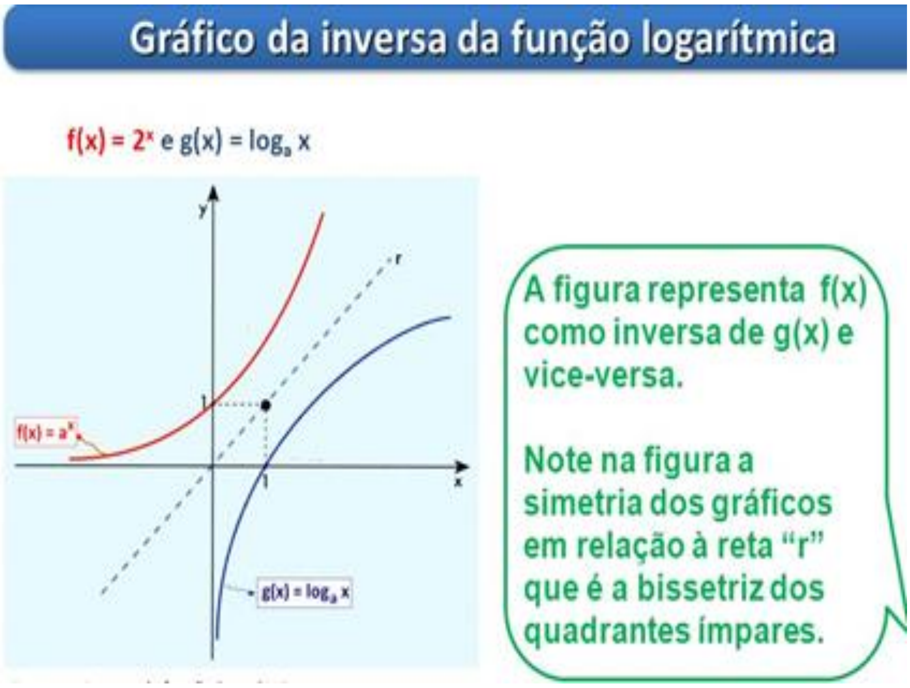
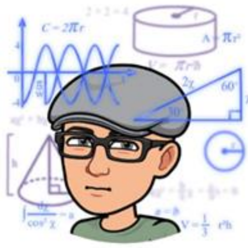
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de
Matemática no Nível Médio.

Luiz Augusto Oliveira da Silva

PRODUTO EDUCACIONAL GUIA DIDÁTICO
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA NUMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA





BELÉM/PARÁ
2023

Luiz Augusto Oliveira da Silva

Resolução de problemas para o ensino de função logarítmica numa sequência didática

Produto Educacional

Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.

Produto educacional vinculado à dissertação "Resolução de problemas para o ensino de função logarítmica numa sequência didática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

BELÉM/PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Silva, Luiz Augusto Oliveira da

Uma sequência didática sobre função logarítmica inspirada na resolução de problemas a partir de situações da realidade / Luiz Augusto Oliveira da Silva ; orientador Roberto Paulo Bibas Fialho. – Belém, 2023.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1. Função (Matemática). 2. Problemas, questões, exercícios. 3. Teoria das situações didáticas. I. Fialho, Roberto Paulo Bibas (orient.). II. Título.

CDD. 23º ed. 510.7

Elaborada por Regina Coeli A. Ribeiro – CRB-2/739

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃOCENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: “**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE FUNÇÃO LOGARÍTMICA INSPIRADA NARESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PATIR DE SITUAÇÕES DA REALIDADE**”.

Mestranda: **LUIZ AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA**

Data da avaliação**: 23/03/2023**

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:

( ) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio( ) Professores do Ensino Fundamental (X) Professores do Ensino Médio

(X) Outros: Professores do Ensino Superior

____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo
( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo
( ) Software ( ) Outro: ______________________________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: ____

(X) Não ( ) Não se aplica

c) É coerente com a questão-foco da pesquisa?

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____

d) É adequado ao nível de ensino proposto?

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____

e) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?

(X) Sim

( ) Não. Justifique? ____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* ( ) Sim (X) Não ( ) Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

(X) Sim, onde: Em um estabelecimento de ensino superior, com alunos que estudaram o assuntoquando fizeram o Ensino Médio ___

( ) Não, justifique: ___

( ) Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

(X) Sim, onde: _Escolas de ensino profissionalizante ___

( ) Não, justifique: ___

( ) Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

(X) Sim, onde: _ Em um estabelecimento de ensino superior, com alunos que estudaram o assuntoquando fizeram o Ensino Médio

___

( ) Não, justifique: ___

( ) Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

(X) na escola, como atividade regular de sala

de aula( ) na escola, como um curso extra

( ) outro: ___

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

( ) Alunos do Ensino

Fundamental( ) Alunos do

Ensino Médio

( ) Professores do Ensino Fundamental( ) Professores do Ensino Médio

(X) outros membros da comunidade escolar, tais como _alunos do Ensino Superior______

( ) outros membros da comunidade, tais como ________________________________

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA **Assinaturas**

Prof. Roberto Paulo Bibas Fialho (Presidente) ________________________

Doutor em Ciências e MatemáticaIES de Obtenção do Título: UFPA

Prof. Fábio José da Costa Alves (Examinador 01) ________________________

Doutor em Geofísica
IES de Obtenção do Título: UFPA

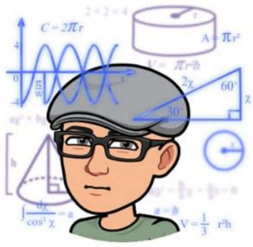
Aline da Silva Lima ________________________

Profa. Aline da Silva Dias (Examinador 02) ________________________

Doutora em Ciências e MatemáticaIES de Obtenção do Título: UFPA

Prof. Fernando Cardoso de Matos (Examinador 03)

Doutor em Ciências e MatemáticaIES de Obtenção do Título: UFPA



APRESENTAÇÃO

Caro Professor(a),

É com prazer que compartilhamos os resultado de uma experiência de sala de aula para trabalhar a função logarítmica. A versão inicial deste conjunto de atividades está apresentada na dissertação intitulada “ Resolução de problemas para o ensino de função logarítmica numa sequência didática”, cujas atividades foram testadas em uma turma do 1º ano da Universidade Estadual do Pará na cidade de Conceição do Araguaia, no período de junho de 2022. Após esta implementação inicial, foram realizadas diversas alterações, e uma nova versão está apresentada neste produto educacional, que foi submetido a uma banca composta pelos professores, Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho (Orientador), Dr. Fábio José da Costa Alves, Dr. Fernando Cardoso e Dra. Aline da Silva Lima.

Sugerimos que o professor inicie conversando com a turma a importância que a função logarítmica possui na resolução de problemas para a ciência, destacando que o seu uso facilita e compreenda diversos fenômenos da natureza como, por exemplo, quantificar a intensidade de um terremoto. Sugerindo também que o professor oriente os alunos durante a execução dos problemas, evitando fornecer respostas prontas, e sim questionando possíveis soluções e encaminhamentos propostos pelos estudantes. Assim, mostra-se aos alunos a possibilidade deles participarem ativamente no seu processo de aprendizagem.

Nas cinco sessões de atividades sobre função logarítmica foram elaboradas a partir dos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue e buscam envolver representações aritméticas e algébricas aliando com as atividades propostas encontram-se fundamentadas na Teoria das Situações Didática (TSD) de Brousseau, que procura compreender as interações que ocorrem entre o professor, o aluno e o saber, presente na sala de aula. Tais interações didáticas ocorrem em diferentes níveis, mas dois merecem destaque: o nível das situações adidáticas e o nível das situações didáticas.

As cinco sessões contêm orientações de utilização em sala de aula e a sua resolução e possíveis dificuldades que possam ser apresentadas pelos estudantes essa proposta, levamos em conta, ao fazer o planejamento da sequência didática, que o aluno pudesse usar recursos com os quais estivesse constantemente em contato, como os estudos em sala de aula e com o teste de sondagem. O resultado foi uma sequência que despertou o interesse dos estudantes e envolveu-os no estudo da função logarítmica.

As atividades presentes nesta sequência didática privilegiam as situações citadas, sempre tendo como foco as ações dos alunos em relação a função logarítmica, valorizando os seus conhecimentos prévios e incentivando a sua participação ativa no processo de aprendizagem. As atividades se destacam na presença da contextualização e na interdisciplinaridade, que abordam situações do dia a dia dos alunos, levando-os aperceber a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos em situações concretas e inseridas em sua vivência.

Nesse sentido as atividades visam a oportunizar aos alunos condições de apropriar-se do conhecimento matemático relativo a função logarítmica, por meio de um processo significativo, no qual eles compreendam sua importância e aplicação em diferentes situações do cotidiano. Elas foram inicialmente aplicadas em uma turma do 1º ano de Licenciatura em Matemática na cidade de Conceição do Araguaia. Na aplicação inicial foram usadas 5 aulas de 120 minutos cada.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa sugere verificar a utilização de uma sequência didática, na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, elaborada segundo as etapas da Engenharia Didática, com problemas que privilegiam situações reais incentivando à pesquisa e atividades relacionadas ao surgimento dos logaritmos, contribuindo para a construção e compreensão da função logarítmica por parte dos alunos. O estudo está fundamentado na didática da matemática que se preocupa com resultados de experiências em sala de aula.

A metodologia utilizada segue os princípios da Engenharia Didática, a qual se justifica pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa e cuja finalidade é analisar as situações didáticas, objeto de estudo da educação matemática. As atividades da sequência foram elaboradas com os alunos de graduação do 1º ano, da Universidade Estadual do Estado do Pará, na resolução de problemas através da função logarítmica. Nesse trabalho, foram analisadas as produções de 19 (dezenove) alunos, organizados em duplas e trio. Pode-se inferir a partir das análises a posteriori, que as atividades da sequência contribuíram para compreensão da função logarítmica sendo a inversa da função exponencial.

A partir da análise realizada, pôde-se verificar que os alunos participantes da pesquisa obtiveram uma maior compreensão sobre o ensino da função logarítmica por parte do professor-pesquisador, do que nas aulas tradicionais. Pois, a utilização de tendências em Educação Matemática, aplicadas a determinado conteúdo, facilitou ainda mais o processo de ensino e aprendizagem do mesmo, e tornaram a aprendizagem do conceito de logaritmo e função logarítmica mais significativo, possibilitando aos alunos utilizarem-se desse conceito para o entendimento de fenômenos do mundo real.

A função logarítmica é utilizada para modelar inúmeros fenômenos da natureza, tais como: Calcular a intensidade de terremotos, a altura de determinadas plantas, o ph de solução químicas, entre outras. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problemas, os alunos serão conduzidos na resolução algébricas das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação.

2. PROPOSTAS DE ATIVIDADES

2.1. Apresentação das Atividades

Buscamos seguir as orientações do BNCC (2018), para que o ensino seja voltado para situações reais que se aproximem do cotidiano dos estudantes, assim reforçando conceitos matemáticos que estimule os estudantes ao pensamento crítico matemático por meio das relações de estratégias, conceitos, procedimentos matemáticos, construção de modelos.

Construímos a sequência didática composta por 5 (sessões) atividades direcionadas ao conteúdo de Função Logarítmica. As atividades foram elaboradas de forma a explorar aplicações de outras áreas do conhecimento e também utilizando os recursos disponíveis do software Geogebra.

A primeira e a segunda atividade da I sessão, foram por meio de situações-problema. A primeira dando ênfase à ciência biológica (Número de bactérias), envolvendo a existência em uma cultura numa determinada hora buscam explorar os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, situação problema relacionada com a disciplina de biologia, mais precisamente o conceito de crescimento populacional de bactérias. E a segunda a concentração estimativas populacionais através de uma função exponencial, assim buscando trabalhar com as relações de função inversa.

As atividades da II sessão resolvendo problemas, o objetivo dessa sessão é que o aluno compreenda a definição e a utilização da função logarítmica, bem como a aplicação de algumas propriedades logarítmicas através da resolução de problemas.

As atividades da III sessão problemas envolvendo escala logarítmica. O objetivo é resolver problemas utilizando a definição de escala logarítmica para compreender e medir a intensidade de terremotos, a intensidade do som e pH de soluções, propiciando aos alunos uma oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas.

A atividade da sessão IV, a história e o surgimento dos logaritmos. O objetivo dessa sessão foi usar a História da Matemática para mostrar a construção e evolução do conceito de logaritmo de um número. Utilizando a ideia de Napier que se tornou o primeiro homem a desvendar os logaritmos, a sua análise lógica sobre esse procedimento ajudou a desenvolver melhor os cálculos tornando-se útil para o desenvolvimento científico e para estudos posteriores.

E finalmente a V sessão construindo o gráfico da função logarítmica. O objetivo dessa sessão é construir o gráfico da função logarítmica, com o auxílio do software Geogebra e identificar essa função como sendo a inversa da função exponencial, determinar o domínio e o conjunto imagem da função logarítmica, bem como as condições para que a função seja crescente ou decrescente.

2.2 Sessão I: construindo o conceito de logaritmo)

2.2.1 Crescimento Populacional de Bactérias

Atividade 1ª: O crescimento bacteriano em laboratório fornece um exemplo excelente de crescimento exponencial. No crescimento **exponencial**, a taxa de crescimento populacional aumenta ao longo do tempo, em proporção ao tamanho da população.

Vamos ver como isso funciona. Bactérias se reproduzem por fissão binária (se dividem ao meio), e o tempo entre as divisões é cerca de uma hora para a maioria das espécies de bactéria. Para ver este crescimento exponencial, vamos começar colocando 1.000 bactérias em um frasco, com um suprimento ilimitado de nutrientes.

Então nessa cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Considere que essa quantidade de bactérias no frasco no início da experiência. Com base nestas informações, responda as questões propostas.

a) Qual será o número de bactérias após uma hora?

b) Quantas bactérias haverá após duas?

c) Após três horas, qual será a quantidade de bactérias na cultura?

d) Chamando de $Q(x)$ o número Q de bactérias em função do número x de horas de experiência, é possível estabelecer uma lei de formação que modela está função.

e) Baseado na lei que modela a função no item d. Após quantas horas será constituída de 5.000 indivíduos? Considere $\log 2 \cong 0{,}3010$.

f) Se o número de elementos de uma determinada espécie de bactérias diminui à taxa de 10% ao ano. Em quantos anos ficará reduzido à metade? Indique o número inteiro mais próximo (Use $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 3 \cong 0{,}4771$)

g) Esses dados poderiam ser representados em um gráfico? De que forma?

Para a solução da 1ª atividade, os alunos podem construir uma tabela, como a descrita a seguir (Tabela 1), estabelecendo a relação entre o tempo e a quantidade de bactérias para responder as questões (a), (b) e (c).

Tabela 1. Cálculo da Quantidade de Bactérias a cada hora

Horas	Potências de 2	Quantidade de bactérias
0	$1.000 \,.\, 2^0$	1.000
1	$1.000 \,.\, 2^1$	2.000
2	$1.000 \,.\, 2^2$	4.000
3	$1.000 \,.\, 2^3$	8.000
4	$1.000 \,.\, 2^4$	16.000
6	$1.000 \,.\, 2^6$	64.000
8	$1.000 \,.\, 2^8$	256.000
10	$1.000 \,.\, 2^{10}$	$1.024.000$
....	....	....
x	$1.000 \,.\, 2^{\mathrm{x}}$	$1.000.\, 2^x$

Fonte: Dante, 2010 p,23

A partir da construção da tabela, espera-se que os alunos concluam que a quantidade é de 2.000 bactérias no item (a), no item (b) devem ser motivados a concluir que haverá 4.000 bactérias e os alunos devem chegar a conclusão de que após três horas a população será de 8.000 bactérias.

Para responder ao item (d) após a análise da tabela, espera-se que os alunos possam concluir que a função que relaciona “horas” com “quantidade de bactérias” é $Q(x) = \ 1.000.\, 2^x$, onde $Q(x)$ representa a quantidade de bactérias e x representa o tempo medido em horas.

No item (e) é esperado que os alunos formalizem a lei e posteriormente resolva a função exponencial e aplicar o logaritmo para a sua resolução.

$$Q(x) = \ 1.000.\, 2^x$$

$$5.000 = 1.000.\, 2^x$$

$$5 = 2^x$$

$$log5 = log2^x \quad (\log em\ ambos\ os\ lados\ da\ equação)$$

$$\log\frac{10}{2} = xlog2 \quad (usando\ as\ propriedades\ do\ quociente\ e\ da\ potência)$$

$$log10 - log2 = xlog2\ (substituindo)$$

$$1 - 0{,}3010 = x.\, 0{,}3010$$

$$0{,}6990 = x.\, 0{,}3010$$

$$x \cong 2{,}3222\ hs$$

No item (f) o objetivo é retomar a aplicação do logaritmo dentro de uma situação contextualizada. Para a sua resolução, o aluno deveria interpretar o problema, determinar a função matemática que representava a situação, manusear uma função exponencial e aplicar o logaritmo para a sua resolução.

$$P = P_0 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^t$$

$$\frac{P_0}{2} = P_0\ (1 - 0{,}1)^t$$

$$\frac{1}{2} = (0{,}9)^t \quad (\log em\ ambos\ os\ lados\ da\ equação)$$

$$log\frac{1}{2} = log(0{,}9)^t$$

$$log1 - log2 = t\ \left(log\frac{9}{10}\right)$$

$$-log2 = t(2log3 - 1) \ \ (substituindo\ os\ valores\ de\ log)$$

$$-0{,}301 = t(2.0{,}4771 - 1)$$

$$t = 6{,}57\ anos$$

Para responder ao item (g), o professor auxilia os alunos a concluírem que sim, pois há uma relação biunívoca entre o número de horas e a quantidade de bactérias. Dito de outra forma, os valores referentes ao número de horas e à quantidade de bactérias formam pares ordenados que podem ser usados no plano cartesiano, representando desta forma um gráfico. Como argumenta Brousseau (2008, p. 73), “o professor não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá que fazer diante de um problema, sem tirar-lhe, ao fazê-lo, a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente”.

2.2.2 Estimativas Populacionais

Atividade 2ª: As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sócio demográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretárias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento a dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Conceição do Araguaia no ano 2010 era de aproximadamente 45.557 (Fonte: IBGE). Ver a figura 1 abaixo, e está crescendo a uma taxa média anual de $1{,}5\%$. Pergunta-se:

a) Qual era a população estimada da cidade em 2011? Em 2013? Em 2015? Para 2016, 2018 e 2020 qual será a população estimada?

b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.

c) Represente graficamente a função obtida na letra (b)

d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?

Considere $\log 1{,}015 \cong 0{,}0064$ e $\log 2 \cong 0{,}3010$.

e) Quando a população da cidade será de aproximadamente 47.540 mil habitantes

f) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

Figura 1 - Mapa de população do município de Conceição do Araguaia/Senso-IBGE

Fonte: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/conceicao-do-araguaia

Para solucionar os problemas da 2ª atividade, os alunos devem observar que a população inicial P_0, em 2010, é de aproximadamente 45.557 (Quarenta e cinco e quinhentos e cinquenta e sete mil habitantes) e como a taxa média de crescimento anual é de $1{,}5\%$ ou, em número decimal $0{,}015$, então a população em 2011 será:

População de $2011 = (1 + 0{,}015)$**.** população de 2010. Com esse raciocínio constrói-se uma tabela com os valores da população da cidade de Conceição do

Araguaia em cada ano, iniciando com a população $P_0 = 45.557$ mil em 2010. Em 2011, após 1ano, haverá então:

$P_1 = 1{,}015\,.\,P_0 = 1{,}015\,.45557 \cong 46.240$ mil habitantes.

Em 2012, para $t = 2$, à população P_2 será: $P_2 = 1{,}015\,.\,P_1 = 1{,}015\,.\,(1{,}015\,.\,P_0) = (1{,}015)^2.\,P_0 = P_2 = (1{,}015)^2.\,45557 \cong 46.933$ mil habitantes

Em 2013, para $t = 3$, a população P_3 será:

$P_3 = 1{,}015\,.\,P_2 = 1{,}015\,.\,(1{,}015)^2.\,P_{0\,=}$

$= (1{,}015)^3.\,P_{0\,=}\,(1{,}015)^3.\,45.557 \cong 47.637$ mil habitantes.

Em 2015, para $t = 5$, a população P_5 será:$P_5 = 1{,}015\,.\,P_4 = 1{,}015\,.\,(1{,}015)^4.\,P_{0\,=}$

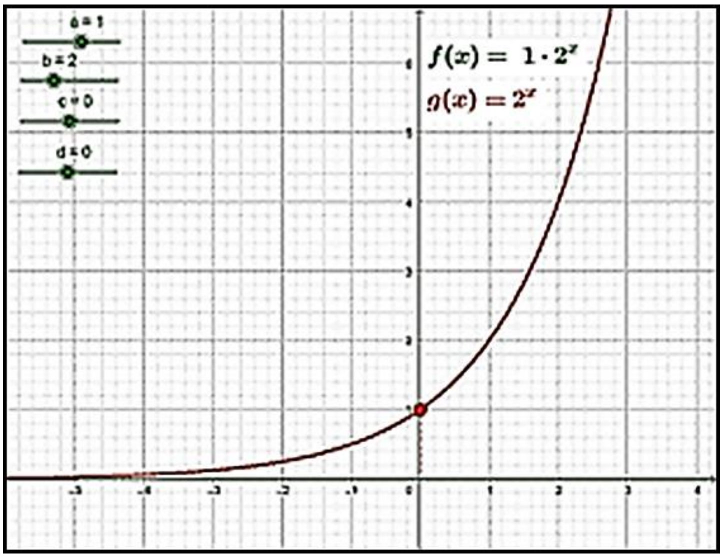
$= (1{,}015)^5.\,P_{0\,=}\,(1{,}015)^5.\,45.557 \cong 49.077$ mil habitantes.

Seguindo esse raciocínio obtém-se a lei de formação:

$$P(t) = P_0\,.\,(1{,}015)^t = 45557\,.\,(1{,}015)^t$$

Nessa lei, “t“ é a variável tempo e P_0 a população inicial da cidade. Esse modelo matemático facilitará o cálculo para as populações de $2016, 2018\ e\ 2020$ solicitadas no item (a) e possibilitará o cálculo da população em qualquer ano. O gráfico da função $P(t) = 45557.\,(1{,}015)^t$ pode ser esboçado com a utilização do aplicativo Geogebra, como na ilustração da figura 2 abaixo.

Figura 2 - Gráfico da função $P(t)$, Construção de deslizantes. Sessão 1



Fonte: Autor (2022)

Para responder ao item (d), isto é, em quanto tempo a população da cidade será duplicada, os alunos podem analisar o gráfico e obter uma resposta aproximada. Por exemplo, o dobro da população é $\mathbf{2}\,.\,45.557 = 91.114$ mil habitantes, portanto os alunos devem resolver a equação $45.557 \,.\, (1{,}015)^t = 91.114$. Fazendo a divisão $(1{,}015)^t = \frac{91114}{45557} = 2$. Colocando log em ambos os ambos os lados da equação exponencial temos, $log(1{,}015)^t = log2$, usando a propriedade da potência e substituindo os logs, o tempo necessário é de 47 anos.

Espera-se que os alunos possam resolver o item (e), após a definição de logaritmo decimal, utilizando uma calculadora cientifica, a seguinte expressão:

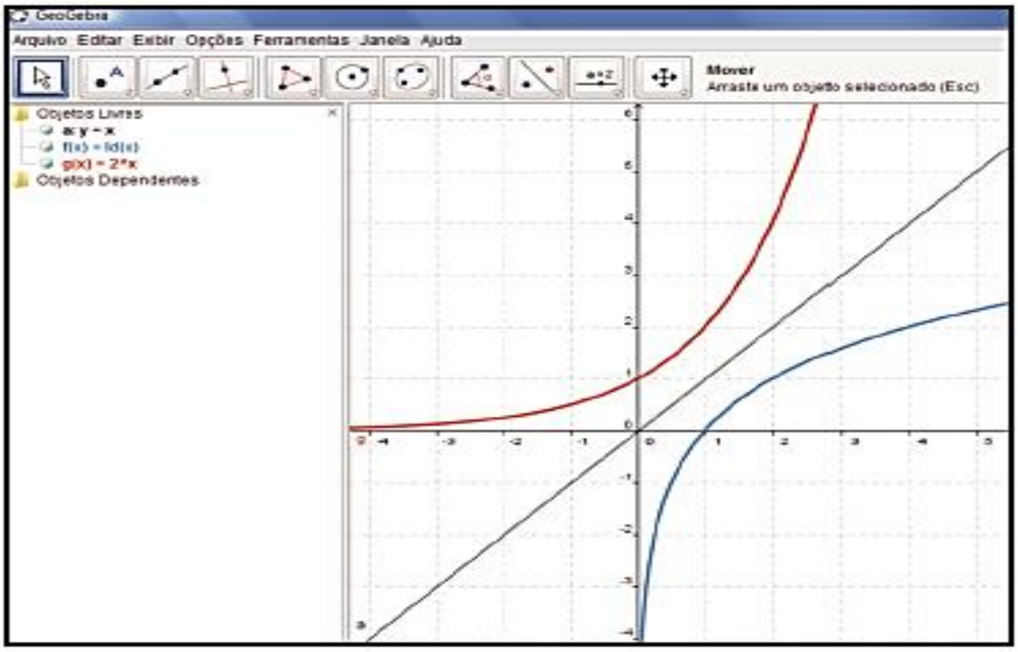
$47540 = 45557.\,(1{,}015)^t$, então $1{,}043 = \ (1{,}015)^t$,aplicando logaritmo decimal em ambos os membros tem-se:

$log1{,}043 = log\ (1{,}015)^t$, logo $0{,}0182 = t.\,0{,}0064$ e portanto

$$t \cong 3\ anos$$

Para a solução do item (f), os alunos podem novamente utilizar o software geogebra, obtendo o gráfico abaixo, conforme a ilustração da figura 3.

Figura 3 - Gráfico da função P(t), Construção de deslizantes



Fonte: Autor (2022)

A presença das funções exponenciais e logarítmicas no mesmo aplicativo é necessário já que uma é a inversa da outra. Isso permitirá a percepção da relação intrínseca dessas duas funções em diversas aplicações, pois na função exponencial o domínio é o expoente e na função logarítmica o seu domínio é a potência. Isso permitirá a aproximação dessas duas funções, já que em muitos livros didáticos o seu estudo é segmentado, tornando mais difícil a percepção da correlação didática de ambas.

2.3 Sessão II: Resolvendo Problemas

2.3.1 Atividade 1

Uma pessoa decidiu tomar um medicamento vendido em comprimidos de $500\ \mathrm{mg}$, cuja bula informava possuir meia-vida de 6 horas e que as dosagens deveriam respeitar esse período. Com base nessas afirmações e fazendo uso, quando necessário, de uma calculadora científica, responda as seguintes perguntas:

a) Complete a tabela abaixo que indica a evolução da quantidade do medicamento no organismo.

b) É possível construir uma lei de uma função que seja representativa da situação da dosagem única? Qual?

c) Tendo a pessoa tomado apenas uma única dose em quanto tempo a quantidade caiu a oitava parte da quantidade inicial? E a quarta parte?

d) Em quanto tempo, após a ingestão de uma única dose, a quantidade foi de $300\mathrm{mg}$? E $100\mathrm{mg}$?

Os alunos podem construir uma tabela, como a descrita a seguir (Tabela 2), estabelecendo a relação de número de horas transcorrido desde a primeira dosagem.

Tabela 2 - Relação de número de horas transcorrido desde a primeira dosagem

	Número de horas trascorridos desde a primeira dosagem									
Doses	0 horas	6 horas	12 horas	18 horas	24 horas	30 horas	36 horas	42 horas	48 horas	54 horas
1ª	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125	0,9765625
2ª		500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125
3ª			500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625
4ª				500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125
5ª					500	250	125	62,5	31,25	15,625
6ª						500	250	125	62,5	31,25
7ª							500	250	125	62,5
8ª								500	250	125
9ª									500	250
10ª										500
Q(mg)	500	750	875	937,5	968,75	984,375	992,1875	996,09375	998,0469	999,02344

Fonte: AAP 2020

Para responder o item (b) é esperado que as duplas possa estabelecer uma lei de formação cuja tabela tem o período de meia vida de t horas, e será possível de ser tratar de uma função do tipo exponencial com com $Q(0) = 500 \ e \ a = 0{,}5$, considerando a função referente à primeira dose: $\mathrm{Q} = 500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mathrm{t}}{6}}$, t em horas.

Nos itens (c) e (d) com o modelo já modelado no item (b) os alunos podem chegar aos resultados: No item (c) Resolvendo a equação:

$$Q(t) = 500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}, \textit{ t em horas}$$

$$\frac{500}{4} = 500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} = 2 \rightarrow t = 12 \ horas \quad \text{e}$$

$$\frac{500}{8} = 500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{1}{8} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \rightarrow \frac{t}{6} = 3 \rightarrow$$

$$t = 18 \ horas$$

No item (d) Resolvendo a equação:

$$500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 300 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = \frac{300}{500} \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 0{,}6 \rightarrow log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = log0{,}6 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} \ log\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}222 \rightarrow \frac{t}{6} = \frac{-0{,}222}{-0{,}301} \rightarrow$$

$$t = 4{,}425 \ horas$$

e

$$500.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = 100 \rightarrow$$

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}} = log\left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} \ log\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}699 \rightarrow$$

$$\frac{t}{6} = \frac{-0{,}699}{-0{,}301} \rightarrow$$

$$t = 13{,}933 \ horas$$

2.3.2. Atividade 2: Riscos do uso do paracetamol

O paracetamol principalmente a marca Tylenol, é um dos medicamentos mais populares do mundo. Estudo realizado pelo Instituto IMS Health revela que no Brasil a venda do medicamento teve um crescimento de 80%, aumentando de cerca de $20{,}6$ milhões de unidades para $37{,}2$ milhões, correspondendo a um faturamento de $R\$\ 507.000.000{,}00$ em 2012. Muito desse sucesso de vendas é baseado no fato de que no Brasil não existe nenhuma exigência de receita e nem um limite na quantidade que pode ser comprada.

Agrega-se a isso o fato de se ter pouca informação nas embalagens quanto ao risco do uso equivocado, o que faz parecer se tratar de um medicamento totalmente seguro. A realidade, porém, é outra, o paracetamol pode causar graves danos ao fígado se tomado em dosagem acima da recomendada ou em concomitância com bebidas alcóolicas e outras substâncias que tenham ação no fígado como vemos na bula do medicamento (Laboratório Medley).

ABIFARMA: Associação Brasileira da indústria farmacêutica: Este medicamento é contraindicado para menores de 12 anos.

Baseado no texto resolva os seguintes questionamentos dos itens abaixo:

A quantidade referente à primeira dosagem é dada pela função $\mathrm{c(t)} = 400.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mathrm{t}}{8}}$, onde $\mathrm{c(t)}$ indica a quantidade em mg do medicamento decorridas t horas. Supondo que a pessoa tomou apenas uma dose desse medicamento. Então:

a) Em quanto tempo a quantidade decaiu a oitava parte da quantidade inicial?

b) considerando $\log 2 = 0{,}301$, determine quanto tempo levou para que a quantidade fosse de $128\ \mathrm{mg}$?

c) Em quanto tempo a quantidade atingiu $40\ \mathrm{mg}$?

d) Qual a quantidade após 50 horas ? Deve ser utilizada uma calculadora científica.

Para resolver a segunda atividade é esperado que os alunos possam interpretar a situação problema uma vez que a função já está modelada.

$$\frac{400}{8} = 400.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mathrm{t}}{8}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

Como a função exponencial é injetiva temos que:

$$\frac{t}{8} = 3$$

$$t = 24\ horas.$$

O esperado é que os alunos resolva a equação considerando $\log 2 = 0{,}301$, pra determinar o tempo que levou a quantidade de $128\ mg$.

$$400.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 128$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{128}{400}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{32}{100}$$

$$\log 2^{\frac{-t}{8}} = \log\left(\frac{32}{100}\right)$$

$$\frac{-t}{8}\log 2 = \log 2^{5} - \log 10^{2}$$

$$\frac{-t}{8}(0{,}301) = 5\log(2) - 2$$

$$\frac{-t}{8}0{,}301 = 5(0{,}301) - 2$$

$$t = 13{,}16\ horas$$

Os alunos possam interpretar em quanto tempo a quantidade atingiu $40\ mg$, o esperado é que resolvendo a equação cheguem no resultado final.

$$400.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 40$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{10}$$

$$\log 2^{\frac{-t}{8}} = \log 10^{-1}$$

$$\frac{-t}{8}\log 2 = -1$$

$$\frac{-t}{8}(0{,}301) = -1$$

$$t = 26{,}58\ horas$$

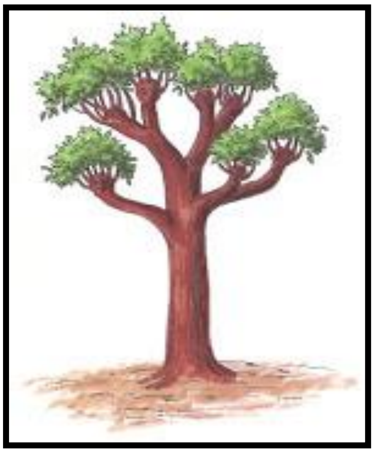
Após a manipulação dos logaritmos em situações mais simples é esperado que os alunos envolvam cálculos sobre a quantidade total. Calculando a quantidade após 50 horas.

$$Q(50) = 400\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{8}} = 400\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{25}{4}}$$
$$= 400\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{4}}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{400}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 5{,}26\,mg$$

2.3.3 Atividade 3

Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore na Amazônia (figura 4), modelou o crescimento dela de acordo com a relação $C(t) = 2 + 0{,}4\log_4(t-3)$, onde t representa o tempo em anos e $C(t)$ é a altura em metros.

Figura 4 - Árvore amazônica



Fonte: HTTP://omundodsarvorestga.blogspot.com

Pergunta-se:

a) É possível calcular o tamanho da árvore quando $t = 0$? Justifique a sua resposta.

b) Qual o domínio matemático dessa função?

c) Obtenha a altura da árvore quando $t = 19 \ e \ t = 67$. A altura diminui, aumenta ou permanece constante com o passar dos anos? Justifique a sua resposta.

Nesta atividade há um exemplo onde foi apresentado um método que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que serviu de base para a resolução das perguntas.

É esperado que os alunos respondem corretamente as questões. No item (a) foi perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, os alunos tenham em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deveria ser zero. Segue o modelo da resolução.

$$\boldsymbol{a})\ C(0) = 2 + 0{,}4\log_4(0-3)$$
$$C(0) = 2$$

$$(b)$$
$$\boldsymbol{b})\ t - 3 > 0$$
$$t > 3$$

$$(\boldsymbol{c})$$
$$C(t) = 2 + 0{,}4\log_4(t-3)$$
$$C(19) = 2 + 0{,}4\log_4(19-3)$$
$$C(19) = 2 + 0{,}4\log_4(16)$$
$$C(19) = 2 + 0{,}4\log_4 4^2$$
$$C(19) = 2 + 0{,}4.2.1$$
$$C(19) = 2{,}8$$

$$C(t) = 2 + 0{,}4\log_4(t-3)$$
$$C(67) = 2 + 0{,}4\log_4(67-3)$$
$$C(67) = 2 + 0{,}4\log_4(64)$$
$$C(67) = 2 + 0{,}4\log_4 4^3$$
$$C(67) = 2 + 0{,}4.3.1$$
$$C(67) = 3{,}2$$

2.3.4 Atividade 4: Mudas de abacaxi.

O projeto 'Transferência e Difusão da Produção Integrada de Abacaxi no Estado do Pará foi implantado nos municípios de Floresta do Araguaia, mesorregião do Sudeste do Pará, microrregião de Conceição do Araguaia, e Salvaterra, mesorregião do Marajó e microrregião do Arari. É coordenado pela Embrapa Amazônia Oriental e executado em parceria com a Secretaria de Estado de Agricultura do Pará (SAGRI), Serviço de Política e Desenvolvimento Agropecuário/Superintendência Federal de Agricultura (SEPDAGPA/ SFA/MAPA), Agência de Defesa Agropecuária do Estado do Pará (ADEPARÁ), Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural do Estado do Pará (EMATER-PA), Prefeitura Municipal de Floresta do Araguaia e iniciativa privada (abacaxicultores).

O Estado do Pará ocupava a primeira posição entre os estados produtores de abacaxi do Brasil com uma área plantada de 15.462 ha e a produção de $389.971.000$ frutos, entretanto, a previsão de safra 2009 com 10.358 ha (IBGE, $2009a$) coloca o Pará na terceira posição. A produção de Salvaterra abastece o mercado de Belém, mas é no sudeste paraense que se concentra a maior produção do Estado (Homma et al., 2002). Floresta do Araguaia, com uma produção em 2007 de 194.000 mil frutos, variedade Pérola (IBGE, 200gb), é o principal produtor nacional com a característica da produção de furtos no período da entressafra brasileira (Homma et al., 2002).

Se um produtor da cidade de Floresta do Araguaia decidiu investir no plantio de mudas de abacaxi. No primeiro ano do plantio, esse produtor plantou X mudas de abacaxi. Em seu planejamento, o produtor previu que seu plantio dobraria a cada ano. Após quanto tempo o número de mudas passará a ser 20 vezes a quantidade inicial? (Considere $\log 2 = 0{,}3$)

Esperamos que os alunos percebam a relação entre a quantidade inicial de mudas e a razão de crescimento por ano ao decorrer do tempo. E que associem, o termo "duplicar" com o termo "dobro". A ideia central, é que, o aluno perceba a relação exponencial transformada pela sua inversa.

É esperado a sua resolução:

TM (total de mudas) = $20x$

x (Quantidade inicial de mudas) = x

R(Razão de crescimento por ano)= 2 anos

N(tempo t em anos) = t

Lei de formação: $TM = C.R^N$

Aplicação:

$20x = x.2^t$ (representação exponencial)

$20 = 2^t$ (aplicar log em ambos aos lados)

$\log 20 = \log 2^t$

$\log 2 + \log 10 = t.\log 2$

$0{,}3 + 1 = t.0{,}3$

$t = 4{,}333 \dots anos\ (4 + 0{,}333 \dots)$

Fazendo: $0{,}3333 \dots .x12\ meses = 4\ meses$

Logo temos: $4\ anos\ e\ 4\ meses$.

2.3.5 Atividade 5

Durante o primeiro semestre você economizou $R\$\ 800{,}00$ e agora quer aplicar num fundo de aplicação que rende, em média, 25% a.m. Em quantos meses, você terá no mínimo $R\$\,32.000{,}00$? (Utilize uma calculadora científica para realizar os cálculos necessários).

Para a solução da quinta atividade, os alunos devem encontrar o modelo matemático que permita calcular o montante com passa do tempo. Inicialmente tem-se $R\$\,800{,}00$.

Espera-se que os alunos percebam, com relação à taxa de juros, que $25\% = \frac{25}{100}$ = 0,25. Para encontrar o modelo matemático, observa-se que:

Após 1 mês, será $800 + 800.0{,}25 = 800.(1 + 0{,}25) = 800.1{,}25$.

Após 2 meses, será $800.1{,}25 + 0{,}25.(800.1{,}25) = (800.1{,}25).(1 + 0{,}25) = 800.(1{,}25)^2$.

Após 3 meses, será $800.(1{,}25)^2 + [800.(1{,}25)^2] = 800.(1{,}25)^2.(1 + 0{,}25) = 800.(1{,}25)^3$, logo, após ”t” meses, o montante será dado por:

$M(t) = 800.(1 + 0{,}25)^t$

Portanto para que se atinja a quantia de $R\$\,3.200{,}00$, deve-se obter o valor de tal que: $3200 = 800(1 + 0{,}25)^t$, então $4 = (1{,}25)^t$, logo

Aplicando logaritmo em ambos os membros e utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência vem que:

$\log 4 = \log(1{,}25)^t$, usando a calculadora científica obtém-se,

$0{,}6020 = t.\log(1{,}25)$

$0{,}6020 = t.0{,}0969$

$t = \frac{0{,}6020}{0{,}0969}$ ≅ 6,21 portanto, em aproximadamente $6\,meses$.

2.3.6 Atividade 6

Se você ganhar na loteria $R\$\,900{,}00$ e aplicou num banco com juros compostos à taxa anual de 15%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de $R\$\,600{,}00$?

Para a solução da terceira atividade, os alunos devem observar que para se obter juros no valor de $R\$\,600{,}00$, seu montante será de $R\$\,1.500{,}00$. Lembrando que a taxa de juros é 15% ao ano, deve-se calcular o tempo tal que:

$1.500 = 900.(1 + 0{,}15)^t$, ou $\frac{15}{9} = (1{,}15)^t$

Pode-se aplicar a propriedade do quociente de um logaritmo, conforme os dados no enunciado ou utilizar a calculadora cientifica para obter-se:

$\log 1{,}6666 = t.\log 1{,}15$

$0{,}2218 = t.0{,}0606$, portanto $t = 3{,}6600$

E concluir que daqui a 3 anos e 6 meses aproximadamente, serão obtidos juros no valor de $R\$\ 600{,}00$.

2.4 Sessão III: Problemas envolvendo escala logarítmica.

O objetivo é resolver problemas utilizando a definição de escala logarítmica para compreender e medir a intensidade de terremotos, a intensidade do som e pH de soluções, propiciando aos alunos uma oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente. A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problemas, os alunos serão conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema, com o objetivo de obter uma resposta satisfatória em cada situação.

A apresentação do estudo dessas funções é essencial para o aluno perceber a sua importância em diversas situações cotidianas. Através de situações-problema, os alunos foram conduzidos na resolução algébrica das equações que modelam cada problema com o objetivo de obter uma resposta satisfatória. Nessa sessão ao todo são três atividades propostas realizadas no quarto e no quinto dia.

2.4.1 Atividade 1: Aplicação em terremotos

Um terremoto, ou sismo, ocorre quando rochas da litosfera submetidas a altas tensões se acomodam (sismo). As ondas sísmicas, causadas pelo choque, partem em todas as direções a partir de um ponto chamado foco ou hipocentro. O ponto situado na superfície exatamente acima do foco é chamado de epicentro do terremoto. A partir desse ponto, as ondas de choque fazem com que o solo se mova em movimentos cíclicos que geram “ondas” forçando o solo para cima e para baixo, e de um lado para o outro. Quando o epicentro está abaixo de um mar ou oceano, ele pode criar um maremoto ou um tsunami, uma onda gigante, como na figura 5 abaixo.

Figura: 5 - Tsunami invadindo rodovia no Japão logo após o terremoto de março de 2011.

Fonte: http//www.lemas.furg.br

A maior parte dos terremotos ocorre nas áreas de contato entre placas tectônicas, ou em falhas entre dois blocos rochosos, como mostra a figura 6.

Figura 6 - Área de contato entre placas tectônicas.

Fonte: http//www.lemas.furg.br

O comprimento de uma falha pode variar de alguns centímetros até centenas de quilômetros, como é o caso da falha de Santo André (ou San Andreas), na Califórnia, Estados Unidos, conforme mostra a figura 7 abaixo.

Figura 7 - Falha de Santo André - San Francisco - Los Angeles.

Fonte: http//www.lemas.furg.br

Só nos Estados Unidos, ocorrem de 12 mil a 14 mil terremotos anualmente (ou seja, aproximadamente 35 por dia). De acordo com registros históricos de longo prazo, aproximadamente 18 grandes terremotos (de 7 a 7,9 na escala Richter) e um terremoto gigante (8 ou acima) podem ser esperados num ano.

O maior terremoto já registrado foi o grande terremoto do Chile, em 1960, que atingiu 9,5 na escala Richter, seguido pelo da Indonésia, em 2004, que atingiu 9,3 na mesma escala. A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro.

A intensidade I de um terremoto é um número que varia de $I = 0$ até $I = 9{,}5$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I(E) = \frac{2}{3} \, .\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que $E,$ é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7\,.\,10^{-3}\ kwh$ ..

Tomando como base o texto e seus conhecimentos teóricos a respeito de função exponencial e logarítmica, analise e responda às questões: Explorando a lei da função logarítmica. Calcule a intensidade na escala Richter para as seguintes energias liberadas:

a) $E = 7.\,10^9\ kwk$ e $E = \ 7.\,10^7\ kwk$

b) Se a energia liberada é cada vez maior nos terremotos, o que ocorre com o valor da sua escala Richter? Justifique a sua resposta.

c) Determine o domínio, a imagem e a intersecção da função com o eixo horizontal.

d) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

e) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Tendo sido dado o valores de $E = 7.10^9\ kwk, E = 7.10^7\ kwk$ e $E = 7.10^5\ kwk$, o aluno deve concluir que a expressão que calcula a intensidade do terremoto ficará $I = \frac{2}{3}.\log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$, substituirá os valores e posteriormente encontrar os resultados.

Inicialmente o professor retoma os conteúdos a respeito de domínio e imagem da Função Logarítmica, bem como revisa também o significado geométrico do ponto de intersecção da função com o eixo horizontal. A partir de então, os alunos podem concluir que o domínio desta função é R^+ e a imagem é R. Assim como os discentes devem lembrar que o ponto onde o gráfico intercepta o eixo horizontal tem como ordenada o valor $y = 0$, neste caso onde $I = 0$I. Logo, é possível desenvolver o seguinte cálculo:

$$0 = \frac{2}{3}.\log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right)$$
$$\frac{0}{\frac{2}{3}} = \log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right)$$
$$0 = \log\left(\frac{x}{7.10^{-3}}\right)$$

A partir daí, utilizando a definição de logaritmos, tem-se:

$$10^0 = \frac{x}{7.10^{-3}}$$
$$1 = \frac{x}{7.10^{-3}}$$
$$x = 7.10^{-3}$$

Assim, a função que representa a intensidade do terremoto intercepta o eixo x no ponto $0{,}007$.

Como é esperado que todos os alunos possam encontrar a energia liberada de um terremoto de 8 na escala Richter, usando a fórmula:

$$8 = \frac{2}{3}.\log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$
$$E = 7.10^9 kwh$$

Será aumentada.

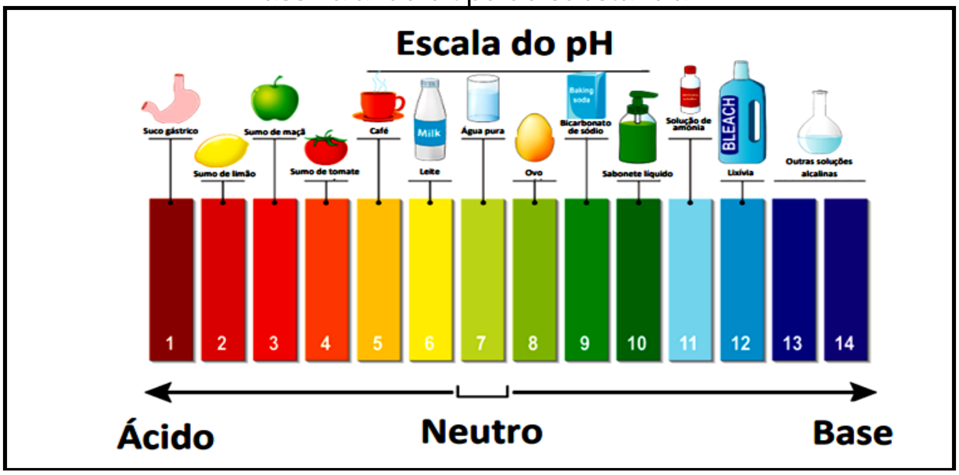
2.4.2 Atividade 2: pH (ácidos e base)

Em Química, a acidez de uma solução líquida é medida pela concentração de íons de hidrogênio na solução (a unidade de medida, a título de informação, é de "moles por litro"). A concentração de hidrogênio é denotada por $[H^+]$. Como tais concentrações geralmente envolvem expoentes negativos de 10, ordens de grandeza negativas são usadas para comparar níveis de acidez. A medida de acidez usada é pH e é o oposto do logaritmo na base 10 da concentração de hidrogênio: $P[H^+] = -\log[H^+]$.

Soluções mais ácidas têm concentrações de íons de hidrogênio mais altos e valores de pH mais baixos. *(texto extraído do site: www.pearson.com.br).*

O cálculo matemático para determinar o pH de um solução aquosa é dado pela relação $P[H^+] = -\log_{10}[H^+]$ onde H^+ representa a quantidade de íons de Hidrogênio na solução. A definição inicial de solução ácida, básica e neutra é: para $pH = 7$ temos uma solução neutra, $pH > 7$ tem-se a solução básica e para $pH < 7$ tem-se a solução ácida. A faixa de valores é $0 \leq pH \leq 14$. (figura 8). Entretanto, hoje é de conhecimento científico que há soluções com pH fora dessa faixa.

Figura 8. Escala de pH. As cores são baseadas num indicador de pH que muda de cor, assinalando o tipo de substância.



Fonte: https://universidadejunior.up.pt

Um químico, em seu trabalho cotidiano de laboratório precisa calcular o pH de quatro soluções que estão dispostas na figura acima. Antes de efetuar os cálculos, ele obteve as quantidades dos íons de Hidrogênio das soluções:

Cor da solução	Concentração
Azul	$H^+ = 10^{-8}$
Vermelha	$H^+ = 10^{-4}$
Verde	$H^+ = 10^{-7}$
Laranja	$H^+ = 10^{-12}$

a) Classifique cada uma das soluções da tabela acima em ácida, básica ou neutra, justifique com os seus cálculos necessários.

b) Pelas regras de potência, qual das substâncias na tabela acima possui a maior concentração hidroniônica? Justifique a sua resposta.

c) Quantas vezes a concentração de íons de hidrogênio da cor Azul é maior que da cor Laranja?

d) Que ordem de grandeza difere um produto do outro?

É esperado que os alunos possam desenvolver os cálculos verificando os conhecimentos adquirido sobre pH a partir das informações contidas na situação problema.

a) $H^{+} = 10^{-8}$ = Básica
$H^{+} = 10^{-4}$ = Ácida
$H^{+} = 10^{-7}$ = Nêutra
$H^{+} = 10^{-12}$ = Básica

b) é esperado que os alunos apresentam a potência de 10^{-4}.

c) $\frac{Cor\ Azul}{Cor\ laranja} = \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10^{4}$

d) A concentração de íons de hidrogênio da cor azul tem sua ordem de grandeza 4 vezes maior que a da cor laranja, exatamente a diferença entre os níveis de pH.

2.4.3 Atividade 3: Entendendo os decibéis

O decibel (dB) é uma unidade logarítmica que indica a proporção de uma quantidade física (geralmente energia ou intensidade) em relação a um nível de referência especificado ou implícito. Uma relação em decibéis é igual a dez vezes o logaritmo de base 10 da razão entre duas quantidades de energia (The Institute of Electrical and Electronics Engineering, 2000). Um decibel é um décimo de um bel, uma unidade raramente usada, uma vez que apresenta valores muito elevados, pouco práticos de serem utilizados com relação à audição humana. Apesar de poder ser definido a partir de diferentes grandezas físicas, como por exemplo a pressão sonora, utilizaremos para efeito desse trabalho a definição que trabalha com intensidade sonora.

Definimos intensidade sonora (I) como sendo a razão entre a potência sonora e a área da superfície considerada, isto é, $I = \frac{P}{A}$. Esta razão serve principalmente para avaliar se um som é forte ou fraco tendo como unidade (watt/m²). No entanto, a utilização da intensidade sonora apresenta grandes dificuldades, por trabalhar com valores decimais muito pequenos. Portanto, ao trabalharmos com decibel, temos uma vantagem operacional muito grande.

A partir da definição de decibel e da escolha por utilizar intensidade sonora podemos escrever a fórmula:

$$I_{db} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right), \text{ onde } I_0 = 10^{-12}\ watt/\ \mathrm{m}^2.$$

O nível de intensidade sonora é medido em decibéis, indicado por db. Como o nível de intensidade varia em escala logarítmica, os sons cuja intensidade são 10^n vezes maior do que a intensidade mínima I_0, são percebidos com nível de intensidade "n" vezes maior.

a) De acordo com os dados, o nível de intensidade no limiar da audição é 0 db. Calcule qual é a intensidade (I_0) do som correspondente a esse nível de intensidade?
b) O nível de intensidade de uma conversação normal (a 1 m de distância) é de 60 db. Calcule qual é a intensidade (I_{60}) sonora correspondente a este nível de intensidade?
c) Cientistas afirmam que a partir de 120 db, o som provoca dor e a partir de 160 db pode haver ruptura do ouvido humano. Calcule qual é a intensidade sonora (I_{120}) db?

Como o nível de intensidade sonora é dado por $I_{db} = 10.\log\frac{I}{I_0}$ tem-se que:

$$0 = 10.\log\frac{I}{10^{-12}} \quad ou \quad 10^0 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ logo } 10^{-12} = I_0$$

Espera-se que os alunos cheguem a conclusão de que para um nível de intensidade mínimo de 0 db, a intensidade inicial seja $I_0 = \frac{10^{-12}w}{m^2}$.

Para o item (b), segue-se o mesmo raciocínio, para um nível de intensidade de 60 db, tem-se:

60 = 10. $\log\frac{I}{10^{-12}}$ portanto, $10^6 = \frac{I}{10^{-12}}$ ou $10^6 = \frac{I}{10^{-12}}$ ou $10^6.10^{-12} = I$

Logo, $10^{-6} = I$, portanto, a intensidade sonora $I_{60} = \frac{10^{-6}W}{m^2}$.

Para o item (c) , segue que para um nível de intensidade de 120db resulta:

120 = 10 . $\log\frac{I}{10^{-12}}$ ou 12 = $\log\frac{I}{10^{-12}}$ logo, $10^{12} = \frac{I}{10^{-12}}$ ou, $10^{12}.10^{-12} = I,$

Logo $10^{0} = I$ portanto I_{120} = $10^{0} = 1\ W/m^{2}$.

2.5 Sessão IV: A história e o surgimento dos logaritmos

O objetivo dessa sessão foi usar a História da Matemática para mostrar a construção e evolução do conceito de logaritmo de um número. Utilizando a ideia de Napier que tornou-se o primeiro homem a desvendar os logaritmos, a sua análise lógica sobre esse procedimento ajudou a desenvolver melhor os cálculos tornando-se útil para o desenvolvimento científico e para estudos posteriores.

Um dos meios mais utilizados para se compreender o significado lógico dos logaritmos são as progressões geométricas e progressões aritméticas. Para desenvolver os logaritmos, Napier apropriou-se das progressões aritméticas e geométricas, estabelecendo uma relação entre elas. Pode-se observar:

$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 \quad 512$ (Progressão Geométrica)

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$ (Progressão Aritmética)

A sua primeira observação apontou que o produto de dois termos da primeira progressão está associado com a soma dos dois termos correspondentes da segunda progressão.

2.5.1 Atividade 1ª : Foi distribuído aos alunos o texto a seguir:

A história da Matemática relata que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente os relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos já vinham tentando achar um processo que permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Burgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Napier ao comparar os termos de duas sequências, por exemplo:

$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 \quad 512 \quad 1024$ ...

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$ ...

Notou que existem números que podem ser expressos como produto de outros números. Ao observar as sequências acima, Napier percebeu que para multiplicar dois termos da primeira sequência, bastava somar os seus correspondentes na outra sequência e ver qual o termo da primeira sequência que corresponde a essa soma.

Ele também observou que para realizar o produto de $4 . 8$ bastava somar $2 + 3 = 5$, ou seja, os seus correspondentes na segunda sequência e encontrar o termo da primeira que corresponde ao 5. Neste caso, é o 32. Com esse raciocínio John Napier e Jobst Burgi, publicaram as primeira tábuas de logaritmos.

Observando as sequências abaixo,

3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

E usando as ideias de Napier, pergunta-se:

a) Qual é o produto de 9 por 81? E o de 27 por 243? Justifique sua resposta.
b) Qual é a divisão de 19683 por 2187? Justifique sua resposta com base no método de Napier.
c) Qual é o resultado de 27 elevado ao quadrado? Justifique sua resposta.

Segundo as ideias de Napier e com base no exemplo dado, para realizarem o $9 . 81$, localizados na primeira sequência, os alunos devem perceber que somando os elementos correspondentes a esses números na segunda sequência, ou seja, $2 + 4 = 6$, identificando na primeira sequência o número 729. Para o produto $27 . 243$, também da primeira sequência, basta que ao alunos somem os números correspondentes de 27 e de 81, na segunda sequência, no caso. $3 + 5 = 8$ e identifique o termo da primeira sequência que corresponde a essa soma, no caso 6561.

Como justificativa do item (a), espera-se que os alunos percebam que a regra acima enumerada nada mais é do que a conhecida regra para multiplicar potências de mesma base, ou seja, para $9 . 81$, equivale a $3^2 . 3^4 = 3^6$. Para o outro caso o raciocínio é equivalente.

No item (b), para a divisão de 19683 por 2187, espera-se que os alunos percebam que basta subtrair os termos correspondentes a 19683 e 2187 na segunda sequência, ou seja, $9 - 7 = 2$ e identifique o termo da primeira sequência que corresponde a essa subtração, no caso 2. E para a justificativa, a resposta esperada é que utilizem as propriedades de potência de mesma base, isto é, $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$.

Com relação ao item (c), o raciocínio é semelhante, basta observar que $(27)^2 = 27 . 27 = 3^3 .\ 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$ e identificar o termo da primeira sequência que corresponde ao número 6, que nesse caso é o número 729.

2.6 Sessão V: Construindo o gráfico da função logarítmica

O objetivo dessa sessão é construir o gráfico da função logarítmica, com o auxílio do software geogebra e identificar essa função como sendo a inversa da função exponencial, determinar o domínio e o conjunto imagem da função logarítmica, bem como as condições para que a função seja crescente ou decrescente.

2.6.1 Atividade 1ª: Considere as funções $f(x) = 2^x \ e \ g(x) = \log_2 x$

a) Construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e uma tabela para a função $g(x)$ para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.

b) Compare os valores de "x" da primeira tabela e os valores de $g(x)$ da segunda tabela e os valores de "x" da segunda tabela e os valores de $f(x)$ da primeira tabela. Quais são suas conclusões? Justifique.

c) Use o aplicativo para traçar o gráfico das duas funções no mesmo plano cartesiano.

d) Trace onde se localiza a bissetriz do 1º quadrante, no gráfico das funções $f \ e \ g$, e identifique os pontos $(x, f(x)) \ e \ (x, g(x))$ das tabelas construídas no item (a).

d_1) Esses pontos são simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante?

d_2) Os gráficos das funções $f \ e \ g$ são simétricos em relação a bissetriz do 1º quadrante? Justifique.

e) Analisando o gráfico determine o domínio e o conjunto imagem das funções $f(x) \ e \ g(x)$.

f) Verifique se as funções $F(x) \ e \ g(x)$ são crescentes.

Tabela 3 – Valores de $x \ e \ f(x) = 2^x$

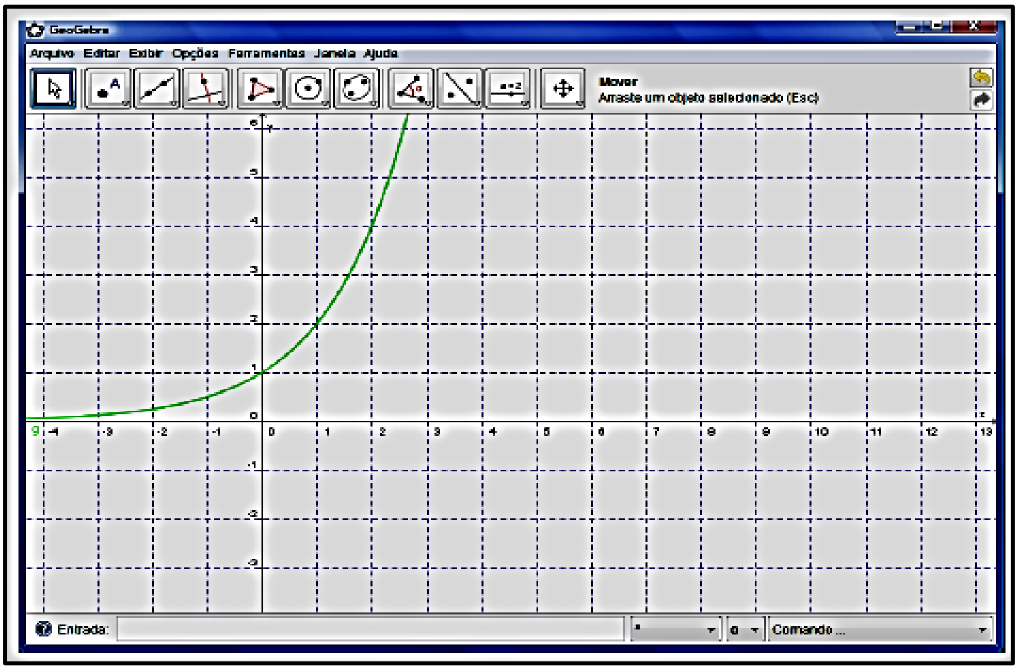
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Tabela 4 – Valores de $x \ e \ g(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3

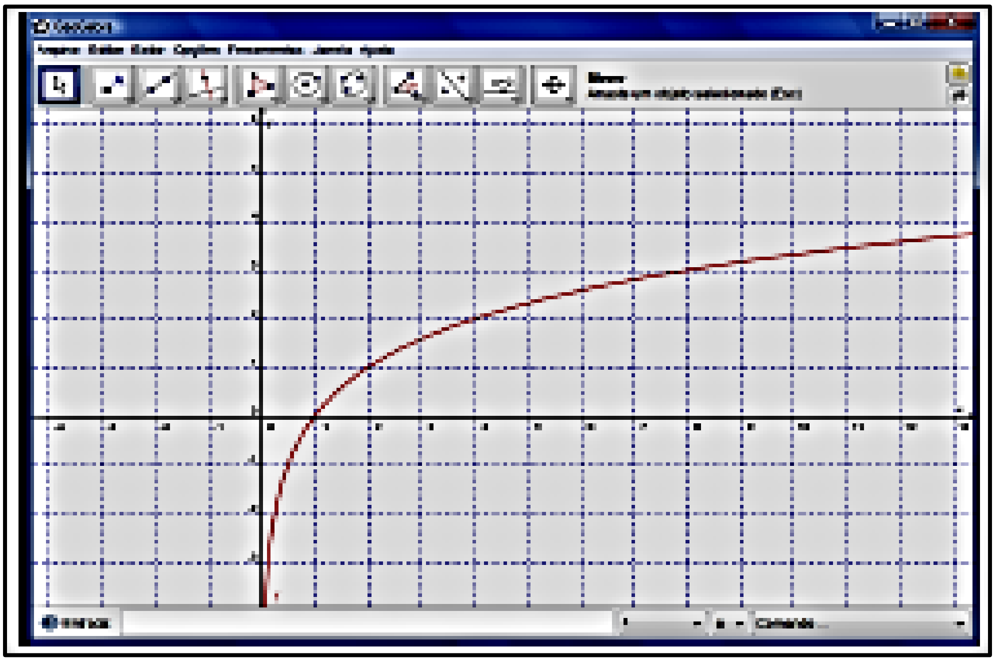
Espera-se que ao construírem as tabelas, os alunos percebam a igualdade entre os valores de x da primeira tabela e $g(x)$ na segunda tabela e justifiquem essa igualdade, usando a equivalência entre as equações $y = \log_2 x \;\; e \;\; x = 2^y$. O traçado dos gráficos será feito usando o software geogebra (figuras 9 e 10).

Figura 9 - Representação da função exponencial no registro gráfico $g(x) = 2^x$



Fonte. Autor (2022).

Figura 10 - Representação da função exponencial no registro gráfico $\log_2 x$



Fonte. Autor (2022).

O item (d) foi elaborado com o objetivo de que os alunos percebam que os pontos $\left(x\,,f(x)\right)\, e\ \ (x\,,g(x))$ são simétricos, pois tem a mesma distância em relação à bissetriz do primeiro quadrante e também que os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação à essa bissetriz.

Com relação ao item (e), espera-se que os alunos constatem que o domínio da função "f" é o conjunto dos números reais e a imagem dessa função é o conjunto dos números reais positivos e igualmente para a função g,tem-se que o domínio é o conjunto dos números reais positivos e a imagem é o conjunto dos números reais.

Para o item (f), espera-se que os alunos percebam que aumentando o valor de "x" o valor de "y" também aumenta, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 < y_2$ para todo $x_1\,, x_2$ pertencente ao domínio das funções, o que caracteriza que as funções são crescentes.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em relação aos documentos oficiais que fizemos a leitura, estes sugerem que o ensino da função logarítmica seja apresentado como a função inversa da exponencial, e possibilite aos alunos uma discussão das características destes modelos exponenciais e logaritmos, o crescimento apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Não é recomendado o trabalho exaustivo dos logaritmos e das equações exponenciais. É proposto o trabalho com situação-problema de aplicação em outras áreas do conhecimento, como a Química, Física, Matemática Financeira (BRASIL,2006).

Durante a elaboração da sequência didática, precisei reformular diversas vezes as questões e a estrutura da atividade, para que cada questão proporcionasse aos alunos a possibilidade de trabalhar com diversos registros conforme buscavam explicar suas compreensões. Ao realizar a análise dos dados, foi possível observar que essa mobilização de diferentes representações de fato ocorreu por grande parte dos alunos. Assim, analisar as construções dos alunos a partir do referencial teórico, possibilitou a conclusão de quais etapas da atividade podem ser futuramente melhor exploradas.

Assim, a estratégia de um trabalho em grupo, baseado na proposta de investigação matemática de BROUSEAN Ponte (2003), mostrou-se um facilitador da aprendizagem, permitindo que o aluno, ao revisitar um assunto já estudado, obtivesse uma melhor compreensão do mesmo buscando transformar o conceito. Os resultados apresentados evidenciaram que tal estratégia contribuiu para que os alunos adotassem uma perspectiva mais reflexiva e investigadora na construção do próprio conhecimento matemático, à medida que buscavam estratégias para resolver os problemas propostos.

A aprendizagem está relacionada nessa sequência didática com o que Brousseau chama de devolução do problema, proporcionando uma mudança de atitude diante da responsabilidade na percepção do saber matemático. Consequentemente, permitir um avanço significativo nas concepções sobre função logarítmica e no conceito de logaritmos, no sentido de que propiciou uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Observamos isso quando, no desenvolver das atividades, os alunos eram solicitados a converter uma situação em linguagem natural para a linguagem algébrica.

Acreditamos que a partir do momento que usamos a calculadora científica para testar hipóteses e utilizamos o software Geogebra facilitou a compreensão desses conceitos. O uso do software Geogebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem destes alunos e a sua importância da visualização do gráfico da função no software.

Esperamos assim ter contribuído para a comunidade acadêmica e para os professores em matemática com um trabalho voltado para a sala de aula, cuja concretização se faz no Produto Educacional desenvolvido como parte fundamental para a conclusão do Mestrado, envolvendo temas atuais como resolução de problemas em função logarítmica e objetos matemáticos importantes para a formação do aluno. Com isso, acreditamos ter colaborado, com propostas teóricas e práticas para o desenvolvimento das pesquisas em Educação matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique. Recherchesen Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, p. 281-308, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BROUSSEAU, Guy Des dispositifs d'apprentissage aux situations di dactiques em mathematiques. CONFERENCE A L'UNIVESITE DE GENEVE, 2004. Disponível em http://guy brousseau.com/ wp - content/uploads/2012/12/Des dispositifs dapprentissage auxsituations didactique s en mathématiques.pdf . Acesso em: 25 fev. 2020.

CHEVALLARD, Yves. As perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica IN: Didáticas da Matemática. Conceitos Fundamentais da Didática: Direção de Jean Brun. 1991.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1ª Ed. vol1. São Paulo: Ática, 2007.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Bolema. Boletim de Educação Matemática. Vol. 20, nº28, 1179-205. INSS:0103-636X. 2007.

DOUADY, Régine. 1986. Jeux de cadres et dialectique outil – objet. *Recherches em didactique des mathématiques, vol.7, nº2, pp.5-31.*

LOURENÇO, Emanuel Gomes. **O Geogebra como ferramenta de ensino de logaritmo**. 2013, 58 f. Dissertação – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Mossoró, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Parâmetros Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília; MEC,2006.

PARRA, Cecília. SAIZ, Irma. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Trad. Juan Acuna L. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. da. Sequência didática na matemática. **REI - Revista de Educação do Ideau**. v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.

PERRIN GLORIAN, Marie-Jeanne ; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar L'Ingenierie Didactique entre Recherche et Ressource pour L'Enseignement et la Formations des Maitres. In: SIMPÓSIO LATINO AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA , 1 . 2016. Anais [...]. Disponível em www.ppgedcm ar.ufscar.br . Acessado em: 25 fev. 2019.

PINTO, Michael de Lima Balzana de Melo. **O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar**. 2016, 100f.. Dissertação- Universidade Federal do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2016.

POLYA, G. A. A arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático; Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimp. -Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. **Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática** / Patrícia Rodrigues da Silva Rossi. -- São Carlos : UFSCar, 2010. 219 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010. Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas –PPGECE.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem