muito longe de uma pré-formalização), o professor deve voltar cada caso e negociar ideias até que a turma chegue a um consenso, embora as figuras de cada grupo possam estar em diferentes possibilidades de posição, as informações fixadas são as mesmas, logo é necessário estar atento se não houve uma contagem errada das medidas.

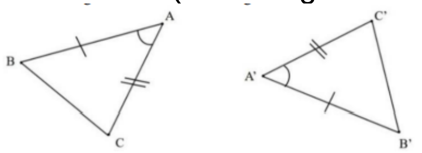
6) Intervenção reflexiva: Considerando as situações em que você não conseguiu construir os triângulos não congruentes aos de referência, que informações estavam fixadas?

7) Intervenção reflexiva: Responda a questão título desta atividade: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

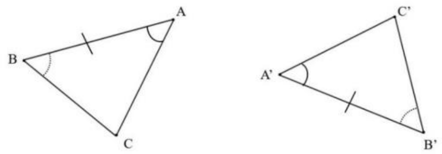
FORMALIZAÇÃO

Existem certos critérios suficientes para que possamos concluir que dois triângulos sejam congruentes. Esses critérios se apresentam nos seguintes casos:

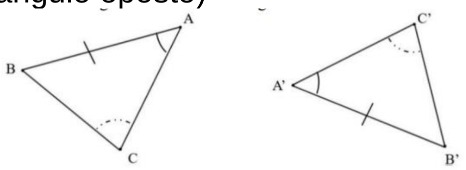
1º caso - LAL (Lado-ângulo-lado)



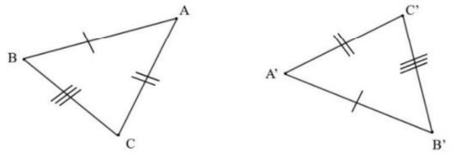
2º caso-ALA (ângulo-lado-ângulo)



3º caso - LAA$_o$ (Lado-ângulo-ângulo oposto)



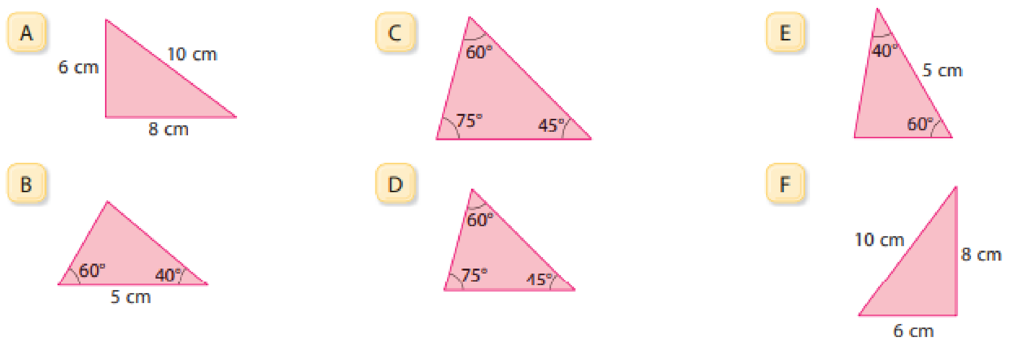
4º caso - LLL (Lado-lado-lado)



8) Intervenção avaliativa restritiva: Volte a questão 1, caso você conclua que os pares de triângulos são congruentes, em que caso de congruência de triângulos você se baseou para chegar a essa conclusão?

	São triângulos congruentes?	**Caso de congruência de triângulos**
a)		
b)		
c)		
d)		

9) **Intervenção avaliativa restritiva:** Indique os pares de triângulos congruentes e o caso de congruência que usou como critério:



2. 1. 3 UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.

Objetivos: Identificar caso de congruência em triângulos retângulos.

Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha triangular.

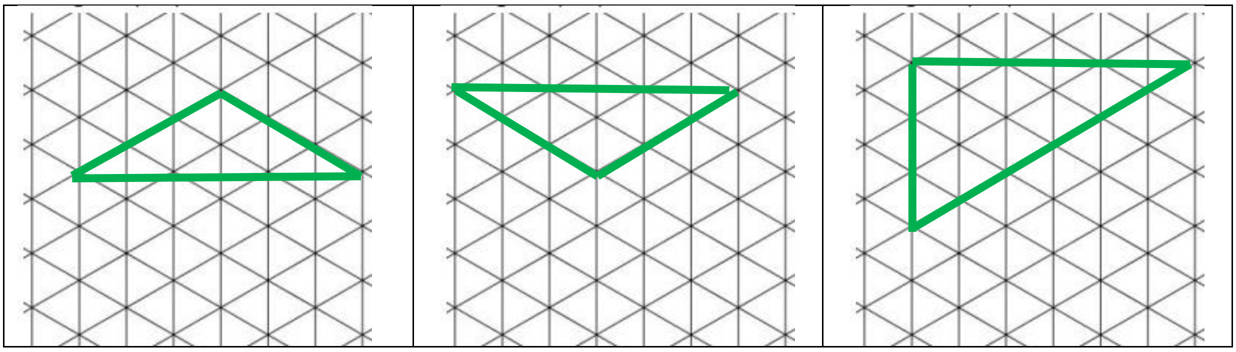
Procedimento: Manter os grupos da atividade anterior. Procedimento similar ao da atividade anterior. Fazer uma revisão no quadro sobre ângulos e lados opostos de um triângulo. Queremos mostrar que dois triângulos retângulos são congruentes se um tem um dos catetos e a hipotenusa congruentes aos lados correspondentes do outro. Para isso vamos consideram que para haver hipotenusa é necessário haver o ângulo reto oposto a ela. Então apresentamos situações em que não será possível criar um triângulo não congruente ao de referência pelo fato de estar pareado cateto e hipotenusa.

1) Intervenção Inicial: Pense sobre a atividade anterior, você percebeu que os casos de congruência apresentados fixam sempre 3 informação sobre os triângulos congruentes? E se fossem apenas 2 informações fixadas, seria suficiente para garantir a congruência? Discuta com seus colegas.

2)Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes.

(I) Medidas informadas: Ângulo e lado oposto a esse ângulo medindo $3L$**.**

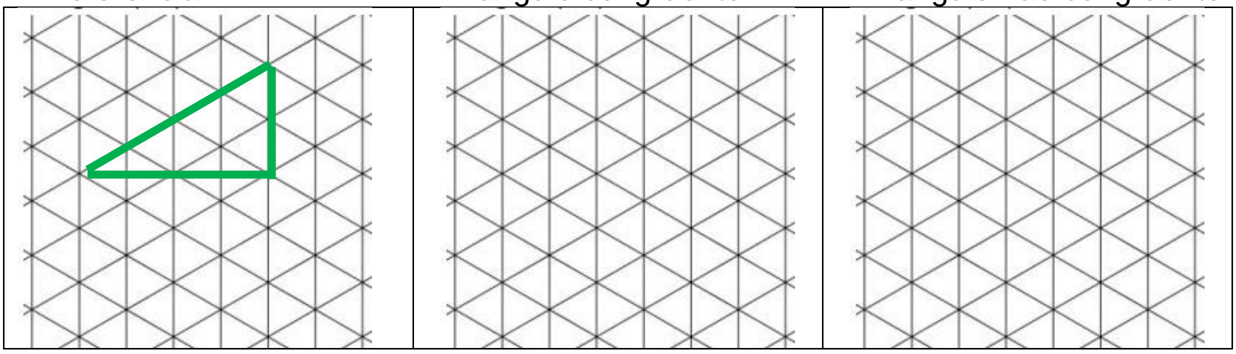
Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente



Instrução ao professor: No Material do aluno vai tudo em branco. Colocamos a resposta em verde, apenas pra mostrar que há situações de triângulo não congruente neste caso.

(II) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $5L$**.**

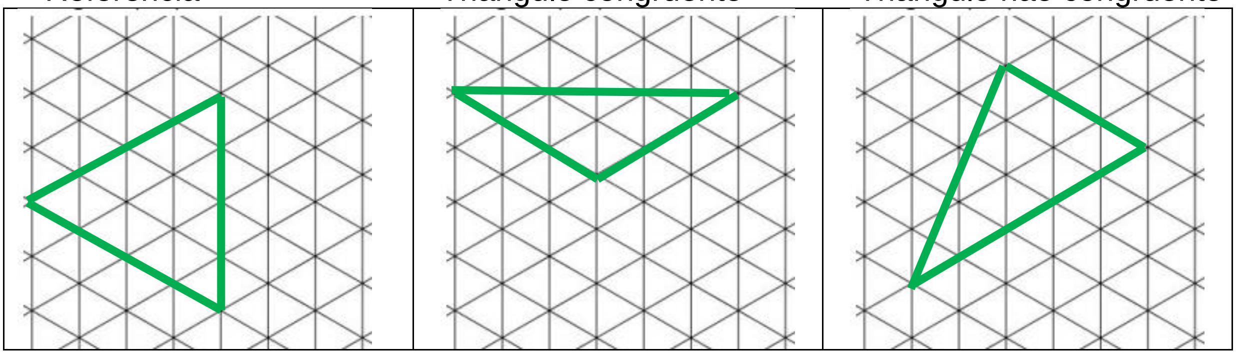
Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Neste caso não tem como fazer o triângulo não congruente apenas pra mostrar que há situações de triângulo não congruente neste caso.

(III) Medidas informadas: Ângulo de 60^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $4L$**.**

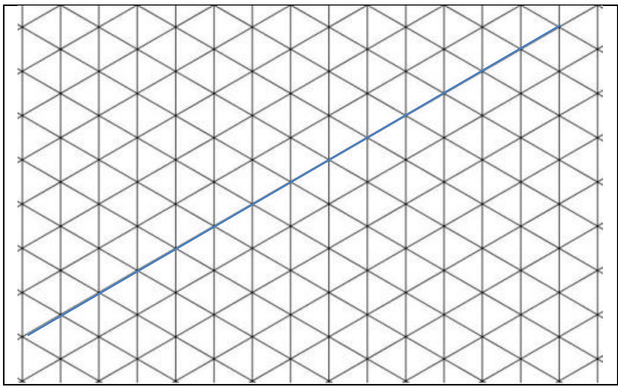
Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



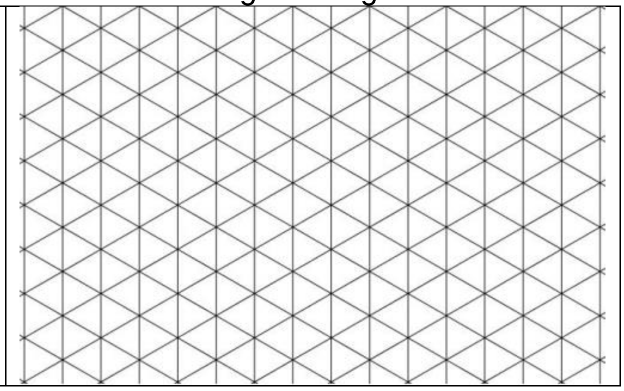
Instrução ao professor: Neste caso, é possível encontra um triângulo não congruente ao de referência, porém o estudante terá que partir de um ângulo de 60 graus da malha e projetar os lados até que fiquem distantes $4L$, podendo usar uma régua para verificar a medida.

(IV) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $10L$.

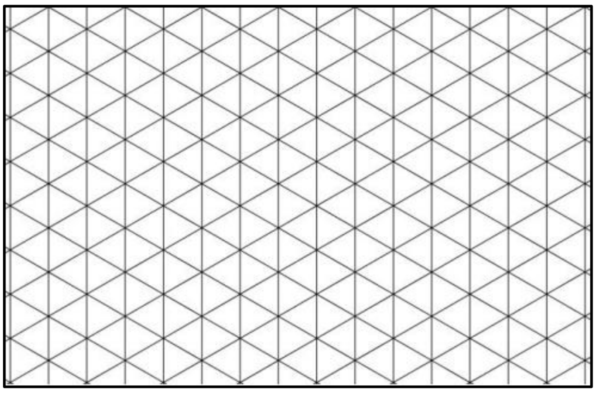
Referência



Triângulo congruente



Triângulo não congruente



Instrução ao professor: Neste caso não tem como fazer o triângulo não congruente.

3) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

Instrução ao professor: Por ter um nível de dificuldade empírica maior é necessário que a mediação oral do professor ajude o educando a encontrar uma possibilidade de não congruência para as situações 1 e 3 e não permitindo que se alonguem tentando encontrar nas situações 2 e 4 onde não vai existir essa possibilidade.

4) Intervenção reflexiva: Qual a característica comuns nesses casos em que você só conseguiu construir triângulos congruentes aos de referência?

5) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

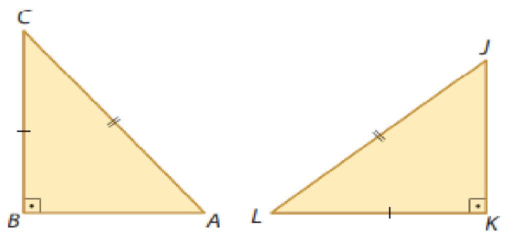
6) Intervenção reflexiva: Como você definiria esse caso de congruência de triângulos?

Instrução ao professor: Neste momento, embora as informações dadas na intervenção exploratória tenha sido medida da hipotenusa e ângulo reto, a discussão deve ser conduzida para o fato de que ao se deparar com dois triângulos retângulos, deve-se verificar a congruência entre as hipotenusas e pelo menos um par os catetos correspondentes.

FORMALIZAÇÃO

Existe um caso especial de congruência de triângulos que é válida apenas para triângulos retângulos:

Caso especial: Dois triângulos retângulos são congruentes se um tem um dos catetos e a hipotenusa congruentes aos lados correspondentes do outro.



- Hipotenusa $\longrightarrow$ $\overline{AC} \cong \overline{JL}$
- Cateto $\longrightarrow$ $\overline{BC} \cong \overline{KL}$

Então: $\triangle ABC \cong \triangle JKL$

2. 2 MATERIAL DO ALUNO

2. 2. 1 UARC 1: É semelhante, mas é congruente?

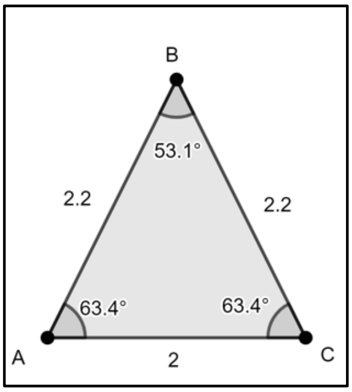
Objetivo: Definir triângulos congruentes

Material: Material impresso, caneta ou lápis.

1)(Intervenção inicial) Considerando medidas de ângulos e lados correspondentes de triângulos, compare e marque no quadro de figuras quais são semelhantes (mesma forma) a figura de referência a seguir:

Figura de referência

.



Quadro de figuras

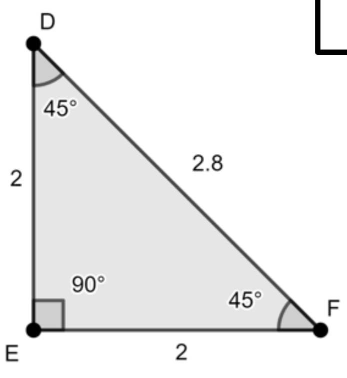
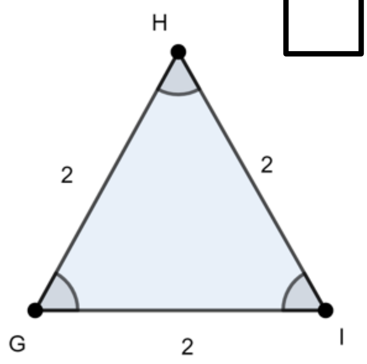
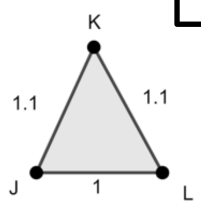
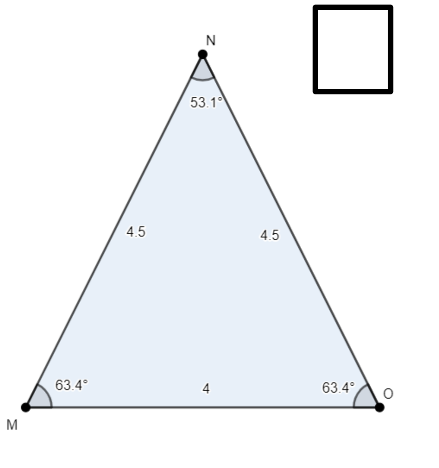
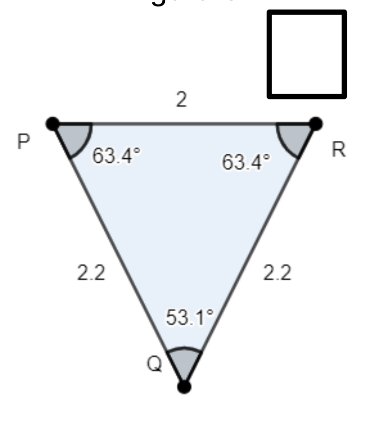
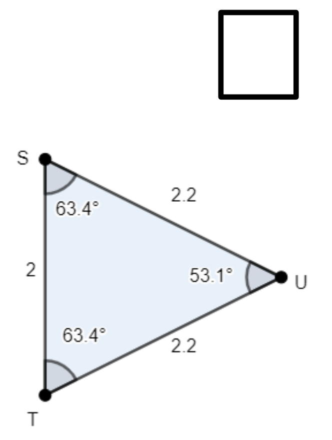
<table>
<tr><th>Figura 1</th><th>Figura 2</th><th>Figura 3</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Figura 4	Figura 5	Figura 6
		

2) (Intervenção reflexiva): Que características você observou para estabelecer a comparação da forma dos triângulos?

3) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados ampliada? Qual a razão dessa ampliação?

4) (Intervenção reflexiva): Qual figura dentre as selecionadas possui mesmas medidas de ângulos, mas medidas de lados reduzida? Qual a razão dessa redução?

5) (Intervenção reflexiva): Quais figuras selecionadas possuem mesmas medidas de lados e ângulos? Qual seria a razão entre essas medidas?

6) (Intervenção exploratória): Considerando as observações que você fez até aqui preencha o quadro a seguir com **X**:

Figura	Mesma forma da referência	Todos os ângulos têm mesma medida da referência	Todos os lados têm mesma medida da referência
1			
2			
3			
4			
5			
6			

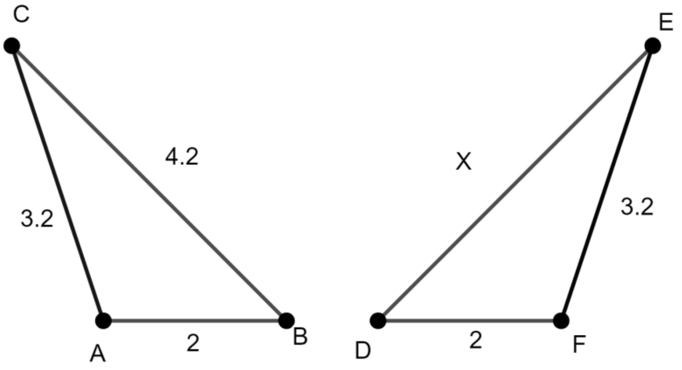
7) (Intervenção reflexiva): Considerando sua resposta na questão 5 e as marcações realizadas no quadro da questão 6, responda: O que é necessário para que triângulos semelhantes sejam iguais?

8) (Intervenção reflexiva): Considerando os triângulos que atenderam as três características do quadro da questão 5, responda: Quais diferenças de posição esses triângulos possuem entre o triângulo de referência?

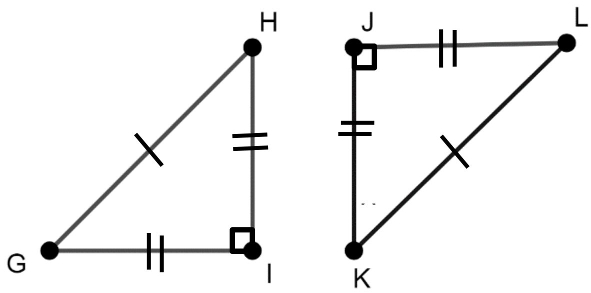
9) (Intervenção reflexiva): Que critérios você estabeleceria para afirmar que dois triângulos são iguais?

9) **(Intervenção Avaliativa restritiva):** Sabendo que os pares de triângulos a seguir são congruentes, estabeleça a correspondência entre ângulos e lados e deduza a medida desconhecida $\overline{DE}$ e $\widehat{K}$.

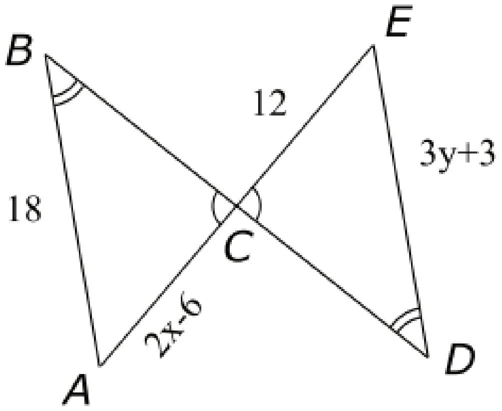
a)



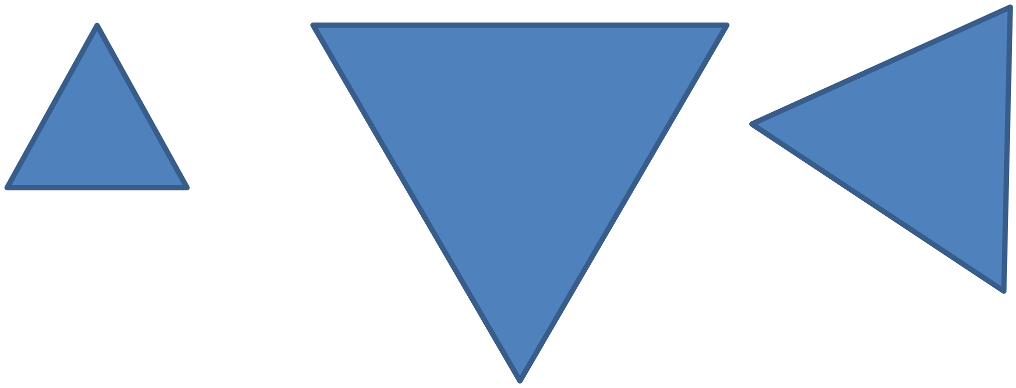
b)



10) **Intervenção Avaliativa Aplicativa:** Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y.



11) **Intervenção Avaliativa Aplicativa:** Os três triângulos a seguir são equiláteros:



Esses triângulos são congruentes? Justifique indique o caso de congruência.

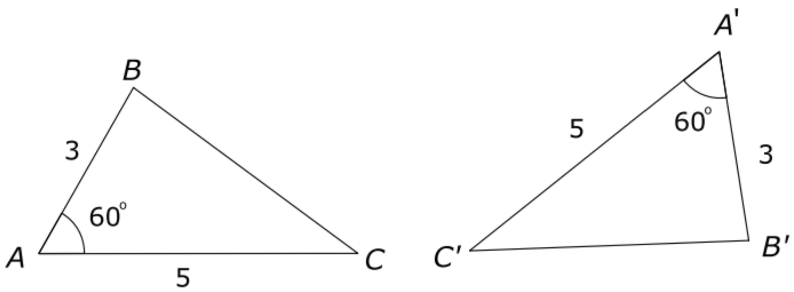
2. 2. 2 UARC 2: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

Objetivos: Estabelecer critérios suficientes para ocorrência de congruência de triângulos.

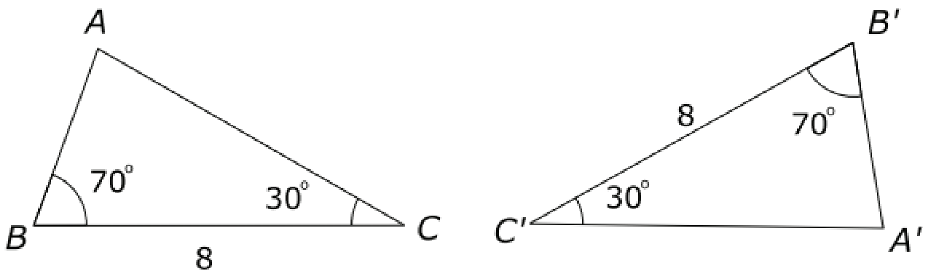
Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.

1) Intervenção inicial: Baseando-se nas informações da atividade anterior, explique se é possível afirmar que os pares de triângulos a seguir sejam congruentes.

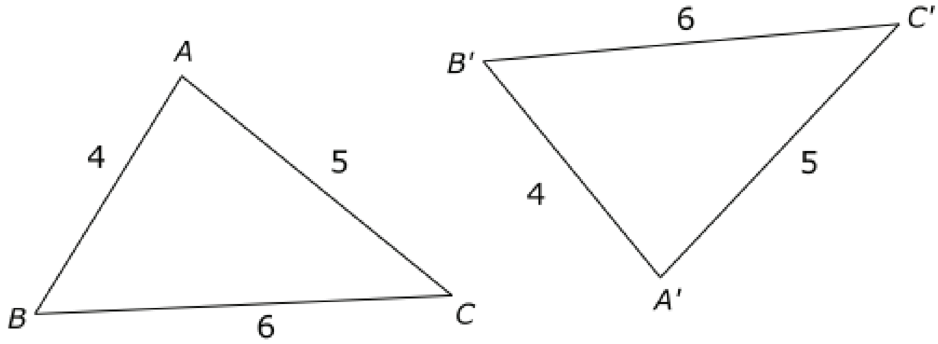
a)



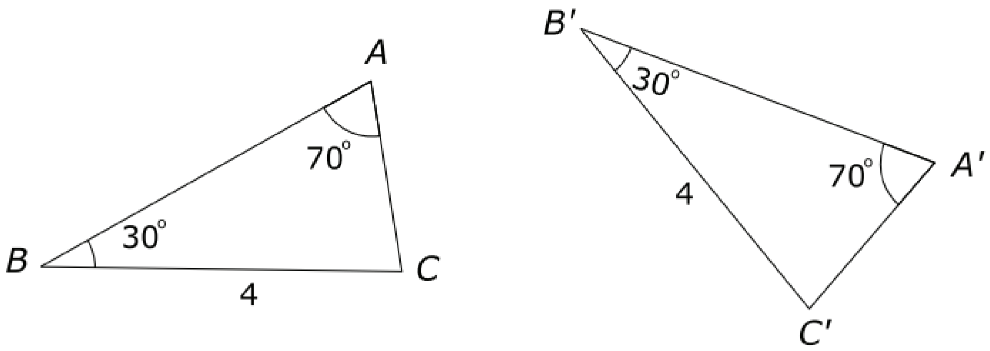
b)



c)



d)

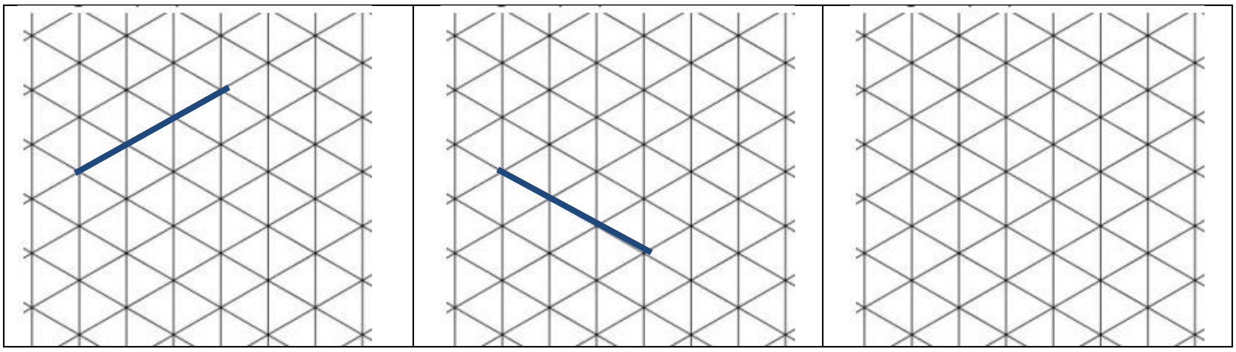


2) Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes. Linhas em azul apresentam medidas fixas, linhas em vermelho devem ser completadas.

Obs.: A malha isométrica adotada é formada por triângulos equiláteros de lado L e altura h, logo todos os ângulos internos são de 60^0.

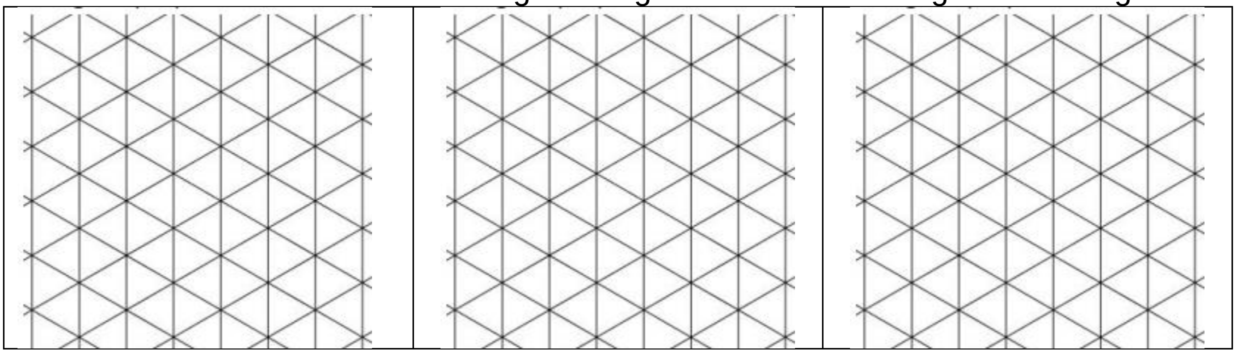
(I) Medida informada:______________________________

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



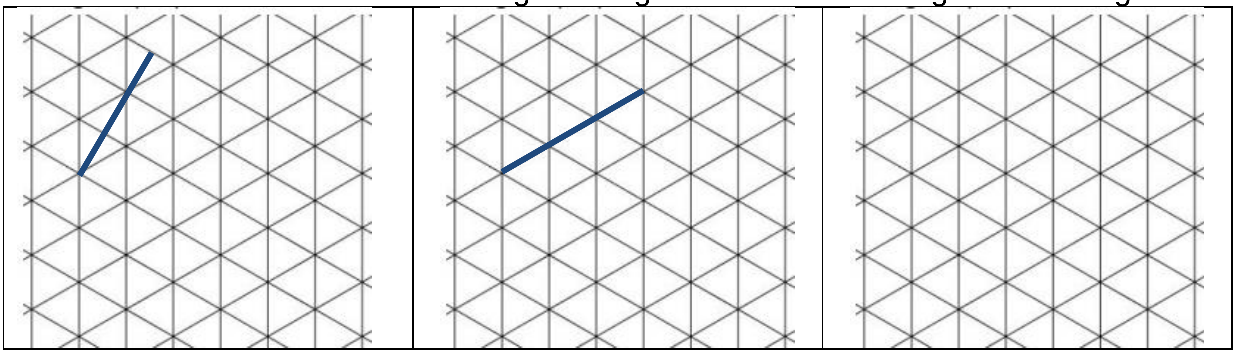
(II) Medidas informadas: Todos os ângulos iguais (AAA)

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



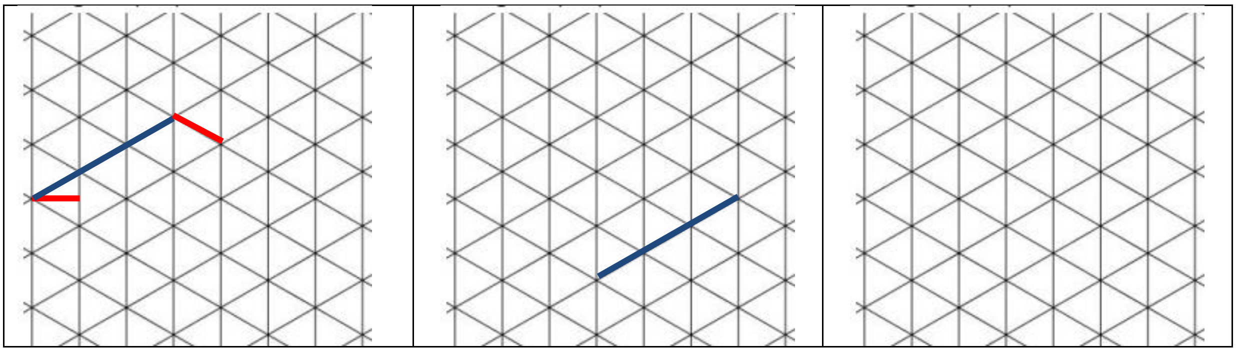
(III) Medidas informadas: Lados com medidas $3L, 1{,}5L\ e\ 3h$, respectivamente.

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



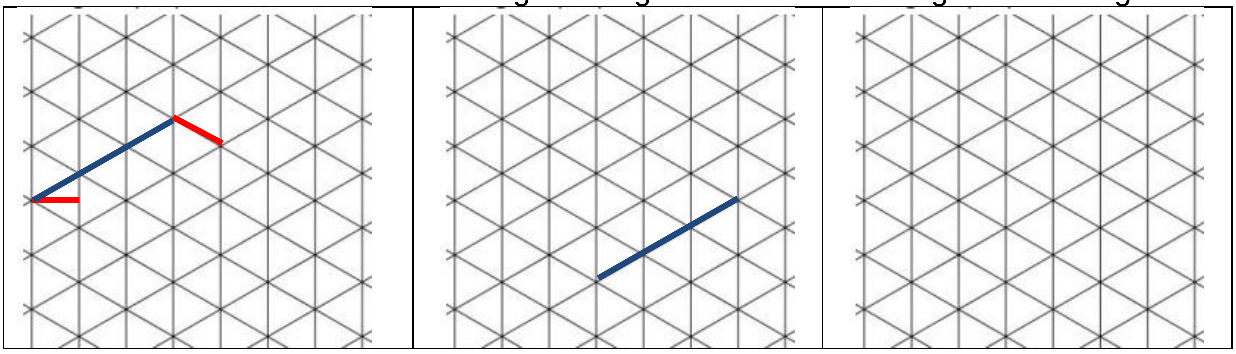
(IV) Medidas informadas: ____________________________________

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



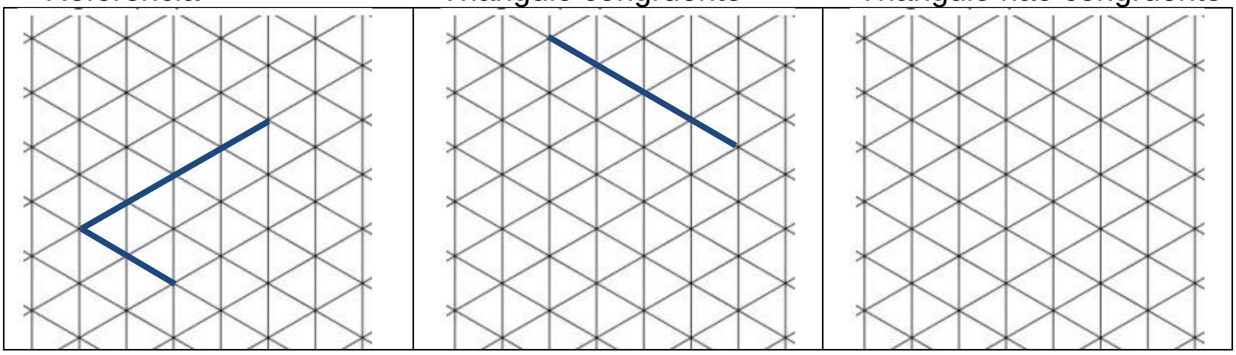
(V) Medidas informadas: ____________________________________

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



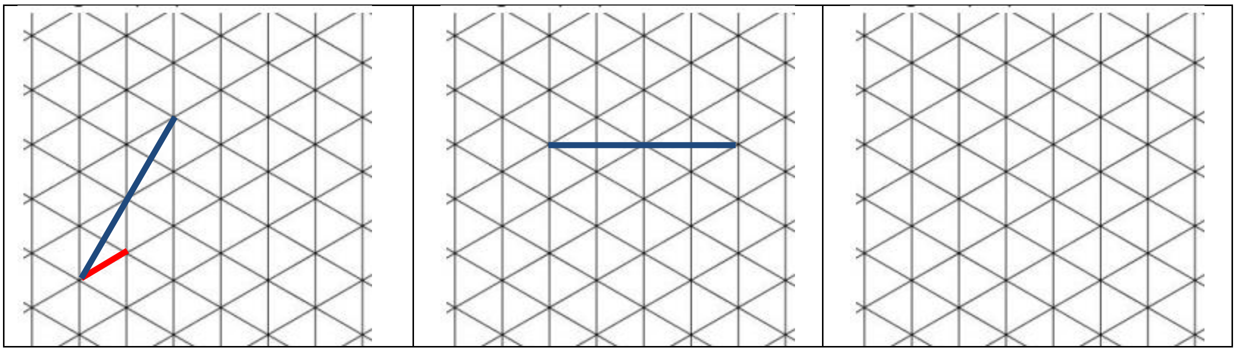
(VI) Medidas informadas: ____________________________________

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



(VII) Medidas informadas: Lado $4h$, ângulo 30^0, Ângulo de 60^0 oposto ao lado informado.

Referência Triângulo congruente Triângulo não congruente



3) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos de referência**? Quais dificuldades você teve?

4) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

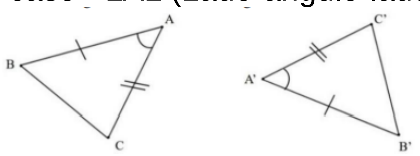
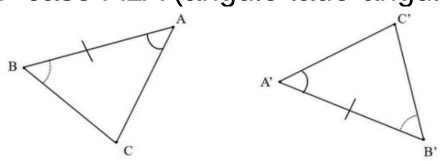
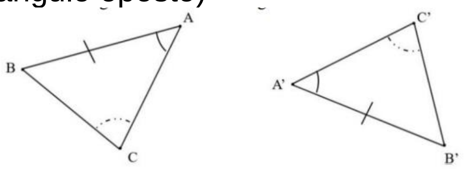
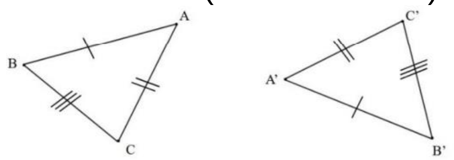
5) Intervenção reflexiva: Você conseguiu fazer todos os **triângulos não congruentes** aos de referência? Quais dificuldades você teve?

6) Intervenção reflexiva: Considerando as situações em que você não conseguiu construir os triângulos não congruentes aos de referência, que informações estavam fixadas?

7) Intervenção reflexiva: Responda a questão título desta atividade: Como saber se dois triângulos são congruentes se eu não sei todas as medidas?

FORMALIZAÇÃO

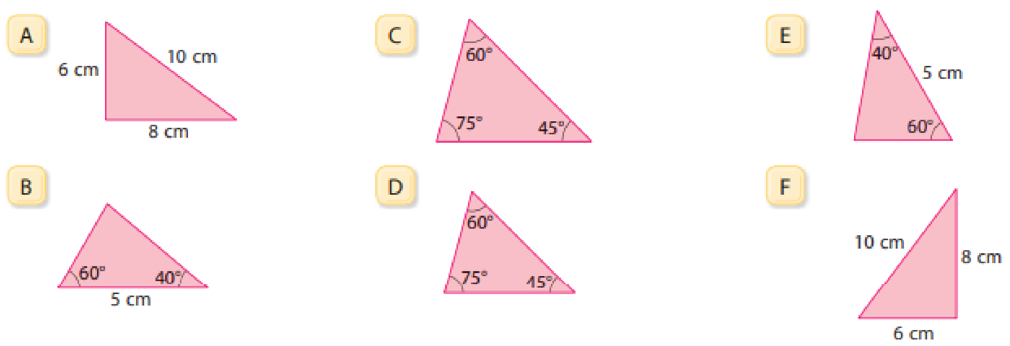
Existem certos critérios suficientes para que possamos concluir que dois triângulos sejam congruentes. Esses critérios se apresentam nos seguintes casos:

1º caso - LAL (Lado-ângulo-lado) 	2º caso-ALA (ângulo-lado-ângulo) 
3º caso - LAA_o (Lado-ângulo-ângulo oposto) 	4º caso - LLL (Lado-lado-lado) 

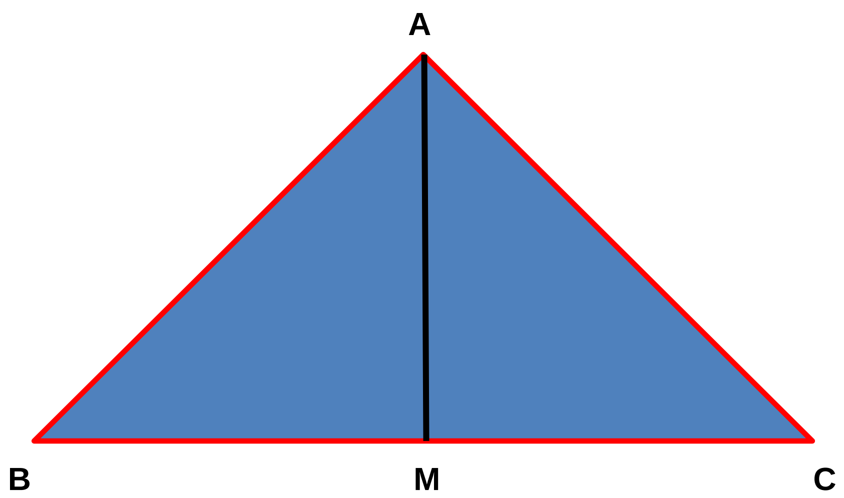
8) Intervenção avaliativa restritiva: Volte a questão 1, caso você conclua que os pares de triângulos são congruentes, em que caso de congruência de triângulos você se baseou para chegar a essa conclusão?

	São triângulos congruentes?	Caso de congruência de triângulos
a)		
b)		
c)		
d)		

9) **Intervenção avaliativa restritiva:** Indique os pares de triângulos congruentes e o caso de congruência que usou como critério:



10) **Intervenção avaliativa Avaliativa:** Num triângulo isósceles ABC, o seguimento AM é perpendicular ao lado BC e o divide ao meio verifique se os triângulos ABM e ACM são congruentes e justifique.



2. 2. 3 UARC 3: Caso especial de congruência de triângulos.

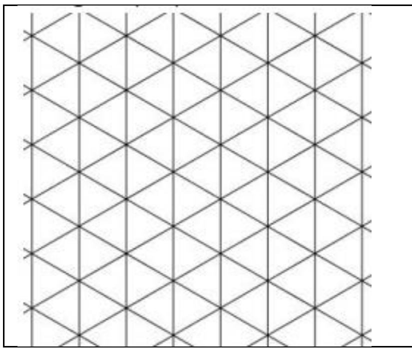
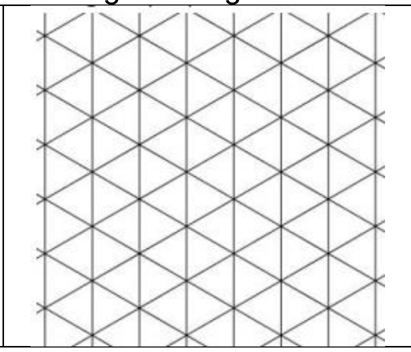
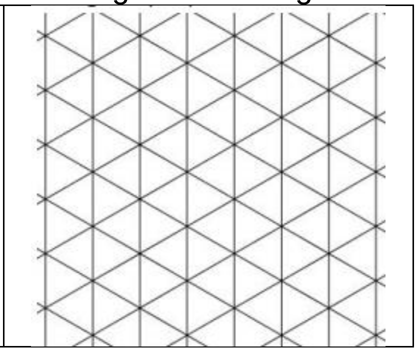
Objetivos: Identificar caso de congruência em triângulos retângulos.

Material: Régua, lápis, material impresso, folhas extras de malha isométrica.

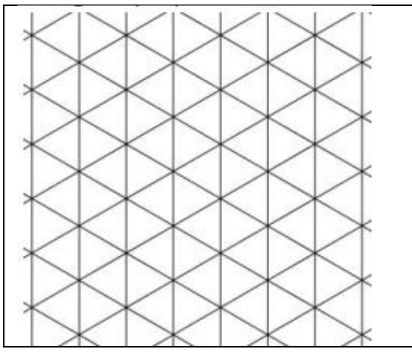
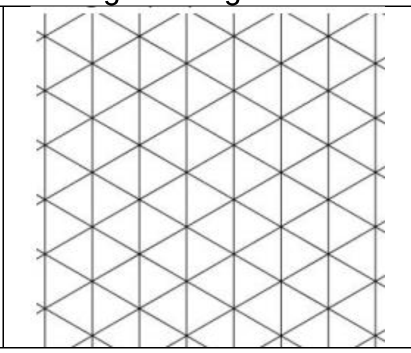
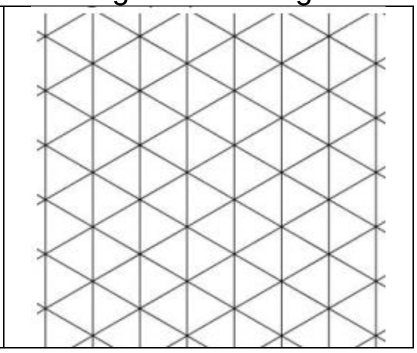
1) Intervenção Inicial: Pense sobre a atividade anterior, você percebeu que os casos de congruência apresentados fixam sempre 3 informação sobre os triângulos congruentes? E se fossem apenas 2 informações fixadas, seria suficiente para garantir a congruência? Discuta com seus colegas.

2)Intervenção exploratória: Use as malhas a seguir para construir, se possível, triângulos congruentes e não congruentes com as informações da referência, identificando os lados e ângulos correspondentes.

(I) Medidas informadas: Ângulo e lado oposto a esse ângulo medindo $3L$**.**

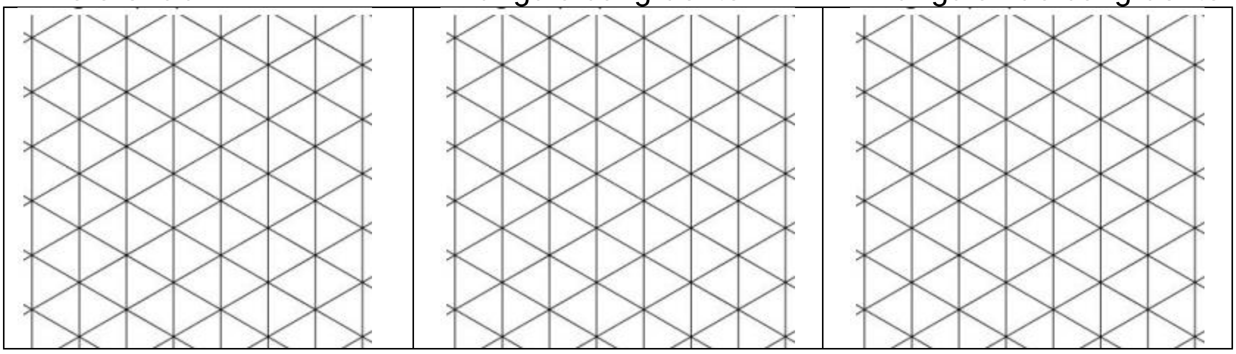
Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente
		

(II) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $5L$**.**

Referência	Triângulo congruente	Triângulo não congruente
		

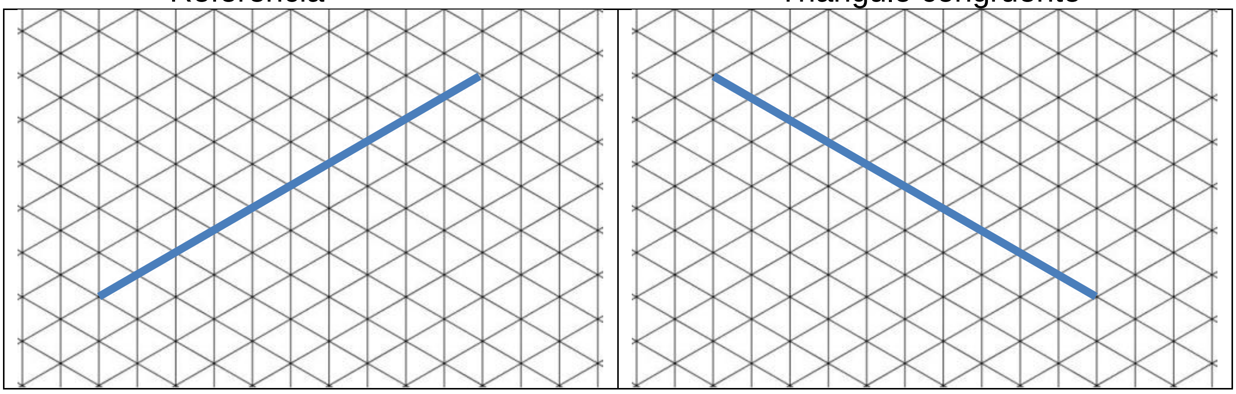
(III) Medidas informadas: Ângulo de 60^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $4L$.

Referência | Triângulo congruente | Triângulo não congruente

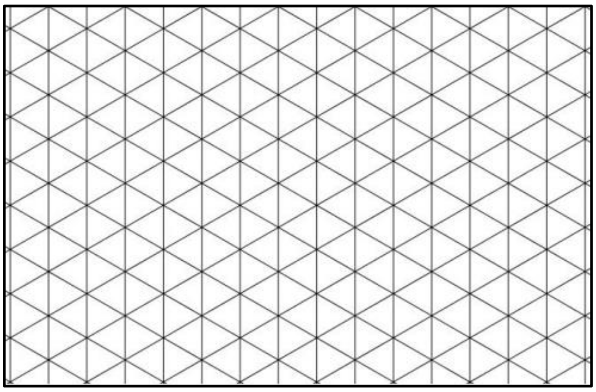


(IV) Medidas informadas: Ângulo de 90^0 e lado oposto a esse ângulo medindo $10L$.

Referência | Triângulo congruente



Triângulo não congruente



3) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

4) Intervenção reflexiva: Qual a característica comuns nesses casos em que você só conseguiu construir triângulos congruentes aos de referência?

5) Intervenção reflexiva: Em quais situações não foi possível fazer o triângulo congruente a referência? Qual a dificuldade encontrada?

6) Intervenção reflexiva: Como você definiria esse caso de congruência de triângulos?

3. ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Este capítulo foi construído para atender o critério de nosso aporte teórico quanto a consciência epistêmica e algorítmica desejada do professor de matemática sobre o objeto que ensina. No nosso caso o aprofundamento é sobre Congruência de Triângulos e os assuntos circunscritos.

Inicialmente fazemos uma abordagem histórica por meio do Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022a) e em seguida apresentamos as formalizações sobre as definições e propriedades que envolvem o estudo de Congruência de Triângulos.

3.1 GAUS E A CONGRUÊNCIA

Para investigar como se deu a constituição do conceito de congruência até chegar a definição de congruência de triângulos, adotamos, a partir de uma base bibliográfica, como metodologia para elaboração de um texto, o diagrama-orientador proposto por Chaquiam (2017, 2020, 2022a, 2022b), ou seja.

> O diagrama metodológico orientador destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada estabelecendo conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, explora os conteúdos a partir da produção de um personagem, conectando esse personagem a alguns contemporâneos seus, adotando como referência a tríade contextual nos aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-cientifico. (CHAQUIAM, 2020, p. 198)

Assim, ao elaborarmos este texto visamos nosso aprimoramento sob os pontos de vista conceitual, epistemológico e didático, e de quem nos lê, sobre congruência, para elaborarmos uma fonte de possibilidades de uso como recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos que envolvem o conceito de congruência e como forma de colaborar na aprendizagem desse conceito.

O personagem eleito para esta investigação foi o matemático, físico e astrônomo alemão Karl Friendrich Gauss (1777-1855). “Ele foi o grande introdutor da congruência” (ROCHA, 2021, p. 5). Segundo Roque (2012, p. 381), Gauss foi professor da Universidade de Göttingen até sua morte, em 1855, onde desenvolveu ensino e pesquisa e influenciou os trabalhos Dirichlet e Riemann que juntos promoviam uma visão conceitual e abstrata da Matemática.

Embora os citados matemáticos tivessem um olhar sobre o conceito de congruência sob a perspectiva do ensino e da pesquisa, suas bases epistemológicas e filosóficas tiveram influência das obras de Euclides, como *Elementos*, onde “aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nessas obras os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos” (EVES, 2011, p. 173). As ideias revolucionárias de Gauss e seus pupilos do século XIX contribuíram para a criação da Teoria da Relatividade atribuída a Albert Einstein em 1905.

Justificando a temática pelo potencial didático pedagógico para o ensino de matemática, Brasil (2017, p. 269) aponta como competência reconhecer a Matemática como ciência humana fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também assevera em Brasil (2017, p. 274) que saber aplicar as condições necessárias e suficientes para ocorrência de triângulos semelhantes ou congruentes contribui para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo. Embora os norteadores educacionais coloquem a história e ensino de congruência em local de destaque no ensino de Matemática, revisões de estudos como a realizada por Mendonça (2021) apontam outra realidade:

> Pesquisadores da área apontam que, ao longo da trajetória da educação no Brasil, o quase abandono da Geometria nos currículos interferiu nos processos de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática. Apresentando como reflexo, docentes e discentes com conhecimentos insatisfatórios e grandes dificuldades em explorar situações envolvendo conceitos geométricos e correlacioná-los com outros conteúdos matemáticos.[...] Essas dificuldades dos discentes ao estudarem assuntos da Geometria aparecem desde a educação básica até o ensino superior, por isso há importância de fazer análises reflexivas sobre a maneira de ensinar trazendo atividades diversificadas e inovadoras com o objetivo de melhorar a qualidade de ensino desse campo do saber (MENDONÇA, 2021, p. 43)

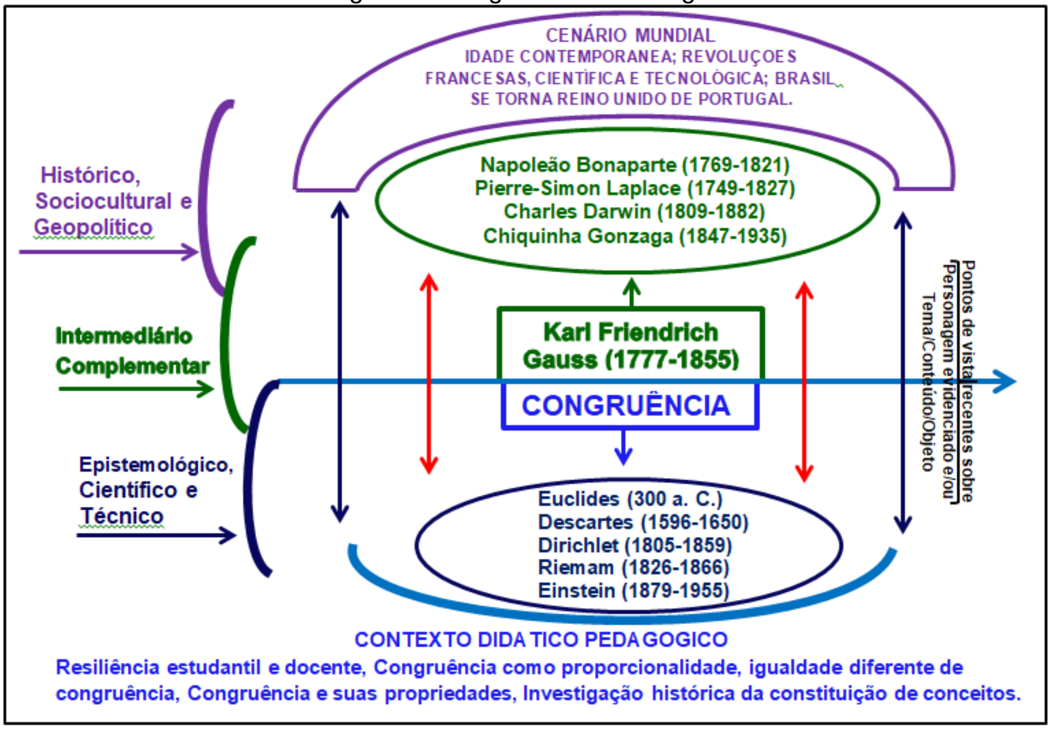
Em relação a essa análise reflexiva sobre maneira de ensinar de forma diversificada e inovadora, Chaquiam (2022a, p. 21) defende que o diagrama-metodológico, adotado nesta pesquisa, pode ser uma maneira de contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática, por entrelaçar história e conteúdos de matemática e por balizar a elaboração de textos com potencial didático. E assim, para contrapor aos problemas nos processos de ensino e de aprendizagem continuamente revelados em avaliações realizadas pelos órgãos governamentais.

Esta seção constituiu-se segundo instruções de Chaquiam (2022b, p. 1237-1238), começa pelo contexto histórico, sociocultural e geopolítico em torno de Gauss, para delimitação em tempo e espaço. Em seguida, no contexto intermediário complementar apresentamos os personagens contemporâneos de diferentes áreas do conhecimento. Por fim, no contexto epistemológico, científico e técnico apresenta-se a elementos biográficos e profissionais sobre Gauss e de contemporâneos da área da Matemática e suas contribuições para o desenvolvimento do conceito de congruência, visando elencar potencialidades didático-pedagógicas sob diferentes pontos de vista e possíveis desdobramentos ou contribuições.

3. 1. 1 Contexto histórico, sociocultural e geopolítico

Segundo Chaquiam (2020, p. 205) o contexto sociocultural contempla, a partir do personagem central, questões históricas e culturais mais abrangentes tendo em vista localizar o leitor a partir do personagem e de seus contemporâneos dentro do contexto pluridisciplinar. Para ilustração desse contexto e dos demais, apresentamos a figura 25.

Figura 3 - Diagrama metodológico



Fonte: Adaptado de Chaquiam (2022b)

No contexto em que Karl Friendrich Gauss (1777-1855) viveu na Alemanha dos séculos XVIII e XIX e desenvolvia seus estudos na área da Matemática, os Estados alemães vivenciaram cinco guerras contra os exércitos da França revolucionária e napoleônica, sendo que, em 1812, Napoleão foi derrotado na campanha da Rússia. Após isso, a Europa foi redesenhada por meio do Congresso de Viena (1814-1815), de modo que o Sacro Império Romano-Germânico, com mais de 240 estados, foi substituído pela Confederação Germânica, formada por 39 estados representados na Dieta de Frankfurt, dentre os quais, constava estado da Baixa Saxônica e por seguinte a cidade de Göttingen, cidade conhecida como o coração da sabedoria alemã, por ser uma cidade universitária, onde Gauss permaneceu até sua morte em 1855. Ainda houve revoluções liberais de 1830 e 1848 em Paris que alcançaram a Baviera, a Prússia e o sudoeste da Alemanha.

No contexto local que Gauss vivenciou é possível trazer discussões no âmbito do ensino a respeito da disciplina e da resiliência para estudar mesmo em condições hostis e pouco favoráveis a aprendizagem, como a vivenciada em 2020 e 2021 durante a pandemia de COVID-19, que dificultou a relação escola e estudantes do mundo inteiro. A curiosidade e a capacidade investigativa levaram Gauss a fazer descobertas ainda na infância e o colocaram na condição de professor universitário e precursor da Matemática que hoje ensinamos na escola. A história da matemática, neste sentido, revela que as habilidades didático-pedagógicas do professor de matemática são resultado, em boa parte, de sua conduta como estudante.

O século XVIII marca o fim da Idade Moderna e o início da Idade Contemporânea. Além disso, é nesse período que transformações políticas e ideológicas ocorrem em todo o mundo. No século XIX, segundo Jorge e Souza (2019, p. 3), a matemática e a física ampliaram o horizonte dos conhecimentos adquiridos em todos os ramos da ciência, o que proporcionou uma completa transformação e utilizações do vapor e da eletricidade, o progresso tecnológico.

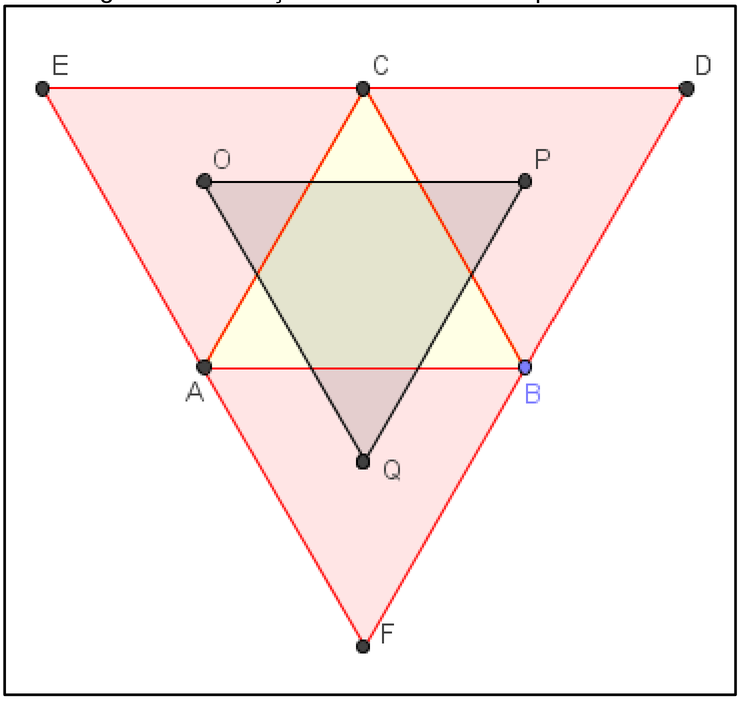
No Brasil do século XVIII, na sociedade brasileira também crescia o espaço para novas ideias políticas especialmente na região Sudeste culminando as Rebeliões Nativistas e Rebeliões Separatistas, como a Revolta de Beckman e a Inconfidência Mineira. Segundo Fernandes (2022), enquanto a revolução francesa acontecia na Europa, a crise do sistema colonial começou a decair na segunda metade do século XVIII. Em 1808, a corte portuguesa deixou Portugal em direção ao Brasil, quando o país passou da condição de colônia a Reino Unido.

3. 1. 2 Contexto intermediário complementar

Nesse contexto "Intermediário Complementar (antes: pluridisciplinar)" (CHAQUIAM, 2022a, p.11), apresentamos traços biográficos e contribuições, de personagens contemporâneos ao personagem eleito, Gauss, que podem ser, ou não, na mesma área dele.

Napoleão Bonaparte (1769-1821), considerado um dos líderes mais célebres e estrategista da história. Liderou as grandes guerras revolucionarias francesas. Construiu um grande império que dominou grande parte da Europa Ocidental até 1815, tendo orquestrado um golpe em novembro de 1799. Segundo Roque (2012, p. 373), após esse golpe Laplace adquiriu grande poder na cena francesa, tornando-se ministro. Embora Napoleão não tenha sido matemático, atribuía a matemática papel importante no progresso, tendo enunciado em 1787 um teorema que tem seu nome: "Para qualquer triângulo ABC, triângulos equiláteros podem ser construídos sobre cada lado, e a partir de seus centros constrói-se um novo triângulo DEF. [...] o triângulo DEF é um triângulo equilátero" (CRILLY, 2021, p. 88). Essa ideia é muito usada na topografia em terrenos inóspitos como pântanos, rios, areia movediça e garante máxima precisão em na medida de ângulos.

Figura 4 - Ilustração do teorema de Napoleão



Fonte: Crilly (2021, p.88)

Na figura 25 temos uma ilustração do teorema de Napoleão com notação dos pontos diferentes do enunciado, é possível por meio de uma atividade de sala de aula utilizar a informação do texto histórico para que a figura seja analisada de modo que os alunos chegassem a conclusão de qual seria o triângulo inicial e quais seriam os equiláteros formados e em seguida realizar outras construções a partir dessa. E assim explorar tanto a notação matemática como a classificação de triângulos e reconhecimento de semelhança e congruência de triângulos.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matemático, físico e astrônomo francês que organizou a astronomia matemática. Formulou a conhecida equação de Laplace, a transformada de Laplace e o operador diferencial de Laplace. Em 1806 foi conde e em 1817 foi nomeado marquês, “chegou a dizer que ao diminuir o trabalho, [o logaritmo] dobrou a vida dos astrônomos” (EICHENBERGER NETO, 2016, p. 179). Como matemático, Laplace contribuiu para “as aplicações do cálculo à mecânica e à astronomia” (ROQUE, 2012, p. 373). As formulações ou generalizações feitas por Laplace são essenciais no estudo de Cálculo e utilizadas nas engenharias de forma recorrente.

Charles Darwin (1809-1882) nasceu na cidade de Shrewsbury, na Inlaterra. Por meio de sua obra *A origem das espécies,* contribuiu para os estudos sobre a evolução. Essa obra contribuiu para o entendimento da evolução e foi onde o termo *cientista* foi usado a primeira vez. Essa obra de Darwin foi polêmica do ponto de vista religioso, pois, segundo Eves (2012, p. 356), conflitava com a descrição bíblica sobre a criação dos seres vivos.

No Brasil, ainda no mesmo período histórico, a pianista, compositora e maestrina Francisca Edwiges Neves Gonzaga, mais conhecida como *Chiquinha Gonzaga (1847-1935*), mesmo diante das adversidades enfrentadas naquela época para quem é mulher e afrodescendente, soube ter a mesma resiliência conferida a Gauss, soube aproveitar o melhor que a educação burguesa pode lhe oferecer, uma vez que seu pai era primeiro-tenente, sua composição *Ô abre alas*, tornou-a conhecida em 1899*. S*egundo Fuks (2021), contra a vontade de seu primeiro marido, Chiquinha Gonzaga, começou a compor suas primeiras músicas, sendo ela a primeira mulher a reger uma orquestra no Brasil.

3. 1. 3 Contexto epistemológico, científico e técnico

Nesse contexto, conforme orienta Chaquiam (2022b, p.1239), apresenta-se como o personagem principal, neste caso Gauss, que emerge dentre aqueles identificados no contexto epistemológico, científico e técnico e que contribuíram para a constituição/evolução da temática selecionada, aqui eleito o conceito de congruência.

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. Embora tivesse origem humilde, teve incentivo de sua mãe, apresentando evidências de seu brilhantismo ainda na infância, quando foi desafiado por seu professor a fazer a soma dos números de 1 a 100, para o que Gauss rapidamente encontrou a resposta 5050, criando o método hoje aplicado na soma de uma progressão aritmética. Deste modo, a matemática desenvolvida por Gauss contribuía na sua época e ainda contribui para diferentes áreas do conhecimento.

> Gauss deu diversas contribuições à topologia. Das várias demonstrações que deu do teorema fundamental da álgebra, duas eram explicitamente topológicas. A primeira dessas demonstrações, dada em sua tese de doutorado em 1799, quando ele tinha 22 anos de idade, utiliza-se de técnicas topológicas. (EVES, 2011, p. 667)

Gauss também se dedicou na sistematização de conceitos ainda inconsistentes e polêmicos da própria Matemática, conforme Roque (2012, p. 409), tais como: os números negativos, sendo adotados com ideia de coisas contadas opostas, de modo que um par de números opostos possam se neutralizar; os números complexos, em que introduziu a relação de +i a –i, demonstrando geometricamente que essas relações se tornariam intuitivas.

Embora a palavra congruência seja bem mais recente, deste a publicação da obra Elementos de Euclides, a congruência foi associada a teria das proporções. *Euclides de Alexandria (300 a. C.)*, foi professor, matemático, platônico e escritor grego a quem é conferido o título de *Pai da Geometria*. Na Universidade de Alexandria, primeira instituição desse gênero, de acordo com Eichenberger Neto (2016, p. 79), Euclides se destacou na instituição pela sua capacidade de gerenciamento do processo educacional e pela capacidade de transmitir conhecimento.

No tocante ao objeto matemático que é aqui explorado, Segundo Roque (2012), a longo da obra Elementos são demonstrados conceitos elementares da matemática até hoje utilizados. A noção de razão aritmética aparece do livros VII ao livro IX, com a terminologia que ainda vemos em livros didáticos que *duas coisas estão uma para a outra assim como*. No Livro V apresenta-se a teoria abstrata das razões e proporções, que serve para desenvolver as proposições geométricas do livro VI, e por que possivelmente “necessitava de uma teoria geral das razões e proporções para grandezas (incluindo as incomensuráveis)” (ROQUE, 2012, p. 144) e que serviram para sistematizar as ideias de triângulos semelhantes e congruentes.

> As abordagens de razões e proporções e de semelhança de triângulos apresentadas nos textos de geometria das primeiras décadas deste século destinados ao ensino secundário refletem as dificuldades e as sutilezas na questão das grandezas incomensuráveis. Nessas abordagens consideram-se dois casos, dependendo da comensurabilidade ou incomensurabilidade de certas grandezas (EVES, 2011, p.107)

O francês *Renè Descartes* (1596-1650) nasceu em La Haye próximo a Paris, Matemático, físico e filósofo que desempenhou grande papel na revolução científica quando fundiu a álgebra com a geometria, gerando a geometria analítica. Com Descartes, a geometria Euclidiana agora teria localização no espaço, sendo ele, por esse motivo, conhecido como Pai da Matemática Moderna. Segundo Roque (2012, p. 288), para Descartes, as relações entre as grandezas devem feitas como a proporção, e o objetivo da nova geometria seria estudar figuras usando proporções.

Em sua obra *Geometria*, Descartes demonstra as cinco operações básicas da Aritmética e por meio de construções com régua e compasso, tais demonstrações acabaram por superar o problema da homogeneidade das grandezas presentes na geometria euclidiana. Os estudos de Descartes contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos espaços vetoriais, e, consequentemente para as definições atuais de figuras congruentes.

Gauss também refutou algumas proposições Euclidianas, basicamente provou que há espaços curvos, isto é, não-euclidianos. Segundo (Rocha, 2019, p. 5) Gauss apresentou ao mundo a congruência a partir de um trabalho realizado em 1801, Disquisitiones Arithmeticae, cuja demonstração é dita como “fácil notação de congruência” (EVES, 2011, p. 520), como segue:

> No primeiro capítulo de Disquisitiones arithmeticae, Gauss introduziu a definição (aqui um tanto condensada) e a notação seguinte: Dois inteiros a e b se dizem côngruos módulo n (onde n é um inteiro positivo), o que se simboliza por $a \equiv b \ (mod\ n)$, se, e somente se, n divide a diferença a - b. A seguir Gauss desenvolveu a álgebra da relação de congruência, a qual tem muito em comum com a álgebra da relação de igualdade usual, mas também muitas diferenças importantes. Se n é um inteiro positivo fixo e a, b, c e d são inteiros arbitrários, mostre que: (a) a ≡ a (mod n) (propriedade reflexiva). (b) Se a ≡ b (mod n), então b ≡ a (mod n) (propriedade

> simétrica). (c) Se a ≡ b (mod n) e b ≡ c (mod n), então a ≡ c (mod n) (propriedade transitiva) (EVES, 2011, p. 566)

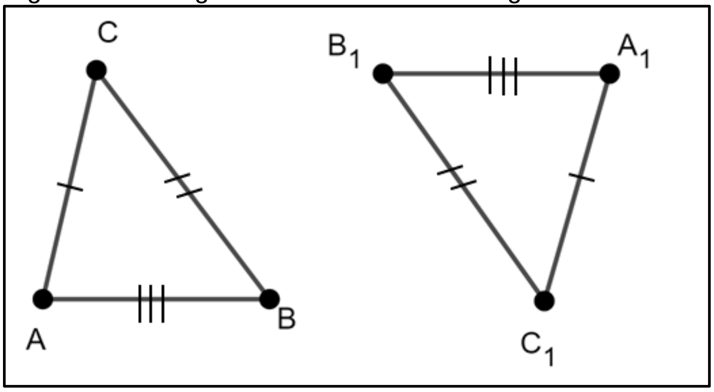
Essas e mais oito propriedades básicas da congruência foram estabelecidas por Gauss nessa obra, sendo que as três citadas são utilizadas atualmente em livros didáticos e livros técnicos no estudo de figuras congruentes e semelhantes.

Outras ideias, como a de vetor foram introduzidas nos estudos de Gauss surgindo a noção da ideia de multiplicidades.

> Gauss entende uma multiplicidade como um substantivo: um sistema de objetos ligados por relações. Esse não é exatamente o conceito que terá um papel central na teoria proposta por Riemann nos anos 1850, mas a multiplicidade de relações defendida por Gauss era um dos novos objetos que motivavam o desenvolvimento de uma teoria das multiplicidades. (ROQUE, 2012, p. 411)

Chamamos a atenção quem nos lê para refletirem sobre esses termos trazidos por nossos personagens: proporção, vetor, multiplicidade, congruência, e façamos uma transposição para o que temos nos livros técnicos atualmente. Dizemos que duas figuras são semelhantes, quando há uma razão semelhança *r* numa correspondência biunívoca estre os pontos ou lados correspondentes de cada uma das figuras, havendo assim uma transformação de semelhança entre as figuras. Assim, por exemplo, dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, os lados correspondentes teriam suas medidas na mesma razão, havendo uma proporcionalidade entre elas, ou mais ainda, teria um fator de multiplicação entre elas: $AB = rA_1B_1$; $BC = rB_1C_1$; $AC = rA_1C_1$. Esse fator *r,* determina a escala entre as figuras se é de ampliação ou de redução. Em seguida, quando se introduz a definição triângulos são congruentes (≡), diz-se que quando $r = 1$ tem-se uma isometria e os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são congruentes.

Figura 5 - Triângulos ABC e A1B1C1 congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}\,, \overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1},\ \ \overline{BC} \equiv \overline{B_1C_1} \\ \hat{A} = \hat{A}_1 \ \ ,\ \ \hat{B} = \hat{B}_1\,,\ \ \hat{C} = \hat{C}_1 \end{cases} \Leftrightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1$$

> O uso do termo “congruente” é bem mais recente e tem como objetivo resolver uma inconsistência lógica colocada pela formalização posterior da geometria euclidiana. Na lógica, o princípio da identidade afirma que uma coisa só é igual a si mesma. Portanto, dois triângulos ou duas figuras geométricas quaisquer não podem ser iguais. Daí o emprego do termo “congruente”, que significa, intuitivamente, que duas figuras podem ser colocadas uma em cima da outra. (ROQUE, 2012, p. 151)

Essas informações nos fazem entender o porquê de não dizemos que duas figuram congruentes sejam iguais, mas que sobrepostas suas medidas são iguais. Essa ideia alcança uma maior compreensão em sala de aula se for explorada com as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva definidas por Gauss em seu livro supracitado.

> Conta-se que Gauss somente resolveu devotar sua vida à matemática depois que, aos 19 anos de idade, descobriu que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso. Seu orgulho por essa descoberta fica evidenciado por seu pedido para que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados. Embora esse pedido jamais fosse atendido, a base do monumento erigido a Gauss em Brunswick, sua cidade natal, tem a forma de um heptadecágono (EVES, 2011, p. 178)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi um matemático alemão educado na Alemanha e na França a quem se atribui a moderna definição de função. Apresentou uma publicação inspirada na lei da reciprocidade biquadrática de Gauss com quem teve importante relacionamento intelectual e pessoal. Foi um dos matemáticos do século XIX que contribuíram para a chamada *matemática do rigor*.

Suas maiores contribuições no campo da teoria dos números, prestando especial na teoria das séries de Fourier. No campo da análise matemática aperfeiçoou a definição e o conceito de função e na mecânica teórica realizou estudos sobre equilíbrio de sistemas e de potencial newtoniano.

De 1828 até o ano de seu falecimento (1859), Dirichlet ensinou na Faculdade Militar de Berlim, no Colégio Militar e na Universidade de Göttingen, onde substituiu Gauss. Segundo Eves (2011, p. 624) Dirichlet estabeleceu uma generalização notável do teorema de Euclides da infinitude dos primos ao conseguir mostrar que toda progressão aritmética a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., onde a e d são primos entre si, contém infinitos números.

> A junção entre pesquisa e ensino foi marcante em Göttingen depois da morte de Gauss, com a chegada de Dirichlet, em 1855. Suas aulas discutiam os temas recentes da pesquisa matemática e motivavam os alunos a seguir seus passos. A presença de Dirichlet, juntamente com Riemann e Dedekind, que se via como seu discípulo, mudaria a matemática praticada na Universidade de Göttingen. Os três inspiravam-se em Gauss e propunham uma visão abstrata e conceitual dessa disciplina. Apesar das diferenças entre seus campos de pesquisa, eles convergiam nas preferências metodológicas e teóricas e podem ser considerados um grupo. O ponto de vista conceitual de Dirichlet foi expresso em uma frase que se tornou famosa: “É preciso colocar os pensamentos no lugar dos cálculos.” (ROQUE, 2012, p.412)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão que deu importantes contribuições para a análise e geometria diferencial. Filho de um pastor luterano, enfrentou na infância problemas financeiros e de saúde, por meio do incentivo de seu pai chegou a Universidade de Göttingen, a mesma de Gauss, onde fez sua tese de doutorado sobre a teoria das funções complexas.

> Em 1857 Riemann foi indicado professor assistente de Gottingen e em 1859 sucedeu a Dirichlet como professor titular de uma cadeira que antes fora ocupada por Gauss. Mas em 1866, com apenas 40 anos de idade, morreu vítima da tuberculose no norte da Itália, para onde havia ido à procura de melhoras para sua saúde (EVES, 2011, p. 615)

Riemann dando continuidade aos estudos de Gauss ampliou o entendimento da geometria para algo mais abstrato e relacional. De acordo com ROQUE (2012, p.411) para Riemann, a noção de multiplicidade devia ser independente da intuição geométrica e a noção sugerida por Gauss fornecia uma base adequada sobre a qual construir a nova teoria de Riemann: a topologia exprimindo o ápice da autonomia da matemática com respeito às ideias de quantidade e de grandeza, uma vez que a topologia se definindo como o estudo das relações independentemente das propriedades métricas dos objetos.

Albert Einstein (1879-1955) foi um físico alemão de uma família de judeus alemães iniciou seus estudos na Suíça e fez seu doutorado na Universidade de Zurique. $E = mc^2$ é conhecida como a equação mais famosa do mundo. Recebeu o prêmio nobel de Física em 1921 por suas contribuições à física teórica e, especialmente, por sua descoberta da lei do efeito foto eleétrico e pelo estabelecimento da física quântica.

Graças aos estudos de Gauss e seus discípulos Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral, “apenas registrando aqui que algumas dessas novas geometrias vieram a encontrar aplicações na teoria moderna do espaço físico incorporada na teoria da relatividade geral de Einstein” (EVES, 2011, p. 608).

No ponto de vista didático pedagógico, quando trazemos para discussão o desenvolvimento do conceito de congruência para entender como chegaram às definições atuais de congruência de triângulos, queremos investigar como os grandes matemáticos superaram os desafios que hoje temos em sala de aula. Ora, se o ambiente escolar é um ambiente plural e com suas peculiares deficiências, os grandes matemáticos também tiveram que superar todo um contexto sociocultural e geopolítico para sistematizar a matemática posta nos livros. Mas as sutilezas dos desafios só é possível descobrir revivendo a história, nos inserindo e inserindo nossos educandos no contexto deles. É o famoso *pensar fora da caixinha*.

Nesse sentido a História da matemática como recurso didático no ensino de conteúdos matemáticos fornece subsídios para compreender como a ciência é produzida, como os cientistas trabalham e quais são as influências sofridas e exercidas por eles, afastando concepções ingênuas e distorcidas sobre o processo de construção do conhecimento científico (Chaquiam, 2020a, p. 199).

Além disso, neste texto que apresentamos, perceba a evolução do conceito de congruência como uma relação medida na perspectiva numérica, passando para uma relação mais de homogeneidade geométrica e chegando a uma geometria abstrata em os conceitos podem ser observados intuitivamente sem necessariamente saber sua magnitude, o que importa é o significado disso.

Sob o prisma do ensino de Matemática, Brandemberg (2022, p.12) indica a História da Matemática como facilitador da aprendizagem de matemática ao considerar suas potencialidades didáticas para o ensino de conteúdos matemáticos.” Para além disso, na perspectiva epistemológica do professor de matemática, indicamos o estudo da constituição de objetos matemáticos por meio do diagrama orientador de conforme instrui Chaquiam (2022b), para a ampliação de seu repertório didático- pedagógico.

No contexto histórico, sociocultural e geopolítico situações o período dos séculos XVIII e XIX, em que acontecia a Revolução francesa e Revolução Científica em que grande nomes foram citados Napoleão Bonaparte (1769-1821),Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Charles Darwin (1809-1882), Chiquinha Gonzaga (1847-1935), todos personagens ilustres da mesma época de Gauss e que contemporaneamente produziam arte e ciência enfrentados diversidades similares.

No contexto epistemológico, científico e técnico apresentamos Euclides (300 a. C.), Descartes (1596-1650), Dirichlet (1805-1859),Riemam (1826-1866), Einstein (1879-1955). Embora Euclides estivesse fora do recorte temporal, foi trazido para o diagrama para que as influências das bases teóricas de nossos personagens fossem justificadas e por meio delas traçarmos a evolução do conceito de congruência através das contribuições de Gauss e seus contemporâneos.

As indicações didático-pedagógicas e os olhares e desdobramentos possíveis servem tanto para a formação epistemológica do professor matemática, quanto para fomentar sua criatividade e domínio de conteúdo a respeito de congruência, de modo que este estudo direcionou a maneira a ser elaborada nossa sequência didática sobre Congruência de Triângulos.

A seção a seguir trata das formalizações das definições e propriedades que envolvem a Congruência de Triângulos.

3. 2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS – DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Neste estudo matemático sobre Congruência de triângulos, nos aportamos em Lima (1991) e Fachinni (2021). Optamos por iniciar pela noção de semelhança que corresponde à ideia natural de ampliação e redução de uma figura, até particularizarmos para Congruência de Triângulos e seus casos. Nas demais seções particularizaremos as definições e propriedades de congruência e semelhança para triângulos e polígonos, baseadas em Barbosa (1985).

Utilizaremos como notação AB para segmento de extremidades A e B, $\overline{AB}$ para medida do segmento AB, o símbolo $\cong$ para representar congruente e o símbolo $\sim$ para representar semelhante.

Sejam F e F′ figuras no plano e r um número real positivo.

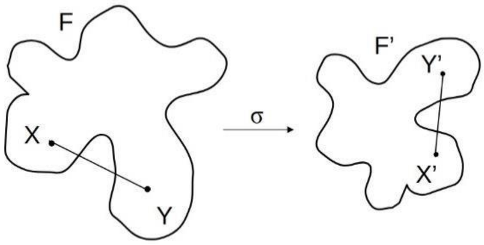
Definição 1: Diz-se que F e F′ são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca σ: $F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F′, com a seguinte propriedade: se X, Y são pontos quaisquer de $F\ e\ X' = \sigma(X),\ Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F′ então

$$\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}. \tag{1}$$

Os pontos X e X′ são denominados **pontos homólogos** ou **pontos correspondentes**.

Podemos dizer que duas figuras F e F′ são semelhantes quando existe uma **transformação de semelhança**, que preserva a forma das figuras (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Figuras semelhantes.



A propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se semelhança de razão r entre F e F′.

Para toda transformação que satisfaz a igualdade (1) temos que, pontos colineares são transformados em pontos colineares, as medidas de ângulos e o paralelismo de retas são preservados. A demonstração destes resultados pode ser encontrada em Lima (1991).

Assim, a noção de semelhança corresponde a ideia de mudança de escala, pois, teremos uma ampliação quando a razão r satisfaz $r > 1$ e uma redução quando $0 < r < 1$.

Temos que:

1. se F é semelhante a F′ com razão r então F′ é semelhante a F com razão $\frac{1}{r}$. De fato, da Semelhança de F e F′ existe uma correspondência biunívoca σ: $F \to F'$, tal que $X' \cong \sigma(X)$ e $Y' \cong \sigma(Y)$, para todo X, Y com,$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY}$. Logo, existe a função inversa σ^{-1}: $F' \to F$ biunívoca, tal que $X \cong \sigma^{-1}(X')\ e\ Y \cong \sigma^{-1}(Y')$. Ainda,

$$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY} \Rightarrow \overline{XY} \cong \frac{1}{r}.\overline{X'Y'}.$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **simétrica**.

2. se F é semelhante a F′ com razão r e F′ é semelhante a F″ com razão r′ então F é semelhante a F″ com razão r. r′. De fato, da semelhança de F e F′ existe uma correspondência biunívoca $\sigma: F \to F'$, tal que $X' \cong \sigma(X)$ e $Y' \cong \sigma(Y)$, para todo X, Y com,$X'' \cong \sigma'(X') e\, Y'' \cong \sigma'(Y')$. Da semelhança de F′ e F″ existe uma correspondência biunívoca $\sigma': F' \to F''$, tal que $X'' \cong \sigma'(X')\ e\ Y'' \cong \sigma'(Y')$, para todo X′, Y′ com,$\overline{X''Y''} \cong r'.\overline{X'Y'}$. Logo, existe a função composta $\sigma \circ \sigma': F \to F''$ biunívoca, tal que $X'' \cong \sigma'(\sigma(X))\ e\ Y'' \cong \sigma'(\sigma(Y))$. Ainda,$\overline{X'Y'} \cong r.\overline{XY}\ e\ \overline{X''Y''} \cong r'\overline{X'Y'}$. .Assim,

$$\overline{X''Y''} \cong r'.\overline{X'Y'} \Rightarrow \overline{X''Y''} \cong r\,.r'.\overline{XY}.$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **transitiva**.

3. A figura F é semelhante a ela mesma, ou seja, $\sigma: F \to F$ é uma semelhança de razão 1. Assim, a semelhança satisfaz a propriedade **reflexiva**. Uma semelhança de razão 1, chama-se isometria, pois para quaisquer pontos X, Y em F, a distância de X′ ≅ σ(X) a $Y' \cong \sigma(Y)$ é igual a distância de X a Y.

Definição 2: Quando existe uma isometria entre as figuras F e F′, diz-se que estas são **congruentes.**

Note que as definições das propriedades simétrica, transitiva e reflexiva ora apresentadas, são as mesmas que apresentamos na seção 3.1.3 sobre Gauss.

Congruência de Triângulos

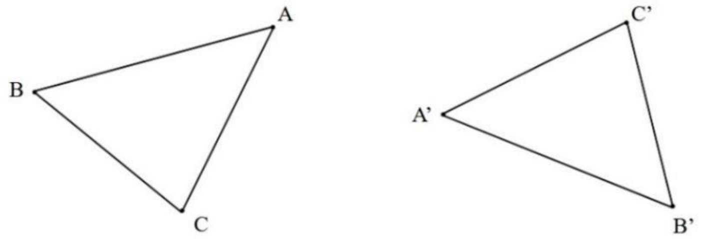
Definição 3: Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e que dois ângulos Â e B̂ são congruentes se eles têm a mesma medida.

Definição 4: Dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Podemos observar que essa definição satisfaz a definição 1 para r = 1.

Assim, dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no plano, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. A Figura 2.2 mostra dois triângulos congruentes
ABC e A′B′C′ com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$.

Triângulos congruentes.



Temos então, que:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Leftrightarrow ABC \cong A'B'C'$$

Desta forma, temos seis relações necessárias que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes.

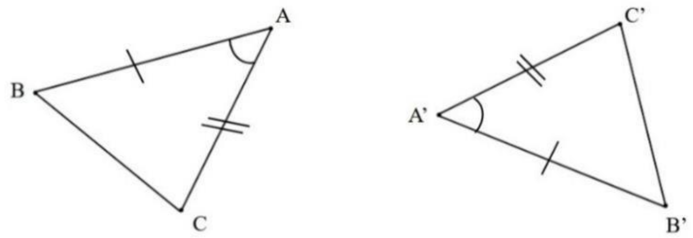
A congruência de triângulo satisfaz as propriedades **reflexiva**, onde um triângulo qualquer ABC é congruente a si mesmo, **simétrica**, se o triângulo ABC é congruente ao triângulo A′B′C′, então o triângulo A′B′C′ é congruente ao triângulo ABC, e a **transitiva**, se o triângulo ABC é congruente ao triângulo A′B′C′ e o triângulo A′B′C′ é congruente ao triângulo A″B″C″, então o triângulo ABC é congruente ao triângulo A″B″C″.

Ao utilizar a definição 4 são necessárias seis hipóteses para verificar a congruência de dois triângulos. Utilizando os casos ou critérios de congruência a seguir reduzimos o número de hipóteses para três.

Axioma 1 (1º caso de congruência - LAL): Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \hat{A} = \hat{A}'$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo axioma 1.

1º caso de congruência - LAL.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{cases} \overset{LAL}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'.$$

Teorema 1 (2º caso de congruência – ALA): Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

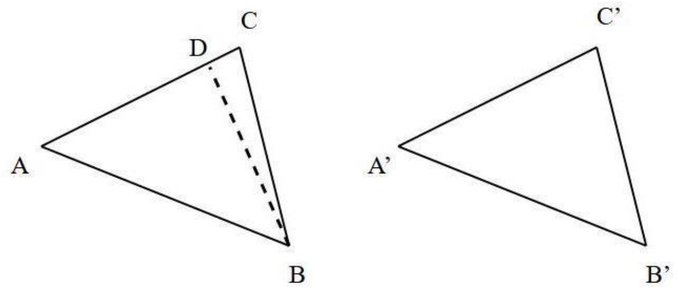
Demonstração:

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}'\ e\ \hat{B} = \hat{B}'$. Seja D um ponto da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$.

Considerando o triângulo ABD e comparando-o com o triângulo A′B′C′, como $\overline{AD} = \overline{A'C'},\ \overline{AB} = \overline{A'B'} e\ \hat{A} = \hat{A}'$ concluímos pelo axioma 1 que ABD = A′B′C′. Como consequência, tem-se que $A\hat{B}D = \hat{B}'$. Por hipótese $\hat{B}' = A\hat{B}C$, logo $A\hat{B}D = A\hat{B}C$.

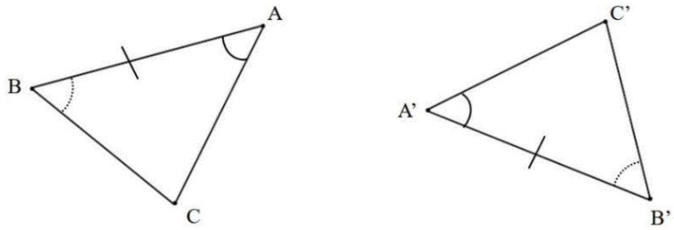
Consequentemente as semirretas BD e BC coincidem. Assim o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como ABD ≅A′B′C′ então, ABC ≅ A′B′C′.

Ponto D da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$



Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}' e\ \hat{B} = \hat{B}'$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo teorema 1.

2º caso de congruência - ALA.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \overset{ALA}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'$$

Teorema 2 (caso de congruência – LAAo): Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração:

Sejam os triângulos ABC e A′B′C′ tal que,$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \hat{A} = \hat{A}' e\ \hat{C} = \hat{C}'$

No triângulo ABC,

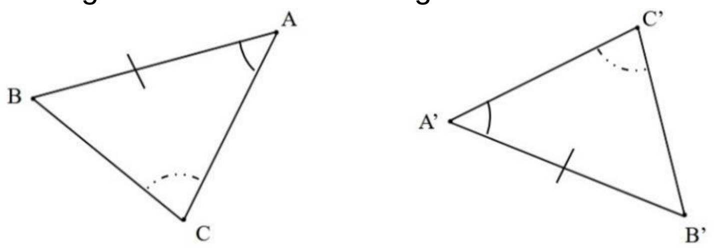
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°,$$

e portanto,

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C}.$$

(2)

Figura 2.6 – Caso de congruência - LAAo.



Analogamente, no triângulo A'B'C',

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180°.$$

Assim,

$$\hat{B}' = 180° - \hat{A}' - \hat{C}'. \quad (3)$$

Da hipótese,

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad (4)$$

$$\hat{C} = \hat{C}'. \quad (5)$$

Assim, substituindo (4) e (5) em (3),

$$\hat{B}' = 180° - \hat{A} - \hat{C}'.$$

Comparando $\hat{B}'$ com $\hat{B}$ em (2), temos que:

$$\hat{B}' = \hat{B}.$$

Portanto,

$$\hat{A} = \hat{A}',$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e}$$

$$\hat{B} = \hat{B}'.$$

Logo, pelo Teorema 2 os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes.

Teoremas 3 (3º caso de congruência – LLL): Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados do outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

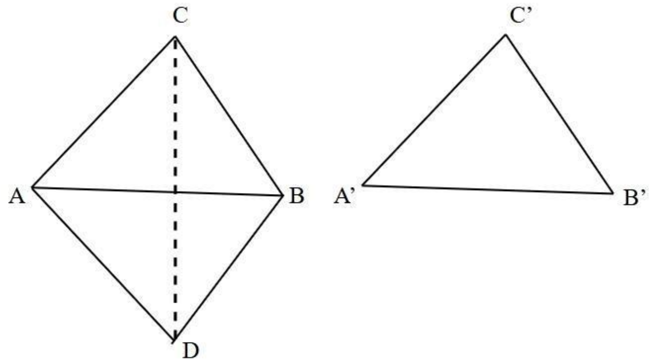
Demonstração:

Seja ABC e A′B′C′ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \overline{BC} = \overline{B'C'}$

Vamos provar que ABC ≅ A′B′C′.

Para isto, construa, a partir da semirreta AB e no semiplano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo Â′. No lado desse ângulo que não contém o ponto B, marque um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ e ligue D a B. Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AD} = \overline{A'C'} e\ D\hat{A}B = \hat{A}$, então ABD ≅ A′B′C′ , pelo axioma 1.

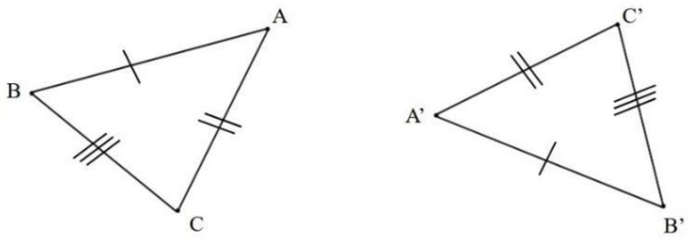
Triângulos ABC, A′B′C′ e ABD.



Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace CD. Como $\overline{AD} = \overline{A'C'} = \overline{AC}\ e\ \overline{DB} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que AD̂C ≅ AĈD e CD̂B ≅ DĈB. Logo, AD̂B ≅ AĈB. Portanto, pelo axioma 1, ABD ≅ ABC. Pela propriedade transitiva, ABC ≅ A′B′C′.

Seja ABC e A'B'C' dois triângulos tais que $\overline{AB}\overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'} e\ \overline{BC} = \overline{B'C'}$, temos que os triângulos ABC e A′B′C′ são congruentes pelo teorema 3.

3º caso de congruência - LLL.



Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases} \overset{LLL}{\Longrightarrow} ABC \cong A'B'C'.$$

Assim, concluímos a apresentação deste produto educacional para o ensino de Congruência de Triângulos**.**

REFERÊNCIAS

BOYER, C. História da Matemática. São Paulo: Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Comum Curricular. Proposta preliminar. versão final**. revista Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc2versao.revista.pdf> Acesso em: 14/01/2021

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.
Brasil. Ministério da Educação. **Base Comum Curricular. Proposta preliminar. versão final**. revista Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc2versao.revista.pdf> Acesso em: 14/01/2021

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Plublishers, 1997.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUM, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

CABRAL, N. F. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração.** Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CABRAL, N. F.; COSTA, A.C. **Sequências Didáticas: Olhares teóricos e construção.** Belém: SBEMPA, 2019, p. 60-82.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos: História** e Matemática em sala de aula. Belém: SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. **História e Matemática Integradas por meio de um Diagrama Metodológico**. Revista PARADIGMA, v. XLI, Nº Extra 1; abril de 2020 / 197-211.

COSTA, Airton da Silva. **O Ensino de Expressões Algébricas por Meio de Atividades**. 2019. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

D'AMORE, Bruno. O triângulo: professor, aluno, saber. Transposição didática. Teoria das situações didáticas. In: D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática.** (Tradução: Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007a. p.221-240.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática. Campinas (SP)**: Editora da UNICAMP, 1995.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas (SP): Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar**. *Pró-Posições,* nº.4, v.1[10], p.78-91, mar. 1993.
FLAVELL, J. Speculations about the nature and development of metacognition. In: WEINERT, F.; KLUWE, R. (Orgs.), **Metacognition, motivation and understanding.** Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum, 1987, p. 21-29.

GÓES, M. D. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade**. Cadernos Cedes, SciELO Brasil, v. 50, n. 9-25, 2000.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète: o despontar da álgebra simbólica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.

LIMA, Elon Lages, et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 3. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2013.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI***.* Campinas: Papirus, 2001.

LINS, R C e GIMENEZ, J. P. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Papirus, Campinas. 2006.

MARTINS, Henrique Araken. **Estruturas de avaliação escolar para as Taxonomias de Bloom em questões de múltipla escolha**. Trabalho de Conclusão parcial de curso. Profmat- Mestrado profissional pela universidade Federal do ABC- Santo André- SP-2016.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. **A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática**. Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papirus, n. 40, 1996. p. 47-61

MIGUEL, A. **As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadore**s. Revista Zetetiké. Campinas (SP): UNICAMP – FE – CEMPEM, 1997. pp. 73- 105

MORTIMER, E.F. and SCOTT, P.H. **Analysing discourse in the science classroom**. In Leach, J., Millar, R. and Osborne, J. (Eds) *Improving Science Education: the contribution of research*. Milton Keynes: Open University Press. 2000.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002

MOURA, Mayra Camilo Madeira de. PIRES, Diego Arantes Texeira. Análise crítica da criação de materiais manipuláveis durante a formação inicial de professores. **BJD-Brazilian Journal of Development**. Curitiba, v.7, n.9, p. 90719-90735 sep. 2021.

MOURA, Breno Arisoli; SILVA, Cibelle Celestino. **A abordagem Multicontextual da História da Ciência na Formação de Professores de Física**: análise de um estudo de caso. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 336-348, 2014.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópoles - RJ: Vozes, 2013.

PRESTES, Betânia de Almeida. **Potencialidades de uma Sequência Didática com uso de Tangram para o ensino de Expressões Algébricas**. 2023, 236f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

PRESTES, Betânia de Almeida; SILVA, Edna Machado, CHAQUIAM, Miguel. Viète e o nascimento da álgebra simbólica: um percurso histórico em quatro contextos. **Anais**. X Bienal de Matemática. UFPA- Belém-PA, 2022, p. 704-714.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56

RODRIGUES, Fredy Coelho; GRAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre o uso de material manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revermat: R.Eletr. de Edu. Matem**. Florianópólis, 2012, v.07, n.2, p.187-196

SANTOS. Edméa. **Curriculos- Teorias e Práticas.** Aline Andrade Weber Nunes da Rocha [et al]; organização Andrea Ramal e [Edméa Oliveira dos Santos]. Rio de Janeiro: LTC, 2012 – cap 4 – Educação- Currículos. I- Rocha, Oliveira Andrade Weber Nunes da. II. Ramal, Andrea. III – Santos, Edméa Oliveira dos, 1972, IV. Série.

SCOTT, P.H. (1998). Teacher talk and meaning making in science classrooms: A Vygotskian analysis and review. *Studies in Science Education*, 32: 45-80.

SOUZA, Eliane R. de. et al. **A matemática das sete peças do Tangram**. Vol 7. São Paulo,IME-USP, 1997.

SILVA, Edna Machado. **O conceito de função e suas linguagens**. 2020, 221f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

SILVA, J. T. ***A álgebra nos livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva histórico-cultural.*** Dissertação (Mestrado) – Universidade de Uberaba, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2015.

SILVA, J.T.; RESENDE, M. R.; IBRAHIM, S. A.; FLORENÇA, F. **As concepções de Álgebra e de educação algébrica-uma análise de livros didáticos do 8º ano.** Revista Profissional docente. Uberaba, v.15, n.33, p. 127-145. Ago-Dez.-2015.

SILVA JUNIOR. Luciano Moreira. **Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: uma compreensão à luz da teoria das situações didáticas.** Mestrado Acadêmico em ensino de ciências e Matemática- Universidade Estadual da Paraíba- UEPB. Campina Grande-PB. Campina Grande- PB, 2016.

SILVA, Nilson Alves da. FERREIRA, Marcus Vinícius Vieira TOZETTI, Karla Dubberstein. UM ESTUDO SOBRE A SITUAÇÃO DIDÁTICA DE GUY BROUSSEAU**. EDUCERE-XII Encontro Nacional de Educação.** 2015. PUCPR- 26 a 29 de outubro de 2015. ISSN 2176-1396

SOUZA. Juliana Boanova. **A invisibilidade do gênero das discussões das mulheres professoras de matemática.** Porto Alegre, 2020. Dissertação de Mestrado- Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre-RS.

TIMOTEO, Salvador. **Álgebra**. Colección El Postulante. Editora San Marcos. Lima-Perú, 2013.

TURRIONI, A. M. S.; PÉREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas, SP:Autores Associados, p. 57 - 76, 2006.

USISKIN, Z. **O que é álgebra da escola média?** In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

WERSTCH, J. V. **A necessidade a ação na pesquisa sociocultural**. In: WERSTCH, J. V.; DEL RÍO, P.; ALVAREZ, A. Estudos sociais da mente. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 56-71.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA