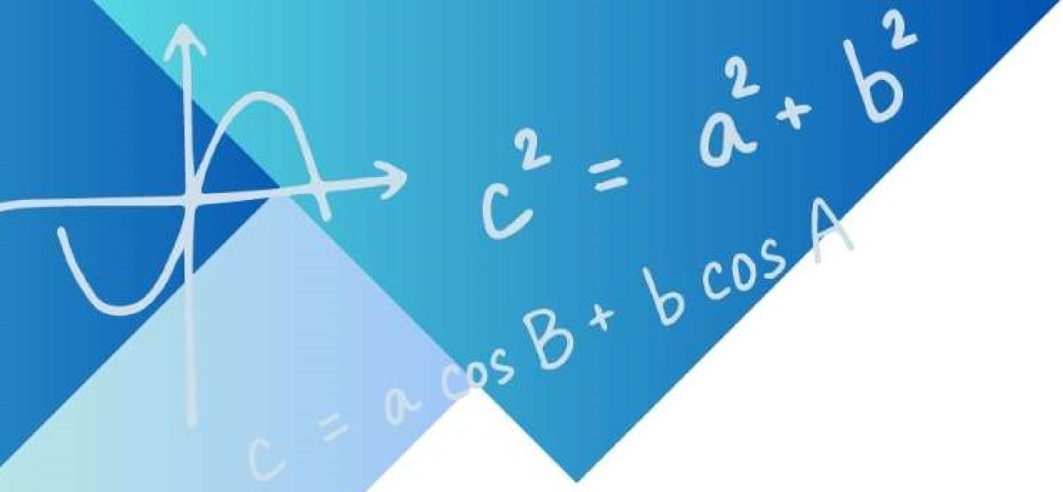
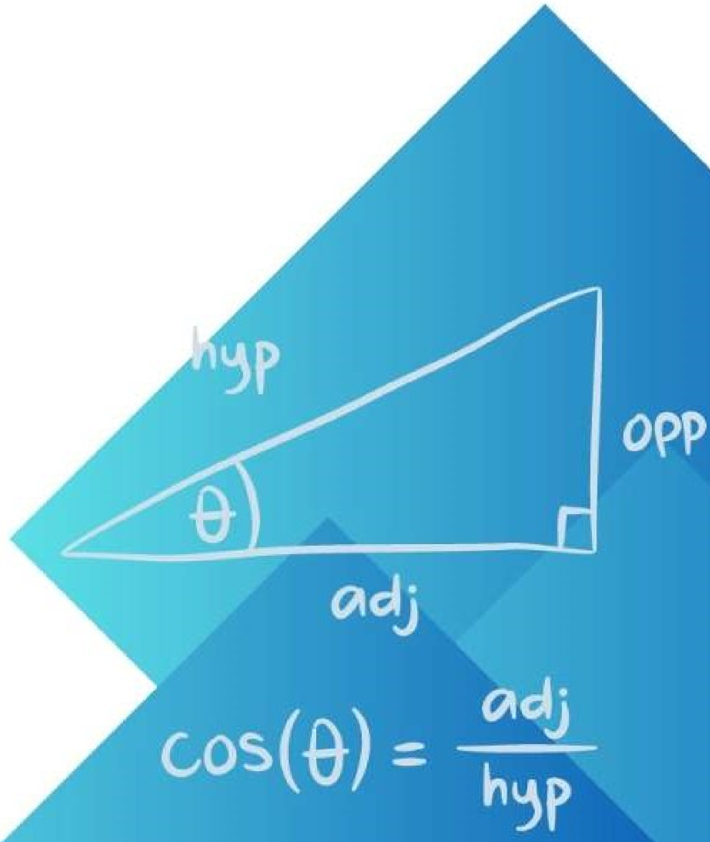


2023

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO

PRODUTO EDUCACIONAL



BRENO SALGADO FERREIRA
NATANAEL FREITAS CABRAL

Clay Anderson Nunes Chagas

Reitor Universidade do Estado do Pará

Ilma Pastana Ferreira

Vice-Reitora Universidade do Estado do Pará

Jofre Jacob da Silva Freitas

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Anderson Madson Oliveira Maia

Diretor do Centro de Ciências Sociais e Educação

Pedro Franco de Sá

Coordenador do Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Ana Kelly Martins da Silva

Vice Coordenadora do Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Diagramação e Capa: Elayne Salgado Ferreira de Sousa

Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém – PA

Ferreira, Breno Salgado
Sequência didática para o ensino de função cosseno: produto educacional / Breno Salgado Ferreira, Natanael Freitas Cabral.- Belém, 2023.
ISBN:

Produto educacional vinculado à dissertação "Sequência didática para o ensino de função cosseno" do Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. - Belém, 2023.

1.Funções (Matemática). 2. Ensino de matemática. 3.Prática de ensino. I. Cabral, Natanael Freitas. II.Título.

Ficha catalográfica elaborada por Regina Ribeiro CRB-739

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: **"SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO COSSENO".**

Mestranda: **BRENO SALGADO FERREIRA**

Data da avaliação: **16/06/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental (X) Estudantes do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: ______________________________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: ______________________________

b) *Possui URL:* (X) Sim, qual o URL: ______________________________

( ) Não ( ) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ______________________________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X) Sim, onde: Com grupo de professores

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Instituições de Ensino Médio

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Com grupo de professor.

( ) Não, justifique:

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

( ) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

(X) outro: Apresentação ao grupo de professores.

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

( ) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental

(X) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como

( ) outros membros da comunidade, tais como

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA Assinaturas

Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral (Presidente)
Doutor em Ciências Humanas
IES de obtenção do título: PUC/RJ

Prof. Dr. Miguel Chaquiam (Examinador 01)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Prof. Dr. Alailson Silva de Lira (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFPA

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O ato de ensinar e aprender é complexo em sua natureza mais superficial, portanto nesse processo de ensinar e aprender é inevitável a busca por modelos metodológicos alternativos que procuram minimizar as dificuldades de aprendizagem de Matemática largamente difundida pelas pesquisas na área (CABRAL, 2017). A Pesquisa feita por Ferreira; Silva; Santos (2019) apontou os diversos fatores que dificultam o processo de aprendizagem da Função Cosseno.

Objetivando amenizar essas dificuldades e contribuir para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, na Seção 1 é apresentada uma Sequência didática elaborada especificamente para o ensino da Função Cosseno. Nessa elaboração, foi considerada a estrutura encontrada em Cabral (2017), que considera a Unidades Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC) como unidade básica de uma sequência didática e que tem como um dos pressupostos teóricos a Psicologia Histórico-Cultural do soviético Lev Vygotsky (1896-1934).

Considerando a necessidade do embasamento específico, na seção 2 é apresentada as orientações aos estudantes e aos professores, que se mostram relevantes a serem consideradas na utilização da sequência didática.

1- SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA FUNÇÃO COSSENO

A sequência didática utilizada nesta seção é composta de 5 Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, que abordam o conteúdo da função cosseno, tendo como início a associação de números reais a um ponto do círculo S^1 formulando assim a função de Euler e finalizando com a construção do gráfico da função do tipo $E(t) = a + b.\cos(c.t + d)$. O quadro a seguir indica o número e os objetivos de cada UARC.

Durante a sequência didática, será necessário que o aluno esteja interagindo com o software geogebra com arquivos pré-programados no formato ggb.

App1.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/graphing/ur2rczk9
App2.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/wtxbssz4
Formalização1.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/fzgf3cm4
App3.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/vtxpucgg
Formalização2.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/bkwwndxp

Assim, na subseção 1.1 apresentamos a sequência didática (Material do Aluno) que pode ser disponibilizada aos discentes e na subseção 1.2, a sequência didática (Material do Professor) que pode ser utilizada como recurso didático-pedagógico pelo professor.

1.1. MATERIAL DO ALUNO

Escola:____

Professor:____

Aluno:____

UNIDADE 1: ASSOCIANDO OS PONTOS

Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, preencha os dados da tabela e responda as questões a seguir.

1) A semirreta *t* representa a distância em que o ponto E percorre em torno do círculo S^1 partindo do ponto B (1,0). Deslize a barra ang (verde) ou a semirreta *t* (azul) para responder à tabela abaixo.

Quais as coordenadas do ponto E, quando *t* assumir o valor de:	
t= 2	E = (____ , ____)
t= 3	E = (____ , ____)
t= -2	E = (____ , ____)
t= 4,29	E = (____ , ____)
t= 6	E = (____ , ____)
t= -4	E = (____ , ____)
t= 8,27	E = (____ , ____)
t=	E = (____ , ____)

a) É possível afirmar que para cada valor de t existe um par ordenado correspondente?

____

____

____

b) É possível ter mais de um valor de t relacionado a um único par ordenado? Justifique.

____

____

____

c) Podemos dizer que a semirreta t representa o conjunto dos números reais? Justifique

____

____

____

d) É possível ter dois ou mais pares ordenados associados a um único valor de t?

____

____

____

2) Dado dois conjuntos $A \neq \emptyset \; e \; B \neq \emptyset$. Diz-se que f é uma função de A em B, denota-se $f: A \to B$, quando cada elemento pertencente ao conjunto A (partida) está correlacionado a um único elemento de B (chegada) por meio de uma "lei" de correspondência. Com base nessa definição de função, é possível afirmar que a relação entre a reta R e S^1 trata-se de uma função? Justifique.

____

____

____

____

____

3) Se a sua resposta na questão 2 tenha sido sim, como podemos definir a “lei” dessa função? E se a sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre t e S^1?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Escola:____

Professor:____

Aluno:____

UNIDADE 2: PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE EULER

Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, responda as questões a seguir.

1) Agora que sabemos que a relação entre t e o ponto E é uma função? Qual o domínio da função $E(t) = t = (x, y)$?

---

2) Qual a imagem dessa função?

---

3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t)$ = t e cos t

$f(t) = t$	**Cos t**	**E(t) = (x, y)**	**Ângulo**
	0.5	(_____,_____)	
	0.71	(_____,_____)	
	0.87	(_____,_____)	
	0	(_____,_____)	
2.09		(_____,_____)	
2.36		(_____,_____)	

4) Sendo o raio do círculo S^1 igual a 1, sabemos que uma volta completa sobre esse círculo é igual a $2\pi \epsilon \mathbb{R}$, podemos afirmar que essa função se repete a cada ciclo? Se sim, que ciclo é esse? Se não, justifique.

---

5) Quando analisamos as projeções que o ponto faz com o eixo x e o eixo y, percebemos um triângulo retângulo que cria uma relação entre o par ordenado e os valores de seno e cosseno. Qual relação seria essa?

____

____

____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Escola:____

Professor:____

Aluno:____

UNIDADE 3: RESTRIÇÕES DA FUNÇÃO DE EULER

Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, e da relação **E(x,y) = $(\cos t, \operatorname{sen} t)$** responda as questões a seguir.

1) Conforme o que percebemos na UARC 2 o par ordenado (x, y) = (cos t, sen t). É possível fazer uma relação entre o arco formado por E(x,y) = (cos t, sen t) e a distância percorrida por t ”. Que relação é essa?

____

____

____

2) É possível afirmar que a relação entre o ponto t e apenas o cos t trata-se de uma função? Se sim, como podemos definir a “lei” dessa função? Se sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre o ponto t e cos t?

____

____

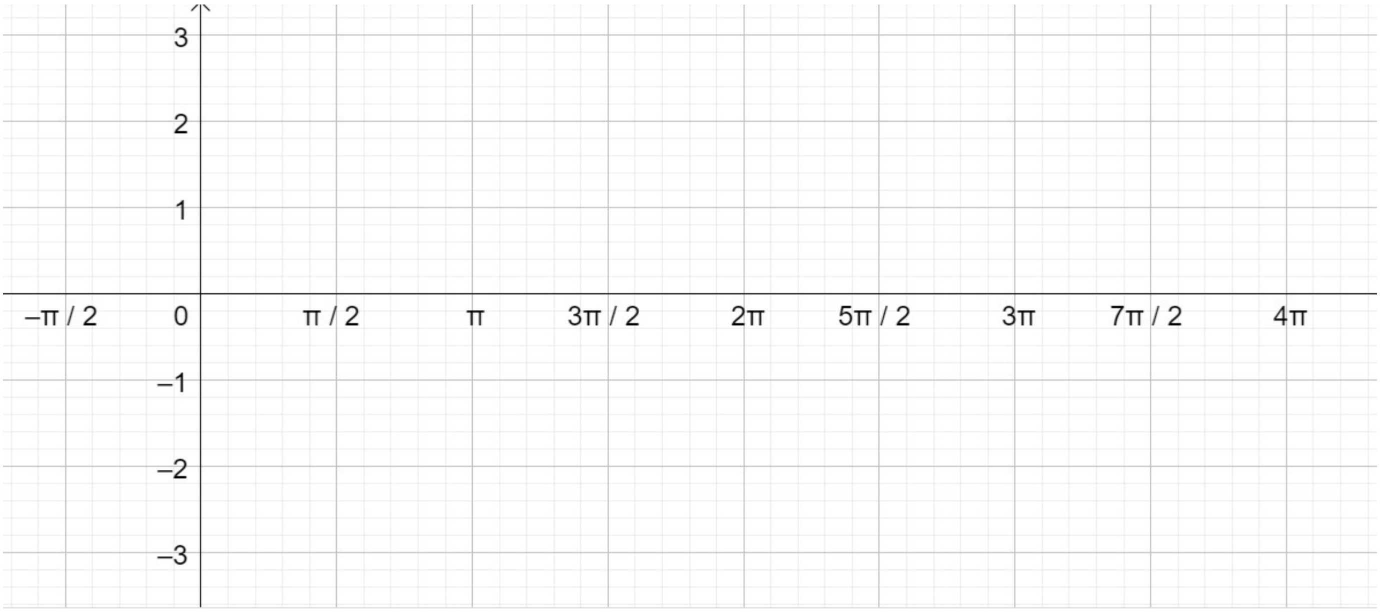
____

3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t)$ = t e cos t

$\boldsymbol{f(t) = t}$	**Cos t = | x |**
	|0.5|
	|0.71|
	|0.87|
	|0|
2.09	
2.36	
	| -0.87|

$\boldsymbol{\pi}$	
	| -71|
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	
$\boldsymbol{2\pi}$	
$\boldsymbol{3\pi}$	
$\boldsymbol{4\pi}$	

4) Com base nos dados da questão anterior, construa o gráfico da função $f(t) = \cos t$



INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Escola:____

Professor:____

Aluno:____

UNIDADE 4: PARA UM LADO E PARA O OUTRO, PARA CIMA E PARA BAIXO

No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a fórmula $\mathrm{f(x)} = \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

   ____

2) Insira no campo de entrada a fórmula $g(x) = 1 + \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

   ____

   c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ g(x)$?

   ____

3) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -1 + \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = a + \cos t$, qual a influência que o parâmetro "a" tem no gráfico?

5) Agora apague as funções anteriores deixando apenas a f(x). Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos(x + 1)$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\ (x - 1)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

---

7) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \cos(1 - x)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

---

b) Em qual período o gráfico se repete?

---

c) Qual a diferença entre os gráficos de $h(x)\ e\ i(x)$?

---

8) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x), h(x)\ e\ i(x)$, em uma função $E(t) = \cos(t + d)$, qual a influência do parâmetro "d" tem no gráfico?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Escola:____

Professor:____

Aluno:____

UNIDADE 5: ESCOLHENDO A MELHOR ONDA

No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a função $f(x) = \cos x$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = 1 \cos x$ e responda as questões abaixo.
   a) Qual o domínio da função $g(x)$?

   ---

   b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

   ---

   c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

   ---

2) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -2\ \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ---

   b) Em qual período o gráfico se repete?

   ---

   c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

   ---

3) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \frac{1}{2} \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ---

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $i(x)\ e\ f(x)$?

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x), h(x)\ e\ \ i(x)$, em uma função $E(t) = b\cos t$, qual a função de b?

5) Agora apague todas as funções deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos 2x$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$ e $h(x)$?

7) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x)$ e $h(x)$, em uma função $E(t) = \cos(c.t)$, qual a função de c?

8) O que aconteceria de diferente com o gráfico se a função fosse $i(x) = \cos(-2x)$ em comparação à função $g(x)$?

9) Apague as funções g(x), h(x) e i(x), e insira uma nova função $g(x) = \cos^2 x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) Em qual período o gráfico se repete?

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)$e $g(x)$?

10) Insira uma nova função $h(x) = \cos x^2$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

b) A função $h(x)$ é periódica?

c) Qual a diferença entre os gráficos de f(x) e h(x)?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

1.2. MATERIAL DO PROFESSOR

UARC 1: Associando os Pontos

Materiais didáticos:

- Arquivo app1.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet

App1.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/graphing/ur2rczk9

- Folhas com o material UARC 1 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app1.ggb com o cursor do mouse, preencha os dados da tabela e responda as questões a seguir.

1) A semirreta *t* representa a distância em que o ponto E percorre em torno do círculo S^1 partindo do ponto B (1,0). Deslize a barra ang (verde) ou a semirreta *t* (azul) para responder à tabela abaixo.

Quais as coordenadas do ponto E, quando *t* assumir o valor de:	
t= 2	E = (____ , ____)
t= 3	E = (____ , ____)
t= -2	E = (____ , ____)
t= 4,29	E = (____ , ____)
t= 6	E = (____ , ____)
t= -4	E = (____ , ____)
t= 8,27	E = (____ , ____)
t=	E = (____ , ____)

a) É possível afirmar que para cada valor de t existe um par ordenado correspondente?

____

____

____

b) É possível ter mais de um valor de t relacionado a um único par ordenado? Justifique.

c) Podemos dizer que a semirreta t representa o conjunto dos números reais? Justifique

d) É possível ter dois ou mais pares ordenados associados a um único valor de t?

2) Dado dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Diz-se que f é uma função de A em B, denota-se $f: A \to B$, quando cada elemento pertencente ao conjunto A (partida) está correlacionado a um único elemento de B (chegada) por meio de uma "lei" de correspondência. Com base nessa definição de função, é possível afirmar que a relação entre a reta R e S^1 trata-se de uma função? Justifique.

3) Se a sua resposta na questão 2 tenha sido sim, como podemos definir a "lei" dessa função? E se a sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre t e S^1?

____

____

____

____

____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Dizemos que a função de Euler $E: \mathbb{R} \to S^1$, consiste em envolver a reta $\mathbb{R}$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginado como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $B = (1,\ 0) \in S^1$. Dado $t \in \mathbb{R}$ temos $E(t) = (x,\ y)$

UARC 2: Propriedades da Função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app2.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet

App2.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/wtxbssz4

- Folhas com o material UARC 2 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, responda as questões a seguir.

1) Agora que sabemos que a relação entre t e o ponto E é uma função? Qual o domínio da função $E(t) = t = (x, y)$?

---

2) Qual a imagem dessa função?

---

3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t)$ = t e cos t

$\boldsymbol{f(t) = t}$	**Cos t**	**E(t) = (x, y)**	**Ângulo**
	0.5	(_____,_____)	
	0.71	(_____,_____)	
	0.87	(_____,_____)	
	0	(_____,_____)	
2.09		(_____,_____)	
2.36		(_____,_____)	

4) Sendo o raio do círculo S^1 igual a 1, sabemos que uma volta completa sobre esse círculo é igual a $2\pi \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que essa função se repete a cada ciclo? Se sim, que ciclo é esse? Se não, justifique.

---

5) Quando analisamos as projeções que o ponto faz com o eixo x e o eixo y, percebemos um triângulo retângulo que cria uma relação entre o par ordenado e os valores de seno e cosseno. Qual relação seria essa?

____

____

____

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

A função de Euler E(t) = t = (x, y) possui domínio no conjunto dos reais e a sua imagem vai de [-1, 1]. O seu período é de 2π, e através de $E: \mathbb{R} \to S^1$, podemos saber o seno e o cosseno de um número real t

UARC 3: Restrições da função de Euler

Materiais didáticos:

- Arquivo app2.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet

App2.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/wtxbssz4

- Folhas com o material UARC 3 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: Através das percepções feitas a partir do movimento do ponto t (azul) ou da barra ang (verde) no app2.ggb com o cursor do mouse, e da relação **E(x,y) = $(\cos t, \operatorname{sen} t)$** responda as questões a seguir.

1) Conforme o que percebemos na UARC 2 o par ordenado (x, y) = (cos t, sen t). É possível fazer uma relação entre o arco formado por E(x,y) = (cos t, sen t) e a distância percorrida por t ”. Que relação é essa?

____

____

____

2) É possível afirmar que a relação entre o ponto t e apenas o cos t trata-se de uma função? Se sim, como podemos definir a “lei” dessa função? Se sua resposta foi não, como você definiria essa relação entre o ponto t e cos t?

____

____

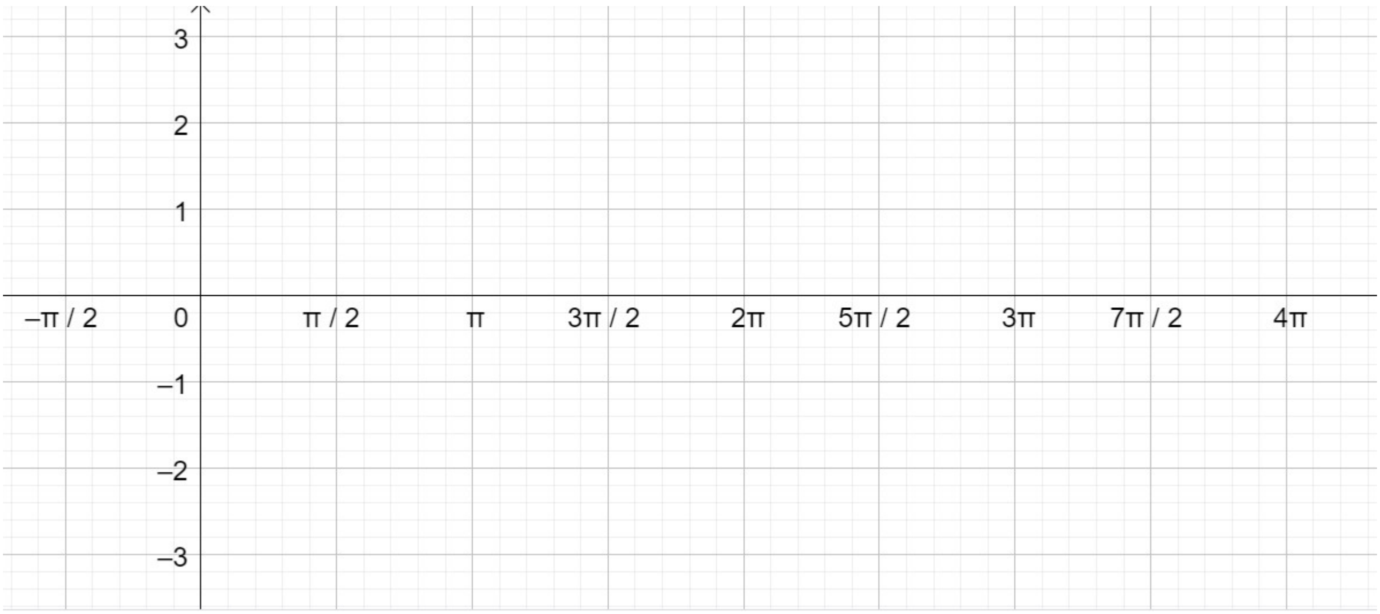
____

3) Complete a tabela com base nos valores de $f(t)$ = t e cos t

$f(t) = t$	**Cos t = | x |**
	|0.5|
	|0.71|
	|0.87|
	|0|
2.09	

2.36	
	| -0.87|
$\boldsymbol{\pi}$	
	| -71|
$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	
$\boldsymbol{2\pi}$	
$\boldsymbol{3\pi}$	
$\boldsymbol{4\pi}$	

4) Com base nos dados da questão anterior, construa o gráfico da função $f(t) = \cos t$



INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Com a função $E\colon \mathbb{R} \to S^1$, sendo $x = \cos t$ (abscissa) e $y = sen\ t$ (ordenada) do ponto $E(t)$, se olharmos apenas para $x = \cos t$, temos uma restrição da função $E(t)$, formando assim a função cosseno $f(x) = \cos x$. Agora, abra o arquivo formalização1.ggb para visualizar o gráfico sendo formado passo a passo conforme o ponto E vai percorrendo o círculo S^1 formando assim uma senoide.

Formalização1.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/fzgf3cm4

UARC 4: Para um lado e para o outro, para cima e para baixo

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet

App3.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/vtxpucgg

- Folhas com o material UARC 4 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a fórmula $\mathrm{f(x)} = \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

____

2) Insira no campo de entrada a fórmula $g(x) = 1 + \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

____

   c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ g(x)$?

____

3) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -1 + \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

____

b) Em qual período o gráfico se repete?

---

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

---

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x)\ e\ h(x)$, em uma função $E(t) = a + \cos t$, qual a influência que o parâmetro "a" tem no gráfico?

---

5) Agora apague as funções anteriores deixando apenas a f(x). Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos(x + 1)$ e responda as questões abaixo.

a) Qual o domínio da função $g(x)$?

---

b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

---

c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

---

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\ (x - 1)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

---

b) Em qual período o gráfico se repete?

---

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

---

7) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \cos(1 - x)$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

---

b) Em qual período o gráfico se repete?

---

c) Qual a diferença entre os gráficos de $h(x)\ e\ i(x)$?

---

8) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x), h(x)\ e\ i(x)$, em uma função $E(t) = \cos(t + d)$, qual a influência do parâmetro “d” tem no gráfico?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = a + \cos(x + d)$, o parâmetro "a" translada a função verticalmente e o parâmetro "d" translada a função horizontalmente

UARC 5: Escolhendo a melhor onda

Materiais didáticos:

- Arquivo app3.ggb aberto em computador com aplicativo Calculadora Gráfica Geogebra instalado, ou computador com acesso à internet

App3.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/vtxpucgg

- Folhas com o material UARC 5 impresso
- Caneta para preencher os dados percebidos

Procedimentos: No app3.ggb, insira as fórmulas que se pede e a partir de suas percepções responda as questões a seguir:

1) Insira no campo de entrada a função $f(x) = \cos x$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = 1 \cos x$ e responda as questões abaixo.
   a) Qual o domínio da função $g(x)$?

   ___

   b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

   ___

   c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

   ___

2) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = -2\ \cos x$ e responda as questões abaixo
   a) Qual o domínio da função?

   ___

   b) Em qual período o gráfico se repete?

   ___

   c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

   ___

3) Insira no campo de entrada a fórmula $i(x) = \frac{1}{2}\cos x$ e responda as questões abaixo

   a) Qual o domínio da função?

   ____

   b) Em qual período o gráfico se repete?

   ____

   c) Qual a diferença entre os gráficos de $i(x)\ e\ f(x)$?

   ____

4) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x), h(x)\ e\ \ i(x)$, em uma função $E(t) = b\cos t$, qual a função de b?

   ____

   ____

   ____

5) Agora apague todas as funções deixando apenas a $f(x)$. Em seguida insira no campo de entrada a função $g(x) = \cos 2x$ e responda as questões abaixo.

   a) Qual o domínio da função $g(x)$?

   ____

   b) Em qual período o gráfico de $g(x)$ se repete?

   ____

   c) Qual a diferença entre o gráfico de $g(x)$ e o gráfico de $f(x) = \cos x$?

   ____

6) Insira no campo de entrada a fórmula $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e responda as questões abaixo

   a) Qual o domínio da função?

   ____

b) Em qual período o gráfico se repete?

____

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x)\ e\ h(x)$?

____

7) Com base nas comparações que você fez de $f(x), g(x)\ e\ h(x)$, em uma função $E(t) = \cos(c.t)$, qual a função de c?

____

____

____

8) O que aconteceria de diferente com o gráfico se a função fosse $i(x) = \cos(-2x)$ em comparação à função $g(x)$?

____

9) Apague as funções g(x), h(x) e i(x), e insira uma nova função $g(x) = \cos^2 x$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

____

b) Em qual período o gráfico se repete?

____

c) Qual a diferença entre os gráficos de $f(x) e\ g(x)$?

____

10) Insira uma nova função $h(x) = \cos x^2$ e responda as questões abaixo

a) Qual o domínio da função?

____

b) A função $h(x)$ é periódica?

---

c) Qual a diferença entre os gráficos de f(x) e h(x)?

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE:

Em uma função do tipo $f(x) = b.\cos(c.x)$, o parâmetro "b" influência na amplitude do gráfico e o parâmetro "c" influência no período da função. Agora para visualizar os parâmetros a, b, c e d trabalhando simultaneamente, abra o arquivo formalização2.ggb.

Formalização2.ggb disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/bkwwndxp

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Nesse capítulo, abordaremos os rumos que levaram à função cosseno trazendo os principais personagens que contribuíram para o surgimento da trigonometria que conhecemos hoje. Essa secção foi baseada nas obras de Mendes e Rocha (2010) e Mendes (2010).

Segundo Mendes e Rocha (2010), pesquisas realizadas por diversos historiadores tanto da matemática como de outras áreas, revelam que a origem da Trigonometria é anterior à Era Cristã. Os primeiros indícios de utilização da Trigonometria são encontrados no Egito e na Babilônia, por volta dos séculos XVI a XX a.C., sempre relacionados a problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Os fenômenos celestes sempre foram alvo da observação dos homens. A regularidade com que aconteciam e se repetiam, por exemplo, as fases da Lua, o nascimento do Sol, e a cada noite o deslocamento das estrelas e o surgimento das constelações, suscitaram muitos estudos sobre o tema. (Mendes, 2010, p. 66)

Foi o fascínio pelo movimento dos planetas que impulsionou a evolução da Trigonometria. Em vista disso, a Trigonometria aparece bastante associada à Astronomia. A Trigonometria era parte da Astronomia, tendo, só muito mais tarde, passado a fazer parte da Matemática. Desde a Antiguidade até a Idade Moderna, foram construídas tabelas que mais tarde deram origem à trigonometria (Mendes; Rocha, 2010, p. 14)

A primeira tabela trigonométrica foi construída por Hipárco de Nicéia (180-125 a.C.) um astrônomo, que também era construtor, cartógrafo e matemático grego, da escola de Alexandria. A tabela construída por Hiparco tinha por base uma única função que relaciona cada arco da circunferência à sua respectiva corda. Por ter sido o primeiro a trabalhar com a tabela foi chamado “pai” da Trigonometria e deve-se a ele a fundação da Astronomia Científica. Considerado figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu.

Grande parte dos trabalhos de Hiparco foi perdido, entretanto, os teoremas essenciais e as tabelas foram preservadas por Cláudio Ptolomeu (90-168), influenciando definitivamente o desenvolvimento da Trigonometria, durante muitos séculos. Nascido no Egito durante a dominação romana, Ptolomeu viveu e trabalhou em Alexandria, tendo realizado trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia.

A partir de observações, entre as estrelas que pareciam fixas existem algumas que passeiam no meio delas, são os planetas, que semelhantes a pequenos focos luminosos que variavam de intensidade e deslocavam num constante ziguezague, geraram dúvidas e confundiram os astrônomos. Os planetas não percorrem sempre um caminho direto, andam errantes, às vezes para o Norte outras para o Sul.

Conforme Braga; Guerra e Reis (2003), para Ptolomeu a explicação estava em ter a terra imóvel e os planetas girando em torno dela em movimentos circulares com velocidade constante. Com esse pensamento construiu um sistema sustentado pela física de Aristóteles sobre a imobilidade da terra e pelas ideias de Platão de que, os movimentos celestes deveriam ser circulares por ser o círculo a figura geométrica considerada perfeita. (Apud Mendes, 2010, p. 67).

Ptolomeu construiu um sistema do qual saíram tabelas de dados numéricos que permitiam prever as posições do Sol, da Lua e dos planetas então conhecidos. Esse sistema Ptolomeu explica com detalhes em sua obra *Almagesto*, onde se destaca um rigoroso tratamento matemático com uso da trigonometria esférica, uma grande intuição para divisar arranjos geométricos simples que descrevam os fenômenos, e o uso desses arranjos para realizar previsões astronômicas. (Mendes, 2010, p. 68)

A obra *Almagesto* contém uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, em ordem crescente e em função da metade do ângulo, equivalente à tabela de senos que se trabalha atualmente. Ptolomeu começa mostrando a matemática básica que usará, e instrui como calcular a função corda, aplicando-a a uma série de demonstrações, lança mão da geometria elementar, do sistema de numeração de base 60 e constrói uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco. (Mendes; Rocha, 2010, p. 15).

Ptolomeu, no entanto, não conseguiu, com seu sistema, reproduzir completamente o movimento retrógrado que todos os planetas descrevem, pois esse movimento não era regular, não tinha a mesma medida angular nem a mesma duração. (Braga; Guerra; Reis, 2003 apud Mendes, 2010, p. 69).

Segundo Morey (2003) com a queda do Império Romano, o centro da cultura se deslocou para a Índia que revolucionou a Trigonometria com uma série de textos sobre sistemas de Astronomia, a introdução de novas “funções” trigonométrica e o aperfeiçoamento dos métodos de tabulação. Na Índia a Trigonometria tinha suas funções definidas como comprimento de um seguimento e não como uma relação entre dois comprimentos como hoje. Os Indianos usavam frequentemente o comprimento da meia corda do ângulo central, que mais tarde veio a ser chamado **seno indiano**. Utilizando o seno de um arco e seus múltiplos inteiros e fracionários foram construídas tabelas de seno de arcos entre 0° e 90°, as quais eram utilizadas para cálculos em astronomia, como por exemplo, a posição exata dos planetas. (Apud Mendes; Rocha, 2010, p. 15).

Após os hindus, as contribuições à trigonometria vieram dos árabes que com influência helenística, babilônica e indiana deram um tratamento sistemático ao tema em questão. Os árabes tiveram acesso à obra de Ptolomeu e, por conseguinte trouxeram os conhecimentos de trigonometria para a Europa através da Espanha.

Segundo Berlinghoffe e Gouvêa (2010), foi nesse contexto que surgiu a palavra seno. O que hoje entendemos por seno, na Índia era denominado por $jy\bar{a} - ardha$ (meia-corda), ou abreviadamente, $jy\bar{a}$. Os árabes, ao se depararem com a matemática hindu, adotaram a palavra $jy\bar{a}$ como sendo $jiba$.

Entretanto, os árabes tinham costume de dispensar as vogais em suas palavras, deste modo era utilizado apenas jb. Com isso, os europeus ao encontrarem a palavra jb, acrescentaram as vogais a e i, por suporem que se tratava da palavra árabe $jaib$, que significa angra ou baía. Assim, escolheram a palavra latina $sinus$ como tradução. É dessa tradução equivocada que surgiu a palavra seno. (Apud Gama, 2020, p. 74).

Aos árabes se atribuiu a introdução das seis funções básicas da trigonometria: seno e cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante; ao definir a função seno em termos de um círculo de raio unitário, os árabes deram às funções utilizadas pelos indianos na astronomia, uma forma mais próxima da atual, além disso, deram origem às funções tangente e cotangente, foram responsáveis pelo estabelecimento de várias relações trigonométricas e, compreenderam que os cálculos trigonométricos, aplicados à astronomia ou à geometria, precisavam de tabelas mais precisas que as existentes na época. Então começaram a construir tabelas: primeiro Al-Hasib (c. 850) com uma tabela de senos e tangentes com intervalos de 1°, e a partir daí tentando reduzir os intervalos, foram construídas outras tabelas, nas quais utilizavam procedimentos de interpolação para encontrar o seno de 1°, da mesma maneira que havia utilizado Ptolomeu em seu *Almagesto*. Foi o árabe Al-Kashi que calculou o seno de 1° utilizando um procedimento diferente do empregado até então, para tanto se baseou em informações que estavam nas mãos dos matemáticos árabes há, pelo menos, três séculos as quais, consideravam: dado um ângulo $\alpha, sen3\alpha = 3.sen\alpha - 4.sen^3\alpha$ e $sen3° = 0{,}013083989$. (MOREY, 2003 apud MENDES; ROCHA 2010, p. 16).

Na Idade Moderna, o matemático e astrônomo alemão Regiomontanus (1436-1476) reativou os estudos da Astronomia na Renascença, e fez importantes contribuições para a Trigonometria e a Astronomia. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XV, e em 1464, escreveu *de triangulisomnimodis*, um tratado sobre Trigonometria, onde calcula novas tabelas, e que marcou o renascimento desse ramo da Matemática na Europa.

O polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) também realizou pesquisas astronômicas e astrológicas, e em 1543 lança a sua obra "*De revolutionibus orbium coelestium"* com uma teoria contrária à de Ptolomeu sobre o Universo, trazendo ao mundo o modelo heliocêntrico. Em sua obra são desenvolvidos estudos sobre Trigonometria, onde encontramos uma tabela de senos construída com base na função corda utilizada por Hiparco e Ptolomeu, e que passa a ser um modelo para a Astronomia, tomando o lugar da tabela de Ptolomeu. Sua obra deu ponto de partida para a astronomia moderna.

Para Copérnico, o trabalho de Ptolomeu era uma concepção deselegante, complicada demais, pois era carregada de artifícios para explicar o movimento dos planetas. Quando a trajetória de um planeta não coincidia com a teoria, acrescentava-se outro círculo, e, se necessário fosse, outro e outro. (Contador, 2006, p. 81).

No *"De Revolutionibus ..."* Copérnico tentou corrigir os erros das tabelas e teorias de seus antecessores, com cálculos matemáticos fáceis e exatos das posições dos planetas. Mas apesar de não ter conseguido se afastar completamente das antigas teorias e resolver o problema dos planetas, que era o objetivo maior da obra, conseguiu, com sua teoria, abrir caminho para uma nova mentalidade que acabou por destruir a concepção da Terra imóvel no centro do Universo

Copérnico desenvolveu o heliocentrismo, o Sol como centro do Sistema Solar. Ainda segundo as suas explicações, a Terra girava sobre si mesma, e as estrelas ficavam a muitas distâncias de nós.

Convém, não obstante, reconhecer que os seus movimentos [dos planetas] são circulares ou compostos de muitos círculos, porque esta irregularidade ocorre de harmonia com uma lei definida e retornos fixos às suas posições originais, o que não poderia acontecer se não fossem circulares. (Copernico, 1566 [1996], p. 26).

A obra de Copérnico só foi editada após a sua morte, mas transformou completamente o pensamento e a compreensão dos homens, sobre a Terra e o Universo. Foi uma obra tão revolucionária na medida em que permitiu aos seus seguidores uma abordagem inteiramente nova da astronomia e cosmologia, em aspectos que nem o próprio autor pôde prever.

3. FUNÇÃO DE EULER

A trigonometria consiste em, essencialmente, em associar a cada ângulo α certos números como $\cos\alpha$ (o cosseno de α) e $\operatorname{sen}\alpha$ (o seno de α), a cada um dos quais representa, de certo modo, uma espécie de "medida" daquele ângulo.

Segundo Lima (1991), com o surgimento do Cálculo Infinitesimal e, posteriormente, do seu prolongamento teórico, a Análise Matemática, surgiu uma nova dimensão às noções básicas da trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Nesse contexto, Leonhard Euler (1707-1783), cria uma transição feita por meio de uma função E (que chamamos de *função de Euler)* ao qual considera as funções $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ definidas para todo número real t. Ou seja, Euler começa a falar em cosseno e seno de um número, em vez de um ângulo.

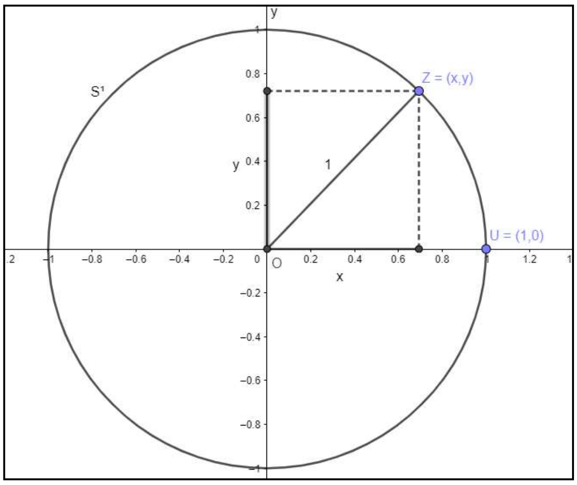
O domínio da função de Euler é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Seu contradomínio é o círculo unitário do plano, que representaremos pos S^1. Assim, a cada número real t, a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo S^1. (Lima, 1991, p. 33).

Para definir precisamente o círculo S^1, introduzimos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que todo ponto Z do plano passa a ser representado com um par ordenado $Z = (x, y)$, onde x é a sua abcissa e y sua ordenada. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância do ponto $Z = (x, y)$ ao ponto $W = (u, v)$ é

$$d(Z, W) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}\,.$$

Em particular, a distância de $Z = (x, y)$ à origem $O = (0,0)$ é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$.

FIGURA 1 - CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020

Cuja distância à origem é igual a 1. Assim, o ponto $Z = (x, y)$ pertence a S^1 se, e somente se, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Agora definiremos a função $E: \mathbb{R} \to S^1$. Dado o número real $t > 0$, medimos no círculo S^1, a partir do ponto $U = (1,0)$, um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, ou seja, o sentido que nos leva de (1,0) a (0,1) pelo caminho mais curto em S^1). A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de $E(t)$. Se for $t < 0, E(t)$ será a extremidade final de um arco de comprimento t, medido a partir do ponto $U = (1,0)$, no sentido negativo de S^1 (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio).

A função de Euler $E: \mathbb{R} \to S^1$ consiste em envolver a reta $\mathbb{R}$, pensada como um fio inextensível, sobre o círculo S^1 (imaginando como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $U = (1,0) \in S^1$.

Com o auxílio da função $E: \mathbb{R} \to S^1$, podemos definir o cosseno e o seno de um número real t. A função de Euler $E: \mathbb{R} \to S^1$, possibilitando considerar $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ como funções da variável real t, abriu para a trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações importantes às Ciências Físicas. (Lima, 1991, p. 34).

Uma propriedade fundamental dessas funções é que elas são periódicas, isto é, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$. Isso exprime dizer que 2π é o período das funções $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$. Portanto, usando as funções trigonométricas, podemos obter funções com qualquer período.

Ora a periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do nosso coração. Periodicidade é uma ideia muito próxima de oscilação (ou vibração). As funções periódicas são o instrumento matemático mais adequado para descrever todos os fenômenos periódicos. (Lima, 1991 p. 36).

Essa definição da fórmula de Euler foi de fundamental importância para a construção da sequência didática.

4. ORIENTAÇÕES AOS ALUNO

As unidades (UARC's) que compõem a sequência didática tem objetivos específicos de aprendizagem, conforme o Quadro

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM
1	Associando os pontos	Perceber que os números reais estão associados a apenas um ponto do círculo S^1 formando assim uma função $E(t) = t = (x, y)$.
2	Propriedades da Função de Euler	Descobrir as propriedades da função de Euler $E(t) = t = (x, y)$. (domínio, imagem, periodicidade).
3	Restrições da Função de Euler	Descobrir que a função de Euler $E(t) = t = (x, y) = (\cos t , \operatorname{sen} t)$ gera a função cosseno e a função seno.
4	Para um lado e para o outro, para cima e para baixo	Perceber a influência que os parâmetros "a" e "d" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos (t + d)$.
5	Escolhendo a melhor onda	Perceber a influência que os parâmetros "b" e "c" têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b. \cos(c. t)$.

Assim, ao utilizá-la em sala de aula é aconselhável que o estudante siga a ordem de questões e de unidades apresentadas, visto que as questões e unidades estão articuladas para seguirem uma sequência lógica importante para o momento da reconstrução conceitual do aluno.

É importante também que ao final de cada UARC, durante a formalização os alunos compartilhem as suas ideias com os demais colegas para que possam entender melhor nos processos de reconstrução conceitual.

As UARC's também podem ser aplicadas em grupos menores de 2 ou 3 alunos, pois a partir das interações sociais os discentes podem ajudar uns aos outros, reduzindo as possíveis dificuldades de interpretação das questões e até as dificuldades na manipulação do aplicativo GeoGebra.

Logicamente, sempre que necessário, o estudante pode solicitar o auxílio do professor para esclarecer as dúvidas emergentes e relembrar os conteúdos matemáticos que mostrarem-se necessários ao avanço dos conteúdos constantes nas Unidades.

Aconselha-se que o estudante utilize como recurso didáticos as unidades impressas em uma folha de papel, visto que a mesma unidade na versão virtual limita mais a visualização da sequência das questões como um todo. Essa visualização mais ampla da sequência das questões é importante já que as questões devem ser respondidas conforme a ordem apresentada na Unidade, pois para responder algumas questões é necessário que o aluno visualize tabelas ou respostas de questões anteriores.

Orienta-se que os estudantes não risquem o quadro “INTERVENÇÃO FORMALIZANTE”, suas conclusões devem ser anotadas em um caderno, e após as orientações e correções necessárias do professor, o aluno então preencha o quadro “INTERVENÇÃO FORMALIZANTE”.

É interessante nesse processo também que, mesmo que as UARC’s sejam aplicadas em grupos de 2 ou 3 alunos, cada aluno deve ter a sua própria folha impressa com a Unidade. Dessa forma, ele pode comparar as suas conclusões pessoais com as de seu grupo simultaneamente, já que entendemos que esse processo de construção e reconstrução conceitual é constante a todos os momentos.

5. ORIENTAÇÃO AOS PROFESSORES

Para a aplicação da sequência didática constante na Seção 1 é indicado que o professor tenha trabalhado em classe conhecimentos prévios, dentre os quais destaca-se: geometria plana (cálculo de comprimentos de circunferência e de arcos; relação entre arcos e ângulos, projeções ortogonais, etc.); trigonometria básica (razões trigonométricas no triângulo retângulo; arcos no ciclo trigonométrico; relações entre diversas unidades de medidas de ângulo; incluindo o radiano; etc.); funções (definição, propriedades, gráficos, etc.); geometria analítica (pares ordenados, representações gráficas de funções, distância entre pontos no plano cartesiano, etc.), etc.

Orienta-se que ao utilizar a sequência didática o docente considere os objetivos didáticos constantes no Quadro:

UARC	TÍTULO	OBJETIVOS DE ENSINO
1	Associando os pontos	Definir a função de Euler
2	Propriedades da Função de Euler	Definir as propriedades da função de Euler
3	Restrições da Função de Euler	Definir a função cosseno
4	Para um lado e para o outro, para cima e para baixo	Definir a influência que os parâmetros “a” e “d” têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = a + \cos(t + d)$.
5	Escolhendo a melhor onda	Definir a influência que os parâmetros “b” e “c” têm no gráfico das funções do tipo $E(t) = b.\cos(c.t)$.

Assim, ao utilizá-la em sala de aula, orienta-se que o professor siga a ordem de questões e de unidades apresentadas, visto que as questões e unidades estão articuladas para seguirem uma sequência lógica importante para o momento da reconstrução conceitual do aluno.

É importante também que ao final de cada UARC, durante a formalização o professor estimule os alunos a compartilharem as suas ideias com os demais colegas para que possam entender melhor nos processos de reconstrução conceitual.

As UARC’s também podem ser aplicadas em grupos menores de 2 ou 3 alunos, pois a partir das interações sociais os discentes podem ajudar uns aos outros, reduzindo as possíveis dificuldades de interpretação das questões e até as dificuldades na manipulação do aplicativo GeoGebra. Com isso, o professor pode buscar criar e manter zonas de desenvolvimento proximais, favorecendo a aprendizagem escolar.

O professor deve estar sempre atento para auxiliar os estudantes na resolução das questões propostas, porém deve evitar dar a resposta rapidamente. Assim, ele deve buscar estabelecer discussões e conexões entre o conteúdo constante na Unidade trabalhada com conteúdo já ministrados.

Aconselha-se que os quadros contendo “INTERVENÇÕES FORMALIZANTES” sejam apresentados no quadro magnético ou em um projetor pelo professor apenas após as discussões e conexões emergentes no ato da aplicação da aplicação da sequência didática.

Com isso, espera-se que os alunos tenham maior liberdade para levantar hipóteses, conjecturar, criar ideias matemáticas novas, apresentar resoluções diversas, desenvolver sua autonomia, interagir com seus colegas, entre outras coisas. Afinal, o conhecimento matemático mais profícuo surge, em geral, em contextos que levem em consideração estes fatores.

Devido a heterogeneidade de cada turma, não há possibilidade de ser estimado o tempo necessário para aplicação de cada UARC, mas aconselha-se que o avanço nelas se deem somente após as interferências que se fizerem necessárias.

REFERÊNCIAS

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas:** estrutura e elaboração. 1 ed. Belém: SBEM/SBEM-PARÁ. 2017.

FERREIRA, B. S.; SILVA. A. K. M.; SANTOS, M. L. S. **Aprendizagem de função cosseno segundo alunos de escolas públicas de Belém.** SCEM – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

GAMA, P. F da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 2ª ed. Rio de Janeiro: sbm impa vitae, 1991

MENDES, Maria José de Freitas. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática:** mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

MENDES, Maria José de Freitas; ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves; Organizado por Miguel Chaquiam e Natanael Freitas Cabral. **Rumos que levam à tabela trigonométrica a partir da corda.** Belém: SBEM-PA, 2010. (Coleção Educação Matemática na Amazônia, 1.). ISBN 978-85-7691-102-9 (Coleção).

VYGOTSKY, L. S. **Thinking and Speech**. In *The Collected Works of L.S. Vygotsky; Rieber, R. W.; Carton, A. S.* (Eds.). Trans. By Minich, N. New York: Plenum Press. 1987.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n - Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem