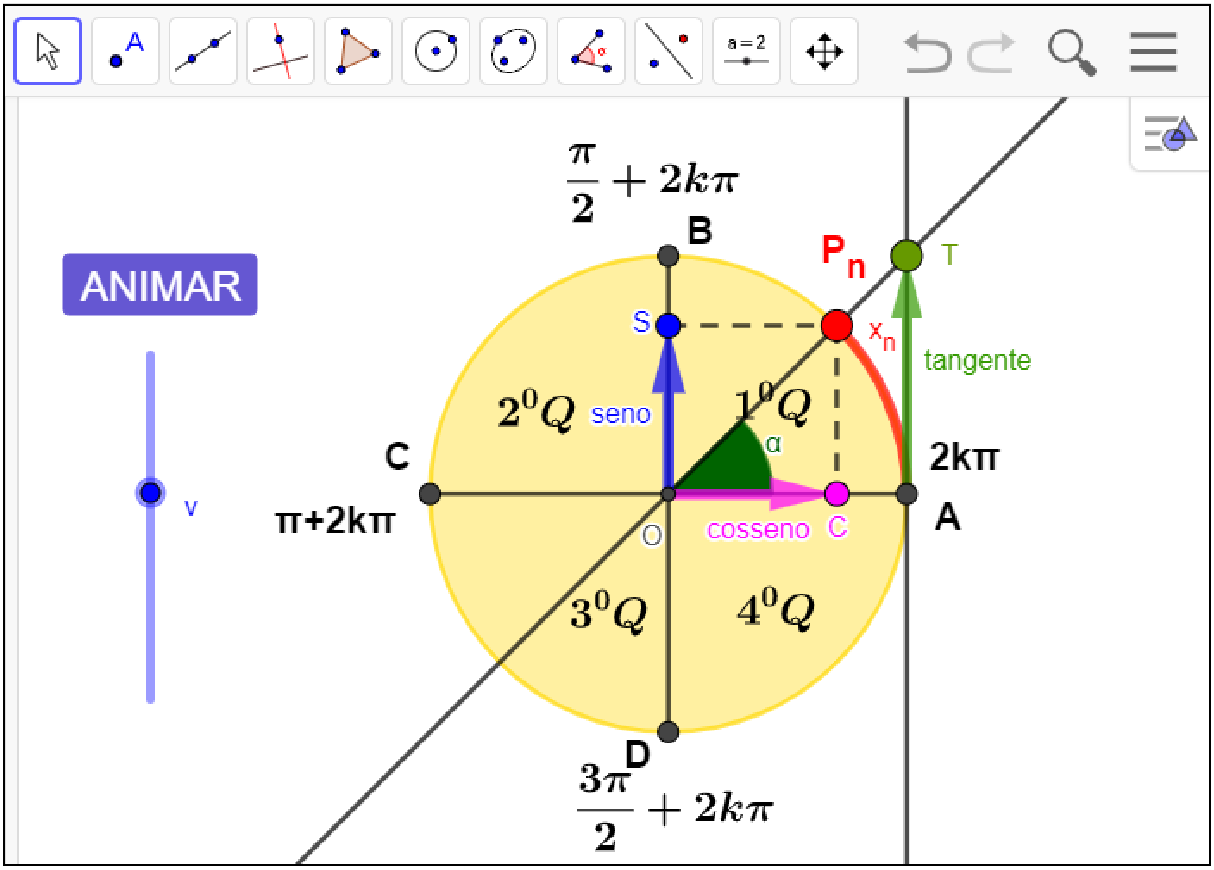
JOSÉ HENRIQUE PEREIRA

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

ATIVIDADES PARA O ENSINO DO SENO, COSSENO E TANGENTE

BELÉM/PA

2023

Clay Anderson Nunes Chagas
Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira
Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Renato da Costa Teixeira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia
Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação
Fábio José da Costa Alves
Coordenador do PPGEM

Natanael Freitas Cabral
Vice coordenador do PPGEM

Diagramação e Capa: Os Autores
Revisão: Os Autores

PEREIRA, José Henrique Pereira

Funções trigonométricas, Ensino do seno, cosseno e tangente: Atividades para o ensino das razões trigonométria no triângulo retângulo, funções seno, cosseno e tangente / José Henrique Pereira, Fábio José da Costa Alves. - Belém, 2023.

Produto educacional vinculado à Dissertação “Ensino de seno, cosseno e tangente em ambientes dinâmicos” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.
Fábio José da Costa Alves (Orientador).

JOSÉ HENRIQUE PEREIRA

ENSINO DE SENO, COSSENO E TANGENTE EM AMBIENTES DINÂMICOS.

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

Data de aprovação: 17/05/2023

Banca examinadora

______________________________. Orientador
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Interno
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Doutora em Bioinformática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

______________________________. Examinador Externo
Profa. Dra. Cláudianny Amorim Noronha
Doutora em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Belém – PA

2023

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é parte integrante da pesquisa de Mestrado e tem como objetivo socializar uma sequência de atividades para o ensino das funções trigonométricas por meio do uso do software GeoGebra. A referida pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão – IFMA Campus Monte Castelo em São Luís com estudantes do segundo ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico de Eletrônica.

O interesse por esta pesquisa surgiu a partir de reflexões e angústias sobre as queixas dos meus alunos do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas na resolução de problemas que envolvem funções seno, cosseno e tangente, e além de precisarem assimilar os temas que são próprios deste assunto, ainda precisam lembrar outros temas anteriormente estudados, tais como circunferência, arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico, que exercerá como pré-requisitos para introduzir este conteúdo.

Este produto educacional é sugerido de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos.

Neste produto educacional, apresentaremos 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, analisando seu domínio, imagens, amplitude e período, faremos também uma análise dos parâmetros utilizando o aplicativo Geogebra, *cujo propósito principal era introduzir o estudo das funções trigonométricas, fazendo uso do software GeoGebra*

À medida que os alunos interagem com o computador, dependendo da sua manipulação, eles visualizam imediatamente o que está acontecendo, assim a utilização da informática no ensino da Matemática, o aluno se deparará com situações em que ele necessite de utilizar, os conceitos, propriedades e definições matemáticos para ser aplicados nas funções seno, cosseno e tangente. Portanto, o software Geogebra foi escolhido para este trabalho pelos seguintes motivos: ele é um software de geometria dinâmica de fácil manipulação, também é um software livre e de fácil acesso, pode ser instalado no seu computador pessoal.

O software geogebra possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste Capítulo apresentaremos 12(doze) atividades contemplando os conteúdos destacados neste trabalho; razões trigonométricas no triângulo retângulo, círculo trigonométrico, e as funções seno, cosseno e tangente, analisando seu domínio, imagens, amplitude e período, faremos também uma análise dos parâmetros utilizando o aplicativo Geogebra.

Esta sequência didática é sugerida de forma a organizar sequencialmente os conteúdos, iniciando o conteúdo pelos aspectos mais simples e avançando para os casos mais complexos, sempre considerando os conhecimentos prévios dos alunos.

As atividades e os aplicativos desenvolvidos no Geogebra podem ser encontrados no endereço que será postado no desenvolvimento das atividades.

. Iniciaremos as atividade nesta sequência didática relembrando um pouco das definições das razões trigonométricas estudadas no ensino fundamental, utilizando o aplicativo Geogebra, serão feitas algumas recomendações para o manuseio do aplicativo, para o entendimento e a aprendizagem dos conteúdo.

No desenvolvimento dessa experiência didática, foram criadas algumas atividades no Geogebra, que será entregue para os alunos/participantes, isto é, uma cópia para cada aluno, e solicitar que seja feita sua leitura, depois que ele abra o aplicativo Geogebra já estruturado no link solicitado, para estudar as questões, de razões trigonométricas no triângulo retângulo, as funções trigonométricas,

A primeira atividade, foi pensada para fazer o estudo os conteúdos que são estudados no Ensino Fundamental, e tem a finalidade de relembrar esses conteúdos, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, denominado de Razões trigonométricas, onde é possível explorar as razões trigonométricas do triângulo retângulo de forma dinâmica.

2.1 ATIVIDADE 1 - AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivo.

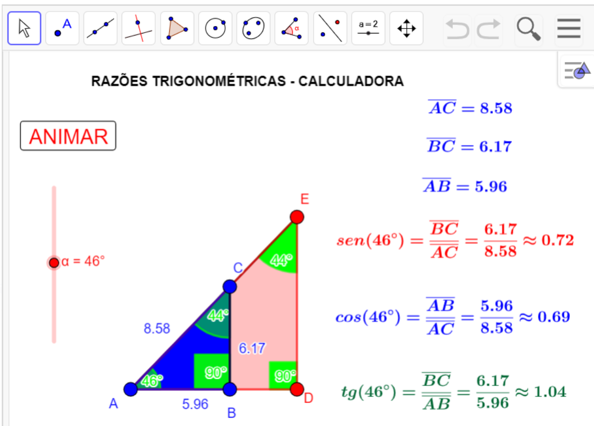
Esta atividade de experimento didático, tem como objetivo consolidar os conceitos, definições das razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

Lista de atividades

Nesse sentido propomos uma lista de exercícios que retrata as relações trigonométricas no triângulo retângulo, que deverão ser desenvolvidas com o auxílio do software GeoGebra, e averiguar a veracidade do resultado junto ao programa Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf. Responda.

Aluno: ____

Figura - 2 Razões trigonométricas



Fonte: Do próprio autor

EXERCÍCIOS

1º) O valor do sen(30^0), é aproximadamente ?

2º) Na figura acima o cos(46^0) é aproximadamente?

3º) Na figura acima o sen(60^0), é aproximadamente?

4º) Na figura acima, a tg(29^0) do triângulo retângulo, é aproximadamente?

2.1.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no entendimento das razões trigonométricas.

O aluno, de posse do aplicativo online geogebra – Aplicativos Matemáticos, https://www.geogebra.org/m/ff6wcbsf, explora as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo) a partir da manipulação desse aplicativo

No experimento, clique no Botão <Animar>, arraste o controle deslizante <a>, para escolha do ângulo e façam anotações do que observaram das medidas dos lados do triângulo retângulo em seguida, determine as razões entre os lados.

2.1.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo

a) Manuseando o aplicativo Identificar as características fundamentais das relações trigonométricas no triângulo retângulo (Medidas dos lados), isto é, pode utilizar um instrumento para medir o segmento ou utilizar as medidas do aplicativo que está exposto na tela de visualização.

b) Depois sugerir que os participantes encontrem o seno, cosseno e tangente dos ângulos das seguintes razões trigonométricas .

cos$(30^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,

sen$(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$,

tg$(30^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

sen$(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,

cos$(60^0) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$,

tg$(60^0) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

c) Verifique se as razões trigonométricas no Triângulo retângulo, dependem somente de um ângulo fixo.

d) Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação das razões trigonométricas (algébrico, geométrico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

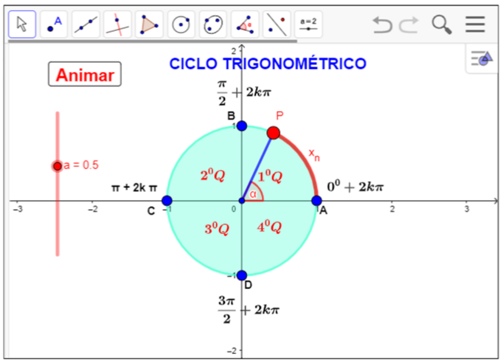
Ao realizar suas atividades, os alunos terão a oportunidade de argumentar sobre os resultados obtidos e, a partir das suas observações argumentativas, tirar conclusões sobre as propriedades das razões trigonométricas. Assim sendo, abre-se um espaço para a constituição de um ambiente em que os alunos se envolvem na discussão matemática, expondo e defendendo suas ideias, comentando as ideias dos colegas e levantando questionamentos sobre os resultados obtidos.

A segunda atividade, trabalha a circunferência trigonométrica de forma dinâmica, tem a finalidade de facilitar a compreensão deste conteúdo de trigonometria, utilizando o software Geogebra onde é possível explorar os quadrantes, imagens, ângulos, medidas de ângulos, congruência, determinação positiva e negativa, periodicidades, etc.

A CIRCUNFERÊNCIA OU CICLO TRIGONOMÉTRICO

Em um primeiro momento será apresentado o ambiente, onde os alunos irão trabalhar o aplicativo já estruturado (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px). Solicitar aos alunos que, usando os recursos do software geogebra, o botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, respostas às questões, interagindo com o aplicativo.

Figura - 3 - Ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Na segunda atividade vamos continuar o experimento no aplicativo Geogebra, desenvolvendo o conteúdo, círculo trigonométrico, O estudo da Trigonometria se inicia no final do Ensino Fundamental quando se apresentam as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, mas é no Ensino Médio que esses conceitos se extrapolam para o ciclo trigonométrico, em que se estudam os arcos e os ângulos em uma ou mais volta na circunferência trigonométrica, além da introdução do radiano como outra unidade de medida de ângulos.

2.2 ATIVIDADE - 2 - ENTENDENDO A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA.

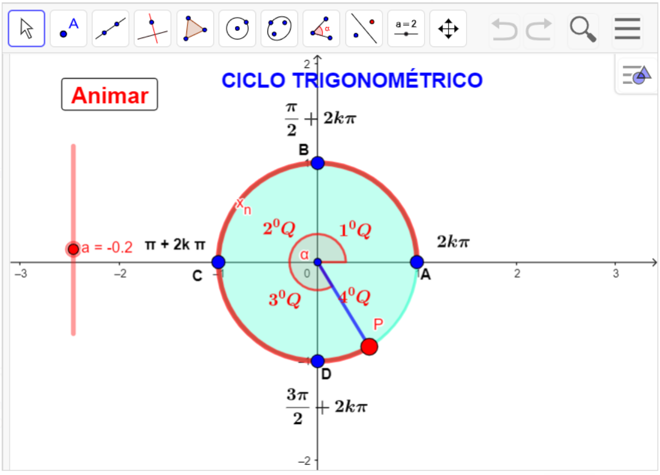
Nome do aluno: ____

Objetivo:

Esta atividade tem como objetivo consolidar os conceitos do ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições e propriedades do ciclo trigonométrico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 4.

Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/yvqs25px, e Responda

Figura - 4 -Ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) A circunferência é dividida em quantas partes iguais, e como são denominadas?

2º) O ponto P, fazendo um percurso de 245^0, no sentido anti-horário, vai está em qual quadrante?

3º) O ponto P, fazendo um percurso de $-\ 1024^0$, no sentido horário, vai está em qual quadrante?

4º) Representar, no ciclo trigonométrico, as imagens do conjunto de números A = $\left\{x\epsilon R/x\ =\ k\frac{\pi}{2}\ ,\ k\epsilon Z\right\}$.

5º) Marque, na circunferência trigonométrica, os pontos correspondentes aos seguintes números reais: $\frac{\pi}{4}$, 12π ,$-\ \frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $-\ \frac{15\pi}{8}$.

2.2.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo no ciclo trigonométrico.

Na atividade 2, vai ser feito um experimento para o entendimento do ciclo trigonométrico, usando o aplicativo já estruturado, encontrado no Geogebra.org.

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/yvqs25px) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < Animar > e < a >.

2º) Se clicar no botão < Animar >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

4º) Se arrastar o controle deslizante < a >, para a < 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido horário.

5º) O nosso experimento é uma circunferência de raio unitário, isto é, (R = 1), divida em quatro partes de medida iguais, denominada de quadrante.

Sugestões para explorar o aplicativo no ciclo trigonométrico

1. De posse do aplicativo, se clicarmos no botão < Animar > e o controle deslizante < a >, com a > 0, o ponto P se movimentará no sentido anti-horário, partindo do ponto A(1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.
2. Se clicarmos no botão < Animar >, e o controle deslizante < a >, com a < 0, o ponto P se movimentará no sentido horário, partindo do ponto A (1,0), descrevendo um arco de comprimento cujas extremidades são os pontos A e P.

2.2.2 Os quadrantes no ciclo trigonométrico

Observando o aplicativo do Geogebra, a circunferência unitária, está dividida em quatro partes iguais, de 90^{0}, ou $\frac{\pi}{2}$ radianos, Se o ponto P percorrer todos os quadrantes, isto é o ponto P se deslocará do ponto A, até o ponto B, percorrendo o primeiro quadrante, continuando o seu deslocamento até o ponto C, então o ponto P, fará o percurso no segundo quadrante, se o ponto P, continuar percorrendo até o ponto D, ele percorrerá o terceiro quadrante, se o ponto P, continuar se deslocando do ponto D até o ponto A, deslocou-se no quarto quadrante, então o ponto P completou uma volta completa que equivale ao comprimento da circunferência, que é C = $2\pi R$.

Logo chegaremos à conclusão que:

Primeiro quadrante: são os ângulos que estão entre 0^0 a 90^0, ou o^0, a $\frac{\pi}{2}$

Segundo quadrante: são os ângulos que estão entre 90^0, a 180^o, ou $\frac{\pi}{2}$ a π .

Terceiro quadrante: ângulos que estão entre 180º e 270º ou π e $\frac{3\pi}{2}$radianos;

Quarto quadrante: ângulos que estão entre 270º e 360º ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radiano

2.2.3 Imagens na circunferência no sentido anti-horário

Se o ponto P_n está associado ao número x_n , dizemos que P_n é a imagem de x_n

Quando a cada número real x_1, associado a um único ponto P_1, na circunferência. Se x_1 > 0, então realizamos a partir de A, um percurso de comprimento x_1, no sentido anti-horário, e marcamos P_1 como ponto final do percurso, logo a imagem do número x_1, na circunferência é o ponto P_1.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$, no ciclo trigonométrico, é o ponto B.

A imagem de $-\frac{\pi}{2}$, no ciclo trigonométrico é o ponto D.

A imagem de π no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de $-\ \pi$, no ciclo trigonométrico é o ponto C.

A imagem de 10π, no ciclo trigonométrico é o ponto A.

Notamos que se P_1, é a imagem do número x_1, então também é a imagem dos números, x_1+2π, x_1+4π, x_1+6π, ...São chamados de ângulos congruentes.

2.2.4 Imagens na circunferência no sentido horário

Se x_2 < 0,então realizamos a partir de A um percurso de comprimento de x_2 no sentido horário, marcamos P_2 como ponto final do percurso, notamos que P_2 é imagem de x_2. Logo também será de x_2- 2π, x_2-4π, x_2-6π, …

Foi construído um aplicativo no Geogebra, para que pudéssemos manusear e visualizar a transposição das imagens da circunferência para o plano cartesiano, por ser uma importante condição para continuarmos o nosso experimento.

2.3 ATIVIDADE - 3 - ENTENDENDO A TRANSPOSIÇÃO DAS IMAGENS DO CICLO TRIGONOMÉTRICO PARA O PLANO CARTESIANO

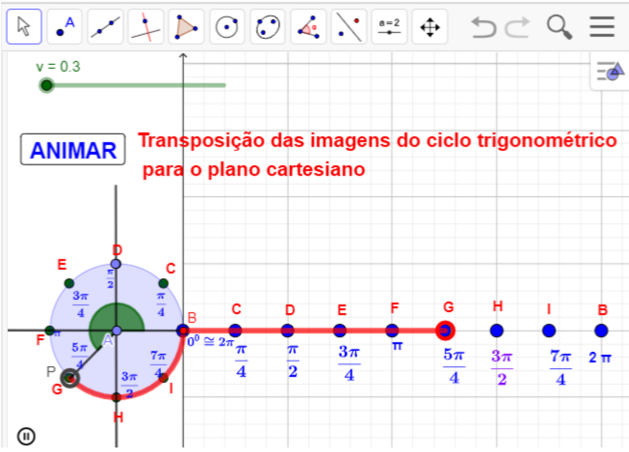
NOME DO ALUNO:____

Objetivo:

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos e definições da transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico Geogebra.

Abra o aplicativo (https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9) e Responda.

Figura - 5 -Transposição das imagens do ciclo para o plano



Fonte: Do próprio autor

Questões

1º) Se α e β são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

a) $\alpha = \beta$ c) $\alpha = \beta + 2.360^0$ e) $\alpha = \beta + k.360^0, k \epsilon Z.$

b) $\alpha = \beta + 360^0$ d) $\alpha = \beta - 2.360^0$

2º) Manipulando o aplicativo, e observando as animações que representam as transposições das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, responda:

As imagens do seguinte conjunto. E= {$x \epsilon R$/ x =$\frac{\pi}{2}$ + kπ } ?

a) A, B b) D, H c) C, G d) B, F e) C, D

3º) Qual a imagem de um arco de 2700^0 ?

a) A b) C c) D d) E e) F

2.3.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo na transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano

1º) Abra o arquivo (https://www.geogebra.org/m/rwj2etp9) e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botões < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para v > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário

Ao clicar no botão < ANIMAR > o aplicativa fará a transposição das imagens do ciclo trigonométrico para o plano cartesiano, é como se tivéssemos cortado a circunferência e esticado levando todas as propriedades da circunferência, mas na reta real, no eixo x do plano cartesiano. Vejamos alguns exemplos:

A imagem de 0^0, é o ponto **B** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{4}$ é o ponto **C** no eixo x.

A imagem de $\frac{\pi}{2}$ é o ponto **D** no eixo x.

A imagem de $\frac{3\pi}{4}$ é o ponto **E** no eixo x.

A imagem de π é o ponto **F** no eixo x.

A imagem de $\frac{5\pi}{4}$ é o ponto **G** no eixo x

A imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é o ponto **H** no eixo x.

A imagem de $\frac{7\pi}{4}$ é o ponto **I** no eixo x.

A imagem de 2π é o ponto **B** no eixo x.

Como o gráfico é periódico, as imagens do gráfico se repetem, isto é, são as mesmas de acordo com os seus ângulos congruentes.

A imagem de $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, é o ponto **D** no eixo x, o ponto P, poderia ter dado várias voltas que a sua imagem, seria também o ponto **D** no eixo x.

A quarta atividade, trabalha o cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender a definição, conceitos, e propriedades sinais da função cosseno, para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

2.4 ATIVIDADE - 4 - ENTENDENDO A FUNÇÃO COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

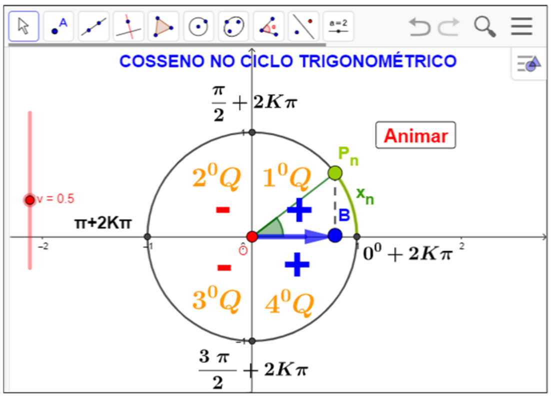
Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e propriedades da função cosseno no ciclo trigonométrico, manuseando e visualizando as animações no geogebra, figura 6.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/nafgjakq`` e Responda.

Figura - 6 - Função cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões

1º) Em quais quadrantes o cosseno é positivo?

2º) Qual o valor da imagem do cosseno de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

3º) Faça uma tabela que contenha os arcos, 0^0, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, com suas respectivas imagens.

4º) Manuseando o aplicativo, podemos encontrar o cossenos dos arcos, girando o ponto P_n, no sentido anti-horário. Qual é domínio e a imagem de f(x) = cos(π) ?

5º) Quando o ponto P_n gira várias vezes a circunferência de comprimento 2 πR, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=cos(6π)?

6º) O ponto P_n, deslocando de π→ $\frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto P_n sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas. O cosseno neste local é ?

2.4.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função cosseno

1º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

2º) Se arrastar o controle deslizante < v >, para v > 0, a animação vai aumentando sua velocidade, no sentido anti-horário, se arrastar o controle deslizante v < 0 ,vai aumentando sua velocidade, no sentido horário

Definição da função cosseno no aplicativo Geogebra

O ponto P_n, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico, a sua projeção em relação a abcissa OB, será o cosseno de x_n, isto é: OB = cos(x_n).

2.4.2 Sugestões para explorar os conteúdos no aplicativo

1. O ponto P_n, fará o percurso de x_n, a projeção do ponto sairá do ponto A=(1,0), e irá diminuindo até a origem da circunferência O=(0,0), logo diminuirá, ou seja, na origem o cosseno é zero. Portanto, no primeiro quadrante a função cosseno é decrescente.

2. O ponto P_n, continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$, a projeção do ponto P_n, sairá da origem O=(0,0), e se deslocará até π, a medida desse deslocamento é 1(um), tamanho do raio (R = 1). Mas este deslocamento está no lado esquerdo dos eixos coordenados, pois, assume valores negativo, logo, $cos(\pi) =- 1$. Portanto a função no segundo quadrante é decrescente.

4) O ponto P_n, continuará o percurso no terceiro quadrante, saindo de π→ $\frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto P_n, sairá -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas O = (0,0), que corresponde a zero, pois a sua numeração aumenta, portanto, a função cosseno no terceiro quadrante é crescente.

5º) O ponto P_n, continuará o percurso no quarto quadrante, saindo de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$, a projeção do ponto P_n, sairá da origem O = (0,0) e se deslocará até 2π, pois assume valores positivos, logo, $\cos(2\pi) = 1$. Portanto a função é crescente.

A quinta atividade da função cosseno no ciclo trigonométrico, pode proporcionar ao aluno o entendimento da construção dos conceitos, definição, domínio, imagem, sinais, periodicidade de forma dinâmica.

2.5 ATIVIDADE - 5 - .ENTENDENDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO NO PLANO.

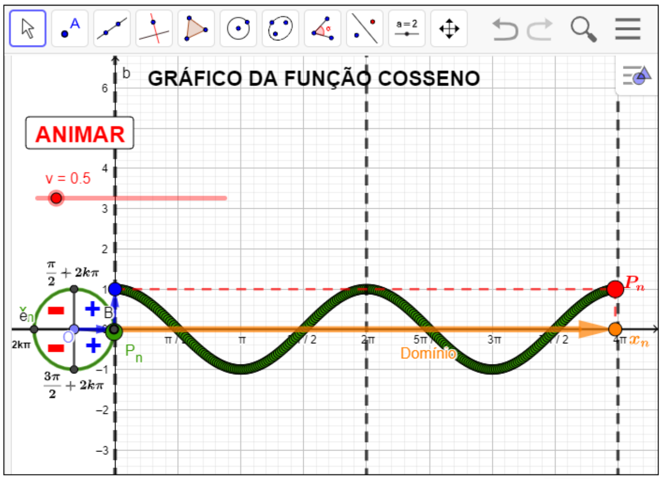
Aluno____

Objetivo:

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição, periodicidade, domínio imagem e amplitude do gráfico da função cosseno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico, figura 7.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz e Responda.

Figura - 7 - Cossenóide



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função cosseno?

2º) Quais quadrantes a função cosseno é positiva e quais são negativa,

3º) Quais os valores da função cosseno dos seguintes arcos:

a) $2k\pi$

b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c) $\pi + 2k\pi$

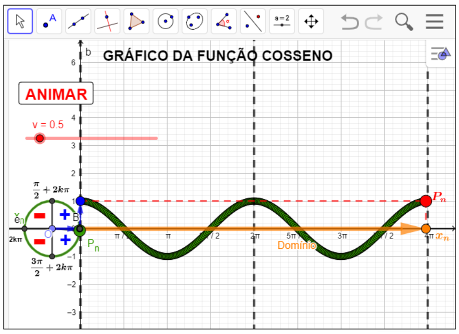
d) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

e) -1470^{0}

2.5.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para a construção do gráfico da função cosseno.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/p9j3vtcz e execute o mesmo no Geogebra. Iniciaremos a manusear o arquivo clicando no botão < ANIMAR > e arrastando o controle deslizante < v > .para v > 0, a animação fica mais rápida.

Figura - 8 - Função cosseno no plano cartesiano



Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para.

3º) Se arrastar o controle deslizante para v > 0, a animação fica mais rápida

O ponto P_n, se movimenta no ciclo trigonométrico, no sentido anti-horário, este deslocamento do ponto P_n, será transportado para o eixo das abscissas, passando a ser o domínio da função cosseno.

- Domínio é R, e a Imagem é o intervalo [−1, 1]
- .A função cosseno é periódica e seu período é 2π, pois x_n e x_n + 2k têm a mesma imagem P_n no ciclo trigonométrico, é positiva no primeiro e quarto quadrante, é negativo no segundo e terceiro quadrante.
- A amplitude é a média aritmética entre os valores máximo e mínimo da função cosseno.

Na sexta atividade, estudaremos os parâmetros da função cosseno no ciclo trigonométrico, e tem a finalidade de entender, as modificações das construções dos gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), tendo como referência a função f(x) = cos(x), para a elaboração desta atividade foi construído um aplicativo desenvolvido no Geogebra, onde é possível explorar de forma dinâmica.

2.6 ATIVIDADE - 6 - .ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO COSSENO NO GEOGEBRA

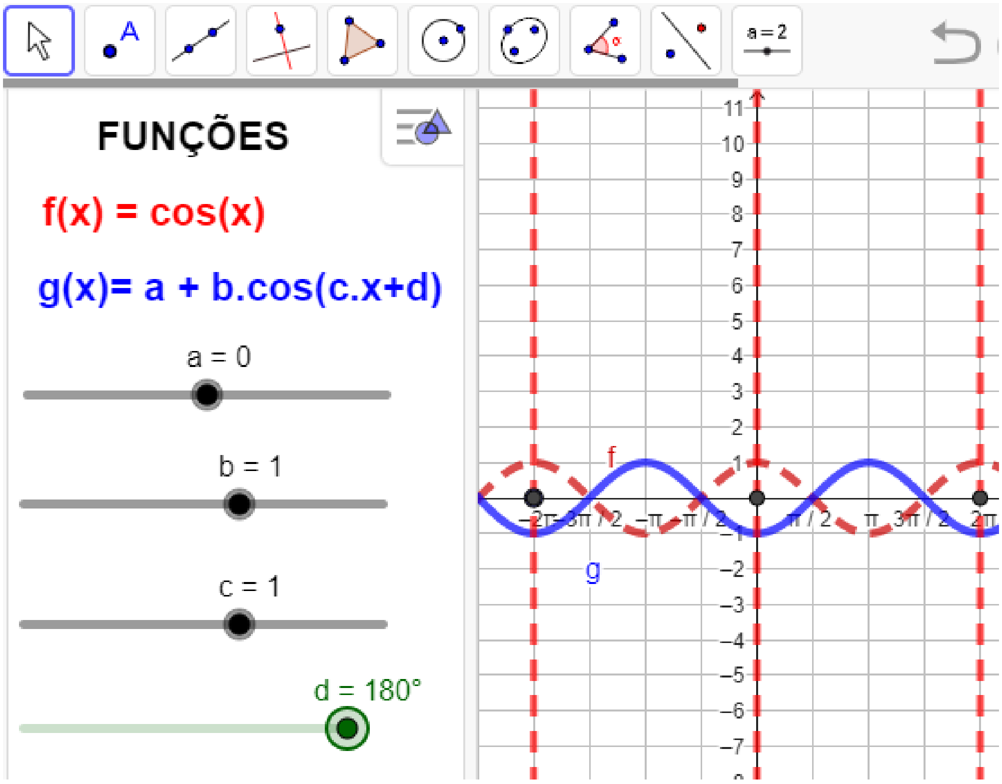
Aluno____

Objetivo:

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo consolidar a construção dos gráficos da função cosseno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, visualizando as animações no aplicativo de forma dinâmica.

Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/pdzqgkra, e responda.

Figura - 9- Parâmetros do cosseno,



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2cos(x)?

2º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=-2cos(x)?

3º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+2 cos(x)?

4º) Qual a imagem, domínio, amplitude e período da função f(x)=2+3 cos(2x)?

5º) Descreva o que você observa na função cosseno dada por f(x) = a+b.cos(c.x +d), Para b=1, c=1, d=0 , quando você arrasta o controle deslizante ´´a`` de zero até -3?

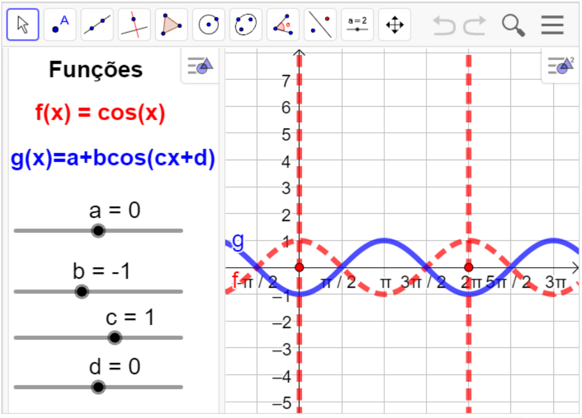
2.6.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função cosseno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/classic/w6gdzwwq

2º) Arraste os parâmetros da função ´´g(x)`` para se movimentar.

3º) faça a comparação das funções g(x) e f(x), figura 10.

Figura - 10 - Os Parâmetros da função cosseno,



Fonte: Do próprio autor

Procedimentos para construir o gráfico da função cosseno no aplicativo geogebra.

Essa atividade destina-se à comparação dos gráficos das funções f(x)=cos(x) e g(x)=a+b.cos(c.x+d), utilizando o aplicativo já estruturado no GeoGebra.

Para manusear é necessário arrastar os parâmetros a, b, c, d, constantes, na tela de visualização, e observar as modificações dos gráficos da função g(x) = a+b.cos(c.x+d).

2.6.2 Estudo dos parâmetros da função cosseno

Vamos fazer um experimento didático com os parâmetros das funções trigonométricas do tipo f(t)=a+b.cos(c.t+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros.

Variação do parâmetro a

Observando as construções de gráficos da função g(x)=a+cos(x) no aplicativo com variações do parâmetro ´´a``, temos como resultado um deslocamento vertical, da seguinte maneira.

No sentido positivo do eixo das ordenadas (para cima), se o valor do parâmetro ´´a`` for positivo, ou seja, a > 0;

No sentido negativo do eixo das ordenadas (para baixo), se o valor do parâmetro ´´a`` for negativo.

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros ´´a``, variando de -1≤ a ≤3, b=1, c=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x) = a+b.cos(c.x+d).

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções, tabela 1.

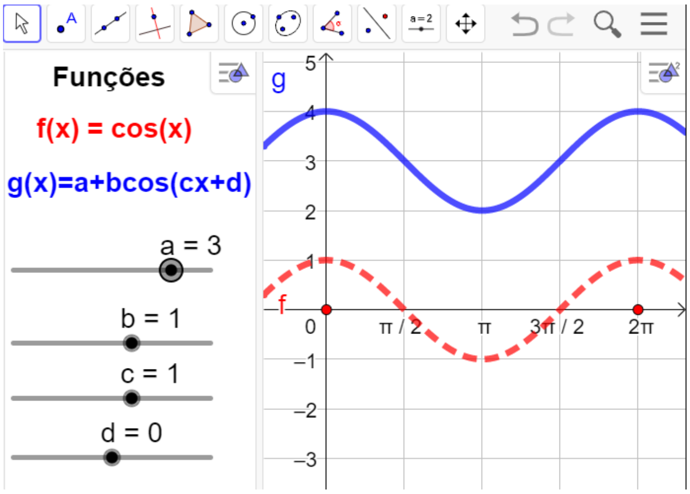
Tabela 1 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =a+cos(x), a∈ Z.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=cos(x)	R	[-1,1]	1	2π
s(x)=1+cos(x)	R	[0,2]	1	2π
g(x)=2+cos(x)	R	[1,3]	1	2π
h(x)=3+cos(x)	R	[2,4]	1	2π
p(x)=-1+cos(x)	R	[0,-2]	1	2π

Fonte: Do próprio autor

Visualizando a construção do gráfico da função g(x)=3+cos(x) no aplicativo, tendo como referência a função f(x)=cos(x). Figura - 11.

Figura - 11 - Gráficos, f(x) = $a + cos(x)$



Fonte: Do próprio autor

Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.

Variação do parâmetro b:

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar os parâmetros, variando $-5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.cos(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro ´´b``, chegamos a conclusão que o gráfico tem um deslocamento vertical.

Na tabela 2, apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $bcos(x)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-3 \leq b \leq 3$, b∈Z.

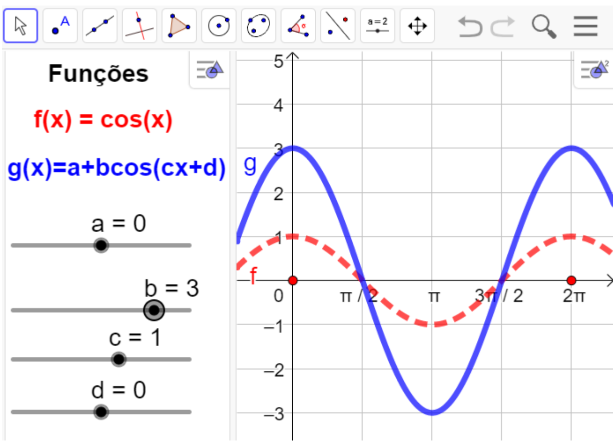
Tabela 2 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bcos(x), b∈ Z.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x) = cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x) = 2cos(x)	R	[-2, 2]	2	2π
h(x) = 3cos(x)	R	[-3, 3]	3	2π
p(x) = - cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
q(x) = -2cos(x)	R	[-2, 2]	2	2π
r(x) = -3cos(x)	R	[-3, 3]	3	2π

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3cos(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 12.

Figura - 12 - h(x) = 3cos(x)



Fonte: Do próprio auto

Observando a construção do gráfico da função h(x)=3.cos(x), temos:

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3

Com relação ao parâmetro b, ele define a amplitude da função cosseno. Se b aumenta, a amplitude do gráfico aumenta, e se b diminui até próximo de zero, a amplitude do gráfico também diminui.

chegamos a conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

Variação do parâmetro c:

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -3 até 3, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções f(x) =cos(x), g(x) =cos(2x), h(x) =cos(3x).

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$cos(c.x + d)$, $-3 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos(2x) e h(x) = cos(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos. Tabela 3.

Tabela- 3 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), 1 ≤ c ≤ 3, c $\in Z$.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos(2x)	R	[-1, 1]	1	π
h(x)=cos(3x)	R	[-1, 1]	1	$\frac{2\pi}{3}$

Fonte: Do próprio autor

Observando os gráficos construídos no Geogebra, há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1

Quando aumenta-se o valor de c > 1, o período diminui com relação ao valor inicial. Quando 0 < c < 1, a função tem seu período aumentado

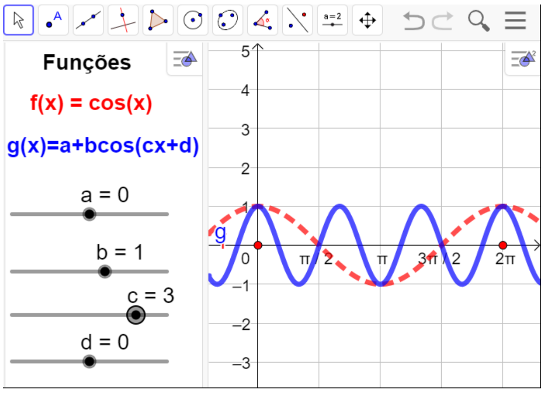
Quando −1 < c < 0, o período diminui

Quando c < -1, o período aumenta.

Conclusão: O parâmetro c altera o período da função cosseno

Construindo o gráficos da função h(x)=cos(3x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 13.

Figura - 13 - h(x) = cos(3x)



Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=cos(3.x) no aplicativo

O gráfico construído no Geogebra, há uma compressão horizontal.

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico h(x)=cos(3.x) tem uma compressão horizontal.

Construindo os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d) no aplicativo Geogebra, haverá um alongamento horizontal se valor do parâmetro ´´c``, estiver entre 0 e 1.

Observando os gráficos da função g(x)=a+b.cos(c.x+d), e manipulando os parâmetros a=0, b=1, 0 < c < 1, e d=0, construídos no aplicativo do Geogebra, isto é, f(x)=cos(x), g(x)=cos($\frac{1}{2}$x) e h(x)=cos($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = $cos(c.x)$, $0 < c < 1$, c∈R, identificando, o domínio, imagem, amplitude e período, tabela 4.

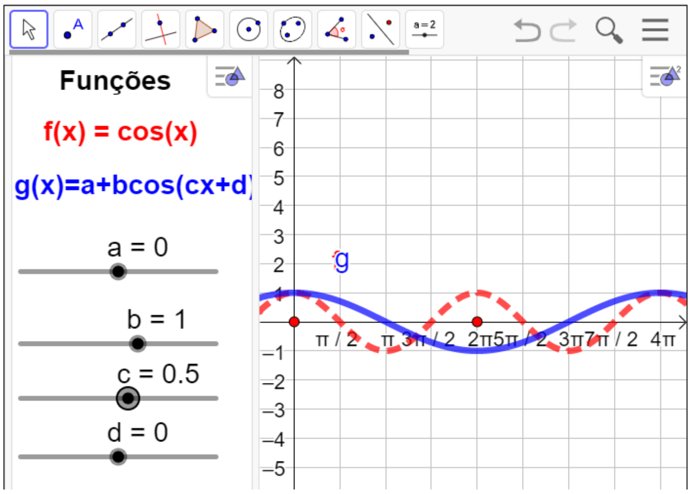
Tabela- 4 - Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = cos(c.x), $0 < c < 1$, c $\in R$.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos($\frac{1}{2}x$)	R	[-1, 1]	1	4π
h(x)=cos($\frac{1}{3}x$)	R	[-1, 1]	1	6π

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=cos($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 14.

Figura - 14 - Gráficos, f(x) = cos(cx), $0 < c < 1$.



Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

Chegamos a conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=cos($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal

Vamos analisar o parâmetro ´´c``, variando de -1 < c < 0.

Analisando os gráficos da função g(x)=cos(c.x), se o valor do parâmetro ´´c``, estiver entre - 1 e 0, ou seja, -1 < c < 0. Os alunos deverão chegar a conclusão que, haverá um alongamento composto com reflexão em relação ao eixo vertical, Construindo os seguintes gráficos no aplicativo do Geogebra e observando as suas modificações f(x)=cos(cx), isto é, g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$), h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$), em relação a função f(x)= cos(x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos.

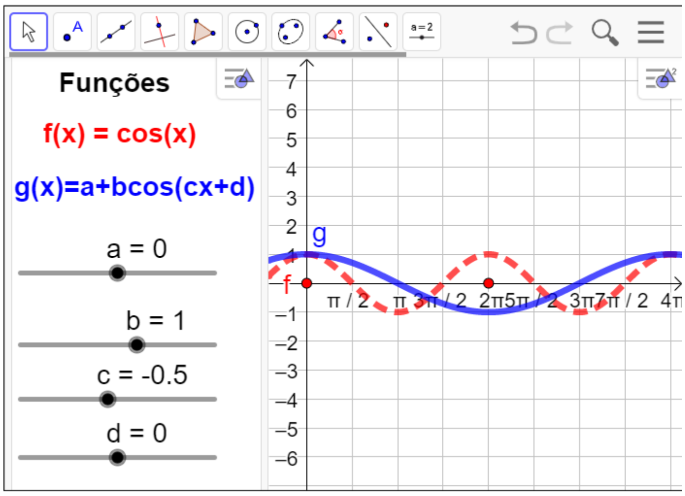
Tabela - 5 - Domínio, imagens, Amplitude e período, f(x)=cos(cx), $-1 < c < 0$.

Funções	Domínio	Imagens	Amplitudes	Períodos
f(x)=cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos($-\frac{1}{2}x$)	R	[-1, 1]	1	4π
h(x)=cos($-\frac{1}{3}x$)	R	[-1, 1]	1	6π

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 15.

Figura - 15 - Gráficos de g(x)= cos($-\frac{1}{2}$x), -1< c < 0.



Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p = $\frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} \rightarrow p = 2\pi.|2| \rightarrow p = 4\pi$
- haverá um alongamento do gráfico, no eixo horizontal.

Observando os gráficos construídos no aplicativo do Geogebra, se o valor do parâmetro ´´c``, for menor que -1, ou seja, c < -1. há uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

Construindo os seguintes gráficos g(x)=cos($-2x$), h(x)=cos($-4x$) no aplicativo, e observando as suas modificações, em relação a função f(x)= cos(x), encontraremos domínio, imagem, amplitude e período, tabela 5.

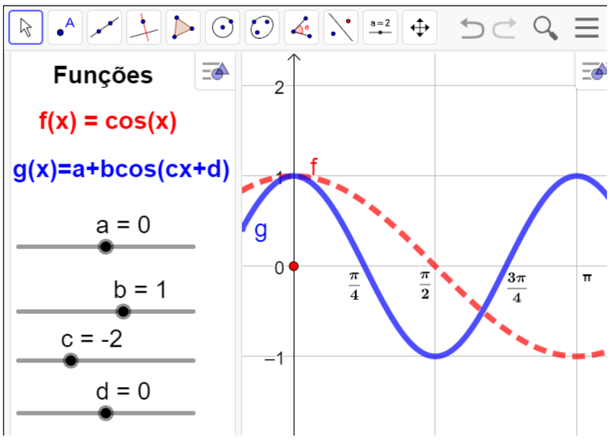
Tabela - 6 - O domínio, imagem, amplitude e período de f(x)=cos(c.x)., c=-2, c=-4.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos(-2x)	R	[-1, 1]	1	π
h(x)=cos(-4x)	R	[-1, 1]	1	$\frac{\pi}{2}$

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(-2x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =-2, a=0, b=1 e d=0, temos figura 16.

Figura - 16 - Gráfico f(x) = cos(cx), c = - 2,



Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de construída, isto é, observando as modificações das funções, g(x) e f(x), os alunos deverão chegar a conclusão que:

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1

- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{|-2|} \rightarrow p = \pi$
- Na construção do gráfico, há uma compressão horizontal.

Variação do parâmetro d

O experimento didático serve para os alunos observarem, o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função, g(x)=a +b.cos(c.$x + d$).

Construídos os gráficos das funções g(x), arrastando os parâmetros $-\pi \leq d \leq \pi$, observe-se que:

O parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

O parâmetro ´´d`` determina uma translação horizontal no sentido positivo do eixo x (para a direita), se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo, ou seja, d < 0.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) = a+b.$cos(c.x + d)$, devido às alterações dos parâmetros, isto é, f(x) = cos(x), g(x) = (x + $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos(x+ π), g(x) = cos(x - $\frac{\pi}{2}$), h(x) = cos(x - π), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos, na tabela 7,

Tabela - 7 - Funções f(x) = a+b.cos(c.x + d), a=0, b=1, c=1, $-\pi \leq d \leq \pi$.

Funções	Domínios	Imagens	Amplitudes	Períodos
f(x)=cos(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos(x+$\frac{\pi}{2}$)	R	[-1, 1]	1	2π
h(x)=cos(x+π)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=cos(x-$\frac{\pi}{2}$)	R	[-1, 1]	1	2π
h(x)=cos(x-π)	R	[-1, 1]	1	2π

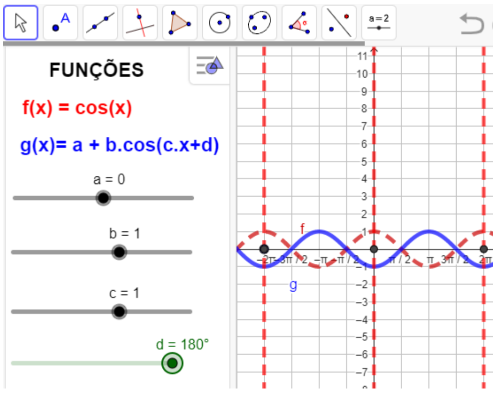
Fonte: do próprio autor

Visualizando os gráficos construídos observe-se que, o parâmetro ´´d``, determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0. Determina uma translação horizontal no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), se o valor do parâmetro ´´d`` for positivo, ou seja, d > 0.

No experimento didático, vamos construir os gráficos da função g(x) =a+b.cos(c.x+d), alterando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d variando de -π, até π, no aplicativo do geogebra, para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, em relação a função, f(x)=cos(x).

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x+π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e d=π, temos a figura 17.

Figura - 17 - Gráfico g(x)=cos(x+π), a=0, b=1, c=1 e d=180^0

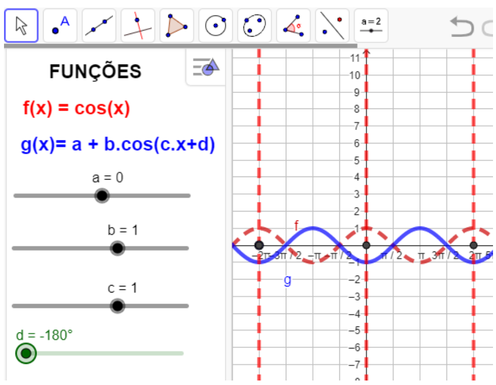


Fonte: Do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), porque d>0.

Construindo o gráficos da função g(x)=cos(x-π) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=0, b=1 e $d = -\ \pi$, temos figura 18.

Figura - 18 - Gráfico g(x)=cos(x-π), a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 180^0$



Fonte: do próprio autor

O gráfico estabelece uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), porque o parâmetro ´´d`` é negativo, isto é, d < 0

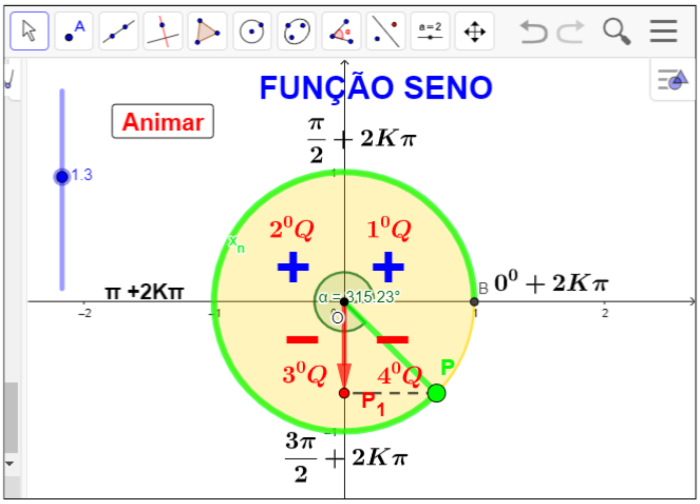
2.7 ATIVIDADE - 7 - ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e propriedades da função seno no ciclo trigonométrico figura 19. Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8 e responda.

Figura - 19 - Função seno no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quais quadrantes o seno é positivo ?

2º) Quais quadrantes o seno é negativo ?

3º) Qual o valor da imagem do seno de $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$?

4º) Faça uma tabela que contenha os seno dos arcos, 0^0, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, com suas respectivas imagens.

5º) Qual o seno de 20π rad ?

6º) Quando o ponto P_n gira várias vezes na circunferência de comprimento $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, são características de funções periódicas. Então qual é o período da função f(x)=sen(6π)?

7º) O ponto P_n, deslocando de $\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, a projeção do ponto P_n sairá de -1, e se deslocará até a origem dos eixos das coordenadas, O seno neste local é ?

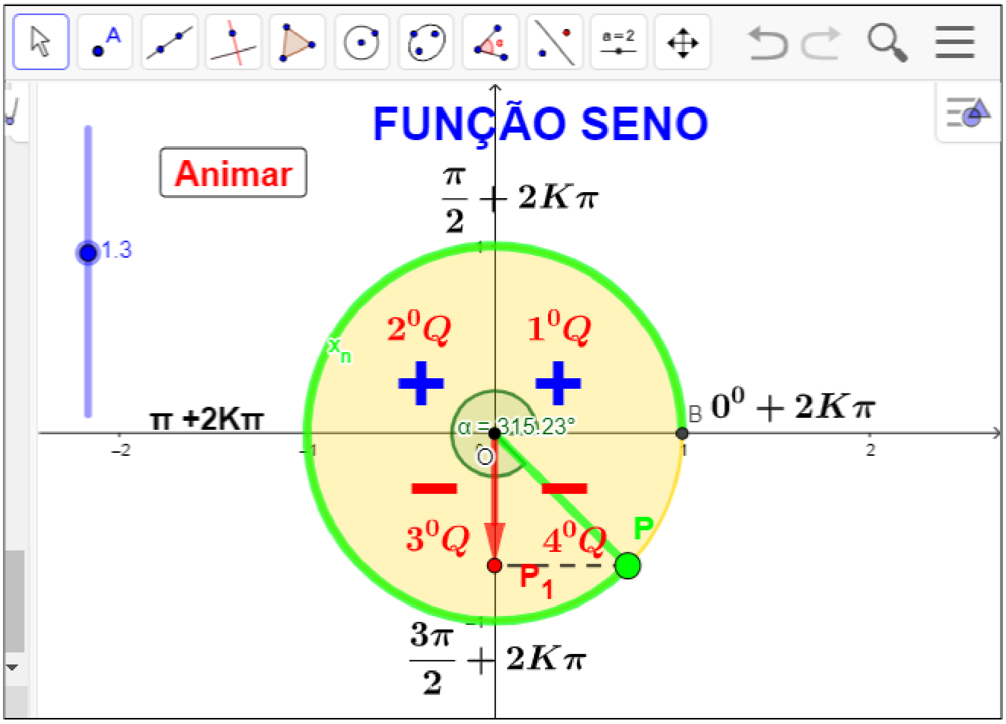
2.7.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função seno

De posse do aplicativo https://www.geogebra.org/m/gxgmp4k8, abra aplicativo, clique no botão < Animar > e arraste o controle deslizante.

O ponto P se movimenta no sentido anti-horário, se clicar no botão < Animar > e arrastar o controle deslizante para valores positivos.

Se arrastar o controle deslizante para valores negativos, o ponto P, movimento no sentido horário, figura 20.

Figura - 20 - Função seno no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

2.7.2 Sugestões para o desenvolvimento do aplicativo

Ao clicar no botão < Animar >, e arrastar o controle deslizante, os alunos serão convidado a observar:

O ponto P, que está no primeiro quadrante, vai girar no ciclo trigonométrico no sentido anti-horário, então a sua projeção em relação a ordenada, é o ponto P_1, então o segmento $\overline{OP_1}$, será a definição da função seno do arco x_n, isto é:

$\overline{OP_1}$ = sen(x_n).

Sobre os seus quadrantes, valores negativos, nulos ou positivos crescentes ou decrescentes.

1. O ponto P, sairá da origem O=(0,0), portanto, neste local o valor do seno do arco x_n, que está na origem é zero, isto é: sen(0^0)= 0.

2. O ponto P irá até o ponto B=(0,1), a sua projeção o ponto P_1, terá como medida o raio, (R = 1) ou seja, o seno do arco de medida $\frac{\pi}{2}$ é igual a 1(um), isto é: sen($\frac{\pi}{2}$)= 1, portanto, no primeiro quadrante, a função seno é CRESCENTE.

3. O ponto P , continuará o percurso no segundo quadrante, saindo de $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \pi$, a projeção do ponto P , sairá do ponto B=(0,1), e se deslocará até a origem O=(0,0), logo o sen do arco de medida (π) é 0(zero), isto é sen(π)=0. Portanto no segundo quadrante a função seno é decrescente.

4. O ponto P, continuará o percurso no **terceiro** quadrante, a projeção do ponto P em relação a ordenada, se deslocará de zero (origem) até −1, portanto, o seno do arco de medida $\frac{3\pi}{2}$ é -1, isto é: sen($\frac{3\pi}{2}$) = -1, e a função é decrescente.

5. O ponto P, continuará o percurso no **quarto** quadrante, a projeção do ponto P, em relação a ordenada, se deslocará de -1 até a origem, O = (0,0), quando à medida que o arco x_n se desloca de $\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$, então do seno de um arco de medida 2π, é igual a zero, isto é: sen(2π) $= 0$, e a função é crescente.

Manuseando o aplicativo Geogebra ao clicar no botão < Animar > podemos observar:

- Se o ponto P estever, no primeiro ou segundo quadrantes, a sua projeção será positiva, então o seno nestes quadrante será POSITIVO.
- Quando o ponto P estiver, no terceiro ou quarto quadrante a sua projeção será negativa, o seno nestes quadrantes será NEGATIVO.

A função seno é limitada, ela varia de -1 até 1, isto é: a sua imagem varia de $-1 \leq y \leq 1.$

Se o ponto P girar várias vezes no ciclo trigonométrico que vamos denominar de K, então os números reais x_n e $x_n + 2k\pi$, para k inteiro, têm a mesma imagem na circunferência trigonométrica e, portanto, sen(x_n)= sen ($x_n + 2k\pi$), k ϵ Z.Assim,a função seno é periódica e seu período é 2π.

2.8 ATIVIDADE -.8 -.ENTENDENDO A FUNÇÃO SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E NO PLANO CARTESIANO

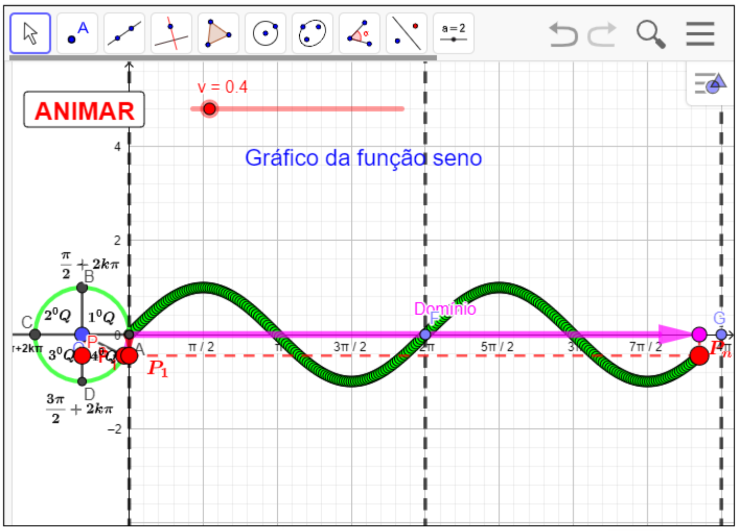
Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar os conceitos, definição e construção do gráfico da função seno, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 21.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc`` e responda.

Figura - 21- Gráfico da função seno



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função seno?

2º) A função seno assume valores positiva e negativa no intervalo 0 < x < 4π, quais intervalos no plano cartesiano, correspondente esta situação ?

3º) O valor da expressão $\text{sen}(0^0) + \frac{3}{5}\text{sen}(\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(4\pi)$?

4º) Construa o gráfico e identifique domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x)=sen(x)

2.8.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo para construção do gráfico da função seno.

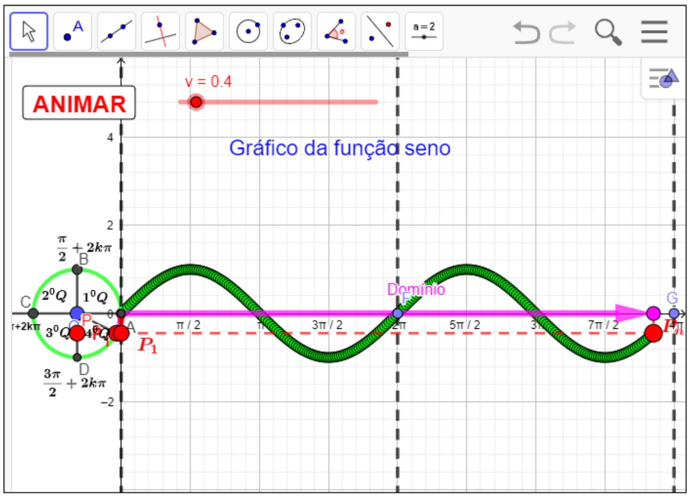
1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/kpfwwvjc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >.

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação.

O aplicativo visualiza a construção do gráfico da função seno, associado ao ciclo trigonometria, figura 22.

Figura - 22 - Gráfico da função seno



. Fonte: Do próprio autor

Para continuar a nossa experiência, vamos lembrar se algumas propriedades características importante da função f(t) = sen(t),

- A função é **positiva para os ângulos do 1° e 2°** quadrantes(projeções na reta y acima da origem);
- A função é **negativa para os ângulos do 3° e 4°** quadrantes (projeções na reta y abaixo da origem).
- A função seno é **crescente no 1° e 4°** quadrantes;
- A função seno é **decrescente no 2° e 3°** quadrantes
- Domínio é R, e a Imagem é o intervalo $[-1, 1]$.
- A função seno é periódica e seu período é 2π, pois t e t + 2k têm a mesma imagem P no ciclo, então, $sen(t) = \text{sen}\,(t + 2k\pi)$.

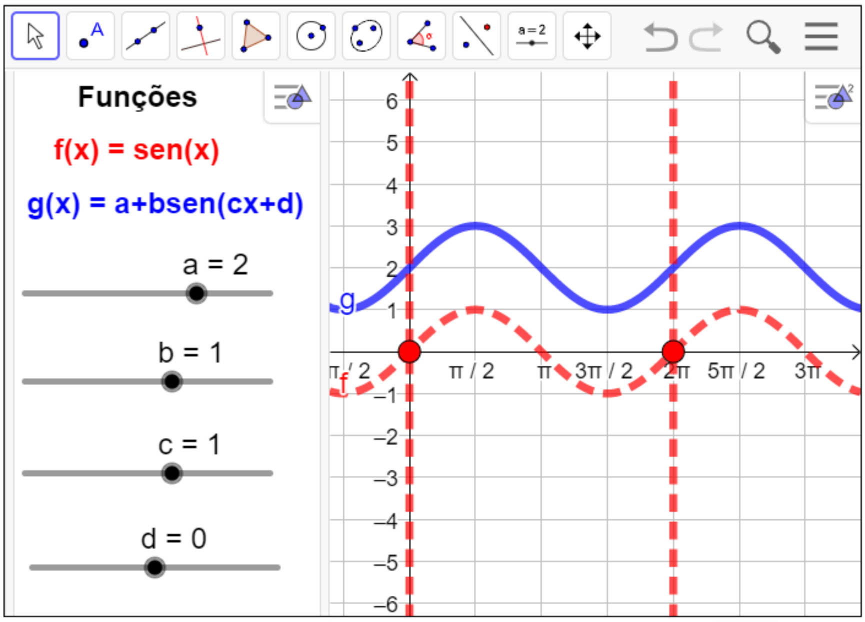
2.9 ATIVIDADE - 9 - ESTUDO DOS PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático, tem como objetivo consolidar a construção dos gráficos da função seno no software Geogebra e manipular os seus parâmetros, e visualizar as animações no aplicativo figura 23.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq. e responda

Figura - 23 - Parâmetro da função g(x) = $a + bsen(cx + d)$



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Construa o gráfico da função f(x) = 2+sen(x), e identifique o domínio, imagens, amplitude e período?

2º) Construa o gráfico da função f(x) = 3sen(x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

3º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(-2x), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

4º) Construa o gráfico da função f(x) = sen(x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

5º) Construa o gráfico da função f(x) = 2 + 3 sen(-2x + π), identifique o domínio, imagem, amplitude e período ?

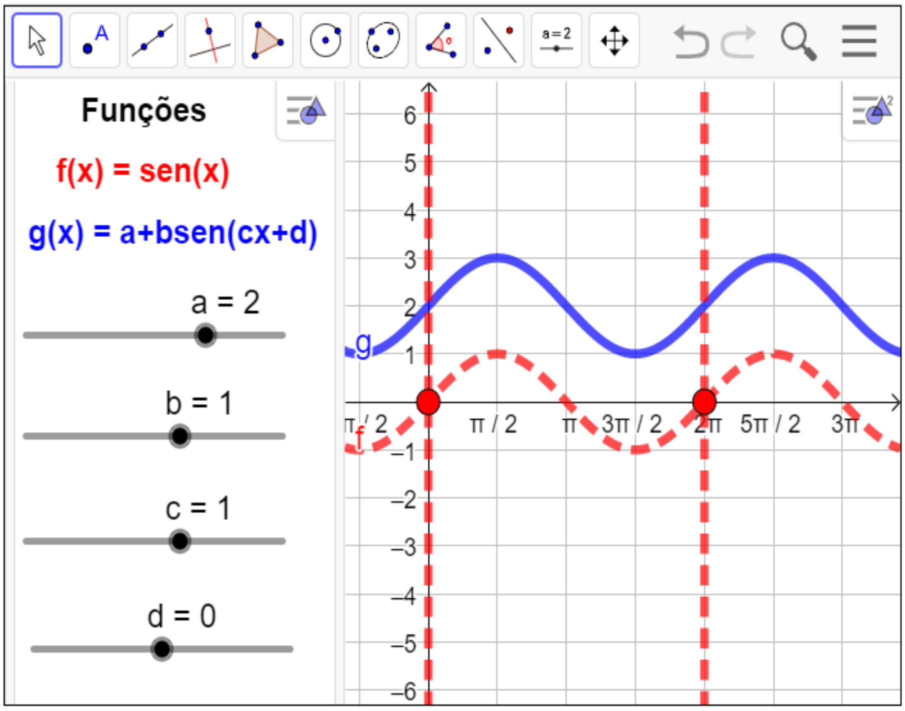
2.9.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função seno.

1º) Abra o aplicativo https://www.geogebra.org/m/wqvvm6wq.

2º) Arraste os parâmetros para a função ´´g`` se movimentar.

Vamos fazer um experimento didático com as funções trigonométricas f(x)=sen(x) e g(x)=a+b.sen(c.x+d), onde a, b, c, d são constantes denominados parâmetros, figura 24.

.Figura - 24 - Parâmetros da função seno



Fonte: Do Próprio autor

2.9.2 Estudo dos parâmetros da função seno

Variação do parâmetro a:

Observando as construções dos gráficos da função f(x)=a+sen(x) no aplicativo do Geogebra, com variações do parâmetro´´a``, chegamos a conclusão que o parâmetro ´´a`` é a soma das ordenada de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, temos como resultado um deslocamento vertical.

Vamos fazer um experimento com a função do tipo g(x)=$a + sen(x)$, a seguir apresentaremos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x)=a+bsen(cx+d), fixando os parâmetros, b=1, c=1, d=0 e $-3 \leq a \leq 3$, b∈Z, isto é, f(x)=sen(x), t(x)=1+sen(x), h(x)=2+sen(x), r(x)=3+sen(x), s(x)=-1+sen(x), p(x)=-2+sen(x), q(x)=-2+sen(x), para análise do domínio, imagem, amplitude, período das funções, tabela 8.

Tabela - 8 - f(x) = a + sen(x), com -3 ≤ a ≤ 3, a ∈ Z.

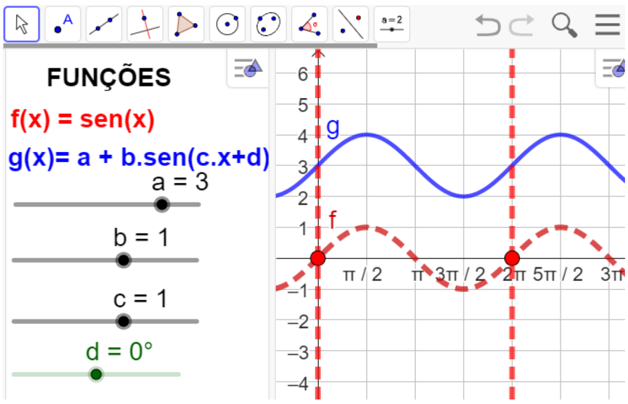
Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
t(x)=1+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
h(x)=2+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
r(x)=3+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
s(x)=-1+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
p(x)=-2+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
q(x)=-3+sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π

Fonte: Do próprio autor

Observa-se que não houve variação no domínio, imagens, amplitude e período das funções. Houve um deslocamento dos gráficos para cima ou para baixo.

Construindo o gráfico da função g(x)=3+sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =1, a=3, b=1 e d=0, para analisar do parâmetro ´´a`` da função, f(x) = $3 + sen(x)$figura 25.

Figura - 25 - Gráfico da função f(x)=3+sen(x).



Fonte: Do próprio autor

- Observa-se que o gráfico, desloca no eixo vertical para cima.
- Imagem da função, Im(g)={y$\epsilon R/2 \leq y \leq 4\}$.
- Domínio são os números reais.
- Período é 2π.

Variação do parâmetro b:

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, manipulando os parâmetros, $-5 \leq b \leq 5$, fixando a=0, c=1 e d=0, para construir alguns gráficos da função g(x) =a+b.sen(c.x+d).

Observando a construção de alguns gráficos da função g(x)= a+b.sen(c.x+d), no aplicativo com variação do parâmetro ´´b", chega-se à conclusão que o gráfico, tem um deslocamento vertical.

Na tabela, a seguir apresenta algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+ $bsen(cx + d)$, onde b varia de -3 até 3, isto é, $-3 \leq b \leq 3$, b∈Z, a=0, c=1 e d=0, tabela 9.

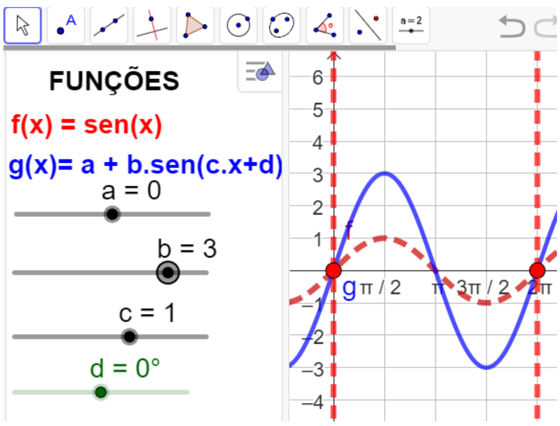
Tabela 9 - Domínio, imagem, amplitude e período da função, g(x) =bsen(x), b∈ Z.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x) = sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x) = 2sen(x)	R	[-2, 2]	2	2π
h(x) = 3sen(x)	R	[-3, 3]	3	2π
p(x) = - sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
q(x) = -2sen(x)	R	[-2, 2]	2	2π
r(x) = -3sen(x)	R	[-3, 3]	3	2π

Fonte Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=3sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros b=3, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 26.

Figura - 26 - Gráfico h(x)=3sen(x)



Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=3.sen(x), temos:

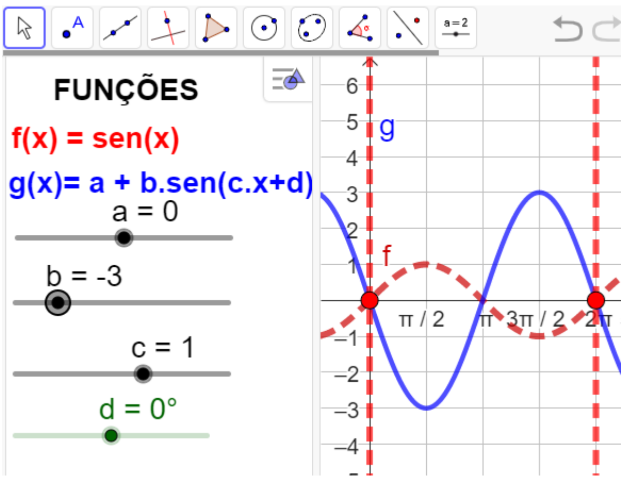
- Domínio da função seno, são todos os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

Modificando o parâmetro b, neste caso, além da imagem ser alterada, a amplitude do gráfico também muda.

A função seno tem sua flutuação quando b > 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser crescente, decrescente, decrescente e crescente.

Construindo o gráficos da função r(x)=-3 sen(x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros $b\ =\ 3$, a=0, c=1 e d=0, temos como imagem a figura 27.

Figura - 27 - Gráfico da função r(x)=-3sen(x)



Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função r(x)= -3.sen(x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 3 ≤ y ≤ < 3}.
- A amplitude da função é 3
- Período é 2π

A função seno tem sua flutuação invertida quando b < 0, ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

Variação do parâmetro c:

No aplicativo do Geogebra entregue aos participantes, vamos arrastar o parâmetro c, variando de -5 até 5, fixando, a=0, b=1 e d=0, para construir os gráficos das funções g(x)=a+b.sen(c.x+d), e comparar com a função f(x)=sen(x)

Depois de construídos os gráficos no Geogebra os alunos será convidados a analisar o parâmetro ´´c``, isto é, o parâmetro ´´c`` determina o alongamento ou a compressão horizontal do gráfico e, por consequência, determina também o intervalo em que a gráfico se repete.

Vamos fazer um experimento didático no Geogebra, para analisar o parâmetro ´´c`` das funções f(x) = $sen(cx)$, onde, $-5 \leq c \leq 5$, c ϵ Z.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, $1 \leq c \leq 3$, c∈Z, isto é, f(x)=sen(x), g(x)=sen(2x) e h(x) = sen(3x), podemos encontrar o domínio, imagem, amplitude e período dos seguintes gráficos para c > 0, tabela 10.

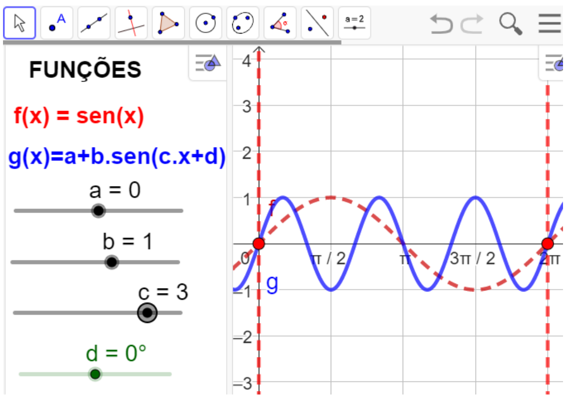
Tabela-10- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), $1 \leq c \leq 3$, c $\in Z$.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
f(x)=sen(x)	R	[-1, 1]	1	2π
g(x)=sen(2x)	R	[-1, 1]	1	π
h(x)=sen(3x)	R	[-1, 1]	1	$\frac{2\pi}{3}$

Fonte: Do próprio autor

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c = 3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 28.

Figura - 28 - Gráfico da função h(x)=sen(3x)



Fonte: Do próprio autor

Observando a construção do gráfico da função h(x)=sen(3x), temos:

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

A construção do gráfico h(x)=sen(3x), houve uma compressão horizontal, composta com reflexão em relação ao eixo vertical.

A seguir, temos algumas respostas que se esperam dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, $-3 \leq c \leq -1$, c∈Z, isto é, vamos construir uma tabela para analisarmos o domínio, imagem, amplitude, período das funções f(x)=sen(x), g(x)= sen(-x), h(x)=sen(-2x), p(x)=sen(-3x).

Tabela -11 - função f(x) = sen(c.x), com -3 < c < -1.

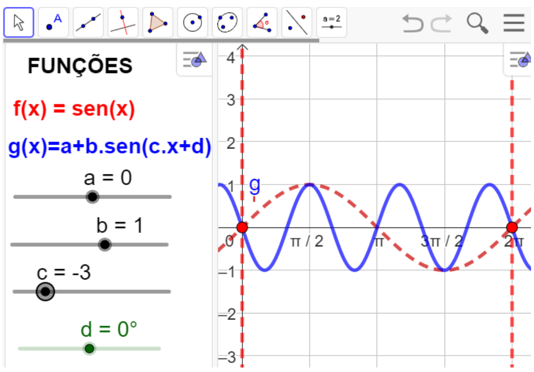
Função	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
g(x)= sen(-x)	R	[-1, 1]	1	2π
h(x)=sen(-2x),	R	[-1, 1]	1	π
p(x)=sen(-3x)	R	[-1, 1]	1	$\frac{3\pi}{2}$

Fonte: Do próprio autor

Observando na tabela que consta a função seno, variando o parâmetro ´´c``, chega-se à conclusão que há variação do período.

Construindo como exemplo o gráficos da função h(x)=sen(-3x) no aplicativo, arrastando os parâmetros $c =- 3$, a=0, b=1 e d=0, temos como imagem a figura 29.

Figura - 29 - Gráfico da função p(x)=sen(-3x)



Fonte: Do próprio autor

A função p(x)=sen(-3x), tem sua flutuação invertida quanto ao gráfico da função h(x)=sen(3x), ou seja, o comportamento do gráfico passa a ser decrescente, crescente, crescente e decrescente.

- Domínio da função são os números reais.
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é $\frac{2\pi}{3}$

Construindo os gráficos g(x)=a+b.sen(c.x+d), arrastando os parâmetros $0 < c < 1$, a=0, b=1, d=0. no Geogebra, haverá um alongamento horizontal.

Observando os gráficos construídos no Geogebra, na tela de visualização, isto é, g(x)=sen($\frac{1}{2}$x) e h(x)=sen($\frac{1}{3}$x), temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos, identificando, o seu domínio, imagem, amplitude e período, tabela 12.

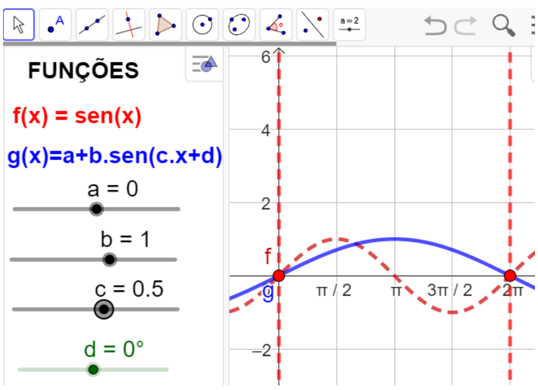
Tabela-12- Domínio, Imagens, Amplitude, Período, f(x) = sen(c.x), 0 < c < 1, c $\in R$.

Funções	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
g(x)=sen($\frac{1}{2}x$)	R	[-1, 1]	1	4π
h(x)=sen($\frac{1}{3}x$)	R	[-1, 1]	1	6π

Fonte: Do próprio autor

Construindo o gráficos da função h(x)=sen($\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, isto é, arrastando os parâmetros c =$\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, temos figura 30.

Figura - 30 - Gráfico g(x)=sen($\frac{1}{2}x$)



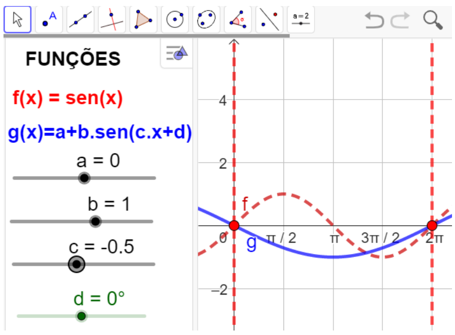
Fonte: Do próprio autor

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Chega-se à conclusão que o parâmetro ´´c``, do gráfico f(x)=sen($\frac{1}{2}x$), tem alongamento no eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros c =$-\frac{1}{2}$, a=0, b=1 e d=0, figura 31.

Figura - 31 - Gráfico g(x)=sen(-$\frac{1}{2}x$)



Fonte: Do próprio autor

Analisando os gráficos depois de ajustados os parâmetros no aplicativo, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p = $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \rightarrow p = 2\pi.2 \rightarrow p = 4\pi$

Os alunos chegaram à conclusão de que o gráfico da função g(x)=sen($-\frac{1}{2}x$), haverá um alongamento no eixo horizontal.

Variação do parâmetro d: `.

Este experimento didático é para os alunos observarem o que acontece quando modifica o parâmetro ´´d´´, da função g(x)=a+b.sen(c.x+d),em relação à função, f(x)=sen(x), sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq \pi$.

Depois de construídos os gráficos no aplicativo Geogebra, os participantes serão convidados a analisar o parâmetro ``d`.

A seguir, temos algumas respostas que se espera dos alunos após a observação dos gráficos das funções g(x) =a+b.$sen(c.x + d)$, sendo a=0, b=1, c=1 e $-\pi \leq d \leq 0$.

Vamos construir, os gráficos das funções g(x)= sen(x-$\frac{\pi}{2}$), h(x)=sen(x-π). para analisarmos o domínio, imagem, amplitude e período, para d < 0, tabela 13.

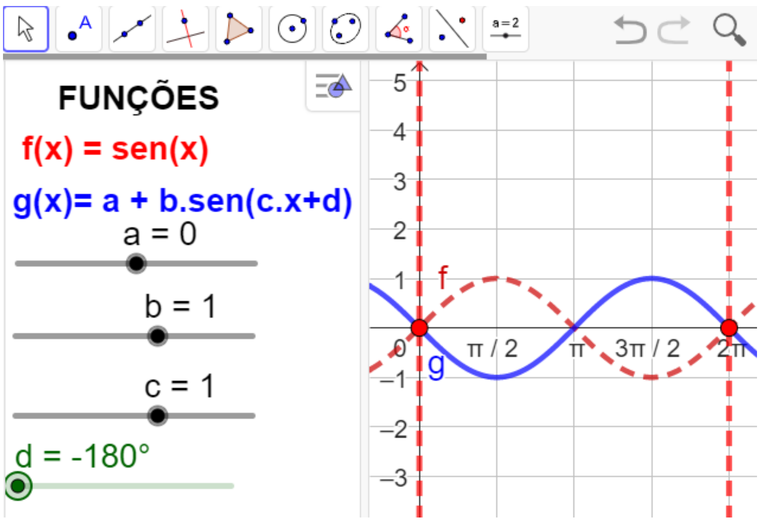
Tabela -13 - Domínio, imagens, amplitude e período, g(x) = sen(x - d), $-\pi \leq d \leq 0$.

Função	Domínio	Imagem	Amplitude	Período
p(x)=sen(x-$\frac{\pi}{2}$)	R	[-1, 1]	1	2π
h(x)=sen(x-π)	R	[-1, 1]	1	2π

Fonte: Do próprio autor.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x-π) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=− π, temos como imagem a figura 32.

Figura - 32 - Gráfico da função, h(x)=sen(x-π)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

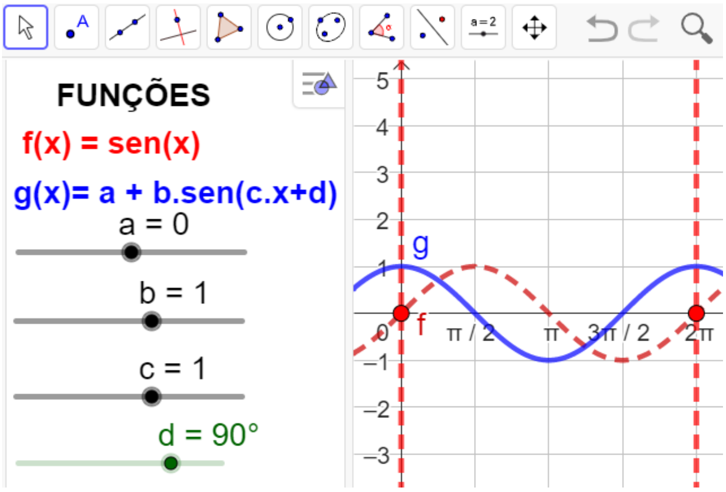
- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.

- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x - \pi$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a direita), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser negativo, ou seja, d < 0.

Visualizando a Construção do gráficos da função h(x)=sen(x+90^0) no aplicativo, arrastando os parâmetros a=0, b=1, c=1 e d=90^0, temos como imagem a figura 33.

Figura - 33 - Gráfico da função, h(x)=sen(x+90^0)



Fonte: do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída, isto é, observando as modificações da função g(x) em relação a função f(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - 1 ≤ y ≤ < 1}.
- A amplitude da função é 1
- Domínio da função, será o conjunto dos números reais.
- Período é p =2π

Os alunos chegaram à conclusão que o gráfico da função h(x)=sen($x + 90^0$), haverá uma translação horizontal, no sentido positivo do eixo x (para a esquerda), devido o valor do parâmetro ´´´d`` ser positivo, ou seja, d > 0.

Visualizando os gráficos construídos no Geogebra, chega -se à conclusão que o parâmetro ´´d``. determina uma translação horizontal no gráfico das funções trigonométricas seno, no sentido negativo do eixo x (para a esquerda), ou (para a direita) se o valor do parâmetro ´´d`` for negativo.

2.10 ATIVIDADE - 10 - ENTENDENDO A FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

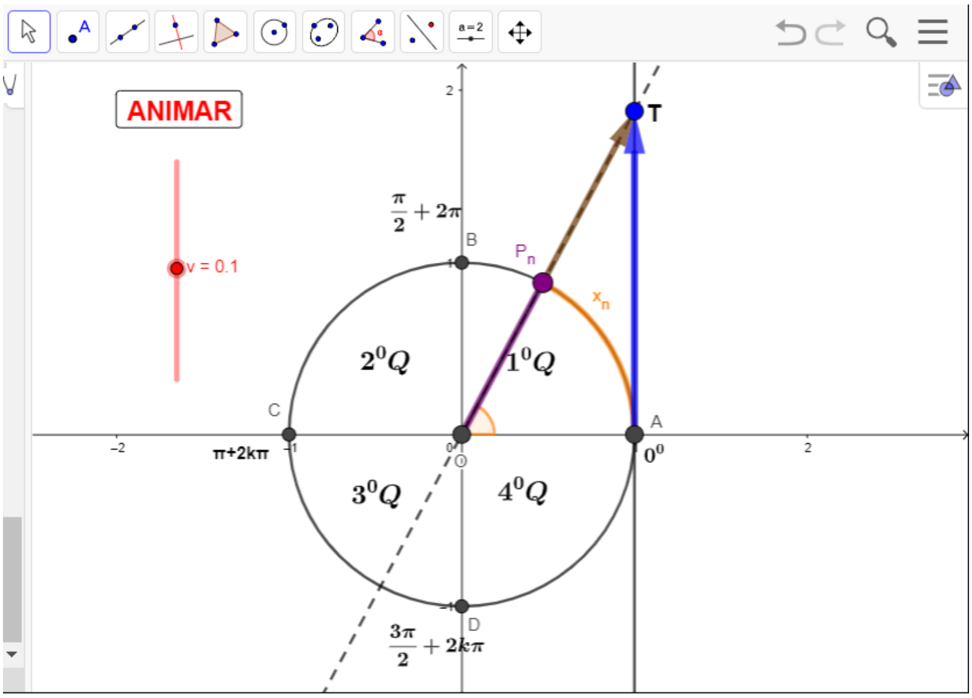
Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar a função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições no ciclo trigonométrico, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 34.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc, e responda.

Figura - 34 - Função tangente no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Quanto vale a tangente de $\pi + 2k\pi$?

2º) Em quais quadrantes a tangente é positiva ?

3º) Em quais quadrantes a tangente é negativa ?

4º) Quanto vale a tangente de $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$?

5º) Determine o domínio da função f(x) = tg(x)?

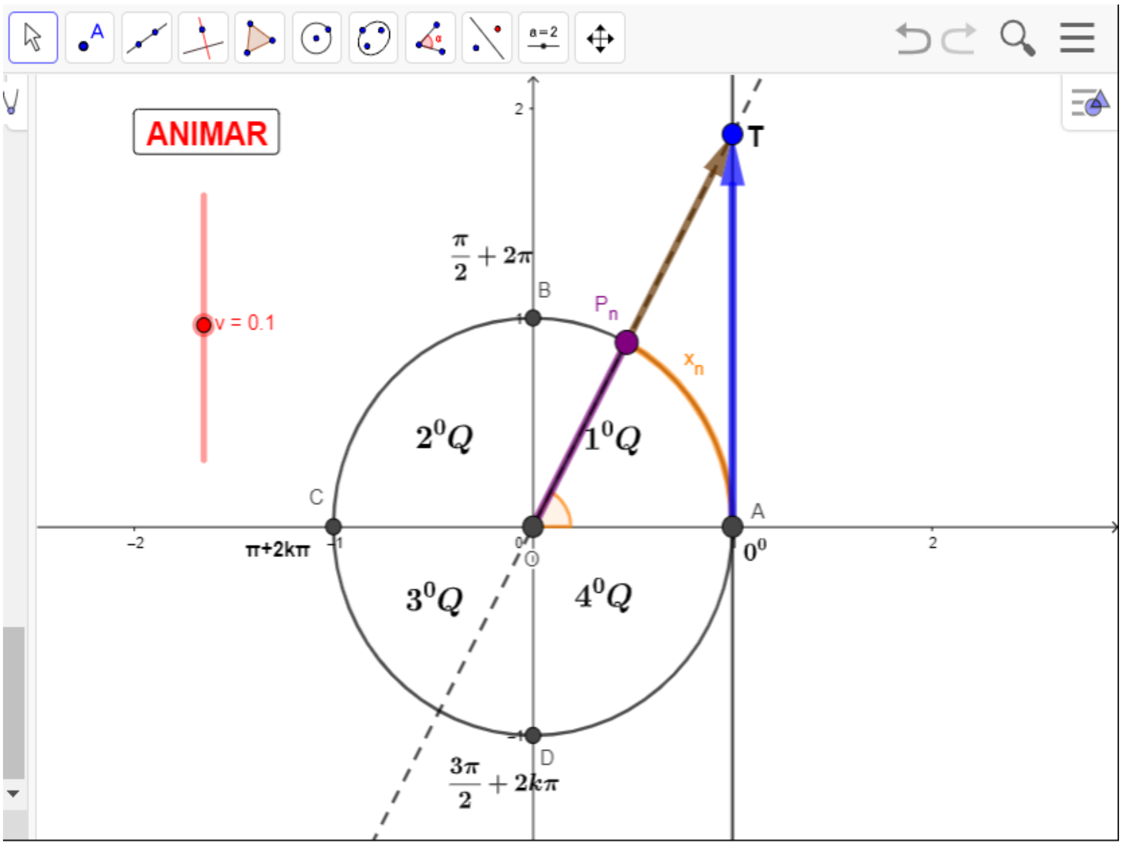
6º) Determine o período da função f(x) = tg(x) ?

7º) Determine a imagem da função f(x) = tg(x) ?

2.10.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da função tangente.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/rwdvrpgc e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 35.

Figura - 35 - Função tangente no ciclo trigonométrico



Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade e a direção da animação.

- Se v > 0, o ponto P_n, se desloca na circunferência, no sentido anti-horário.
- Se v < 0, o ponto P_n, se desloca na circunferência no sentido horário.
- Para obter a tangente de um arco, devemos observar um terceiro eixo que tangencia a circunferência no ponto A=(1,0).
- O ponto P_n e a reta que passa pela origem da circunferência O=(0,0), e que intercepta a reta perpendicular ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo y, que passa pelo ponto A=(1,0) no eixo das abcissas.

- Ao unirmos a extremidade do arco x_n, (ponto P_n), ao centro O=(0,0) e prolongando o raio da circunferência, ele intercepta o eixo das tangentes no ponto T.

Definição da função tangente

A tangente de x_n, é a medida do segmento $\overline{AT}$, obtido pela interseção do prolongamento do raio $\widehat{OP_n}$, com o eixo das tangentes.

Propriedades da função tangente

1. Para $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ o valor da tangente de x_n cresce à medida que P_n se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente.
2. Para $\frac{\pi}{2} < x_n < \pi$, a tangente de x_n, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de x_n, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
3. Para $x_n = \pi$, a tangente está na origem do eixo da tangente, então tg$(\pi) = 0$.
4. Para $\pi < x_n < \frac{3\pi}{2}$ o valor da tangente de x_n cresce à medida que P_n se desloca na circunferência no sentido anti-horário, aumenta indefinidamente
5. Para $x_n = \frac{3\pi}{2}$, a tangente não existe, porque a reta que passa pelo centro não intercepta o eixo da tangente.
6. Para $\frac{3\pi}{2} < x_n < 2\pi$, a tangente de x_n, inicialmente tende a menos infinito (-α), e cresce à medida que o valor de x_n, se aproxima de π, isto é, tg$(\pi) = 0$.
7. A tangente é positiva no $1^{º}$ e $3^{º}$ quadrantes.
8. A tangente é negativa no $2^{º}$ e $3^{º}$ quadrantes.

2.10.2 Conjunto imagem da função tangente

9. O conjunto imagem da função tangente é Im =] -∞, ∞[, ou seja o conjunto dos números reais.

2.10.3 Domínio da função tangente

10. O domínio da função tangente é D = $\{x_n \in R / x_n \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$

2.10.4 Período da função tangente

11. A função tangente se repete a cada intervalo de π, então o período é p = π.

2.11 ATIVIDADE - 11 - GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

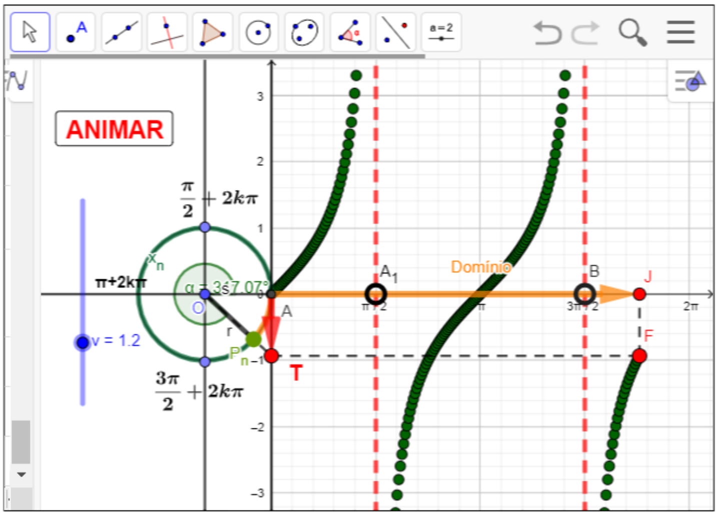
Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo, consolidar a construção do gráfico da função tangente no plano cartesiano, a partir do círculo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno a construção dos conceitos, definições, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico figura 36.

Abra o arquivo ´´https://www.geogebra.org/m/epppy3xh`` e responda.

Figura - 36 - Gráfico da função tangente.



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) Qual a imagem da função tangente?

2º) Durante a análise de uma função, Kárita encontrou uma função trigonométrica, e ficou em dúvida entre as funções f(x) = sen(x); f(x) = cos(x); e f(x) = tg(x).

I → A função possui imagem [-∞, ∞].

II → A função é trigonométrica possui período igual a π.

III → O valor numérico da função f(π/2) = não existe

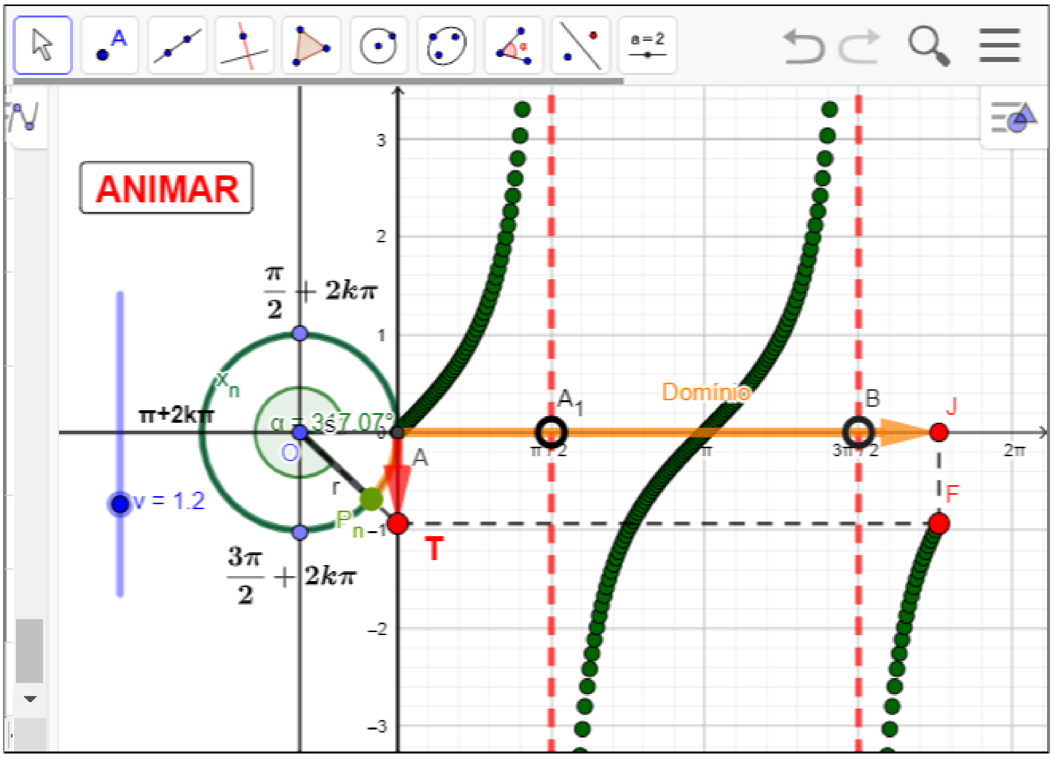
A função descrita por ela é:

3º) Construa o gráfico e identifique o domínio, imagem e o período da seguinte função, f(x) = tg(x).

2.11.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo da construção do gráfico da função tangente.

1º) Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/epppy3xh e execute o mesmo no Geogebra e utilize os botão < ANIMAR > e < v >, figura 37.

Figura - 37 - Gráfico da função tangente.



Fonte: Do próprio autor

2º) Se clicar no botão < ANIMAR >, uma vez, começa a animação, se clicar novamente a animação para,

3º) Se arrastar o controle deslizante <v> controlar a velocidade da animação no sentido anti-horário.

2.11.2 Definição da tangente utilizando o ciclo trigonométrico.

Ao clicar nos botões < Animar > e < v>, os alunos serão convidado a observar

A movimentação do ponto P_n no sentido anti-horário, existe uma reta passando pela origem do ciclo trigonometria O=(0,0), e o ponto P_n, interceptando no ponto T, na reta tangente ao círculo trigonométrico, no ponto A=(1,0). A medida do segmento $\overline{AT}$, será a tangente do ponto P_n na circunferência trigonométrica.

Transposição da tangente do ciclo trigonometria, para o plano cartesiano.

A medida do segmento $\overline{AT}$, na circunferência trigonométrica, é a tangente do ponto P_n, que passa a ser a imagem da função tangente, situada no eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Usando as informações que já tínhamos sobre a tangente na circunferência trigonométrica, e lembrando que no ponto A(1,0), é a origem da tangente no ciclo trigonométrico. Vamos dar uma volta completa no ciclo e relacionar com o plano cartesiano.

2.11.3 Construção do gráfico da função tangente no primeiro quadrante

A medida que o ponto P_n, se desloca no primeiro quadrante de 0^0 para $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, o comprimento do arco x_n no ciclo trigonométrico, corresponde ao domínio no plano cartesiano, observa-se que a tangente do ponto P_n cresce, esse valor fica ainda maior, quanto mais o domínio se aproxima de $\frac{\pi}{2}$. Dizemos, nesse caso, que o valor da tangente de x_n, tende a mais infinito (+∞), ou seja, aumenta indefinidamente.

Visualizando a manipulação do aplicativo do gráfico da função tangente, às retas onde a função não existe são chamadas de assíntotas. Ou seja, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ são assíntotas.

2.11.4 Domínio da função tangente

Logo o domínio da função tangente será todos os valores reais retirando os valores das assíntotas, isto é, D={x$\epsilon R / x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ com\ k\epsilon Z$}.

2.11.5 Período da função tangente de x_n.

É bom ressaltar que o gráfico nunca toca nas retas das assíntotas, no entanto, a função tangente se repete a cada intervalo π, logo a função tangente, f(x) = tg(x) também é periódica de período π.

2.11.6 Propriedade

A função tangente assume valores positivos no 1º e 3º quadrantes, e valores negativos no 2º e 4º quadrantes, e visualizando o gráfico da função tangente, que é crescente em todos os quadrantes.

A função tangente é crescente em todos os quadrantes.

2.12 ATIVIDADE - 12 - ENTENDENDO OS PARÂMETROS DA FUNÇÃO TANGENTE

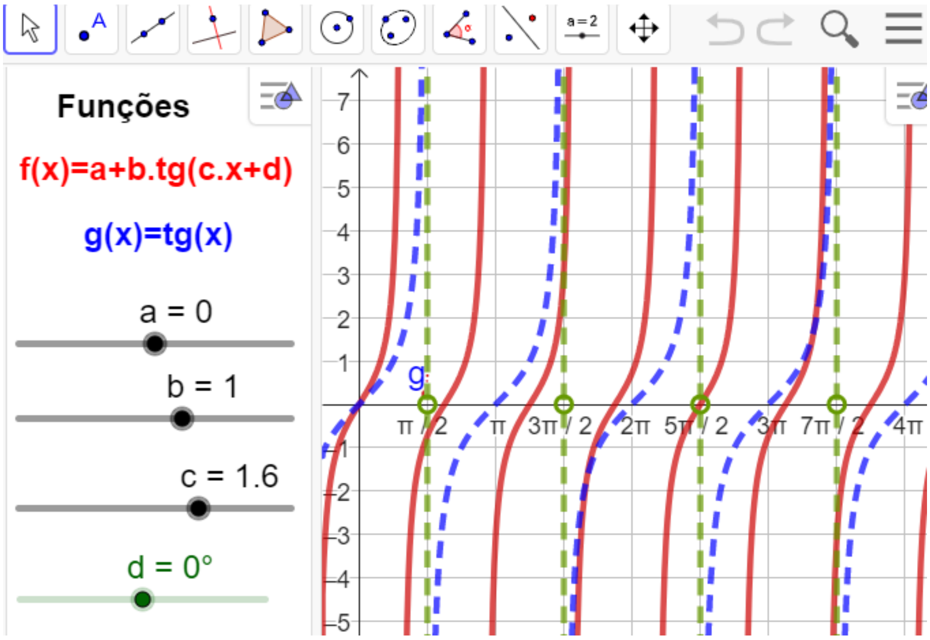
Aluno____

Objetivo

Esta atividade de um experimento didático tem como objetivo consolidar a construção do gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico, e pode proporcionar ao aluno as construções dos gráficos, identificar domínio, imagem, período no plano cartesiano, a partir da manipulação do aplicativo dinâmico.

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy e responda

Figura - 38 - Parâmetros da função, f(x) = a + b.tg(c.x+d).



Fonte: Do próprio autor

Questões:

1º) O que acontece se o valor do parâmetro a > 0, b=1, c=1 e d=0 ?

2º) O que acontece se o valor de a=0, b < 0, c=1 e d=0 ?

3º) O que acontece quando o valor de a=0, b=1, c = -4 e d=0 ?

4º) que acontece quando o valor de a=0, b=1, c=1 e d = $-\frac{\pi}{2}$?

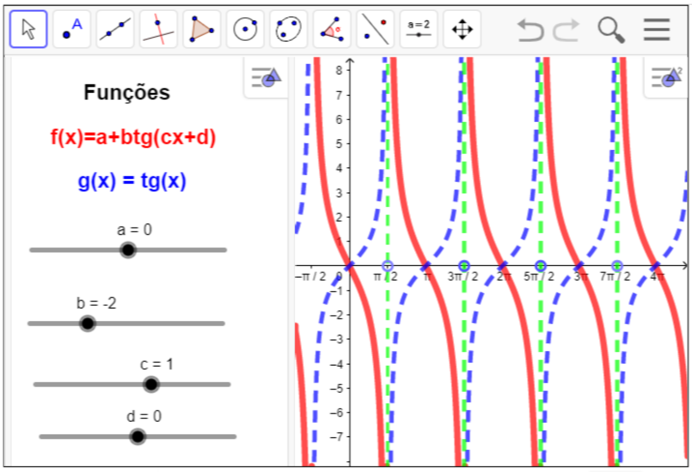
5º) Descreva o que você observa na função f(x) = a +b.tg(c.x), quando a = 0, b=1 e c=0 e d=0.

6º) Descreva o que você observa na função f(x)=a + b tg(x), quando a = 0, c=1, d=0 e quando o controle deslizante ´´b``, desliza de 0 até 5 ?

2.12.1 Procedimento para o manuseio do aplicativo dos parâmetros da função tangente.

1º) Abra o arquivo(https://www.geogebra.org/m/d4nhavdy) e execute o mesmo no Geogebra, e arraste os controles deslizantes (a, b, c, d), para observar as alterações do gráfico, figura 39.

Figura - 39 - Parâmetros da função tangentes f(x) = a + b.tg(cx + d).



Fonte: Do próprio autor

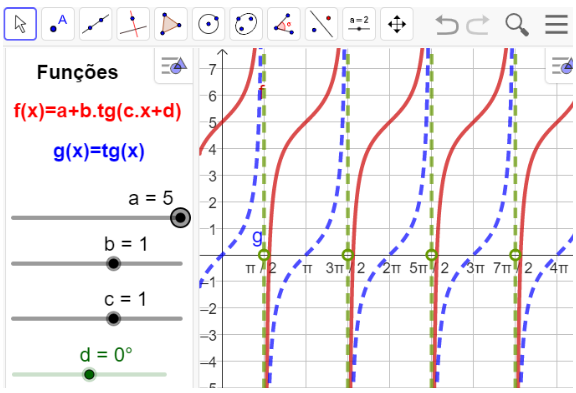
Ao abrir o aplicativo aparece no lado esquerdo os controles deslizantes com as letras a, b, c, e d, que são chamadas de parâmetros ou coeficientes, que arrastados provocará alterações no gráfico, da seguinte maneira.

Parâmetro ´´a`` , responsável por um deslocamento vertical no gráfico

- Se arrastar o parâmetro, a > 0, teremos um deslocamento vertical para cima

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=5, b=1, c=1 e d=0, figura 40.

Figura - 40 - gráfico f(x)=5+tg(x)



Fonte: Do próprio autor

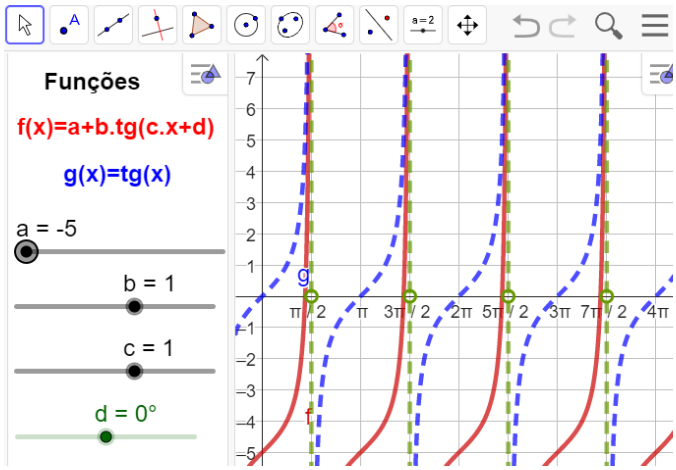
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {yϵR/ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg(x), haverá um alongamento no eixo vertical, para cima.

Se arrastar o parâmetro a < 0, teremos um deslocamento vertical para baixo

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5+tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=-5, b=1, c=1 e d=0, figura 41.

Figura - 41 - Gráfico f(x) =-5+tg(x)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

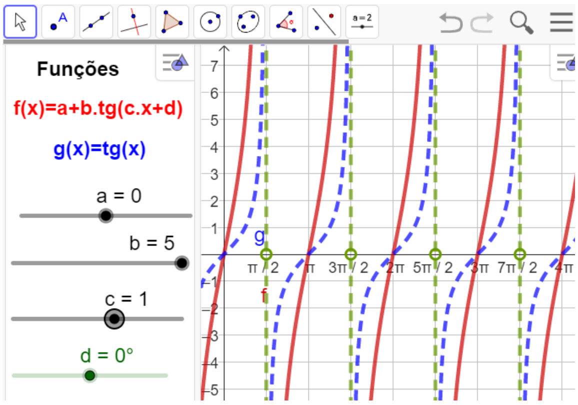
- A imagem da função será Im = {yϵR/ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5+tg(x), haverá um alongamento no eixo vertical, para baixo.

Parâmetro ´´b``, responsável pela variação da inclinação do gráfico em crescente ou decrescente.

- Se arrastar o parâmetro b > 1, o gráfico será esticado e crescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=5, c=1 e d=0, figura 42.

Figura - 42 - Gráfico f(x)=5 tg(x)



Fonte: Do próprio autor

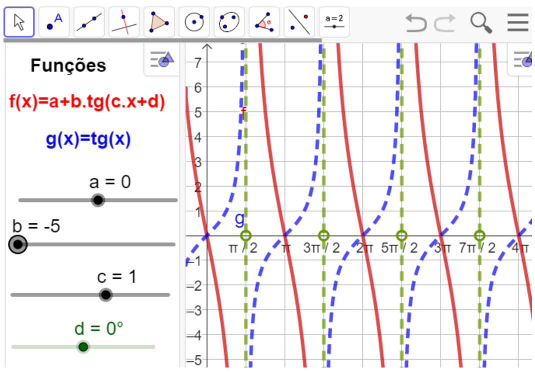
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- No gráfico da função g(x)=5tg(x), haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será crescente.

  Se arrastar o parâmetro b < -1, o gráfico será esticado e decrescente.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-5 tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-5, c=1 e d=0, figura 43.

Figura - 43 - Gráfico f(x)=-5 tg(x)



Fonte: Do próprio autor

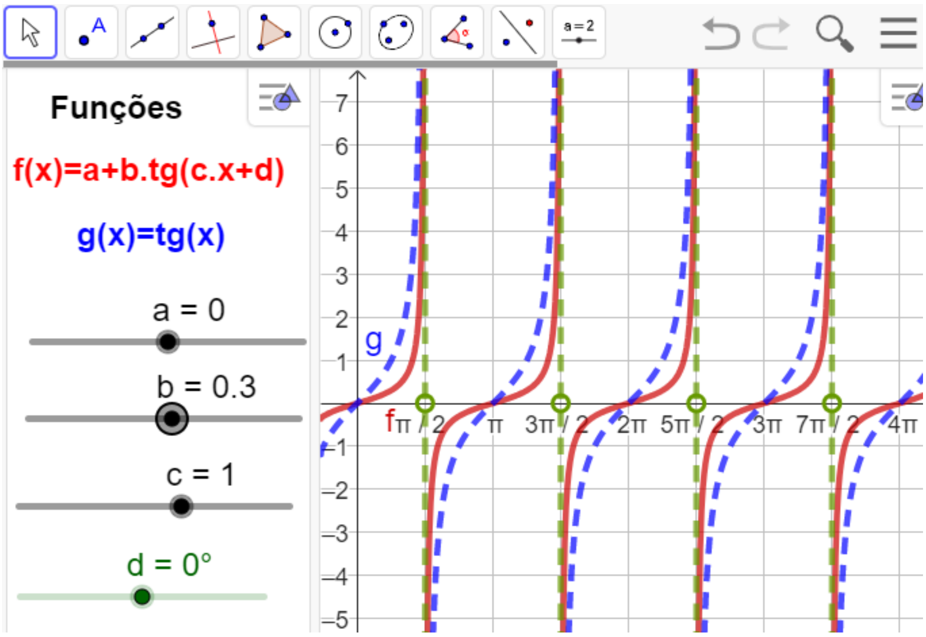
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=-5tg(x), haverá um esticamento no eixo vertical e também o gráfico será decrescente.

  Se arrastar o parâmetro 0 < b <1, o gráfico será comprimido e crescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=0.3, c=1 e d=0, figura 44.

Figura - 44 - Gráfico f(x)=0.3tg(x)



Fonte: Do próprio autor

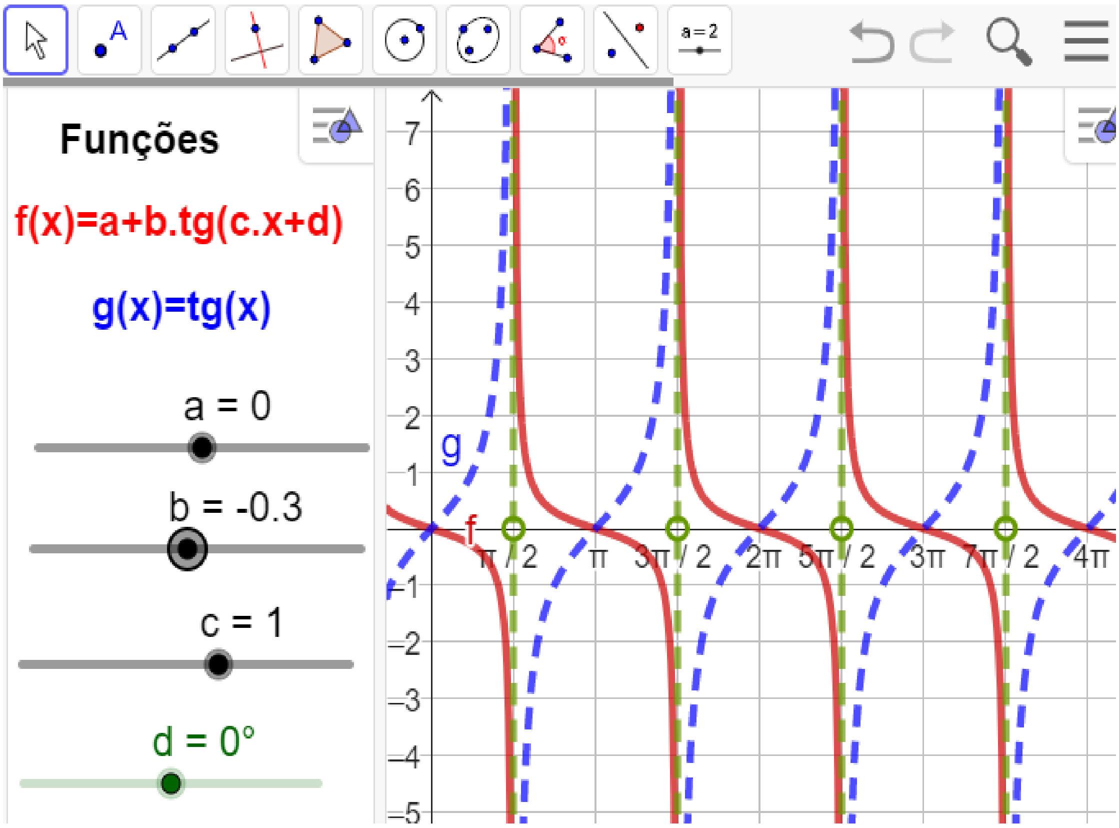
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =π
- Na tangentóide da função g(x)=0.3tg(x), o gráfico será comprimido e crescente.

  Se arrastar o parâmetro -1 < b <0, o gráfico será comprimido e decrescente

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=-0.3tg(x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=-0.3, c=1 e d=0, figura 45.

Figura - 45 - Gráfico f(x)= - 0.3tg(x)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

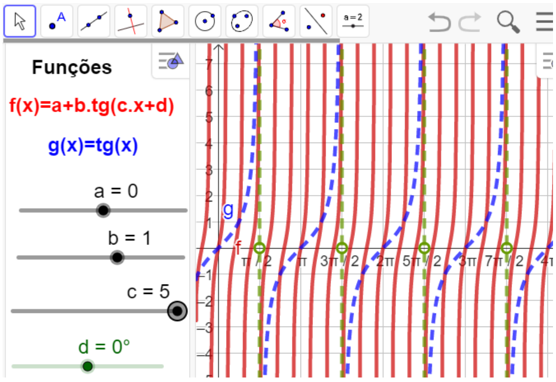
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π
- A construção da tangentóide da função g(x)=-0.3tg(x), o gráfico será comprimido e decrescente.

Parâmetro ´´c``, modifica o período da função. Esse novo período pode ser calculado por: P = $\frac{\pi}{|c|}$.

Se arrastar o parâmetro $c > 1$, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=5 e d=0, figura 46.

Figura - 46 - Gráfico f(x)=tg(5x)



Fonte: Do próprio autor

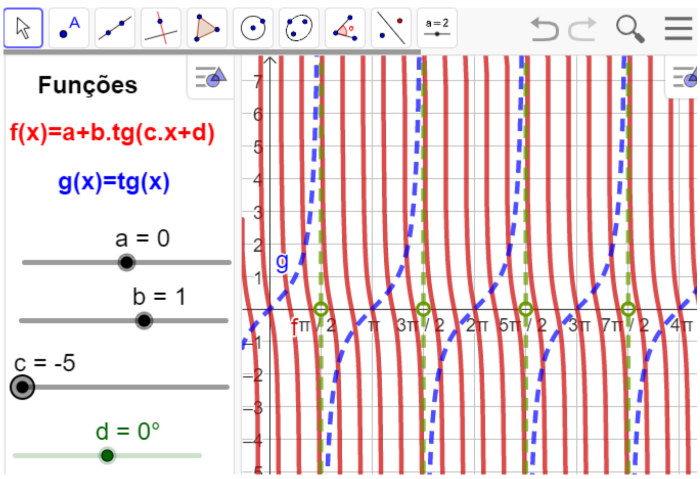
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg$(5x)$, o gráfico será comprimido horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro c < - 1, então o período da função diminui.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(-5x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-5 e d=0, temos a figura 47.

Figura - 47 - Gráfico f(x)=tg(-5x)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

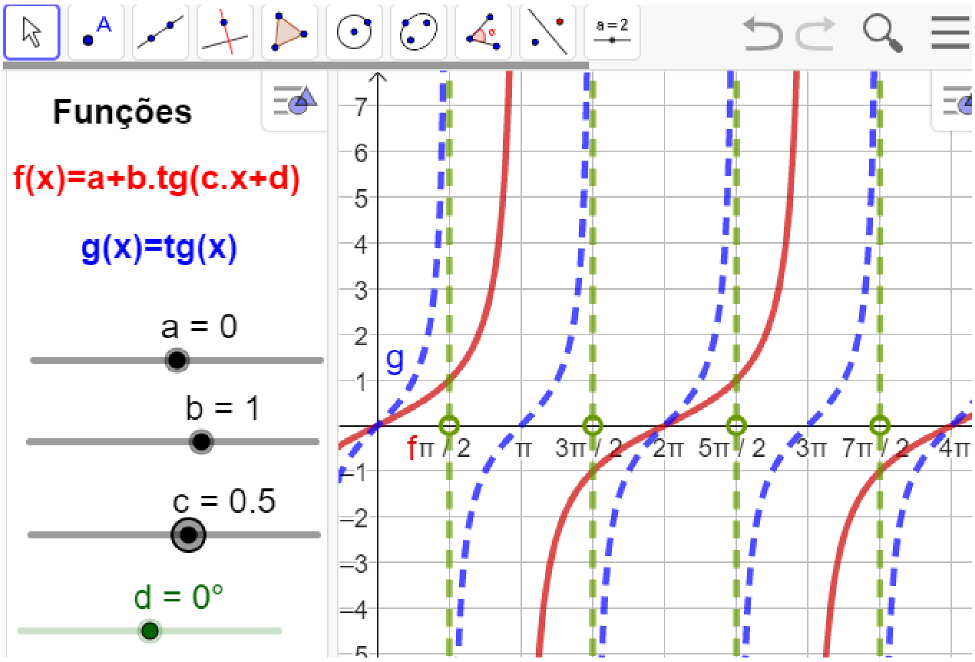
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5},\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|}\Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($-5x$), o gráfico será comprimido horizontalmente e decrescente.

  Se arrastar o parâmetro 0 < c < 1, então o período da função aumenta.

  Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($\frac{1}{2}$x) no aplicativo

geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 48.

Figura - 48 - Gráfico f(x)=tg($\frac{1}{2}$x)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

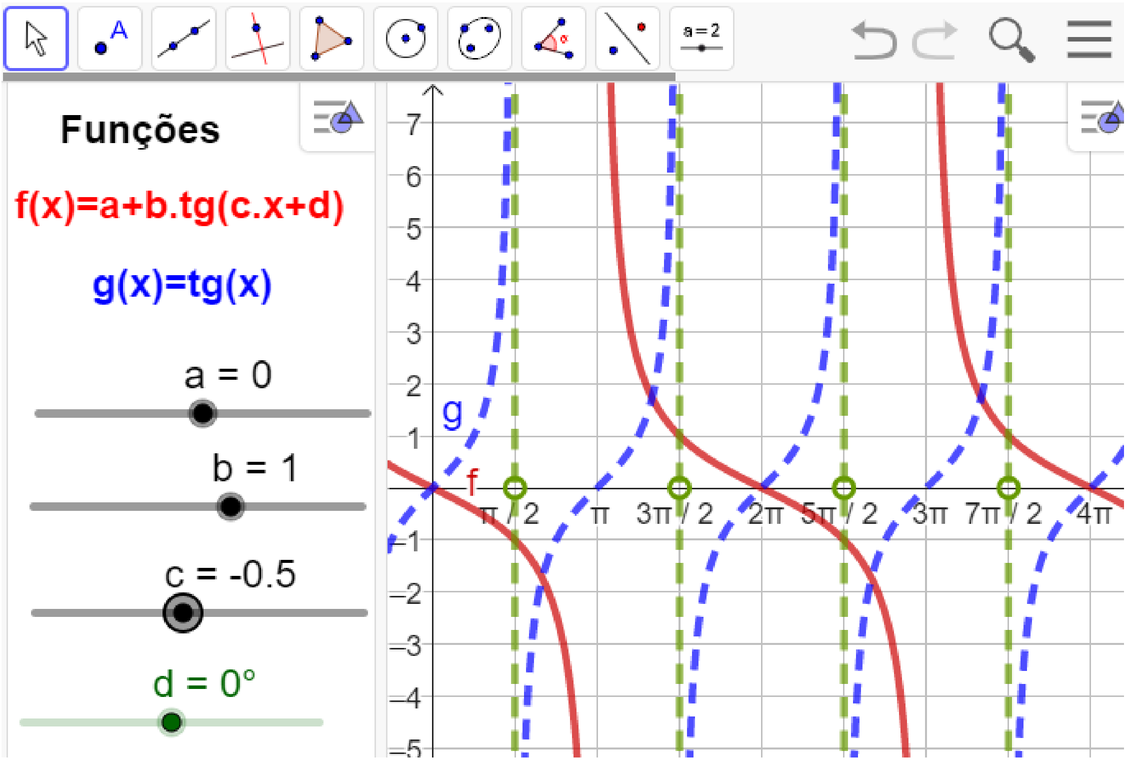
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z\}$
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|}\Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg($\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado

horizontalmente e crescente.

Se arrastar o parâmetro -1 < c < 0, então o período da função aumenta.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg($-\frac{1}{2}$x) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=-$\frac{1}{2}$ e d=0, figura 49.

Figura - 49 - Gráfico f(x)=tg(-0.5x)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

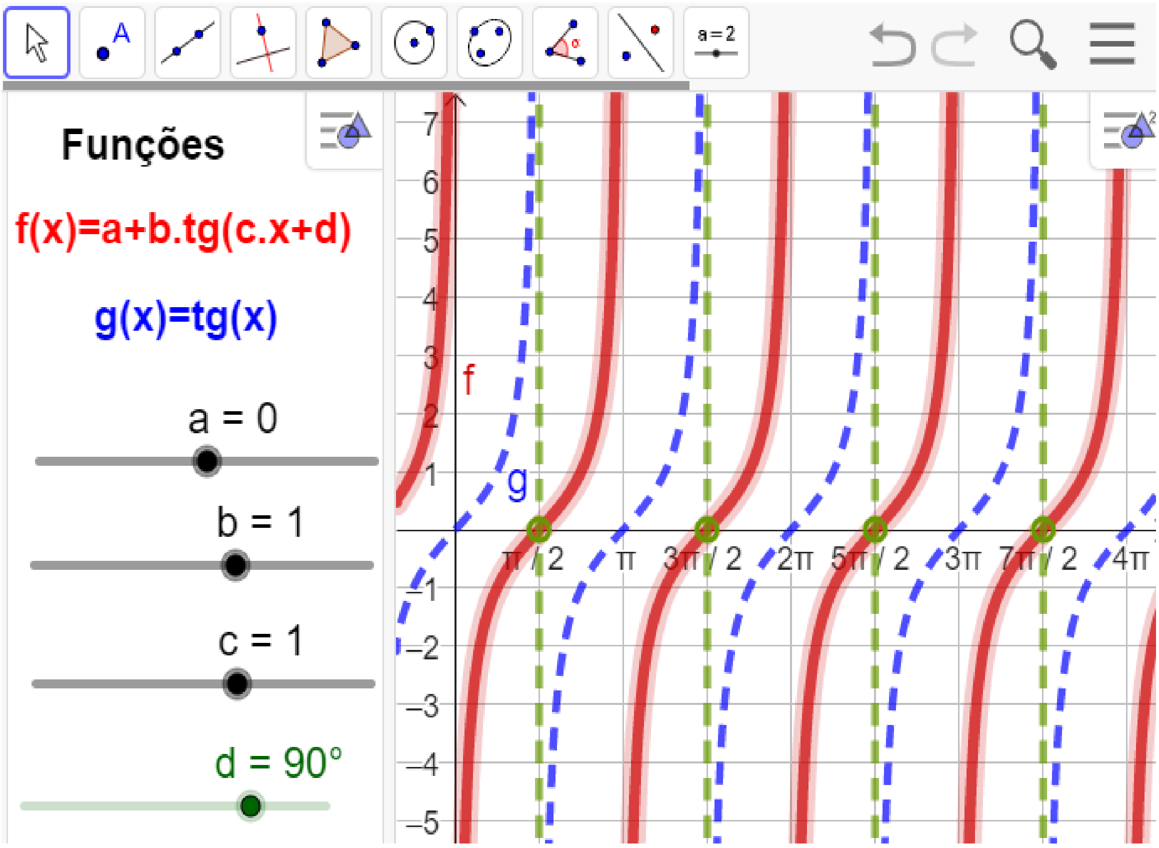
- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =$\frac{\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 2\pi$
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(-$\frac{1}{2}x$), o gráfico será esticado horizontalmente e decrescente.

Parâmetro ´´d``, responsável por um deslocamento horizontal no gráfico.

Se arrastar o parâmetro d > 0, haverá um deslocamento do gráfico para a esquerda do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+90^0) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=90^0figura 50.

Figura - 50 - Gráfico f(x)=tg(x+90^0)



Fonte: Do próprio autor

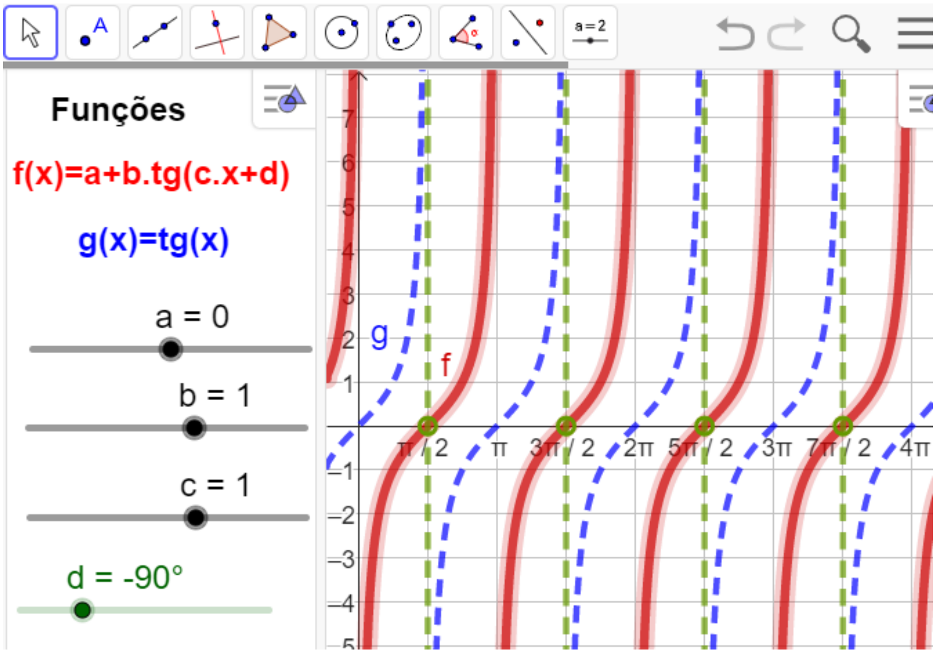
Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p = π
- Na construção da tangentóide da função g(x)=tg(x+90^0), haverá um deslocamento para a esquerda do eixo horizontal.

Se arrastar o parâmetro d < 0 haverá um deslocamento do gráfico para a direita do eixo horizontal.

Construindo como exemplo o gráficos da função f(x)=tg(x+90^0) no aplicativo geogebra, arrastando os parâmetros, a=0, b=1, c=1 e d=$-\ 90^0$Figura 51.

Figura - 51 - Gráfico f(x)=tg(x-90^0)



Fonte: Do próprio autor

Analisando o gráfico depois de construída do aplicativo, isto é, observando as modificações da função f(x) em relação a função g(x), a conclusão é:

- A imagem da função será Im = {y$\epsilon R/$ - ∞ ≤ y ≤ < ∞}.
- Domínio da função, D={x$\epsilon R/x \neq k\pi,\ k\epsilon Z$}
- Período é p =π

Resumindo o que foi aprendido até aqui sobre os parâmetros das funções trigonométricas, temos:

- Parâmetro a: desloca no eixo y
- Parâmetro b: altera a amplitude
- Parâmetro c; altera o período
- Parâmetro d: desloca no eixo x

Optamos por apresentar apenas as funções seno, cosseno e tangente, mas as demais funções trigonométricas - cotangente, secante e cossecante - também podem ser estudadas de maneira análoga.

Assim sendo, esperamos que as atividades de trigonometria com os recursos do *software* GeoGebra, presentes em nosso produto educacional, possam contribuir para resgatar a autoestima daqueles que demonstram dificuldades nesses conteúdos.

3. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACELAR JR., J.S. **O uso do GeoGebra no ensino da trigonometria.** 2013. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Ceará

BRUGINSKI, William José**. Desenvolvimento de planilhas dinâmicas utilizando o software Geogebra para o estudo de funções trigonométricas.** 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná,Curitiba,2014.Disponível em:http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/802. Acesso em 9 de fevereiro de 2022

BUFFO, Camila Molina**. Análise de utilização do software geogebra nas dissertações do PROFMAT para elaboração de uma proposta de atividade para o ensino médio com o auxílio do geogebra.** 2019, 104 f. Dissertação - Mestrado Profissional em Rede Nacional, Instituto de Ciência Matemática e Computação, Universidade de São Paulo. 2019.Disponível em: https://www.teses.usp.br, de-23082019-161742 . Acesso em 17 de fevereiro de 2022.

CORRÊA, Rosana dos Passos**. O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades.** 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016. Disponível em: http://ccse.uepa.br. Acesso em 04 de fevereiro de 2022.

LIMA, Acinéia Santo**s. A utilização do geogebras em situações didáticas para a aprendizagem de funções trigonométricas -** Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Salvador, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11896/1182. Acesso em 05 de fevereiro de 2022

LOURENÇO, Rebecca. **Funções trigonométricas**: Produção de uma sequência didática potencialmente significativa à luz da abordagem histórico-epistemológica.

2018. 209 f. Dissertação - Mestrado em ensino. Universidade Estadual do norte do Paraná. Paraná, 2018. Disponível em: dissertação-ppgec Rebecca Lourenco (2).pdf. Acesso em 9 de fevereiro de 2022.

. MACHADO, M. M. **Geogebra: uma proposta para o ensino de funções trigonométricas.** 2020. 184 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2020. Disponível em:http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/10604. Acesso em 03 de fevereiro de 2022.

OLIVEIRA, André Carneiro de. **Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente -** Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande, 2014. 81 f. Disponível em: https://www.ufcg.edu.br. Acesso em 08 de fevereiro de 2022.

SALAZAR, Denise Mansoldo, **Geogebra e o estudo das funções trigonométricas no ensino Médio -**2015. 132 f. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3241. Acesso em 05 de fevereiro de 2022

SOUSA, Francisco Deilson Rodrigues Barbosa de**. SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT** - Universidade Federal do Maranhão, 2018. p.62 .2018. Disponível em:https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/tede/2564. Acesso em 07 de fevereiro de 2022.

DADOS REFERENTES AOS AUTORES:

JOSÉ HENRIQUE PEREIRA – Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática (1980) e Especialização em Estatística (2006) pela Universidade Estadual do Estado do Maranhão (UEMA – São Luís/MA). Desenvolveu dissertação de mestrado intitulada "ENSINO DE SENO, COSSENO E TANGENTE EM AMBIENTES DINÂMICOS", junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA), obtendo o título de mestre em Ensino de Matemática (2023). É professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado do Maranhão (SEDUC/MA) e professor EBTT do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA - Campus Monte Castelo. (henriquepereira@ifma.edu.br)

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES - É Licenciado em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará (1990), Mestre em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), Doutor em Geofísica também pela UFPA (2003) e Pós-Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017), entre outras formações. É Coordenador do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA e líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias. (fjca@uepa.br)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem