Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

VERACIV BRABO DE VASCONCELOS

RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Belém - PA
2023

Veraciv Brabo de Vasconcelos

RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Belém - PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Vasconcelos, Veraciv Brabo de
Recortes da história da matemática para o ensino de probabilidade/Veraciv Brabo de Vasconcelos; orientação de Miguel Chaquiam. - Belém, 2023

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Belém, 2023.

1.Matemática-História.2.Probabilidade-Estudo e ensino.3.Prática de ensino.4. . I. Chaquiam, Miguel (orient). II. Título.

CDD 23ed. 511.6

Regina Coeli A. Ribeiro - CRB-2/739

VERACIV BRABO DE VASCONCELOS

RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data da aprovação: 16/06/2023

Banca Examinadora

_______________________________ . Orientador
Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

_______________________________. Examinador Interno
Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral
Doutor em Ciências Humanas – Pontifícia Universidade Católica / PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará (UEPA)

_______________________________ . Examinador Externo
Prof. Dr. Alailson Silva de Lira
Doutor em Educação – Universidade Federal do Pará / UFPA
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Pará / IFPA

Aos meus pais: Moacir Vasconcelos (in memoriam) e Maria Assunção Vasconcelos.
A todos os meus irmãos e irmãs.
Aos meus filhos Alanis, Mateus, Davi e ao meu Marido Lídio.

AGRADECIMENTOS

Eu início este momento, expressando grandemente a minha gratidão a Deus, por toda as bençãos em minha vida. A jornada foi longa, com muitos desafios, medos e transformações, incluindo além de tudo a pandemia causada pelo Covid-19, que me fizeram paralisar e, foi diante de tudo isso e da certeza da presença de Deus em todos os momentos deste trabalho, que conseguir forças, sabedoria e bençãos para esta conclusão.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Miguel Chaquiam, por todo apoio, disposição, incentivo, orientação e pelas conversas em prol do meu bem-estar, tudo isso foi de um valor inestimável. Sua dedicação para que tudo ocorresse bem nos estudos e na vida, e no seu devido tempo, fizera muita diferença para o desenvolvimento e aprimoramento desse trabalho. O senhor tem toda a minha admiração e respeito pelo profissional e pela pessoa que é, sou muito grata pela sua paciência e pelas suas orientações nessa caminhada.

Agradeço aos professores do Mestrado, pela valiosa contribuição na minha formação acadêmica e crescimento profissional, todos fizeram a diferença nesse processo de qualificação, principalmente pela mudança de ensino causada pelo Covid-19. Suas aulas presenciais e na maioria virtuais, palestras, debates, mostraram que podemos nos reinventar e modificar para melhorar cada vez mais o ensino de matemática na educação escolar.

Gostaria de agradecer, as amizades que surgiram durante o mestrado, cujo apoio, incentivo, troca de ideias e materiais foram essenciais para a construção de um processo de aprendizagem enriquecedor. Agradeço também aos meus amigos, que estiveram ao meu lado durante esta jornada

Não poderia deixar de agradecer de meu coração ao prof. Dr. José Carlos de Souza Pereira, pelo incentivo e disposição em tudo que me proporcionou para entrar no mestrado e para seguir, o senhor é excepcional, um exemplo de profissional maravilhoso. Grata por tudo.

A minha gratidão se estende do meu coração à toda minha família, que esteve presente em todas as situações, especialmente por cuidarem dos meus filhos para que eu pudesse realizar este sonho. Gratidão pelo amor, incentivo e apoio incondicional, vocês foram fundamentais para superar muitas das dificuldades que passei e dos desafios que vivi, todos conhecem como foi essa jornada, mas persisti. Obrigada a todos os Vasconcelos e a poucos Gomes, em especial a minha cunhada Andreia gomes.

Agradeço mais uma vez a minha irmã, Leliane Vasconcelos, pela paciência, disposição e compreensão nas muitas vezes em fazer as correções gramaticais do projeto, dos artigos publicados, dos trabalhos enviados, e das versões deste trabalho.

Por fim, expresso minha gratidão a todos aqueles que contribuíram para o sucesso deste trabalho, de forma direta ou indireta, desejo que Deus abençoe cada um, pois este trabalho é resultado de um esforço de muitas pessoas, que estiveram do meu lado nesta jornada. Gratidão é a palavra que resume essa grande conquista na minha vida.

Deus abençoe a todos!

Veraciu Brabo de Vasconcelos

"*Estou certo de que nenhuma outra disciplina perde mais do que a matemática quando dissociada de sua história*"

J.W.L. Claisher

RESUMO

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de. **Recortes da História Matemática para o Ensino de Probabilidade.** 216 f. Dissertação do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Este relatório é resultado de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA). A investigação baseou-se na ideia de que o professor deve se pautar em formas variadas de ensinar, assim, considerou-se que a História da Matemática, sendo uma das Tendências Metodológicas da Educação Matemática foi relevante para este processo. Então, buscou-se resposta ao questionamento: Que recortes históricos podem ser elaborados a partir de uma história da probabilidade, para uso em sala de aula, balizado pelo modelo proposto por Chaquiam (2022)? Tendo como objetivo geral: Elaborar recortes históricos a partir de uma história da probabilidade, para uso em sala de aula. A metodologia adotada foi qualitativa, de caráter descritivo, utilizando fontes bibliográficas e documentais. O questionário foi a técnica empregada para coleta de dados verbais, e a análise do discurso foi realizada para o tratamento de dados. O Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022), serviu como auxiliar na revisão bibliográfica para o levantamento dos fatos históricos e literários relacionados ao objeto matemático e aos objetivos da pesquisa. Devido à pandemia, causada pelo COVID-19, a coleta de dados foi realizada por meio de um questionário virtual, atendo a validação do material produzido aos professores de matemática. Os resultados revelaram uma aceitação favorável ao conjunto de atividades para utilização em sala de aula, com contribuições dos participantes visando seu aprimoramento. O Texto Histórico foi construído, balizado pelo Diagrama Metodológico, apresentando “uma história da probabilidade” para o conhecimento do professor. A partir deste texto foram produzidos três recortes históricos e atividades para serem utilizados em sala de aula. A avaliação complementar demonstrou que 97,2% dos professores concordaram com o uso do Produto Educacional, intitulado *Recortes da História Matemática para o Ensino de Probabilidade*, validando sua aplicação. Recomenda-se a aplicação dos recortes históricos em sala de aula para obter a percepção dos alunos frente tais textos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; História no Ensino de Matemática; História da Probabilidade; Ensino de Probabilidade.

ABSTRACT

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de. **Clippings from Mathematical History for Teaching Probability**. 216 f. Dissertation of the Professional master's Program in Mathematics Teaching - State University of Pará, Belém, 2023.

This report is the result of research carried out in the Graduate Program in Mathematics Teaching (PPGEM) at the State University of Pará (UEPA). The investigation was based on the idea that the teacher should be based on different ways of teaching, thus, it was considered that the History of Mathematics, being one of the Methodological Tendencies of Mathematics Education relevant to this process. So, an answer was sought to the question: What historical clippings can be elaborated from a history of probability, for use in the classroom, buoyed by the model proposed by Chaquiam (2022)? With the general objective: To elaborate historical clippings from a history of probability, for use in the classroom. The adopted methodology was qualitative, descriptive, using bibliographical and documentary sources. The questionnaire was the technique used to collect verbal data, and discourse analysis was performed for data processing. Methodological Diagram by Chaquiam (2022) served as an aid in the bibliographic review for the survey of historical and literary facts related to the mathematical object and the research objectives. Due to the pandemic, caused by COVID-19, data collection was carried out through a virtual questionnaire, limiting the validation of the material produced to mathematics teachers. The results revealed a favorable acceptance of the set of activities for use in the classroom, with contributions from the participants aiming at its improvement. The Historical Text was constructed, guided by the Methodological Diagram, presenting "a history of probability" for the teacher's knowledge. From this text, three historical clippings and activities were produced to be used in the classroom. The complementary evaluation showed that 97.2% of the teachers agreed with the use of the Educational Product, validating its application. It is recommended to apply historical clippings in the classroom to obtain the students' perception of such texts.

Keywords: Mathematics Teaching; History in Mathematics Teaching; History of Probability; Probability Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática tem sido objeto de estudos por pesquisadores que buscam melhorar a qualidade da educação básica. Nesse contexto, algumas metodologias têm sido investigadas e implementadas, com o objetivo de aprimorar a prática pedagógica no ensino de matemática e consequentemente, promover a aprendizagem dos estudantes. Essa necessidade por metodologias significativas para o ensino da matemática tem sido um tema de interesse pessoal desde os primeiros estágios do curso de Ensino normal[1], que foi perdurando pelo curso de licenciatura em matemática e se intensificando além do curso, tanto na prática da sala de aula, quanto na necessidade de qualificação profissional.

De certo modo, isto justifica o motivo pelo qual esta pesquisa está sendo realizada, pois ao conclui o curso de magistério em 2007 e ser aprovada em um concurso público para lecionar nas séries iniciais, por insuficiência de professor formado em língua Inglesa, fui convidada a lecionar a disciplina de Inglês para o ensino fundamental maior (5ª a 8ª séries), por ter o curso livre de língua Inglesa, naquele momento não sentia necessidade de buscar uma formação docente mais elevada, até porque, não havia oferta de cursos do meu interesse na Universidade Federal do Pará (UFPA) campus Breves.

Em 2010, iniciei o curso de licenciatura em matemática, pela UFPA, concluindo em 2014. Durante o curso, confiei que não seria "difícil" conclui-lo, mas a cada disciplina cursada, ia sentido necessidade de aprender a aprender o que "faltou" ser aprendido ou mesmo ensinado, principalmente no curso do Magistério. Porém, o conhecimento adquirido na Universidade mudou a minha forma de pensar e agir sobre a formação continuada de um professor, foi nesse momento inicial da graduação, que comecei a contemplar conhecimentos para melhorar a minha prática em sala de aula, pois como já estava atuando sentia a dificuldade do que não estudei intensamente sobre matemática na educação básica.

Em 2012 comecei a dar aula de matemática, no mesmo nível de ensino que já estava atuando como professora de língua Inglesa, buscava interagir o conhecimento que aprendia na faculdade com o conhecimento do currículo escolar, algumas vezes revisando um conteúdo que foi aprendido anteriormente. Pode-se dizer que com a conclusão da graduação, que teve sua eficiência, continuou a necessidade de melhorar minha forma de ensinar, de avaliar, de usar metodologias e métodos que viessem melhorar a aprendizagem dos alunos no ensino de matemática, principalmente depois de começar a atuar no ensino médio, em 2018.

[1] Ensino normal, com habilitação específica para o Magistério, a nível de Ensino Técnico.

No mesmo ano, foram oferecidos cursos de Especialização no Ensino de Matemática tanto pela Universidade Federal do Pará (UFPA), campus-Breves, na modalidade presencial, quanto pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), em parceria com a Universidade Aberta do Brasil (UAB), polo Breves, na modalidade a distância (EAD). Tive a oportunidade de ser aprovada, cursar e concluir ambos os cursos, e pude perceber o quanto é significativo aprimorar a qualificação de um professor para melhorar o índice de aprendizagem dos alunos de forma considerável. A obtenção de conhecimentos diversificados por meio dessas especializações se mostrou uma ferramenta importante que vem sendo notada e valorizada desde a graduação.

Na Especialização ofertada pela UFPA, era possível observar a postura, a dinâmica e a metodologia de cada professor, ações que permitem refletir sobre o quanto é importante e necessário ter uma instrução para a renovação da própria prática em sala de aula, uma realidade pouco vivida no curso de especialização realizado pela UEPA, através do ensino a distância, todavia teve sua contribuição como formação, mas com a forma presencial, foi possível analisar que as ações, atitudes e presença tornam o professor indispensável no processo de ensinar, seguindo com esse efeito para além da sala de aula.

É importante ressaltar que há preceitos que garantem a formação continuada dos professores, como consta na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aprovada em 2017, que garante "manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem" (BRASIL. 2017, p. 15), sem distinguir áreas ou níveis de ensino, na Educação Fundamental.

Na Especialização da UFPA, apreciei a Tendência Metodológica da Educação Matemática: *História da Matemática*, foi um desafio por ser um recurso/método que não utilizava em meus planejamentos. A ideia desta pesquisa, era ensinar por meio de um contexto histórico um objeto matemático, e mostrar que a História da Matemática poderia explicar que "Pra tudo houve um começo, que somente a história pode contar e essa importância pode ser dada para mostrar aos alunos quem inventou a matemática" Pereira (2018)[2], neste caso quem inventou o objeto matemático estudado, introduzindo a história da matemática no ensino de matemática por meio de estratégias possíveis e eficientes em sala de aula.

Sobre a invenção matemática, sabe-se que esta é uma pergunta feita por alunos independentemente de sua cultura (região), e para isso a história da matemática é essencial, pois ela permiti expor aos alunos a produção do conhecimento matemático que passou a existir pela

[2] Informação fornecida pelo professor Dr. José Carlos de Souza Pereira, no curso de Especialização na UFPA, polo Breves em 2018.

necessidade de criar estratégias para solucionar problemas (MENDES, 2009), proporcionando apresentar o conteúdo histórico do que eles estão estudando e como tudo se originou até os dias atuais, da forma como está proposto no material didático, independente do recurso utilizado, sendo este recurso ou tecnológico ou não.

Por fim, aprofundei as pesquisas e concluir os dois cursos defendendo a História da Matemática como um recurso didático no ensino de matemática, recomendando a importância da formação continuada de professores que pretendem aperfeiçoar o conhecimento e conhecer métodos diferenciados para sua prática em sala de aula e propondo estratégias viáveis ao ensino de matemática, de acordo com a realidade local, contribuindo para que os alunos conheçam e desenvolvam a capacidade intelectual de propor possíveis estratégias para solucionar situações que remetem aos problemas matemáticos.

Consequentemente, na busca de formação e ampliação de conhecimentos, para melhoria da minha prática pedagógica, seguir na investigação de possibilidades de construir e reconstruir minha forma de aprender e ensinar, em 2020 ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), no curso de Mestrado Profissional em Ensino De Matemática, da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Permitindo seguir com as ideias surgidas nos estudos anteriores, que foram conduzidas e adaptadas para este Mestrado.

Para estabelecer a estrutura desta pesquisa, utilizou-se o diagrama metodológico, de Chaquiam (2022; 2020; 2017), propondo a elaboração de um texto e atividades didáticas que colaborarem com o ensino por meio da sua utilidade em sala de aula, com este propósito serão analisados recortes da história da matemática sobre o objeto Probabilidade, possibilitando uma visão geral, histórica e crítica ao longo das várias fases de sua evolução a partir da apresentação de personagens e suas contribuições matemáticas para a teoria da probabilidade.

Segundo Chaquiam (2022) o diagrama metodológico é uma proposta possível de ser realizada por professores, mesmo que não tenham experiência em pesquisar sobre História da Matemática, na possibilidade de constituir um caminho para investigar sobre um objeto matemático, sendo que "funciona como uma espécie de "fotografia" de fatos da história geral em torno da temática elencada, organizados temporalmente de acordo com a sua constituição" (CHAQUIAM, 2022, p. 07).

Nesse sentido, considerando a importância do uso da História da Matemática concomitantemente com as estratégias de ensino da Teoria da Probabilidade, é relevante realizar estudos que levam a uma análise crítica e reflexiva das estratégias de ensino. Nesse contexto, foi organizado a seguinte problemática de pesquisa: *Que recortes históricos podem* *ser elaborados a partir de uma história da probabilidade, para uso em sala de aula, balizado pelo modelo proposto por Chaquiam (2022)?*

Tendo como Objetivo geral:

- *Elaborar recortes históricos a partir de uma história da probabilidade, na perspectiva de Chaquiam (2022) para uso em sala de aula.*

E para balizar os caminhos da pesquisa e obter elementos que corroborem com a resposta ao questionamento elencado foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Revisar a literatura para situa-se sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade,
- Apresentar percepções sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade, inclusive de professores,
- Delinear uma história da probabilidade a partir de uma revisão bibliográfica, tendo em vista elaboração de textos para uso em sala de aula,
- Produzir recortes históricos envolvendo a história da probabilidade a partir da história delineada,
- Elaborar atividades que envolvam a probabilidade e sua história a partir da história produzida, para uso em sala de aula

A intenção do ensino por meio da História da Matemática, de acordo com os objetivos levantados, podem impulsionar a participação dos alunos, de forma que se surpreendam com sua aprendizagem, adquiram conhecimentos sobre a constituição e evolução da teoria da probabilidade, aprendam a ter seu próprio desenvolvimento intelectual, aumentando sua autoconfiança e buscando possibilidades de mudanças no ensino da matemática de forma significativa ao perceber a importância da probabilidade nas suas rotinas.

Algumas situações precisam ser estabelecidas antes de considerar o uso da história da matemática no ensino. Durante a especialização na UFPA, foi compreendido que a história da matemática no ensino pode explicar o início de conceitos matemáticos e despertar a curiosidade dos alunos. No entanto, é importante levar em conta alguns requisitos, como definir claramente o que se pretende alcançar com o uso da história da matemática e quais objetivos deseja-se atingir. É necessário escolher um objeto matemático específico para pesquisa e analisar tanto os pontos positivos quanto os pontos negativos, a fim de compreender a utilidade do seu uso.

Os trabalhos do Professor Iran Abreu Mendes foram as fontes principais da pesquisa que gerou os trabalhos de conclusão dos dois cursos de especialização (UFPA e UEPA). Hoje, essa pesquisa se estende, as obras dos professores Miguel Chaquiam, João Claudio Brandemberg, Tatiana Roque, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Ana Carolina Costa Pereira, entre outros pesquisadores que defendem o uso da História no Ensino de Matemática.

É importante evidenciar, nesta situação, a falta de trabalhos científicos sobre o ensino da Teoria da Probabilidade por meio da História da Matemática. Isso é uma questão relevante a ser considerada, pois a história da matemática vem ganhando cada vez mais importância no ensino. Conforme enfatiza Brandemberg (2021, p. 23) "o papel da história da Matemática se faz recorrente nas últimas décadas, como podemos observar nos apontamentos presentes nos trabalhos de vários autores", que defendem o uso da história no ensino de matemática.

Segundo Lima (2013, p. 22), em suas análises dos resultados de uma prova do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), aplicada a estudantes do 3º ano do Ensino Médio no Brasil, constatou-se um baixo percentual de acertos em questões que envolviam cálculos de probabilidade. ele enfatizou que o "ensino de probabilidade tem sido abordado de forma pouco compreensível para os alunos do ensino regular", resultando em cálculos e interpretações equivocadas sobre seu uso e sua aplicação.

Percebe-se, a partir dos estágios e da prática vivida, que os conteúdos de probabilidade eram poucos ensinados, ou até mesmo negligenciados, no nível fundamental. Um esclarecimento que pode justificar tal situação é o fato de a probabilidade não constar como um Eixo Temático, o que fazia com que não fosse considerada como um conteúdo principal nos livros didáticos e tampouco nos planejamentos didáticos dos professores.

No entanto, a partir da implantação Base Nacional Comum Curricular (2017), a probabilidade foi estabelecida como uma Unidade Temática e seus conteúdos passaram a ser incorporadas nos livros didáticos. No entanto, ainda há uma lacuna no seu aproveitamento em sala de aula. Conforme destacado por Lima (2013, p. 23) "o aprendizado da competência que envolve Probabilidade, apesar de parecer simples, não é assim visto pelos estudantes". O autor ressalta a falta de realização de experimentos concretos e a contextualização de situações que envolvam esse objeto matemático. portanto, é fundamental proporcionar aos estudantes estímulos que os ajudem a compreender e a se interessar cada vez mais pela teoria da probabilidade e suas aplicações em diferentes situações.

A inserção da Probabilidade nos currículos escolares foi uma assertiva, mas requer um trabalho significativo em sala de aula. Afinal, muito eventos acorrem de forma aleatória e os alunos precisam aprender a identificar situações aleatórias e compreender a probabilidade envolvidas nelas. É fundamental mostrar que a probabilidade está presente em diversas áreas e incentivar os alunos a explorarem suas aplicações. Dessa forma, será possível desenvolver uma compreensão sólida desse conceito matemático e sua relevância na resolução de problemas cotidianos.

Diante dessa exposição, realizou-se uma pesquisa de natureza qualitativa, com o objetivo de compreender a teoria da probabilidade ao longo de um determinado período específico. A abordagem adotada “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes” (LÜDKE E ANDRÉ, 2013, p. 14). Nesse contexto, a pesquisa se concentrou na evolução da teoria da probabilidade no mundo da matemática, ancorada na história da humanidade.

Lüdke e André (2013, p. 20) enfatizam ainda que uma pesquisa qualitativa “pode ser similar a outras, mas é ao mesmo tempo distinta, pois tem um interesse próprios e singulares”, principalmente pela necessidade e interesse que a pesquisa desenvolve. De acordo com as autoras, esse tipo de estudo “se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (Ibid., p. 20). Essa pesquisa foi guiada pelo Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022).

Além do mais, de acordo com Gil (2008, p. 175) nessa abordagem “não há fórmulas ou receitas predefinidas para orientar os pesquisadores. Assim, a análise dos dados na pesquisa qualitativa passa a depender muito da capacidade e do estilo do pesquisador”. Para garantir uma análise mais segura, optou-se por utilizar a pesquisa bibliográfica e documental como fontes de informações.

Gil (2008, p. 50) destaca que “a pesquisa bibliográfica é indispensável nos estudos históricos”, enquanto a pesquisa documental abrange materiais que ainda não foram submetidos a um tratamento analítico e podem se reorganizados de acordo com os objetivos da pesquisa. No caso desta pesquisa, os documentos mostraram-se particularmente úteis devido as restrições impostas pela pandemia, permitindo superar as limitações da situação atual.

Ambas as pesquisas seguem passos semelhantes, com informações, referências e documentos sendo cuidadosamente analisados. É crucial garantir a veracidade das informações, portanto, “convém aos pesquisadores assegurarem-se das condições em que os dados foram obtidos, analisar em profundidade cada informação para descobrir possíveis incoerências ou contradições e utilizar fontes diversas, cotejando-se cuidadosamente” (GIL, 2008, p. 51).

Para atender aos propósitos desta pesquisa, no primeiro capítulo apresenta-se a introdução, que explora os motivos e objetivos que levaram a sua realização, abordando sobre pesquisas, situações e orientações, quanto ao ensino, aprendizagem, formação e utilização da História da Matemática, apoiada nas ideias estabelecidas por Chaquiam (2022, 2020, 2017) nas orientações da Base Nacional Comum Curricular e em estudos, pesquisas e documentos relacionadas à teoria da probabilidade, especificamente no ensino.

No segundo capítulo, consta a revisão literária sobre o Ensino e Aprendizagem da Probabilidade, realizada em documentos oficiais, teses, dissertações, artigos científicos, sites oficiais. Faz parte também uma pesquisa feita com professores de matemática, realizada de forma virtual por meio de um questionário, como o objetivo de diagnóstica a percepção dos professores em relação ao ensino e aprendizagem da probabilidade concomitantemente com uso da História da Matemática na educação básica. Além de uma análise em uma coleção do livro didático de matemática.

No terceiro capítulo, apresenta-se uma investigação bibliográfica realizada sobre a utilização da História no Ensino de Matemática, em monografias, dissertações, teses, artigos científicos, livros literários, livros acadêmicos, documentos oficiais da educação, tendo a História da Matemática como uma tendência metodológica da educação matemática, que abrange o ensino, a aprendizagem, metodologias e currículo, apoiada em uma revisão de trabalhos de autores que defendem o uso da História da Matemática.

O quarto capítulo, apresenta Uma História da Probabilidade, balizado pela Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022), que formalizou a construção deste texto histórico, identificado em uma revisão bibliográfica sobre a história da matemática no ensino de probabilidade. Iniciando um percurso do século XV, a partir da constituição seguindo com personagens que contribuíram para sua evolução, até o momento em que foi axiomatizado no século XX, tornando-se essencial no ramo da matemática escolar, independentemente de sua área de aplicação.

No quinto capítulo, conforme as ideias de Chaquiam (2022) e os objetivos desta pesquisa, foram produzidos recortes históricos e atividades a partir do texto histórico apresentado no capítulo quatro. Esses materiais foram produzidos como o propósito de serem compartilhados e explorados pelos professores como um recurso metodológico no ensino de probabilidade. Além disso, foram fornecidas orientações e nota aos professores para auxiliá-los na sua utilização de forma efetiva.

No sexto capítulo, apresenta-se a constituição do processo de validação dos materiais produzidos e no sétimo capítulo, apresenta-se os resultados dessas avaliações dos professores, geradas a partir do formulário virtual, envolvendo o texto histórico, os recortes históricos e atividades (conjunto) e a avaliação complementar, para a validação do produto educacional e da questão principal desta pesquisa.

No oitavo capítulo, são apresentadas as conclusões do desenvolvimento desta pesquisa, destacando os objetivos alcançados e resumindo os principais resultados obtidos ao longo do desenvolvimento. Um destaque importante foi a validação favorável do produto educacional, reforçando a relevância e eficácia das atividades e recursos propostos. Por fim, são fornecidas as referências bibliográficas utilizadas e os apêndices contendo informações complementares.

2. ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

De acordo com Chaquiam (2022, p. 22) “A preocupação com o ensino e aprendizagem da Matemática tem sido um tema constante nos congressos e encontros que reúnem profissionais da educação, sejam eles pedagogos ou matemáticos, professores em exercício ou em formação”, professores que buscam melhorar a qualidade de suas práticas em sala de aula, e assim “diminuir o problema, agravado principalmente pelo fracasso dos alunos” (Ibid., p. 22) na disciplina de matemática, essas dificuldades ficam explicitas, nos resultados que são divulgados de avaliações e pesquisas nacionais e internacionais.

A presente pesquisa tem como foco o ensino e aprendizagem da probabilidade, buscando analisar uma abordagem que contribua para a melhoria do ensino e promova a inovação ou renovação das práticas pedagógicas, visando fornecer aos alunos um conhecimento sólido em probabilidade. Para alcançar esse objetivo, utiliza-se a História da Matemática, como ferramenta, propondo a construção de ideias que se remetem aos conceitos probabilísticos. Acredita-se que o contexto de formação e evolução desses conceitos desempenha um papel crucial na facilitação desse aprendizado, juntamente com outros conceitos relacionados a teoria da probabilidade.

Aprender “probabilidade” exige do aluno, conhecimentos e conceitos que podem e devem ser explorados em trabalhos pedagógicos, independentemente da tendencia metodológica utilizada para este fim, é preciso fortalecer a ideia que o ensino de probabilidade traz para a vida do aluno um conhecimento que faz parte da sua rotina, como: decisões, interpretações, fazer previsões, realizar experimentos, fazer apostas, identificar o que é possível em uma situação, são muitas ideias que precisam ser fortalecidas.

Nunes, Almouloud e Guerra (2010) destacam a importância das investigações históricas na construção epistemológica dos conceitos de um determinado de conteúdo, especialmente no ensino e aprendizagem da probabilidade. Segundo esses autores, “a necessidade de se trabalhar com os alunos, primeiramente, atividades que os coloquem em contato com a construção das ideias matemáticas”. Através do estudo da história, é possível obter informações e descrições sobre como os conceitos relacionados a esse objeto de estudo foram desenvolvidos, bem como os fatos e situações que podem ser explorados para fortalecer o processo de ensino.

Waldemann, Silva e Santos (2015, p. 5), evidenciam “que existe uma necessidade de abordar o ensino de Probabilidade e Estatística além do ensino padronizado, envolvendo diferentes metodologias que são experimentadas, levando em consideração as necessidades presentes em diferentes regiões do Brasil”, independentemente da tendência, deve-se apresentar uma proposta significativa e singular, enfatizar a linguagem probabilística sobre os conceitos que se relacionam em seus diferentes contextos, principalmente por fazer parte constante de situações que os alunos vivenciam na escola ou mesmo fora dela.

Segundo Waldemann, Silva e Santos (2015, p. 6) "é primordial que o aluno entenda as raízes da matemática por meio da História da Matemática, uma tendência metodológica que traz à sala de aula o contexto do surgimento de novas técnicas e ferramentas matemáticas para necessidades reais, e quem as fundamentou", proporcionando ao professor apresentar em sala de aula a história de como começou e quem foram os primeiros personagens a abordar sobre a teoria da probabilidade, despertando a curiosidade dos alunos ao mesmo tempo que aprofunda e explora sobre a probabilidade, ainda segundo estes autores "o professor precisa utilizar de todas as ferramentas que estão ao seu alcance para que a aprendizagem do aluno seja efetiva" (Ibid., p. 8) para provocar seu interesse pelo assunto.

Samá e Silva (2020, p. 4) relatam a pouquidade de trabalhos acadêmicos disponíveis, exatamente tendo como foco o Ensino e Aprendizagem da Probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental, segundo essas autoras dos artigos e dissertações "encontradas, apenas uma apresenta proposta pedagógica para o ensino de Probabilidade para os anos iniciais com o desenvolvimento detalhado das atividades, bem como as manifestações dos estudantes na realização das mesmas", de certa forma é preocupante pois para um conteúdo de extrema importância precisa-se aumentar as opções de recursos e métodos para disponibilizar à educação escolar.

Segundo Santos (2015) em sala de aula deve-se estabelecer a relação entre a linguagem coloquial e a formal, que são requisitos importantes para o desenvolvimento de conceitos científicos sobre probabilidade. Para Gal (2005 apud SANTOS, 2014, p. 42),) é necessário dar mais atenção a linguagem probabilística, pois ela "apresenta aspectos relevantes nas relações abstratas que se estabelecem entre as situações apresentadas e os termos utilizados para expressar a medida de chance e para apresentar suas reais interpretações probabilísticas", necessidade que se contempla na Base Nacional Comum Curricular com sua aplicação desde o 1º ano escolar, ainda segundo esta autora, a probabilidade,

> Não é uma característica palpável dos acontecimentos, mas uma percepção ampla, que pode ser expressa por meio de uma notação formal da Matemática quanto à probabilidade de ocorrência de um evento Para o autor, muitas das situações cotidianas exigem que as pessoas sejam "letradas probabilisticamente"; e, para que o letramento aconteça, não basta que haja no processo de ensino uma simples instrução, é preciso que diferentes elementos de conhecimento estejam envolvidos no processo, havendo uma interação entre diferentes conceitos de probabilidade, maneiras de descobrir a probabilidade de um evento, linguagem, contexto e questões críticas ((GAL, 2005 apud SANTOS, 2014, p. 42).

Enquanto professor é necessário criar maneiras de inovar o ensino mostrando a real importância dessa área do conhecimento sobre o que acontece habitualmente com o uso da matemática, a mediação do professor neste aspecto é fundamental, para que ocorra uma reflexão sobre o que os alunos estão aprendendo e a utilidade dessa aprendizagem em suas vidas, nesse sentido a História da Matemática, proporciona acrescentar essa possibilidade de levar os alunos a refletirem e interpretarem de forma correta os conceitos e procedimentos que precisam aprender da probabilidade.

Sabe-se que a aprendizagem pode ocorrer de formas diversificadas, para Lopes (2018 apud SANTOS, 2015, p. 50) uma forma de desenvolver o pensamento probabilístico dos alunos, é possibilitando a realização de atividades de ensino com sentidos que permitam o entendimento de chance e de eventos aleatórios e mais este autor acrescenta que "na proposta de ensino os diferentes conceitos precisam estar envolvidos e que a dinâmica de trabalho deve ter como objetivo articulá-los e/ou confrontá-los para que sentidos e conceitos sobre as situações de incerteza sejam desenvolvidos pelos Alunos".

É importante que o professor conheça e planeje sua metodologia e recursos para construir a sua prática docente. Para Chaquiam (2022, p. 23) "O professor sente por ele mesmo necessidade de mudança, a qual se expressa de dentro para fora, através da angústia de um dia de trabalho que não satisfaz a atitude do professor que tenta ser atuante" no processo de ensino, e assim buscar constantemente por métodos e recursos materiais para suprir suas aflições e ter sucesso na aprendizagem sobre os estudos das chances de um evento ocorrer.

O conteúdo de probabilidade, envolve elementos que podem levar a um equívoco em sua aprendizagem, para evitar que isto ocorra é necessário um conhecimento profundo sobre os conceitos que envolvem os conhecimentos probabilísticos como os que remetem ao conceito de conjunto, espaço amostral, experimento aleatório, evento combinatório, decisão, incerteza, independência, risco, ou seja, saber o que usar e quando usar quando se trata dessas situações, para que não ocorra erros por falta de conhecimento úteis e essenciais e seu uso de forma indevida, levando a cálculos incorretos. Segundo Almeida (2018) o conteúdo de probabilidade é de extrema utilidade em diversas áreas, sendo considerado,

> Um assunto amplo que possibilita discussão e debates de cunho filosófico, epistemológico, ontológico, psicológico e até mesmo teológico. Além disso, está presente em diversas áreas do conhecimento, a exemplo da Estatística, Física, Química, Biologia, Economia etc. A Probabilidade também se situa na determinação de qualquer ação de base aleatória, indeterminista. Nesse campo, muitas são as suas definições, as suas interpretações (ALMEIDA, 2018, p. 62).

A aprendizagem deste conteúdo deve e tem que ser entendida para evitar equívocos, logo, quanto mais cedo sua compreensão, maiores são as chances de uma aprendizagem significativa e ampla deste tema, e isto é previsto oficialmente na Base Nacional Comum Curricular de 2017, eis um dos motivos que o professor precisa aperfeiçoar seu trabalho, sua prática, para poder melhorar o conhecimento escolar dos alunos, despertando sua curiosidade e tentando transformar a ideia de que a matemática na escola é muito difícil.

Um aspecto importante do ensino escolar e do ensino de probabilidade é exercitar o pensamento probabilístico para que o aluno possa desenvolver a criatividade e habilidades, até mesmo de incentiva-los a construir situações problemas tanto quanto saber resolvê-los, isto, segundo Boga Neto (2005, p. 32) pode ser alcançado a partir do momento que os professores se disporem "a realizar, em sala de aula, um trabalho que considere a realidade de nossos alunos e a utilização de diferentes recursos e metodologias de ensino, que busquem realmente a criação e a manutenção de um ambiente de construção de conhecimentos e de aprendizagens" (ibid., p. 32), interagindo com recursos e métodos diferenciados.

Ademais, mudanças ocorrem constantemente, "Na verdade, é o mundo contemporâneo com suas idiossincrasias que está a exigir de todos mudança ininterruptamente. Nesse sentido, para agir como condutor e corresponsável pelo processo ensino-aprendizagem" (CHAQUIAM, 2022, p. 23). De fato, pesquisas e projetos veem sendo desenvolvidos, para contribuir de forma significativa ao ensino e aprendizagem de probabilidade, na possibilidade de garantir a melhor compreensão nos procedimentos envolvidos, formas que venham facilitar e criar a capacidade de desenvolver o pensamento probabilístico nos alunos.

2.1. NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

As primeiras orientações nacionais, sobre o ensino de probabilidade, estão dispostas no Parâmetro Curricular Nacional (PCN) de matemática, orientações que abrangem toda a Educação Básica, entretanto, apesar da inclusão do ensino da probabilidade e da orientação ao uso da História da Matemática no PCN de matemática, este documento oficial, não evidencia a obrigatoriedade dessas inclusões nos currículos escolares, deixando cada escola livre para organizar seu currículo com os conteúdos essenciais, conforme suas decisões.

No PCN de matemática, consta as recomendações que foi acertado no National Council of Teachers of Mathematics[3] (NCTM) que ocorreu em 1980 nos Estados Unidos, quando professores reuniram-se para discutir sobre orientações para melhorar a qualidade no ensino de matemática, promovendo novas ideias às discussões curriculares, enfatizando "a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática" (BRASIL, 1998, p. 20), orientações que foram sendo aderidas nas atualizações dos currículos de diversos países.

Na reunião do NCTM (1980) no que tange ao conteúdo de ensino de probabilidade evidenciou-se a respeito da "importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdo, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos" (BRASIL, 1998, p. 20).

Anterior ao PCN de 1998, os currículos escolares do Ensino Fundamental seguiam o que era estabelecido na Lei Federal n. 5.692, de 11 de agosto de 1971. De acordo com a introdução aos PCN de 1998, ficou estabelecido como objetivo geral, para Educação básica que deveria "proporcionar aos educandos a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de autorrealização, preparação para o trabalho e para o exercício consciente da cidadania" (BRASIL, 1998, p. 13).

Segundo Samá e Silva (2020, p. 19) no PCN de matemática recomenda-se a inclusão da Probabilidade desde os anos iniciais do ensino fundamental, entretanto, "na prática os professores em sala de aula, em sua abordagem, ainda mostravam muitas lacunas e fragilidades", ainda segundo as autoras, "Essas deficiências vêm sendo discutidas por grupos de pesquisadores e educadores da Educação Estatística, resultando em investigações e construções de estratégias pedagógicas significativas para embasar e aprofundar o trabalho desenvolvido nesse nível de ensino" (Id., 2020, p.19).

Tanto no NCTM quanto no PCN de matemática, orienta-se incluir conteúdos "que permitam ao cidadão "tratar" as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória" (BRASIL, 1998, p. 49) e enfatizam que a natureza humana deve compreender que muito dos acontecimentos podem se relacionar com probabilidade de existir, então fazer essa interação em relação ao ensino é de extrema necessidade e importância, pois é abordado no PCN (1998) que sua principal finalidade é,

---

[3] Conselho Nacional de Professores de Matemática

> Que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p. 52).

No entanto, de acordo com o PCN (1998) de matemática, o tema da probabilidade não é tratado como Eixo temático separado, mas sim como um tópico dentro do *Tratamento da informação*. Nesse contexto, o ensino da probabilidade envolve o foco na construção do espaço amostral, a utilização do princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão. Além disso, o PCN também enfatiza a importância da realização de experimentos e simulações para estimar e verificar probabilidades previstas. Portanto, os conteúdos relacionados à probabilidade estão inseridos no tópico Tratamento da Informação, de acordo com as diretrizes estabelecidas e

> Podem ser explorados em projetos mais amplos, de natureza interdisciplinar, que integrem conteúdos de outras áreas do currículo, como a História e a Geografia, além da Matemática e os temas como Saúde e Meio Ambiente. O tema Trabalho e Consumo, por exemplo, é um bom eixo para articular um desses projetos, uma vez que esse assunto é de grande interesse dos alunos, principalmente os de quarto ciclo, que começam a tomar algumas decisões em relação ao seu encaminhamento profissional (BRASIL, 1998, p. 138).

Mais de vinte anos depois, a importância do Ensino de Probabilidade ainda se justifica e se intensifica na sociedade e no ensino escolar atual, mas foi somente com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 20 de dezembro de 2017 que foi integrado a Probabilidade como uma Unidade Temática[4] *Probabilidade e Estatística*, com suas devidas descrições de conteúdos e orientações para ser ensinado desde o 1º ano do Ensino Fundamental, recomendando as habilidades e competências por ano escolar, que o ensino deve contemplar na aprendizagem, tanto a nível cognitivo quanto ao nível socioemocional.

A Base Nacional Comum Curricular, conhecida comumente por sua sigla BNCC, é "um **documento de caráter normativo** que define o **conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p. 13, grifo nosso), documento que se aplica único e exclusivamente a educação escolar, para garantir o direito de aprendizagem aos alunos "e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana

[4] No PCN de matemática a nomenclatura é EIXO TEMÁTICO.

integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (Ibid., p. 13).

Como a BNCC é um documento oficial, obrigatório, com referência nacional, pode-se afirmar que o currículos escolares do Brasil, deveriam ser repensados, reformulados seguindo suas normas, com o intuito de ajudar “a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação” (BRASIL, 2017, p. 15), sendo que deve ser aplicada as escolas públicas e privadas em igual teor, para garantir o acesso, permanência e aprendizagem a todos os estudantes do Brasil, pois,

> A BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação (BRASIL, 2017, p. 14).

É importante frisar que a construção da BNCC foi prevista na Constituição Federal de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996, no documento nº 9394 e no Plano Nacional de Educação de 1994, passando por algumas etapas e versões, até ser oficialmente homologada para atualização ou construção dos currículos escolares da Educação Infantil e do Ensino Fundamental.

Segundo Giordano (2022, p. 64) “O processo de elaboração da BNCC transcorreu de forma turbulenta, com reviravoltas políticas [...]. A versão final (a terceira) não representou uma evolução natural das versões anteriores, mas uma mudança radical de concepções sobre a educação”, entretanto este autor ainda enfatiza que, com a aprovação da BNCC foi que houve alguns avanços no ensino de probabilidade, por inclui-la como uma das cinco unidades temáticas no ensino fundamental.

As competências gerias definidas na BNCC (2017), estabelecem que o aluno tem que ser capaz de usar os saberes ensinados na escola, ou seja, ser capaz de utilizar o conhecimento aprendido aplicando em seu cotidiano, quando necessário. É importante enfatizar que as competências gerais são baseadas em todo o documento oficial e estabelecidas como “conhecimentos essenciais” e “definidas como mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercícios da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p. 6).

Dessa forma, espera-se que os estudantes brasileiros, consigam, de forma relevante, aprender ou reaprender a significar ou ressignificar competências necessárias para utilizar em ações, acontecimentos e ampliar conhecimentos que fazem do seu dia a dia, competências que estão destacadas na Base Nacional Comum Curricular, como mostra no Quadro 1:

Quadro 1 – Competências gerais da Base Nacional Comum Curricular

Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborando para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: Brasil (2017, pp. 7-8).

Em cada área de ensino há competências especificas, no caso da matemática, essas competências evidenciam que os alunos precisam reconhecer a importância da matemática em suas tarefas diárias e com isso devem-se tornar capazes de interagir com os saberes ensinados na escola, como “orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações" (BRASIL, 2017, p. 274), para isto conta com oito competências específicas, como destacados no Quadro 2:

Quadro 2 – Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental
1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: Brasil (2017, pp. 263, 264).

Percebe-se, que na BNCC, uma grande importância atribuída à valorização do conhecimento do aluno e a verificação de sua assimilação em sua estrutura cognitiva. Em relação aos recursos educacionais, conforme estabelecidos na BNCC (2017). É fundamental que sejam desenvolvidos de forma a despertar o interesse dos alunos pelo aprendizado. "Esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para sistematização dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2017, p. 297).

É crucial, que as crianças sejam alfabetizadas no campo probabilístico, a fim de que, a cada ano escolar, se familiarizem com esse conhecimento e adquiram competência para utilizar adequadamente tudo o que relacionado a esse objeto de conhecimento em suas vidas. Considerando que:

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (BRASIL, 2017, p. 270).

Conforme Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 01) os estudantes das séries iniciais, "tem uma curiosidade natural sobre de onde vieram as coisas", nesse contexto os objetos de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular estão organizados por ano escolar para serem desenvolvidos em todo o Ensino Fundamental e assim proporciona aos professores organizarem seus materiais e recursos para melhor contemplar as habilidades essenciais aos alunos.

Lima (2020, p. 16), defende que o ensino de probabilidade "deve ocorrer de maneira progressiva, proporcionando o contato com seus diversos conceitos ao longo dos anos de escolarização, a partir de problemas variados, para que o raciocínio probabilístico se desenvolva adequadamente", principalmente porque o "conhecimento matemático é um dos que mais se exige na Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (BRASIL, 2017, p. 263), mas em meio a tanta distração, principalmente virtual, o professor tem um desafio significativo em elaborar estratégias de ensino que façam os alunos gostarem de aprender matemática.

O conteúdo de Probabilidade no Ensino Fundamental, está organizado na BNCC (2017) como: Unidade Temática, objetos de conhecimento e habilidades, distribuídos por ano escolar, contemplando as noções essenciais para a aprendizagem gradativa deste objeto, como pode se observar no Quadro 3.

Quadro 3 – Unidade temática: Probabilidade na BNCC do Ensino Fundamental.

Ano Escolar	Objetos do Conhecimento	Habilidades
1º	Noção de acaso.	(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.
2º	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis".

3º	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4º	Análise de chances de eventos aleatórios	(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5º	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável; Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º	Princípio multiplicativo da contagem; Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: (BRASIL, 2017, pp. 274 – 315).

É consensual a importância da aprendizagem significativa nos anos iniciais, sobre as noções dos conceitos relativos à probabilidade. Segundo Fernandes (2014, p. 11) “Certamente, quando esses conceitos são bem trabalhados nesses níveis de ensino, o aluno compreende efetivamente a construção do espaço amostral, evoluindo, então, nos anos seguintes de sua escolarização", dados que são ressaltados na BNCC, por isso a necessidade de ensinar os conceitos básicos desde o 1º ano do ensino fundamental, não é o caso desta pesquisa, mas vale ressaltar que neste nível de ensino, seguindo recomendações da Base Nacional comum Curricular e de acordo com Samá e Silva (2020) os professores tem que perceber,

> a necessidade de inserir o estudante dos anos iniciais no universo da investigação de forma que possam coletar dados e apresentá-los por meio de tabelas e gráficos, bem como saber interpretar informações divulgadas por meio desses registros. Além disso, também é destacada a importância de que o tema de investigação faça parte do cotidiano do estudante, partindo de algo que eles tenham curiosidade e interesse em investigar (SAMÁ; SILVA, 2020, pp. 8, 9).

Observa-se que o conteúdo sobre Probabilidade é abordado de maneira progressiva ao longo do ensino fundamental. Nos primeiros anos, os alunos devem adquirir o entendimento de que nem todos os fenômenos são previsíveis de forma determinística. Eles devem compreender a existência de eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. Nesse estágio, é importante apresentar a classificação dos eventos e mostrar como eles podem ocorrer em determinadas situações cotidianas, permitindo que os alunos identifiquem a ideia de acaso, eventos aleatórios e eventos com maior probabilidade de ocorrência.

Também é relevante que os alunos reconheçam características de resultados mais prováveis, aprendam sobre espaço amostral e saibam calcular probabilidade de eventos, mesmo sem utilizar fórmulas (BRASIL, 2017). Esses conceitos são progressivamente aprofundados nos anos posteriores, ampliando as ideias iniciadas nos primeiros anos do ensino fundamental.

> Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àquelas cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica (BRASIL, 2017, p. 271).

E assim progridem para ensino fundamental maior, nessa etapa "os alunos já têm condições de desenvolver pesquisas sobre sua própria realidade e interpretá-la" (SAMÁ, SILVA, 2020, p. 5), assim, o desenvolvimento do aluno tende a ser mais eficaz, mas necessita do incentivo do professor e no ensino de Probabilidade "é importante que os alunos percebam que, por meio de experimentações e simulações, podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático" (Ibid., p. 5) com a intenção que não se rompa os conceitos que devem ser aprendidos no ensino da probabilidade, nos anos finais,

> O estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2017, p. 270)

Quanto a abordagem curricular, tem-se que identificar quais orientações são eficazes para atingir os objetivos e metas quanto ao ensino de matemática e principalmente a necessidade da comunidade escolar, segundo Lopes (2018, p. 24) orientações curriculares não estão apenas nos documentos oficiais, mas também "em livros didáticos e literatura educacional, formação inicial e continuada dos professores, avaliações centralizadas, projetos [...] e tantas outras ações que constituem o que, de forma geral, podemos denominar *tradições curriculares",* é necessário compreender do que o professor sente mais falta quando está atuando em sala de aula, pois só ele é capaz de identificar a necessidade do ato de educar.

2.2. NA CONCEPÇÕES DE PROFESSORES

A partir da disciplina Currículo e Avalição no Ensino de Matemática, desenvolvida no decorrer do curso, foi possível obter a percepção de professores quanto ao ensino de probabilidade na educação básica, abrangendo as abordagens curriculares, avaliações e contribuições dos entrevistados sobre o objeto matemático, visando melhorias no ensino de matemática e no ensino de probabilidade.

O Ensino de probabilidade é uma Temática relevante e fundamental na educação básica, é por meio deste conteúdo os alunos podem desenvolver habilidades necessárias que fazem parte de suas rotinas. Nesse sentido a BNCC (2017) estabelece orientações para a atualização ou construção dos currículos escolares, para garantir que esse conteúdo seja ensinado nas escolas.

De acordo com Giordano (2022, p. 67) para o ensino de Probabilidade tudo deve "ser amplamente discutido, desde a elaboração de currículos dos cursos superiores e a formação de pedagogos e licenciados em matemática até o atendimento aos professores que estão em sala de aula, por meio da formação continuada", para melhorar a aprendizagem dos conteúdos, sendo essencial que as formações inicial e continuada contemplem esse tema, para que os professores possam atuar de forma efetiva em sala de aula.

Para identificarmos as percepções dos professores foi aplicado um questionário cujo objetivo foi buscar uma melhor compreensão sobre o ensino de probabilidade em sua prática de ensino de matemática e a necessidade para melhorar este ensino em sala de aula, direcionada exclusivamente à professores de matemática. Foi realizada com a aplicação de um questionário virtual, formulado *Google Forms*, que é um aplicativo de gerenciamento de pesquisa lançado pelo Google, se utilizou este formato, devido à pandemia, causada pelo vírus Covid-19, que ocorreu entre os anos de 2020 e 2023.

O formulário foi construído com o intuito de analisar a ação, a prática e a concepção que os professores têm em sala de aula, bem como as formas de avaliação mais utilizadas, suas concepções sobre a aprendizagem dos alunos, as dificuldades que os professores enfrentam ao ensinar matemática e possíveis sugestões que venham melhorar a qualidade do ensino. Essas informações foram essenciais para o desenvolvimento de um produto educacional relacionado ao ensino de probabilidade.

Os dados coletados no formulário foram analisados e utilizados devidamente na disciplina e alguns dos questionamentos foram destacados para esta pesquisa, contemplando informações e orientações, que se fortaleceram e contribuíram para a ampliação desta dissertação, como: do Professor Dr. José Carlos de Souza Pereira, em 2018 do curso de especialização da UFPA, do Orientador desta pesquisa professor Dr. Miguel Chaquiam, em 2020 no Mestrado da UEPA, das professoras Ana Kelly e Maria de Lurdes (2021), que ministraram a disciplina para aplicação deste questionário.

Foram levantados alguns questionamentos durante o curso do Especialização da UFPA, que foram trazidos pelo Professor para a pesquisa da monografia. Exemplos desses questionamentos incluem: Como tornar o ensino da História da Matemática mais atrativo e viável de ser aplicado em sala de aula? Como tornar a probabilidade ensinável por meio da História da Matemática? Como recorrer a História da matemática para começar o ensino da probabilidade na educação básica? Essas questões foram adaptadas para a disciplina, para o projeto de mestrado e para o desenvolvimento e aplicação deste questionário.

A análise deste questionário foi baseada na teoria de Lüdke e André (2013, p. 20), as quais afirmam que “O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular”, próprio da realidade dos professores e singular pela necessidade e interesse que esses professores apresentam em sua rotina. Segundo as autoras, a pesquisa qualitativa “se desenvolve numa situação natural, é rica em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (Ibid., p. 20).

De acordo com Lüdke e André (2013), o questionário foi utilizado como parte da análise documental nesta pesquisa qualitativa. Ele serviu como uma ferramenta para obter dados descritivos sobre as concepções e práticas dos professores de matemática que atuam na rede pública de ensino. A partir das respostas dos professores, pretende-se compreender como suas práticas e concepções sobre o ensino de matemática são desenvolvidas, identificar suas principais necessidades e dificuldades no ensino, bem como suas estratégias e sugestões para melhorar ou mesmo superar essas dificuldades. A pesquisa contou com a participação de 30 professores.

Ao analisar o tempo de serviço de cada participante, observou-se que 50% dos entrevistados possuem de 1 a 5 anos de experiência como professor de Matemática. Além disso, 23,3% estão atuando há menos de um ano em sala de aula; 10% possuem de 16 a 20 anos de atuação como professor; 6,7% têm de 6 e 10 anos de experiência; 6,7% possuem de 11 a 15 anos em sala de aula e 3,3% possuem de 31 a 35 anos de experiência, todos lecionando matemática na rede pública de ensino.

Em relação ao nível de formação, foi observado que 46,7% dos participantes possuem nível superior; 36,7% possuem Especialização; 10% possuem Mestrado e 10% possuem Doutorado. Esses dados reforçam a importância da formação continuada para o aprimoramento profissional. É notável que todos os entrevistados possuem formação inicial em Licenciatura Plena Matemática, o que evidência a base sólida em sua área de atuação.

A formação continuada desempenha um papel fundamental no aperfeiçoamento de práticas pedagógicas, proporcionando atualização de conhecimentos, troca de experiências e o desenvolvimento de novas estratégias de ensino, beneficiando tantos os educadores quanto os alunos.

Após apresentação dos professores, realizou-se uma análise das práticas profissionais, com o intuito de identificar a metodologia mais utilizada nas aulas de matemática. Verificou-se que 46,7% dos professores iniciam as aulas “pela definição seguido de exemplos e exercícios”. Outros 40% dos professores optam por começar as aulas “com uma situação problema para depois introduzir o assunto”.

Alguns professores também forneceram informações adicionais sobre as perguntas realizadas. Por exemplo o professor JC (2020) inicia a aula “com um diálogo preliminar de ideias sobre o conteúdo ou assunto, nas perspectivas de uma modelagem de cognição social” enquanto o professor GV (2020) inicia “com diálogos finalizado a respeito do assunto para então conceituar e passar a definição seguindo de exemplos e exercícios”.

É evidente que o papel do professor é fundamental no processo de ensino e aprendizagem, especialmente em disciplinas como a Matemática. Diante disso, é notório que muitos professores enfrentam dificuldades em sala de aula. Ao questioná-los sobre o que sentem falta quando ministra suas aulas de Matemática, a maioria dos professores, correspondendo a 62,1% responderam a falta de "recursos didáticos e pedagógicos".

Essa realidade é comum nas escolas públicas, onde muitas vezes os professores precisam recorrer a recursos próprios quando desejam inovar e diversificar suas práticas. Além disso, 17,2% dos professores apontaram a falta de "metodologias diferenciadas de ensino" como uma das suas principais necessidades.

Embora muitos professores tenham interesse em buscar novas métodos e metodologias para auxiliar em sala de aula, muitas vezes isso se torna inviável devido a diversas questões, como a falta de tempo disponível ou recursos financeiros. Isso é evidenciado pelo fato de que 10,3% dos professores mencionaram a falta de "Formação Continuada" como uma necessidade.

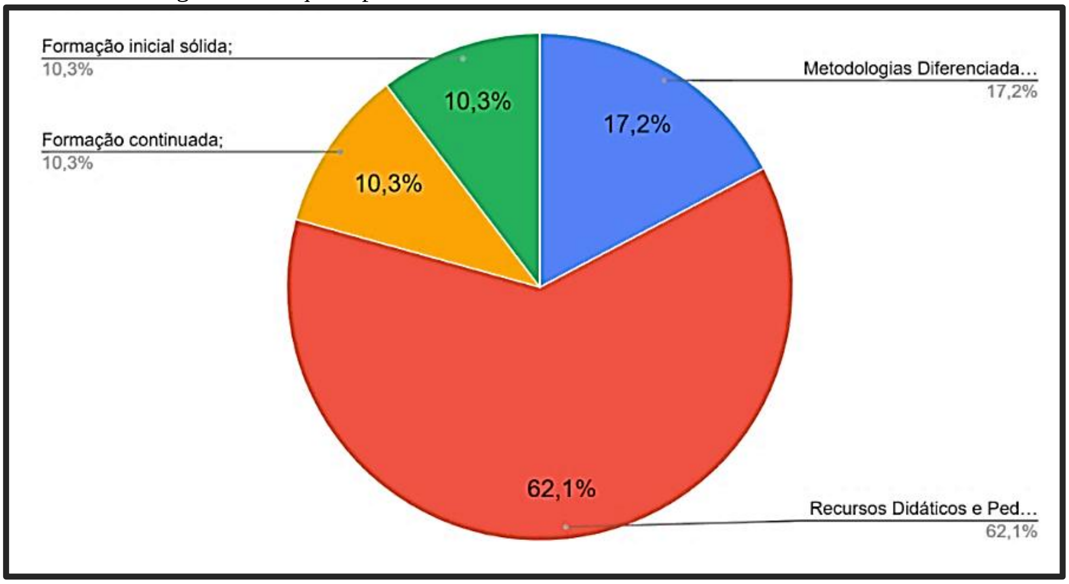
É importante destacar que a formação contínua é essencial para melhorar a realidade vivenciada no cotidiano da sala de aula, beneficiando tanto os professores quanto os alunos e escola como um todo. Portanto, é fundamental que os professores se mantenham atualizados e busquem aprimorar constantemente suas práticas de ensino.

Por fim, é interessante destacar que 10,3% dos professores acreditam que a formação inicial deveria ser mais sólida. Essa percepção revela uma lacuna a ser preenchida na formação inicial, pois os professores sentem a necessidade de buscar o que faltou na graduação. Essa atitude demonstra uma postura positiva em relação à educação, pois eles buscam suprir essas lacunas por meio da formação continuada.

Através dessa busca constante por atualização e aprimoramento, é possível garantir um suporte adequado para oferecer adequado para oferecer um ensino de qualidade e uma aprendizagem significativa aos alunos.

Os dados estatísticos apresentados no Gráfico da Figura 1 evidenciam a importância dos recursos didáticos e pedagógicos. É importante evidenciar que esses recursos não se limitam a tecnologias em sala de aula, mas como disse o professor JC, eles incluem materiais simples, jogos educativos, entre outros meios que venham proporcionar aos alunos um ambiente diversificado e estimulante.

Figura 1 – O que o professor mais sente falta nas aulas de Matemática.



Fonte: Google Forms 2021

É importante enfatizar que nos documentos oficiais para o ensino de Matemática no Brasil, vêm apontando a necessidade de "formação profissional qualificada". No entanto, mesmo os professores que buscam essa formação, ainda passam por necessidade de apoio financeiro para projetos, eventos e recursos materiais. Necessidade que estar amparada pela BNCC (2017), entretanto,

> Muitos esforços vêm sendo empreendidos para minimizar esses problemas. Alguns com bastante sucesso, como os que acontecem em escolas que têm elaborado projetos educativos de modo a que contemple os interesses e necessidades da comunidade. Também existem professores que, individualmente ou em pequenos grupos, têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumem uma atitude de constante reflexão, o que os leva a desenvolver práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática (BRASIL, 2017, p. 21).

Diante dessa informação, percebe-se a necessidade de formação continuada e de recursos didáticos, pois o ensino requer dos professores conhecimentos e recursos para tornar o processo de aprendizagem significativo e efetivo para os alunos. Diante dessa realidade, destaca-se a resposta do professor JC (2020) que sugere a necessidade "de um espaço de ensino adequado para explorar múltiplas possibilidades didáticas", ou seja, é muito importante que os professores tenham acesso a recursos didáticos que possibilitem uma experiência de ensino diferenciada, como a integração de diversos espaços da escola.

Seguindo com a pesquisa, foi questionado aos professores "Quais as principais formas de avaliação que costumam aplicar ou utilizar em sala de aula". Percebe-se que a maioria utiliza estratégias conhecidas e presentes na rotina de um professor, indicando que algumas atitudes não se modificam, porque são estratégias efetivas que funcionam.

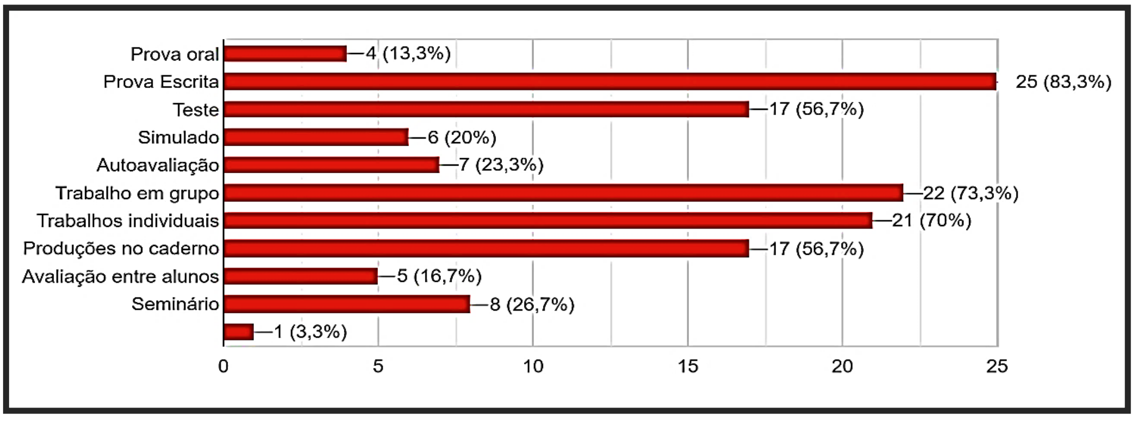
De acordo com Eugênio (2016) a avaliação é um processo de desenvolvimento da aprendizagem. Nesse sentido, os professores têm consciência da necessidade de promover mudanças e analisar o lado afetivo dos alunos em sua prática pedagógica. Para isso, é importante que os professores se mantenham em um processo contínuo de formação, buscando aprimorar suas habilidades e conhecimentos.

É relevante ressaltar que a formação continuada permite que os professores estejam atualizados em relação as novas abordagens e tecnologias educacionais. Ao unir diferentes formas possíveis de ensino, desde as mais tradicionais até as tecnológicas, os professores podem potencializar suas estratégias de ensino e tornar as aulas mais dinâmicas e significativas. É importante destacar que as inovações tecnológicas não devem substituir totalmente as estratégias tradicionais, mas sim complementá-las.

Algumas respostas dos participantes têm contribuições significativas para esta pesquisa. Por exemplo, o professor JC (2020) relatar utilizar a "Perspectiva de uma avaliação pautada na análise do erro do(a) aluno(a) e na superação desse erro". Essa abordagem garante uma avaliação contínua que analisa todo o processo de aprendizagem referente ao conhecimento proposto aos alunos.

No geral, observa-se que a prova escrita é a forma mais comumente utilizada de avaliação. No em entanto, é importante destacar que ela não é a única forma de avaliação adotada pelos professores. O processo avaliativo envolve outras estratégias e perspectivas, como testes, simulados, autoavaliação, trabalhos em grupos, entre outros formas, conforme ilustrado no Gráfico da Figura 2. Isso demonstra a variedades de abordagens utilizadas pelos professores para avaliar o desempenho dos alunos.

Figura 2 – As principais formas de avaliação aplicadas



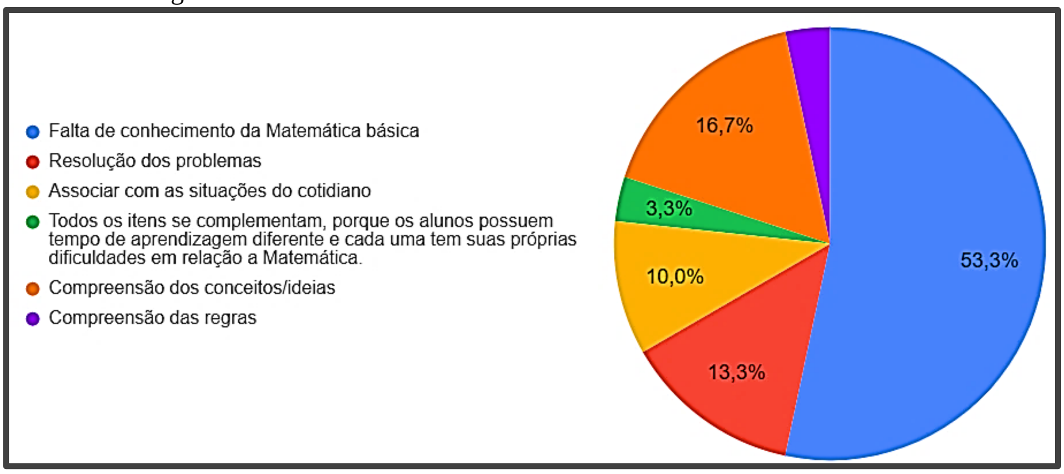
Fonte: Google Forms (2020)

Foi realizado um questionamento relevante para compreender as dificuldades dos alunos nessa localidade no ensino de matemática. As respostas revelarão que 53,3% dos alunos enfrentam uma grande dificuldade em aprender matemática, sendo a principal causa de conhecimento da matemática básica. Esses alunos geralmente têm dificuldades com as operações fundamentais, indicando que esses conceitos não foram devidamente armazenados em sua estrutura cognitiva. Essa situação pode estar relacionada à falta de aprendizagem desses conteúdos nas séries anteriores.

Ademais, 16,7% dos alunos têm dificuldade na “compreensão dos conceitos”; o que pode estar relacionado à forma como esses conceitos são apresentados, outra dificuldade mencionada é a “resolução de problemas” com 13,3% dos alunos enfrentando essa dificuldade, talvez por falta de uma estratégia didática que forneça passos importantes para resolução de problemas, outros 10% dos alunos têm dificuldade da associação dos conteúdos com situações do cotidiano.

Outras dificuldades mencionadas são a “compreensão das regras” com 3,3% e na mesma porcentagem com 3,3% enfrentam que “Todos os itens se complementam, porque os alunos possuem tempo de aprendizagem diferente e cada um tem suas próprias dificuldades em relação a Matemática” JC (2020). Em Geral as dificuldades indicam a necessidade de trabalhar de forma mais clara e didática os conceitos básicos e procurar por teorias que contemplem a utilização de resolução de problemas, criando situações que envolva a vida cotidiano dos alunos na matemática. Como estão apresentadas no Gráfico da Figura 3.

Figura 3 – As maiores dificuldades dos alunos nas aulas de matemática.



Fonte: Google Forms (2020)

Observar-se estatisticamente as dificuldades que os alunos enfrentam no processo de aprendizagem da matemática, é possível perceber que são bastante significativas e variadas.

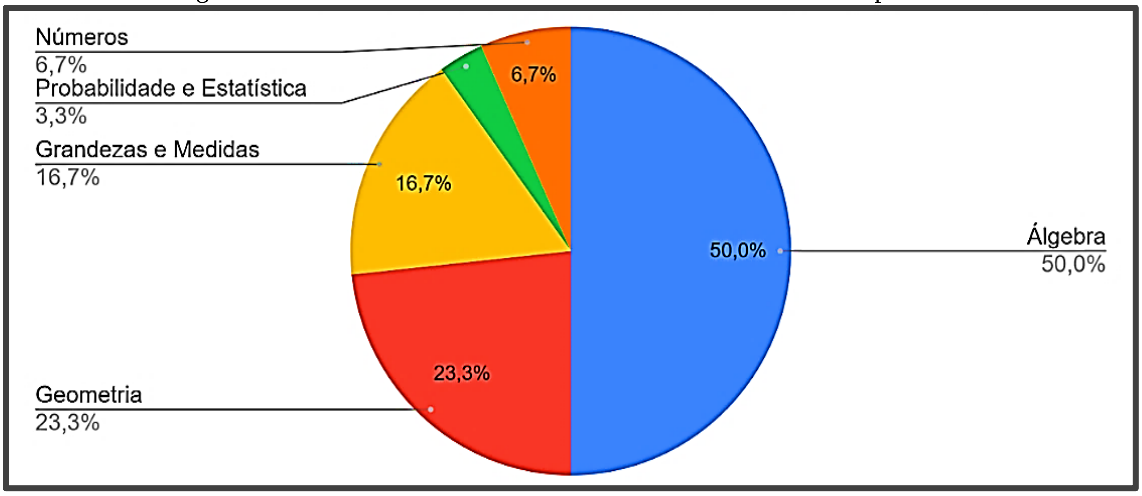
Entre as principais dificuldades estão a falta de conhecimento da matemática, a falta de compreensão dos conceitos e a resolução de problemas. É importante que os professores busquem formas para superá-las, utilizando estratégias pedagógicas adequadas e possíveis de serem aplicadas. Pois somente dessa forma, será possível garantir uma aprendizagem significativa e eficaz para os alunos.

Ao analisar a pergunta: “Qual Unidade Temática da matemática você considera mais importante nas suas aulas?”, é evidente que a Probabilidade não recebeu a mesma importância dada pelos professores. É importante ressaltar que isso não significa que houve a intenção de desvalorizar alguma unidade temática, mas sim de identificar de forma mais precisa a necessidade de um maior aprofundamento no ensino de probabilidade.

É evidente também a predominância de outras unidades temática em detrimento da probabilidade. É importante incentivar que a probabilidade é relevante e significativa pra noções que vão além dos conhecimentos escolares. Ademais, a probabilidade só ganhou mais êxito recentemente, ou seja, ela ainda é uma área que está crescendo e desenvolvendo métodos, estratégias e recursos materiais para o seu ensino.

Diante dessas informações, constata-se nos dados da pesquisa, que 50% dos professores consideram a Álgebra como a unidade mais importante no ensino da matemática, seguida pela Geometria com 23,3%, Grandezas e Medidas com 16,7%, Números com 6,7%, e a Probabilidade e Estatística, como foi mencionada, com apenas 3,3% de importância no ensino. Esses resultados estão apresentados no Gráfico da Figura 4 e corroboram com as análises em andamento na pesquisa.

Figura 4 – A Unidade Temática da matemática considera mais importante.



Fonte: Google Forms (2020)

Seguindo com a pesquisa, buscou-se enfatizar como a história da matemática pode ajudar os alunos a compreenderem os conceitos matemáticos ao longo do tempo. Nesse contexto, os professores foram questionados se já utilizaram a História da Matemática, como recurso didático no ensino de algum conteúdo matemático.

De acordo com a BNCC (2017) é importante "incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (BRASIL, 2017, p. 295), de forma que esteja integrada a situações que os alunos podem viver no dia a dia, possibilitando refletir a respeito de sua utilidade e deve-se também considerar que,

> Para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos (BRASIL, 2017, p. 295).

Observa-se que 53,3% dos professores afirmaram já ter utilizado a história da matemática como recurso didático no ensino de algum conteúdo matemático, enquanto 46,7% responderam que ainda não a utilizaram. Dentre os que já utilizaram, destacam-se exemplos como a utilização de histórias de vida de matemáticos famosos para contextualizar o conteúdo, a apresentação de problemas históricos para os alunos resolverem e a exploração da origem de fórmulas matemáticas.

Dentre as respostas sobre o uso da História de Matemática, como recurso didático, foram citados diversos conteúdos e objetos de conhecimentos, tais como: história dos números; matemática mesopotâmica, multiplicação e divisão; frações; fórmulas de Bhaskara; unidade de medidas; matemática financeira, números romanos, equação do segundo grau, Teorema de Pitágoras, triângulo retângulo, conceito de área, conjuntos; trigonometria; progressões, geometria, expressões numéricas, geometria espacial, Teorema de Talles, sistema de numeração, números naturais, potenciação e conjuntos numéricos.

Os professores demostraram interesse em utilizar a História da Matemática como recurso didático em um conteúdo a ensinar, acrescentando um recurso diferenciado na rotina da sala de aula. Entretanto, há a necessidade de aprimorar a disponibilidade e a qualidade desses recursos, por exemplo, em relação à pergunta sobre o uso da História da Matemática para despertar maior interesse do aluno, a maioria dos professores responderam positivamente, mas destacaram que a abordagem e o conteúdo são fatores importantes.

Quanto ao conteúdo de probabilidade, a maioria concorda que a História da Matemática pode ser uma estratégia eficaz para incentivar os alunos a aprofundar seus conhecimentos, embora alguns enfatizam que vai depender dos recursos materiais, da história contada e da abordagem utilizada.

Para finalizar o formulário perguntou-se aos professores sobre possíveis aspectos que gostariam de mencionar em relação ao ensino da probabilidade na educação básica, as respostas obtidas contribuíram de maneira relevante com a pesquisa em questão, possibilitando uma reflexão e a aplicação de opções de recurso deste conteúdo.

As respostas de alguns professores indicam, a necessidade de promover um ambiente investigativo para que possam se desenvolver os conceitos de probabilidade para que não fique restrito a um conjunto de regras e cálculos e sim que venha despertar no aluno o espírito de análise para a tomada de decisões, como destacado por RS (2020). No entanto como menciona o professor JC (2020) pode não refletir as diferentes possibilidades para o ensino de probabilidade, porque é algo que depende das escolhas didáticas e metodológica do professor de Matemática.

O professor AV (2020), enfatiza que o ensino de probabilidade é importante para que as pessoas possam ter agilidade nas tomadas de decisões em ocorrências do seu cotidiano, tendo um senso crítico diante de fatos que podem ocorrer em sua volta, porém sendo reflexivo diante de um grupo social.

Em parte, a análise deste questionário, revela a necessidade da formação continuada, para que os recursos utilizados no ensino de probabilidade sejam mais bem explorados e reconhecidos. Ao planejar atividades escolares, é importante escolher cuidadosamente os recursos e métodos que possam ser aplicados em sala de aula e que levem ao interesse e desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

Embora a Base Nacional Comum Curricular não define para o professor como deve ser feito o ensino de probabilidade, ela determina a importância da Probabilidade, como um conteúdo essencial que deve ser explorado com bastante ênfase durante a vida escolar dos alunos, então cabe ao professor assumir a responsabilidade e compromisso de comtemplar as habilidades essenciais no ensino da probabilidade.

Segundo Godoy e Santos (2012, p. 25) os documentos curriculares oficiais, propõem caminhos para desenvolver a Matemática escolar, entretanto "quando as portas das salas de aulas se fecham, cada professor de Matemática, de acordo com as suas ideologias, crenças, concepções, formação etc. faz o que quer e entende ser o melhor para ele e para os seus alunos", logo, espera-se que cada professor, de acordo com sua vivência e experiência, planeje suas aulas e contemple as habilidades e competências, orientadas na BNCC (2017) para proporcionar aos os alunos a capacidade de resolverem qualquer situação probabilística, por aprender de fato sobre o conteúdo, tanto na escola quanto na vida fora da escola.

Então, entende-se que seja necessário que os professores estejam em plena propriedade dos conceitos e conteúdos a respeito da teoria da probabilidade, que possibilitem por meio educacionais estratégias e métodos fazer com que os alunos desenvolvam também a compreensão e domínio desta temática e percebam com isso a utilidade da probabilidade, desde as tarefas mais simples até as mais complexas envolvendo este objeto matemático e assim comtemplem as orientação das habilidades e competências que os alunos tem que desenvolver.

2.3. NO LIVRO DIDÁTICO

Nesta seção, realizamos uma análise da coleção 0028P20022 do livro didático de matemática dos anos finais do ensino fundamental, correspondente ao PNLD 2018. O autor dessa coleção é Edwaldo Bianchini e a editora responsável é a Moderna. Nosso objetivo foi investigar a presença e a interação do conteúdo de probabilidade com a tendência metodológica da História da Matemática, independentemente da abordagem adotada, da organização do conteúdo ou das atividades propostas. Buscamos identificar se há abordagem desses aspectos e do tema em questão, analisando a disposição do conteúdo, a metodologia empregada e a possível conexão com a história da matemática.

Sabe-se que o livro didático é um instrumento de importância significativa em sala e funciona “como um elo entre professores, alunos e o conteúdo que carrega em si” (LIMA, 2020, p. 01) o que faz dele um forte aliado no processo de ensino e aprendizagem, principalmente tratando-se de escolas públicas, seu conhecimento deve contemplar o conteúdo exigido nos documentos curriculares oficiais.

Esta coleção, apresenta uma pouquidade de conceitos e tarefas voltadas para o ensino probabilísticos, para poder contemplar conhecimentos prévios de anos anteriores sobre este tema, sendo este propósito de suma importância no processo de aprendizagem. Segundo os autores Vergnaud (1996, 1986) e Bryant e Nunes (2012),

> A escolha de uma coleção que não propõe um trabalho robusto com problemas de natureza probabilística pode fazer com que esse trabalho não seja foco na sala de aula, o que prejudicaria o contato dos estudantes com conceitos e problemas variados, que poderiam proporcionar o desenvolvimento de seus raciocínios probabilístico (apud LIMA, 2020, p. 08).

O livro didático deve proporcionar uma leitura do desenvolvimento do raciocínio probabilístico e propor situações ao uso da História da Matemática, por ser uma Tendência Metodológica da Educação Matemática, nesse sentido, o livro deve e tem que abranger os aspectos que envolvam a necessidade de melhorar o ensino e a aprendizagem no ambiente escolar, tornando-se um relevante recurso em sala de aula, devendo contemplar, o que foi aprovado na BNCC (2017). Segundo Vasconcelos, Vasconcelos e Chaquiam (2022) o tema *Probabilidade,* está gerando altas expectativas ao ensino e exigindo um conhecimento maior na aprendizagem, pois a partir da Base sua,

> Obrigação passou a ser feita desde o 1º ano da Educação Básica, o que tende a gerar certa expectativa quanto ao seu ensino, assim sendo as noções de acaso vão sendo ensinadas ampliando as ideias principais sobre probabilidade, como a ideia de aleatório em situações do cotidiano, espaço amostral, eventos aleatórios, cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis e assim seguem para os anos posteriores, do 6º ao 9º ano, intensificam-se as ideias iniciadas do 1º ao 5º ano (VASCONCELOS, VASCONCELOS, CHAQUIAM, 2022, p. 36).

Assim sendo, espera-se que os livros didáticos sejam elaborados, tomando como alicerce as orientações da Base Nacional Comum Curricular. Segundo Lima (2020, p. 4), a BNCC tem como destaque “a visibilidade dada à concepção frequentista de probabilidade, à realização de experimentos aleatórios e à relação de tal concepção de Probabilidade com a Estatística (cálculo de probabilidades a partir de dados de pesquisas)”, ainda segundo esta autora, na BNCC há diferentes concepções de Probabilidade, que podem ser utilizadas dependendo da situação e do problema que será resolvido e como será resolvido.

Da coleção disponível, foi selecionado os livros a partir do 6º ano, devido ao nível de ensino que se pretende analisar, no geral a proposta da coleção analisada, do 6º ao 9º ano, é proporcionar aos professores orientações e sugestões organizadas de acordo com o currículo oficial da educação, servindo de apoio ao planejamento do professor, tomando como referência sua utilidade no processo de ensino aprendizagem, pois sabe-se que sozinho, o livro não é suficiente para tornar as aulas dinâmicas e atrativas.

Na coleção Matemática Bianchini (2018) o autor disponibiliza aos professores uma ideia que deve e necessita ser ampliada e aprofundada para ser aplicada em sala de aula, entretanto percebe-se a pouquidade de tarefas que envolvem a probabilidade, no geral esta coleção, não destaca a probabilidade em nenhum de seus *capítulos,* exceto em um único capítulo no livro do 8º ano, nos demais capítulos, dos livros citados, mesmo sendo uma novidade trazida pela BNCC a probabilidade segue sendo abordada com pouco ênfase, na condição de tarefas em uma *seção especial,* denominada de **trabalhando a informação**, seções que são “separadas”, geralmente no fim de um capítulo, para trabalhar os conteúdos de probabilidade e Estatística.

E embora o autor, desta coleção de matemática, enfatize que "Os conteúdos matemáticos são desenvolvidos de modo que as habilidades, as Unidades Temáticas, as competências e outras áreas do conhecimento se articulem e se relacionem e são tratados na perspectiva das aprendizagens dos anos anteriores e posteriores" (BIANCHINI, 2017, p. XXVIII), ressalta-se a pouquidade de assunto e deveres dado ao conteúdo de probabilidade no livro didático.

Outro ponto desta pesquisa a mencionar, refere-se ao ensino por meio da História da Matemática, que há incentivo sobre seu uso na BNCC, entretanto, não há uso ou orientação direcionada ao ensino da probabilidade, no geral são tarefa envolvendo situações com jogos, envolvendo urnas, dados, cartas, entre outros. No Quadro 4, observa-se a organização geral dos capítulos e conteúdos por ano escolar da coleção analisada.

Quadro 4 – Organização Geral da coleção didática Matemática – Bianchini.

	6º ano	**7º ano**	**8º ano**	**9º ano**
Capítulo 1	Números	Números inteiros	Potências e raízes	Números reais
Capítulo 2	Operações com números naturais	Números racionais	Construções geométricas e lugares geométricos	Números reais
Capítulo 3	Estudando figuras geométricas	Operações com números racionais	Estatística e Probabilidade	Grandezas proporcionais
Capítulo 4	Divisibilidade	Ângulos	Cálculo algébrico	Proporcionalidade em Geometria
Capítulo 5	Um pouco de Álgebra	Equações	Polinômios e frações algébricas	Semelhança
Capítulo 6	Um pouco de Geometria plana	Inequações	Produtos notáveis e fatoração	Um pouco mais sobre estatística
Capítulo 7	Números racionais na forma de fração	Sistemas de equações	Estudos dos triângulos	Equações do 2º grau
Capítulo 8	Operações com números racionais na forma de fração	Simetria e ângulos	A geometria demonstrativa	Triângulo retângulo
Capítulo 9	Números racionais na forma decimal e operações	Razões, proporções e porcentagem	Estudo dos quadriláteros	Razões trigonométricas
Capítulo 10	Polígonos e poliedros	Estudo dos polígonos	Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas	Estudo das funções

Fonte: Bianchini (2017, p. XVI)

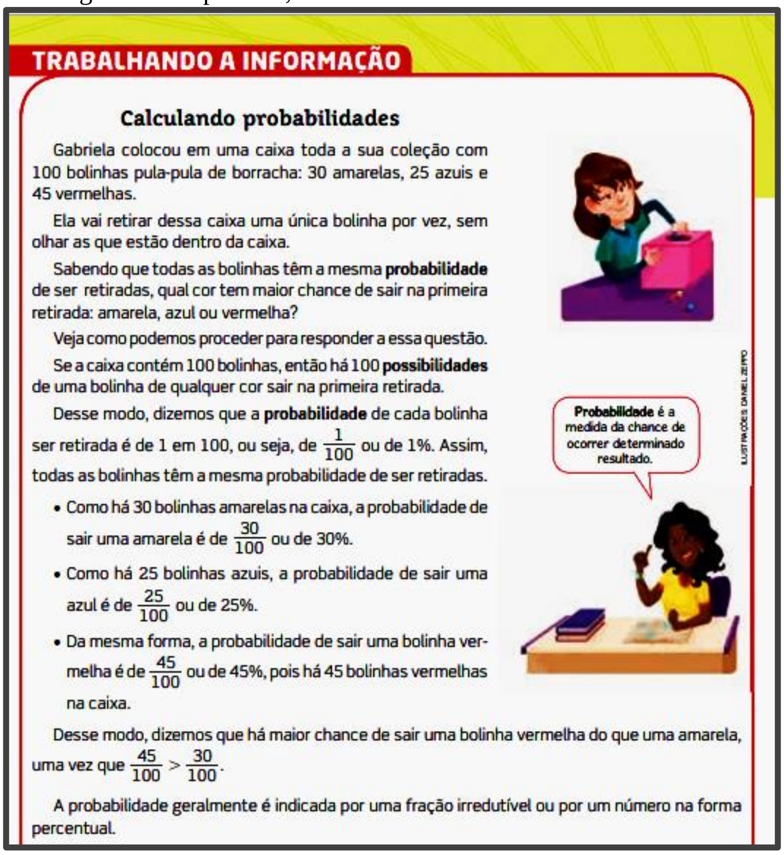
No Livro do 6º ano, no capítulo 8: *Operações com números racionais na forma de fração* e no capítulo 10: *Polígonos e Poliedros*, a probabilidade é citada por meio do cálculo na forma de fração e na forma percentual, operações que são atribuídas ao conhecimento, a respeito dos cálculos da probabilidade, entretanto em ambos os capítulos é indicado no sumário como

Trabalhando a Informação, com o intuito de contemplar habilidades previstas na BNCC (2017), neste caso a habilidade (EF06MA30).

Com base nessas informações, o livro do 6º ano contém 6 questões sobre probabilidade envolvendo que abordam experimentos aleatórios, como caixa com bolas e dados coloridos. Essas questões visam analisar as possibilidades de realizar cálculos relacionados às probabilidades que as situações propõem. No entanto, essas questões não estão diretamente relacionadas ao ensino e a aprendizagem por meio da História da Matemática.

No capítulo 8, é enfatizado o conteúdo de *porcentagem*, utilizando cálculos na forma de fração e na forma percentual. O autor deste livro indica ao professor relacionar esses cálculos e formas com o ensino de probabilidade, abordando conceitos e significados envolvidos. Este capítulo também apresenta três questões que permitem aos alunos explorarem e fixarem o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, sendo uma possibilidade para avaliar o aprendizado dos alunos. É importante ressaltar que essa abordagem precisa ser mais explorada em sala de aula, para garantir uma compreensão mais aprofundada pelos estudantes. Na Figura 5, apresenta-se uma atividade sobre este conceito.

Figura 5 – Capítulo 8, livro do 6º ano. Matemática – Bianchini


TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Calculando probabilidades

Gabriela colocou em uma caixa toda a sua coleção com 100 bolinhas pula-pula de borracha: 30 amarelas, 25 azuis e 45 vermelhas.

Ela vai retirar dessa caixa uma única bolinha por vez, sem olhar as que estão dentro da caixa.

Sabendo que todas as bolinhas têm a mesma **probabilidade** de ser retiradas, qual cor tem maior chance de sair na primeira retirada: amarela, azul ou vermelha?

Veja como podemos proceder para responder a essa questão.

Se a caixa contém 100 bolinhas, então há 100 **possibilidades** de uma bolinha de qualquer cor sair na primeira retirada.

Desse modo, dizemos que a **probabilidade** de cada bolinha ser retirada é de 1 em 100, ou seja, de $\frac{1}{100}$ ou de 1%. Assim, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de ser retiradas.

- Como há 30 bolinhas amarelas na caixa, a probabilidade de sair uma amarela é de $\frac{30}{100}$ ou de 30%.
- Como há 25 bolinhas azuis, a probabilidade de sair uma azul é de $\frac{25}{100}$ ou de 25%.
- Da mesma forma, a probabilidade de sair uma bolinha vermelha é de $\frac{45}{100}$ ou de 45%, pois há 45 bolinhas vermelhas na caixa.

Desse modo, dizemos que há maior chance de sair uma bolinha vermelha do que uma amarela, uma vez que $\frac{45}{100} > \frac{30}{100}$.

A probabilidade geralmente é indicada por uma fração irredutível ou por um número na forma percentual.

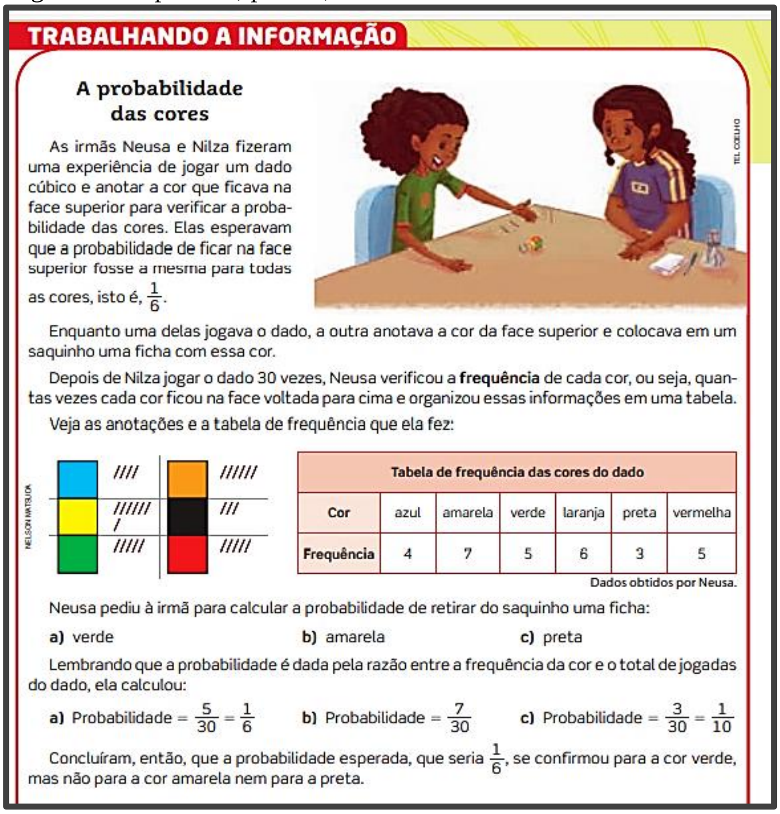
Fonte: Bianchini (2017, p. 205)

Observa-se que essa atividade vai além dos conceitos matemáticos. É possível perceber que a situação envolve uma conexão com um contexto histórico significativo na história da probabilidade. Especificamente, está relacionada as experiências realizadas por Jacob Bernoulli, um renomado matemático do século XVII. Ela pode facilmente se conectada com a história da matemática, além de representar uma situação cotidiana e real para os alunos, isso justifica tornar o conteúdo mais relevante e estimulante em sala de aula.

A atividade representada no capítulo 10 do livro didático, que envolve um experimento aleatório utilizando um dado. Nesse experimento os alunos são convidados a observar e registrar a frequência das cores que aparecem nas faces do dado, além de realizar cálculos de probabilidades relacionados aos eventos do experimento, ou seja, um "levantamento da frequência de cores que saíram nesses lançamentos (registro em tabela de frequências) e do cálculo de probabilidade de eventos associados a esse experimento" (BIANHINI, 2017, p. 271)

Essa é uma atividade que estimular o pensamento crítico e a capacidade de análise dos alunos, um tipo de situação que o professor deve explorar, como um experimento prático e dinâmico na sala de aula. Além de envolve exemplos históricos, pode ser explorado com outros recursos e materiais didáticos, para garantir uma compreensão correta e duradoura dos conceitos de probabilidade pelos alunos. A Figura 6, representa a atividade citada.

Figura 6 – Capítulo 8, parte 2, livro do 6º ano. Matemática – Bianchini.



TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

A probabilidade das cores

As irmãs Neusa e Nilza fizeram uma experiência de jogar um dado cúbico e anotar a cor que ficava na face superior para verificar a probabilidade das cores. Elas esperavam que a probabilidade de ficar na face superior fosse a mesma para todas as cores, isto é, $\frac{1}{6}$.

Enquanto uma delas jogava o dado, a outra anotava a cor da face superior e colocava em um saquinho uma ficha com essa cor.

Depois de Nilza jogar o dado 30 vezes, Neusa verificou a **frequência** de cada cor, ou seja, quantas vezes cada cor ficou na face voltada para cima e organizou essas informações em uma tabela.

Veja as anotações e a tabela de frequência que ela fez:

Tabela de frequência das cores do dado						
Cor	azul	amarela	verde	laranja	preta	vermelha
Frequência	4	7	5	6	3	5

Dados obtidos por Neusa.

Neusa pediu à irmã para calcular a probabilidade de retirar do saquinho uma ficha:

a) verde **b)** amarela **c)** preta

Lembrando que a probabilidade é dada pela razão entre a frequência da cor e o total de jogadas do dado, ela calculou:

a) Probabilidade $= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ **b)** Probabilidade $= \frac{7}{30}$ **c)** Probabilidade $= \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

Concluíram, então, que a probabilidade esperada, que seria $\frac{1}{6}$, se confirmou para a cor verde, mas não para a cor amarela nem para a preta.

Fonte: Bianchini (2017, p. 271)

O que pode facilmente ser realizado por meio da História da Matemática, incluindo exemplos históricos que demonstrem a origem e o desenvolvimento dos conceitos de probabilidade que foram se estabelecendo ao longo dos tempos, assim o professor estará aprofundando este conteúdo por meio de uma abordagem histórica proporcionando que o ensino possa se tornar mais envolvente e contextualizado, permitindo que os alunos compreendam a importância e a aplicação prática da probabilidade em suas vidas.

No livro do 7º ano, capítulo 7: *Sistemas de equações*, a probabilidade está apresentada na seção **Trabalhando a Informação**, relacionada ao jogos com dois dados e as possibilidades de formar pares ordenados nessas jogadas, um exemplo relevante envolvendo a teoria da probabilidade que a História da Matemática pode explorar com bastante eficácia, propondo diversas questões e tarefas e contando a história relacionada as ideias apresentadas por Galilei e Fermat, entretanto há neste livro somente duas questões sobre este objeto. A habilidade que deve ser aprendida nesta tarefa é a (EF07MA34)[5]. Como pode-se observar na Figura 7.

Figura 7 – Capítulo 7, livro do 7º ano. Matemática – Bianchini.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

Para calcular essa probabilidade, devemos inicialmente descobrir todas as possibilidades de soma de números que ele pode tirar nos dados.

Ao lançar dois dados, Hugo pode tirar os seguintes pares de números:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Fonte: Bianchini (2017, p. 165)

[5] Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulação que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

O livro do 8º ano, é o único da coleção Matemática Bianchini, que foi introduzido um **capítulo** sobre unidade temática **Probabilidade e Estatística**, dando maior ênfase ao conteúdo de Estatística. Entretanto, no conteúdo de Probabilidade, é dado ênfase a "Noções de Probabilidade", assim como as noções de espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidade. Segundo Bianchini (2017) as articulações envolvendo o conteúdo de probabilidade são feitas com outras unidades temáticas como *Números* e *Grandezas e medidas*, na seção dos capítulos **Para Saber Mais**, apresentando problemas que envolvem cálculos com porcentagens.

Os objetos de conhecimentos deste conteúdo envolvem, princípio multiplicativo da contagem e a soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral, deste ensino os alunos precisam desenvolver habilidade como calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizar o princípio multiplicativo, reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1 (um) e contemplar a habilidade descrita no código (EF08MA22).

Observa-se na Figura 8, que o conteúdo da "noção de probabilidade" inicia apresentado uma situação que envolve a ideia de incerteza, em sorteio com 1000 números, onde somente 1 número poderá ser sorteado.

Figura 8 – Capítulo 3, conteúdo 5, livro do 8º ano. Matemática – Bianchini.

5 Noções de probabilidade

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Em uma festa de rua foram vendidos 1.000 números para o sorteio de uma bicicleta. Afonso comprou 5 números e Geórgia, 1 número. Veja como determinar a probabilidade de cada um deles ser sorteado.

Essa situação envolve a ideia de **incerteza**, pois sortear um número dentre os 1.000 é um experimento no qual conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado final, ou seja, não é possível saber qual será o número sorteado. Esse tipo de experimento faz parte da **Teoria das Probabilidades**.

Na Teoria das Probabilidades, estudamos as leis que regem os fenômenos que dependem do **acaso**, isto é, fenômenos cujos resultados não podem ser previstos. Nesse caso, interessam a essa teoria os **experimentos aleatórios**, aqueles cujo resultado é imprevisível mesmo que sejam repetidos nas mesmas condições tantas vezes quanto quisermos.

Fonte: Bianchini (2017, p. 87)

Segundo Bianchini (2017) sabe-se que o resultado é possível, mesmo não sabendo qual será o número sorteado, esta é a noção de estudo na Teoria das Probabilidades, ou seja, estuda-se as leis que regem os fenômenos que dependem do acaso, isto é, fenômenos cujos resultados não podem ser previstos. Nesse caso, interessa a essa teoria os experimentos aleatórios, aqueles cujo resultado é imprevisível mesmo que sejam repetidos nas mesmas condições tantas vezes quanto quisermos.

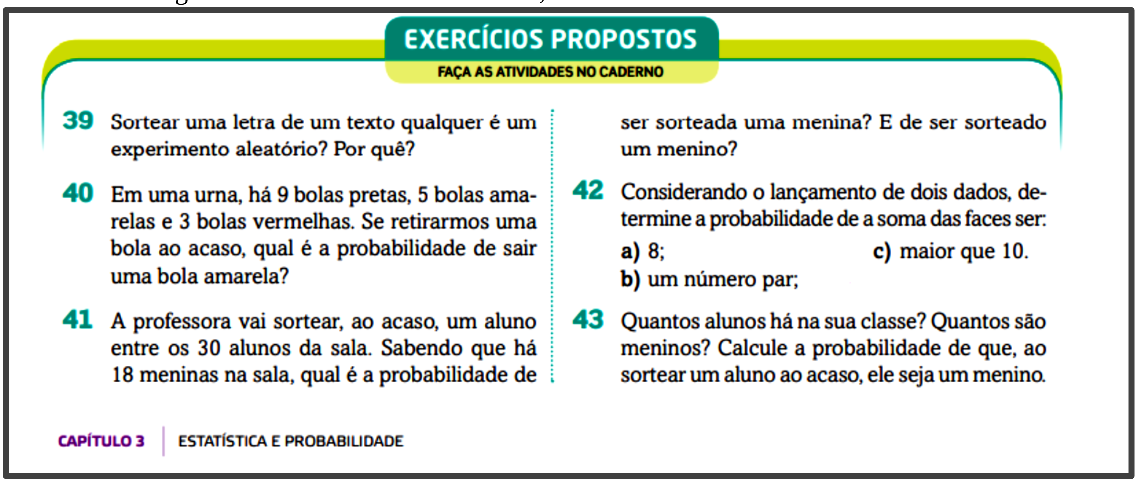
Ainda no conteúdo *Noções de probabilidade*, Bianchini (2017, p. 87) “procura sistematizar os conhecimentos que os alunos já construíram ao longo dos anos anteriores acerca desse assunto, presente nos estudos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental”, o que gera uma certa expectativa, devido a pouca exploração do tema nos livros anteriores, principalmente por não ser inserido como uma Unidade Temática em seus capítulos.

A solução dessa situação, apresentada no livro didático, baseia-se na aplicação da fórmula que é fundamental para o cálculo da probabilidade de ocorrências de um evento, como este, que consiste em dividir o número de elementos do evento pelo número de elementos do espaço amostral:

$$probabilidade\ de\ ocorrência\ de\ um\ evento = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

É importante destacar que essa fórmula não é uma receita pronta para aplicar em todas as situações, mas sim uma ferramenta que deve ser utilizada com atenção, os alunos devem compreender que a escolha do evento e do espaço amostral é fundamental para o cálculo correto da probabilidade. Na Figura 9 apresenta-se exercícios do livro didático que podem ser solucionados independentemente da fórmula.

Figura 9 – Exercícios do conteúdo 5, livro do 8º ano. Matemática – Bianchini.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39 Sortear uma letra de um texto qualquer é um experimento aleatório? Por quê?

40 Em uma urna, há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?

41 A professora vai sortear, ao acaso, um aluno entre os 30 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino?

42 Considerando o lançamento de dois dados, determine a probabilidade de a soma das faces ser:
a) 8;
b) um número par;
c) maior que 10.

43 Quantos alunos há na sua classe? Quantos são meninos? Calcule a probabilidade de que, ao sortear um aluno ao acaso, ele seja um menino.

CAPÍTULO 3 | ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Fonte: Bianchini (2017, p. 88)

No livro do 9º ano, não há explicito em alguma seção, se referindo ao conteúdo de probabilidade, ou seja, não há indicação que está sendo abordada dentro de algum capítulo, entretanto no capítulo 6: *Um pouco mais sobre Estatística*, a probabilidade é citada, por utilizar seu cálculo em conexão com o cálculo de porcentagem no contexto de juro e na seção **Para Saber Mais** com o título *A matemática e os jogos*, um breve trecho aborda sobre a origem inicial da Teoria da Probabilidade, atribuindo ao matemático Girolamo Cardano, uma citação de forma sucinta, perceber-se que não houve intenção de guiar para uma introdução a História da Matemática.

Inicialmente a abordagem deste texto, enfatiza sobre a origem de determinados jogos, cita um personagem que abordou as primeiras noções e as situações que o levou a pensar em resolver situações até então novas na época, poderia com facilidade interagir com a História da Matemática, entretanto identificou-se que este "texto" serviu como uma leitura adicional para abordar sobre eventos independentes, relacionando a probabilidade e enfatizando a teoria dos jogos. Como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Texto sobre Matemática e jogos, livro do 9º ano. Matemática – Bianchini.

PARA SABER MAIS

A Matemática e os jogos

John von Neumann era um gênio indiscutível. Tanto que em 1927, com apenas 24 anos, esse matemático húngaro se tornou o mais jovem professor da Universidade de Berlim. Mas Von Neumann tinha uma cisma: jogar mal pôquer. Resolveu estudar o jogo, e logo concluiu que só a matemática não o salvaria. Porque no pôquer é fundamental saber blefar. Von Neumann mergulhou no tema e, um ano depois, escreveu um artigo científico a respeito: *Theory of Parlor Games* ("teoria dos jogos de salão", em inglês). Ele estava inaugurando a Teoria dos Jogos, ramo da Matemática que estuda estratégias de competição e cooperação. De início, debruçou-se sobre jogos de "soma zero" – aqueles em que um ganha e outro perde, como no pôquer. Mais tarde, John Nash [cuja história foi contada no filme *Uma mente brilhante*], outro matemático, estenderia a teoria aos jogos de "soma não zero", em que todos podem sair ganhando ou perdendo.

[...]

Suponha que você jogou dois dados. A chance que os dois têm de cair com o número 6 é mero fruto da sorte, certo? A humanidade sempre achou que sim. Até que, no século 16, o polímata lombardo Girolamo Cardano (1501-1576) resolveu crackear os dados. Ele anotou todas as 36 combinações possíveis e, a partir daí, notou que certas combinações tinham bem mais chance de sair. Cardano não ficou rico. Mas seu estudo foi o pontapé inicial na Teoria das Probabilidades.

Fonte: HORTA, Maurício, A ciência das apostas. *Superinteressante*, São Paulo, ed. 384, jan. 2018. p. 46.

HAFIEZ RAZALI/SHUTTERSTOCK

Fonte: Bianchini (2017, p. 139)

Desta atividade, o autor faz referência ao genial jogador de dados, o matemático Cardano, apresenta de forma breve sua habilidade com os jogos e sua contribuição para a teoria da probabilidade, em seguida sugere uma atividade prática com os alunos, que são organizados em grupos para realizem o experimento de "lançar os dois dados simultaneamente". Uma orientação com esta situação permite fazer com que os alunos façam suas observações e análises com o intuito de perceberem que os resultados possíveis determinam a probabilidade de ocorrência para cada situação que podem apostar entre eles. Essa análise pode permitir que os alunos compreendam melhor a relação entre as combinações e a probabilidade de ocorrência de cada resultado. Como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Exercícios do conteúdo 3, livro do 9º ano. Matemática – Bianchini.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Já vimos que o lançamento simultâneo de dois dados cúbicos gera um espaço amostral de 36 pares ordenados.

Carol, Rafael e Sofia brincam de jogar dois dados como esses. Responda, em cada item, qual deles tem a maior probabilidade de ganhar e justifique sua resposta.

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

a) Na primeira rodada, eles apostaram que a soma dos números das faces de cima seria: Carol (6), Rafael (7) e Sofia (8).

b) Na segunda rodada, as apostas foram na diferença em módulo entre os números das faces de cima: Carol (1), Rafael (3) e Sofia (0).

c) Na terceira rodada, eles apostaram que o produto dos números das faces de cima seria: Carol (número ímpar), Rafael (número primo) e Sofia (número par).

Fonte: Bianchini (2017, p. 140)

Os problemas que envolvem Probabilidade nesta coleção do livro didático, são recomendados pelo autor que espera "que o tratamento da história da Matemática promova uma reflexão entre os alunos para que percebam que os conhecimentos matemáticos não estão desvinculados da realidade (BIANCHINI, 2017, p. 74). Entretanto, não é atribuído ao conteúdo de probabilidade, mesmo se mostrando vinculado aos exemplos citados no livro à realidade dos alunos, exemplos reais na História da Probabilidade.

No geral, Bianchini (2017), salienta as conexões que podem ocorrer entre as Unidades Temáticas, entretanto, nota-se que o conteúdo de Probabilidade e Estatística, estão posicionados em seus livros em uma seção denominada de **Trabalhando a informação**, exceto no livro do 9º ano, como se a Unidade Temática Probabilidade e Estatística não estivesse inclusa ou tendo pouco importância para ser ensinada e explorada em sala de aula.

Deve se considerar que a BNCC foi aprovada no mesmo ano da publicação desta coleção, que contempla em parte as orientações da Base, enfatizando as competências que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longa da educação básica e as orientações ao uso da História da Matemática no ensino e aprendizagem da matemática escolar, se os professores utilizarem como recurso a História da Matemática, o que é pouco provável, não teriam êxito, nem estratégias didáticas que despertassem o interesse dos alunos, disposto nesta coleção.

Relacionar a História da Matemática com Ensino de Probabilidade, pode não ser uma tarefa difícil, pois o contexto da origem do uso da probabilidade é uma história que interagi com exemplos com que são rotineiros, dinâmicos, agradáveis a todas as idades e mais interessante ainda por ser muito usado fora da escola, de acordo com Roque (2012) utilizar a História no Ensino de matemática, fortalece uma reinvenção do problema no qual os conceitos de um conteúdo ou objeto de conhecimento foram criados.

3. A HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A História da Matemática é uma tendência metodológica da educação matemática, que abrange tópicos como, o ensino, a aprendizagem, metodologias e currículo, está amparada pelos documentos oficiais da educação e vem auxiliar na necessidade de renovação da prática pedagógica do professor em sala de aula. É mais uma oportunidade para ampliação ao conhecimento do aluno. A história vem possibilitar condições diferenciadas e estratégicas de incentivo ao ensinar sobre certas descobertas da matemática.

A Base Nacional Comum Curricular (2017) tem as orientações oficiais e essenciais, quanto ao uso da História da Matemática para ajudar a desenvolver habilidades e competências essenciais a aprendizagem dos alunos, por isso é fundamental "incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (BRASIL, 2017, p. 295). Orientações que também estão em outros documentos curriculares oficiais da Educação Básica.

Nesse sentido, este capítulo apresenta os resultados do levantamento bibliográfico, realizada em documentos oficiais da educação, nas literaturas educacionais, na formação de professores, em documentos que referenciaram o uso da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática, nas orientações e proposta de autores e professores que corroboram com o uso didático da história na educação, entre outras ações que beneficiam o ensino e aprendizagem da História na Matemática.

3.1. A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Para iniciar este tópico evidencia-se a importância da matemática e a necessidade de compreendê-la cotidianamente em qualquer situação, neste sentido Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 01) destacam que "a matemática é um esforço humano continuado", pois tem passado e futuro, se constitui e muitas vezes tende a evoluir, de acordo com a necessidade de seu uso ou mesmo de sua ampliação.

Algumas vezes a evolução de determinado objeto matemático, pode levar um período longo até se estabelecer na matemática ou mesmo como uma disciplina matemática e pode também neste período ter contribuições de diferentes personagens e de diferentes áreas, assim sendo, baseia-se na história para entender e poder contribuir com um objeto matemático ou conteúdo matemático.

Segundo Pereira (2021), no Brasil esta Tendência começou como proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997, e em 1999 instituiu-se a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), efetivado no III Seminário Nacional de História da Matemática, período que começou a expandir os trabalhos acadêmicos sobre este tema, esta autora cita as proposta e trabalhos internacionais, debatidos na Comissão Internacional de Instrução Matemática[6](ICMI) e defendidos no Congresso Internacional de Educação Matemática[7](ICME), que embasaram a abrangência da História da Matemática no ensino de matemática.

Junqueira (2014) enfatiza que foi considerado neste congresso uma série de questões, sobre o uso da História da Matemática no ensino, como:

- Nível dos sistemas de ensino no qual a História da Matemática é relevante como ferramenta de ensino.
- Consequências do uso da história para a organização da prática da sala de aula.
- Utilidade da História da Matemática para os pesquisadores em Educação Matemática.
- Incorporação da História da Matemática no currículo.
- O ensino da matemática pode realizar-se de diferentes perspectivas: heurística, lógica e por meio de uma abordagem histórica (JUNQUEIRA, 2014, pp. 181-182).

Em conformidade com este uso, Berlingoff e Gouvêa (2008) afirmam que a história ajuda a fornecer contexto, por ser um produto cultural, saber a história pode proporcionar um entendimento profundo para professores e estudantes, contextos que podem mostrar também como foram superadas essas dificuldades historicamente, uma fonte rica de atividades que podem ser exploradas, formuladas, reformuladas e reelaboradas para atender a necessidade do planejamento do professor.

No Brasil há eventos regulares que incentivam a produção de trabalhos científicos sobre o ensino por meio da História da Matemática. Segundo Pereira (2021), eventos que surgiram dando ênfase a questões, orientações e trabalhos publicados sobre o uso da história no ensino de matemática. Chaquiam (2022, p. 13) cita autores que são "a favor do uso didático da história da matemática", além de ser utilizada como um método de investigação, justificando seu uso pela própria necessidade da História.

Conforme as ideias de Mendes (2009) sobre o uso da História da Matemática no ensino de um conteúdo e conhecendo sua jornada de pesquisa sobre o tema, tem-se a disposição

---

[6] *International Commission on Mathematics Instruction*
[7] *International Congress on Mathematical Education*

recursos materiais enriquecedores para ampliar uma prática de ensino a partir de um contexto histórico, que para esse autor é essencial, pois permiti expor aos alunos a produção do conhecimento matemático que passou a existir pela necessidade de se criar estratégias para solucionar problemas.

De acordo com Pereira (2016) a maior parte dos conceitos matemáticos passaram a existir de problemas, que possivelmente surgiram ou foram criados para estimular situações de soluções que a matemática de alguma forma poderia resolver. Entretanto, por meio do ensino e aprendizagem precisa-se desenvolver nos alunos competências para serem capazes de refletir e resolver diversos problemas na vida.

Os trabalhos que Mendes (2021) vem desenvolvendo abordam sobre os problemas que estão na história que impulsionaram a buscar por soluções, por diversos meios, um desses trabalhos é denominado de *movimento de criatividade matemática na história*, que o fazem refletir sobre o uso da história da matemática, segundo este autor este recorte, das discussões,

> Trata das histórias da criação matemática e seus processos criativos no sentido de apontar modos inovadores por meio dos quais diversos matemáticos se envolveram na busca de soluções para problemas que os desafiaram e a partir dos quais organizaram dinâmicas de combinações entre conhecimentos já produzidos, para que pudessem apontar soluções aos problemas novos que surgiam (MENDES, 2021, p. 64).

Entretanto, Mendes (2021) destaca que,

> Quem escreve a História da Matemática e quem a pesquisa precisa agir com base em um outro processo de criação, que é o processo de organização sistemática desse processo histórico-conceitual, de modo a atribuir um encaminhamento concatenado que dê sentido ao que se quer (MENDES, 2021, p. 69).

Deste trecho, é válido realçar que quando se reescreve uma história, se imagina sendo contada ou recontada em um local específico, para um público específico de determinada cultura, entretanto, quando o professor está inserido nesse local e conhece previamente a história deste local, se torna mais evidente atribuir os recortes e informações essenciais que vão contribuir com o conhecimento matemático desses alunos, logo se faz necessário recriar “um objeto epistemológico já criado, cuja recriação é feita em função do movimento que queremos dar ao trabalho que intencionamos desenvolver” (MENDES, 2021, p. 69).

Nesse sentido, o ensino esteado na História da Matemática, pode proporcionar aos alunos o conhecimento de como surgiu determinado conteúdo escolar, ou seja, pode se basear na História da Matemática para contar, apresentar e mostrar as transformações que ocorrem com um objeto de conhecimento aos longos dos anos, pois “as pessoas agem por uma razão, e tipicamente constroem seu trabalho sobre outros anteriores em uma vasta rede de colaboração entre gerações. A informação histórica nos permite compartilhar essa "grande figura" com os estudantes" (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 03), de fato, isto explica a ideia de evolução de um objeto matemático.

De acordo com Roque (2012, p. 22) "O papel da História da Matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram, para além da reprodução estéril de anedotas visando "motivar o interesse dos estudantes". Por isso a importância de mostrar aos alunos que é possível melhorar uma situação existente e por meio da História da Matemática, se pode conhecer os problemas enfrentados e mostrar que podem ser adaptados, reconstruídos ou reformulados conforme a necessidade e interesse do professor, proporcionando aos alunos conhecerem e elaborarem situações problemas, semelhantes com os encontrados na História da Matemática.

De acordo com Chaquiam (2022) a História da Matemática é um recurso para ser apresentado e aplicado em sala de aula, em um planejamento para um conteúdo, ou para uma ou duas aulas, porque este não será o único recurso que o professor deve utilizar durante o ano letivo, mas quando usado "O professor poderá extrair das informações históricas, aspectos epistemológicos que favoreçam a sua explicação de porquês matemáticos e que muitas vezes favorecem a ampliação e o enriquecimento da aprendizagem dos alunos" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 26).

De acordo com D'Ambrósio (2012) "a história está se consolidando como um elemento motivador para o ensino de matemática, desfazendo a ideia de uma ciência cristalizada", que não houve erros, isso indica que iniciar um conteúdo com fatos que levaram aos estudos de um objeto que faz parte hoje do currículo escolar, pode ser uma proposta significativa, prática, dinâmica e participativa no ensino da matemática. No PCN há orientação quanto ao seu uso,

> A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1998, p. 40)

De acordo com Junqueira (2014, p. 182), "paralelamente ao crescente interesse da História da Matemática no ensino da Matemática, tem aumentado a busca de relações entre a Matemática e sua história como uma ferramenta didática e como campo de pesquisa", diante dessa afirmação, percebe-se o empenho de professores pesquisadores, em proporcionar estratégias educacionais que possam ser usadas evidenciando que a História da Matemática no ensino de um objeto de conhecimento matemático seja usado além de nomes, datas e eventos, melhorando a aprendizagem dos alunos em matemática, pois,

> A História da Matemática é considerada por muitos como um importante instrumento para o docente em sala de aula, ou seja, o aspecto metodológico propriamente dito. Sua utilização adequada por meio de fontes confiáveis e atualizadas, pode promover entre os discentes, uma visão mais crítica em relação à matemática e à construção do conhecimento. O contexto histórico permite observar a Matemática em sua prática filosófica, científica e social, fornecendo ao discente a compreensão do papel que ele desempenha no mundo (PEREIRA, 2016, p. 02).

Para incluir a História da Matemática, é necessário acatar e se conscientizar que este é um recurso que pode somar aos planos e recursos didáticos do professor em sala de aula e compreender um processo que possa ensinar a partir de uma história, como diz Junqueira (2014, p. 185) “O esquema enfatiza a vasta gama de competências necessárias pelo professor e nos lembra mais uma vez a importância do problema permanente de formação de professores em História da Matemática”, formação, que aplicada amplia o conhecimento do professor que procura por recursos para utilizar em diferentes planejamentos de seus conteúdos em suas aulas.

Vidarte, Chachapoyas, Cavalari (2021) reforçam a questão na formação de professores e vão mais além, quando enfatizam que os professores formadores não estão preparados para trabalhar propondo estratégias, meios e recursos aos professores em formação para incluir a História da Matemática como proposta ao ensino de um conteúdo. Entretanto segundo Balestri (2008 apud VIDARTE, CHACHAPOYAS, CAVALARI, 2021, p. 86) “[...] não é necessário que o professor seja um especialista em história da Matemática para utilizá-la, podendo recorrer a publicações para obter informações históricas e utilizá-las em suas aulas”. Pereira (2016) evidencia que a contribuição e inclusão da História da Matemática na,

> Formação de professores não é algo recente, porém, no que se refere ao ponto de vista curricular, principalmente vinculado aos cursos de Licenciatura em Matemática, ela se tornou mais evidente no ensino, quando o Ministério da Educação (MEC) publicou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), apresentando-a como uma das formas de fazer matemática em sala de aula, acarretando assim, sua inserção como parte da formação dos alunos da Educação Básica (PEREIRA, 2016, p. 23).

Contribuição que se fortaleceu com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017, ao orientar que toda escola deve criar materiais que orientem os professores sobre os conteúdos essenciais de como os alunos devem aprender, mas a Base não define como serão criados esses métodos e recursos que venham atender a aprendizagem das habilidades e competência tão frisadas neste documento. Quanto a responsabilidade de oferta na formação dos professores, está pautado na BNCC (2017) que,

> A primeira tarefa de responsabilidade direta da União será a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à BNCC. A ação nacional será crucial nessa iniciativa, já que se trata da esfera que responde pela regulação do ensino superior, nível no qual se prepara grande parte desses profissionais. Diante das evidências sobre a relevância dos professores e demais membros da equipe escolar

> para o sucesso dos alunos, essa é uma ação fundamental para a implementação eficaz da BNCC (BRASIL, 2017. p. 19).

Partindo deste princípio, há pesquisadores que vêm organizando suas ideias, através do aprofundamento do conhecimento, da formação, da ressignificação na forma de aprender e ensinar, que tende a criar estratégias de integrar a História da Matemática no ensino da matemática de forma eficaz e efetiva, contando “que a matemática tem muita história, diversos personagens de todos os tipos: alguns são gênios, outros nem tanto, cometem erros e acertos. Há reis e príncipes de fato, ou em suas áreas, e realizaram seu trabalho em épocas de paz, de guerra e fizeram a história de seu tempo” (EICHENBERGER, 2016, p. 172).

3.2. PROPOSTAS DE USO DA HISTÓRIA NO ENSINO

Há disponíveis na literatura bibliográfica, teórica e prática, propostas viáveis de utilizar a História da Matemática no Ensino de Matemática, com o objetivo de incentivar a aprendizagem dos alunos, realizadas por autores pesquisadores engajados em proporcionar um diferencial para a prática pedagógica do professor de matemática, que busca por recursos e materiais didáticos como auxílios em suas aulas.

Pereira (2016, p. 05) tem como proposta utilizar instrumentos matemáticos em sala de aula, “partindo da história da matemática, como atividades investigativas propondo cópias de instrumentos antigos e outros artefatos, reconstruídos com base em fontes históricas”, como o propósito de entendimento que venha melhorar o ensino de Matemática. Entretanto, esta autora explica que,

> Construir alguns modelos de instrumentos não é uma tarefa fácil, especialmente os mais complexos, mas alguns exemplares podem ser confeccionados por professores ou pelos seus próprios alunos. Nesse sentido, o estudo de conceitos - sejam eles matemáticos ou não - por meio de instrumentos antigos, possibilita ao aluno a compreensão acerca dos aspectos sociais, políticos, culturais e econômicos que são relacionados ao objeto investigado, permitindo que ações interdisciplinares, por exemplo, possam configurar no ambiente escolar como oportunidades de demonstrar a relação entre as demais disciplinas da matriz curricular e a Ciência Matemática (PEREIRA, 2016, p. 06)

Nesta situação, pode-se proporcionar aos alunos a oportunidade de conhecerem a constituição e evolução que a teoria da probabilidade foi tendo ao longo dos anos. Segundo Roque (2012, p. 22) por meio da História pode-se “analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato", mostrando fatos de como foi possível solucionar problemas, tendo oportunidade de discutir sobre várias formas de interpretação e solução e resolver situações problemas com estratégias diferentes.

Segundo Mendes (2009, p. 37) "a concepção de redescoberta, baseia-se no pressuposto de que a aprendizagem do aluno se torna plena, significativa e sólida na medida em que ele é provocado intelectualmente, o que significa despertar sua curiosidade". E assim encontra-se propostas de Mendes (2009), Brandemberg (2021), Pereira (2021) e Chaquiam (2022), entre outros pesquisadores que vem se empenhando para valorizar e enaltecer o ensino de matemática por meio da História da Matemática.

Sendo assim, buscou-se desenvolver uma forma, que leve o aluno ao desenvolvimento das competências, bastante enfatizadas na BNCC, utilizando a história da matemática neste processo para explicar a constituição e evolução de um objeto de conhecimento. Mendes e Chaquiam (2016) destacam o quanto é importante a História da Matemática, pois é uma tendência que melhor pode ser usada para efetivar tal explicação em sala de aula. Segundo estes autores, das experiências vividas com suas pesquisas. Atualmente, veem mostrando que,

> A inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 80).

Mendes (2022, p. 09) enfatiza a importância de refletir sobre a conexão entre a matemática e a sua história, conexão que "conduz ao entendimento da relação entre a matemática e a história assim como da utilidade da história para a matemática, pois, como sabemos, a fonte de novas descobertas na matemática esteve pautada, muitas vezes, nos problemas e soluções apresentados no passado", nesse sentido, pode vir a proporcionar na elaboração de novas ideias, reformulações e mesmo na evolução de um determinado conteúdo, objeto matemático ou recursos didáticos.

A proposta de Mendes (2017, p. 146) ao uso da História da Matemática no ensino de um conteúdo matemático se dá por meio de uma investigação histórica, pois "usar a investigação no ensino de matemática oportuniza aos estudantes um exercício de leitura, de escrita e de discussão das ideias matemáticas, bem como suas relações com outras áreas de conhecimento", tornando-os ativos na busca por compreender como foi evoluindo o objeto matemático investigado e propondo que eles possam reproduzir como atividade, possibilidades metodológicas, despertando o interesse dos,

> Educadores matemáticos, desde a década de 1990, preocupados com o processo de construção de explicações coerentes, lógicas, com sentidos e significados, para o conhecimento matemático produzido [...]. É importante, entretanto, buscarmos estabelecer princípios que sustentem esse processo de utilização da história, de modo que façamos uso do mesmo durante a elaboração e utilização de atividades de ensino de matemática apoiadas no seu conhecimento histórico[...] para que se possa avançar nessa direção é necessário que cada interessado se aproprie da matemática produzida historicamente, no sentido de compreender e explicar interpretações acerca dos modos de conhecer e explicar essa matemática produzida (MENDES, 2022, p. 09).

É consensual que uma investigação torna o aluno ativo, curioso, incentiva-o a buscar respostas por situação a resolver, nesse sentido, a ideia do professor Mendes (2009, 2022) baseia-se em investigação acerca da História da Matemática e ainda, este autor defende que o uso da história nas aulas de matemática, pode ajudar a compreender o ensino de matemática, entretanto seu uso,

> Só terá importância se exercitarmos uma recriação da história da matemática na qual os envolvidos no processo de aprendizagem reflitam a respeito das estratégias sociocognitivas (pensamentos e ações) criadas e praticadas ao longo da história humana para explicar e compreender tais fatos matemáticos no contexto sociocultural em que se desenvolveram (MENDES, 2022, p. 04).

As investigações de Mendes (2022, p. 04) sobre o uso da História da Matemática no ensino abrangem diversos aspectos e diversas práticas socioculturais "como o comércio, a navegação, a arquitetura, a engenharia militar, as artes em geral, dentre outras atividades profissionais que possam contribuir na construção de uma epistemologia das práticas matemáticas em contextos socioculturais e históricos".

Entretanto, para isso ocorrer, "se faz necessário que o professor lance continuamente em sala de aula, uma prática desafiadora na qual seus estudantes se aventurem na busca de sustentação ou revalidação de verdades estabelecidas ao longo da pesquisa histórica", Mendes (2022, p. 02), ainda segundo este autor, utilizando tal procedimento os professores podem minimizar as dificuldades que existem no processo de aprendizagem.

> Considerando as dificuldades dos professores em inserir as informações históricas nas ações de ensino, principalmente porque as referências históricas quase sempre não aparecem nos livros didáticos, para que possam utilizá-las em suas ações docentes, proponho que o professor adote informações históricas como fontes de esclarecimentos conceituais e enriquecimento pedagógico, para conduzir suas ações docentes, nas quais o estudante investigue, discuta, sintetize e aprenda noções matemáticas desenvolvidas em épocas anteriores ao nosso tempo sem admiti-las como definitivas, e sim compreendendo que os aspectos históricos podem explicitar os processos de construção da matemática, que em cada momento das aulas poderão ser usados para a compreensão de quem as aprende (MENDES, 2022, p. 11).

Mendes (2022, p. 12) explica que "A investigação histórica foi tomada como um modo de reconstrução da matemática produzida em diferentes contextos socioculturais e em diferentes épocas da nossa história. Trata-se de pesquisar as histórias para organizar um sequencial histórico-conceitual a ser utilizado na formação conceitual e didática dos professores" para assim poder ter entendimento e tilizar com seus alunos, envolvendo uma interação entre professor e aluno, mantendo sempre uma organização e planejamento para que tudo ocorra corretamente.

Nos trabalhos de Mendes (2009, 2016, 2022) sobre investigação histórica, há orientações de exemplos de como utilizar a história no ensino de matemática, detalhando passos e procedimentos para ser utilizado, cujas possibilidades contemplam as seguintes vertentes:

- Atividades manipulativas extraídas diretamente da história da matemática;
- Atividades manipulativas adaptadas da história da matemática;
- Desenvolvimento de projetos de investigação temática;
- Investigação de problemas históricos;
- Estudos de textos históricos adaptados de fontes primárias;
- Estudos de textos históricos extraídos de fontes primárias;
- Elaboração e utilização de videoaulas baseadas em textos históricos de fontes primárias ou secundárias.

Nestas situações Mendes (2022, p. 19) destaca que as escolhas dos procedimentos a serem utilizados "dependem diretamente do interesse de cada um em tentar contribuir para que os aspectos históricos do desenvolvimento da matemática não se tornem apenas documentos guardados". Ademais favorecerá o aprofundamento no conhecimento, por isso a disposição, é o principal requisito para começar a utilizar determinada metodologias ou recursos.

Brandemberg (2022, p. 02) defende o uso da História da Matemática por meio de atividades dispostas nos textos históricos sobre um objeto matemático, segundo este autor, pode se buscar na "História as explicações e o desenvolvimento conceitual desses conceitos (objetos, conteúdos) visando obter elementos que minimizem possíveis obstáculos de aprendizagem, que encontramos no ensino". Sobre os textos históricos no ensino de matemática, este autor orienta, que ao apresentarmos um texto,

> Os processos de resolução a partir de exemplos particulares, coletados em fontes originais, os nossos "textos históricos" podemos proporcionar ao estudante, o contato com os métodos utilizados e as dificuldades características de cada época na resolução desses problemas; nos garantindo uma oportunidade de compartilhar uma matemática que historicamente se consolida como uma produção sociocultural humana, onde os aspectos do cotidiano, da escola e da academia ao se mesclarem, criam as possibilidades de comparação das estratégias de resolução antigas com as atuais, identificando as vantagens e as desvantagens do uso de uma ou da outra (BRANDEMBERG, 2021, p. 26).

Ainda segundo este autor as atividades que serão coletadas nos textos históricos devem ser "elaboradas considerando o conteúdo matemático a ser estudado e conformadas estruturalmente com temas e objetivos bem definidos ligados a obtenção do conhecimento matemático direcionado a uns mais conceitos específicos", (BRANDEMBERG, 2021, p. 26), de forma que os alunos compreendam e valorizem a aprendizagem e o conhecimento que irão adquirir com esta construção, pois os textos tendem a ampliar conhecimentos e consolidar habilidades tão exigidas nos currículos escolares atuais.

Brandemberg (2021, p. 28) realizou um estudo a respeito de textos históricos que podem ser utilizados em sala aula, classificando critérios para classificar quais textos podem e devem ser considerados históricos. Após essa classificação inicial, concluiu que um texto histórico é um "documento, composto de formatos e materiais variados em algum momento da história, nos permite acessar de maneira implícita e explicita elementos do contexto de sua composição e da relevância de se conteúdo com vistas ao entendimento do conhecimento matemático". É fundamental analisar os textos históricos de maneira abrangente para melhor aproveitamento do seu potencial no ensino, considerando a qualidade de sua produção e divulgação.

Dessas condições Brandemberg (2022, p. 15) organizou uma classificação inicial para que os documentos se encaixem na condição de um texto a ser trabalho pelos professores e considerou "que tratam da produção de conteúdo matemáticos; os que nos mostram como determinados conteúdos se desenvolvem, com suas personagens; e os que, em essência, apenas, buscam aproximar a matemática acadêmica/escolar do leitor comum", e mais este autor acentua que estas classificações estão em desenvolvimento, como mostra no Quadro 5.

Quadro 5 – Sobre a classificação inicial de um texto histórico

Para uma Classificação Inicial de Textos Históricos de Matemática	
Quanto ao conteúdo	Texto de matemática; Texto de história da matemática; Textos de divulgação matemática.
Quanto ao distanciamento	Textos clássicos; Textos modernos.
Quanto ao uso	Livro texto; Livro fonte (consulta/estudo)
Quanto a investigação	Fonte principal; Fonte complementar;
Quanto ao contexto	buscamos uma classificação considere o **contexto da escrita do texto e o contexto da escrita do texto...?**

Fonte: Brandemberg (2022, p, 29, grifo do autor)

Para Brandemberg (2022, p. 15) "essa classificação inicial se faz importante por evidenciar possibilidades de maior naturalidade quando da discussão e do uso de textos históricos no ensino de matemática que muitas vezes não se fazem tão claras” e salienta sobre a elaboração e aplicação das atividades denominadas “cunho histórico”, retiradas desses textos e baseadas em atividades que são estruturadas. Brandemberg (2022) cita autores como Sá e Mendes que propõem atividades com teorias bem trabalhadas em programas pós graduação em Matemática das universidades públicas do Pará.

Seguindo com as propostas de atividades didáticas utilizando a História da Matemática, indica-se os trabalhos de Vidarte, Chachapoyas, Cavalari (2021) que apresentam, uma sugestão possível de ser utilizada ao ensino de Probabilidade, abordando questões relativas à ideia de acaso e a relevância dos axiomas de Kolmogorov direcionada ao curso de formação de professores de matemática. De acordo com estes autores, é preciso contribuir para aumentar a inclusão da História da Matemática nestes cursos. Proposta que elaboraram em quatro momentos, indicando seus aspectos históricos e atividades.

Vidarte, Chachapoyas, Cavalari (2021), utilizaram uma abordagem sobre o uso da História da Matemática e o Ensino de Probabilidade, contemplando suas pesquisas com situações que estão na história, destacando dela recortes que lhe proporcionaram um aplicação útil e interessante, onde os autores levarem para sala de aula, neste caso, utilizaram trechos e problemas originais para serem aplicados e no decorrer das atividades incluíram exemplos, exercícios e apresentação de biografias dos personagens que foram escolhidos.

Chaquiam (2022, p. 20) apresenta sobre as contribuições ao uso da História da Matemática, tanto na formação didática e pedagógica quanto na formação matemática, pois “é função do professor a elaboração intencional de material didático para compor a estratégia metodológica adotada, evidentemente, associado à ação de ensinar”, assim como é função do professor buscar por essa formação, para melhoria do ensino em sala de aula e da aprendizagem dos alunos. No Quadro 6, apresenta-se a forma como os autores organizaram cada momento das suas atividades.

Quadro 6 – Momentos da proposta de atividade

#	Resumo das ideias a serem abordadas	Estudiosos de destaque
1	Apresentar o conceito de Probabilidade Clássica e Geométrica. Discutir diferença entre um evento improvável e um impossível.	Pierre-Simón de Laplace (1749-1827) Conde de Buffon (1707- 1788)
2	Apresentar o Paradoxo de Bertrand. Propor a realização de uma atividade sobre este Paradoxo	Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)
3	Discutir as resoluções da atividade proposta. Discutir algumas consequências deste problema para a Matemática. Mostrar o sexto problema proposto por Hilbert.	David Hilbert (1862-1934)

3	Apresentar as ideias de Kolmogorov para auxiliar a resolução parcial do sexto problema proposto por Hilbert. Relacionar estas ideias com a Probabilidade Clássica e o Paradoxo de Bertrand	Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)

Fonte**:** Vidarte, Chachapoyas, Cavalari (2021, p. 87)

Observa-se no quadro, que os autores no primeiro momento, apresentaram o objeto matemático, seus conceitos e os personagens que foram destacados, em seguida apresentam resolução de exercícios sobre o tema; no segundo momento apresentam outra proposta de atividade sobre um conceito, destacando um personagem que contribuiu com o tema; o terceiro momento é dedicado a socialização dos resultados e a percepção que tiveram sobre os primeiros momentos e por fim aplicaram o quarto momento, onde apresentaram suas ideias, neste caso mais moderna, relacionando com a forma inicial ou clássica da teoria da probabilidade, destacando o personagem que contribuiu para esse avanço (VIDARTE, CHACHAPOYA, CAVALARI, 2021), e assim finalizaram afirmando, que

> Enfatizamos que a nossa proposta se volta para a utilização da HM no ensino de Probabilidade em cursos de formação de professores, visando contribuir para a formação matemática destes estudantes. Esta proposta foi elaborada buscando uma variedade na forma que a HM é abordada, ora apresentando fatos e informações históricas e ora utilizando definições e problemas formulados ao longo do tempo com vistas a lecionar de modo significativo o conteúdo matemático (VIDARTE; CHACHAPOYA; CAVALARI, 2021, p. 100).

Todavia, é necessário ampliar os recursos materiais e literários sobre a história no ensino de matemática para utilizar em sala de aula e/ou que possam ser adaptados conforme a necessidade e interesse do professor, tanto que Brandemberg (2022, p. 16) acrescenta que “com a utilização de aspectos da história da matemática, como temática, a possibilidade de elaboração de atividades é muito fértil, embora não tão simples”. Precisa-se enriquecer esta tendência para proporcionar aos professores um caminho de recursos que o levem a esses quesitos.

É válido destacar que a tecnológica, como um recurso didático digital à disposição de todos (alunos e professores) são atraentes por si só. Conectados à internet, considero um fator de concorrência atrativa com a demais tendências metodológicas, entretanto, “Nunca será possível aprender nenhum conteúdo apenas com o uso da tecnologia sem que haja a interferência de um professor” (WALDMANN; SILVA; SANTOS, 2017), uma explicação para a necessidade de renovação, atualização e formação continuada dos professores.

Chaquiam (2022) realça as contribuições que são contempladas quando os professores buscam por Formação, como formação didática e pedagógica; composição das partes para a exposição de conceitos matemáticos; integrar de diferentes campos da matemática; métodos para a abordagem pedagógica no ensino de conteúdos matemáticos; ensino de conteúdo matemáticos a partir de problemas práticos, curiosos ou recreativo. E na formação matemática: facilita a compreensão dos conteúdos matemáticos; facilita a compreensão acerca da natureza da matemática; estabelece conexões entre matemática e outras áreas do conhecimento; incentiva os estudos dos conteúdos matemáticos.

A intenção é continuadamente buscar por formação com propostas que fundamentem o interesse no ensino e aprendizagem dos alunos e dos professores. Segundo Chaquiam (2022, 2021, 2020, 2017,) pode se contar a história da constituição e/ou evolução de um objeto de conhecimento matemático, limitando um tempo no contexto histórico da humanidade e mostrando neste período como essa evolução ocorreu e quem foram os personagens que contribuíram no processo de desenvolvimento e evolução do objeto pesquisado, de acordo com interesses e necessidades da época, essa proposta pode ser utilizada por professores que, precisam ampliar seus recursos, ou seja, por professores que,

> Buscam alternativas metodológicas ou recursos didáticos, com pouca ou sem nenhuma experiência na elaboração de textos que integrem história e matemática, com o propósito de aproximá-los da história e apresentar uma possibilidade de elaboração de um texto que entrelace história e matemática num contexto didático-pedagógico para uso durante o ensino dos conteúdos envolvidos (CHAQUIAM, 2022, pp. 02-03).

Diante das propostas, dos fatos e da importância desta pesquisa, apresenta-se a proposta de Chaquiam (2022, p. 09) destacando que "é imprescindível ter em mente que escrever uma história é "recompor" um passado, circunscrevê-lo, efetuar recortes cronológicos e organizar materiais heterogêneos dos fatos para construir no presente uma razão". Dessa forma é necessário fazer a interação da História da Matemática com o ensino de matemática e proporcionar aos alunos um entendimento significativo e mostrar a importância que um objeto matemático em pesquisa, pode ter na vida do aluno dentro ou fora da escola.

Chaquiam (2016) indica uma organização, quanto o nível de pesquisa sobre determinado conteúdo, sua evolução e seus autores, orientando ao uso dos fatos essenciais de uma pesquisa, organizados por meio de um Diagrama Metodológico, incluindo com isto, a elaboração das atividades didáticas, que serão utilizadas como recurso didático no ensino de conteúdos e que possam,

> Estimular discussões a partir de determinado conceito ou temática pode contribuir para compreensão das relações entre ciência e sociedade, visto que os indivíduos compartilham valores, cultura, território e história, imersos numa teia interativa que modificam o conhecimento e são modificados por este, numa (re)conexão entre o ser e o conhecimento de forma não individualista, onde o social e o conhecimento estão interligados (CHAQUIAM, 2022, p. 03).

No geral, as propostas sobre o uso da História da Matemática, organizadas por meio do diagrama metodológico "podem auxiliar na compreensão dos conceitos, na percepção do movimento de abstração e generalizações das teorias, mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto e tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes" (CHAQUIAM, 2022, p. 04). Em síntese, ao usar a História da Matemática pode-se proporcionar uma resposta aos alunos no momento de uma construção de um novo texto.

Chaquiam (2022), destaca as potencialidades, que foram identificadas durante a aplicação do diagrama metodológico no curso de formação de professores, como:

i. Aproximar os futuros professores da história da disciplina que irão ministrar;
ii. Apresentar-se como uma possibilidade de observar o tema de modo geral e em seus diversos contextos;
iii. Apresentar-se como uma forma de balizar a elaboração de um texto que envolve recortes históricos a respeito de uma temática;
iv. Evidencia possibilidades de elaboração de atividades que exploram o texto produzido
v. Desmistifica o fato de que a história da matemática compreende apenas nomes, datas e personagens.

É importante frisar, que as orientações que Chaquiam vem apresentando são frutos de suas práxis na formação de professores, de suas participações em seminários, minicursos, palestras, escola de estudos, enfim, todo um contexto apresentando a evolução/constituição relevante de um objeto de conhecimento dentro da história e trazendo o contexto para o ensino da matemática, de forma a organizar como desenvolver um texto, mostrando como pode conter e como pode ser elaborado tal texto. Segundo Chaquiam (2020) deve-se analisar que,

> Na composição dos contextos integrantes do diagrama não é objetivo identificar as ideias iniciais, rastreá-las, analisar suas influências ou caracterizar onde se tornaram obstáculos nos desenvolvimentos subsequentes, mas, é de bom tom identificar trabalhos realizados por especialistas que apresentem tais fatos e, a partir destes selecionar recortes de modo que possam ser explorados dentro de um contexto didático-pedagógico como recurso didático (CHAQUIAM, 2020, p. 202).

Além de algumas reflexões e questionamento, Chaquiam (2022, p. 11) enfatiza sobre a atualização do Diagrama Metodológico com questões que contenham "recortes da história da matemática e conteúdos matemáticos, de modo a possibilitar uma visão geral, histórica e crítica da Matemática ao longo das várias fases de sua evolução". Em síntese, é preciso organizar de forma precisa, retirar e/ou marcar recortes na história para utilizar em sala de aula, ou seja, aproveitar da história situações que reforçando a defesa no ensino e no uso da história no ensino, embasado em suas empirias, autores e documentos científicos que valorizam a história da matemática como um recurso metodológico. De modo que.

> O diagrama-metodológico pode ser um guia para professores na elaboração de propostas didáticas com um viés histórico que integrem história e matemática no ensino de matemática, além de submergir esses professores em diversos contextos inerentes às pesquisas em história da matemática, ampliar o arcabouço matemático e agregar metodologias de ensino (CHAQUIAM, 2022, p. 07).

O diagrama pode contribuir para a compreensão do desenvolvimento do tema escolhido, seguindo orientações e a ordem proposta pelo autor, deve-se iniciar com a escolha de um tema ou objeto de interesse, para inserir no centro do diagrama, a partir dele deve se fazer um levantamento de dados, levando em consideração o período e os aspectos que se pretende abordar, em livros, dissertações, teses, artigos científicos, identificando personagens que contribuíram para a constituição e a evolução do tema escolhido. Chaquiam (2020) orienta que o diagrama metodológico,

> Destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada estabelecendo conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, explora os conteúdos a partir da produção de um personagem, conectando esse personagem a alguns contemporâneos seus, adotando como referência a tríade contextual nos aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico (CHAQUIAM, 2020, pp. 198, 199).

Seguindo este raciocínio serão utilizados recortes que a história conta sobre o objeto de conhecimento desta pesquisa, recontando os fatos, os problemas iniciais, as situações de não resolução, apresentando os personagens que oficializaram o conhecimento ou reconhecimento deste objeto, os personagens que contribuíram com sua evolução e evitar que a história seja contada, como Chaquiam (2022) ressalta, que uma das suas preocupações é,

> Evitar que a história da matemática fosse constituída apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes célebres, datas ou fatos pitorescos, de forma presentista e linear, além disso, também evitar histórias fantasiosas que vinculassem o conhecimento matemático a grupo de pessoas consideradas como “iluminadas” (CHAQUIAM, 2022, p. 09).

Chaquiam (2020) propõe de forma precisa que pode produzir recortes da história para utilizar em sala de aula, ou seja, recortes da história e aplica como desafios, reforçando sua defesa ao uso da história no ensino, embasado em suas empirias, autores e documentos científicos que valorizam a História da Matemática como tarefa no ensino de matemática. De modo que seja possível, a partir deste recorte,

> Elaborar outros textos envolvendo a mesma temática a partir de novos recortes temporais ou personagens evidenciados e, além disso, é possível tomá-lo como modelo na elaboração de novos textos que envolvam outras temáticas ou conceitos e remodelá-lo para aplicação noutras ciências, a exemplo, Física, Química e Biologia (CHAQUIAM, 2022, p. 03).

Após a escolha do tema, deve-se escolher um período para se aprofundar sobre o objeto de pesquisa, período que definirá o topo do diagrama, informando os acontecimentos que ocorreram a nível mundial, “A partir desse contexto pretende-se evidenciar a história da humanidade e vincular os diversos cenários à história da matemática por meio do personagem destacado e seus contemporâneos” (CHAQUIAM, 2022, p. 12), logo,

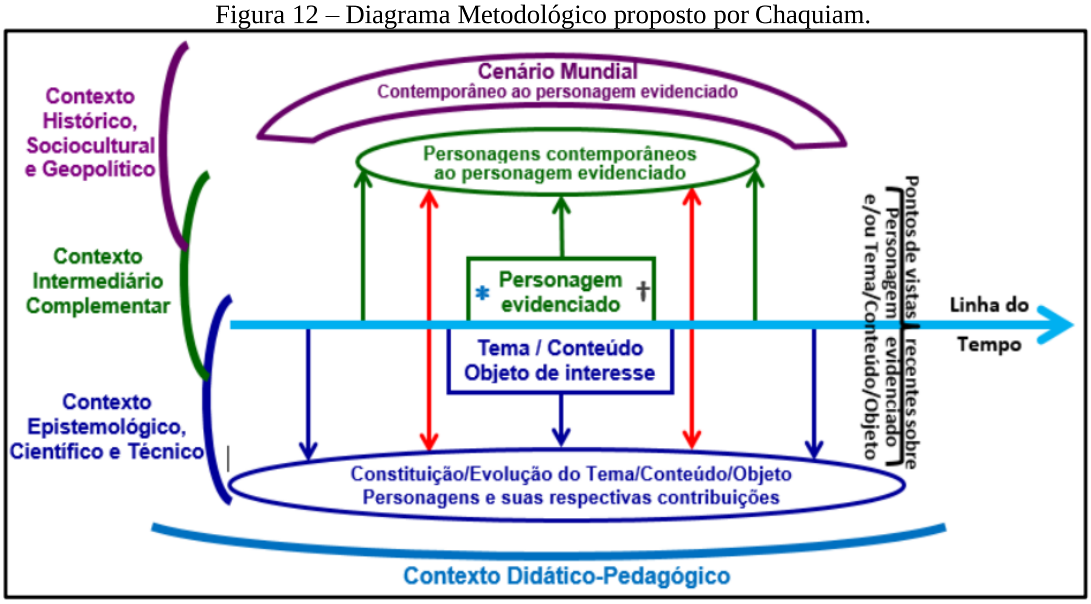
> Deve-se observar com muita atenção qual o espaço que será “recomposto”, tendo em vista o ocorrido e o imaginado, as articulações em torno dos recortes cronológicos podem gerar distorções, além da preocupação com a linguagem no sentido de retratar o passado na modernidade de forma contextualizada e significativa (CHAQUIAM, 2017, p. 24).

Analisando o modelo do Diagrama, observa-se que Chaquiam (2022), organizou em quatro contextos para melhor aproveitamento dos elementos que auxiliarão na elaboração do texto didático, são eles:

i. Epistemológico, Científico e Técnico;
ii. Intermediário Complementar;
iii. Histórico, Sociocultural e Geopolítico e
iv. Didático-Pedagógico.

Na Figura 12, apresenta-se a proposta de Chaquiam (2022), do Diagrama Metodológico em sua versão mais atual.

Figura 12 – Diagrama Metodológico proposto por Chaquiam.



Fonte: Chaquiam (2022, p. 28)

Chaquiam (2022) ressalta que apesar do diagrama metodológico se apresentar em uma linha temporal, não significa que um texto seja escrito de forma linear, nem mesmo que o objeto em estudo tenha sua constituição ou evolução de forma linear, este formato serve para situar em tempo e espaço os fatos e acontecimentos que o objeto matemático ou conteúdo matemático passou ao longo de seu desenvolvimento, este autor descreve também a ordem que deve ser seguida o desenvolvimento da pesquisa.

No Quadro 7, destaca-se as informações essenciais, para orientar o que deve conter no texto/trabalho escrito, identificando os respectivos passos e os elementos que constituem o Digrama Metodológico e suas devidas orientações, com observância das cores por contexto.

Quadro 7 – Elementos do Diagrama Metodológico de Chaquiam.

Tema	Escolha do tema/objeto matemático previsto para um dos níveis de ensino, preferencialmente educação básica, ao qual se pretende apresentar paralelamente ao desenvolvimento e formalização uma abordagem histórica dele, seja com o intuito de introduzi-lo, para incentivar os alunos ou apresentá-lo segundo sua evolução histórica, dentre outros motivos.
Personagens envolvidos com a evolução do Tema i. Contexto epistemológico, científico e técnico	- Identificar os personagens e suas respectivas contribuições para a constituição/evolução do tema/conteúdo/objeto definido. - Esse é o momento de identificar o(s) problema(s) gerador(es), as forças que o impulsionaram e os obstáculos que impediram sua evolução. - Em relação às contribuições matemáticas deve-se observar formalismo e o rigor matemático, o uso correto das nomenclaturas, evitar anacronismos e uma visão linear e presentista. A escolha dos elementos que irão compor esse contexto é de suma importância, visto que, a partir deles os demais contextos serão influenciados.
Personagem Evidenciado	Escolha do personagem que vai ficar em evidência, e dever emergir dentre aqueles identificados no contexto epistemológico, científico e técnico, evidenciando sua contribuição na constituição/evolução do tema selecionado. Deve-se construir seu perfil de forma que contemple: a) Nome completo e pseudônimo, quando for o caso; b) Árvore genealógica, quando for possível identificar; c) Trajetória acadêmica e profissional; d) Trabalhos produzidos, dando ênfase aos mais importantes e/ou soluções de importantes problemas; f) Frases célebres; g) Fotografias pessoal, familiar, além de livros e trabalhos autorais ou em coautoria, dentre outras; h) Curiosidades, fatos pitorescos ou anedotas.
Personagens Contemporâneos ii – Contexto Intermediário Complementar	- Identificação dos personagens contemporâneos ao personagem evidenciado. - Apresentar traços biográficos e suas respectivas contribuições, que podem ser, ou não, na mesma área do personagem eleito. Sugere-se que sejam identificados personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço, bem como proporcionar uma visão geral das mais diferentes áreas, podendo estar vinculados a fatos do contexto histórico, sociocultural e geopolítico.
Cenário Mundial	O contexto histórico, sociocultural e geopolítico contempla os fatos do cenário mundial no período contemporâneo ao personagem evidenciado, tendo em vista delimitar em tempo e espaço os

iii - O contexto histórico, sociocultural e geopolítico	personagens contemporâneos. A partir desse contexto pretende-se evidenciar a história e vincular os diversos cenários à história da matemática por meio do personagem destacado e seus contemporâneos.
Recortes – Atividades iv - Contexto didático-pedagógico	O Contexto didático-pedagógico, é a etapa de seleção para os recortes que abordam sobre o personagem evidenciado e o tema. Levando a produção do texto e da elaboração das atividades que serão utilizadas para aplicar e validar todo a pesquisa sobre o ensino ....(?)

Fonte: Chaquiam (2017, pp. 33, 35); Chaquiam (2022, p. 12)

Chaquiam (2022) descreve os elementos e as devidas orientações para a construção de um Digrama Metodológico que pode ser aplicado a qualquer objeto matemático em estudo. Após construído o diagrama, deve ser analisado e criado um texto que possa ser compreensível aos alunos, que seja útil para uma aula, este autor destaca como pode ser a apresentação deste texto, o que deve constar da história de tópicos sobre o conteúdo, os personagens, segundo Chaquiam (2022) é preciso analisar que é,

> Imprescindível ter em mente que escrever uma história é "recompor" um passado, circunscrevê-lo, efetuar recortes cronológicos e organizar materiais heterogêneos dos fatos para construir no presente uma razão, além da preocupação com a linguagem no sentido de retratar o passado na modernidade de forma contextualizada e significativa e distanciar-se dos perigos do imaginário e dos anacronismos (CHAQUIAM, 2022, p. 09).

Neste contexto, Chaquiam (2022) propõe que a elaboração do texto seja feita, com as informações mais amplas para as mais especificas, fazendo a interação com o elemento didático pedagógico e a partir do diagrama, deve-se analisar as referências que estão na história da matemática ou os problemas que estão na história que podem ser selecionados e reorganizados para levar para a sala de aula e mostrar que pode existir ainda hoje no cotidiano e como foi solucionado no passado e como pode ser solucionado hoje. Sem dúvidas são longos questionamentos e ideias que surgem com a intenção de buscar analisar uma relação de conhecimento que possibilite o ensino-aprendizagem por meio da História da Matemática.

No primeiro passo, é a **Escolha do Tema**, Chaquiam (2022, p. 11), mostra a ordem proposta da construção do Diagrama metodológico que "está em consonância com a ordem de prioridades e deve ser seguida ao longo do desenvolvimento da pesquisa", como toda pesquisa é necessário escolher o objeto matemático que será estudado, ou pode ser um tema ou mesmo conteúdo, enfim este é início de uma pesquisa a ser explorada e sua identificação deve ser inclusa no centro do Diagrama Metodológico.

No segundo passo, começa a etapa de exploração do que há disponível sobre o tema escolhido, esta é a parte de construção da base do Diagrama Metodológico, conhecida como **Contexto Epistemológico, Científico e Técnico**, é consensual que está é uma parte importante de uma pesquisa cientifica, pois é através dela que se embasa e sustenta qualquer pesquisa que está sendo realizada. Logo, começa um processo de levantamento de dados, em livros físicos e digitais, artigos acadêmicos, dissertações e teses, sites nacionais e internacionais que descrevem sobre o que está estudando. Segundo Chaquiam (2022), aprofundando a pesquisa obtém-se,

> informações que contribuam à constituição/evolução do tema/conteúdo/objeto definido. As empirias apontam como uma das etapas mais complexas, ou seja, a obtenção dos elementos necessários - permeados na teia histórica e pulverizados numa diversidade de bibliografias - para compor a constituição/evolução do tema/conteúdo/objeto selecionado (CHAQUIAM, 2022, p. 11).

Este é um caminho fecundo de informações sobre o que existe escrito cientificamente do objeto escolhido, gerará um texto sobre os motivos que levaram ao seu conceito, os personagens que iniciaram, falaram, experimentaram e contribuíram de alguma forma ao longo dos tempos com este objeto ou tema. Nesse contexto, Chaquiam (2022, p. 12) evidencia que pode se identificar os problemas geradores, as forças que o impulsionaram e/ou os obstáculos que podem ter ocorrido em algum momento em sua evolução. “A escolha dos elementos que irão compor esse contexto é de suma importância, visto que, a partir deles os demais contextos serão influenciados”, sem uma pesquisa profunda deste contexto, os demais contextos e passos tendem a falhar ou nem acontecer.

Para ser mais específico, na Especialização da UFPA, o orientador da monografia propôs uma forma de organização e estruturação dos dados necessários para elaborar o texto principal sobre o objeto de conhecimento daquele trabalho, que foi adaptador para o objeto de conhecimento “Probabilidade”. A seguir, apresento a sequência sugerida sobre:

Origem e desenvolvimento da Probabilidade:

- Onde e quando apareceram os primeiros traços sobre o tema Probabilidade?
- Quais foram os primeiros teóricos a estudá-lo?
- Qual a necessidade que ocorreu para surgir este objeto?

Evolução dos problemas de probabilidade:

- Quais os problemas de probabilidade surgiram primeiro e como eram abordados na forma como são ensinados hoje na escola?
- Como os problemas de probabilidade eram resolvidos no passado?

A fórmula da probabilidade:

- Quando foi que surgiu no contexto da história da matemática a fórmula da probabilidade?
- Quem foi o criador da fórmula da probabilidade?
- Como a fórmula da probabilidade foi criada?

Essas perguntas podem ser importantes para definir o contexto histórico do objeto de conhecimento pesquisado, dos teóricos que aprofundaram esta pesquisa e mesmo o limite desta pesquisa. Voltando para o contexto histórico e sua inclusão no contexto escolar as perguntas nos refletem em como a história da matemática exige hoje de nós, professores de matemática, para que possamos compreender essa epistemologia ao ensinar um objeto matemático e ampliar um leque de informações que pode ser encontrado a respeito do tema ou objeto matemático.

No terceiro passo da construção do Diagrama Metodológico, analisa-se as informações levantadas no Contexto epistemológico, científico e técnico, para então selecionar o **Personagem de Destaque**, que ficará no centro do diagrama, está é uma escolha que deve ser criteriosa, pois este personagem precisa ter contribuído de forma relevante com o objeto matemático, para fazer parte da História da Matemática, onde informações a seu respeito devem ser identificadas também. De acordo com Chaquiam (2022, p. 12) "Esse personagem emerge dentre aqueles identificados no contexto epistemológico, científico e técnico e que contribuiu para a constituição/evolução da temática selecionada", que esteja em consonância com os objetivos que se busca alcançar com a pesquisa.

No quarto passo, descreve-se o **Contexto Intermediário Complementar**, "que contempla os personagens contemporâneos ao personagem evidenciado, seus traços biográficos e suas respectivas contribuições. Recomenda-se a inclusão de contemporâneos de diversas áreas do conhecimento" (Chaquiam, 2022, p. 30). Segundo autor, são identificados "personagens contemporâneos nas mais diversas áreas do conhecimento para uma melhor localização em tempo e espaço" (Chaquiam, 2022, p. 12), neste caso, do segundo passo é possível identificar personagens de diversas áreas que podem proporcionar essa visão geral, podendo estar vinculados a fatos do contexto histórico, sociocultural e geopolítico.

No quinto passo, descreve-se o **Contexto Histórico, Sociocultural e Geopolítico**, que contempla o cenário mundial ao personagem evidenciado. É preciso aprofundar a pesquisa para identificar o que ocorreu a nível mundial, buscando por leituras para amparar o contexto que necessita a pesquisa, principalmente em pesquisas recentes a nível nacional e internacional. Segundo Chaquiam (2022, p. 12) "tendo em vista delimitar em tempo e espaço os personagens contemporâneos. A partir desse contexto pretende-se evidenciar a história da humanidade e vincular os diversos cenários à história da matemática por meio do personagem destacado e seus contemporâneos".

O **Contexto Didático Pedagógico** é a etapa final da construção do diagrama, neste passo é produzido um texto e mais atividades para serem aplicadas e validadas durante o ensino de matemática, sobre o objeto pesquisado e com essas informações deve-se concluir o propósito do Diagrama.

Recentemente, Chaquiam (2022) propões nesta etapa **Recortes Didáticos** para utilizar nas atividades que devem ser propostas como tarefas ou atividades e no texto final. Segundo Chaquiam (2022, p. 13) os textos resultantes "revelam diversas possibilidades de composição, principalmente em função do ponto de vista didático-pedagógico", nesse sentido Chaquiam (2022) propõe uma ordem para elaboração desse texto:

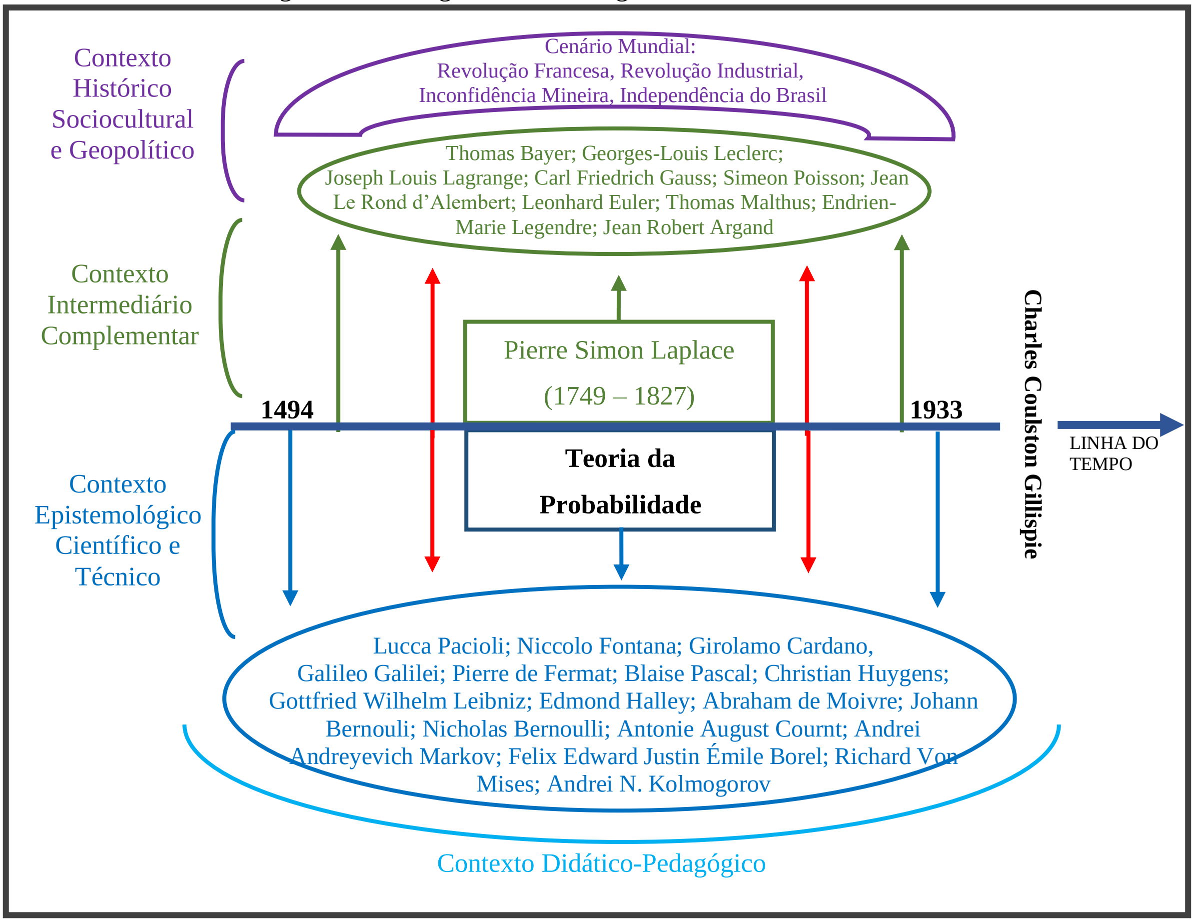
a) Cenário mundial contemporâneo ao personagem destacado;
b) Apresentação dos personagens contemporâneos, iniciando com aqueles que estão vinculados a etapa anterior e finalizando com o personagem destacado;
c) Apresentar o personagem evidenciado nos mais diversos aspectos, exceto suas contribuições para o tema/conteúdo/objeto;
d) Discorrer sobre a constituição/evolução do tema/conteúdo/objeto, com respectivos personagens e suas contribuições;
e) Apresentar os pontos de vista recentes sobre a temática e/ou personagem destacado, tendo em vista evidenciar aspectos da constituição/evolução dessa temática ou sobre o personagem evidenciado ou incluir aspectos relevantes para as discussões didático-pedagógicas ou elaboração das atividades sobre a temática.

Pode ser um desafio o sucesso deste recurso em sala de aula, entretanto a vantagem de proporcionar aos alunos a oportunidade de reconhecer uma forma de afirmar o quanto a matemática é importante na escola e na vida, além disso pode ser uma explicação que condiz com os fatos da história que está sendo investigada e produzida, enfatizando o suporte teórico que Chaquiam vem destacando em seus trabalhos desde 2005, quanto a elaboração de materiais didáticos, atualmente propondo recortes da história para usar em sala de aula, ou seja, uma interação de conhecimentos que fortalecem o uso da história para ser utilizada no ensino de matemática.

4. UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Na Figura 13, apresentasse o Diagrama metodológico, sobre a Teoria da Probabilidade, elaborado conforme a ideia de Chaquiam (2022), identificando aspectos essenciais a respeito do tema, organizando os fatos históricos e os contextos, permitindo uma análise disposta em cada período, contando com as contribuições de personagens que colaboraram para a evolução da probabilidade, e com isto definindo a elaboração do *Contexto Didático-Pedagógico* para uso em sala de aula.

Figura 13 – Diagrama Metodológico - Teoria da Probabilidade



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Desta Pesquisa, é consensual que os jogos de azar, ganharam um destaque significativo, pois é de conhecimento geral que esses jogos existem a milênios de anos na humanidade e são apreciados de maneiras e objetivos diversificados, dependendo de cada cultura, região ou grupos, e seus resultados podem ser imprevisíveis. "No caso de alguns tipos de jogos, os primeiros estudiosos conseguiram encontrar formas eficientes de contar sucessos e insucessos e dessa forma determinar a probabilidade a *priori*" (KATZ, 2010, p. 763), envolvendo situações práticas da vida.

Do final do século XIV até o final do século XVI[8], no livro Historia de la Probabilidad (s.d., tradução nossa) enfatiza-se que começaram a surgir as preocupações em contar o número de resultados possíveis de um dado lançado várias vezes e também como calcular a distribuição de uma aposta quando um jogo é interrompido antes de terminar, começando, então a despertar o interesse para explicar fenômenos que não seguiam um padrão determinístico, mas aleatório, voltados aos jogos de azar.

Em Historia de la Probabilidad (s.d., p. 03, tradução nossa) percebe-se também, que o interesse surgiu como tentativas para solucionar situações do dia a dia, buscando ser "justos nas apostas e distribuições ou mesmo para saber as respostas para obter vantagens e consequentemente maiores lucros face a outros jogadores", o que se sabe, das referências pesquisadas, é que os personagens que utilizavam tais estratégias, em estabelecer matematicamente tais referências, não estavam com o intuito de "modelar o acaso por meio da matemática", ou pelo menos, não fizeram suas publicações.

Em síntese, por mais que a teoria da probabilidade, tenha iniciado anteriormente ao século XIV, na história da matemática, não há referência à problemas que foram criados ou aperfeiçoados, nem há métodos criados para que esses problemas fossem solucionados, além disso quando surgiu na História da Matemática problemas sobre este tema, ainda assim, levou algum tempo, até mesmo séculos para que matemáticos criassem e aperfeiçoassem estratégias matemáticas para solucioná-los. Ademais, segundo Junqueira (2014), anterior ao século XV,

> A Igreja Católica era contra o jogo, nem tanto pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões, comum durante os torneios [...]. O fato é que desde sempre os jogos foram utilizados em apostas, como também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças (JUNQUEIRA, 2014, P. 56).

De acordo com Eves (2011, p. 394), foi algo impressionante e surpreendente que matemáticos tenham sido capazes de desenvolver uma ciência, que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar, uma ciência que "está muito longe de não ter aplicações práticas, como fica evidente pelas experiências efetuadas em grandes laboratórios, pela existência de companhias de seguro altamente respeitáveis e pela logística das empresas de grande porte e da guerra".

---

[8] Período do Renascimento: que foi destacado por sua atividade comercial, industrial, artística, arquitetônica, intelectual, científica, entre outras, neste período a matemática vai se tornar o principal auxílio de uma arte e de uma sociedade que se preocupa incessantemente em fundamentar racionalmente seu ideal de beleza (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020]).

Desse modo, pretende-se mostrar a estima que a probabilidade tomou na sociedade, inicialmente aplicada a área dos jogos de azar, envolvendo situações que por mais “fácil” que se apresente não foi fácil sua solução, talvez até mesmo por “insuficiência” de recurso na própria matemática, motivo que levou alguns problemas a quase dois séculos para serem solucionados.

4.1. CONSTITUIÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Em concordância com os fatos, Eves (2011), destaca sobre a relevante constituição da teoria da probabilidade e como esta ciência cresceu e se fundamentou diante de situações sobre as estratégias práticas envolvendo como contexto principal os jogos de azar, surgindo para colaborar com a evolução de técnicas que abordariam as noções básicas de probabilidade, pois, os jogadores faziam análises, comparações, estratégias e cálculos sobre as frequências das ocorrências que aconteciam nos jogos.

Os primeiros problemas oficialmente publicados a respeito de situações envolvendo a teoria da probabilidade, foram propostos pelo italiano Luca Pacioli (1445-1517), ao fim do século XIV, contando em seguida com a contribuição dos italianos, Niccolo Fontana (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642), considerados personagens importantes, por realizarem estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar em jogos de azar.

Um dos problemas mais importantes sobre o início da noção de aleatoriedade, vem dos *problemas dos pontos*[9], publicado em 1494, período em que foi impresso o primeiro escrito matemático, nomeado de *Summa de Aritmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) comumente conhecida por *Summa* (ARAGÃO, 2009), um livro de autoria de **Luca Pacioli** (1445-1571), um frade franciscano e matemático, nascido em Toscana, na Itália.

Este livro, de acordo com Viali (2008) colocou Luca Pacioli, na história do desenvolvimento da probabilidade, sendo o primeiro personagem conhecido a abordar sobre problemas envolvendo situações práticas de algo provável, que gerou certezas e incertezas em sua solução, pois envolveu a repartição do que foi apostado, para um jogo que não pôde ser finalizado.

---

[9] também conhecida como repartição das apostas ou divisão das apostas.

Summa abordava a respeito de diversos assuntos e problemas matemáticos e sociais, entre eles o *problema dos pontos*, proposto na seguinte questão: *"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?" (ARAGÃO, 2009, p. 86).*

Neste problema, Pacioli, sugeriu que com a interrupção do jogo, o prêmio pudesse ser dividido "em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador" (Warsi, 2020, p. 164). Ou seja, em Historia de la Probabilidad ([2020], p. 03, tradução nossa) foi apresentado o seguinte calculo proporcional as jogadas sugerido por Pacioli: o jogador com 5 pontos receberia $\frac{5}{8} \cdot prêmio$ e o jogador com 3 pontos receberia $\frac{3}{8} \cdot prêmio$.

Pois considerava-se que o problema "consistia basicamente em estabelecer uma regra fixa que permita a quantidade de aposta em um jogo quando, por qualquer motivo, é interrompido e não pode ser concluído" (SECADES, 2000, p. 10, tradução nossa), porém, a resposta de Pacioli não foi satisfatória para a solução do problema.

Sessenta e dois anos depois o matemático **Niccolo Fontana** (1499-1557), nascido em Brescia, na Itália, de pseudônimo Tartaglia, sabendo da existência do problema dos pontos, tentou solucioná-lo, descrevendo-o em sua obra *General Trattato* (Tratado Geral), porém não teve muito avanço, sua proposta era fazer a divisão da bolada na proporção entre o tamanho da vantagem e a duração do jogo, mas tal divisão falharia quando fosse muitas jogadas, então, Tartaglia duvidou que o problema pudesse ser resolvido de forma a convencer todos os jogadores de sua equidade (WARSI, 2020).

No livro Historia de la probabilidad ([2020] p. 04, tradução nossa) Tartaglia apresentou uma solução, descartando a solução proposta por Pacioli, ele sugeriu que: "se um time ganhou a pontos e o outro b pontos, o jogo é jogado para n pontos e o prêmio total é P, os ganhos devem ser distribuídos da seguinte forma: $\left(\frac{P}{2}\right) \pm P\left[\frac{a-b}{n}\right]$". Ainda, segundo esse mesmo livro, Tartaglia afirmou que neste caso a maior quantidade vai para a equipe que tiver mais vitórias. "No entanto, Tartaglia sabia que sua solução não era a correta e em seu livro deixou clara que era bom para conferir justiça e equilíbrio a um elenco, mas não era exato do ponto de vista matemático" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020] p. 04, tradução nossa).

Um personagem de destaque nos jogos, foi **Girolamo Cardano** (1501-1576), matemático, médico, astrólogo e filósofo, nascido em Pávia, na Itália, ficou bastante famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, tinha origem de pouca afeição familiar e financeira, aos 15 anos, decidiu que poderia encontrar melhores oportunidades de vida seguindo a carreira médica, contrariando à vontade de seu pai que desejava que ele se formasse em direito (MLODINOW, 2009).

Segundo Mlodinow (2009) no tempo de Cardano, onde ele estava os jogos eram certos de ocorrer e assim eram feitas apostas como, jogos de cartas, dados, gamão e até mesmo xadrez, quais ele classificava em dois tipos: os que envolviam alguma estratégia ou habilidade e os que eram governados pelo puro acaso, este último de sua preferência, pois "ele tinha uma vantagem sobre seus oponentes, já que havia adquirido uma compreensão mais apurada da possibilidade de vencer em diversas situações" (MLODINOW, 2009, p. 57).

Mesmo tendo alguns equívocos por parte de Cardano, seu livro foi o "primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza" (MLODINOW, 2009, p. 58) de forma simples, mas com eficácia Cardano escreveu suas estratégias que foi publicado postumamente no ano de 1663 e nomeado de "*Liber de Ludo Aleae"* (Livro sobre os jogos de azar). A ideia de evento equiprovável começou a ser compreendida, Cardano tornou possível fazer cálculos envolvendo as noções básicas de probabilidades (KATZ, 2010).

Este livro, de acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 04, tradução nossa), foi a primeira obra relacionada com o cálculo da probabilidade em jogos de azar, no livro destaca-se que Cardano escreveu sobre o *problema dos pontos* de Luca Pacioli, isto em 1539, onde afirmou que a "solução de Pacioli estava incorreta porque, considerando apenas o número de jogos vencidos por cada equipe, ele não contava quantos jogos eles precisavam vencer para ganhar o prêmio".

A solução de Cardano para este problema, foi definir que: "se n é o número total de partidas e a e b as partidas vencidas por cada equipe, o prêmio deveria ser distribuído da seguinte forma: $[1 + 2 + \cdots + (n - b)]: [1 + 2 + \cdots (n - a)]$", enfatizando que seria uma solução incorreta, pois só valeria para alguns casos particulares (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], p. 04, tradução nossa).

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 212) Cardano determinou a ideia central da probabilidade quando colocou "uma medida numérica na probabilidade de que algo desconhecido possa acontecer ou poderia ter acontecido. A chave para entender tudo isso começa com a ideia de resultados igualmente prováveis [...] então a probabilidade de um deles acontecer é 1 dividido pelo número total deles", esta expressão determinaria assim um princípio para a teoria da probabilidade, mas isto não ocorreu, pois Cardano não fez sua publicação.

Mlodinow (2009, p. 51) frisa que anterior a Cardano, "ninguém jamais realizara uma análise racional do curso seguido pelos jogos ou outros processos incertos", tal processo realizado por Cardano também propôs representar os resultados possíveis de um experimento, o que hoje é chamado de lei do espaço amostral**.** "Essa lei representava uma nova ideia e uma nova metodologia e formou a base da descrição matemática da incerteza" (Ibid., p. 51) ajudando sistematicamente a organizar um conceito aos problemas que pareciam confusos.

Para Cardano o "termo *espaço amostral* se refere à ideia de que os possíveis resultados de um processo aleatório podem ser compreendidos como pontos no espaço" (Ibid., p. 59), este autor de forma habitual atualiza a linguagem de Cardano sobre a proposição de espaço amostral para uma linguagem favorável a compreensão de professores e estudantes na atualidade, como descrito por Mlodinow (2009):

Definição*: Suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultado* (MLODINOW, 2009, p. 59).

Na Figura 14, foi representado um exemplo da explicação de Cardano, entre Probabilidade/proporção dos resultados:

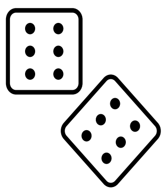
$$Probabilidade = \frac{Resultado\ Favorável}{Total\ Resultados}$$

"Em outras palavras, se um dado pode cair em cada um de seus seis lados, esses seis resultados formam o espaço amostral, e se apostarmos em, digamos, dois dele, nossa chance de ganhar será 2/6" (MLODINOW, 2009, p. 59).

Figura 14 – Representação do Espaço Amostral de 1 dado.

Um dado tem seis faces {1, 2, 3, 4, 5, 6}
O Espaço Amostral é {1, 2, 3, 4, 5, 6},
A chance de cair na face "5" é apenas 1.
Logo,

$$\frac{Resultado\ Favorável}{Total\ Resultados} = \frac{1}{6}$$



Fonte: elaborada pela autora (2022).

Esta Lei é hoje uma regra nos estudos básicos de ensinamento da probabilidade escolar e foi fundamental para compreensão sobre o funcionamento das probabilidades e da Lei do Espaço Amostral, como diz Mlodinow (2009, p. 54) este processo foi "o arcabouço para a análise de situações que envolvem o acaso".

Segundo Katz (2010) Cardano resolveu problemas que envolvia regras da multiplicação das probabilidades para eventos independentes, nesta situação primeiramente ele registrou de forma equivocada cálculos que realizou sobre o lançamento de três dados, entretanto posteriormente, percebeu que seu raciocínio devia ser falso e logo fez a correção do seu erro, pois ele entendeu que são as probabilidades que devem ser multiplicadas e não as possibilidades, assim, determinou que as probabilidades de uns eventos são iguais, Pois se um jogador com dois dados consegue lançar com probabilidades iguais um número par e um número ímpar, não resulta daí que ele possa com igual fortuna lançar um número par em cada um dos três lançamentos sucessivos (KATZ, 2010). Cardano, antes de morre,

> Queimou 170 manuscritos não publicados. As pessoas que vasculharam as suas posses encontraram 111 textos sobreviventes. Um deles, escrito décadas antes e aparentemente revisado muitas vezes, era um tratado em 32 capítulos curtos. Intitulado o livro dos jogos de azar, foi o primeiro na história a tratar a teoria da aleatoriedade (MLODINOW, 2009, p. 50).

Segundo Mlodinow (2009) em um desses manuscritos, encontraram informações sobre uma possível estratégia das soluções que criava para as situações problemas que envolvia as apostas de jogos de suas práticas, no entanto apresentou uma forma válida para expressar os resultados de suas estratégias. De acordo com Almeida (2005), Cardano descobriu a razão para diversos fatos e ocorrências, como,

> A razão que explicava a frequência de acontecimentos nos jogos, ou seja, a teoria que explicaria tais frequências. O Cardano ao reconhecer a importância das "combinações de números" deu um passo relevante no desenvolvimento do cálculo das probabilidades (ALMEIDA, 2005, p. 09).

Isto se deu, devido ao seu significativo envolvimento e habilidade com jogos de azar, sendo considerado por tantos pesquisadores como o primeiro matemático a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento ocorrer, a ele é atribuído, os primeiros passos em observar os lançamentos de jogos dados (VIALI, 2008), portanto,

> Não seria fora de propósito considerar Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo nos casos possíveis de um evento e a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles (VIALI, 2008, p. 146).

Porém, Cardano não publicou o que estava desenvolvendo sobre as possibilidades e as estratégias das apostas nos jogos de azar, de acordo com Mlodinow (2009, p. 60) essa foi "umas das maiores deficiências do trabalho de Cardano". Ainda segundo este autor, se Cardano tivesse feito uma análise sistemática dos diferentes desenlaces possíveis de uma série de eventos e publicado, a teoria da probabilidade poderia ter sua constituição formal partindo de seus estudos e de suas teorias, emborra sabendo que é partindo de seus métodos e aplicações que posteriormente são feitos os demais estudos.

No entanto, a intenção de Cardano, segundo Calabria e Cavalari (2013) era somente pela razão de pensar na prática dos jogos, exclusivamente pelas apostas dos jogos, analisando estratégias das possibilidades que podiam ocorrer, observando as regularidades para poder calcular os casos que seriam favoráveis no jogo a seu favor e mesmo sendo matemático, não considerou publicar suas estratégias, para a partir daí ter-se um objeto de estudo matemático.

Quanto a abordagem de seguros de vida, em 1570, Cardano publicou uma obra nomeada *De Proportionibus Librie V* (O Livro das Proporções V), a qual fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida, mas não despertou interesse de outros pesquisadores sobre o tema (ARAGÃO, 2009), não sendo utilizado para tal fundamento.

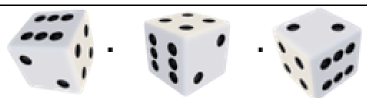
Em concordância com os estudos de experimentos aleatórios, envolvendo jogos de azar, cita-se o personagem **Galileu Galilei** (1564-1642), nascido em Pisa, na Itália, físico, matemático, astrônomo e filósofo, de todas suas pesquisas para ciência, também escreveu sobre soluções de problemas envolvendo jogos de azar. Segundo Mlodinow (2009) esta contribuição foi realizada a pedido do Grão-duque de Toscana, Ferdinando dei Medici, que por meio de carta, solicitou que Galilei soluciona-se o seguinte problema: *"Quando jogamos três dados, porque o número 10 aparece com mais frequência que o número 9?*" (MLODINOW, 2009, p. 70-71, grifo nosso).

Como solução para este problema, Galilei foi instigado a escrever um manual sobre jogos de azar, intitulado *Sopra le scoperta dei dadi* (Sobre o jogo de dados), compreendido em dois sentidos: "primeiro como uma forma de entender as constantes frequências no processo de chances e, segundo, como um método de determinar situações presumíveis de fé" (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p. 10), esses problemas de identificação eram análogos as propostas por Cardano.

Mlodinow (2009, p. 72) explica que Galilei apresentou uma solução utilizando o seguinte princípio "*a probabilidade de um evento depende do número de maneiras pelas quais pode ocorrer"* o que não se tratava de uma explicação diferente, mas de como calcular tal problema, pois o número de maneiras de como um resultado pode acontecer é ponto fundamental para determinar sua probabilidade.

Contudo, Galilei parece não ter se importado com tal efeito, pois, "Ele não levou seu trabalho sobre a aleatoriedade além do problema dos dados, e afirmou, no primeiro parágrafo do trabalho, que estava escrevendo sobre esse jogo somente porque havia recebido 'a ordem de fazê-lo'" (Ibid., 72). De acordo com Zindel (2015) Galilei fez uma explicação razoavelmente simples para esta situação, ao dizer que alguns eventos podem ocorrer mais facilmente e mais frequentemente que outros, pois ao observar o lançamento de três dados é necessário levar em consideração que há 216 possibilidades de certos resultados. Na Figura 15, há uma representação da solução de Galilei conforme explicação de Olivera (2015):

Figura 15 – Solução do Galilei para o problema de grão-duque de Toscana



Possibilidades

Resultado das Somas dos três dados

Soma igual a **9** 25 possibilidades	{6 + 2 + 1}; {6 + 1 + 2}, {2 + 6 + 1}; {2 + 1 + 6}; {1 + 6 + 2}; {1 + 2 + 6}; {5 + 3 + 1}; {5 + 1 + 3}; {3 + 5 + 1}; {3 + 1 + 5}; {1 + 5 + 3}, {1 + 3 + 5}; {5 + 2 + 2}; {2 + 5 + 2}; {2 + 2 + 5}; {4 + 4 + 1}; {4 + 1 + 4}; {1 + 4 + 4}; {4 + 3 + 2}; {4 + 2 + 3}; {3 + 4 + 2}; {3 + 2 + 4}; {2 + 4 + 3}; {2 + 3 + 4}; {3 + 3 + 3}.
Soma igual a **10** 27 possibilidades	{6 + 3 + 1}; {6 + 1 + 3}; {3 + 6 + 1}; {3 + 1 + 6}; {1 + 6 + 3}; {1 + 3 + 6}; {6 + 2 + 2}; {2 + 6 + 2}; {2 + 2 + 6}; {5 + 4 + 1}; {5 + 1 + 4}; {4 + 1 + 5}; {4 + 5 + 1}; {1 + 5 + 4}; {1 + 4 + 5}; {5 + 3 + 2}; {5 + 2 + 3}; {3 + 5 + 2}; {3 + 2 + 5}; {2 + 5 + 3}; {2 + 3 + 5}; {4 + 4 + 2}; {4 + 2 + 4}; {2 + 4 + 4}; {4 + 3 + 3} {3 + 4 + 3}; {3 + 3 + 4}.

Fonte: Elaborado pela Autora (2022)

Ainda segundo este autor, Galilei explicou que para formar o "9 e 12 podem ocorrer em tantas vezes como 10 e 11, e consequentemente deveriam ser considerados como sendo igualmente úteis, ainda é sabido, que longas observações tem feito, jogadores de dados considerar 10 e 11 como sendo mais vantajosos que 9 e 12" (ZINDEL, 2015, p. 09).

E com este efeito, Galilei contribuiu com a teoria da probabilidade, ao construir a teoria da medição do erro, pois classificou-os em dois tipos: "sistemático" e "aleatório", "uma classificação que ainda hoje é mantida e estabeleceu cuidadosamente as propriedades dos erros aleatórios. Com isso, sem saber, ele contribuiu para a criação de ramos fundamentais da estatística e probabilidade posterior" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], p. 04, tradução nossa).

Segundo Katz (2010, p. 569) foi por volta da década de 1660 "que a probabilidade entrou no pensamento europeu e isso aconteceu em dois sentidos, primeiro, como uma forma de entender frequências estáveis em processos aleatórios, depois, como um método de determinação de graus razoáveis de crença" e assim, consta que formalidade da Teoria da Probabilidade, foi considerada de fato, por meio da publicação do Tratado de Christian Huygens

(1629-1695), que se dedicou por compreender as cartas trocadas entre os matemáticos Franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Por isso, é a Pascal e Fermat, a atribuição de informações iniciais do reconhecimento desta teoria ao mundo da matemática, segundo Laplace (2010) não houve antes de Pascal e Fermat, outros personagens que fornecessem contribuições significativas e escritas como,

> Princípios e métodos para submeter esse objeto ao cálculo nem resolvera questões desse gênero um pouco complicadas. Portanto, a esses dois geômetras devemos reportar os primeiros elementos da ciência das probabilidades, cuja descoberta pode ser colocada ao lado das coisas notáveis que ilustram o século XVII, aquele que, de todos os séculos, mais honra o espírito humano (LAPLACE, 2010, p. 213).

Quanto ao motivo para início das correspondências, primeiramente, cita-se o matemático **Antonie Gombaud** (1610-1685), nascido na França, de pseudônimo Chevalier de Méré, para melhor esclarecimento a respeito de Chevalier de Méré, ele "era um apostador experiente, que gostava de grandes riscos e ganhava com uma frequência suficiente para despertar suspeita de que estaria trapaceando" (MLODINOW, 2009, p. 76), já que parte de seu conhecimento prático envolvia estratégias em jogos de azar.

Uma observação relevante desse período é o fato de que "jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas 'mágicas' que garantissem ganhos substanciais nas bancas de jogo" (JUNQUEIRA, 2014, P. 56). Por essas atitudes que se início deste tema e foram de fato registrada como tal situação.

Com esta intenção, Chevalier de Méré, compartilhou com seu amigo Blaise Pascal, alguns problemas, relacionados aos jogos de azar, como por exemplo o *Problema dos Pontos,* citado e não solucionado por Pacioli e Tartaglia, enviando-os através de carta, ao lê-la, Pascal logo "percebeu o erro de Méré e resolveu encontrar a solução correta" (ARAGÃO, 2009, p. 87). Segundo Pascal, De Méré, "foi enganado por uma falsa analogia, por pensar que nas jogadas o número de todas as chances possíveis, o que não é exato, se aproxima cada vez mais de sê-lo quanto maior for esse número" (LAPLACE, 2010, p. 180).

Para Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 211) Chevalier de Méré precisava entender e distribuir corretamente as apostas[10] em um jogo não concluído. Nos jogos que ocorriam neste período era "costume que, assim que as apostas são feitas, o dinheiro não pertença a ninguém até que o jogo termine, e então o ganhador fica com tudo", logo a divisão deveria ser justa, "a

---

[10] são quantidades de dinheiro que cada jogador arrisca no começo do jogo (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008).

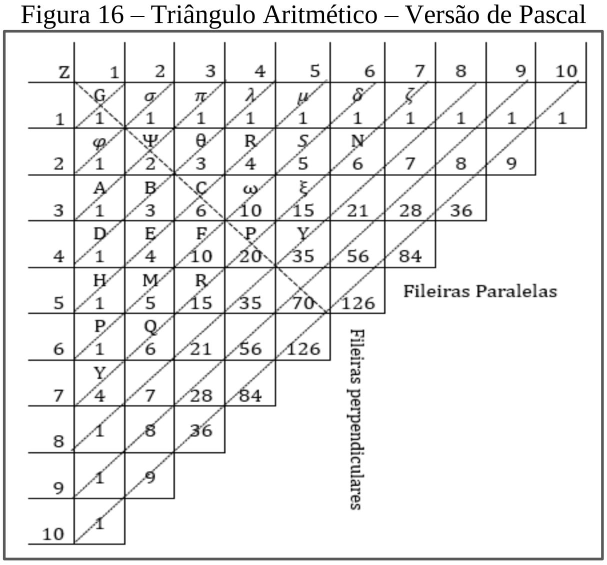
respostas deveria, de alguma maneira, refletir as possibilidades de cada um ganhar o jogo se ele fosse terminado” (Ibid., p. 211).

Para compreender sobre as soluções dos problemas dos pontos, apresenta-se os dois matemáticos, primeiro De Méré enviou sua proposta, por meio de carta, a **Blaise Pascal (1623-1662),** nascido em Clermont-Ferrand, na França, onde mostrou sua precocidade matemática muito cedo, fazendo suas próprias investigações matemáticas e cientificas antes dos 20 anos de idade (KATZ, 2010). No ramo da aleatoriedade foi crescendo auxiliado por acontecimentos também aleatórios, o que justifica ter se dedicado a solucionar problemas em jogos de azar (MLODINOW, 2009).

Mlodinow (2009, p. 77) enfatiza que “Pascal percebeu que, independentemente da resposta, os métodos necessários para calculá-la ainda eram desconhecidos, e tais métodos, quaisquer que fossem, teriam importante implicações para todos os tipos de situação competitiva” e decidiu compartilha, por meio de cartas, as suas estratégias de solução com Pierre de Fermat. A partir de então, Pascal e Fermat traçaram juntos estratégias para resolver *problemas*, relacionados aos jogos de azar.

- Pascal desenvolveu sua resposta baseado no Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos no jogo e mostrando como as apostas deveriam ser divididas. De acordo com Warsi (2020, p. 160) Pascal “descobriu que o triângulo poderia ser usado para achar o número de combinações possíveis quando se escolhe uma quantidade de objetos a partir de um número particular de opções disponíveis [...] e cada linha do triângulo de Pascal dá aos coeficientes binomiais uma potência”. A Figura 16, apresenta uma versão do triângulo aritmético.

Figura 16 – Triângulo Aritmético – Versão de Pascal



Fonte: Pascal (2013 apud FOSSA, 2018, p. 24)

De acordo com Fossa (2018, p. 23) "o triângulo não se originou com Pascal, mas foi conhecido por vários matemáticos em várias culturas desde a antiguidade", este autor enfatiza que o próprio Pascal, o chamava de triângulo aritmético.

Segundo Katz (2010) Pascal, primeiro estabeleceu as propriedades do Triângulo Aritmético, começando com dois princípios básicos para aplicar a essa divisão, sendo:

- Se a posição de um determinado jogador é tal que uma certa soma lhe pertence quer vença ou perca, ele deve receber essa soma mesmo se o jogo for interrompido;
- Se a posição dos dois jogadores é tal que se um vencer, uma determinada soma lhe pertence e se perder, pertence ao outro (KATZ, 2010, p. 569).

E da proposição $\binom{n}{k}:\binom{n}{k+1} = k+1 : n-k$ prova-se que Pascal estabelece as propriedades básicas do triângulo aritmético (KATZ, 2010, p. 573) e mais segundo este autor Pascal "mostra que as entradas de fila no triângulo são coeficientes binomiais, isto é, que os números na fila n são os coeficientes das potências de a na expansão $(a+1)^n$ ".

Para determinar os elementos de cada situação, Pascal, utilizou o Teorema: *Suponhamos que o primeiro jogador precisa de r jogos para ganhar a competição enquanto o segundo precisa de s jogos em que tanto r como s são pelo menos 1. Se a competição for interrompida neste ponto, as paradas devem ser divididas para que o primeiro jogador obtenha essa proporção do total como $\sum_{k=0}^{s-1}\binom{n}{k}$ está para 2^n, em que $n = r + s - 1$* (Ibid., p. 573).

Segundo Katz (2010) Pascal indica que a probabilidade do primeiro jogador vencer é a proporção da soma dos primeiros termos de s da expansão binomial de $(1+1)^n$, ao total de 2^n, ainda segundo esta autora, Pascal aplicou sobre as chances de ganhar do primeiro jogador, que para vencer precisaria de $r-1$ jogos e o segundo ainda precisaria de s jogos, tomando como: $r - 1 + s - 1 = m$, dos cálculos que utilizou por indução[11] mostrou que o primeiro jogador deveria receber a proporção como: $\sum_{k=0}^{s-1}\binom{m}{k}$ é para 2^m. Entretanto, se ele perder o jogo seguinte os cálculos mostram que ele deveria receber a proporção da parada como : $\sum_{k=0}^{s-2}\binom{m}{k}$ é para 2^m. Seguindo esta teoria Pascal determinou que,

> A divisão das paradas é o número total de jogos remanescentes e o número total que as regras dizem que cada jogador tem que vencer para obter a parada total. Logo, se estão a jogar para um conjunto de dois jogos com uma pontuação de 1 a 0, ou para um conjunto de três jogos com pontuação de 2 a 1, ou para um conjunto de 11 jogos com a pontuação de 10 a 9, os resultados da divisão das paradas no momento da interrupção devem ser todos os mesmos. Em todos estes casos, o primeiro jogador precisa de vencer mais um jogo, enquanto o segundo jogador precisa de dois (KATZ, 2010, p. 569).

[11] Pascal Prova o teorema por indução (KATZ, 2010, pp. 573-574).

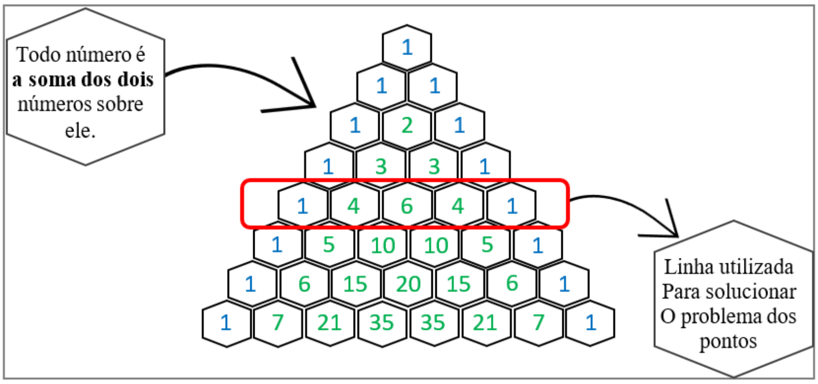
Assim, “Segundo os princípios básicos de Pascal, a recompensa para o primeiro jogador se esse jogo seguinte não se realizar deveria ser o meio desses dois valores, nomeadamente a proporção da parada que $\sum_{k=0}^{s-1}\binom{m}{k} + \sum_{k=0}^{s-2}\binom{m}{k}$ é para $2 \cdot 2^{m}$” (KATZ, 2010, p. 574), este autor também mostra que “A soma dos coeficientes binomiais pode ser reescrita como $\binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{s-1}\binom{m}{k} + \sum_{k=1}^{s-1}\binom{m}{k-1}$ e pela regra para a construção do triângulo aritmético, tem-se $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$, está soma é por sua vez igual a $\sum_{k-1}^{s-1}\binom{m+1}{k}$”. Assim, Pascal tomou como $2 \cdot 2^{m} = 2^{m+1}$ “a recompensa para o primeiro jogador sendo precisamente comprovada pelo teorema para o caso $n = m + 1$ e a prova está completa” (KATZ, 2010, p.575).

De acordo com Laplace (2010, p. 2013) “O método de Pascal é bastante engenhoso; no fundo é o emprego da equação a diferenças parciais relativa ao problema, aplicada para determinar as probabilidades sucessivas dos jogadores, indo dos números menores aos seguintes”, sendo este método limitado a dois jogadores.

Para tornar esse texto mais atualizado e compreensível para alunos da educação básica, podemos reescrevê-lo da seguinte forma, tanto em estratégia de cálculos quanto da apresentação do triângulo aritmético, disponível em Eves (2011), segundo este autor, Pascal criou um número de combinações simples, usando o triângulo aritmético. Então ele escolheu a quarta linha do triângulo, que tem respectivamente os coeficientes: 1, 4, 6, 4, 1, e combinou na condição, de que cada combinação simples é o número maneiras de obter as quantidades de letras, para análise da solução do problema.

Nesse sentindo, Eves (2011) destaca que Pascal, tomou como ordem r, de n objetos, usando a expressão C_r^n seguindo as estratégias dispostas no triângulo aritmético, como pode ser observar na Figura 17.

Figura 17 – Triângulo Aritmético ou Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de Warsi (2020, p. 158)

Aplicando sua estratégia para os jogadores na seguinte condição:

- Para o primeiro jogador (A): $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$; $C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$; $C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$; sendo $\frac{C_4^4 + C_3^4 + C_2^4}{casos\ possíveis} = \frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16} \cdot prêmio$;

- Para o segundo jogador (B): $C_1^4 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$; $C_0^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 4$; sendo $\frac{C_1^4 + C_0^4}{casos\ possíveis} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16} \cdot prêmio$;

A proposta de **Pierre de Fermat (1601-1665)**, nascido em Beaumont-de- Lomagne no sul da França, formado em Direito, exercia advocacia na cidade de Toulouse, foi membro de vários corpos oficiais, incluindo câmaras do Parlamento, serviu como jurista, mas não foi considerado um advogado brilhante (KATZ, 2010), isto pode ser atribuído aos estudos de matemática que era reservado a estudar em seu tempo livre, por puro prazer, assim, "Fermat enriqueceu tantos ramos da matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII" (EVES, 2011, p. 390).

Para solução do problema que Pascal lhe enviou, ele afirmou que se fazia necessário pagar 1/6 do total da soma por jogada, independente em que momento o jogo fosse interrompido, discordando da resposta de Pascal. Fermat conclui ainda que para esta situação valeria do senso comum dos jogadores para que as jogadas fossem divididas com o mesmo valor (CALABRIA; CAVALARI, 2013).

- **Fermat,** desenvolveu sua estratégia utilizando combinações das possíveis alternativas de ganhar ou de perder durante as jogadas, ou seja, ele organizou a situação e representou a solução deste caso, considerando que o "jogador *A* precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador *B* de 3", deduziu que como "quatro partidas decidem o jogo, seja a uma partida ganha por *A* e seja *b* uma partida ganha por *B*", organizou todas as possibilidades de *a* e *b*, "formando 6 arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b" (EVES, 2011, p. 393).

Segundo Laplace (2010, p. 213), o método utilizado por Fermat foi "fundado nas combinações, e se estende a um número qualquer de jogadores". Na Figura 18, tem-se a combinação organizada por Fermat:

Figura 18 – Combinações do problema dos pontos, proposta por Fermat.

aaaa	*aaab*	*abba*	*bbab*
baaa	*bbaa*	*abab*	*babb*
abaa	*baba*	*aabb*	*abbb*
aaba	*baab*	*bbba*	*bbbb*

Fonte: EVES, 2011, p. 393

De acordo com Eves (2011), as combinações que aparecem ***a*** duas ou mais vezes, e nesta situação há 11 casos, são favoráveis a A, as combinações que aparecem ***b*** três ou mais vezes, e neste há cinco casos, são favoráveis a B. A combinação de Fermat foi identificar que A precisava de *m* pontos para ganhar e B precisava de *n* pontos, formando a expressão 2^{m+n-1} arranjos completos, de ordem: $m + n - 1$, das letras *a* e *b* indicadas.

Em seguida fez o número α de casos em que *a* aparece *m* ou mais vezes e o número β de casos em que *b* aparece *n* ou mais vezes. Finalizando, fez com que as apostas deveriam ser divididas na razão $\frac{\alpha}{\beta}$ (EVES, 2011). Dessa forma, propôs que para divisão ser justa, deveria multiplicar o valor do prêmio, por: $\frac{11}{16} \cdot prêmio$ para o jogador A e para o jogador $\frac{5}{16} \cdot prêmio$ para o jogador B.

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 212) Pascal e Fermat "generalizaram o problema e sua solução, estendendo suas investigações a outros jogos de azar". Embora tenham utilizado o mesmo princípio descrito por Cardano, segundo os autores, este conhecimento não era um ponto de domínio e discussão entre os matemáticos da época, principalmente porque o livro *Liber de ludo Aleae* de Cardano foi publicado nove anos depois que Pascal e Fermat resolveram os problemas, o que implica que eles não tiveram acesso a um livro ou a qualquer documento que abordasse as estratégias de Cardano. Além disso, não havia, qualquer tratamento sistemático da solução de problemas envolvendo jogos de azar.

Segundo Secades (2000, p. 08, tradução nossa) das correspondências e das soluções é importante evidenciar que Pascal e Fermat, contribuíram na "construção de critérios analíticos sistemáticos para medir com validade universal o conceito de probabilidade", pois Pascal e Fermat, solucionaram os problemas, por seus próprios métodos e refletiram sobre outros problemas envolvendo jogos, viabilizando "que o estudo do *acaso* tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades"* (JUNQUEIRA, 2015, p. 05), generalizando tanto os problemas quanto suas soluções.

É importante acentuar que Laplace (2010, p. 179) considera que é a Chevalier de Méré, "a quem devemos o nascimento do cálculo das probabilidades, por ter estimulado esses geômetras a ocuparem-se desse objeto", instigando-os a buscarem estratégias que solucionasse de fato os problemas nas situações de apostas de jogos de azar, que por pouco conhecimento com o objeto matemático em questão, o levou a declarar erroneamente que "as proposições não eram constantes e que a aritmética se desmentia", Pascal assegura que tal proposição afirmada por Chevalier de Méré, era porque mesmo ele tendo muito bom espirito, não era geômetra e para Pascal este era um grande defeito de Chevalier de Méré (LAPLACE, 2010).

Calabria e Cavalari (2013) apresentam as traduções das cartas trocadas entre Pascal e Fermat, de acordo com as autoras estas cartas foram publicadas por Smith em 1929, a primeira carta, que foi enviada por Pascal à Fermat, não foi encontrada, mas foi possível encontrar na segunda carta a resposta sobre a forma que Pascal utilizou para solucionar o *Problema dos Pontos* e outros problemas, é válido frisar que das correspondências, a análise realizada foi com a intenção de obter informações das estratégias que os matemáticos Pascal e Fermat utilizaram como solução principalmente para os problemas dos pontos.

Após um ano, que Pascal e Fermat solucionaram os problemas propostos por Chevalier de Méré, **Christian Huygens (1629-1695)**, matemático, físico e astrônomo, nascido em Haia, na Holanda, em 1655 ele foi visitar Paris e lá ficou sabendo da história sobre as correspondências entre Pascal e Fermat, causando-lhe interesse pelo assunto, então começou a estudar sobre problemas semelhantes partindo das ideias igualmente prováveis (KATZ, 2010). Após conclusão, decidiu, em 1657, publicar seus resultados em um tratado conhecido como *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), considerado o primeiro documento publicado sobre probabilidade.

De acordo com Mlodinow (2009, p. 84) “A análise de Pascal e Fermat mostrou-se um grande primeiro passo na busca de uma teoria matemática coerente da aleatoriedade”. E coube a Huygens apresentar os problemas e as devidas soluções propostas pelos matemáticos, além de publica neste mesmo tratado suas contribuições, contendo catorze proposições e mais exercícios para resolver.

Segundo Katz (2010, p. 576) “Huygens forneceu discussões pormenorizadas acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular como calcular num jogo de azar”, ainda segundo este autor, Huygens declarou que os resultados dos jogos de azar podem ser incertos, pois as chances de um jogador ganhar ou perder, dependia de um determinado valor, considerando que o “valor de uma hipótese é o **valor esperado**, é a quantidade média que uma pessoa ganharia se jogasse o jogo muitas vezes. É esta quantidade que o jogador presumivelmente pagaria para ter o privilégio de jogar um jogo equitativo” (KATZ, 2010, p. 576, grifo do autor).

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 213) Huygens baseava na expectativa ou resultado esperado de uma situação. Como, por exemplo: *“Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha $10; Se aparecer 3, você ganha $5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?”*.

Nesse sentido, “a expectativa matemática de um jogo é encontrada somando os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de você a obter” (Ibid., p. 213). De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 214) Sabe-se nestas situações que ao jogar um dado, a possibilidade de cair em qualquer lado, são iguais e deve-se considerar que o dado não é viciado, então tem-se "uma chance em seis de receber $10; uma chance em seis de ganhar 3, e quatro em seis de nada ganhar, sendo a expectativa matemática igual a: $\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{4}{6} \cdot 0 = 2{,}50$.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 216) Huygens "inverteu o processo, usando a expectativa para calcular a probabilidade, em vez do contrário. Mas a ideia fundamental era a mesma: resultados igualmente prováveis significam expectativas iguais", de situações iguais e repetidas, foi o que o levou a escrever suas proposições, sobre os jogos de azar relacionados as chances para se obter sucesso.

Em Calabria e Cavalari (2013) o autor Todhunter (1965) descrever as proposições de Huygens, assegurando que as três primeiras proposições são divisão de apostas em um jogo de azar, tendo os jogadores chances equiprováveis, quais estão destacados no Quadro 8.

Quadro 8 – Proposições I, II, III - Huygens sobre Probabilidade

Proposições I, II, III de Christian Huygens	
I	Se eu esperar a ou b e ter as mesmas chances de ganhar qualquer um deles, minha expectativa é no valor de $(a + b)/2$.
II	Se eu esperar a, b ou c, e cada um deles tem a mesma probabilidade de cair para minha quota, minha expectativa é no valor de $(a + b + c)/3$.
III	Se os números de chances que eu tenho de ganhar a, ser p, e o número de chances que eu tenho de ganhar b, ser q e supondo as chances iguais, minha expectativa será, então no valor de $(pa + qb)/p + q$.

Fonte: Calabria e Cavalari (2013)

Sobre a quarta, quinta, sexta e sétima proposições, Todhunter, 1965 apud CALABRIA; CAVALARI, 2013) declara que são proposições que abordam os casos similares ao *Problema dos Pontos*, isto quando envolve dois jogadores, podendo ser utilizado o método de Pascal para solucioná-los, quais estão destacadas no Quadro 9.

Quadro 9 – Proposições IV, V, VI, VII - Huygens sobre Probabilidade

Proposições IV, V, VI, VII de Christian Huygens	
IV	Suponha que eu jogue contra um oponente sobre esta condição, de que aquele que ganha os três primeiros jogos terão a aposta, e que eu tenha ganhado duas das três e ele apenas uma. Eu desejo saber, se concordarmos em parar o jogo, o quanto cabe a minha parte?
V	Suponha que eu necessite de um ponto e meu oponente três. Como devem ser divididas as apostas?
VI	Suponha que eu tenha dois pontos e meu oponente três. Como devem ser divididas as apostas?
VII	Suponha que eu necessite de dois pontos e meu oponente quatro. Como devem ser divididas as apostas?

Fonte: Calabria e Cavalari (2013)

No Quadro 10, destaca-se a oitava e nonas proposições, segundo Todhunter (1965 apud CALABRIA; CAVALARI, 2013) são proposições que abordam também casos parecidos com os *Problema dos Pontos*, mas agora quando envolve três jogadores, são elas:

Quadro 10 – Proposições VIII, IX - Huygens sobre Probabilidade

Proposições VIII, IX de Christian Huygens	
VIII	Suponha agora que três pessoas jogam juntas e que para o primeiro e o segundo falte um ponto cada e o terceiro dois pontos.
IX	Para encontrar as respectivas apostas de muitos jogadores, a que nos agrade, alguns dos quais faltará mais jogos, outros menos; temos que considerar que um determinado apostador ganharia, se ele, ou qualquer um dos outros ganharem o próximo jogo: em seguida, adicionar o que ele iria ganhar em todos esses casos particulares, e dividindo a soma pelo número de jogadores, o quociente dá a parte individual requerida

Fonte: Calabria e Cavalari (2013)

As demais proposições seguem soluções que foram tratadas relativas a jogos de dados (CALABRIA; CAVALARI, 2013), quais estão destacados no Quadro 11.

Quadro 11 – Proposições X, XI, XII, XIII, XIV - Huygens sobre Probabilidade

Proposições X, XI, XII, XIII, XIV de Christian Huygens	
X	Encontrar quantas jogadas se deve empreender para lançar um número seis com um dado simples;
XI	Encontrar quantas jogadas se deve aventurar para lançar o número doze com dois dados;
XII	Encontrar quantos dados se deveria empreender para lançar na primeira jogada. dois seis;
XIII	Na hipótese de que eu jogue uma jogada de 2 dados contra um oponente, com a regra de que se a soma for 7 pontos eu ganho, se a soma for 10, ele ganha, e que dividiríamos a aposta em partes iguais se existir uma outra soma, encontrar a expectativa de cada um de nós;
XIV	Se outro jogador e eu jogarmos uma vez e essa vez for com 2 dados sobre a condição de que eu ganharia quando eu tivesse jogado 7 pontos e ele ganharia quando tivesse jogado 6, se eu deixá-lo jogar primeiro, encontrar a razão das minhas chances pelas dele.

Fonte: Calabria e Cavalari (2013)

De acordo com Katz (2010) dessas últimas proposições sobre jogos de dados, Huygens utilizou a estratégia similar à Pascal, fazendo uma análise mais exaustiva do problema, mostrando como determinar o número de vezes que dois dados devem ser lançados, assim Huygens precede em etapas, supondo que: *"uma pessoa ganha* a *quando aparecem dois seis, ele argumentou que no primeiro lançamento há 1 hipótese de vencer* a *e 35 hipóteses de vencer 0, por isso, o valor de uma hipótese num lançamento é* $(1/36)a$*"* (KATZ, 2010, p. 577).

A outra opção, é de o jogador perder no primeiro lançamento, então é feito o segundo lançamento: *"para o primeiro lançamento, o jogador tem 1 hipótese de ganhar* a *e 35 hipóteses de fazer um segundo lançamento, que vale* $(1/36)a$ *. O valor da sua hipótese de lançar um* *duplo seis nos dois lançamentos é, segundo a terceira proposição* $\frac{1a+35(1/36)a}{1+35}$ *ou* $\frac{71}{1296}$*"* (KATZ, 2010, pp. 577-578).

Huygens, segue então, para o caso de quatro lançamentos: *"se o jogador consegue um duplo seis numa das duas jogadas, ganha* a*; se não, tem um segundo par de hipóteses, como o valor de* $(\frac{71}{1296})a$*. Uma vez que há 71 hipóteses de ganhar a no primeiro par de jogadas e, logo, 1225 hipóteses de não ganhar (1296)"* (KATZ, 2010, p. 578). De acordo com Katz (2010) há 1225 hipóteses de chegar ao segundo par de jogadas, que vale $\left(\frac{71}{1296}\right)a$, então, pela terceira proposição de Huygens, o valor da hipótese do jogador, conseguir de um duplo seis em quatro lançamento é:

$$\frac{71a+1225\left(\frac{71}{1296}\right)a}{1296} \quad \text{ou} \quad \frac{178{,}991}{1{,}679{,}616}a$$

Segundo Katz (2010, p. 578) "este valor é ainda consideravelmente menos do que o desejável $(1/2)a$, Huygens teve que continuar o processo. Embora não tenha apresentado mais cálculos, ele notou que se considera a seguir 8 lançamentos, depois 16, e depois 24 e 25". Este autor ainda salienta, que Huygens propôs, neste tratado mais exercícios a resolver, deixando à exposição de outros matemáticos que por ventura se interessassem por este ramo da matemática, sendo que seu tratado "era a única introdução disponível à teoria da probabilidade até o início do século dezoito" (Ibid., p. 578).

Observa-se que o método utilizado por Huygens, para organizar os dados e resolver os problemas, não definia uma fórmula conclusiva para aplicar a probabilidade, contudo é evidente que eram considerados casos possíveis e casos favoráveis, pois, segundo Gneri (S.d, p. 03) foi considerado as chances de um jogador ganhar, onde "no contexto de um jogo e desde o ponto de vista de um jogador, consideram-se o conjunto de todos os resultados ou *casos possíveis*, sendo feita uma partição em dois subconjuntos: o dos resultados ou *casos favoráveis* e o dos não favoráveis", aos apostadores/jogadores, organizada como:

$$\frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

E assim, Pascal e Fermat a formalização da teoria das probabilidades, por meio das soluções de problemas relacionados a jogos de azar, que De Méré solicitou. Christian Huygens, em 1657, publicou as soluções desses problemas em seu tratado "inspirado na correspondência mantida entre os dois criadores da teoria da probabilidade. Além disso, Huygens estendeu alguns dos resultados de Pascal e esclareceu vários problemas para três ou mais jogadores" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD, [2020], p. 05, tradução nossa).

4.2. A FORMALIZAÇÃO DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Contribuindo com a Teoria da probabilidade, aponta-se o matemático **Jacob**[12] **Bernoulli** (1654-1705), nascido em Basiléia, na Suíça. Segundo Boyer (1974), nenhuma família na história da matemática produziu tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoulli e o primeiro a atingir proeminência na matemática foi Jacob Bernoulli, nos estudos a respeito da probabilidade, "reconheceu a ampla aplicabilidade das probabilidades" (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214) e dedicou-se a testar na prática e escrever o que ocorria durante cada prova, em cada situação do seu longo teste.

Segundo Aragão (2009, p. 88) a partir das observações e aplicações de Jacob Bernoulli, inicia-se um "processo de abstração das possibilidades fora das limitações dos jogos e dos seguros; á ele é atribuído a primeira sistematização de uma teoria das probabilidades, tendo em vista suas aplicações práticas", ampliando-a para além do ramo da matemática. No geral, Jacob Bernoulli pretendia determinar um tratamento formal para os casos de probabilidade, propondo as chances de um evento ocorrer ou não ocorrer, assim,

> examinou a relação entre probabilidade teórica e sua relevância para várias situações práticas [...] afirmou que, se uma experiência reproduzível tivesse uma probabilidade teórica p de resultar em certo modo "favorável", então, para qualquer margem de erro especificada, a razão dos resultados favoráveis para total de resultados em algum número (grande) de tentativas repetidas desse experimento estaria dentro daquela margem de erro. Por esse princípio dados observados podem ser usados para estimar a probabilidade de acontecimentos em situações do mundo real (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214).

Katz (2010) frisa que ele usou as ideias de Huygens e generalizou as ideias de Pascal, entretanto a experiência e tratamento que Jacob Bernoulli deu para a teoria da probabilidade foi algo não realizado anteriormente, ele "propôs a determinação de certas probabilidades a *posteriori* por observação dos resultados obtidos em várias instâncias semelhantes [...] pois, queria ser capaz de quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades" (KATZ, 2010, p. 764). Segundo este autor, parecia razoavelmente óbvio a Jacob Bernoulli, que,

---

[12] É possível que seu nome possa ser encontrado na literatura como: Jakob, Jacques, Jacob, Jacob I.

> Quanto maior o número de observações feitas de uma dada situação, melhor seria a previsão de ocorrências futuras. Mas ele queria ter uma "prova científica" deste princípio, que mostrasse que o aumento no número de observações levaria a probabilidade do acontecimento a ser estimada com qualquer grau de precisão desejado, e também mostrasse como calcular o número exacto de observações necessárias para garantir que o resultado estivesse dentro de um intervalo predeterminado em torno da verdadeira resposta (KATZ, 2010, p. 764).

De acordo com Laplace (2010) Bernoulli, trabalhou fazendo suas devidas observações e anotações por vinte anos e quando considerou satisfeito, ou seja, quando conseguiu a prova científica que o levou a experiência de quantificar a medida da incerteza, nomeou de *Teorema Áureo*, apresentando "uma teoria geral das combinações e das sequências, aplicando-a a várias questões difíceis relativas aos acasos" (LAPLACE, 2010, p. 214), conhecido como: Teorema de Bernoulli, Lei dos Grandes Números e Lei Fraca dos Grandes Números

De acordo com Katz (2010, p. 766) "o teorema é usualmente escrito como: Dado qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer número positivo c, existe um N tal que: $P\left(\left|\frac{X}{N} - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{1}{c+1}$".

Segundo Boyer (1974, p. 309, grifo nosso) é definido como: *"se p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiencias, se ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $|m/n - p| < \varepsilon$ esteja satisfeita, então: $\lim_{n\to\varepsilon} P = 1$".*

Neste estudo Jacob Bernoulli, apresenta por meio do seu Teorema, uma relevante contribuição na teoria da probabilidade, onde "foi elevada pela primeira vez do nível elementar de um conjunto de soluções para problemas particulares a um resultado de importância geral" (HISTORIA DE LA PROBABILIAD [2020], p. 07, tradução nossa). Sendo considerado o primeiro matemático a apresentar um Teorema nos estudos da teoria da probabilidade.

Em 1713, foi publicado o livro *Ars Conjectandi* (A arte de conjecturar), da autoria principal de Jacob Bernoulli, isto, oito anos após sua morte. Boyer (1974, p. 308) ressalta que o *Ars Conjectandi* é "o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois o *De Ratiociniis in ludo Aleae* de Huygens fora apenas uma breve introdução", que Bernoulli reproduzido como a primeira de quatro partes do livro Ars e devidamente comentado por Jacob Bernoulli, a segunda Parte deste livro aborda sobre a teoria geral de permutações e combinações e sobre os "números de Bernoulli[13]" (BOYER, 1974).

"A terceira e quarta partes do *Ars Conjectandi* são dedicadas principalmente a problemas que ilustram a teoria das probabilidades" (BOYER, 1974, p. 309) e especificamente

---

[13] úteis para escrever as expansões em série infinita das funções trigonométricas e hiperbólicas. (Boyer, 1974, p. 309)

na quarta parte, Jacob Bernoulli apresentou o *Teorema Áureo*, que foi a prova da sua pesquisa e observação. Segundo Katz (2010), na quarta parte, Bernoulli "estuda vários tipos de evidências observadas na vida real e como essas partes de evidências podem ser combinadas numa única afirmação probabilística" (KATZ, 2010, p. 765).

Katz (2010, p. 766) afirma que Jacob Bernoulli constatou que na maioria das situações reais, a certeza é impossível de atingir, nessas condições Bernoulli introduziu a ideia de certeza moral, validando que "Para um resultado ser moralmente certo, a sua probabilidade não deveria ser inferior a 0,999. Reciprocamente, considerou moralmente impossível um resultado com probabilidade não superior a 0,001", esta foi a condição que Jacob Bernoulli definiu para estabelecer o Teorema Áureo.

Segundo Mlodinow (2009) este teorema trata de como os resultados refletem as probabilidades subjacentes quando se faz muitas jogadas observando o que ocorre no limite de um número arbitrariamente grande de jogadas repetidas, observações que Jacob Bernoulli testou com diversas situações problemas, como por exemplo:

Numa situação, vislumbrou uma urna cheia, contendo 3 mil pedrinhas brancas e 2 mil pedrinhas pretas, uma razão de 60% de brancas contra 40% de pretas, qual foi submetida a condição de retiradas, com "reposição" para não alterar a proporção de $3:2$, onde a probabilidade *a priori* de se tirar uma pedrinha branca é de $3/5$ ou de 60%, a pergunta central de Jacob Bernoulli é saber com que precisão deve-se esperar que a proporção de pedrinhas brancas retiradas se aproxime de 60% e com qual probabilidade? (MLODINOW, 2009, p. 105).

De acordo com Katz (2010) para este problema o cálculo de probabilidades envolve a soma de certos termos da expansão binomial $(r+s)^N$, nesse sentido Jacob Bernoulli atentou uma análise detalhada dos termos, considerando que a probabilidade de sucesso é: $p = \frac{r}{(r+s)}$

Onde, $r = n° \ total \ de \ sucessos -$ que são as bolas brancas; $s = nº \ total \ de \ insucessos$ – que são as bolas pretas.

Segundo o teorema de Bernoulli, dada qualquer pequena fração ε, utiliza-se: $\varepsilon = fração \ pequena \ tomada \ como \ 1/(r+s)$; E, dado qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer número positivo c, existe um N tal que a probabilidade de que X/N difere de p em não mais que ε é maior que c vezes a probabilidade de que X/N difira de p em mais de ε (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], tradução nossa), expresso matematicamente como:

$$P\left\{\left|\frac{X}{N} - p\right| \leq \varepsilon\right\} > c.P\left\{\left|\frac{X}{N} - p\right| > \varepsilon\right\},$$

onde, N = observações, tomando como N = N(c); X = sucesso; c = número positivo grande.

De acordo com Katz (2010) a expansão binomial $(r+s)^N$, valida o Teorema de Bernoulli e determina a forma de observações ($N(c)$), pois Jacob Bernoulli mostra que se: $t = r+s$, então $N(c)$ podia ser tomado como qualquer inteiro maior do que o máximo entre: $mt + \frac{st(m-1)}{r+1}$ e $nt + \frac{rt(n-1)}{s+1}$. E para m e n , Jacob Bernoulli, tomou como inteiro, tal que:

$$m \geq \frac{\log c(s-1)}{\log(r+1)-\log r} \qquad \text{e} \qquad n \geq \frac{\log c(r-1)}{\log(s+1)-\log s}.$$

Em seguida atribuiu valores para: $r = 30$; $s = 20$ e $c = 1000$. De acordo com Katz (2010, p. 767) para Bernoulli o resultado de N, que foi igual a "25.550 observações seriam suficientes para a certeza moral de que a frequência relativa encontrada estaria numa proximidade de $1/50$ da verdadeira proporção de $3/5$".

Jacob Bernoulli fez suas experiências com muitas repetições e considerou que seria suficiente "estimar a probabilidade deste evento pela frequência estabilizada, observada experimentalmente" (QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p 62), o que o levou a propor a definição sobre a probabilidade, pois, Bernoulli, consentiu identificar através da experiência "uma nova maneira de estimar as chances de realização de um evento: o método experimental, supondo que a probabilidade é um dado objetivo ligado ao evento e à experiência" (Ibid., p. 68).

De acordo com Zindel (2018, p. 12), Jacob Bernoulli queria demostrar que "onde termina a arte de pensar – a análise objetiva – começa a arte da conjectura". Agindo assim, ele foi mais profundo ao analisar a probabilidade de um evento ocorrer, o que até então era estudado ao analisar partidas de jogo de azar, ampliando essa análise para as possibilidades de eventos que podem ocorrer em situações do cotidiano.

Em Zindel (2018, p. 12) também, foi destacado a citação que Bernstein, enfatizou sobre a contribuição de Jacob Bernoulli em colaborou para desenvolver a probabilidade a partir de quantidade limitada de informações, sendo o primeiro matemático a reconhecer que a probabilidade necessitava de uma definição e pressupões que "sob condições similares, a ocorrência (ou não ocorrência) de um evento no futuro seguirá o mesmo padrão observado no passado".

Segundo Katz (2010, p. 767) a contribuição que Jacob Bernoulli deu a teoria da probabilidade é digno de menção. Entretanto, não coube a ele sua publicação, este autor reforça que isto pode ter ocorrido, talvez porque "Bernoulli pode ter sentido que tinha falhado na sua busca para quantificar a medida da incerteza, principalmente porque sua intuição lhe disse que 25.550 era bastante mais do que necessário".

Segundo Gillispie (2007), a quarta parte deste livro também não foi concluída por Jacob Bernoulli. No entanto, após ser publicado, proporcionou a outros personagens uma visão ampliada a respeito da teoria da probabilidade, pois "a lei dos Grandes Números foi introduzida na teoria da probabilidade, como um dos conceitos mais importantes no cálculo de probabilidades [...] e com amplas aplicações em muitos campos da estatística, da matemática e da ciência em geral" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], tradução nossa).

Para concluir o livro Ars Conjectandi, foi contado com a colaboração do seu sobrinho, **Nicolaus Bernoulli II (1695-1726),** nascido em Basiléia, na Suíça, que escreveu "sobre a aplicação da *Ars Conjectandi* às questões jurídicas" (HOFMANN, 2002, p. 257, tradução nossa), além de propor outros problemas envolvendo probabilidade, como o problema de *São Petersburg*o, que posteriormente ficou conhecido como *paradoxo de Petersburgo*, tornando-se um objeto de debate na época, por envolver probabilidade, tendo o seguinte enunciado:

Suponhamos que Pedro e Paulo concordam em jogar um jogo baseado em lançar uma moeda. Se o primeiro lance da cara, Paulo dará uma moeda a Pedro, se o primeiro lance da coroa, mas cara aparece no segundo lance, Paulo dará a Pedro duas moedas; se cara aparece pela primeira vez no terceiro lance, Paulo dará a Pedro quatro moedas; E assim por diante, a quantia a ser paga se cara aparece pela primeira vez no enésimo lance sendo 2^{n-1} *moedas. Quanto deve Pedro pagar Paulo pelo privilégio de jogar tal jogo?* (BOYER, 2011, p. 312).

Este problema, foi solucionado pelo matemático, físico, economista, médico, estatístico **Daniel Bernoulli (1700-1782),** filho de Johann Bernoulli. Segundo Boyer (1974, p. 312) a contribuição de Daniel Bernoulli sobre probabilidade "teve vários aspectos, incluindo aplicações a negócios, medicina e astronomia" dos seus estudos teve o mérito de receber um prêmio junto com seu pai da "Académie des Science para um ensaio sobre probabilidade relacionado com as inclinações dos planos orbitais dos planetas. Em 1760 ele leu perante a Académie de Paris um artigo sobre a aplicação da teoria das probabilidades à questão das vantagens da inoculação contra varíola" (Ibid., p.312).

Quanto a solução do problema de *São Petersburg*o, em Historia de la Probabilidad ([2020] tradução nossa) a expressão utilizada para definir a probabilidade de que a primeira cara apareça no lance k é: $P_k = \frac{1}{2^k}$. Para calculá-lo, utilizou-se a expressão: $E = \sum_{K=1}^{\infty} p_k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$. Segundo Historia de la Probabilidad ([2020] tradução nossa), esta soma diverge ao infinito, pois de acordo com a teoria tradicional do valor esperado,

> não importa quanto você paga para entrar no jogo, porque você vai ganhar no longo prazo (imagine pagar 1 trilhão de cada vez, para ganhar na maioria das vezes apenas algumas moedas). A ideia dele é que as raras ocasiões em que você ganha uma grande quantia pagarão mais do que as centenas de trilhões que você teria que pagar para jogar [...]. Desta forma ficou claro que a opção aparentemente mais razoável nem sempre é a mais correta do ponto de vista matemático (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], pp, 13-14, tradução nossa).

Boyer (1974, p. 311) evidencia que Daniel Bernoulli, “é lembrado principalmente por ter feito a distinção, em teoria das probabilidades, entre esperança matemática e ‘esperança moral’, ou entre ‘fortuna física’ e ‘fortuna moral’”, proposta que utilizou como estratégia de solução para o problema de *São Petersburgo.*

Foi observado por alguns personagens “que o problema era impossível, pois a fortuna de Paulo é necessariamente finita, portanto, ele não poderia pagar as somas ilimitadas que poderiam ser necessárias no caso de uma longa demora no aparecimento de cara” (Ibid., 312). Ele foi publicado em um artigo em São Petersburgo no *Commentarii Academiae Scientiarm Imperialis Petropolitanae (Anais da Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo),* recebeu este nome, por ter sido publicado em anais na cidade de São Petersburgo e foi publicado em inglês no Econo'metrica, com o título *“Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk (Exposição de uma nova teoria sobre a medição de risco)* (ZINDEL, 2018, p. 13).

Segundo Cajori (2007), este problema também foi estudado por matemáticos como Laplace, Poisson, Cramer, Conde de Buffon, este último “fez um teste empírico do caso, achou que em 2.084 jogos Paulo teria pagado a Pedro 10.057 moedas. Isso indica que em qualquer jogada a esperança de Paulo, em vez de ser infinita, na verdade foi algo inferior a 5 moedas” (BOYER, 1974, p 312) e mesmo que a *esperança moral* tenha se tornando um clássico da época, pouco se sabe de seu uso.

Daniel Bernoulli contribuiu também com os estudou sobre os seguros. De acordo com Junqueira (2014, p. 57) em 1730 Daniel Bernoulli “utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após “n” anos, dado certo número de nascimentos (conceito de probabilidade condicional)”, neste período então, começou a “aparecer grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com embasamento científico” (Ibid., p. 57).

Gillispie (2007, p. 1532) ressalta que Daniel Bernoulli, propôs que os “benefícios futuros – na prática, benefícios financeiros – poderiam ser quantificados como o quociente de seu valor dividido pelo valor total do beneficiário”. Outro personagem que contribuiu com estudos sobre seguro vida foi o astrônomo e matemático **Edmond Halley** (1656-1742). Segundo Laplace (2010), este matemático aplicou a teoria da probabilidade na primeira tabela de mortalidade e publicou sua teoria no artigo *An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind* (Uma estimativa dos graus de mortalidade da humanidade).

Contribuindo com o desenvolvimento da teoria da probabilidade, cita-se o matemático **Abraham De Moivre** (1667-1754), nascido em Vitry-le-François, na França. Segundo Boyer (1974, p. 312), De Moivre, mudou-se para Inglaterra "onde conheceu Newton e Halley e tornou-se professor particular de matemática. Em 1697 foi eleito para a Royal Society e subsequentemente para as Academias de Paris e Berlim".

Katz (2010, p. 769) enfatiza que De Moivre passou por situações diversas e difíceis, no geral "ganhava a vida dando lições particulares e resolvendo problemas surgidos de jogos de azar e anuidades para jogadores e especuladores", situações que o levaram a produzir diversos trabalhos importantes no ramo da matemática, em 1681, quando estudo em Saumur, conheceu o trabalho de Huygens a respeito da teoria das probabilidades e aprofundou seus estudos neste ramo da matemática, sendo que já a utilizava na pratica.

De acordo com Retrespo e Gonzáles (2003, tradução nossa) em 1718, De Moivre publicou o livro *The Doctrine of Chances* (Doutrina das chances), considerado um avanço para a história da probabilidade, por apresentar mais detalhes que as publicações anteriores a respeito deste tema. Segundo Katz (2010) isto ocorreu devido as regras matemáticas que também estavam evoluindo, permitindo a De Moivre apresentar as regras gerais e as aplicações detalhadas dessas regras, que faziam parte das práticas dos jogos, comum no seu tempo.

De acordo com Boyer (1974, p. 313), neste livro De Moivre, havia uma variedade de exercícios, como lançamentos de dados, bolas na urna, seleção de bolas em urna, saco com bolas diferentes, o problema dos pontos e exercícios referentes a anuidades vitalícias. "De modo geral De Moivre derivava a teoria das permutações e combinações dos princípios de Probabilidade [...] dizia que a probabilidade de um evento composto é o produto das probabilidades dos componentes". No entanto, este autor destaca que esse princípio já havia sido mencionado em trabalhos anteriores e De Moivre atribuiu esse conhecimento aos estudos de Jacob, Johann e Nicolaus Bernoulli, como consta no prefácio do seu livro.

Em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), enfatiza-se que De Moivre reformulou em termos mais modernos a definição dada por Jacob Bernoulli, onde representou que a probabilidade que um evento ocorra é: *Uma fração em que o numerador é igual ao número de ocorrências do evento e o denominador é igual ao número total de casos em que o evento pode ou não ocorrer"* (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 08, tradução nossa), representado matematicamente para situações prováveis:

$$\text{Probabilidade} = \frac{número\ de\ ocorrências\ do\ evento}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

De Moivre, segue seus estudos, sobre soluções envolvendo probabilidade, neste caso buscou solucionar uma situação posta por Chevalier de Méré, que segundo Katz (2010) era para descobrir o número de tentativas necessárias para que um acontecimento provável ocorra, ou quantas tentativas seriam necessárias para que seja indiferente apostar no acontecimento ou em sua falha, supondo que a é o número de possibilidades para o acontecimento numa qualquer tentativa e b é o número de possibilidades para a sua falha.

De Moivre tomou a probabilidade do acontecimento (b) falhar x vezes, utilizando a expressão $\frac{b^x}{(a+b)^x}$ e para que $\boldsymbol{x}$ satisfaça essa expressão igualou a $\frac{1}{2}$. Formando a equação: $\frac{b^x}{(a+b)^x} = \frac{1}{2}$ (KATZ, 2010). Ainda segundo este autor, as hipóteses de obter sucesso pelo menos uma vez em x tentativas são iguais as hipóteses de não obter sucesso nenhum, então a probabilidade tem que ser igual a $\frac{1}{2}$.

De Moivre, resolveu esta equação recorrendo a função logarítmica: $x = \frac{\log 2}{\log(a+b)-\log b}$. Assim, ele tomou que $a : b = 1 : q$ e observou que as vantagens contra o sucesso são de q para 1, tomando a equação na forma: $\left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 2$ ou $x \log\left(1+\frac{1}{q}\right) = \log 2$, De Moivre conclui que do $\log\left(1+\frac{1}{q}\right)$ em série de potências, "q é infinito, ou muito grande relativamente à unidade [...] e o primeiro termo $\frac{1}{q}$ da série é suficiente e a solução pode ser escrita como: $x = q \log 2$ ou $x \approx 0.7q$ (KATZ, 2010).

De Moivre pensou nos diferentes valores de: $Q = P\left(X = \frac{n}{2} + 1\right)$. Segundo Katz (2010, p. 772) os valores referentes a Q formam uma curva: "se pensar nos termos da binomial como colocados ao alto, igualmente espaçados em ângulos retos para acima de uma linha reta, as extremidades dos termos acompanham a curva. A curva assim descrita tem dois pontos de inflexão, um de cada lado do termo máximo".

Então, De Moivre analisa que para encontrar o número de lançamentos de dados necessários para que a probabilidade de lançar dois seis seja igual a $\frac{1}{2}$, o valor de $q = 35$, logo o resultado de $x = 24{,}5$. Então, o número de lançamentos necessários está entre 24 e 25 (KATZ, 2010), segundo este autor, essa é a mesma resposta que Huygens encontrou através de um cálculo bastante mais pormenorizado.

Segundo Katz (2010, p. 769) para De Moivre, “o método de cálculo das probabilidades relevantes residia no cálculo de certos coeficientes binomiais”, assim ele tentou ser um pouco mais preciso, como consta em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa) demonstrando a constante: $m! \approx B.e^{-m}.m^{m+\frac{1}{2}}$. E para determinar o valor dessa constante, construiu a seguinte expressão logarítmica: $\ln B = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \cdots$ e concluiu de acordo com seu cálculo que $B = 2.5074$

Assim ocorreu com o *Teorema do Limite Central*, que segundo Historia de la Probabilidad ([2020], pp. 13-14, tradução nossa) De Moivre pretendia calcular uma probabilidade que Jacob Bernoulli já havia demonstrado a respeito “de que o número de sucessos de um evento com probabilidade p e n tentativas estaria entre A e B” e para isto Jacob Bernoulli utilizou a seguinte expressão: $\sum_{A<K<B}\binom{m}{k}.p^k.(1-p)^{m-k}$, ainda de acordo com Historia de La probabilidad ([2020], tradução nossa) a dificuldade envolvida nessa operação era o cálculo do número combinatório: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

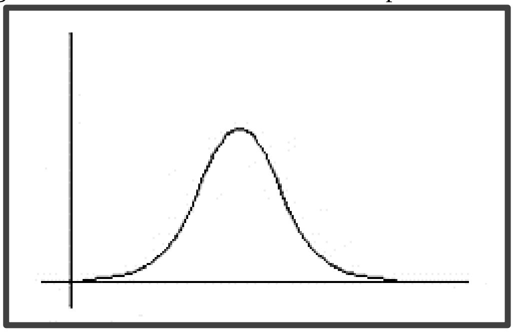
Assim, De Moivre Sabia que para n grande $\frac{(n-1)^2}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima de e^{-1}, logo o termo intermédio M de $(1+1)^n$ para a soma 2^n é igual a $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$. Dos dados obtidos, de acordo com Katz (2010) De Moivre calculou e chegou a seguinte resultado, (KATZ, 2010).

$$P\left\{X = \frac{n}{2} + t\right\} \approx P\left\{X = \frac{n}{2}\right\} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)}$$

De Moivre não estava satisfeito, com este resultado, “por não poder ligá-lo a nenhuma constante matemática conhecida, então pediu conselho e ajuda ao seu bom amigo **James Stirling** (1692-1770), que provou que $B = \sqrt{2\pi}$.” (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 11, tradução nossa). Possivelmente com um argumento semelhante ao de De Moivre, mas partindo do produto de Wallis para o número π, resultando em $\log B = 1 - \log T$, então o $\log T = 1 - \frac{1}{2}\log 2\pi$ ou $T = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ (KATZ, 2010).

De acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 11, tradução nossa) “os pontos de inflexão estão a uma distância $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$ desse máximo. Então, aqui está o Teorema do Limite Central, conhecido como o fato de que a média de uma amostra aleatória independente adequadamente normalizada é aproximadamente normal”. A Figura 19 mostra o gráfico da *curva da frequência normal* elaborada por De Moivre, como uma representação do conceito de "distribuição normal".

Figura 19 – Curva normal – elaborada por De Moivre



Fonte: Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221)

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221) De Moivre descreveu a *curva da frequência normal* "como uma aproximação para distribuições binomiais, usando essa ideia para melhorar a estimativa de Bernoulli quanto ao número de observações necessárias para se tirar conclusões precisas", segundo este autor nem sempre os resultados encontrados eram satisfatórios, pois a probabilidade necessitava de mais matemática, precisava ser "desenvolvida até o ponto em que pudesse ser aplicada frutiferamente a questões práticas" (Ibid., p. 221).

Dos seus estudos com a expansão binomial, De Moivre "conseguiu calcular as somas de grande número desses termos melhorando consideravelmente a quantificação de incerteza de Bernoulli" (KATZ, 2010, p. 772) ao encontrar: $\sum_{t=0}^{k} P\left(X = \frac{n}{2} + t\right)$ e apresentar a integral para uso nas situações probabilísticas: $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k e^{\frac{-(2t^2}{n})} dt.$

De acordo com Katz (2010) De Moivre, realizou um número infinito de experiências, a probabilidade de um acontecimento, que tem igual número de possibilidades de ocorrer e de falhar, pode não ocorrer com uma frequência superior a: $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ e nem com uma frequência inferior a $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$, ou seja, na terminologia dos dias atuais, De Moivre, "tinha mostrado que para n grande, a probabilidade de número de ocorrências de uma experiência binomial simétrica distar: $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ do valor médio $\frac{1}{2}$ n era 0.682688" (KATZ, 2010, p. 772).

De acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 12, tradução nossa) De Moivre, "descobriu que $\sqrt{n}$ era a unidade cuja distância do centro deveria ser medida. Assim, a precisão de uma estimativa de probabilidade aumenta com a raiz quadrada do número de experimentos; em outras palavras, De Moivre acabara de descobrir a importância da variância". E, ainda segundo este livro, De Moivre realizou o mesmo experimento de Jacob Bernoulli fez e de sua experiência informou, concluiu que 6.498 observações eram suficientes e “Embora tenha aprimorado o método, não reconheceu a importância de descobrir a curva normal e não conseguiu aplicar seu resultado a outros problemas” (Ibid., p. 13).

Boyer (1974) ressalta que De Moivre aparentemente foi o primeiro a trabalhar com a fórmula de probabilidades. No geral sua contribuição a esta Teoria, passou a ser utilizada por Carl Friedrich Gauss “como ferramenta estatística útil por si própria” (Warsi, 2020, p. 193) e por Pierre Simon Laplace, que usou “ao modelar curvas para erros aleatórios, como erros de medida [...]. Hoje a distribuição normal é muito usada ao modelar dados estatísticos, com aplicações que vão de estudos de população a análise de investimentos” (Warsi, 2020, p. 193).

“De Moivre interessava-se particularmente por desenvolver para a teoria das probabilidades processos gerais e notações que ele considerava como uma nova ‘álgebra’” (BOYER, 1974, p. 313) e segundo Katz (2010, p. 768) ele “utilizava frequentemente séries para efetuar os seus cálculos probabilísticos”, entretanto para Katz (2010) o mais importante era a sua discussão pormenorizada sobre como aproximar a soma dos termos do binômio $(a + b)^n$.

Segundo Gadelha (2004, p. 09) O livro *Doctrine of Chances*, assim como o Livro *Ars Conjectandi*, foram considerados os mais importantes para a formalização da teoria da Probabilidade no século XVII, abrindo um caminho fecundo para que personagens matemáticos no século XVIII, se aprofundassem sobre o tema.

4.3. INTRODUÇÃO DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA

Segundo Gillispie (2007) para entender e melhor explicar a teoria do acaso, que iniciou esta ciência, analisa-se a expectativa e o simples produto do valor a ser adquirido pela probabilidade de ganhá-lo. É um número, como a própria probabilidade, e nada mais. Ao que tudo indica, houve *dois textos* que começaram a unir a teoria matemática dos jogos de azar à probabilidade e à metodologia científica, de outros acontecimentos e das informações, quais estão destacados em Gillispie (2007, p. 1438).

Primeiro Texto: Mémoire sur la probabilité des causas par les événements (Memória sobre a probabilidade das causas pelos eventos);

Segundo Texto: Recherches (Investigações): 1º - I’intégration des éqautions différentielles aux différences finites, et sur lerus usage dans la théorie des hasards (1º - Integração de equações diferenciais com diferenças finitas e seu uso na teoria dos perigos) e 2º

- Sur le príncipe de la gravitation universelle, et sur les inégalités séculaires des planètes qui em dependent (2º - sobre o princípio da gravitação universal e sobre as desigualdades seculares dos planetas que dela dependem).

Segundo Gillispie (2007) estes textos foram concebidos como uma parceria de escritos sobre um tema que o próprio Laplace definiu como probabilidade, foi nesses dois textos,

> Que a **probabilidade começou a se estender da matemática dos jogos reais** e das **urnas hipotéticas** para a base da inferência estatística, da causalidade filosófica, da estimativa do erro científico e da quantificação da credibilidade das provas, para usarmos termos ainda não cunhados na época. **Ao preferir a palavra "probabilidade", para sugerir o âmbito maior que estava dando assunto, como ramo da matemática, é bem possível que Laplace tenha seguido o preceito de Condorcet** (GILLISPIE, 2007, p. 1438, grifo nosso).

O Marquês de Condorcet, era filósofo, enciclopedista e matemático, seu nome era **Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794)**, nascido em Ribemont na França, segundo Boyer (1974) sua pesquisa voltou-se para a aplicação da probabilidade em problemas sociais, sendo que a teoria das probabilidades "abrangem todas as aplicações que se pode fazer da doutrina do acaso aos usos da vida cotidiana e de todas essas ciências. Essa é a parte útil, a única que é digna da atenção séria dos filósofos" (GILLISPIE, 2007, p. 1438), para a possibilidade ainda de fazer cálculos que estimassem sobre eventos futuros, dando para a probabilidade mérito na matemática.

No início do início do século XVIII, os estudos sobre probabilidade são explorados por personagens que elevam sua forma de representação e aplicação, contando com a colaboração de matemáticos como Thomas Bayes (1702-1761); Georges-Louis Leclerc (1707-1788); Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783); Joseph Louis Lagrange (1736-1813); Pierre Simon Laplace (1749-1827); Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Simeon Denis Poisson (1781-1840), século que organizou e introduziu a teoria da probabilidade no mundo da matemática.

Cita-se, neste início a contribuição para um modelo de probabilidade, proposta por **Thomas Bayes** (1702-1761), um matemático e pastor presbiteriano, nascido em Londres, que introduziu este modelo, como uma forma de análise na probabilidade, conhecida como o *Teorema para Probabilidades Condicionais*, ou apenas como *Teorema de Bayes*, que "consiste em determinar a probabilidade dos acontecimentos perante certas condições iniciais" (JUNQUEIRA, 2015, p. 4), condições estas que foram além da experimentação realizada por matemáticos anteriormente.

Segundo Junqueira (2014, p. 75) "No campo profissional e até mesmo na vida cotidiana, tomar boas decisões em situações de incerteza é em grande parte baseada no raciocínio condicional", ainda sobre o ponto de vista dessa autora, o ensino da probabilidade mostra a existência de intuições incorretas, equívocos de raciocínio e erros de compreensão e aplicação do conceito de probabilidade condicional, "alguns deles já bastante difundidos e que o ensino formal de probabilidade é insuficiente para superá-los. É necessário tomar consciência destas dificuldades e aprender a lidar com os problemas condicionais com ferramentas adequadas".

De acordo com Retrespo e González (2003, tradução nossa), Bayes escreveu o livro *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (Ensaio para solucionar um problema no Doutrina das chances), que foi publicado em 1764 no livro Filosófico Transações da Royal Society de Londres, observa-se que foi publicado três anos após sua morte, este livro "foi uma obra que o imortalizou entre os estatísticos, economistas e cientistas sociais" (JUNQUEIRA, 2014, p. 71), entre diversos trabalhos enfatizando a probabilidade condicional.

Os trabalhos publicados, por Thomas Bayes, possibilitaram certos aspectos para o cálculo das probabilidades, ao referir-se ao uso da nova informação para rever probabilidades baseadas em informações mais antigas ou à comparação de *probabilidades a posteriori* com a *probabilidade a priori*, Bayes associou um modo de revisão das probabilidades tendo em conta novas evidências (ALMEIDA, 2005), buscando determinar o Teorema de Bayes para solucionar ou quantificar novas informações.

Junqueira (2014, p. 72) apresenta um exemplo que ilustra a condição estabelecida por Bayes, por meio do seguinte problema: "*Dado um determinado número de bolas brancas e pretas em uma urna, qual é a probabilidade de se tirar uma bola preta?"* Segundo a autora esse é um tipo de problema que se enquadra na *probabilidade a posteriori*.

No entanto, Bayes direcionou sua atenção para o inverso deste tipo de problema, pois considerou que se "*Uma vez que já se retirou uma ou mais bolas da urna, o que pode ser dito sobre o número de bolas brancas e pretas na urna?*" (JUNQUEIRA, 2014, p. 72). Bayes buscou solucionar problemas dessa natureza em seus estudos.

A proposta de solução apresentada por Bayes, foi "Dado o número de vezes nas quais um acontecimento desconhecido ocorreu e falhou. Requerido o acaso da probabilidade da sua ocorrência numa única tentativa estar algures entre quaisquer dois graus de probabilidade que podem ser designados" (KATZ, 2010, p. 774). O objetivo era calcular: $P(r < x < s|X)$, onde, X - representa o número de vezes que um acontecimento ocorreu em n tentativas, x - é a probabilidade das ocorrências numa única tentativa, r e s - são as duas probabilidades designadas (KATZ, 2010).

Segundo Katz (2010, p. 774) Bayes estabeleceu "que a probabilidade de ocorrência de dois acontecimentos subsequentes é um rácio composto da probabilidade do primeiro, e da probabilidade do segundo supondo que o primeiro ocorra" e com essa condição definiu o

Teorema para Probabilidades Condicionais: $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$. Sendo que a probabilidade de E se F ocorreu é igual ao quociente da probabilidade da ocorrência conjunta pela probabilidade de ocorrência de F, nessa condição Bayes precisava encontrar uma forma de calcular as probabilidades de $P(E \cap F)$ e de $P(F)$ (KATZ, 2010).

De acordo com Katz (2010), Bayes representou um quadrado e começou a modelar as probabilidades pelas áreas que dispõe e calculou a probabilidade como: $P(E \cap F) = P\big((r < x < s) \cap (X = p)\big)$, representado pela área total no intervalo que ele estabeleceu e para o $P(F)$ estabeleceu como $P(F) = P(X = p)$ e por fim concluiu que das suas proposições implicaria na seguinte fórmula: $P(E|F) = P((r < x < s)\,|(X = p)) = \frac{\int_r^s \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}\, dx}{\int_0^1 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}\, dx}$.

Segundo Laplace (2010, p. 216) Bayes “buscou diretamente a probabilidade de que as possibilidades indicadas por experiencias já realizadas estivessem compreendidas em limites dados; conseguiu isso de maneira elegante e muito engenhosa, embora com um pouco de embaraço”. De acordo com Katz (2010) O problema proposto por Bayes foi formalmente por ele solucionado, mas ainda, havia obstáculos para considerar que sua resposta tivesse utilidade prática, quais eram:

- Será que a analogia física feita por Bayes do lançamento de bolas sobre uma mesa espelha os verdadeiros problemas aos quais a teoria seria aplicada?
- Será que “os integrais da fórmula de Bayes podem de facto ser calculados? (KATZ, 2010)

Tais obstáculos foram explicados e resolvidos por Bayes, mas houve questionamentos de outros pesquisadores sobre sua aplicação no geral.

Segundo Junqueira (2014, p. 71) o Teorema de Bayes tem sua importância para pesquisas sobre probabilidade, entretanto o livro *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, caiu no esquecimento, “sendo resgatado mais tarde pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace, que o revelou ao mundo”.

Em 1733, com os avanços que a matemática proporcionava na época junto as ideias de matemáticos, apresenta-se um novo ramo na Teoria da Probabilidade, conhecida como *Probabilidade Geométrica,* introduzida pelo matemático **Georges Louis Leclerc (1707-1788),** nascido em Montbard, na França, de pseudônimo Conde de Buffon.

Segundo Vidarte, Chachapoya, Cavalari (2021), para conhecimento geral a respeito da probabilidade geométrica, o Conde de Buffon publicou um artigo na Academia Real de

Ciências e 1777 ele fez correções neste artigo e o publicou novamente, no *Essai d'Arithmétique Morale*[14] e com isto elevou-se a utilidade da aplicação desta teoria na matemática.

Neste artigo, Conde de Buffon propõe uma situação conhecida como "problema da agulha de Buffon", considerado o primeiro problema de Probabilidade Geométrica, pois para sua solução requeria um método geométrico ao invés do clássico método combinatório" (VIDARTE, CHACHAPOYA, CAVALARI, 2021, p. 90), tal problema consistia na seguinte situação: "*Em uma mesa em intervalos d são traçadas retas paralelas. Uma agulha de comprimento l menor que d é lançada ao acaso sobre a mesa, qual é a probabilidade de que a agulha toque uma das linhas paralelas?"* (DÖRRIE, 1965, p. 73, tradução nossa).

Vidarte, Chachapoya e Cavalari (2021, p. 90) ressaltam que para a resolução da situação a respeito da Probabilidade Geométrica, precisava-se "considerar que os pontos aleatórios, devem ser distribuídos uniformemente em um determinado domínio", ainda segundo estas autoras, a probabilidade aplicada nesta situação pode ser "entendida como a razão entre a área (comprimento ou volume) desejada (evento favorável) e a área total".

Assim, a expressão determinada pelo Conde de Buffon é:

$$P(A) = \frac{Medida\ em\ A}{Medida\ em\ \Omega}$$

De acordo com Vidarte, Chachapoya e Cavalari (2021, p. 90): A é um ponto escolhido aleatoriamente, como o comprimento ou área e Ω é um subconjunto do espaço n-dimensional e A um subconjunto de Ω. Problema que foi solucionado pelo próprio Conde de Buffon, que respondeu e orientou a forma de como deveria ser jogado.

Nesse período o matemático e cientista **Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783),** Nascido em Paris, na França, segundo Lintz (2007) a data precisa de nascimento é desconhecida, pois ele foi encontrado recém-nascido na porta da igreja de Saint Jean Le Rond, onde um gendarme o recolheu e o batizou com o nome do local. Mais tarde, por razões desconhecidas, adotou o nome de D'Alembert.

D'Alembert contribuiu significativamente para o avanço da teoria da probabilidade, com diversas publicações em seu nome. No entanto, é importante destacar que, assim como qualquer pesquisador, ele também cometeu equívocos em alguns de seus estudos. De acordo

[14] Tradução: Ensaio sobre aritmética moral (VIDARTE, CHACHAPOYA, CAVALARI, 2021, p. 90).

com Eves (2011) um desses equívocos ocorreu em sua análise do lançamento de duas moedas, pois, ele

> sustentou que a probabilidade de se conseguir uma cara em dois lançamentos consecutivos era de 2/3, por entender que haveria apenas três casos possíveis equiprováveis, ou seja, C, KC e KK. Na verdade, ao pensar num primeiro lançamento sendo cara, nem cogitou o segundo lançamento neste caso, por já ter obtido o resultado esperado (EVES, 2011, p. 71).

O "erro" cometido por D'Alembert, ocorreu por não considerar todos os possíveis resultados ao lançar duas moedas, ou seja, as sequencias que formam o espaço amostral, de acordo com Mlodinow (2009) sobre este "erro" não se deve considerar 0, 1 ou 2 caras como resultados possíveis, pois na verdade há 4 possibilidades possíveis que formam o espaço amostral no lançamento de duas moedas, sendo: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa). Análise que Cardano sabia fazer muito bem, por que,

> Naturalmente, para um matemático, um erro traz apenas um certo embaraço, mas para um apostador é uma questão vital. Assim, é compreensível que, quando estamos falando da primeira teoria sistemática da probabilidade, o primeiro a desvendar a coisa tenha sido Cardano o apostador (MLODINOW, 2009, p. 65).

Neste momento da pesquisa, encontra-se os estudos e publicações das experiências e pesquisas de **Pierre Simon Laplace (1749-1827)**, nascido na cidade de Beaumont-en-Auge, Normandia, na França, pertencente a uma família nobre e rica. Laplace estudou na Universidade de Caen, matriculou-se na faculdade de Arte, com o intuito de seguir para a faculdade de teologia, mas em 1768 desistiu e seguiu para Paris, para continuar seus estudos e consequentemente arrumar um emprego.

Segundo Gillispie (2007) os professores de Laplace o incentivaram a seguir carreira fora da igreja, devido ao seu excelente conhecimento em matemática, tanto que lhe deram uma carta de recomendação direcionada ao matemático D'Alembert informando o seu expressivo potencial. De acordo com Eves (2011) a carta de recomendação não surtiu o efeito esperado, então, Laplace escreveu, uma carta direcionada ao secretário permanente da Academia de Ciências na França, ao Senhor D'Alembert,

> Onde expôs brilhantemente os princípios gerais da mecânica. Foi o quanto bastou e d'Alembert lhe respondeu: "Senhor, como percebeu, quase não dei atenção às suas cartas de recomendação. Elas, porém, não eram necessárias; o senhor soube se apresentar muito melhor". Poucos dias depois Laplace era designado professor de matemática da Escola Militar de Paris (EVES, 2011, p. 486).

De acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 21) Laplace "ficou conhecido pela sua curiosidade universal que o levou a investigar quase todas as áreas do conhecimento, alcançando os seus resultados mais exitosos tanto na mecânica celeste como na teoria das probabilidades", foi por meio de seus trabalhos, que os jogos de azar, ganharam um reconhecimento, sendo analisado por meio de cálculo probabilísticos, em diferentes campos de estudos e assim conseguiu introduzir a teoria da probabilidade no mundo da matemática.

Laplace é considerado um dos cientistas mais influente da história da matemática, "Sua carreira foi importante pelas contribuições técnicas para as ciências exatas, pela visão filosófica que desenvolveu na exposição de seu trabalho e pelo papel que exerceu na formação das modernas disciplinas cientificas" (GILLISPIE, 2007, p. 1431), ele foi um dos maiores homens das ciências de todos os tempos, e

> Integrou uma época dourada do pensamento francês. Laplace tinha uma firme convicção determinista acerca da natureza. No entanto tinha também a convicção que a possibilidade de o conhecimento humano alcançar a certeza está "completamente" vedada. O melhor que poderá aspirar é alcançar um conhecimento provável. Para o homem existem muitas coisas que são incertas e algumas que são mais ou menos prováveis. Nesta conformidade, e atendendo a esta dificuldade humana, há que compensar a insuficiência de conhecimento determinando distintos graus de aparência (LAPLACE, 1974, p. 114).

Laplace afirma que "devemos à debilidade da mente humana uma das mais delicadas e engenhosas teorias matemáticas: a ciência do azar ou probabilidade" (LAPLACE, 1974, p. 114), assunto do qual se dedicou a estudar e escrever diversos artigos, concomitantemente com outros assuntos de seus interesses, do qual se dedicou por um longo período, vivendo suas experiências e compartilhando delas com outros matemáticos.

Laplace em seus estudos iniciais "estabelece com clareza o sentido das palavras *acaso* e *probabilidade"*. Da primeira palavra, ele definiu que não tem realidade em si, quando nela não se ver nada de regular, quando não se conhece as causas que a acarretam; e da segunda palavra, definiu como um conjunto de objeções à probabilidade, como as que não são possíveis quantificar, como esperança, medos e estados mentais (GILLISPIE, 2007, p. 1442).

Em 11 de agosto de 1780, Laplace enviou uma carta ao matemático Lagrange, com o intuito que pudessem descobrir um "método de buscar as causas por trás dos eventos [...] rever toda a situação da probabilidade inversa, pertinente a uma "metafísica muito delicada", cuja utilização seria indispensável para que a teoria da probabilidade fosse aplicada à vida em sociedade" (GILLISPIE, 2007, p. 1461), neste momento, era significativo conseguir algo que envolvesse a relação entre utilidade e possibilidade para a realidade.

Diante deste contexto, duas relações eram pertinentes à Laplace, como "a tarefa de calcular a probabilidade de eventos complexos, compostos de eventos elementares cujas respectivas possibilidades não eram conhecidas" e "determinar numericamente a influência que acontecimentos passados exerciam na probabilidade de acontecimentos futuros" (GILLISPIE, 2007, p. 1461), para Laplace com relações bem definidas, seria possível elaborar uma lei que pudesse revelar as causas desses acontecimentos.

Segundo Gillispie (2007) Laplace, nesse caso, necessitou aprimorar sua epistemologia, na teoria do acaso, para distinguir o procedimento e prática que estava sendo utilizada, pois na abordagem para determinar as possibilidades de um evento, tinham sido determinadas na seguinte condição: *A priori* – pela suposição da possibilidade igual; *A posteriori* – por experimentos repetidos; Por quaisquer razões que se tivesse para julgar a ocorrência provável do evento, ou seja pelas possiblidades em relação às nossas informações (GILLISPIE, 2007).

Em respeito a possibilidade absoluta, da condição *a priori*, Laplace indicou que era formado pelo *conjunto* de fatores que produzem um evento, "Alguns são diferentes em todas as ocasiões, como os movimentos exatos da mão ao lançar dados. É o efeito global desses fatores que chamamos de acaso. Outros fatores são constantes, como a habilidade relativa dos jogadores ou o peso dos dados" (GILLISPIE, 2007, p. 1461). Laplace se dedicou em estudar cada aspecto relevante das condições para avançar com os estudos da probabilidade, levando-o a observar que o conhecimento humano também era um dos fatores, pois considerou que,

> A situação do conhecimento entrava na determinação da probabilidade em dois níveis: no que sabemos (possibilidade relativa) sobre a possibilidade absoluta (fatores invariantes) dos eventos e em nosso desconhecimento das leis que sempre parecem produzir os eventos fortuitos (GILLISPIE, 2007, p. 1462).

Este foi um acerto inovador no que Laplace buscava, para desenvolve a teoria de compreender as estimativas das causas a partir dos efeitos, aplicados a vida real[15], que o fez solucionar o primeiro obstáculo, ele tomou como exemplo estatístico, os dados populacionais, de interesse público, dados sobre nascimentos, casamentos e óbitos, tendo informações reais sobre uma situação real, pois "o superintendente geral das finanças, Abade Terray, instruiu todos os intendentes das províncias a ordenarem que os números de seus dados gerais fossem anualmente compilados e a transmitirem os resultados regulamente a Paris, para que o governo pudesse dispor de informações precisas sobre toda a população" (GILLISPIE, 2007, p. 1462). Eis de fato um exemplo de uma situação puramente real.

Dos dados publicados entre 1709 e 1770 em Paris, mostrava que "haviam nascido 251.527 meninos e 241.945 meninas; a proporção de aproximadamente 105 para 101 manteve-se praticamente constante ano a ano" (GILLISPIE, 2007, p. 1462), informações essenciais para

[15] Laplace não mencionava sobre a teoria e os problemas de Bayes, entretanto "Condorcet mencionou Price e Bayes no resumo da memória laplaciana" **(**GILLISPIE, 2007, p. 1462).

que Laplace aplicasse a sua teoria. Então, a partir desses dados, ele formulou a probabilidade do nascimento de um menino como $\frac{p}{(p+q)}$, onde p é o nascimento de menino e q o nascimento de menina (GILLISPIE, 2007).

De acordo com Gillispie (2007), Laplace determinou que a probabilidade de nascer um menino, estava nos limites $\frac{p}{(p+q)} + \theta$ e $\frac{p}{(p+q)} - \theta$, onde θ era uma quantidade muito pequena, para esta situação, então Laplace "representou a integral definida de P por uma série altamente convergente, a qual, ao ser calculada, reduzir-se a unidade, quando p e q tornam-se infinitos" (Ibid., p. 1462), então ele tomou a seguinte integral definida: $\int x^p (1-x)^q dx$, onde x é a probabilidade de nascimento de um menino e $(1-x)$ a probabilidade de nascimento de uma menina, Laplace pretendia com esses dados, determinar a probabilidade de que x se enquadre em limites arbitrário.

Em seguida atribuiu valores para $x = 1$ e $x = 0$ e p e q muito grande, considerou que $y = x^p(1-x)^q$. Integrando $ydx = \frac{x(1-x)}{p-(p+q)x}dy$, onde $p = \frac{1}{\alpha}$ e $q = \frac{\mu}{\alpha}$, sendo α uma fração muito pequena, ficando $ydz = azdy$ em que: $z = \frac{x(1-x)}{1-(1+\mu)x}$ para qualquer que fosse o valor de z, Laplace aplicou: $\int ydx = C + ayz \left\{1 - a\frac{dz}{dx} + a^2\frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3\frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \ldots\right\}$, em que C é uma constante arbitrária que depende do valor inicial de: $\int ydx$, onde, os valores desta integral, fornecidos por Laplace, estão entre os limites: $x = 0$ e $x = \frac{1}{(1+\mu)} - \theta$, desde que a fosse muito menor do que θ^2 (GILLISPIE, 2007).

Laplace definiu que se $x = 0$, e fazendo $y = 0$ e $z = 0$, transformou a série:

$$\int ydx = C + ayz \left\{1 - a\frac{dz}{dx} + a^2\frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3\frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \ldots\right\}$$

em

$$\int ydx = \frac{a\mu^{q+1}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}}{\theta(1+\mu)^{p+q+3}} \mathrm{x} \left\{1 - \frac{a[\mu+(1+\mu)^2\theta^2]}{\theta^2(1+\mu)^3} + \ldots\right\}$$

"série que indicava os limites entre os quais o valor de $\int ydx$ estava contido, valor inferior ao primeiro termo entre colchetes e maior do que a soma dos dois primeiros termos" (GILLISPIE, 2007, p. 1463). Entretanto, Laplace também utilizou outra demonstração para a série:

$$\int ydx = C + ayz \left\{1 - a\frac{dz}{dx} + a^2\frac{d(zdz)}{dx^2} - a^3\frac{d[zd(zdz)]}{dx^3} + \ldots\right\}$$

que fornecia valores da integral $\int ydx$ para: $x = \frac{1}{(1+\mu)} + \theta$, até $x = 1$, com este caso "Laplace provou que, quanto mais aumentavam p e q mais diminuía α, e que a diferença entre P e a unidade era proporcional a α" (GILLISPIE, 2007, p. 1463), aplicando assim, a diferença podia ser reduzida abaixo de qualquer grandeza dada. Ainda segundo este autor, Laplace calculou a probabilidade para o nascimento de menino em Paris, chegando a seguinte solução:

> Calculando a probabilidade de que a possibilidade de um nascimento masculino em Paris fosse maior do que 0,5, Laplace constatou que ela era inferior à unidade pela fração de $1{,}1521$ x 10^{-13}. Calculou ainda que a probabilidade de, em um dado ano, o número de meninas deixar de ultrapassar o de meninos era de $\frac{1}{259}$ em Paris (GILLISPIE, 2007, p. 1463).

Segundo Gillispie (2007) Laplace elaborou "um *método* para encontrar soluções numéricas para um tipo de problema cujas soluções analíticas continham termos elevados a potências tão altas que as expressões se tornavam inviáveis quando se usavam número nas fórmulas, em lugar de sinais" (GILLISPIE, 2007, p. 1463). Este método também podia ser aplicado ao cálculo prático de eventos futuros, dada a experiência do passado, extraindo dados de fontes reais, como este exemplo da população, que por fim foi considerado dentro da inferência estatística (Ibid., p.1463).

Gillispie (2007) evidência que pela aplicação da probabilidade aos estudos populacionais, Laplace estaria ampliando a teoria da probabilidade além dos jogos de azar, ademais foi nestas situações de repetições que "o levara a compreender, inicialmente, a inconveniência de avaliar fórmulas em que era preciso substituir o número desses eventos para chegar a uma solução numérica" (GILLISPIE, 2007, p. 1522), precisava com isso de um *método geral* para "reduzir o termo médio de um binômio, elevado a uma potência alta, a uma série de convergente" (Ibid., 1522). foi nestas condições que o método fornecido por Laplace,

> Transformava as integrais de equações diferenciais lineares, ou equações de diferenças finitas, fossem parciais ou ordinárias, em séries convergentes, quando se usavam grandes números nos termos incluídos sob o sinal da integral, sendo tão maiores os números quanto mais convergente era a série. Entre as fórmulas que ele pudera transformar dessa maneira, a mais notável era a da diferença finita da potência de uma variável (GILLISPIE, 2007, p. 1522).

Laplace considerou esta aplicação ao problema das urnas, que se remete a duração de uma partida, no caso de jogos de azar e "Com isso, enfatizou a vasta utilidade do método na teoria do acaso, dizendo que seu objetivo era a média a ser escolhida entre os resultados fornecidos por diferentes conjuntos de observações" (GILLISPIE, 2007, p. 1524).

Em conformidade com as ideias e os estudos de Laplace a respeito da teoria da probabilidade, Gillispie (2007, p. 1437) destaca sobre uma aposta realizada na loteria da Escola

Militar, com o seguinte enunciado: "*Qual era a probabilidade de que todos os números* $1,2,3,\ldots,n,$ *fossem tirados após* x *sorteios*?" (Ibid., p. 1437).

Laplace solucionou este problema, reformulando-o em uma série recursivo-recorrente com dois índices variáveis, pois observou "que esta abordagem poderia ter uma vasta aplicabilidade na teoria do acaso, na qual os problemas mais difíceis frequentemente concerniam à duração dos eventos" (Ibid., p. 1437) especificamente a probabilidade inversa como assim determinou.

> A probabilidade de um evento é igual à soma de cada caso favorável, multiplicado por sua probabilidade, dividida pela soma dos produtos de cada caso possível, multiplicado por sua probabilidade, e, quando cada um dos casos é igualmente provável, a probabilidade do evento é igual ao número de casos favoráveis, dividido pelo número de todos os casos possíveis (GILLISPIE, 2007, p. 1437).

De uma proposição atribuída por Cardano, reforçada por Jacob Bernoulli e por De Moivre, Laplace, então, organizou, completou e cientificamente deu a probabilidade inversa uma definição, e não tomou pra si como se fosse o descobridor dessa definição, tanto que em Gillispie (2007, p. 1439) Laplace afirma que "era novidade "em muitos aspectos" e concordou com as observações do prefácio de Condorcet, no sentido de que a abordagem "era ainda" mais digna de ser desenvolvida, sobretudo por esse ponto de vista, a ciência do acaso poderia ser útil na vida dos cidadãos", apresentando-a, a partir de então, outros olhares à teoria da probabilidade.

Segundo Gillispie (2007, p. 1439) esta definição "forneceria a base para se calcular a probabilidade de um evento futuro a partir da experiencia passada", proposta que foi definida por Bayes. De acordo com Katz (2010, p. 778) "a fórmula de Bayes fornece um ponto de partida para responder à questão de base da inferência estatística" e se remeteu a Lei dos grandes números, definida por Jacob Bernoulli, embora Laplace não tenha citado nem um dos dois nomes, respondeu, no que chamou de,

> Uma "prova curiosa", ele mostrou que os números $p+q$ podiam ser considerados tão grandes que levariam a tão perto da certeza quanto se desejasse, a probabilidade de que a proporção de cédulas brancas no total ficasse entre $\frac{p}{p+q}+\omega$ e $\frac{p}{p+q}-\omega$, sendo ω inferior a qualquer magnitude dada (GILLISPIE, 2007, p. 1439-1440).

A partir de Laplace houve um amadurecimento das propostas existentes na teoria da probabilidade, ele organizou e ampliou este estudo de uma forma que não tinha sido atribuída por outros. Na maior parte dos casos, sabe-se que a probabilidade começou com situações práticas da vida, Laplace, buscou compreender essas estimativas das causas a partir dos efeitos, proposta que foi feita por Bayes, mas ele encontrou dificuldades que o impediram de aplicar seu teorema a problemas cotidianos (GILLISPIE, 2007).

Em suas análises Laplace encontrou dois obstáculos, sobre a falha na aplicação do teorema de Bayes, um de ordem prática, sobre a experiência que não era ampla ou controlada para fornecer valores verdadeiros das propriedades a *priori,* e o outro de ordem analítico, mas para obter resultados, era necessário integrar equações diferenciais (GILLISPIE, 2007, p. 1462). Laplace, empenhou-se em encontrar soluções para esses obstáculos, tomando como exemplo a aplicação de inferências estatísticas, com a finalidade de determinar leis que revelavam as suas causas.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 215) Laplace deu um intervalo de tempo em seus estudos sobre probabilidade, retornando em 1809 para rever "a análise do erro provável ao reunir dados científicos", aprofundando suas ideias e teorias sobre a sua aplicabilidade. Neste retorno aos estudos sobre este tema, publicou o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), o qual teve três publicações. Segundo Gillispie (2007) sua primeira versão foi publicada em 23 de Março de 1812, trazendo novas ideias para aplicar a teoria das probabilidades.

Nesta obra Laplace "concentra os avanços conseguidos à época e marca um patamar no desenvolvimento do cálculo das probabilidades. Sua contribuição é tão forte que alguns aspectos "clássicos" do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome" (ALMEIDA, 2005, p.14-15). Segundo Gillispie (2007), Laplace passou do cálculo da probabilidade para as propriedades da probabilidade, pois dos seus estudos,

> É lícito dizer que ele organizou o tema, reunindo os principais tipos de problemas da teoria do acaso já abordados por muitos matemáticos, inclusive ele mesmo, de maneira meio fortuita, e tornando a abordá-los em conjunto com problemas das novas áreas de aplicação na filosofia da ciência, na astronomia, na geodésia, na instrumentação, na teoria dos erros, nas estimativas populacionais E nos procedimentos de foros judiciais e órgãos eleitorais (GILLISPIE, 2007, p. 1526).

Este "foi o primeiro estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade, partindo de problemas antigos e amiúde triviais para áreas em que, até então, a quantificação fora inexistente ou quimérica" (GILLISPIE, 2007, p. 1527). De acordo com Gillispie (2007) a *Théorie Analytique des Probabilités* é um tratado em 4 volumes com 464 páginas, onde na primeira edição é divido em duas partes, que ocupa 2/3 do volume aplicados às soluções de uma quantidade significativa de problema de probabilidade, envolvendo jogos de azar, probabilidade da causa, seguro e demografia.

Na primeira parte, Laplace aborda sobre o cálculo das funções geratrizes e integrais definidas, segundo Gillispie (2007, p. 1526) "as duas teorias são ramos de único cálculo, uma voltada para a resolução das equações a diferenças finitas em que são formulados problemas de acontecimentos ao acaso, a outra para a avaliação das expressões que resulta quando os eventos se repetem muitas vezes", ele já utilizava essas teorias a trinta anos, então foi organizando e melhorando até apresentar de forma mais geral e abrangente, dando maior ênfase à passagem de quantidades finitas e de quantidades reais para imaginárias (GILLISPIE, 2007).

Laplace organizou os princípios gerais da probabilidade, a definição, a regra da multiplicação as probabilidades de eventos independentes, o teorema sobre a probabilidade das causas, analise sobre a distinção entre a expectativa matemática e a expectativa moral, ele forneceu com seu estudo uma "caracterização da probabilidade como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana, e que servia para corrigir parcialmente suas deficiências" (GILLISPIE, 2007, p. 1527), buscando aplicação de métodos a eventos práticos, formulando e reformulando problemas desta natureza, deste,

> Problemas reais, discutidos nos primeiros capítulos, também consistem, em parte, em exemplos reelaborados a partir daqueles e de outros textos anteriores sobre a teoria do acaso. Laplace resolveu usando as funções geratrizes e os dispôs não por seu próprio interesse, mas para ilustrar a tipologia dos problemas na probabilidade em geral, entretanto novos conteúdos onde a metodologia os tornava apropriado (GILLISPIE, 2007, p. 1527).

Neste livro, "Laplace atribui uma importância ainda maior a fecundidade que vinha descobrindo cada vez mais no processo de passado as quantidades reais para as imaginárias, e discute esses procedimentos na seção de transição entre a primeira e a segunda partes" (GILLISPIE, 2007, p. 1526). Na probabilidade as quantidades imaginárias eram bastante frequentes e foi nelas que Laplace se embasou para utilizar integrais definidas, pois, "Os limites das integrais definidas a serem convertidas em séries convergentes são dados pelas raízes de uma equação tal que, quando os sinais dos coeficientes são trocados, as raízes tornam-se imaginárias" (GILLISPIE, 2007, p. 1526), onde ele necessitou definir duas quantidades transcendentes como π e e para utilizar este procedimento.

Segundo Katz (2010) Laplace utilizou a definição proposta desde Cardano, como sendo "a razão do número de casos favoráveis e o número de casos possíveis", incluindo também a demonstração do teorema do limite central e sua aplicação à questão das inclinações das órbitas dos cometas. Laplace "era de opinião que a teoria das probabilidades podia vir a ter implicações nas ciências sociais, do mesmo modo que o cálculo era o maior instrumento de matematização das ciências físicas” (KATZ, 2010, p. 979). De diversos problemas que Laplace formulou, reformulou, extraiu e outras situações, cita-se em Gillispie (2007) que,

> Em uma discussão do antigo problema de **determinar a probabilidade de que todos os n números de uma loteria saiam pelo menos uma vez em i sorteios, tirando-se r bilhetes a cada sorteio**, ele citou o exemplo da loteria nacional francesa, composta de noventa números, sorteados cinco em cinco. Laplace passou então a outros **problemas clássicos de probabilidade** direta**: de números pares e ímpares ao se tirarem bolas de uma urna, de extração de um dado número de bolas de determinada cor a partir de misturas em várias urnas, de ordem sequências na retirada de bolas numeradas**, de divisão de prêmio e de derrota ou Vitória de um de 2 jogadores em jogos regulamentares (GILLISPIE, 2007, p. 1527, grifo nosso).

Laplace apresentou, sua ideia de resolução dessas situações estabelecendo ligações entre cada estratégia que explica detalhadamente a combinação e a expressão para determinar a probabilidades dos eventos (GILLISPIE, 2007).

No terceiro capítulo, Laplace aborda sobre os limites, nas definições de frequências da probabilidade e apresenta “as leis de probabilidade resultante da multiplicação infinita dos eventos. Nenhuma passagem é tão clara e definida quanto sua derivação do teorema central do limite, na maioria sobre a aproximação dos valores da fórmula com números muito grandes” (GILLISPIE, 2007, p. 1529).

Por exemplo, Laplace propôs um problema de binômio: “as probabilidades de dois eventos, a e b, são, respectivamente, p e $1-p$. A probabilidade de que a ocorra x vezes e de que b ocorra x' vezes em $x+x'$ tentativas é dada pelo $(x'+1)$-ésimo termo do binômio $[p+(1-p)\,]^{x+x'}$” (GILLISPIE, 2007, p. 1529).

Laplace utilizou a fórmula: $n = x + x'.\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi x x'}} e^{\frac{-nl^2}{2xx^2}}$, quando $t = \frac{l\sqrt{n}}{2xx'}$ a soma de todos os pares é $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\prime^2} dt + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi x x'}} e^{-\prime^2}$(Ibid., p. 1529).

Em sua análise, Laplace descreve que aproximações a serem consideradas como: limite da probabilidade *a priori* do evento a e a proporção de ocorrências de a em relação ao número total de eventos esteja contida dentro de um certo limite, para este caso, à medida que os eventos se repetem, tendo o limite permanecido o mesmo, a probabilidade aumenta (GILLISPIE, 2007).

Laplace também identificou situações que podem ocorrer como se “A probabilidade se mantivesse a mesma, os limites ficam mais próximos. Quando o número de eventos chega ao infinito, os limites convergem para um ponto e a probabilidade transforma-se em certeza” (GILLISPIE, 2007, p. 1529). Outro sim sobre estes termos, Gillispie (2007) enfatiza que “levaram os leitores modernos a achar que, de algum modo, Laplace devia ter uma ideia (ou talvez uma convicção reprimida) de que ocorriam processos aleatórios na própria natureza. Eles não eram apenas decorrentes da nossa ignorância" (GILLISPIE, 2007, p. 1529).

Um dos problemas, utilizados para esta explicação foi utilizando equações diferenciais parciais, sobre o problema das urnas, exemplo que "gira em torno de uma sucessão de urnas" (GILLISPIE, 2007, p. 1530). Uma urna com todas as bolas brancas e outra urna somente com bolas pretas, o que Laplace pretendia era provar que,

> Se uma bola for retirada de uma urna qualquer e colocada em sua vizinha, e se esta for sacudida, e dela se retirar uma bola e esta for colocada na seguinte, e assim por diante, num número indefinido de vezes em todo o círculo, a proporção entre bolas brancas e pretas em cada urna acabará sendo idêntica à proporção de bolas pretas e brancas em todas elas (GILLISPIE, 2007, p. 1530).

No quarto capítulo, Laplace abordou sobre a probabilidade do erro, que começa pela,

> Determinação de que a soma de um grande número de erros – equivalente à distribuição das somas de variáveis aleatórias – estará contida em determinados limites, supondo-se uma lei conhecida e equipossível dos erros. continua com a probabilidade de que a soma dos erros (mais uma vez, equivalente a variáveis ao acaso), todos considerados positivos, e de seus quadrados e cubos, esteja contido em determinados limites (GILLISPIE, 2007, p. 1530).

Segundo Gillispie (2007, p. 1530) Laplace é "levado ao problema de corrigir valores aproximativamente conhecidos pelos resultados de um grande número de observações", assim passou a "considerar o problema como idêntico àqueles em que se exigia que a probabilidade do erro médio em um grande número de observações se enquadra dentro de certos limites" (Ibid., p. 1422). Analisando que poderia ocorrer um "erro" pela quantidade de observações que identificou, quando realizou o cálculo sobre a amostra populacional, afirmando que neste cálculo existia um erro que ficaria dentro de certos limites. Segundo Gillispie (2007) Laplace pôde mostrar que,

> Repetindo as observações um número indefinido de vezes, seu resultado médio convergia para um limite tal que, se um intervalo igual em qualquer dos lados fosse tão reduzido enquanto se aprouvesse, a probabilidade de resultado estar contido nesse intervalo se aproximaria tanto da certeza de que a diferença seria inferior a qualquer magnitude calculável. Se os erros positivos e negativos eram igualmente possíveis, esse termo médio era indistinguível da verdade (GILLISPIE, 2007, p. 1522).

Segundo Gillispie (2007) Laplace presumiu que a equipossibilidade do erro seguia uma lei, pois era convicto que todo evento era efetivamente determinado pelas leis gerais do universo e só é provável em relação ao nosso conhecimento (GILLISPIE, 2007), deste modo, estabeleceu a fórmula $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{2k'}}\int e^{\frac{k}{2k'}r^2}\,dr$, determinando que $\phi\left(\frac{x}{h}\right)$ é a probabilidade do erro $\pm x, k$ é $\int_{-h/2}^{h/2}\phi\frac{x}{h}\,dx$ e k' é $\int_{-h/2}^{h/2}\frac{x^2}{h^2}\phi\frac{x}{h}\,dx$. No entanto,

> A propriedade só passava a ter validade geral quando cada um dos resultados, dos quais ele fornecia a média, dependia de um número muito grande de observações. Sua base tinha que ser estatística (termo que Laplace não empregou), e só então poderia ser derivada da teoria da probabilidade e empregada, quaisquer que fossem as distribuições de erros dos instrumentos ou das observações (GILLISPIE, 2007, p. 1523).

Tal situação foi mais tarde estudada e aplicada por outros matemáticos, precisamente em estimativas estatísticas. De acordo com Gillispie (2007), Gauss e Legendre utilizaram a fórmula do erro em suas teorias e aplicações. Com a teoria do erro, Laplace buscava minimizar os efeitos necessários na equação feito pelas observações, pois sabia que elas estavam "sujeitas a erro, cujo efeito tinha quer ser minimizado. Era preciso considerar um número enorme delas, para que os erros pudessem compensar-se mutuamente nos valores deduzidos do número total" (GILLISPIE, 2007, p. 1525).

Laplace teria que saber como combinar essas equações e segundo Gillispie (2007) Laplace sabia que para isso precisava determinar fatores onde a probabilidade de erro, fosse mínima para cada elemento, definindo o "erro médio como o produto do valor de cada erro multiplicado por sua probabilidade" (GILLISPIE, 2007, p. 1525). No mais, esta definição para Laplace também servia para determinar correções, de acordo com Gillispie (2007) esta seria uma abordagem de regressão linear e não de abordagem bayesiana como é conhecida.

Laplace então seguiu e expôs "pela primeira vez as aproximações de fórmulas com grandes números [...] mostrando como avaliar diversas classes de integrais definidas, que usou, em termos de quantidades transcendentes" (Ibid., p. 1524) apresentando um método direto e geral para avaliar problemas representativos da teoria da probabilidade e "ofereceu um cálculo para estimar o efeito da varíola na taxa de mortalidade e o efeito da vacinação na expectativa de vida" (Ibid., p. 1532). No quinto capítulo Laplace,

> discute a aplicação da probabilidade à investigação dos próprios fenômenos e de suas causas, na qual ela serviria para estabelecer a importância física dos dados em meio a todas as complexidades do mundo. Essa abordagem oferece exemplos práticos de sua ideia de como o assunto se relacionava com o saber e a ignorância com a ciência e a natureza (GILLISPIE, 2007, p. 1524).

Considerando a existência e os limites dos fenômenos como objetos de cálculo e calculando a probabilidade de exemplos que exigiam uma observação longa e frequente, Laplace pretendia expressar sua confiança nas observações que em algum momento poderia ser suficiente (GILLISPIE, 2007). Em geral sua convicção era determinar que "a mesma análise poderia, em princípios, aplicar-se a questões médicas e econômicas e até em problemas de moral, pois a operação das causas muitas vezes repetidas era tão regular nesses campos" (GILLISPIE, 2007, p. 1524).

O capítulo sexto, aborda sobre "a probabilidade das causas e eventos futuros, extraída de eventos observados" (Ibid., p. 1531). Referindo-se a problemas de inferência estatística, no geral representa uma reelaboração sobre a probabilidade da causa e da probabilidade inversa, por meio de aproximações de integrais definidas dos cálculos que ele utilizou sobre problema populacional e aborda sobre a teoria do erro ao estimar resultados sobre as situações analisadas (GILLISPIE, 2007).

No capítulo sétimo, Laplace aborda sobre "à sua descoberta do efeito das desigualdades nas probabilidades prévias" (GILLISPIE, 2007, p. 1531), enfatiza-se que com esta descoberta é necessário certo cuidado ao aplicar cálculos de probabilidade a eventos físicos, ou seja, "era preciso levar em conta ligeiros desvios dos parâmetros em relação aos valores presumidos" (Ibid., p. 1531). Laplace citou como exemplo a situação no jogo de cara ou coroa, sobre a assimetria insuspeitadas na moeda que fosse jogada, "em relação a como seriam injustas para um dos jogadores. Segundo Gillispie (2007) Laplace sugeriu, submeter a probabilidade de assimetria ao cálculo, pois,

> Considerou que a probabilidade de tirar cara ou coroa fosse de $\frac{(1+a)}{2}$. Onde a representa a diferença desconhecida entre as probabilidades anteriores de tirar uma ou outra. assim a probabilidade de tirar cara n vezes seguidas seria $\frac{(1+a)^n+(1-a)^n}{2^{n+1}}$ e o jogador que apostasse consecutivamente em cara ou coroa levaria vantagem sobre aquele que apostasse em uma alternância. Em vez disso, seria mais justo tentar jogar simultaneamente duas moedas similares n vezes seguidas. Neste caso, o verdadeiro valor da probabilidade deque as dus moedas caíssem do mesmo modo seria $\frac{1}{2^{n+1}}[(1+aa^1)^n+(1-aa^1)^n]$, o que é mais proximodo $\frac{1}{2^n}$ equipossível (GILLISPIE, 2007, p. 1531).

Os três últimos capítulos, 8, 9 e 10, Segundo Gillispie (2007, p. 1531) "Laplace examina a expectativa de vida, as anuidades, os seguros e a expectativa moral", este autor enfatiza que isto ocorreu possivelmente atribuído a serviços prestados ao governo, pois "os *procês-verbaus* da Academia" têm registros de que Laplace era convocado para atividades desse tipo algumas vezes (GILLISPIE, 2007). Além de seus estudos aplicados a exemplos práticos da vida, registros de algumas de suas palestras na École Normale e mesmo dos seus prolegômenos da memória sobre probabilidade, sobre o valor da expectativa moral e a expectativa matemática. Estes capítulos ajudaram na edição do seu livro, publicado em 1814. Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008) a Teoria Analítica da Probabilidade era,

> Um *tour de force* enciclopédico que reunia tudo o que ele e os outros tinham feito quanto à probabilidade e estatística até então. Era realmente uma obra mestra, mas seu estilo técnico, denso, tornava muito dela inacessível a todos, exceto os leitores mais determinados e matematicamente sofisticados (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215).

Laplace então decidiu “tornar suas ideias mais acessíveis a uma audiência maior [...] escreveu um prefácio expositório de 153 páginas para a segunda edição” (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215), do livro teoria analítica das probabilidades, Laplace defendia a aplicabilidade da probabilidade a um amplo leque de atividades, incluindo política e ciências sociais (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008).

Em 14 de novembro de 1814, Laplace publicou o livro, *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidade), como uma complementação contendo dois textos[16], sobre os princípios gerais do cálculo da probabilidade, princípios de esperança na probabilidade, aplicações do cálculo nos jogos, filosofia natural e ciências morais, de acordo com Pedro Leite de Santana[17]. Laplace publicou cinco edições desta obra, tornando-se “um genial homem da ciência do Século das Luzes, ainda pobremente conhecido do público brasileiro” (Santana, 2010, p. 10). Um livro que, Laplace “estendeu sobre assunto passível de interessar a um público mais amplo” (GILLISPIE, 2007, p. 1532).

Laplace complementa-se com seus estudos, da prática aplicada nos jogos de azar, das observações e análises que teve durante anos de dedicação e escreveu “de maneira mais persuasiva na linguagem comum do *Essai Philosophique* do que na linguagem matemática da *Théorie analytique”* (Ibid., p. 1532), pois conseguiu abranger um número maior de leitores, pela clareza ao expor o tema, elevando-o ao sucesso, nele consta a “importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência” (Ibid., p. 1532) elevando a teoria da probabilidade à disciplina de probabilidade no ensino de matemática.

Segundo Gillispie (2007) no livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités*, uma introdução que fazia parte na primeira edição, foi eliminada por Laplace e afirmou que interessava-lhe “particularmente em determinar a probabilidade das causas e resultados exibidos nos eventos que ocorrem em grande número, e investigar as leis segundo as quais essas probabilidades se aproximam de um limite proporcional à repetição dos eventos” (GILLISPIE, 2007, p. 1425) Nesta edição os interessados pela teoria da probabilidade, terão uma análise necessária sobre tópicos relevantes da teoria.

---

[16] Um texto como introdução e outro texto como o capítulo décimo primeiro (GILLISPIE, 2007).
[17] tradutor do livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités*

De acordo com Laplace (2010) o *Essai Philosophique* foi desenvolvido de suas lições ministradas nas Escolas Normais, onde era professor de matemática junto com Lagrange, que enfatizou que a probabilidade podia ser aplicada a diversas questões da vida, defendia que a maioria dos casos demandava problemas que envolvia probabilidade. Para Gillispie (2007, p. 1426) este livro "sem dúvida teve vida mais longa e, quase certamente, um número maior de leitores do que qualquer outro texto" feito por Laplace, que afirmou em seus estudos que,

> Quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas próprias ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade – a indução e a analogia – são fundados nas probabilidades (LAPLACE, 2010, p. 41).

Sobre isso, Laplace (2010) tem um princípio evidente de que qualquer acontecimento não pode começar sem que tenha uma causa. Princípio este que gerou seu axioma *princípio da razão suficiente,* usado para qualquer ação, pois "Todos os eventos, mesmo aqueles que por sua irrelevância, parecem não se relacionar às grandes leis da natureza" (LAPLACE, 2010, p. 42), ou seja, para Laplace todos os fenômenos têm uma regularidade, como exemplo, ele analisa a credibilidade das situações, envolvendo a verdade nas respostas dadas, tomando o seguinte problema: "*Tira-se um bilhete e uma testemunha informa que o número é n . Estará dizendo a verdade?*" (GILLISPIE, 2007, p. 1533).

Segundo Gillispie (2007, p. 1533), "A ideia de Laplace era aplicar a probabilidade inversa a esse problema, tomando a afirmação de um evento e calculando a probabilidade de que ele fosse causado pela veracidade da testemunha", então, ele apresentou quatro possibilidades como respostas das pessoas: - 1ª - ela não mente nem comete erro; 2ª - ela não mente, mas comete erro; 3ª - ela mente e não comete erro; 4ª - ela mente e comete erro; Situação que remete Laplace a utilizar a análise bayesiana, por envolver diversas ocorrências testemunhadas por mais de um observador (GILLISPIE, 2007).

Com esta questão, "Laplace presume mais uma vez que a probabilidade de um jurado ou um juiz de chegarem à verdade situa-se entre 1/2 e 1" (GILLISPIE, 2007, p. 1533), para isto utilizou a seguinte expressão: $\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$, onde r atribuísse a juízes e p a probabilidade de que cada um faça um julgamento verdadeiro, se o julgamento não for unânime verdadeiro, a expressão tende a modifica-se como ocorreu, pois, observou que "quanto maior o número de juízes e mais esclarecidos eles forem, maior a probabilidade de se fazer justiça" (GILLISPIE, 2007, p. 1533). Por fim Laplace "deu sua opinião abalizada de que uma maioria de 9 em cada 12 votos pela condenação era a que oferecia o equilíbrio mais adequado entre os interesses da sociedade na proteção e a equidade" (GILLISPIE, 2007, p. 1534).

Tal comportamento levou Laplace a organizar exemplos práticos que satisfizessem as suas ideias, dos muitos fenômenos que estudou, concluiu que “a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos” (LAPLACE, 2010, p. 46). Assim, definiu uma fórmula para calcular probabilidade, determinando uma regra que foi posta por Cardano (1501-1576) nas análises dos possíveis resultados das apostas nos jogos de azar, dizendo que “quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade” (Ibid., p. 46). Formando a definição clássica da probabilidade como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis*, aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma (LAPLACE, 2010):

$$Probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Em Junqueira (2014), destaca-se, a probabilidade de ocorrência de um evento dada por: $(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(\mathrm{S})}$, onde: $P(A)$ = probabilidade do evento; (A) = nº de elementos do evento; (S) = nº de elementos do espaço amostral. Com $0 \leq P(A) \leq 1$, que devem satisfazer as Propriedades:

i. $P(S) = 1$

ii. $P(EA) \geq 0$, para todo $A \subset S$

iii. Se A e B sãs eventos mutuamente exclusivos então: $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Entretanto, Laplace (2010, p. 49) explica que “A teoria das probabilidades se relaciona a considerações tão delicadas que não é surpreendente que, a partir dos mesmos dados, duas pessoas encontrem resultados diferentes, sobretudo em questões muito complexas”. Para organizar suas ideias Laplace definiu dez Princípios gerais do Cálculo das probabilidades expondo sobre o que se remete a uma relação geral das observações de Laplace, informadas no Quadro 12.

Quadro 12 – Princípios Gerais do Cálculo de Probabilidade

10 *Princípios Gerais* do Cálculo das probabilidades – Laplace	
1º	É a relação entre o número de casos favoráveis e aquele de todos os casos possíveis;
2º	A soma das possibilidades de cada caso favorável. Princípio que serve para reduzir os diversos casos a casos igualmente possíveis;
3º	Se os eventos são independentes um dos outros, a probabilidade da existência de seu conjunto é o produto de suas probabilidades individuais;
4º	Quando dois eventos dependem um do outro, a probabilidade do evento composto é o produto da probabilidade do primeiro evento pela probabilidade de que, tendo ocorrido o primeiro, o outro ocorrerá;

5º	Se forem calculadas *a priori* a probabilidade do evento ocorrido e aquela de um evento composto desse e de um outro que se espera, a segunda probabilidade dividida pela primeira será a probabilidade do evento esperado, inferida do evento observado;
6º	É uma fração cujo numerador é a probabilidade do evento resultante da causa considerada e cujo denominador é a soma das probabilidades semelhantes relativas as todas as causas. Esse princípio fornece a razão por que todos os eventos regulares são atribuídos a uma causa particular;
7º	a probabilidade de um evento futuro é a soma dos produtos da probabilidade de cada causa, obtida do evento observado, pela probabilidade de que, existindo essa causa, o evento futuro ocorra;
8º	Quando a vantagem depende de vários eventos, ela é obtida torando-se a soma dos produtos da probabilidade de cada evento pelo bem relacionado com sua ocorrência;
9º	Em uma série de eventos prováveis, onde uns produzem um benefício e outros uma perda, obter-se-á a vantagem resultante fazendo a soma dos produtos da probabilidade de cada evento favorável pelo benefício que ele confere, e subtraindo dessa soma aquela dos produtos da probabilidade de cada evento desfavorável pela perda que lhe é relacionada. Se a segunda soma supera a primeira, o benefício torna-se perda e a esperança transforma-se em temor;
10º	o valor relativo de uma soma infinitamente pequena é igual ao seu valor absoluto dividido pelo bem total da pessoa interessada. Isso supõe que todo homem tem um bem qualquer cujo valor nunca pode ser suposto nulo.

Fonte: Laplace (2010, p. 49)

Esses são os dez princípios probabilísticos propostos por Laplace no livro *Ensaio Filosófico* e podem ser usados em diversas áreas do conhecimento. Sobre os jogos, sabe-se que foram os primeiros eventos que as pesquisas mostram na história, "na infinita variedade dessas combinações, várias delas se prestam com facilidade ao cálculo, enquanto outras exigem cálculos mais difíceis" (LAPLACE, 2010, p. 85). Para Rotunno (2007) as obras e princípios que Laplace atribuiu a Teoria da Probabilidade,

> São obras reconhecidas como a Teoria Clássica da Probabilidade, conceitos básicos, desenvolvidos de forma precisa, em dez princípios fundamentais [...] A concepção determinista de Laplace permitiu saltar de um tratamento causal a uma concepção estatística dos acontecimentos. **Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade** (ROTUNNO, 2007, p. 21, grifo nosso).

Segundo Boyer (1974) "a Teoria de Probabilidade deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático". A partir dele, as disciplinas cálculo de probabilidade e estatística, que tinham até então permanecido separadas, "se fundiram de maneira que o cálculo das probabilidades se constitui no andaime matemático da estatística. Toda a base matemática que permitiu desenvolver a teoria da probabilidade é extraída da análise combinatória" (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, tradução nossa).

Segundo Santana (2010, p. 20)[18] uma das frases celebres de Laplace foi "O que sabemos é muito pouco; o que desconhecemos é imenso" e aos interessados em se aprofundar nos estudos da probabilidade, as obras de Laplace são referências a leituras do tema, sem contar que "propicia grande ganho intelectual" (SANTANA, 2010, p. 20) para ampliação de conhecimento em diversas áreas que este autor se propôs a explorar e publicar para conhecimento de várias gerações, e por fim, Laplace (2010, p. 17) enfatizou que "a teoria das probabilidades, no fundo, é apenas o bom senso reduzido ao cálculo".

Contribuindo com a evolução da teoria da probabilidade, cita-se ao matemático **Carl Friedrich Gauss (1777–1855),** Nascido em Brunswick, na Alemanha, ficou conhecido como um dos maiores matemáticos da história e chamado de "príncipe dos matemáticos". Segundo Zindel (2018, p. 35) "Gauss não tinha interesse algum específico na administração do risco, propriamente dito, dos estudos de probabilidade, o que o levou a estudar tal tema foram os trabalhos realizados por Jacob Bernoulli, de Moivre, Bayes e Quételet", com forte influência pelos trabalhos de Laplace.

"Foi com Gauss que o cálculo das probabilidades não parou de aumentar, a ponto de fazer dele o ramo da matemática aplicada que hoje interessa cada vez mais ao maior número de ciências" (ARAGÃO, 2009, p. 89). A contribuição de Gauss na teoria da probabilidade é decorrente de um trabalho realizado sobre uma pesquisa geodésica na Baviera, ou seja, era "utilizar a curvatura da terra, para aprimorar a exatidão das medições geográficas e comparar posteriormente com outras medições realizadas por outros pesquisadores do norte da Alemanha e Dinamarca" (ZINDEL, 2018, p. 20).

De acordo com Historia de la Probabilidad ([2020], p. 15, tradução nossa), Gauss, Bessel e Laplace desenvolveram a teoria dos erros, "chegando a estabelecer o método dos mínimos quadrados como o procedimento mais elementar para resolver os problemas" desta teoria, Gauss e Laplace "aplicaram independentemente conceitos probabilísticos à análise de erros de medição de observações físicas e astronômicas. A teoria dos erros constitui o primeiro ramo da estatística que pode ser constituído como uma estrutura teórico-matemática" (Ibid., p. 16, tradução nossa).

Segundo Zindel (2018, p. 20) "A distribuição de Gauss mostra como são distribuídos os erros, em uma medida experimental [...] pode também demonstrar como são distribuídos os dados em várias situações decorrentes de eventos mutuamente independentes" representado pela fórmula: $\mathrm{F(x)} = \mathrm{H}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{h}2(\mathrm{x}-\mathrm{m})2}$. A curva correspondente a essa fórmula, elaborada por De

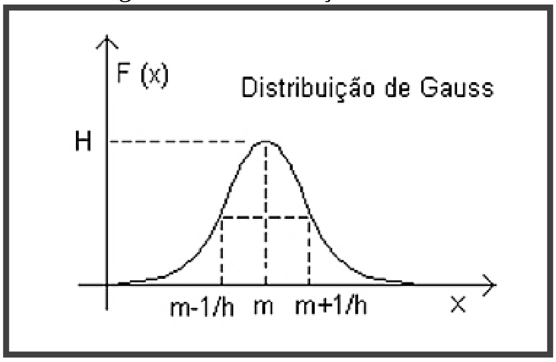
---

18 Tradutor do livro Ensaios Filosóficos de Laplace, que aborda várias referências no livro sobre o Autor.

Moivre, foi utilizada por Gauss que a adaptou para sua teoria, definindo um valor máximo H que ocorre quando a variável x é igual a m, isto é, a média e o máximo coincidem. A largura da curva é determinada pelo valor de h. Quanto maior h, mais estreita é a curva (ZINDEL, 2018, p. 21).

A curva de Gauss, como assim ficou conhecida "é fundamental para a ciência, pois demonstra que a normalidade ocorre naturalmente em muitas medidas de situações físicas, biológicas e sociais" e segundo Zindel (2018) é válido afirmar que a "distribuição normal estabeleceu um alicerce seguro, para auxiliar as pessoas a distinguir entre risco mensurável e o tipo de incerteza que o futuro os reservas", aplicadas a probabilidade de eventos ocorrerem. Como ilustrada na Figura 20.

Figura 20 – Distribuição de Gauss



Fonte: Zindel (2018, p. 21).

Seguindo os avanços a respeito da Teoria da probabilidade, apresenta-se o matemático **Simeon Denis Poisson (1781-1840),** nasceu em Pithiviers, na França, tinha um forte interesse pela matemática que o levou a ingressar na Escola Politécnica em 1798, onde seus talentos impressionaram Lagrange e Laplace (EVES, 2011, p. 528). Ele também contribui com a teoria dos erros, pois "descobriu que a média aritmética nem sempre é melhor do que uma única observação" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 15, tradução nossa), ainda neste livro, enfatiza-se que Poisson também contribuiu com outras acontecimentos acentuados para a teoria da probabilidade, como a distribuição que leva seu nome e que se aplica a fenômenos inusitados e estranhos.

Os estudos de Poisson sobre a teoria da probabilidade culminaram na publicação de sua obra *Recherches sur la Probabilité des Jugements* (Pesquisa sobre a Probabilidade de Julgamentos) de 1837. Nessa obra, Poisson aplicou a problemas específicos, obtendo "resultados coerentes depois de, usando o Teorema de Bayes, fazer aproximações até um grau mais elevado" (CAJORI, 2007, p. 486). Ainda segundo este autor, Poisson se dedicou ao estudou sobre o teorema de Bayes, buscando esclarecer aspectos ainda obscuros relacionados ao teorema. Segundo Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), Poisson publicou,

> cerca de 400 artigos sobre matemática e estatística. Apesar do sucesso das aplicações, ouviam-se vozes em desacordo com a clássica definição de probabilidades, que exigia "a priori" saber que todos os eventos eram igualmente possíveis. Além disso, em certos casos era impossível aplicar a definição clássica de probabilidade. Apesar dos avanços de Poisson, isso não seria resolvido até o século XX (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 15, tradução nossa).

De acordo com a Historia de la Probabilidad ([2020], p. 15, tradução nossa) Poisson introduzir o conceito de variável aleatória, "não como a entendemos atualmente, mas delineando seus primeiros passos como um conjunto $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cada uma com sua probabilidade $p_1, p_2, \ldots, p_n$", conceito que ainda é válido, ainda segundo este Livro foi o matemático russo Pafnuti Lvovitch Chebyshev (1821- 1894) que "assumiu que aqueles conjuntos de que falava Poisson eram independentes e validou o termo variável aleatória.

Entretanto, foi o matemático russo Liapunov (1857-1918) "quem especificou que essas variáveis nem sempre seriam independentes e que essa dependência estava sujeita a certas condições. Além disso, Liapunov deu uma definição de distribuição quase exata para a atual: $P(a < \varepsilon < b) = F(b) - F(a)$.

Segundo Historia de la Probabilidad ([2020], p. 16, tradução nossa) a Poisson é também atribuída a generalização da Lei dos Grandes números de Jacob Bernoulli, quando em 1837, considerou o seguinte experimento: "*Seja uma sequência de n tentativas independentes, em cada uma das quais um evento B pode ocorrer com probabilidade P_K com $k = 1, \ldots, n$. Se α_n é o número de vezes que B acontece em n tentativas, então temos que*:" e aplicou o teorema:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P\left\{\left|\frac{\alpha_n}{n} - \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Teorema que foi contestado, em 1843 pelo matemático russo, Pafnuti Lvovitch Chebyshev, apresentado sua própria versão, "No entanto, era muito semelhante a este e nenhum deles era qualitativamente melhor do que a ideia original de Jacob Bernoulli. Somente em 1867, quando Chebyshev começou a trabalhar com variáveis aleatórias, esse avanço na pesquisa ocorreu" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], p. 16, tradução nossa).

Das referências pesquisadas, tem-se que no século XIX, os personagens que colaboraram com a teoria da probabilidade, tinham a seu favor um acúmulo de conhecimentos teóricos que foram desenvolvidos nos séculos anteriores, favorecendo um avanço importantíssimo tanto em sua formulação teórica quanto em sua aplicação (ROTUNNO, 2007) alteando a probabilidade a um determinado ordenamento das relações dos seus conhecimentos.

Entretanto, foi em meados do século XIX e no século XX, que houve um crescimento ao reconhecimento das verdades tidas desde a constituição da Teoria da Probabilidade, contando com personagens como Antonie August Cournot (1801-1877), Henri Poincaré (1854-1912), Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), Felix Edward Justin Émile Borel (1871-1956), Henri Léon Lebesque (1875-1941), Richard Von Mises (1883-1953), John Maynard Keynes (1883-1946), Frank Heneman Knight (1885-1972).

Segundo Rotunno (2007, p. 21) neste período "multiplicaram-se os estudos sobre as aplicações da Probabilidade e suas possíveis interpretações na sociedade. Os estudos dessas informações permitiam conhecer condições e funcionamentos próprios da sociedade". Segundo este autor, estes estudos que permitiram avançar consideravelmente os conceitos propostos sobre probabilidade, fatores que influenciaram diretamente na reputação da Teoria.

Inicialmente, cita-se o matemático e economista **Antonie Augustin Cournot** (1801-1877), Nascido em Gray, na França, o qual contribuiu com a elaboração do conceito de acaso. Segundo Martin (1996 apud QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p. 54), Cournot considerava que o conceito de acaso não deriva de uma análise empírica que tira da observação do real os elementos necessários à sua construção. Esta elaboração mobiliza uma atitude dedutiva que forja o conceito de acaso a partir da combinação de dois princípios racionais, que são o princípio da causalidade e o princípio da independência das séries causais, assim,

> um evento é considerado como resultado do acaso se não há nenhuma relação razoável entre as causas que conduzem a um estado final ou a outro. Isto é, para ser devido ao acaso, o evento não deve ser em nada predeterminado ou favorecido. Podemos perceber que Cournot assimila assim o acaso à equiprobabilidade (ou à igualdade das chances, segundo a terminologia da época) (QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p. 54).

Entre as causas produtoras de um fato, Martin evidencia a distinção feita por Cournot entre as causas regulares (os invariantes) e as causas acidentais (que determinam a singularidade). Para Cournot, as causas regulares são idênticas para todas as realizações enquanto as causas acidentais são as que variam a cada realização do experimento. Em outras palavras, as causas permanentes determinam a frequência do evento enquanto as causas acidentais determinam sua singularidade (QUEIROZ; COUTINHO, 2007)

Sob o ponto de vista de Cournot, pode-se admitir que o acaso pode ser apresentado como o resultado de uma combinação entra causas regulares e causas acidentais (QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p. 55), ainda segundo as autoras, Poincaré enfatiza sobre as causas que podem ser dadas ao que seja necessário que,

> O acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos e sobre os quais nada podemos dizer, enquanto não determinarmos as leis que o regem (QUEIROZ; COUTINHO, 2007, p. 54).

Seguindo nesta ideia, **Jules Henri Poincaré (1854-1912),** Nascido em Nancy, na França, segundo Eves (2011, p. 617), "Poincaré tinha interesse pela topologia, tanto que seu nome hoje se encontra nos *grupos de Poincaré* da topologia combinatória". No ramo da probabilidade, exerceu o papel de Professor do cálculo de probabilidades, indicando o interesse crescente pelo assunto.

Poincaré defendia que "Uma mente infinitamente poderosa e bem-informada sobre as leis da natureza, poderia ter previsto todos os eventos desde o início do século. Se tal mente existisse, não poderíamos jogar com ela nenhum jogo de azar, pois, perderíamos" (ZINDEL, 2018, p. 18). Poincaré enfatiza que certos eventos não ocorrem por acaso. "Muitas pessoas acham bastante natural rezar por chuva ou por sol, embora achem ridículo rezar por um eclipse [...] em um mundo de causas e efeitos, se conhecermos as causas, poderemos prever os efeitos" (ZINDEL, 2018, p. 18). Desta situação, pode se ter que,

> Poincaré, talvez tenha sido o primeiro a desenvolver uma base matematicamente rigorosa para o entendimento da relação de causa-efeito e importância das informações no processo de tomada de decisão. Segundo Stigler, apesar dos trabalhos de Bernoulli e Laplace terem utilizado a aplicação da probabilidade na mensuração da incerteza nas ciências sociais, foram os trabalhos realizados por Quételet que representaram os primeiros passos para tornar esses desejos em uma realidade prática (ZINDEL, 2018, p. 18).

Seguindo com as contribuições o matemático **Félix Edward Justin Émille Borel (1871-1941),** Nascido na França. Em 1909 em um dos seus trabalhos, demonstrou a lei de Borel, publicado em seu trabalho *Elements de la Theorie des Probabilités* (Elementos da Teoria da Probabilidade). Essa demonstração lida com a noção de probabilidade com propriedades aditivas, afirmando que tem uma medida (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, tradução nossa), conceito atribuído ao matemático Norbert Wiener (1894-1964). De acordo com Historia de la Probabilidad [2020] Wiener,

> desenvolveu uma medida de probabilidades para conjuntos de trajetórias que não são diferenciáveis de forma alguma. ponto, associando uma probabilidade a cada conjunto de trajetórias. Assim, ele construiu uma probabilidade que permitia descrever o fenômeno em termos matemáticos quanto à trajetória e posição das partículas ao longo do tempo. Ele forneceu exemplos de como aplicar o estudo da probabilidade ao desenvolvimento e progresso da ciência (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020], p. 18).

Contribuindo com a evolução da teoria da probabilidade, cita-se o economista e professor da Universidade de Chicago **Frank Hyneman Knight (1885-1972),** nascido em White Oak Township, Illinois, Estados Unidos da América, publicou um livro baseado em sua tese de doutorado, considerado por alguns estudiosos como "a primeira obra de grande importância a estudar explicitamente o processo de tomada de decisão em condições de incerteza", ele faz uma distinção entre, situações de risco e situações de incerteza, segundo Zindel (2018) essas situações são definidas como:

- Situações de risco: As situações nas quais o tomador de decisão atribui probabilidades aos eventos baseados em "chances conhecidas", ou seja, situações em que a probabilidade de um resultado pode ser determinada e consequentemente o resultado pode ser assegurado (ZINDEL, 2018).
- Situações de incerteza: As situações em que o tomador de decisão é incapaz de atribuir probabilidades aos eventos porque não é possível calcular as chances. Ou seja, situações em que o risco não pode ser mensurado, pois, não pode ser calculado (ZINDEL, 2018).

Para Knight, a diferença entre as categorias risco e incerteza, está na forma de distribuição dos resultados. No caso do risco onde, um grupo de exemplos são conhecidos (também através do cálculo a priori ou através de estatísticas de experiências passadas) é possível avaliar as probabilidades de ocorrência do evento. Pois, é possível livrar-se de qualquer incerteza real experimentando ou consolidando os exemplos (ZINDEL, 2018, p. 23).

Knight, distingue Três tipos de probabilidade: probabilidade a priori; probabilidade estatística e probabilidade estimativa, ressaltou nessa obra a importância da incerteza, levando-o a dissociar-se da teoria econômica predominante de sua época, foi contra pressupostos vigentes de que, onde o futuro era desconhecido, as leis da probabilidade determinariam o resultado (ZINDEL, 2018). Knight, fez sua contribuição sobre o entendimento do risco e incerteza na área da economia.

4.4. AXIOMATIZAÇÃO DA PROBABILIDADE

No século XX, o matemático Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), nascido em Tombov, na Rússia. Segundo O'Connor e Robertson (1999, tradução nossa), seus pais não eram casados, sua mãe faleceu em seu parto, então foi criado pela irmã de sua mãe, seu nome foi dado por seu avô materno Yakov Stepanovich Kolmogorov que era da nobreza. Segundo

Almeida (2005) Kolmogorov avançou com os estudos da Teoria da Probabilidade para um nível de crescimento exponencial, tornando-se um ramo importante da matemática.

De acordo com O'Connor e Robertson (1999, tradução nossa) Kolmogorov iniciou seus estudos na teoria das probabilidades investigando os trabalhos realizados nos séculos XV e XVI, ainda segundo esses autores, os matemáticos russos formaram um escola com foco nas áreas relacionadas ao cálculo de probabilidades e estatística, liderada principalmente por Kolmogorov e Khinchine, entre precursores como Chebyshev, Markov e Liapunov, mas Kolmogorov foi o maior expoente desse movimento (O'CONNOR; ROBERTSON, 99, tradução nossa).

Em 1920, Kolmogorov publicou o artigo intitulado “Uber konbergenz Von Reiher, deren Glieder durch Zufall Bestimmt Weerden” (Sobre a convergência de séries cujos membros são determinados ao acaso) o que se trata de probabilidade. Nessa época o autor estava longe de se comprometer com a matemática, tendo estudado diversas outras áreas, como metalurgia e história russa (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, tradução nossa), entretanto este artigo, pode ter iniciado seu interesse na formulação dos seus axiomas, pois ele começou a dedicar-se intensamente ao estudo da teoria da probabilidade, publicando outros trabalhos sobre o tema.

Em “1927, Kolmogorov havia concluído suas pesquisas sobre proficiência e condições necessárias da lei fraca dos grandes números, iniciada por J. Bernoulli” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, p. 89, tradução nossa) e em 1929 completou seu doutorado, tendo publicado 18 trabalhos, entre eles o artigo “A Teoria Geral da Medição e o Cálculo de Probabilidades” (RETRESPO; GONZÁLEZ, 2003, p. 89, tradução nossa), trabalhos que o embasaram a construir uma definição consistente.

Segundo Kolmogorov (1956, p. 2) “Existem outros sistemas postulacionais da teoria da probabilidade, particularmente aqueles em que o conceito de probabilidade não é tratado como um dos conceitos básicos, mas é ele próprio expresso por meio de outros conceitos”, então, Kolmogorov determinou que precisava organizar ou mesmo fundamentar este objeto matemático, de uma forma que integrasse “o mais próximo possível a teoria matemática com o desenvolvimento empírico da teoria da probabilidade” (Ibid., p. 2), sem excluir os créditos que a probabilidade já tinha como definição e propriedades.

Em Historia de la Probabilidad ([2020], p. 18, tradução nossa) destaca-se que a construção de axiomas da probabilidade “vem das propriedades fundamentais da probabilidade observadas nos exemplos que ilustram as definições clássicas e frequentistas. Assim, a definição axiomática os inclui como casos particulares e supera as deficiências de ambos”.

É importante enfatizar que nesse livro ressalta-se que “Kolmogorov deu uma solução para uma parte do sexto problema de Hilbert, que pedia um fundamento axiomático da teoria da probabilidade” (Historia de la Probabilidad, [2020], p. 17, tradução nossa), justificando a necessidade desse tema. O que foi muito importante, pois permitiu que Kolmogorov definisse os axiomas que fundamentaram a teoria da probabilidade de forma rigorosa e matemática, estabelecendo que a teoria da probabilidade se tornasse uma disciplina matemática bem fundamentada, com suas próprias leis e regras.

Em 1930 Kolmogorov (1956, p. 01, tradução nossa) estabeleceu que “a teoria da probabilidade, como disciplina matemática, poderia e deveria ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra”. Ainda segundo este autor, com base nas frequências relativas e na teoria dos conjuntos ele estabeleceu uma comparação dos eventos aleatórios com os conceitos da teoria dos conjuntos, para poder definir certas condições, em seguida comparou os conceitos da teoria dos conjuntos com os conceitos da teoria da probabilidade.

De acordo com Eugênio (2016), Kolmogorov buscou essa relação para garantir a fundamentação e a validade dos axiomas, para poder contribuir significativamente para o desenvolvimento da probabilidade como área da matemática, pois,

> O significado Axiomático tenta algebrizar tudo o que já existia em relação à Probabilidade produzida pelos matemáticos e tenta generalizá-la para as mais diversas áreas da sociedade. Foi o esforço de diversos matemáticos em conseguir fazer a Probabilidade ter um lugar de destaque na Matemática formal, mais conhecida como Matemática pura. Esse esforço rendeu o reconhecimento da Probabilidade enquanto função Matemática e convergência entre a teoria dos Conjuntos e a teoria da Medida, as quais até então nunca tinham tido diálogo com áreas da Matemática (EUGÊNIO, 2016, p. 26).

De acordo com Kolmogorov (1956, p. 05, tradução nossa) “muitos conceitos da teoria dos conjuntos são designados por outros termos”. O Quadro 13 apresenta uma comparação entre os conceitos da teoria dos conjuntos e os termos utilizados na teoria da probabilidade, com essa comparação, Kolmogorov estabeleceu a linguagem necessária para tornar mais clara e consistente sua ideia em relação aos axiomas da teoria da probabilidade.

Quadro 13 – Comparação – Terminologia entre as teorias

Teoria dos conjuntos		**Eventos aleatórios**	
1	A e B não se cruzam, ou seja, $AB = 0$	1	O Eventos A e B são incompatíveis
2	$AB \dots N = 0$	2	O Eventos $A, B, \dots, N$ são incompatíveis
3	$AB \dots N = X$	3	O Evento X é definido como a ocorrência simultânea de eventos $A, B, \dots, N$

4	$A + B + \cdots + N = X$	4	O evento X é definido como a ocorrência de pelo menos um dos os eventos $A, B, \ldots, N$
5	O conjunto complementar $\bar{A}$	5	O evento oposto $\bar{A}$ consistindo na não ocorrência do evento A
6	$A = 0$	6	O evento A é impossível
7	$A = E$	7	O evento A deve ocorrer
8	O sistema $\mathfrak{A}$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma *decomposição* do conjunto E se $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$. (isso pressupõe que os conjuntos A não se interceptam, em pares)	8	8. O *experimento* $\mathfrak{A}$ consiste em determinar qual dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ocorre. Chamamos, portanto $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ os resultados possíveis do experimento $\mathfrak{A}$.
9	B é um subconjunto de $A : B \subset A$.	9	9. Da ocorrência do evento B segue-se a ocorrência inevitável de A.

Fonte: Kolmogorov (1956, p. 05, tradução nossa)

Neste sentido, Kolmogorov (1956, tradução nossa) determina elementos e relações essenciais, para permitir maior clareza e rigor em seus estudos e possibilitar a generalização dos resultados até mesmo para outros contextos. Pois, Kolmogorov adotou como fato que toda teoria axiomática (abstrata) admite, que é,

> Um número ilimitado de interpretações concretas além daquelas das quais foi derivada. Assim, encontramos aplicações em campos da ciência que não têm relação com os conceitos de evento aleatório e de probabilidade no significado preciso dessas palavras. A base postulacional da teoria da probabilidade pode ser estabelecida por diferentes métodos no que diz respeito à seleção de axiomas, bem como na seleção de conceitos e relações básicas. No entanto, se nosso objetivo é alcançar a máxima simplicidade, tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria, então os conceitos postulacionais de um evento aleatório e sua probabilidade parecem os mais adequados (KOLMOGOROV, 1956, p. 02, tradução nossa).

Dessa forma, em sua busca por uma teoria axiomática para a probabilidade, publicou em 1933, o livro *Grundbegriffe der* Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Fundamentos da Teoria da Probabilidade).* Nesta obra, ele utilizou axiomas já existentes e enfatizou que seu “objetivo é alcançar a máxima simplicidade tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).

A proposta dos axiomas de Kolmogorov foi bem-sucedida mostrando sua aplicação a diversas áreas do conhecimento e estabelecendo uma definição mais formal, pois tem “uma fundamentação teórica rigorosa e não se limita aos casos de eventos equiprováveis, pois ela pode ser aplicada a qualquer tipo de evento e/ou espaço amostral” (SALSA; MOREIRA, 2014, p. 18), dando a probabilidade uma função relevante e significativa para a matemática.

A definição moderna que Kolmogorov atribuiu a teoria da probabilidade, baseada na teoria das medidas, considera experimentos em que os resultados possíveis podem ser infinitos e não necessariamente equiprováveis, pois com os axiomas Kolmogorov definiu uma medida de certeza, mais ampla e flexível, aplicada a experimentos mais complexos. Em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), ver-se que,

> Dos três axiomas fundamentais de Kolmogorov, a maioria das propriedades fundamentais de probabilidade que conhecemos e manuseamos hoje são deduzidas. Além disso, esses axiomas têm a vantagem de serem consistentes, pois existem objetos reais que os satisfazem e, portanto, especificam a Matemática em nossas vidas (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 19, tradução nossa).

A partir destes fatos, Kolmogorov (1956, p. 16, tradução nossa) apresenta "que a *probabilidade* $P(A)$ *é uma função de conjunto completamente aditiva em* $\mathfrak{F}$", para poder definir conceitos axiomáticos para a teoria da probabilidade, quais ele indicou que podem ser chamados de campo de probabilidade generalizadas. Então, determinou as seguintes condições:

§ 1. Axiomas

Seja E uma coleção de elementos $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, que chamaremos de *eventos elementares*, e $\mathfrak{F}$ um conjunto de subconjuntos de E; os elementos do conjunto $\mathfrak{F}$ serão chamados de eventos aleatórios.

I. $\mathfrak{F}$ é um campo de conjuntos.

II. $\mathfrak{F}$ contém o conjunto E.

III. A cada conjunto A em $\mathfrak{I}$ é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A.

IV. $P(E)$ é igual a 1.

V. Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Um sistema de conjuntos, $\mathfrak{F}$, juntamente com uma atribuição definida de números $P(A)$, satisfazendo os Axiomas I-V, é chamado de *campo de probabilidade*.

Nosso sistema de Axiomas I-V é *consistente*.

Segundo Rotunno (2007) após a publicação de Fundamentos da Teoria da Probabilidade, elevou-a para Etapa Moderna de seus estudos e aplicação a diversas áreas de conhecimentos, um fato não determinado anteriormente por nenhum outro matemático que estudou e contribuiu significativamente com seu avanço. Nestas condições, Kolmogorov foi considerado o primeiro matemático a apresentar uma forma axiomática da probabilidade, este autor afirma que os axiomas de Kolmogorov,

> Tornaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, sobretudo sob o aspecto teórico. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico, seja nas ciências humanas ou nas políticas (ROTUNNO, 2007, p. 33).

Entretanto, os axiomas definidos por Kolmogorov também não invalidaram as definições da probabilidade clássica organizadas por Laplace. Em Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021, pp. 98-99) apresentaram as definições de Laplace usando os axiomas de Kolmogorov (1956), nas seguintes situações:

- Considerando o espaço amostral finito $\Omega = \{a1, a2, \dots, an\}$ e a σ $-$álgebra discreta das partes de Ω. Nesse caso, o $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ mensurável será o conjunto de partes de Ω;
- Definindo a função de probabilidade para qualquer evento A da seguinte maneira:

Para os n eventos elementares $\{ai\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, associamos uma probabilidade $pi = P(\{ai\})$ que satisfaz as seguintes condições:

A - $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$;

B - $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Para um evento qualquer $A = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}\} \in \mathcal{F}$, definindo como

$$P(A) = P_{j1} + P_{j2} \dots + P_{jk}.$$

Assim, o espaço de Probabilidade para esse caso seria $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$.

Se no caso anterior temos a propriedade $p = P(\{a_1\}) = \cdots = P(\{n\})$, diz-se que Ω é um espaço amostral finito equiprovável. Fazendo uso do item B, obtém-se que $p = \frac{1}{n}$. Assim, neste caso a definição clássica de Probabilidade torna-se:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ elementos\ de\ A}{número\ total\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

Em Salsa e Moreira (2014) destaca-se uma notação atual das ideias de Kolmogorov, primeiramente foi estabelecido as propriedades que definiriam os axiomas como sendo:

- *Seja ε um experimento aleatório e Ω um conjunto formado por todos os eventos elementares desse experimento*, em seguida estabeleceu que:

- *Seja A o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω, inclusive o próprio Ω (evento certo) e o conjunto vazio φ (evento impossível).* Assim,
- *Uma função P definida em A, que associa a cada evento de A um número no intervalo* $[0,1]$*, é chamada probabilidade do evento, isto é: $P : A \rightarrow [0,1]$*, que deve satisfazer as seguintes condições, estabelecidas em Kolmogorov (1956, p. 02, tradução e adaptação nossa):

I - A cada conjunto A em Ω é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A, ou seja, $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$

II - $P(\Omega) = 1$

III - Se A e B não têm elemento em comum, então: $\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B)}$

A Axiomatização dada por Kolmogorov na teoria da probabilidade desempenha um papel fundamental na compreensão e aplicação em diversas áreas do conhecimento, pois ele estabeleceu uma base sólida e rigorosa, uma estrutura matemática necessária para o estudo de eventos aleatórios. Ele forneceu um conjunto de regra e princípios que validaram o cálculo e a interpretação da probabilidade, garantindo uma abordagem matemática precisa.

Além disso, a Axiomatização de Kolmogorov permite a generalização e aplicação da teoria das probabilidades em diferentes áreas do conhecimento, que lide com incerteza e eventos aleatórios, sendo reconhecida universalmente na matemática, em invalidar as abordagens clássica e frequentista. Foi, pelos estudos de Kolmogorov que a probabilidade se tornou evidente e necessária como uma disciplina matemática.

5. RECORTES HISTÓRICOS DA PROBABILIDADE E ATIVIDADES

Este capítulo é constituído de três textos, que foram recortados e adaptados do texto principal, que consta no capítulo quatro e apresenta a história e a evolução da teoria da probabilidade, balizado pelo Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022). Esses textos são recortes do texto histórico com adaptações didáticas para serem utilizados em atividades pedagógicas no ensino de probabilidade na educação básica.

Elaborar recortes históricos a partir de uma história da probabilidade, para uso em sala de aula é o objetivo geral deste trabalho. Que foram produzidos seguindo as estratégias do Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022). Enquanto pesquisa busca-se utilizar esses recortes e suas atividade para que os alunos possam compreender melhor os conceitos de probabilidade, relacionando as teorias, fórmulas e problemas aprendidos em sala de aula com situações reais e históricas que deram origem a elas.

É importante enfatizar que não será enveredado a parte histórica relacionada ao *Contexto Intermediário Complementar* e ao *Contexto Histórico, Sociocultural e Geopolítico*, entretanto no Diagrama Metodológico apresentado na página 74, o professor tem uma visão geral a partir de Laplace, que poderá ser alterada na medida em que mudar o personagem destacado

Dos textos elaborados e suas respectivas atividades, serão anexados uma ficha técnica, seguindo as orientações com as habilidades previstas na BNCC (2017) e as informações principais para o professor seguir como recomendação ao uso da proposta em sua prática pedagógica.

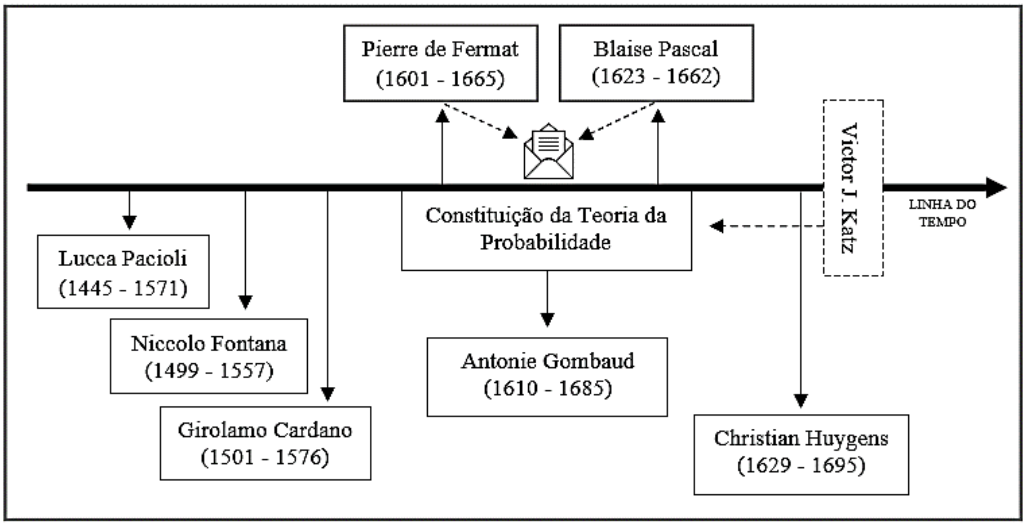
5.1. RECORTE I: UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A TEORIA DA PROBABILIDADE

O texto I é composto a partir do capítulo quatro, com o objetivo de apresentar um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2022). Neste recorte em específico, evidenciou-se os personagens que contribuíram com os primeiros relatos, situações, problemas e soluções que levaram a constituição da teoria da probabilidade.

Para fundamentar este recorte, foi destacado, do texto principal, obras de autores como Berlingoff e Gouvêa (2008), Mlodinow (2009), Katz (2010), Tomaz (2011), Eves (2011), Junqueira (2015) e o livro Historia de la Probabilidad [2020]. Essas obras apontam para resolução de problemas envolvendo jogos de azar como fator principal que influenciou o surgimento da probabilidade e evidencia personagens importantes daquela época, que colaboraram para a evolução da teoria da probabilidade nos séculos posteriores.

Desse modo, analisa-se que resgatar uma história é importante para conhecer os personagens e as situações que levaram a construção da teoria da probabilidade, assim por meio do recorte histórico, destacado no *Diagrama Metodológico: Uma História da Constituição da Teoria da Probabilidade*, mostra-se as abordagens que foram sendo incorporadas ao longo do tempo até ser oficialmente publicado e conhecido na matemática.

Diagrama Metodológico: Um Problema que deu início a Teoria da Probabilidade



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Texto I: UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A PROBABILIDADE

Homens jogando no século XV

Fonte: https://ensinarhistoria.com.br

Nesse contexto, surgem personagens que “se limitaram a resolver problemas concretos, estritamente numéricos” (TOMAZ, 2011, p. 5), abordando através de teorias matemáticas soluções para as possibilidades de ganhar e elaborar estratégias para obter sucessos em suas apostas, sendo este fator que influenciaria no surgimento da probabilidade.

Os primeiros problemas oficialmente publicados a respeito de situações envolvendo a teoria da probabilidade, foram propostos pelo italiano Luca Pacioli (1445-1517), com a contribuição dos italianos, Niccolo Fontana (1499-1557), Girolamo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695), considerados personagens importantes, por realizarem estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar em jogos de azar.

O primeiro problema, que despertou o interesse para explicar tal situação, que seguia um padrão aleatório, ficou conhecido como o *problema dos pontos*, publicado em 1494 pelo matemático Luca Pacioli no seu livro *Summa de Aritmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) considerado uma referência histórica e fundamental para a noção da probabilidade, que envolvia a distribuição de um prêmio em um jogo de azar interrompido por algum motivo antes de seu termino. Como foi feito a divisão do prêmio já que o resultado era incerto?

O problema: *"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?"*

(ARAGÃO, 2009, p. 86).

As tentativas de solução:

Pacioli, sugeriu que com a interrupção do jogo, o prêmio pudesse ser dividido "em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador" (Warsi, 2020, p. 164). Pacioli, então recomendou que para o jogador com 5 pontos, o prêmio seria calculado como 6 vezes $\frac{5}{8}$ e para o jogador com 3 pontos seria 6 vezes $\frac{3}{8}$. Porém, a resposta de Pacioli não foi satisfatória para solucionar o problema.

Niccolo Fontana

Fonte: ttps://www.britishmuseum.org/

O matemático **Niccolo Fontana** (1499-1557), de pseudônimo Tartaglia, de acordo com Historia de la probabilidad ([2020] p. 04, tradução nossa) ele descartou a solução proposta por Pacioli e propôs uma divisão proporcional ao número de jogadas vencidas por cada equipe, utilizando uma divisão equitativa, sugerindo que: "se um time ganhou a pontos e o outro b pontos, o jogo é jogado para n pontos e o prêmio total é P, os ganhos devem ser distribuídos da seguinte forma: $\left(\frac{P}{2}\right) \pm P\left[\frac{a-b}{n}\right]$".

Tartaglia afirma neste caso que a maior quantidade vai para a equipe que tiver mais vitórias. "No entanto, Tartaglia sabia que sua solução não era a correta e em seu livro deixou claro que era bom para conferir justiça e equilíbrio a um elenco, mas não era exato do ponto de vista matemático" (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020] p. 04, tradução nossa), permitindo que com esta ideia outros matemáticos a aprimorassem.

Girolamo Cardano

Fonte: https://impa.br/noticias

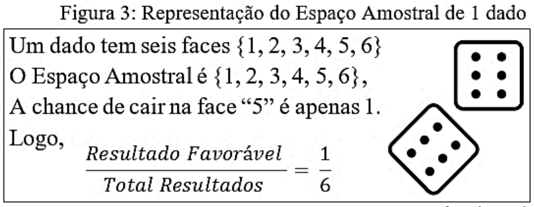
Surge, então um personagem de destaque nos jogos, **Girolamo Cardano** (1501-1576), matemático, médico, astrólogo e filósofo, bastante famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, segundo Mlodinow (2009) no tempo de Cardano, onde ele estava os jogos eram certos de ocorrer.

Mesmo tendo alguns equívocos, Cardano, de forma simples, mas com eficácia escreveu suas estratégias em seu livro "*Liber de Ludo Aleae"* (Livro sobre os jogos de azar) este livro foi o "primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza" (MLODINOW, 2009, p. 58), mas, lamentavelmente, este livro só se tornou público em 1663. Cardano, afirmou em seu livro que a solução de Pacioli no problema dos pontos, estava incorreta porque ele não contava quantos jogos cada equipe precisava vencer para ganhar o prêmio (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD [2020]).

Como solução, Cardano definiu uma fórmula para distribuir o prêmio, mas reconheceu que sua solução só valeria para alguns casos particulares, sendo: "se n é o número total de partidas e a e b as partidas vencidas por cada equipe, o prêmio deveria ser distribuído da seguinte forma: $[1 + 2 + \cdots + (n - b)]$: $[1 + 2 + \cdots (n - a)]$".

Cardano fez uma importante contribuição para a teoria da probabilidade ao introduzir a ideia de *espaço amostral*, referindo-se que esta ideia era resultado de um processo aleatório compreendido como pontos no espaço. De acordo com Mlodinow (2009) Cardano definiu o espaço amostral da seguinte forma: *Suponha que é um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultado possíveis.*

Figura 3: Representação do Espaço Amostral de 1 dado



Fonte: Vasconcelos (2023)

Exemplo, se um dado tem seis lados, esses seis resultados formam o espaço amostral. Apostar em cair em um determinado valor do dado é $\frac{1}{6}$.

Embora, Cardano tenha solucionado este problema e introduzido importantes conceitos na teoria da probabilidade, como o espaço amostral, ele não publicou suas ideias. Somente em 1663 é que ela foi oficialmente conhecida, mas anteriormente o matemático Huygens publicou em 1657 uma solução baseada nas ideias dos matemáticos Pascal e Fermat.

Tudo iniciou quando **Antonie Gombaud** (1610-1685) de pseudônimo Chevalier de

Blaise Pascal

Fonte: ttps://www.britishmuseum.org/

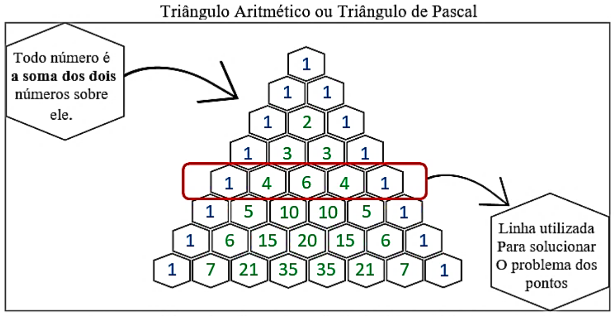
Méré, solicitou a **Blaise Pascal (1623-1662)** que solucionasse o famoso *Problema dos Pontos*, neste período os jogos e apostas eram comuns e quando o jogo começava o dinheiro apostado não pertencia a ninguém até o final do jogo e então o ganhador ficava com tudo, por isso, a divisão deveria ser justa, refletindo as possibilidades de cada jogador vencer a aposta (Berlingoff e Gouvêa, 2008). Pascal compartilhou suas ideias com o Fermat.

"Pascal percebeu que, independentemente da resposta, os métodos necessários para calculá-la ainda eram desconhecidos, e tais métodos, quaisquer que fossem, teriam importante implicações para todos os tipos de situação competitiva" (MLODINOW, 2009, p. 77).

A partir de então, Pascal e Fermat traçaram juntos estratégias para resolver o *problema dos pontos,* compartilhadas por meio de cartas: **- Pascal** desenvolveu sua resposta baseado no Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos no jogo e mostrando como as apostas deveriam ser divididas.

De acordo com Warsi (2020, p. 160) Pascal "descobriu que o triângulo poderia ser usado para achar o número de combinações possíveis quando se escolhe uma quantidade de objetos a partir de um número particular de opções disponíveis [...] e cada linha do triângulo de Pascal dá aos coeficientes binomiais uma potência". Segundo Eves (2011, p. 939) Pascal tomou a quarta linha do triângulo aritmético, considerando "que mais quatro partidas decidem o jogo". Nesse sentido Pascal mostrou que "os números no triângulo contam o número de modos com que várias ocorrências podem se combinar" (WARSI, 2020, p. 159).

Triângulo Aritmético ou Triângulo de Pascal



Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de Warsi (2020, p. 158)

Segundo Eves (2011) Pascal indicou um número de combinações simples, tomando como ordem r, de n objetos: C_r^n, decidiu que tomando a linha quatro, tem-se, respectivamente os coeficientes: 1, 4, 6, 4, 1, e combinou na condição, de que cada combinação simples é o número maneiras de obter as quantidades de letras, para análise da solução do problema:

- Para o primeiro jogador (A): $\frac{C_4^4 + C_3^4 + C_2^4}{casos\ possíveis} \cdot prêmio;$

- Para o segundo jogador (B): $\frac{C_1^4 + C_0^4}{casos\ possíveis} \cdot prêmio;$

Pierre de Fermat

Fonte: ttps://www.britishmuseum.org/

Pierre de Fermat (1601-1665), por sua vez, utilizou o método "fundado nas combinações, que se estende a um número qualquer de jogadores" (LAPLACE, 2010, p. 213), formando 6 arranjos completos de ordem 4, pois afirmou que quatro partidas decidiriam o jogo e assim organizou com as letras a e b e denomino-os como: jogador A e jogador B (EVES, 2011).

De acordo com Eves (2011), as combinações que aparecem $\boldsymbol{a}$, duas ou mais vezes são favoráveis a A e as combinações que aparecem $\boldsymbol{b}$, três ou mais vezes, são favoráveis a B. E assim multiplicaria esses dados pelo valor do prêmio para se ter uma divisão justa.

Pascal e Fermat, cada um com seu próprio método, chegaram a um mesmo resultado para o *problema dos pontos*, além de refletirem outros problemas equivalentes, contribuindo com a base do desenvolvimento da teoria da probabilidade, envolvendo também os jogos de azar, viabilizando que o estudo do acaso tomasse uma expressão matemática e assim fosse introduzido um cálculo para a probabilidade (JUNQUEIRA, 2015).

Combinações de Fermat

$aaaa$	$aaab$	$abba$	$bbab$
$baaa$	$bbaa$	$abab$	$babb$
$abaa$	$baba$	$aabb$	$abbb$
$aaba$	$baab$	$bbba$	$bbbb$

Fonte: Eves (2011, p. 393)

O problema dos pontos foi um desafio matemático no campo da probabilidade. Segundo Mlodinow (2009, p. 84) "a análise de Pascal e Fermat mostrou-se um grande primeiro passo na busca de uma teoria matemática coerente da aleatoriedade".

Christian Huygens

Fonte: https://impa.br/noticias

No entanto, coube ao matemático **Christian Huygens (1629-1695),** em 1657, tornar público as cartas, que continham as soluções proposta por Pascal e Fermat sobre o *problema dos pontos.* Huygens apresentou as soluções, com as respectivas estratégias e cálculos utilizados pelos matemáticos, no livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), considerado o primeiro documento publicado sobre probabilidade.

Katz (2010, p. 576) enfatiza que "Huygens forneceu discussões pormenorizadas acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular como calcular num jogo de azar" (KATZ, 2010, p. 576), segundo este mesmo autor Huygens declarou que os resultados dos jogos de azar podem ser incertos, pois as chances de um jogador ganhar ou perder, dependia de um determinado valor, introduzido como **valor esperado**, que é a quantidade média que uma pessoa **ganharia** se jogasse o jogo muitas vezes, sendo está a quantidade que um jogador **pagaria** para ter o privilégio de jogar este jogo.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 213) Huygens baseava-se na expectativa matemática ou no resultado esperado de uma situação, Por exemplo: *"Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha $ 10; Se aparecer 3, você ganha $ 5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?".* Segundo os mesmos autores, nesta situação o valor esperado, consiste em somar os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de obtê-la. Considerando que o dado não é viciado e que todas as possibilidades têm a mesma chance de acontecer, a expectativa matemática desse jogo seria então o valor de $ 2,50.

Portanto, "a expectativa matemática de um jogo é encontrada somando os produtos de cada recompensa possível pela probabilidade de você a obter" (Ibid., p. 213). Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 216) Huygens "inverteu o processo, usando a expectativa para calcular a probabilidade, em vez do contrário. Mas a ideia fundamental era a mesma: resultados igualmente prováveis significam expectativas iguais", de situações iguais e repetidas, foi o que o levou a escrever suas proposições, sobre os jogos de azar relacionados as chances para se obter sucesso.

Outro sim, observa-se que o método utilizado por Huygens, para organizar os dados e resolver os problemas, não definia uma fórmula conclusiva para aplicar a probabilidade, contudo é evidente que eram considerados casos possíveis e casos favoráveis, pois, segundo Gneri (S.d, p. 03) foi considerado as chances de um jogador ganhar, onde "no contexto de um jogo e desde o ponto de vista de um jogador, consideram-se o conjunto de todos os resultados ou *casos possíveis*, sendo feita uma partição em dois subconjuntos: o dos resultados ou *casos favoráveis* e o dos não favoráveis", aos apostadores/jogadores, organizada como:

$$\frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Segundo Katz (2010, p. 578) Huygens se aprofundou nos estudos e forneceu informações relevantes de como calcular num jogo de azar, deixando à exposição de outros matemáticos que porventura poderiam se interessar por este ramo da matemática, sendo que seu tratado "era a única introdução disponível à teoria da probabilidade até o início do século dezoito", contribuição que foi fundamental para a evolução da teoria da probabilidade nos séculos posteriores.

Sugestões de Atividades do Texto I

1º) Conhecendo um pouco da História da Constituição da Teoria da Probabilidade, envolva a matemática em suas repostas:

a) Explique com suas palavras, sobre o primeiro problema matemático que gerou interesse na teoria da probabilidade e como essa teoria foi aplicada para resolver este problema.

b) Explique com a teoria da probabilidade foi apresentada oficialmente para o mundo?

c) Resuma sobre as principais contribuições de Cardano para o desenvolvimento da teoria da probabilidade e como elas impactaram a matemática?

d) Qual foi o primeiro conceito matemático utilizado por Pacioli para tentar solucionar o problema dos jogos de azar e como esse conceito influenciou o desenvolvimento da teoria da probabilidade?

2ª) Como a teoria da probabilidade foi oficialmente estabelecida e qual foi o papel desempenhado pelo matemático Huygens nesse processo?

3ª) Resolva o problema dos pontos, utilizando suas próprias estratégias e raciocínio: *Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?* Sendo que o valor para o prêmio é de R$ 500,00.

4ª) Resolve este problema, utilizando suas próprias estratégias e raciocínio. Está é a proposta que o matemático Huygens apresenta no texto: Oferecem-lhe a chance de jogar um único dado. Se aparecer o 6, você ganha $10; Se aparecer 3, você ganha $5; de outro modo, você não ganha nada. Qual é um preço justo para jogar esse jogo?

5ª) Em um jogo de moedas, dois jogadores apostam 30 moedas cada um, ganha o prêmio quem primeiro fizer 10 pontos. Considerando os jogadores como A e B, então cada vez que a moeda é lançada, se sair *cara* 1 (um) ponto é de B e se sair *coroa* 1 (um) ponto é de A. Entretanto, por algum motivo o jogo é interrompido quando A tem 8 pontos e B tem 7 pontos.

a) Como esse prêmio deve ser dividido de forma justa, considerando a pontuação que A e B tem no momento que o jogo foi interrompido?
b) Existe outra forma de dividir o prêmio que possa ser considerada de forma justa. Explique e exemplifique.
c) Caso o jogo continuasse e B ganhasse o próximo ponto. Quem seria o vencedor do jogo?

PARA SABER MAIS: Questão adaptada do livro do 9º ano (Matemática – Bianchini, 2017, p. 140).
6ª) Cardano Introduziu o termo *espaço amostral,* Como apresentado no texto I com o resultado de apenas 1 dado.
a) Represente o espaço amostral do lançamento de dois dados em uma tabela.
b) Imagine: Carol, Rafael e Sofia brincando de jogar esses dados. Responda os itens c, d, e. justificando qual deles tem a probabilidade de ganhar em uma jogada:
c) Sendo a soma dos números das faces de cima: Carol = 6; Rafael = 7 e Sofia = 8
d) Sendo a diferença em módulo entre os números das faces de cima: Carol = 1; do Rafael = 3 e da Sofia = 0
e) Eles apostaram, que o produto dos números das faces de cima seria: Carol = número ímpar; do Rafael = número primo e da Sofia = número par.

Nota Didática aos Professores

A primeira e a segunda questão, o objetivo é incentivar o aluno a investigar respostas que foram contadas neste recorte histórico, fazendo com que eles relatem trechos da história, de acordo a compreensão e entendimento que tiveram sobre a história.

A terceira e a quarta questão, os alunos devem raciocinar e buscar por seus próprios meios para solucionar os problemas, que foram retirados dos recortes históricos, o objetivo é que alunos tenham autonomia para encontrar respostas.

A quinta questão, contém informações que foram geradas e adaptadas do problemas dos pontos, contendo opções: a) para fazer a divisão do prêmio, utilizando qualquer estratégia e neste caso pode ser as propostas por Fermat ou Pascal; a letra b) evidencia que eles possam dividir por outra estratégia de solução, que pode ser algo que eles mesmo saibam e a c) instiga-los a perceber que o jogo está empatado, logo o prêmio deveria ser igualmente dividido, ou seja, cada jogador poderia ter de volta suas 30 moedas e isto seria justo, pode se indagar.

Na sexta, os alunos podem se organizem em dupla e distribuir dados para que possam fazer o experimento de lançá-los e anotar os números que aparecem nas faces voltadas para cima. Outra opção e fazer eles analisarem na tabela construída no item a) para fazer as possiblidades de acordo com o espaço amostral dos resultados de Carol, Rafael e Sofia.

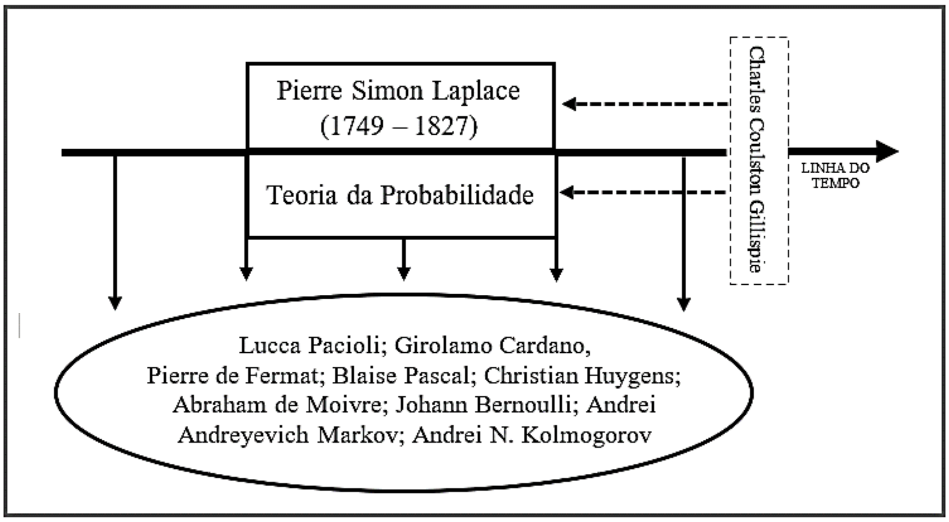
5.2. RECORTE II: UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

O texto II é composto a partir do capítulo quatro, com o objetivo de apresentar um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2020). Neste recorte em específico, será construído um texto sobre uma História da Probabilidade, que começou no final no século XIV e foi sendo construída com a colaboração de matemáticos geniais até ser axiomatizada no século XX.

Para fundamentar este recorte, foi destacado, do texto principal, obras que embasaram sua construção. Conta com o início, indicando o problema dos pontos de Luca Pacioli de 1494, com as contribuições de Pascal e Fermat em 1564. Aborda as contribuições que receberam no século XVII, evidenciando a contribuição de Laplace no século XVIII e XIX, até ser axiomatizada por Kolmogorov no século XX.

Desse modo, analisa-se que resgatar uma história é importante para conhecer os personagens e as situações que levaram a construção da teoria da probabilidade, assim por meio do recorte histórico, destacado no *Diagrama Metodológico: Uma História da Teoria da Probabilidade*, mostra-se os personagens que contribuíram e as abordagens que foram sendo incorporadas ao longo do tempo até ser oficialmente publicado e conhecido na matemática.

Diagrama Metodológico: Uma História da Teoria da Probabilidade



Fonte: Elaborado pela Autora (2023).

Texto II: UMA HISTÓRIA DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Livro *Summa*

Fonte: https://impa.br/noticias

Este recorte conta a surpreendente história desenvolvida por matemáticos que foram capazes de desenvolver uma ciência, que estabelece leis racionais para reger situações determinadas puramente pelo azar (EVES, 2011).

O *problema dos pontos*, que foi publicado em 1494, no livro *Summa de Aritmetica, Geometria, Proportione e Proportionalita* (Resumo de Aritmética, Geométrica, proporção e proporcionalidade) de Luca Pacioli (1445-1517), este foi o ponto inicial para origem da teoria da probabilidade.

Consistia na seguinte situação: *"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, houve uma interrupção do jogo. Como se deveria dividir o prêmio?" (ARAGÃO, 2009, p. 86).*

A partir de situações como essa, Os matemáticos italianos Luca Pacioli, Niccolo Fontana e Girolamo Cardano foram os primeiros a estudar as possibilidades de ocorrências de eventos aleatórios e a desenvolver métodos para resolver situações parecidas, revelando ser um modo útil de medir as possibilidades de que algo ocorra (WARSI, 2020), teoria que se expandiu para aplicações práticas em diversas áreas.

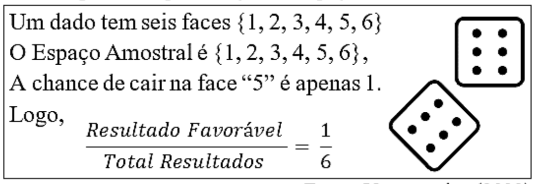
- **Luca Pacioli (1445-1517)** sugeriu que o prêmio fosse dividido "em proporção ao número de rodadas já vencidas por cada jogador" (WARSI, 2020, p. 164), visando "estabelecer uma regra fixa que permita a quantidade de aposta em um jogo quando, por qualquer motivo, é interrompido" (SECADES, 2000, p. 10, tradução nossa).

- **Niccolo Fontana** (1499-1557), publicou sua solução, em seu trabalho *General Trattato* (Tratado Geral), sua proposta era fazer a divisão da aposta na proporção entre o tamanho da vantagem e a duração do jogo, mas tal divisão falharia quando fosse muitas jogadas (WARSI, 2020).

- **Girolamo Cardano** (1501-1576), famoso por ser um apostador de jogos de azar que buscava matematicamente estratégias para ganhar em suas apostas, (MLODINOW, 2009), evidenciou que a solução de Pacioli e Fontana seria incorreta, pois só valeria para alguns casos particulares. Cardano escreveu o livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro sobre os jogos de azar), este livro foi "primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza" (MLODINOW, 2009), publicado em 1663.

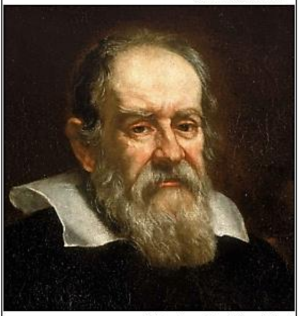
Além do mais, Cardano, propôs a lei do *espaço amostral*, que é à ideia de que os possíveis resultados de um processo aleatório podem ser compreendidos como pontos no espaço" (Mlodinow, 2009, p. 59), lei que formou a base da descrição matemática da incerteza, ele definiu como: "*um processo aleatório com resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultado"*. Por exemplo, segundo Mlodinow (2009) um dado tem 6 lados, esses seis resultados formam o espaço amostral, e a probabilidade de obter um desses seis lados é $\frac{1}{6}$.

Figura 3: Representação do Espaço Amostral de 1 dado



Fonte: Vasconcelos (2023)

Galileu Galilei



https://revistagalileu.globo.

Em concordância com os estudos de experimentos aleatórios, envolvendo jogos de azar, apresenta-se **Galileu Galilei** (1564-1642), que foi solicitado a solucionar tais problemas a pedido do grão-duque de Toscana, Ferdinando Dei Medici, que envio por meio de uma carta o seguinte problema, para ser respondido matematicamente: *"Quando jogamos três dados, porque o número 10 aparece com mais frequência que o número 9?"* **(***MLODINOW, 2009, p. 70-71).*

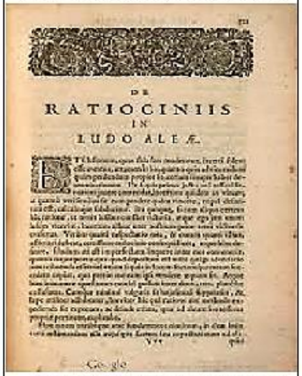
Para atender ao pedido do grão-duque, Galileu escreveu um manual sobre jogos de azar, intitulado *Sopra le scoperte dei dadi* (Sobre os resultados dos jogos de dados), compreendido em dois sentidos: "primeiro como uma forma de entender as constantes frequências no processo de chances e, segundo, como um método de determinar situações presumíveis de fé" (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p. 10).

De acordo com Zindel (2015) Galileu fez uma explicação razoavelmente simples para esta situação, pois observou que no lançamento dos três dados é necessário levar em consideração que há 216 possibilidades dos resultados. Mlodinow (2009, p. 72) explica que Galileu apresentou uma solução utilizando o seguinte princípio "*a probabilidade de um evento depende do número de maneiras pelas quais pode ocorrer"* o que não se tratava de uma explicação diferente, mas de como calcular tal problema, pois o número de maneiras de como um resultado pode acontecer é ponto fundamental para determinar sua probabilidade.

Contudo Galileu parece não ter se importado com tal efeito, pois, "Ele não levou seu trabalho sobre a aleatoriedade além do problema dos dados, e afirmou, no primeiro parágrafo do trabalho, que estava escrevendo sobre esse jogo somente porque havia recebido 'a ordem de fazê-lo'" (MLODINOW, 2009, p. 72).

Em meados do século XVII, a Teoria da Probabilidade, foi formalmente considerada de fato, através da publicação do Tratado: "*De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Raciocínio Relacionado aos Jogos dos Dados), do matemático **Christian Huygens** (1629-1695), que ficou sabendo que os matemáticos Franceses **Blaise Pascal** (1623-1662) e **Pierre de Fermat** (1601-1665), tinham trocados cartas contendo as soluções para o *problema dos pontos*¸ enviadas pelo Chevalier de Méré, isto foi considerado fundamental para tornar pública a teoria da probabilidade.

Livro: De Ratiociniis in Ludo Aleae



Fonte: http://sciences.amisbnf.org/

- Pascal usou o Triângulo Aritmético, apresentando as probabilidades de cada jogador ganhar em diferentes pontos e dividir as apostas de forma justa e Fermat utilizou combinações das possíveis alternativas de ganhar ou perder e assim formou 6 arranjos completos de ordem 4. Dando início aos primeiros elementos da ciência das probabilidades.

Segundo Laplace (2010) Pascal e Fermat forneceram contribuições, como princípios e métodos para submeter a probabilidade de um evento ocorrer utilizando cálculo, e enfatiza que ninguém antes deles resolvera questões desse gênero.

Jacob Bernoulli

Fonte: http://sciences.amisbnf.org/

Jacob Bernoulli (1654-1705) "reconheceu a ampla aplicabilidade das probabilidades" (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 214) e dedicou-se a testar na prática o que ocorria em cada situação de um longo teste, então propôs a determinação de probabilidades a *posteriori* por observação dos resultados obtidos em várias instâncias semelhantes, visando quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades e calcular o número exato dessas observações (KATZ, 2010).

Segundo Aragão (2009, p. 88) a partir das observações e aplicações de Jacob Bernoulli, inicia-se um "processo de abstração das possibilidades fora das limitações dos jogos e dos seguros; á ele é atribuído a primeira sistematização de uma teoria das probabilidades, tendo em vista suas aplicações práticas", ele pretendia determinar um tratamento formal para os casos de eventos que não tinham a mesma probabilidade de ocorrer.

Esses resultados, deram origem ao **Teorema Áureo**, conhecido também com **Lei dos Grandes Números**, permitindo a Bernoulli conseguir a prova científica que o levou a experiência de quantificar a medida da incerteza (LAPLACE, 2010, p. 214) com isso apresentou "a teoria geral das combinações e das sequências, aplicando-a a várias questões difíceis relativas aos acasos".

Livro Ars Conjectandi

JACOBI BERNOULLI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

DE LUDO PILÆ

RETICULARIS.

BASILEÆ,

Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

Fonte: http://sciences.amisbnf.org/

Jacob Bernoulli foi considerado o primeiro matemático a apresentar um Teorema nos estudos da teoria da probabilidade e levou 20 anos para provar esta lei, que foi publicada no livro *Ars Conjectandi* (A Arte da Conjectura) lançado em 1713.

A Lei dos Grandes Números estabelece a seguinte definição: se "p é a probabilidade de um evento, se m é o número de ocorrências do evento em n experiências, se ε é um número positivo arbitrariamente pequeno, e se P é a probabilidade de que a desigualdade $\left|\frac{m}{n-p}\right| < \varepsilon$ esteja satisfeita, então $\lim_{n \to \varepsilon} P = 1$" (BOYER, 1974, p. 309), definição que fundamentou a Probabilidade Frequentista, usada em experimentos aleatórios, como jogar dados, lançar moeda, realizar sorteios, na condição que seja realizado um número suficientemente grande de tentativas para que a probabilidade estimada seja precisa.

A definição mais atual da probabilidade frequentista é abordada no site clubes.obmep.org.br/blog (2022) que considera um experimento aleatório como espaço amostral Ω. Deve considerar que um experimento seja repetido nas mesmas condições por n tentativas independentes, sendo $n > 0$, e nesta condição um evento E ocorra m vezes, sendo$m \leq n$. Então, a frequência relativa de E é denotada como $f_r(E)$ e definida como:

$$f_r(E) = \frac{m}{n} \longrightarrow \text{Sendo que } 0 \leq m \leq n, \text{ então } 0 \leq f_r(E) \leq 1$$

Katz (2010) ressalta que a contribuição que Jacob Bernoulli deu a teoria da probabilidade é digno de menção. Segundo Mlodinow (2009, p. 105) o teorema trata de como os resultados refletem as probabilidades subjacentes quando se faz muitas jogadas observando o que ocorre no limite de um número arbitrariamente grande de jogadas repetidas, observações que Jacob Bernoulli testou com diversas situações, como por exemplo, uma urna com pedras coloridas:

Imaginem uma urna cheia contendo 3 mil pedrinhas brancas e 2 mil pretas, uma razão de 60% *de brancas contra* 40% *de pretas. Então, com que precisão devemos esperar que a proporção de pedrinhas brancas retiradas se aproxime de* 60%*, e com qual probabilidade?".*

Segundo Mlodinow (2009) essa situação foi submetida a seguinte condição:

- Retira-se uma pedrinha da urna, "com reposição"; para não alterar a proporção 3: 2;

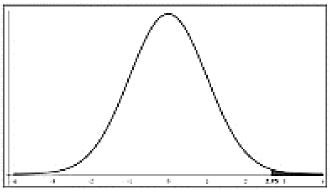
- Deve-se identificar a probabilidade a priori de sair uma pedrinha branca.

Abraham De Moivre (1667-1754) contribuiu com o desenvolvimento da teoria da probabilidade, publicando livros como: *De Mensura sortis* (Sobre as Medidas das

Possibilidades), *Miscellanea analytica (*Miscelânea de Análise) e *The Doctrine of Chances* (Doutrina das chances) (BOYER, 1974). Suas obras foram consideradas um avanço na história da probabilidade, devido as regras matemáticas que estavam evoluindo, permitindo que De Moivre apresentasse regras gerais e as aplicações detalhadas dessas regras (KATZ, 2010).

Segundo Warsi (2020) De Moivre analisou que a distribuição binomial, introduzida por Jacob Bernoulli, contendo situações como: ***sucesso*** *e* ***fracasso***. Tinham dois resultados igualmente prováveis, ele percebeu que esses resultados binomiais se aglomeravam ao redor de uma média, conforme mais dados eram coletados, decidiu representá-los “criando assim uma curva de sino para distribuição binomial” (WARSI, 2020, p. 193.

Curva de sino - De Moivre



Fonte: proeducacional.com (2022)

Para Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 221) a *curva da frequência normal* era “como uma aproximação para distribuições binomiais, usando essa ideia para melhorar a estimativa de Bernoulli quanto ao número de observações necessárias para se tirar conclusões precisas”.

Pierre-Simon Laplace

Fonte: https://historia-biografia.com/

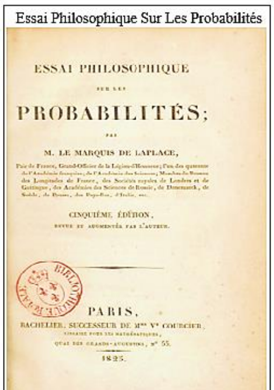
Pierre-Simon Laplace (1749-1827), estudou profundamente as informações sobre os eventos e situações que envolviam a teoria das probabilidades, estendendo-a “à ciência e introduziu suas ferramentas matemáticas para prever a probabilidade de muitos incidentes e até mesmo de fenômenos naturais [...] além disso ela é usada em outros campos, como: psicologia, economia, engenharia e esporte” (WARSI, 2020, p. 165), e a ele é atribuído também sua aplicação na Estatística.

Em 1812, Laplace publicou o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), abordando temas como jogos de azar, probabilidade da causa, seguro e demografia (GILLISPIE, 2007, p. 1527). Essa obra “foi o primeiro estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade”, ou seja, a teoria das probabilidades.

Laplace foi além do cálculo da probabilidade, explorando as propriedades da probabilidade, caracterizando-a “como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana” (Ibid., p. 1527), buscando aplicar métodos a eventos práticos, formulando e reformulando problemas dessa natureza.

Em 1814, publicou o livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades) tendo uma linguagem mais comum ao entendimento matemático do que *Théorie*

Essai Philosophique Sur Les Probabilités



ESSAI PHILOSOPHIQUE
SUR LES
PROBABILITÉS;
PAR
M. LE MARQUIS DE LAPLACE,
CINQUIÈME ÉDITION,
PARIS,
1825.

Fonte: https://gallica.bnf.fr/

analytique (GILLISPIE, 2007, p. 1532), mostrando a “importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência”.

Laplace defendia que a maioria dos casos demandava problemas que envolvia probabilidade. Segundo Gillispie (2007, p. 1426) este livro “sem dúvida teve vida mais longa e, quase certamente, um número maior de leitores do que qualquer outro texto” feito por Laplace, pois,

> Quase todos os nossos conhecimentos são apenas prováveis; e no pequeno número de coisas que podemos saber com certeza, mesmo nas próprias ciências matemáticas, os principais meios para se chegar à verdade – a indução e a analogia – são fundados nas probabilidades (LAPLACE, 2010, p. 41).

Dos muitos fenômenos que estudou, Laplace concluiu que “a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos” (LAPLACE, 2010, p. 46), e de suas análises dos possíveis resultados das apostas nos jogos de azar, definiu que “quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade” (LAPLACE, 2010, p. 46).

Laplace (2010), organizou a *definição clássica da probabilidade*, como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis,* aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma:

$$Probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Junqueira (2014), destaca que a probabilidade de ocorrência de um evento é dada por:

$$(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{n}\,(\mathbf{S})}$$

onde: $P(A)$ = probabilidade do evento; (A) = nº de elementos do evento e (S) = nº de elementos do espaço amostral. Com $0 \leq P(A) \leq 1$, que devem satisfazer as Propriedades:

i. $P(S) = 1$
ii. $P(EA) \geq 0$, para todo $A \subset S$
iii. Se A e B sãs eventos mutuamente exclusivos então: $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Laplace (2010, p. 49) explica que “A teoria das probabilidades se relaciona a considerações tão delicadas que não é surpreendente que, a partir dos mesmos dados, duas pessoas encontrem resultados diferentes, sobretudo em questões muito complexas”. Para Rotunno (2007) as obras e princípios que Laplace atribuiu a Teoria da Probabilidade, são definidos como teoria clássica da probabilidade e “Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade” (ROTUNNO, 2007, p. 21).

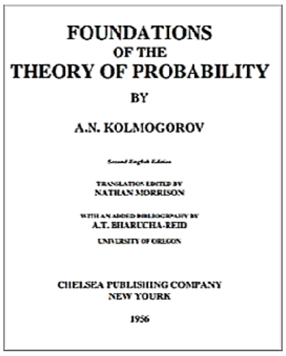
No século XIX, os personagens que colaboram com a teoria da probabilidade, tinham a seu favor um acúmulo de conhecimentos teóricos que foram desenvolvidos no século XVIII, favorecendo um avanço importantíssimo tanto em sua formulação teórica quanto em sua aplicação (ROTUNNO, 2007) alteando a probabilidade a um determinado ordenamento das relações dos seus conhecimentos.

Andrey Nikolaevich Kolmogorov

Fonte: https://timenote.info

O estudo da Teoria da Probabilidade, teve um nível de crescimento exponencial no século XX (ALMEIDA, 2005), com a contribuição de **Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)**, que defendeu que “A teoria da probabilidade, como disciplina matemática, pode e deve ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).

Fundamentos da Teoria da Probabilidade



FOUNDATIONS
OF THE
THEORY OF PROBABILITY
BY
A.N. KOLMOGOROV

TRANSLATION EDITED BY
NATHAN MORRISON

WITH AN ADDED BIBLIOGRAPHY BY
A.T. BHARUCHA-REID
UNIVERSITY OF OREGON

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YOURK
1956

Fonte: https://gallica.bnf.fr/

Em 1933, Kolmogorov cumpre seu propósito com êxito e publica o livro *Grundbegriffe der* Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Fundamentos da Teoria da Probabilidade),* apresentando a forma axiomática da teoria da probabilidade utilizando de axiomas já existentes e enfatizando que seu “objetivo é alcançar a máxima simplicidade tanto no sistema de axiomas quanto no desenvolvimento posterior da teoria” (KOLMOGOROV, 1956, p. 01, tradução nossa).

Axiomas:

“Seja E uma coleção de elementos $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, que chamaremos de *eventos elementares*, e $\mathfrak{F}$ um conjunto de subconjuntos de E; os elementos do conjunto $\mathfrak{F}$ serão chamados de eventos aleatórios”, são propriedades que Kolmogorov (1956, p. 16, tradução nossa) definiu, como:

I. $\mathfrak{F}$ é um campo de conjuntos.

II. $\mathfrak{F}$ contém o conjunto E.

Entretanto, as três propriedades que ficaram conhecidas como axiomas de Kolmogorov (1956) do livro *Fundamentos da Teoria da Probabilidade*, são:

III. A cada conjunto A em $\mathfrak{I}$ é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A.

IV. $P(E)$ é igual a 1.

V. Se A e B não têm elemento em comum, então: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Axiomas que Kolmogorov (1956) estabeleceu fazendo uma comparação da teoria dos conjuntos com a teoria da probabilidade. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico (ROTUNNO, 2007) em qualquer ciência.

Segundo Avelar (2018) os conceitos que foram sendo atribuídos anteriormente a probabilidade, acabaram não sendo suficientes para embasar uma formulação matemática rigorosa, foi a partir da ideia que Kolmogorov, por meio de seus estudos e experiências e considerando que a probabilidade precisava de uma fundamentação, que decidiu “estabelece uma definição axiomática de probabilidade, em que os conceitos anteriores se tornam casos particulares” (AVELAR, 2018, p. 28).

Isto foi muito importante, pois permitiu que Kolmogorov definisse os axiomas que fundamentaram a teoria da probabilidade de forma rigorosa e matemática, estabelecendo que a teoria da probabilidade se tornasse uma disciplina matemática bem fundamentada, com suas próprias leis e regras.

Sugestões de Atividades do Texto II

1ª) Análise e explique as diferentes probabilidades mencionadas no texto, destacando como elas contribuíram para o desenvolvimento da teoria da probabilidade. Comente também como essas probabilidades são reconhecidas atualmente e de que maneira hoje, e como elas influenciaram a forma como a teoria da probabilidade é entendida e aplicada em diversos contextos.

2ª) Suponha que você esteja participando de um jogo com dois dados justos e idênticos, e queira determinar a probabilidade de obter a soma de 7 resultados. Utilize seu raciocínio e criatividade para calcular os resultados, explorando mais de uma abordagem de probabilidades. Análise e compare as semelhança e diferenças entre as soluções obtidas.
Observação: Represente o espaço amostral completo do lançamento de dois dados em uma tabela.

3ª) Sabendo que no lançamento de 3 dados o espaço amostral é 216, conforme Galilei apresentou no texto. Análise e utilize sua melhor estratégias para fazer os cálculos e responda os seguintes itens;
a) Represente o espaço amostral completo do lançamento de três dados em uma tabela.
d) Forme as 25 possiblidades da soma igual a 9 e as 27 possibilidades da soma igual a 10, que Galilei apresentou para o grão-duque.

b) Calcule a probabilidade de cada uma dessas somas ocorrer,

c) Calcule a probabilidade de se obter uma soma par neste espaço amostral,

d) Qual é a probabilidade de se obter a soma de números primos?

e) Qual é a probabilidade de se obter exatamente duas faces com o número 6 ao lançar 3 dados?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: Questão adaptada do livro do 8º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 88)

4ª) - Questão 39: Sortear uma letra de um texto qualquer é um experimento aleatório? Porque, identifique sua resposta de acordo com o texto II.

5ª) - Questão 40: Em uma urna, há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retiramos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela? Não tendo reposição da bola amarela. Qual é a probabilidade da segunda bola retirada ser preta?

6ª) - Questão 41: a professora vai sortear, ao acaso, um aluno entre os 40 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala. Qual é a probabilidade de ser sorteado um menino?

7ª) - Questão 43: Olhando para a classe, verifique quantos alunos há neste momento em sala de aula. Quantos são meninos? Qual é a probabilidade de que, ao sortear um aluno ao acaso, seja uma menina?

Nota Didática ao Professores

Na primeira questão os alunos devem investigar as diferentes probabilidades mencionadas no texto e explicar como elas contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade. Mostrando que houver acertos, erros e maneiras distintas de solução, suas respostas devem contemplar um pouco de cada personagem que contribui ao longo dos séculos.

Na segunda questão devem calcular a probabilidade utilizando diferentes abordagens como a clássica e a frequenstista e comparar as soluções realizadas por ambas. Na terceira questão devem primeiramente representar o espaço amostral em uma tabela, para melhor visualização e calcular as probabilidades determinadas nas alternativas.

Na quarta, os alunos podem responder de acordo com seu entendimento sobre experimento aleatório, de acordo com isto, deve ficar esclarecido para eles que o processo de seleção de uma letra é imprevisível e cada letra pode ter a mesma chance de ser escolhida, pois não há indicações de que a escolha da letra seja influenciada por algum critério, o que confirma a aleatoriedade desse experimento.

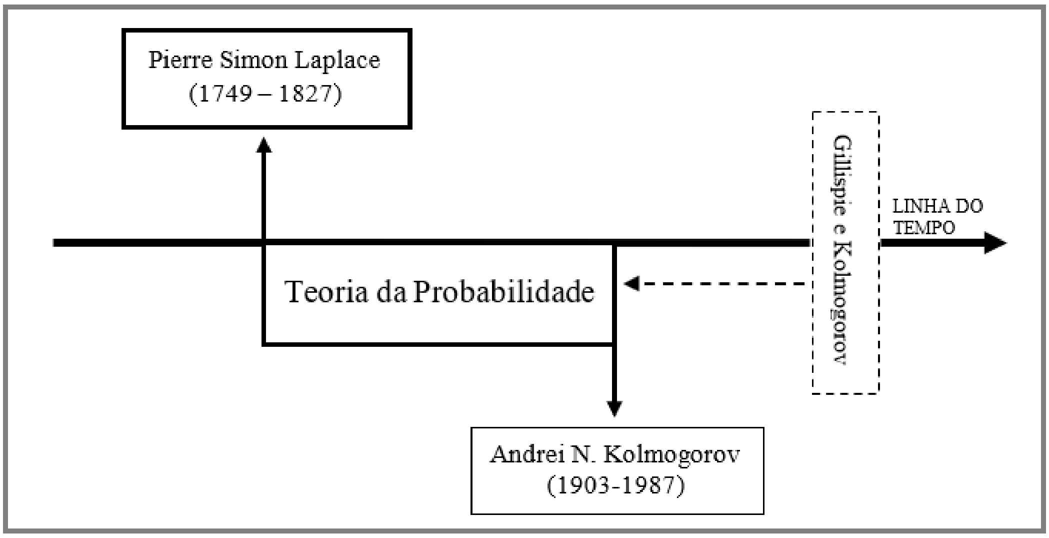
Na quinta, sexta e sétima questão os alunos devem interpretar e analisar informações essenciais que definem o uso do cálculo das probabilidades. realizada através de experimento em sala de aula.

5.3. RECORTE III: DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA À DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

O texto III é composto a partir do capítulo quatro, com o objetivo de apresentar um *recorte histórico* proposto por Chaquiam (2020). Neste recorte em específico, será construído um texto sobre a Probabilidade Clássica, definida pelo matemático Laplace até sua Axiomatização definida pelo matemático Kolmogorov, ou seja, uma história da Probabilidade Clássica à Probabilidade Moderna.

Sabe-se que algumas situações probabilísticas são difíceis e complexas de prever e interpretar. Por isso, o ensino de probabilidade pode e dever ser articulado com outros conceitos matemáticos, como álgebra, números decimais, fracionários e porcentagens, para ajudar a utilizar adequadamente a interpretação da fórmula e saber usar sua aplicação em situações diversas que envolvam cálculos.

Diagrama Metodológico: Da Definição clássica a Definição Axiomática



Fonte: Elaborado pela Autora, (2023).

Texto III: DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA À DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

No início do século XIX, o matemático Pierre Simon Laplace (1749-1827), foi responsável pela primeira definição conhecida como *Definição clássica da Probabilidade*, foi por meio de seus trabalhos, que os jogos de azar, ganharam um reconhecimento, sendo analisado por meio de cálculo probabilísticos, em diferentes campos de estudos e assim conseguiu introduzir a teoria da probabilidade no mundo da matemática.

www.catalunyavanguardista.com

Para Laplace, "a ciência do azar ou probabilidade" (LAPLACE, 1974, p. 114) era uma das teorias matemáticas mais delicadas e engenhosas, resultante da debilidade da mente humana. Em seus estudos iniciais, ele definiu com clareza o sentido das palavras *acaso* e *probabilidade*. Em relação à primeira, ele afirmou que não possui realidade em si, quando nela não há nada de regular ou quando não se conhece as causas que a acarretam. Quanto a segunda, ele definiu como um conjunto de objeções à probabilidade, como aquelas que não são possíveis quantificar, como esperança, medos e estados mentais (GILLISPIE, 2007).

A probabilidade está ligada a um espaço amostral

Nesse contexto, duas relações eram pertinentes à Laplace, como "a tarefa de calcular a probabilidade de eventos complexos, compostos de eventos elementares cujas respectivas possibilidades não eram conhecidas" e "determinar numericamente a influência que acontecimentos passados exerciam na probabilidade de acontecimentos futuros" (GILLISPIE, 2007, p. 1461). Para Laplace, com relações bem definidas, seria possível elaborar uma lei que pudesse revelar as causas desses acontecimentos.

Gillispie (2007) apresenta uma análise da necessidade de Laplace em aprimorar sua epistemologia, para distinguir a abordagem para determinar as possibilidades de um evento, em duas condições: *A priori* e *A posteriori*, ele se dedicou a estudar cada aspecto relevante das condições para avançar com os estudos da probabilidade e observou que o conhecimento humano também era um dos fatores determinantes. Pois, "a situação do conhecimento entrava na determinação da probabilidade em dois níveis: no que sabemos sobre a possibilidade absoluta dos eventos e em nosso desconhecimento das leis que sempre parecem produzir os eventos fortuitos" (GILLISPIE, 2007, p. 1462).

E foi desses conhecimentos que Laplace publicou, em 23 de Março de 1812, o livro *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades), seu primeiro "estudo em larga escala inteiramente dedicado a uma nova especialidade, partindo de problemas antigos e amiúde triviais para áreas em que, até então, a quantificação fora inexistente ou quimérica" (GILLISPIE, 2007, p. 1527), trazendo os principais tipos de problemas já abordados por matemáticos geniais e trazendo novas ideias para aplicar a probabilidades, passando do cálculo da probabilidade para as propriedades da probabilidade. Este autor ressalta, que,

> É lícito dizer que ele organizou o tema, reunindo os principais tipos de problemas da teoria do acaso já abordados por muitos matemáticos, inclusive ele mesmo, de maneira meio fortuita, e tornando a abordá-los em conjunto com problemas das novas áreas de aplicação na filosofia da ciência, na astronomia, na geodésia, na instrumentação, na teoria dos erros, nas estimativas populacionais E nos procedimentos de foros judiciais e órgãos eleitorais (GILLISPIE, 2007, p. 1526).

Nesta obra, Laplace concentrou os avanços conseguidos à época, marcando um patamar no desenvolvimento do cálculo das probabilidades. "Sua contribuição é tão forte que alguns aspectos "clássicos" do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome" (ALMEIDA, 2005, p.14-15). Pedro Leite de Santana[19] afirma que Laplace foi "um genial homem da ciência do Século das Luzes, ainda pouco conhecido do público brasileiro" (SANTANA, 2010, p. 10).

Gillispie (2007) destaca que Laplace organizou os princípios gerais da probabilidade, incluindo a definição, a regra da multiplicação, as probabilidades de eventos independentes, o teorema sobre a probabilidade das causas e também analisou a distinção entre a expectativa matemática e a expectativa moral, fornecendo com seu estudo uma "caracterização da probabilidade como um ramo do conhecimento exigido pelas limitações da inteligência humana, e que servia para corrigir parcialmente suas deficiências" (GILLISPIE, 2007, p. 1527).

De acordo com Katz (2010) Laplace utilizou a definição proposta por Cardano, ou seja, "a razão do número de casos favoráveis e o número de casos possíveis", incluindo também a demonstração do teorema do limite central e sua aplicação à questão das inclinações das órbitas dos cometas. Laplace sugeriu que "era de opinião que a teoria das probabilidades podia vir a ter implicações nas ciências sociais, do mesmo modo que o cálculo era o maior instrumento de matematização das ciências físicas" (KATZ, 2010, p. 979).

De diversos problemas que Laplace formulou, reformulou e elaborou, Gillispie (2007) cita situações como problemas clássicos de probabilidade direta, tais como analisar situações de retirar números pares ou ímpares, retirar determinada cor de bola, ordem sequencial na retirada de bolas numeradas, divisão de prêmio, derrota ou vitória em jogos regulamentares. Berlingoff e Gouvêa (2008) enfatizam que o livro *Teoria Analítica da Probabilidade* era,

> Um *tour de force* enciclopédico que reunia tudo o que ele e os outros tinham feito quanto à probabilidade e estatística até então. Era realmente uma obra mestra, mas seu

[19] tradutor do livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités*

> estilo técnico, denso, tornava muito dela inacessível a todos, exceto os leitores mais determinados e matematicamente sofisticados (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 215).

Diante desta situação, Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 217) enfatizam que Laplace decidiu escrever um livro que tornasse suas ideias mais acessíveis a um público maior, então em 14 de novembro de 1814, publicou o livro *Essai Philosophique Sur Les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidade), neste livro Laplace conseguiu abranger um número maior de leitores, pela clareza ao expor o tema, elevando-o ao sucesso, pois nele consta a "importância que a probabilidade, a estatística e a análise estocástica foram assumindo mais e mais na ciência, nas ciências sociais e na filosofia da ciência".

Laplace (2010) organizar exemplos práticos que satisfizessem as suas ideias, dos muitos fenômenos que estudou e concluiu que "a probabilidade se deve em parte a nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos" (LAPLACE, 2010, p. 46) e criou uma fórmula para calcular a probabilidade, baseada na regra posta por Cardano para os jogos de azar, segundo esta regra, "quando todos os casos são favoráveis a um evento, sua probabilidade se transforma em certeza, e sua expressão torna-se igual à unidade" (LAPLACE, 2010, p. 46).

Laplace (2010), organizou a *definição clássica da probabilidade*, como sendo o *número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis*, aplicados a experimentos finitos e igualmente possíveis (equiprováveis), organizada na seguinte forma:

$$Probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Em Junqueira (2014), destaca-se, a probabilidade de ocorrência de um evento dada por:

$$P(A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)} \longrightarrow$$

$P(A)$ = probabilidade do evento;
(A) = nº de elementos do evento;
(S) = nº de elementos do espaço amostral.

Com $0 \leq P(A) \leq 1$, que devem satisfazer as Propriedades:

i. $P(S) = 1$
ii. $P(EA) \geq 0$, para todo $A \subset S$
iii. Se A e B sãs eventos mutuamente exclusivos então: $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Laplace (2010), ressalta que para organizar as ideias definiu dez *Princípios Gerais*, considerados fundamentais para o Teoria Clássica da Probabilidade, por permitirem que o uso da teoria da probabilidade pudesse ser aplicado em diversas áreas do conhecimento e "na infinita variedade dessas combinações, várias delas se prestam com facilidade ao cálculo, enquanto outras exigem cálculos mais difíceis" (LAPLACE, 2010, p. 85).

De acordo com Rotunno (2007, p. 21) "Pode-se dizer que os trabalhos de Laplace podem ser considerados como o final da terceira etapa na evolução da teoria matemática da probabilidade". Para Boyer (1974), a Teoria de Probabilidade deve mais a Laplace do que a qualquer outro matemático dessa história. Pois seus trabalhos são referências a leituras do tema, sem contar que "propicia grande ganho intelectual" (SANTANA, 2010, p. 20).

No século XX, o matemático Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), avançou com os estudos da Teoria da Probabilidade para um nível de crescimento exponencial, tornando-se um ramo importante da matemática (ALMEIDA, 2005). De acordo com O'Connor e Robertson (1999, tradução nossa), os matemáticos russos, desempenharam um papel fundamental nos estudos das áreas relacionadas ao cálculo de probabilidades e estatística. Eles formaram uma escola liderada principalmente por Kolmogorov, que se destacou por seus trabalhos na teoria da probabilidade.

https://timenote.info

Kolmogorov (1956, p. 01, tradução nossa) estabeleceu que "a teoria da probabilidade, como disciplina matemática, poderia e deveria ser desenvolvida a partir de axiomas exatamente da mesma forma que a Geometria e a Álgebra". De acordo com Eugênio (2016, p. 26) foi "o esforço de diversos matemáticos em conseguir fazer a Probabilidade ter um lugar de destaque na Matemática formal, mais conhecida como Matemática pura", ainda segundo este autor, esse esforço "rendeu o reconhecimento da Probabilidade enquanto função Matemática e convergência entre a teoria dos Conjuntos e a teoria da Medida, as quais até então nunca tinham tido diálogo com áreas da Matemática" (EUGÊNIO, 2016, p. 26).

Kolmogorov (1956) publicou o livro *Grundbegriffe der* Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Fundamentos da Teoria da Probabilidade)* em 1933, apresentando a forma axiomática da teoria da probabilidade e mostrando sua aplicação a diversas áreas do conhecimento, estabelecendo "uma fundamentação teórica rigorosa e não se limita aos casos de eventos equiprováveis, pois ela pode ser aplicada a qualquer tipo de evento e/ou espaço amostral" (SALSA; MOREIRA, 2014, p. 18).

Nestas condições, Kolmogorov foi considerado o primeiro matemático a apresentar uma forma axiomática da probabilidade. Rotunno (2007) afirma que os axiomas de Kolmogorov,

> Tornaram a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, sobretudo sob o aspecto teórico. A utilização de tais modelos como instrumento explicativo voltado ao controle de grande número de sucessos é hoje uma opção cada vez mais utilizada no mundo científico, seja nas ciências humanas ou nas políticas (ROTUNNO, 2007, p. 33).

Em Salsa e Moreira (2014) destaca-se uma notação atual das ideias de Kolmogorov. Primeiramente, ele estabeleceu propriedades que definiriam os axiomas como sendo: Seja ε um experimento aleatório e Ω um conjunto formado por todos os eventos elementares desse experimento, em seguida definiu: Seja A o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω, inclusive o próprio Ω (evento certo) e o conjunto vazio φ (evento impossível). Uma função P definida em A, que associa a cada evento de A um número no intervalo [0,1], é chamada probabilidade do evento, isto é: $P : A \rightarrow [0, 1]$ que deve satisfazer as seguintes condições, estabelecidas em Kolmogorov (1956, p. 02, tradução e adaptação nossa):

I - A cada conjunto A em Ω é atribuído um número real não negativo $(P)A$. Esse número $P(A)$ é chamado de probabilidade do evento A, ou seja, $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$

II - $P(\Omega) = 1$

III - Se A e B não têm elemento em comum, então: $\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B)}$

Essa definição moderna que Kolmogorov atribuiu a teoria da probabilidade, baseada na teoria das medidas, considera experimentos em que os resultados possíveis podem ser infinitos e não necessariamente equiprováveis, pois com os Axiomas Kolmogorov definiu uma medida de certeza, mais ampla e flexível, pois pode ser aplicada a experimentos mais complexos. Em Historia de la Probabilidad ([2020], tradução nossa), ver-se que,

> Dos três axiomas fundamentais de Kolmogorov, a maioria das propriedades fundamentais de probabilidade que conhecemos e manuseamos hoje são deduzidas. Além disso, esses axiomas têm a vantagem de serem consistentes, pois existem objetos reais que os satisfazem e, portanto, especificam a Matemática em nossas vidas (HISTORIA DE LA PROBABILIDAD ([2020], p. 19, tradução nossa).

Entretanto, os axiomas definidos por Kolmogorov não invalidaram as definições da probabilidade clássica organizadas por Laplace. Em Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021, pp. 98-99) apresentaram as definições de Laplace usando os axiomas de Kolmogorov (1956), nas seguintes situações:

- Considerando o espaço amostral finito $\Omega = \{a1, a2, \dots, an\}$ e a σ −álgebra discreta das partes de Ω. Nesse caso, o $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ mensurável será o conjunto de partes de Ω;

- Definindo a função de probabilidade para qualquer evento A da seguinte maneira:

Para os n eventos elementares $\{ai\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, associamos uma probabilidade $pi = P(\{ai\})$ que satisfaz as seguintes condições:

A - $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$; e B - $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Para um evento qualquer $A = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}\} \in \mathcal{F}$, definindo como

$$P(A) = P_{j1} + P_{j2} \dots + P_{jk} .$$

Assim, o espaço de Probabilidade para esse caso seria $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$.

Se no caso anterior temos a propriedade $p = P(\{a_1\}) = \cdots = P(\{n\})$, diz-se que Ω é um espaço amostral finito equiprovável. Fazendo uso do item B, obtém-se que $p = \frac{1}{n}$. Assim, neste caso a definição clássica de Probabilidade torna-se:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ elementos\ de\ A}{número\ total\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

De acordo com Vidarte, Chachapoyas e Cavalari (2021), a definição clássica da probabilidade tem sido usada com sucesso para resolver muitos problemas por meios de técnicas de análise combinatória e de contagem. A história da matemática desempenha um papel importante na compreensão da evolução da probabilidade, desde os primeiros problemas e soluções, passando pela definição frequentista e clássica, até a modernização feita por Kolmogorov, que axiomatizou a probabilidade usando uma abordagem formal baseada em axiomas matemáticos.

Sugestões de Atividades do Texto III

1ª) Faça uma analogia entre a definição clássica e a definição moderna da probabilidade, e como elas podem ser utilizadas para ajudar a entender os conceitos relacionados a experimentos simples do cotidiano?

2ª) Explique a definição dada por Laplace para os termos “acaso” e “probabilidade” em seus estudos iniciais? Dê um exemplo matemático de cada um.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO: Questão adaptada do livro do 6º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 205).

3ª) - Questão 1: Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

a) Represente o espaço amostral completo do lançamento de dois dados.
b) Destaque os pares, do espaço amostral, que satisfazem a condição da soma igual a 10 pontos ou maior que Hugo precisa para ganhar.
c) Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?
d) Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta.
e) Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar?

4ª) Em um jogo de cartas, um jogador precisa retirar duas cartas de um baralho completo, que tem 52 cartas. O jogador ganha se a soma dos valores das duas cartas retiradas for um número par. Qual é a probabilidade de o jogador ganhar?

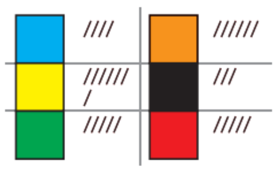
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO: Questão adaptada do livro do 6º ano (Matemática – Bianchini, 2007, p. 271)

5ª) - Questão 1: utilizando probabilidade clássica responda as questões adaptadas.

A probabilidade das cores

As irmãs Neusa e Nilza fizeram uma experiência de jogar um dado cúbico e anotar a cor que ficava na face superior para verificar a probabilidade das cores. Elas esperavam que a probabilidade de ficar na face superior fosse a mesma para todas as cores, isto é, $\frac{1}{6}$.

Enquanto uma delas jogava o dado, a outra anotava a cor da face superior e colocava em um saquinho uma ficha com essa cor. Depois de Nilza jogar o dado 30 vezes, Neusa verificou a frequência de cada cor, ou seja, quantas vezes cada cor ficou na face voltada para cima e organizou as informações, de acordo com suas anotações em uma tabela.



a) faça a anotação na tabela correspondentes a frequência de cada cor:

Tabela de frequências das cores do dado						
Cor	Azul	Amarela	Verde	Laranja	Preta	Vermelha
Frequência						

b) Calcule a probabilidade de cada cor do experimento que as irmãs fizeram.

c) Análise, calcule e explique: Se as irmãs dobrarem o resultado de cada cor, a probabilidade de cada uma continuar sendo a mesma?

Nota Didática aos Professores

A primeira questão refere-se a uma explicação da definição Clássica, a resposta deve evidenciar os ventos equiprováveis e a relação entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos possíveis e da definição moderna que é mais geral, se aplica a qualquer tipo de evento, sendo baseada na teoria da medida e em conceitos como a função de probabilidade, os alunos devem explorar informações do texto. A segunda questão, precisa-se entender o conceito de cada palavra e sua utilização nos eventos que seguem na teoria da probabilidade explorando as informações no texto.

A terceira questão é uma adaptação do livro didático, na opção a) precisa representar o espaço amostral, que são 36 pares, na b) deve-se destacar os pares que a somar for 10 o maior, neste caso há 6 pares, na c) deve-se aplicar a formula para calcular a probabilidade de Hugo vencer, na d) deve destacar os pares que soma 8 ou mais para que ele possa ganhar e a e) analisar a probabilidade de quantas casas ele precisa andar pra vencer o jogo com 100%, neste caso 1 ou duas devido ao resultado.

A quarta questão envolve um experimento com cartas de baralho, objetivo é separar em pares e ímpares, calcular a probabilidade de retirar duas cartas, multiplicar essas probabilidades e somar os valores das duas retiras para obter a probabilidade esperada. A quinta questão, envolver preencher a tabela com os resultados da experiencias que as irmãs fizeram e calcular a probabilidade de cada cor. É necessário analisar se a probabilidade de obter a mesma quantidade de cores em uma outra retirada se mantem e explicar por que isso ocorre.

6. CONSTITUIÇÃO DO PROCESSO DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo será apresentado como foram obtidos os resultados na coleta de dados, para a validação dos recortes históricos e atividades, conforme a proposta de Chaquiam (2022), tendo como foco alcançar um número significativo de professores de matemática. É importante evidenciar, que se optou pela validação deste produto aplicado exclusivamente aos professores de matemática e a coleta de dados por meio virtual, devido a pandemia que iniciou no começo de 2020, causada pelo Covid - 19.

Como instrumento de coleta de dados o questionário virtual foi dividido em três partes, com questões objetivas e subjetivas. Para cada parte pretende-se avaliar as percepções que os professores apresentaram, na seguinte ordem:

- Primeira Parte é referente a avaliação do "**Texto Histórico**", ou seja, uma avaliação do texto principal, construído de acordo com referências bibliográficas levantadas;
- Segunda Parte refere-se à avaliação dos recortes I, II, e III, apresentados como um "**Conjunto do Recorte Histórico e Atividades**", reconstruindo e/ou adaptado do texto principal.
- Terceira Parte apresenta a "**Avaliação Complementar**" para validação do produto Educacional

O questionário foi elaborado seguindo as alternativas de múltipla escolha para indicar a percepção do item avaliado de forma percentual, que varia de 0% a 100%, indicado da seguinte maneira: De nenhuma forma (0%); Pontualmente (25%); Em parte (50%); Na Maioria das vezes (75%) e Integralmente (100%). Em cada questão, foi deixado de forma opcional, uma questão aberta, para que o professor pudesse contribuir de forma qualitativa para melhorar a utilização deste produto.

Este questionário está disponível no *Google Apps*, que é um instrumento de coleta de dados online, que oferece recursos flexíveis de fácil uso e personalização, além de poder ter inserido os links para a apreciação dos recortes históricos e atividades que os professores precisavam ter para poder avaliar e contribuir com suas percepções.

Quanto a coleta de dados, o *google forms*, tem organização eficiente das respostas, que após cada formulário preenchido, ele automaticamente as organiza em um padrão virtual eficiente, além de realizar uma análise estatística, por ter uma interface intuitiva para visualizar, analisar e exportar os dados coletados.

E para validar esta abordagem, primeiramente foi enviado aos professores um convite virtual por aplicativos, no qual já constava a link para o questionário virtual. Ao aceitar o convite o professor era direcionado ao preenchimento do questionário virtual. Na primeira etapa de preenchimento foi apresentado aos participantes o tema e a intenção do formulário, solicitado sua permissão por meio da assinatura na marcação do “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido”, para então ser direcionado para a segunda etapa, que consta com questões relacionadas ao seu perfil com professor de matemática, em seguida era direcionado para as partes 1, 2 e 3, que foram analisadas.

6.1. AVALIAÇÃO DO TEXTO HISTÓRICO

Parte 1: UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE. Na avaliação do texto principal – “Texto Histórico” – o professor deverá conhecer o texto, que está disponível no link desta parte 1, para posterior, avaliações e contribuições neste produto, assinalando as opções disponíveis das perguntas, quais são:

1. Você considera que o uso de recortes da história e atividades relacionados a teoria da probabilidade, pode ajudar os alunos a compreender melhor o seu conceito, e entender "como", "porque" e "pra quê" surgiu essa teoria?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

2. Você considera que o uso de exemplos históricos na educação básica pode ajudar a desenvolver o pensamento crítico e a compreensão de como a probabilidade evoluiu?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

3. Você acredita que a história da probabilidade pode ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

4. Você acha que a história da probabilidade pode inspirar o aluno a se interessar mais pela matemática?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

5. O recorte histórico sobre o ensino da probabilidade e as atividades apresentadas, podem contribuir para a formação didática e pedagógica do professor de matemática?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

6.2. AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DE ATIVIDADES

Parte 2: Nesta Parte, foram inseridos três recortes históricos e atividades, reconstruídos do texto principal apresentado na parte 1, o professor deve analisar a compreensão, a linguagem, objetivos e habilidades do conteúdo e das questões:

- Recorte I e Atividades

1. O recorte histórico "Um problema que deu início a Teoria da Probabilidade", apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)

- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

2. O conteúdo da Atividade I está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

3. A Atividade I apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

4. As questões constantes para a Atividade I, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

- Recorte II e Atividades

1. O recorte histórico “Um História da Probabilidade”, apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)

- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

2. O conteúdo da Atividade II está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

3. A Atividade II apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

4. As questões constantes para a Atividade II, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

- Recorte III e Atividades

1. O recorte histórico “Da Definição Clássica à Definição Axiomática", apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

2. O conteúdo da Atividade III está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

3. A Atividade III apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

4. As questões constantes para a Atividade III, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

6.3. AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

Parte 3: A avaliação Complementar, serve para o professor concluir e avaliar o conjunto de recortes históricos e atividades, de forma que possa contribuir significativamente com a validação do Produto Educacional, envolvendo, contemplando o conjunto de atividades propostas para o ensino de probabilidade por meio de sua história, respondendo as seguintes questões:

1. Na sua percepção, o conjunto de atividades relacionadas à História da probabilidade contribui com o ensino dos seus conteúdos na educação básica?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

2. A apresentação de recortes históricos e atividades pode promover uma melhor interação entre professor, aluno e saber?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

3. Na sua percepção, as atividades propostas fornecem aos alunos uma nova visão sobre probabilidade?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

4. Os recortes históricos e atividades sobre a teoria da probabilidade, fornecem novas perspectivas de ensino para os professores?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

5. Você percebe que os textos e atividades podem ser adaptadas para diferentes níveis de ensino e perfis dos alunos?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

6. Você perceber que os recortes históricos e as atividades apresentadas podem ser relacionados ou adaptados com tarefas sobre probabilidade no livro didático?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

7. Na sua concepção, a adaptação das atividades do recorte histórico para o contexto do livro didático pode ajudar a tornar o ensino de probabilidade mais contextualizado?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

- Como você sugere adaptar as atividades propostas nos recortes históricos envolvendo a probabilidade para o mais próximo da realidade dos alunos?

____

____

- Existem aspectos que poderiam ser aprimorados ou reformulados neste produto? Por favor, detalhe suas observações e sugestões para uma melhoria no ensino da probabilidade por meio da sua história, enquanto proposta metodológica.

____

____

Por fim, a validação da aplicação deste formulário virtual, sobre a História no Ensino de Probabilidade, como base para os recortes históricos e atividades, proposto por Chaquiam (2022) é um processo para garantir a qualidade e confiabilidade dos dados coletados. Ao preencher cada parte os professores apresentaram suas percepções e contribuições de maneira precisa sobre a utilidade propostas nos recortes históricos e atividade para uso em sala de aula, além de poder contribuir com recomendações importantes em sua melhoria.

7. ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se a análise dos dados coletados por meio dos formulários preenchidos pelos professores participantes. Esses resultados foram organizados em quadros, nos quais as respostas objetivas, foram somadas, calculada a média e representadas de forma percentual. Além disso, as respostas subjetivas foram analisadas com o objetivo de extrair contribuições, recomendações e sugestões relevantes. Os professores participantes foram identificados de forma ordenada, sendo atribuído a cada um deles um número denominado "P_1, P_2 , P_3 , ⋯ , P_n".

A análise seguirá a mesma ordem da sequência disposta no formulário virtual que foi preenchido pelos professores. Serão explorados aspectos relevantes das percepções dos professores em relação a utilização dos recortes históricos e atividades, buscando identificar, a partir desses dados, os desafios e as oportunidades apresentadas pelos professores no uso desse recurso em sala de aula, organizada em três etapas principais:

I. **Avaliação do Texto Histórico**: Nesta etapa, serão analisadas as respostas dos professores referentes às percepções da construção do texto principal. Analisando se contribui para ajudar na explicação sobre o surgimento da teoria da probabilidade, se contribui para desenvolver o pensamento crítico dos alunos e se colabora para a formação didática do professor.
II. **Avaliação do conjunto de Recortes Históricos I, II, III e Atividades**: Nesta etapa, serão analisadas as respostas dos professores em relação aos recortes históricos e atividades, produzidas a partir do texto principal. Serão considerados: compreensão dos conteúdos, competência dos alunos e na resolução das atividades e na adequação da linguagem utilizada.
III. **Avaliação Complementar:** Esta etapa compreende uma avaliação complementar do texto principal (I) e do conjunto de atividades (II). Serão analisadas as respostas dos professores em relação ao potencial da proposta didática para o ensino de probabilidade na Educação matemática.

Serão considerados as sugestões individuais dos professores, com o objetivo de aperfeiçoar a utilização deste recurso em sala de aula, independentemente da perspectiva adotada em relação a este produto.

É importante ressaltar que esta análise se baseia em uma abordagem qualitativa, buscando uma compreensão profunda da potencialidade dessa proposta no processo de ensino e aprendizagem, bem como de fornecer sugestões relevantes para melhorar seu potencial.

A abordagem qualitativa deste estudo é de suma importância, uma vez que permite explorar as percepções, opiniões e sugestões dos professores participantes, enriquecendo assim a compreensão do uso desses recortes históricos e atividades propostas no contexto da educação matemática.

Ressalta-se também, que cada participante, antes de prosseguir com a pesquisa, assinou o termo de consentimento livre e esclarecido, presente na página inicial do formulário. Isso demonstra a compreensão e concordância em participar voluntariamente desta pesquisa, com a garantia de proteção dos seus direitos e privacidades durante a participação e análise dos resultados.

7.1. ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES SOBRE O TEXTO HISTÓRICO

Nesta primeira etapa da análise, serão examinados os resultados obtidos a partir da Avaliação do Texto Histórico, considerado como texto principal e intitulado “Uma História da Probabilidade”. No formulário de avaliação foram atribuídas cinco questões, que estão apresentadas no Quadro 14 e identificadas como *Q - 1, Q - 2, Q - 3, Q - 4, Q – 5.*

Os resultados serão analisados de maneira abrangente e avaliados por meio de uma média percentual. Além dessas questões, incluiu-se questões opcionais com o propósito de coletar sugestões e contribuições dos participantes, visando aprimorar o uso desse material.

Quadro 14 – Avaliação do Texto Principal - *Uma História da Probabilidade*

Questões	**De nenhuma Forma (0%)**	**Pontualmente (25%)**	**Em parte (50%)**	**Na maioria das vezes (75%)**	**Integralmente (100%)**
Q - 1	-	-	10	36,7	53,3
Q - 2	-	-	10	23,3	66,7
Q - 3	-	-	6,6	36,7	56,7
Q - 4	-	-	16,7	30	53,3
Q - 5	-	3,3	3,3	33,3	60
Média		**0,6**	**9,4**	**32**	**58**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Os resultados apresentados no Quadro 14, demonstram a eficácia do Texto Histórico sobre a História da Probabilidade no Ensino de Matemática, com um índice de aceitação que atingiu o percentual de 90%, considerando as respostas classificadas como “Integralmente” e “na maioria das vezes”, corroborando com a validação da atividade, o que a destaca como potencial para o ensino.

Além disso, esses resultados confirmam a importância do Texto Histórico como uma ferramenta didática no contexto educacional, pois as sugestões atribuídas foram em prol de seu aprimoramento para o ensino, como pode-se observar nos quadros abaixo. No Quadro 15, apresenta-se sugestões relevantes dadas pelos professores, a respeito do *uso do Texto Histórico quanto reprodução de recortes deste texto para ajudar os alunos a compreender melhor o conceito de probabilidade e entender "como, "porque" e "pra que" surgiu essa teoria.*

Quadro 15 – Sugestões dos professores - Questão 1.

Participantes	Contribuições dos Participantes
$\boldsymbol{P_2}$	Usar a história para enriquecer a aula ou introduzir o conteúdo e sempre conectar com temas atuais
$\boldsymbol{P_3}$	Ter uma roda de conversa antes de qualquer assunto com os alunos dentro da sala de aula sobre o assunto em questão
$\boldsymbol{P_5}$	Atividades transversais: teatro, sarau, outros
$\boldsymbol{P_{12}}$	Trabalhar de forma mais prática, que possam analisar melhor as situações para construir a ideia da probabilidade.
$\boldsymbol{P_{14}}$	Através de vídeos educativos
$\boldsymbol{P_{15}}$	Pesquisar sobre as maiores economias mundiais e como chegaram a esse nível.
$\boldsymbol{P_{17}}$	Trazer no produto exemplos de como materializar esses pontos históricos em atividades prontas que podem ser aplicadas aos alunos.
$\boldsymbol{P_{28}}$	Explorar com mais exemplos

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Ao analisar as sugestões dos professores P_2 e P_{15} , observou-se a possibilidade de estabelecer uma interação entre ambas. Embora a sugestão do P_{15} não esteja diretamente relacionada ao tema, é possível fazer uma conexão entre a história da probabilidade e o estudo da economia mundial, que envolve diversos elementos probabilísticos, como apostas, riscos, incertezas, previsões, tendências, desenvolvimento estatísticos. Com essa sugestão é possível enriquecer o conhecimento dos alunos sobre os conceitos probabilísticos, fornecendo uma perspectiva de uso mais abrangente e prática.

Quanto as sugestões, os professores P_5, P_{12} , P_{14} , P_{17} e P_{28} apresentaram contribuições valiosas para enriquecer o uso da história da matemática no ensino de probabilidade. É possível incorporar essas sugestões estimulando a apresentação das situações em eventos que as escolas proporcionam durante o ano letivo, isso proporcionará a oportunidade de aplicar os conceitos probabilísticos por meio da história da matemática em contextos reais, fazendo que o aluno vá buscar por diversos que os auxiliem a fazer tais representações.

A sugestão do professor P_{12} contempla as sugestões dos professores P_{17} e P_{28}, onde ressaltam a importância de explorar exemplos práticos, adotando estratégias com experimentos e simulações de jogos, estudo de casos reais, resolução de problemas desafiadores, interação com recursos tecnológicos, trabalho em equipe. Essas abordagens ajudarão os alunos a compreender de forma concreta e aplicada os conceitos probabilísticos, proporcionando uma aprendizagem motivadora.

O professor P_{17} trouxe algo muito relevante, destacando que a História da Matemática só faz sentido no ensino de matemática se for acompanhada de exemplos práticos, no sentido de materializar os pontos históricos em atividades prontas que possam ser aplicadas aos alunos. Essa sugestão é pertinente para ser incorporada nas atividades, garantindo que os alunos visualizem a utilidade da matemática e sua conexão com situações reais, fortalecendo a ideia iniciais sobre seu uso em sala de aula.

No texto da dissertação, foram apresentadas situações relevantes para o uso da história da matemática no ensino de probabilidade. Essas situações envolvem abordagens que permitem os alunos vivenciarem situações reais e cenários atuais. É necessário que os alunos sejam incentivados e capacitados a construir estratégia com base em sua compreensão em sala de aula, pois é fundamental para promover uma aprendizagem significativa, por permitir que os alunos apliquem o conhecimento histórico da matemática em situações práticas.

Na Questão 2, ressalta-se as contribuições dos professores quanto ao *uso de exemplos históricos na educação básica para auxilia no desenvolvimento do pensamento crítico e na compreensão da evolução da probabilidade*, como podem ser observadas no Quadro 16.

É válido ressaltar a contribuição do professor P_{17}, que enfatiza que apenas exemplos são insuficientes, mas sugere que as atividades devem ser desenvolvidas utilizando os fatos históricos como ponto central, permitindo que os alunos resolvam situações semelhantes aos problemas resolvidos historicamente. Sugestão que está alinhada com a proposta dos recortes históricos de Chaquiam (2022), logo, essa contribuição enriquecerá ainda mais a atividade.

Quadro 16 – Sugestões dos professores - Questão 2

Participantes	Contribuições dos Participantes
$\boldsymbol{P_3}$	Fazer atividades regulares sobre o tema
$\boldsymbol{P_5}$	Debates
$\boldsymbol{P_{12}}$	Estimular a curiosidade do aluno na sala de aula a respeito do tema e muito importante.
$\boldsymbol{P_{14}}$	Explanação minuciosa dos conteúdos aos alunos com exemplos práticos.
$\boldsymbol{P_{17}}$	Penso que apenas exemplos são insuficientes, devemos desenvolver atividades utilizando o fato histórico como norte da atividade inclusive colocando o aluno a resolver situações similares aos problemas resolvidos historicamente.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Na questão 3, o objetivo era avaliar se *a história da probabilidade poderia ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante*, o resultado desta questão foi superior a 90% de contribui para este propósito. No Quadro 17, são apresentadas as sugestões de alguns professores para essa questão.

Quadro 17 – Sugestões dos professores - Questão 3

Participantes	Contribuições dos Participantes
P_3	Utilizar métodos em que possa colocar os alunos em posição de ir em busca do conhecimento sobre o assunto
P_{12}	O que não se aprendeu lá atrás no que diz respeito ao estudo da probabilidade, podemos mudar no futuro. Fazer com que os alunos reconheçam e analisem espaços amostrais em situações que envolvam a probabilidade.
P_{14}	Com videoaulas e jogos.
P_{17}	Depende de como ela é explorada em sala de aula se for apenas como curiosidade não contribui muito.
P_{19}	Hoje as coisas estão acontecendo muito rapidamente, li algumas pesquisas que apontam que as pessoas dão ênfase a sínteses deixando de lado coisas muito extensas. Acho que uma abordagem menos extensa para alunos pode ser mais eficaz em alguns aspectos e menos cansativo.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Destacando as sugestões dos professores P_3 e P_{14}, percebe-se que a história da probabilidade pode ser apresentada de várias maneiras, utilizando recursos como videoaulas, jogos interativos, situações reais e práticas. São estratégias eficazes que podem envolver os alunos e incentivá-los a buscar esses conhecimentos, seja em grupo ou individualmente, conforme previsto e priorizado na Base Nacional Comum Curricular, que tanto enfatiza o desenvolvimento e competências pelos alunos.

O professor P_{12} , enfatiza algo importante que faz parte da história e é uma necessidade do aluno hoje, aprender o que não foi aprendido. Nesse sentido, o professor e os recursos utilizados desempenham um papel primordial nesse processo de ensino. Por isso, a proposta de ensino da história da probabilidade deve ser, como sugere o professor P_{17}, bem elaborada, dinâmica e explorada, indo além de simples curiosidades para ter um impacto significativo no aprendizado, porque só contar curiosidades não contribui muito, sendo pertinente para alterações no produto educacional.

Outro ponto sugerido pelo professor P_{19} é a extensão do texto. Sua observação é pertinente e aprimora significativamente o texto histórico. No entanto, deve-se ressaltar que a forma como a história da probabilidade é explorada em sala de aula fará toda a diferença para enriquecer o aprendizado e a extensão do texto é um auxílio significativo, para fornecer aos alunos uma visão mais completa do tema.

Na questão 4, os professores responderam se consideram que *a história da probabilidade pode inspirar os alunos a se interessar mais pela matemática*. No quadro 18 estão algumas sugestões apresentadas pelos professores para essa questão.

Quadro 18 – Sugestões dos professores - Questão 4

Participantes	Contribuições dos Participantes
$\boldsymbol{P_2}$	O professor deve ser apropriar das nuances históricas para ter conteúdos e fatos interessantes para os alunos
$\boldsymbol{P_3}$	Seminários seria uma ótima maneira de trazer o aluno para se interessar sobre o assunto
$\boldsymbol{P_5}$	Compartilhamento de experiências
$\boldsymbol{P_{12}}$	A matemática e uma disciplina que nem todos gostam, o estudo da história da probabilidade pode ser uma ferramenta que envolvam o aluno.
$\boldsymbol{P_{15}}$	Pesquisar as maiores economias mundiais e suas evoluções.
$\boldsymbol{P_{17}}$	Se a aluno for posto a resolver problemas por meio de contextos históricos sim

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Segundo os professores P_2, P_{12} e P_{17} , enfatizam que o professor deve buscar aprimorar seu conhecimento em história da matemática, neste caso da probabilidade, para proporcionar fatos interessante no ensino. Eles sugerem estratégias como seminários, conversas, resolução de problemas dinâmicos dentro do contexto histórico e conexão com pesquisas atuais. Essas estratégias devem envolver a participação ativa dos alunos para que a história da probabilidade possa ser realmente inspiradora e despertar o interesse dos estudantes por essa área da matemática.

Para finalizar esta parte I, na questão 5, a pesquisa revela mais de 90% dos professores consideram que *as atividades apresentadas podem contribuir para a formação didática e pedagógica do professor de matemática*. O quadro 19 destaca algumas sugestões de como este Texto Histórico pode contribuir de forma eficaz para a formação do professor.

Quadro 19 – Sugestões dos professores - Questão 5.

Participantes	Contribuições dos Participantes
$\boldsymbol{P_2}$	O recorte histórico garante um melhor aporte em qualquer área.
$\boldsymbol{P_3}$	Repassar conteúdos sobre o tema para que os alunos possam ler, ou estudar e se aprofundar, e se juntar ao professor para em seguida debateram sobre o assunto.
$\boldsymbol{P_5}$	Extensão, formação continuada.
$\boldsymbol{P_{14}}$	Com mais pesquisas e aprofundamento no assunto com certeza o professor poderá ensinar melhor.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

De acordo os resultados dessa avaliação, o professor P_2, destaca que um recorte histórico pode ser um elemento essencial e proporciona uma base sólida em qualquer área do conhecimento, sugestão que contribuiu de forma positiva para esta pesquisa, assim como a contribuição do professor P_3 que sugere repassar conteúdos aos alunos, incentivando-os a ler, estudar e aprofundar-se no tema e promover debates em sala de aula para uma construção coletiva do conhecimento.

O professor P_5 enfatiza a importância da formação continuada para o aprimoramento em sua prática pedagógica como fator essencial para um ensino eficaz. A sugestão do professor P_{14} enfatiza a importância do aprofundamento no assunto para que possam ensinar com mais propriedade e clareza aos alunos.

Dessa forma, afirma-se que as contribuições vêm somar aos objetivos com os objetivos previsto para este trabalho, e com isso ter um produto educacional aprimorado e didaticamente eficaz para uso em sala de aula, fortalecendo a utilização da história da matemática como um recurso ativo no ensino de probabilidade.

Por fim, as sugestões enfatizam a necessidade de aulas bem elaboradas, dinâmicas e exploratórias, com uma base sólida, além de proporcionar uma discussão interativa em sala de sobre o tema, o que requer muito mais que uma simples leitura no material produzido e assim conclui-se nesta etapa que a história da probabilidade pode tornar o conteúdo mais interessante para os alunos.

É importante destacar que este Texto Histórico, balizado pelo Diagrama metodológico de Chaquiam (2022), foi construído com o intuito de apresentar aos professores o objeto Probabilidade de uma forma abrangente e a partir dele foram produzidos três recortes históricos e elaboradas as atividades que buscam explorar esse conteúdo historicamente.

7.2. ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES SOBRE O CONJUNTO DAS ATIVIDADES

Esta é a segunda etapa da análise, foram examinados os resultados da avaliação dos três Recorte Históricos e Atividades (I, II, III), que foram produzidos a partir do Texto Histórico “Uma História da Probabilidade”, analisado na primeira etapa. No formulário foram atribuídas quatro questões, além questões opcionais destinadas a coletar sugestões e contribuições dos participantes, visando aprimorar a utilidade deste recurso em sala de aula.

Os três recortes e atividades propostas estão alinhados as habilidades e competências de acordo com a BNCC (2017) e seguem um padrão com o mesmo formato: ficha de apresentação; diagrama metodológico; produção do recorte; sugestões de atividades e nota didática aos professores. Os resultados dessa segunda parte são de extrema importância para compreender a eficácia dos Recortes Históricos e Atividades, além de contribuir para aprimorar o produto educacional.

No Quadro 20, são apresentados os resultados obtidos na questão 1, que avalia a *compreensão dos três recortes históricos a nível da educação básica.* Nota-se um percentual significativo de professores que concordam com a utilização deste recurso em sala de aula. Tanto a opção "na maioria das vezes" com o percentual de 40% quanto a opção "Integralmente" com o percentual 43,3%, visto que atingiu 83,3% de aprovação, corroborando com a validação dos três recortes e das atividades, elevando sua utilidade no ensino de matemática.

Quadro 20 – Avaliação da Questão 1.

QUESTÃO 1.	**De nenhuma Forma (0%)**	**Pontualmente (25%)**	**Em parte (50%)**	**Na maioria das vezes (75%)**	**Integralmente (100%)**
T - I	-	3,3	13,3	40	43,3
T - II	-	-	13,3	36,7	50
T - III	-	-	16,7	30	53,3
Média		**1,1**	**14,5**	**35,6**	**48,8**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

No Quadro 21, são apresentadas as contribuições dos participantes para a Questão 1, que buscam melhorar os recortes históricos e atividades. As sugestões incluem adaptações que tornar essa proposta mais eficaz e atrativa para a compreensão dos alunos.

Quadro 21 – Sugestões dos professores, recortes I, II, III - Questão 1.

Participantes	**Contribuições dos Participantes – Texto I**
$\boldsymbol{P_2}$	Esse é um recorte rico e que deve ser apresentado em um tempo mais longo do que uma ou duas aulas. sem perder de vista instigar o interesse dos alunos pelo conteúdo.
$\boldsymbol{P_3}$	Estabelecer uma metodologia de ensino onde se possa colocar os alunos em confronto com o tema.
$\boldsymbol{P_5}$	Ampliar na grade curricular.
$\boldsymbol{P_{22}}$	Acredito que o texto é muito longo, e os alunos não iria se dar o trabalho de ler por completo, acredito que poderia utilizar uma contação de história para textos muito longos.
Contribuições dos Participantes – Texto II	
$\boldsymbol{P_2}$	Novamente é uma aula longa e rica em detalhes e não se deve perder de vista o interesse e o foco do aluno pelo conteúdo.
$\boldsymbol{P_3}$	Utilizar uma linguagem adequada própria para o nível de escolaridade.

P_5	Qualificar o discernimento de emissor e receptor.
P_{19}	Sim o texto está compreensivo. Entretanto, o texto é longo e pode perder o encanto a finalidade.
P_{22}	O texto é interessante, porém cansativo a leitura, acredito que a produção de vídeos ou animações que possa chamar a atenção dos alunos seja mais viável.
Contribuições dos Participantes – Texto III	
P_2	Trabalhar definições com os alunos não é uma tarefa fácil. E a proposta requer bastante tempo.
P_5	Integração
P_{15}	Usar uma linguagem menos técnica
P_{19}	Os alunos de hoje de rede pública têm vocabulário restrito, quem sabe usar sinônimo entre parêntese poderia ajudar na compreensão do texto.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

De maneira geral, os textos estão adequados, as sugestões são pertinentes e passíveis de adaptações. De acordo com o professor P_2 é preciso dedicar um tempo mais extenso para explorar este material, pois “é um recorte rico e que deve ser apresentado em um tempo mais longo do que uma ou duas aulas. Sem perder de vista instigar o interesse dos alunos pelo conteúdo”. Por outro lado, o professor P_{22} enfatizou que por ser um texto longo os alunos poderiam não fazer a leitura por completo, mas mencionou “utilizar uma contação de história para textos muito longos”. De fato, são sugestões consideradas relevantes.

Outros pontos relevantes também foram destacados, como a necessidade de ampliar o conteúdo na grade curricular e utilizar uma linguagem mais adequada ao nível de escolaridade dos alunos. Esses aspectos são enfatizados na pesquise de forma geral, quando são observados que os recortes históricos e atividades podem ser adaptados a qualquer nível de ensino.

O professor P_{19} enfatizou a importância de considerar um vocabulário restrito dos alunos da rede pública e sugeriu usar sinônimo entre parêntese para ajudar na compreensão do texto. Embora seja compreensível, é importante, que enquanto professores, devemos ensinar palavras formais em sala de aula, justamente para enriquecer o vocabulário dos alunos.

A Questão 2, avalia *a linguagem* utilizada nos recortes históricos e nas atividades, levando em consideração *o nível cognitivo dos alunos*. Verificou-se que 53,3% dos professores concordaram “integralmente” e 36,7% que concordam “na maioria das vezes”, totalizando um percentual de 90% dos professores que consideram a linguagem das atividades acessível ao nível cognitivo dos alunos.

Resultados que avaliam positivamente o uso adequado da linguagem utilizada nos materiais, o que contribui para uma melhor compreensão dos estudantes nas atividades propostas, como pode ser observado no Quadro 22.

Quadro 22 – Avaliação da Questão 2.

QUESTÃO 2.	**De nenhuma Forma (0%)**	**Pontualmente (25%)**	**Em parte (50%)**	**Na maioria das vezes (75%)**	**Integralmente (100%)**
T - I	-	-	10	33,3	56,7
T - II	-	3,3	3,3	40	53,3
T - III	-	-	13,3	36,7	50
Média		**1,1**	**8,9**	**36,7**	**53,3**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

No Quadro 23, são apresentadas as contribuições dos participantes em respostas a Questão 2, que aborda sobre a linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos. As sugestões levantadas têm como objetivo propor melhorias, adaptações e estratégias para tornar essa proposta mais eficaz e atrativa no que diz respeito a linguagem utilizada.

Quadro 23 – Sugestões dos professores, recortes I, II, III – Questão 2.

Participantes	**Contribuições dos Participantes – texto I**
$\boldsymbol{P_3}$	Ouvir os alunos e tentar perceber qual a dificuldade que eles possuem para compreender a questão, ou assuntos.
$\boldsymbol{P_5}$	Qualificar o discernimento dos receptores
Contribuições dos Participantes – texto II	
$\boldsymbol{P_5}$	Interdisciplinaridade
Contribuições dos Participantes – texto III	
$\boldsymbol{P_5}$	Linguagens diversas
$\boldsymbol{P_{19}}$	A linguagem do texto apresenta termos não usuais do cotidiano do aluno. Usar sinônimos seria uma saída

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

No geral, observa-se que houve poucos apontamentos nesta questão. No entanto, a sugestão do professor P_3 de “ouvir os alunos e tentar perceber qual a dificuldade que eles possuem para compreender a questão” é uma proposta plausível para uma aprendizagem significativa e enriquecedora, que pode ser uma habilidade desenvolvida por meio da História da Matemática no ensino da probabilidade.

Essa sugestão está alinhada com as sugestões de outros professores, como a Interdisciplinaridade, que engloba o ensino de diversas linguagens para que os alunos possam ir se familiarizando com termos usuais do seu cotidiano, conforme foi mencionado pelo professor P_{19} que sugere usar sinônimos para tornar a linguagem acessível. No entanto, é importante ressaltar que na escola o uso de palavras formais enriquece o vocabulário dos alunos.

Por isso, ao utilizar termos não usuais do cotidiano do aluno, o texto proporciona a oportunidade de expandir o repertório vocabular dos alunos, ao introduzir sinônimos como alternativa só se torna eficaz, se permitir ampliar o entendimento das palavras utilizadas no contexto, oferecendo diferentes nuances e possibilidades de expressão. Portanto, ao explorar uma linguagem formal e apresentar sinônimos dessa linguagem, só ampliar o vocabulário dos alunos ser ambas vieram para promover uma maior diversidade lexical para o desenvolvimento das habilidades linguísticas dos alunos.

No Quadro 24, são apresentados os resultados da Questão 3 referentes à *compatibilidade com os objetivos, habilidades e competências do conteúdo*. Observa-se nessa avaliação que 73,3% dos professores avaliaram como "Integralmente" e 13,3% avaliaram como "na maioria das vezes", totalizando um percentual de 86,6% de compatibilidade dos textos com esses aspectos. É importante ressaltar que a maioria das sugestões mencionadas visa aprimorar a aplicação dos textos em sala de aula. Cabe destacar que tais orientações estão alinhadas com o que é previsto na BNCC, mencionado nas apresentações dos textos.

Quadro 24 – Avaliação da Questão 3.

QUESTÃO 3.	**De nenhuma Forma (0%)**	**Pontualmente (25%)**	**Em parte (50%)**	**Na maioria das vezes (75%)**	**Integralmente (100%)**
T - I	-	-	13,3	13,3	73,3
T - II	-	-	6,7	26,7	66,7
T - III	-	-	16,7	23,3	60
Média		**1,1**	**8,9**	**36,7**	**53,3**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

No Quadro 25, são apresentadas as contribuições dos professores para a Questão 3, que busca possíveis melhorias, adaptações e sugestões para garantir a *compatibilidade com o objetivo, habilidades e competências do conteúdo,* destes recortes e atividades, visando sua aplicação efetiva em sala de aula.

Quadro 25 – Sugestões dos professores, recortes I, II, III - Questão 3.

Participantes	**Contribuições dos Participantes – texto I**
P_3	Discussão ou debate depois de uma roda de conversar e tentar fazer com que os alunos entendam o real objetivo do tema para seus futuros educacionais e ou profissionais.
P_{17}	Penso que ficou um pouco fragilizado a autonomia dos alunos no processo de resolução do problema histórico quando pedes para resolver utilizando a estratégia histórica
P_{19}	Acrescentar material manipulável como por exemplo o jogo
P_5	Interdisciplinar
P_{17}	Penso que a autonomia dos alunos para compor as estratégias e resolução ficou um pouco prejudicada

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

De acordo com as informações apresentadas no Quadro 25, há sugestões pertinentes para a prática em sala de aula, o que se mostra bastante válido, até mesmo pela aceitação desta proposta. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é enfatizado que deve ser priorizado o desenvolvimento de competências, o que se relaciona diretamente com o ensino de probabilidade, uma vez que esta teoria gera uma expectativa diferenciada por ser uma novidade enquanto Unidade Temática.

Nesse sentido, destaca-se a relevante sugestão do professor P_3, que sugere a utilização dos recortes históricos como uma oportunidade para promover discussões e debates em sala de aula. O professor enfatiza a importância de realizar uma roda de conversar, na qual os alunos possam compartilhar suas percepções e possam compreender os objetivos do tema em relação as suas trajetórias educacionais e/ou profissionais. E uma valorização da probabilidade.

A sugestão do professor P_{17} é relevante para as atividades proposta, considerando que os alunos precisam ser incentivados a desenvolver autonomia no processo de resolução dos problemas independentemente de serem históricos ou não. Conforme foi mencionado pelo professor P_{17}, é importante que a apresentação das atividades não se limite à simples reprodução do que foi apresentado no texto, mas que permita aos alunos buscas suas próprias estratégias de resolução evitando que o recurso se torne monótono. Portanto, é pertinente fazer alterações nas atividades do produto educacional, para atender tal sugestão.

A sugestão do professor P_{19} de acrescentar materiais manipuláveis para exemplificar os conceitos é uma estratégia dinâmica e útil. A História da Probabilidade traz isso em muito dos seus contextos, pois o texto principal desde trabalho, mostrar que ela foi constituída a partir de apostas em jogos de azar, realizados com objetos reais, como o dado, fácil e prático de ser utilizado nessas a atividades, sugestão que contribuem para melhorar o produto educacional.

Os resultados da avaliação realizada pelos professores, nessa segunda parte, reforçam a importância da utilização dos recortes históricos no ensino de probabilidade. Essa análise destacou que os textos e atividades propostos estão alinhados com os objetivos educacionais e com as competências esperadas dos estudantes, conforme recomendado pela BNCC.

7.3. ANÁLISE DAS PERCEPÇÕES SOBRE A AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

A avaliação complementar representa a terceira etapa desta pesquisa, no qual se foi realizado a análise da avaliação dos professores em relação *Texto Histórico* a ao *Conjunto de recortes históricos e atividades propostas.* O principal objetivo dessa avaliação foi verificar a potencialidade dessa abordagem no ensino de probabilidade na disciplina de matemática, buscando validar o Produto Educacional desenvolvido.

A validação desse Produto Educacional é de suma importância, pois evidencia a sua utilidade no ensino de matemática por meio da História da Matemática. Por isso, a partir da avaliação dos professores, pretende-se identificar pontos fortes e áreas de melhoria, visando aprimorar ainda mais o material e torná-lo cada vez mais eficaz no ensino de probabilidade.

Inicialmente, os professores responderam a algumas questões objetivas, nas quais avaliaram critérios como a relevância do conjunto de recortes históricos, sua adequação para o ensino de probabilidade e sua aplicabilidade em sala de aula. Os resultados obtidos a partir dessas respostas foram organizados e apresentados no Quadro 26.

Essa análise se mostrou essencial para identificar ajustes e aprimoramento atribuídos ao produto, visando aperfeiçoar sua qualidade. A síntese apresentada nessa avaliação contempla os seguintes requisitos: o papel da história da Matemática no ensino de probabilidade; a promoção de uma melhor interação entre professor, aluno e saber; a oferta de uma nova visão sobre a probabilidade; a disponibilização de novas perspectivas de ensino para os professores; a adaptação dessa proposta para diferentes níveis de ensino; a possibilidade de contextualização com o livro didático. Além disso, foram incluídas duas questões subjetivas para validar as avaliações e contribuições dos professores visando o aprimoramento contínuo deste produto.

No Quadro 26, pode-se observar que uma maioria significativa, correspondendo a 60,5% dos professores afirmaram compreender “Integralmente” o conjunto de atividades propostas e uma maioria expressiva, representando 36,7% avaliaram compreender o conjunto de atividades “na maioria das vezes”, elevando a potencialidade dessa abordagem no ensino de matemática para 97,2%. É importante ressaltar que nenhum professor indicou não compreender o conjunto de atividades em sua totalidade, o que reforça a eficácia do produto desenvolvido.

Quadro 26 – Avaliação dos Recortes históricos e Atividades (Conjunto).

Questões	**De nenhuma Forma (0%)**	**Pontualmente (25%)**	**Em parte (50%)**	**Na maioria das vezes (75%)**	**Integralmente (100%)**
Q - 1	-	3,3	6,7	36,7	53,3
Q - 2	-	3,3	6,7	30	60
Q - 3	-	-	6,7	30	63,3
Q - 4	-	-	10	30	60
Q - 5	-	3,3	3,3	26,7	66,7
Q - 6	-	3,3	6,7	26,7	63,3
Q - 7	-	3,3	3,3	33,3	56,7
Média	**-**	**2,5**	**6,5**	**30,5**	**60,5**

Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Esses resultados evidenciam a excelente aceitação e compreensão dos recortes históricos e atividades como um produto educacional útil na área da educação. Embora alguns professores tenham apontado a necessidade de algumas adaptações, essas sugestões foram reconhecidas como significativa, contribuindo de forma substancial para o aprimoramento deste trabalho. Essas melhorias estão apresentadas nos Quadros 27, 28, 29, 30, 31, 32.

Quadro 27 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão 1.

Participantes	Contribuições dos Participantes
$\boldsymbol{P_2}$	O professor deve sempre se apropriar dos conceitos, fatos e todos os por menores de todo o assunto que vai ensinar para que possa despertar em seu aluno o interesse pelo conteúdo.
$\boldsymbol{P_3}$	Utilizar sempre a leitura para o entendimento do assunto.
$\boldsymbol{P_{17}}$	Ajustaria a ordem das questões propostas para fugir um pouco da sequência tradicional (definição, exemplos e exercícios).
$\boldsymbol{P_{22}}$	Através de experiências em sala de aula, apenas a leitura dos recortes históricos não mantém os alunos concentrados na realização das atividades, acredito que relatar esses recortes através de recursos tecnológicos, como produção de vídeos, animações no PowerPoint, dividir temáticas de pesquisas para apresentação dos alunos, ou fazer uso de outros recursos mais atrativos.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O Quadro 27 indica as sugestões dos professores em relação ao papel da história da Matemática no ensino de probabilidade. As sugestões destacadas são pertinentes para aprimorar a abordagem dos textos e das atividades junto aos alunos. O professor P_2 enfatiza a importância de dominar completamente os conceitos, fatos e detalhes relacionados ao conteúdo que será ensinado, destacando a relevância do conhecimento profundo para transmitir de forma envolvente aos alunos, o que reforça a importância da base sólida de conhecimentos do professor no processo de ensino-aprendizagem.

A sugestão do professor P_2 se alinha com a sugestão do professor P_3 sobre o uso da leitura como ferramenta fundamental para se aprofundar no tema, tanto professor quanto aluno. Essas sugestões destacam a importância da leitura com um meio de explorar conceitos, fatos históricos e exemplos práticos relacionados à probabilidade. E isso justifica a importância do papel da história da matemática como uma ferramenta capaz de se aprofundar em um tema, neste caso, como construído no Texto Histórico, a base dos recortes históricos.

A sugestão do professor P_{17}, de ajustar a ordem das questões propostas visando fugir da abordagem tradicional de definição, exemplos e exercícios é louvável. Mediante essa percepção, enfatiza-se que o uso dos recortes históricos e das atividades é, flexível pode ser reorganizado, seguindo a sugestão do professor P_{17}, vamos instruir no produto educacional que primeiramente deve-se apresentar os problemas para os alunos, deixá-los resolverem, tendo total autonomia, socializar com os colegas e posteriormente apresentar os fatos históricos do surgimento do problema, ou seja o recorte histórico do conteúdo.

A sugestão do professor P_{22} destaca a necessidade de utilizar recursos tecnológicos e atrativos para manter os alunos concentrados nas atividades. Ele sugere a produção de vídeos, animações no PowerPoint e outros recursos mais atrativos, visando manter os alunos concentrados nas atividades. Essa sugestão reforça a importância de adaptar os recursos utilizados à realidade do aluno e a necessidade do professor, de considerar diferentes abordagens e estratégias para tornar o ensino da história da probabilidade mais atrativo.

Quadro 28 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão 2.

Participantes	**Contribuições dos Participantes**
$\boldsymbol{P_2}$	Apresentar a história como uma conversa faz com que a aproximação ocorra de fato.
$\boldsymbol{P_3}$	Essa junção é muito benéfica para a compreensão do tema.
$\boldsymbol{P_5}$	Comprometimento institucional.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

No Quadro 28, estão algumas percepções quanto a promoção de uma melhor interação entre professor, aluno e saber. É importante ressaltar que essa interação é fundamental para promover um aprendizado significativo. Diante do que foi anteriormente mencionado pode-se afirmar que o uso adequado deste conjunto trás estratégias viáveis de melhorar essa interação. O professor P_2 e P_3 destacam benefícios dessa junção, de apresentar a história como uma conversar, buscando aproximação efetiva, para explorar sobre o tema.

Essa interação não deve se limitar apenas à sala de aula, conforme mencionado pelo professor P_5, que ressalta que a instituição de ensino desempenha um papel fundamental, logo deve proporcionar um ambiente escolar comprometido com a promoção dessa interação. Isso envolve oferecer apoio e incentivo aos professores, fornece recursos adequados, criar espaço para experimentação e dedicar tempo dedicado para que tudo seja favorável à aprendizagem dos alunos. No Quadro 29 destaca-se as contribuições dos professores sobre a oferta de uma nova visão da probabilidade.

Quadro 29 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão 3.

Participantes	**Contribuições dos Participantes**
$\boldsymbol{P_2}$	A probabilidade é um assunto que foge ao senso comum e "engana" nossa percepção natural dos resultados. Então estudar e conhecer só tem a melhorar cada um.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Segundo o professor P_2 a probabilidade é um assunto que foge ao senso comum e "engana" nossa percepção natural dos resultados. Nesse sentido estudar e conhecer a história da probabilidade só pode trazer benefícios, proporcionando uma nova perspectiva sobre o tema, desafiando o aluno a pensar de maneira mais abrangente sobre o tema. O professor P_5 destaca a importância de explorar diferentes linguagens de aprendizagem, percepção que enfatiza ainda mais a diversificação de recursos como imagens, vídeos, jogos, que venham enriquecer a experiencia dos alunos e as instruções deste produto.

No Quadro 30, destaca-se as contribuições quanto a disponibilização de novas perspectivas de ensino para os professores no uso dos recortes históricos e atividades sobre a teoria da probabilidade.

Quadro 30 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão 4.

Participantes	**Contribuições dos Participantes**
$\boldsymbol{P_{12}}$	E preciso que o professor tenha uma compreensão crítica do tema em questão, para que ele seja capaz de desenvolver dentro da sala de aula novas perspectivas de ensino a respeito da teoria da probabilidade.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Destaca-se a relevante contribuição do professor P_{12}, qual reforça uma questão já mencionada por outro professor. No entanto, percebe-se que é uma questão que pode ser atribuída a qualquer situação, pois é fundamental que o professor possua um conhecimento aprofundado e crítico sobre a probabilidade, para abordar com êxito os conceitos e explorar diferentes abordagens que enriqueçam o conhecimento dos alunos nesse campo.

No Quadro 31, evidencia-se as contribuições dos professores em relação a integração dos recortes históricos e das atividades no contexto do livro didático, visando tornar o ensino de probabilidade mais contextualizado e aproveitar as vantagens quando existem, desse recurso pedagógico.

Quadro 31 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão 6 - 7.

Participantes	**Contribuições dos Participantes**
$\boldsymbol{P_2}$	Os livros estão ficando cada vez mais aquém do conhecimento mais profundo dos assuntos. Os recortes históricos junto com a busca do professor por materiais de maior valor
$\boldsymbol{P_5}$	Publicação de atividades em meio multimídia, Produção de recursos didáticos

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

No contexto do livro didático, o professor P_2 expressa uma preocupação relevante em relação à sua abordagem sobre o conteúdo de probabilidade. Ele observa que os livros estão ficando cada vez mais limitados em relação ao conhecimento mais profundo dos assuntos. Essa análise se alinha com a análise do livro didático examinado nesta pesquisa. Nesse sentido ele destaca a importância dos recortes históricos como um recurso complementar ao livro didático, junto com a busca de outros materiais para valorizar os recortes históricos em sala de aula.

O professor P_5 destaca a importância da produção de recursos didáticos e da publicação de atividades em meio multimidia. Ele sugere a criação de materiais adicionais ou complementares que possam ser utilizados em conjunto com o livro didático e que possam ser integrados em diferentes formatos como vídeos, animações e outros recursos digitais. Essas contribuições são relevantes e têm sido mencionadas anteriormente, demonstrando sua validade e importância para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

No encerramento desta pesquisa, nos Quadros 32 e 33, apresentam-se as percepções dos professores quanto as avaliações das questões subjetivas. Essas contribuições fornecem dados relevantes para aprimorar ainda mais este Produto Educacional no ensino da probabilidade, pois identificou-se áreas de melhoria para fazer ajustes necessários, visando aperfeiçoar a eficácia do material no contexto educacional.

No Quadro 32, encontra-se as sugestões dos professores para adaptações nas atividades propostas nos recortes históricos, a fim de torná-las mais relevantes para a realidade dos alunos. Essas sugestões visam enriquecer a experiência de aprendizado, proporcionando uma conexão mais relevante entre os conceitos abordados no contexto da vida dos alunos.

Quadro 32 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão subjetiva 1.

Participantes	**Contribuições dos Participantes**
$\boldsymbol{P_1}$	Que sejam mais suscitas e objetivas
$\boldsymbol{P_2}$	Há várias maneiras. Uma interessante é pedir que eles mesmos elaborem problemas e deem a resolução. Nesse exercício eles já verificam que a percepção não é o resultado comum
$\boldsymbol{P_3}$	Tirar o aluno da zona de conforto e colocá-lo em uma zona aonde ele possa ir atrás do conhecimento do assunto em questão e mostrar aos colegas o que foi compreendido
$\boldsymbol{P_4}$	Atrás do diálogo entre professor e aluno, trazendo o aluno para dentro da história da probabilidade, com suas experiências de cotidiana. Falar da história através das vivências
$\boldsymbol{P_6}$	Procurando saber com os alunos, o que mais chama a atenção deles em seu cotidiano
$\boldsymbol{P_7}$	Para introduzir o estudo do conteúdo
$\boldsymbol{P_8}$	Adaptação de acordo com os meios, elementos e necessidades locais
$\boldsymbol{P_9}$	Exemplos práticos com a realidade dos discentes
$\boldsymbol{P_{10}}$	Pode ser usado em competições esportivas, colocando a probabilidade de um time vencer, empatar ou perder, por exemplo.
$\boldsymbol{P_{12}}$	Hoje em dia é muito usado os meios tecnológicos pelos alunos, celular, computador e outros, trazer essa realidade da tecnologia envolvendo os meios

	tecnológicos são de suma importância para se trabalhar a probabilidade e que se aproxime da realidade do aluno
P_{14}	Através de vídeos com exemplos práticos
P_{15}	Usar os campeonatos brasileiro e internacional para calcular probabilidades.
P_{16}	Atrelando links entre os recortes históricos e realidade dos alunos, quando possível
P_{18}	Através de materiais manipuláveis
P_{19}	Usar sinônimos no lugar das palavras menos usuais do cotidiano dos alunos (quem sabe um dicionário de palavras junto com as atividades ajudaria)
P_{20}	Permitindo que os alunos participem ativamente, tanto na criação de problemas, quanto na estratégia que ele pode dar para uma solução, para que assim de fato, as problema estarão dentro de sua realidade.
P_{21}	Em nossa formação escolar somos levados a aprender os conteúdos da disciplina de matemática, orientados por legislações que rege a educação básica, como a Lei de Diretrizes e Bases e, mais recentemente, Base Nacional Comum Curricular, em que orientam que tais conteúdos sejam conectados ao contexto social dos educandos, a preocupação está no sentido de que possuímos grupos tão diversos a nível de Amazônia que talvez a história das probabilidades não se torne interesse ou necessária para os múltiplos ambientes, assim a sugestão era, na medida do possível, tentar fazer aproximações a dinâmica do grupo social envolvido.
P_{22}	Associar as atividades em diversos recursos.
P_{23}	Contextualize a situações problemas com exemplos do cotidiano dos alunos, explorando situações como lançamento de moedas, sorteios de cartas, resultados de jogos esportivos, isso com materiais concretos é uma solução possível.
P_{24}	Estimulando a reflexão crítica, de acordo com BNCC, devemos incentivar os alunos a questionarem as situações apresentadas, a avaliarem as Probabilidades envolvidas, e terem suas próprias soluções. Isso desenvolverá o pensamento críticos dos alunos
P_{26}	Explorar com recursos tecnológicos, pois na atualidade, a tecnologia é algo muito atrativo, e aí pode-se fazer essa interação bastante educativa e proveitosa.
P_{27}	Uma opção é fazer um estudo de caso, pedi para realizarem situações análogas, como o problema dos pontos, por exemplo, onde eles podem interromper seus jogos e buscarem Probabilisticamente uma solução onde ninguém seja prejudicado.
P_{29}	Use materiais reais, coloque em prática na sala de aula, para que os alunos possam relacionar com situações reais é bom fazer essas situações e mostrar que apesar de ter existido a mais de 5 séculos, ainda é algo prático que existe no dia a dia

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Com base nas avaliações dos professores apresentadas no Quadro 32, percebe-se de modo geral, uma visão positiva sobre o uso dos recortes históricos no ensino de probabilidade. Essas avaliações ressaltam a importância de adaptar, reorganizar e integrar os recortes com outros recursos. Intensificando com isso a diversidade de experiências dos professores que só tende a enriquecer o produto educacional.

Considerando que foram atribuídas de professores com experienciais diferentes, que olharam para sua prática na sala de aula, para os recursos materiais, financeiros, tecnológicos e deram propostas que melhor se adequam em diferentes demandas e contextos educacionais.

O professor P_2 propõe uma abordagem interessante, ele já mencionou que a probabilidade é um assunto que foge ao senso comum e "engana" a percepção natural dos resultados. Nesse sentido, ele sugere que os alunos elaborem seus próprios problemas e apresentem soluções corretas. Essa abordagem visa permitir que os alunos percebam que os resultados da probabilidade nem sempre correspondem aos resultados esperados, independentemente da abordagem probabilística utilizada.

Esta é uma forma pertinente de incentivar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda e crítica da probabilidade. Ao explorar a natureza complexa desse campo da matemática, os alunos são desafiados a superar suas concepções intuitivas e a se envolverem em uma análise mais aprofundada dos conceitos probabilísticos, compreendendo como os conceitos foram construídos ao longo do tempo e como foram influenciados por diferentes contextos e personagens genais da matemática ao longo de mais de cinco séculos.

As sugestões dos professores P_3 , P_{20} , P_{24} e P_{29} estão alinhadas com a proposta anterior e estão em conformidade com as orientações da BNCC. Essas sugestões são consistentes com o produto educacional, que visa fortalecer a participação ativa dos alunos e o desenvolvimento do pensamento crítico, aproximando-os dos contextos das suas realidades

Assim como as sugestões dos professores P_4 , P_6 , P_8 , P_9 , P_{23} e P_{29} , destacam a importância do diálogo em sala, para que após a apresentação dos recortes históricos, os professores enfatizem a importância de incentivar os alunos a compartilhar suas experiências, a fim de obter elementos essenciais para adaptação adequada às necessidades individuais dos alunos. Dessa forma, os alunos podem utilizar materiais reais e estabelecer conexões com situações do cotidiano, demonstrando que mesmo eventos ocorridos a séculos atrás ainda possuem relevância prática nos dias de hoje.

O professor P_{22} expressa uma preocupação ao uso da história da probabilidade em nossa região, ele destaca a diversidade de grupos presentes na região amazônica e levanta a questão de que a história das probabilidades não se torne interesse ou necessária para os múltiplos ambientes, assim sua sugestão é buscar, na medida do possível, fazer aproximações que levem em conta a dinâmica e a particularidade dos grupos sociais envolvidos, para tornar o ensino mais contextualizado e significativo para a realidade local.

Por fim, no Quadro 33, estão registradas as contribuições dos professores em relação aos aspectos que podem ser aprimorados ou reformulados neste produto educacional. Nesse espaço, os professores compartilham suas observações e sugestões de melhorias, visando aprimorar o ensino da probabilidade por meio da História da Matemática como uma proposta metodológica, buscando garantir que este material atenda de forma eficaz as necessidades e expectativas dos professores e alunos.

Quadro 33 – Sugestões da Avaliação Complementar – Questão subjetiva 2.

Participantes	Contribuições dos Participantes
P_1	Que as atividades trabalhem a história de forma associada a parte matemática
P_2	Sempre tem. Principalmente de um olhar para o outro. Mas ele está bem-conceituado e aparenta ter uma pesquisa teórica bem aprofundada. hoje, eu não iria alterar nada a não ser adaptar para os diversos níveis de ensino
P_3	Sempre haver conversa entre professor e aluno para obter mais informações, tanto de um como de outro, sobre o tema do dia. E vídeos sobre o assunto seria sempre benéfico para melhoria do ensino
P_6	Buscar nos alunos uma melhor interação com a probabilidade desde o surgimento da probabilidade retratado na história dela.
P_8	Gostei da pesquisa, está bem embasada teoricamente, e dar para ir trabalhando ela em qualquer nível, pois você deixar ela aberta para a educação básica, basta apenas adaptarmos para o nível que vamos trabalhar, gostei muito. Parabéns.
P_9	Desenvolver coletas de dados e demonstrar na prática o ensino de probabilidade
P_{10}	Pode integrar a história com a realidade prática do aluno, mostrando que a história pode fazer parte do cotidiano do aluno que, muitas vezes, passa desapercebido tanto pelo docente como o discente em geral.
P_{12}	A utilização de Investigação Matemática como alternativa de ensino dentro e fora da sala de aula auxilia na aprendizagem dos conceitos da probabilidade sendo assim favorece o desenvolvimento de habilidades do aluno.
P_{14}	Uma das melhores maneiras é a exemplificação concretas e de fácil entendimento dos alunos.
P_{17}	Penso que nas atividades tem que ter espaço para primeiro os alunos resolverem os problemas históricos por meio de suas estratégias para posteriormente fazer a relação históricas e não o inverso
P_{20}	Posso sugerir que as atividades sejam aprimoradas para que o aluno tenha a capacidade de pensar, sem ter informações tão precisas, porque alguns sugeres as respostas que estão no texto, então ele vai apenas copiar e não racionar na busca de uma estratégia para solucionar.
P_{23}	Pode começar as aulas introduzindo conceitos por meio dos exemplos históricos, ilustre essa aplicação, explique como foram desenvolvidos e mostre como podem ser aplicados em situações reais, isso ajudara os alunos a compreenderem a evolução da probabilidade.
P_{24}	Realize atividades prática e experimentos, tão vivo da probabilidade, por exemplo, jogos de azar em sala, para ilustra o problema histórico, para tornar o aprendizado mais concreto
P_{25}	Uma sugestão e que alunos possam participar de discussões e debates, abordando a história da probabilidade, inclusive pode- se até utilizar encenação para ilustrar os fatos.
P_{26}	Fazer conexões com outras disciplinas e mesmo outras áreas para mostrar para os alunos a sua aplicabilidade em diferentes contextos e assim reforçar a importância de aprender os conceitos de Probabilidade.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Após analisar as sugestões apresentadas pelos professores no Quadro 33, torna-se evidente o reconhecimento quanto a utilidade dos recortes históricos e atividades propostas no produto educacional. Observa-se que os professores apresentaram contribuições e apontaram necessidades específicas de adaptação e reorganização na aplicação do produto educacional em suas aulas. Algumas avaliações, reforçam ideias que foram atribuídas pelos participantes ao longo das questões nas partes 1 e 2 do questionário e outras que estão contempladas na produção do desenvolvimento desse trabalho.

É importante ressaltar que nenhum professor se posicionou de forma desfavorável a esse produto educacional, sempre demostraram um interesse em contribuir para adequá-lo ao contexto regional, local e ao conteúdo curricular, apresentando formas didáticas para melhor aplicação em sala de aula alinhado as suas necessidades, de acordo com a comunidade escolar.

Diante dessa perspectiva, foram apresentadas contribuições, adaptações e sugestões pertinentes para aprimorar o Produto Educacional e melhor atender sua utilidade em sala de aula. É perceptível que as ideias dos professores vão se ajustando e se interligando, permitindo que sejam exploradas diferentes estratégias e recursos, para torná-lo mais envolvente, prático, contextualizado e dinâmico. Essa constatação confirma que a história da probabilidade não apenas contribui para o ensino dos conceitos probabilísticos, mas também permite que os alunos conheçam a origem e a evolução dos conceitos da probabilidade a longo do tempo, estabelecendo conexões com situações reais da atualidade.

É importante ressaltar que a literatura de conhecimentos históricos relacionados à probabilidade não é amplamente encontrada em bibliografias atuais, especialmente no contexto escolar e, mais especificamente, na educação básica. Portanto, a inclusão desses recortes históricos e seu aprimoramento no produto educacional preenche uma lacuna existente e ampliar o leque de recursos disponíveis para os professores trabalharem sobre este tema.

Portanto, com base nas avaliações e sugestões dos professores, fica evidente a potencialidade do produto educacional em fortalecer o ensino de probabilidade por meio da exploração de informações históricas. A colaboração dos professores permitiu uma conexão de ideias e sugestões que fortalece ainda mais a proposta desse produto, tornando-o mais alinhado com as demandas dos alunos e proporcionando maior qualidade e significado.

Dessa forma, a Avaliação Complementar desempenhou um papel importante e fundamental em um processo alternativo de validação e aperfeiçoamento contínuo deste Produto Educacional, garantindo sua eficiência e aderência aos objetivos deste trabalho e as necessidades do ensino de probabilidade na matemática escolar.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tivemos como questão principal investigar "Que recortes históricos poderiam ser elaborados a partir de uma história da probabilidade, segundo Chaquiam (2022), para uso em sala de aula?". Com a questão estabelecida foi delineado uma série de objetivos que incluíram revisão da literatura sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade, coleta das percepções dos professores sobre o tema, construção de uma história da probabilidade a partir da revisão bibliográfica, produção de recortes históricos e elaboração de atividades que envolvam a probabilidade e sua história a partir da história produzida, para uso em sala de aula, na perspectiva de Chaquiam (2022).

Durante o desenvolvimento deste trabalho, percorremos um caminho árduo e desafiador, decorrentes da pandemia causada pelo COVID-19, que impactaram diretamente a forma como foram conduzidos os estudos e as interações presenciais. Nesse sentido o Diagrama Metodológico mostrou ser uma alternativa metodológica que nos auxiliou na organização de todas as etapas dessa pesquisa, contemplando todos os nossos objetivos e respondendo nossa questão principal, ou seja, foi uma ferramenta fundamental para planejar, adaptar e contribuir para as etapas mais importantes deste trabalho.

Resultados que demostraram o potencial do Diagrama Metodológico de Chaquiam (2022) como um norteador por constituir e referenciar o texto histórico construído sobre a teoria da probabilidade e a sua relevância na organização de produzir os recortes históricos e atividades, contemplando o *contexto didático pedagógico.* Sendo que para tal efeito, se mostrou flexível para compor uma ilustração da composição parcial desses recortes históricos, que foram alterados ou ajustados na medida em o contexto histórico mudava para ser apresentado ao professor, pois cada atividade proporcionava um recorte específico da história da probabilidade, todos de igual importância para o ensino.

A revisão da literatura, nos situou sobre as principais abordagens e perspectivas sobre a Teoria da probabilidade, identificando diversas situações, informações, definições, lacunas e oportunidades de estudo. Formando uma base sólida, que ajudou a construir o Texto Histórico, sobre o tema, abrangendo diferentes períodos e contextos, estabelecemos uma visão abrangente e contextualizada, mostrando que teve início na busca por soluções adequadas envolvendo apostas e interrupções em jogos de azar, apresentando os primeiros conceitos envolvendo a probabilidade, até ser axiomatizada no século XX.

Com a revisão em documentos científicos de modo geral, identificamos algumas dificuldades e desafios que existem no processo de ensino da probabilidade, talvez por ser uma mudança específica no currículo escolar, que ainda surpreende, devido a pouquidade de materiais que abordam sobre o tema, principalmente no ensino fundamental, onde ficou constatado, pela pesquisa realizada com 30 professores de matemática, que apenas 3,3% consideraram que a probabilidade é uma Unidade Temática importante no ensino de matemática, percepção que foi fundamental para compreender as demandas e necessidades existentes no contexto educacional.

Dados que também se confirmaram na análise que foi realizada na coleção Matemática Bianchini, com os livros do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, onde se confirmou a pouca abordagem ao tema, tanto como conteúdo, quanto em tarefas e as que existem estão sempre com uma atividade no final de um capítulo. Esta coleção já estava atualizada segundo as orientações e recomendações da Base Nacional Comum Curricular. Observou-se que apesar da importância da probabilidade no ensino ainda existe uma lacuna entre, abordagens, professor e material didático no processo de ensino e aprendizagem, deste tema na educação escolar.

Enquanto professor, para organizarmos nosso planejamento didático e incluir como recurso didático a história no ensino de matemática, precisamos nos conscientizar que este recurso vem somar ao planejamento e prática em sala de aula e que de igual dificuldade (ou não) vem propor pensar na história da matemática para ensinar probabilidade, propor uma estrutura trazendo a história da matemática para sala de aula. Neste sentido os recortes históricos produzidos e as atividades elaboradas, vem proporcionar este recurso para a prática didática do professor.

Assim, foi desenvolvido um questionário virtual, composto por três partes avaliativas conforme a proposta de Chaquiam (2022), para obter resultados da avaliação dos recortes históricos e atividades, onde contou com a participação de 30 professores de matemática. É importante evidenciar que a opção da coleta de dados por meio virtual, se deu devido a pandemia que iniciou no começo de 2020.

Esse questionário foi dividido em três partes, buscando analisar as percepções dos professores: a primeira parte foi avaliado o texto histórico; a segunda parte foi avaliado o os três recortes históricos e Atividades e a terceira parte está relacionada a avalição complementar, que envolve o texto histórico e o conjunto de recortes históricos e atividades para a validação do produto educacional deste trabalho.

Diante das avaliações, observa-se nos Quadros sobre as percepções dos professores, ilustrados no capítulo 7, um indicativo favorável resultando em um percentual médio superior a 90% de aceitação, corroborando com a validação do material produzido. As sugestões apresentadas, foram analisadas e aquelas consideradas pertinentes já foram inseridas no processo. É importante frisar que outras sugestões não foram consideradas por entendermos que não coadunam com os objetivos da proposta.

Pelo exposto e fazendo uma avaliação global das percepções dos professores em relação ao resultado da pesquisa, foi feito uma análise individual de cada etapa do questionário, quais aferimos que:

O Texto Histórico, teve um índice de aceitação de 90% favorável à sua utilidade, apresentou uma linguagem adequada e acessível, mostrou ser útil para formação inicial e para a formação continuada dos professores, para a própria história da matemática, visto que abordar conteúdo de matemática para além dos textos históricos, principalmente porque foi apontado sugestões que o aprimoraram de forma significativa seu uso no ensino, corroborando com a sua validação, destacando-o como potencial para ajudar na explicação do surgimento da teoria da probabilidade.

Assim, o Texto Histórico mostra-se relevante para o ensino de probabilidade, e proporcionar para o professor, uma história da matemática no ensino de probabilidade, um recurso que incentivar a construção de estratégia e problemas com base em uma compreensão profunda do tema, utilizando fatos como ponto central, que pode ser aplicado no conhecimento histórico da matemática e em situações práticas. Esses resultados destacam a importância do texto como uma base sólida para a promoção de leituras, estudos e debates em sala de aula para a construção coletiva do conhecimento.

O conjunto de Recortes Históricos I, II, III e Atividades: respondem com êxito nossa problemática, pois estes são os recortes históricos produzidos a partir do Texto Histórico – *Uma História da Probabilidade* – segundo Chaquiam (2022) para uso em sala de aula. Esse conjunto de textos apresentados e as atividades elaboradas, contribui para ser associadas a outras metodologias de ensino durante a apresentação dos conteúdos de probabilidades em sala de aula, visto que para além das informações históricas são abordadas informações de cunho matemático.

Os recortes históricos também se mostraram eficientes ao proporciona a oportunidade de expandir o repertório vocabular dos alunos, ampliando os conceitos e palavras utilizadas no contexto, oferecendo diferentes nuances e possibilidades de expressão, de leitura, de inovação dentro do ensino da probabilidade, além de incentivar os alunos a desenvolver autonomia no processo de ensino.

A avaliação Complementar: os resultados evidenciaram que 97,2% dos professores aceitaram com êxito a abordagem do Produto Educacional no ensino de probabilidade, justificando a importância do papel da história da matemática como uma ferramenta que aprofundar sobre um tema e ajuda a construir um Texto Histórico, servindo de base para os recortes históricos, propostos por Chaquiam (2023).

Essas avaliações ressaltam a importância de adaptar, reorganizar e integrar os recortes com outros recursos. Considerando que foram atribuídas de professores com experienciais diferentes, que olharam para sua prática na sala de aula, para os recursos materiais, financeiros, tecnológicos e deram propostas para melhor se adequar em diferentes demandas e contextos educacionais.

Portanto, com base nas avaliações e sugestões dos professores, fica evidente a potencialidade do produto educacional em fortalecer o ensino de probabilidade por meio da exploração de informações históricas. A colaboração dos professores permitiu uma conexão de ideias e sugestões que fortaleceram ainda mais a proposta desse produto, tornando-o alinhado com as demandas dos alunos e proporcionando maior qualidade e significado para o professor utilizar em seu planejamento. É valido reforçar que o a proposta do recorte histórico é flexível e diante do texto principal pode ser selecionado outros recortes, ou seja, qualquer história de acordo com o interesse e preferência de cada professor e disposição no texto.

Um aspecto relevante em desenvolver esta pesquisa, do ponto de vista pedagógico, nos trouxe conhecimentos importantes na área da História da Matemática no ensino, de conhecer metodologias de ensino, inclusive que associar elas a história da probabilidade no ensino de matemática. De saber como avaliar a aprendizagem dos alunos, para que de fato se tenha uma mudança na prática em sala de aula, para que o uso da História da Matemática não fique apenas pela história e depois volta-se a uma prova, ou um teste ou exercícios sem o contexto histórico do que foi construído para a melhoria da nossa prática no ensino de matemática.

Dos conteúdos matemáticos, abordados ao longo do texto histórico, que vieram das contribuições dos personagens mencionados no diagrama metodológico, trouxeram um aprofundamento dos conteúdos relacionados a probabilidade que pode ser usado em sala de aula para permitir aos estudantes que percebam que tem ancorado em sua estrutura cognitiva conhecimentos, que estão relacionados as noções e ideias de probabilidade.

Noções que podem ser exploradas em situações práticas, como previsões e apostas envolvendo jogos que fazer parte de suas rotinas, tais como, situações de ganhar, perder, adivinhar e repartir. Situações que favorecem a oportunidade para o professor demonstrar de forma efetiva em sala de aula, permitindo que o aluno desenvolva autonomia, autoconfiança, contemplando possibilidades de mudança significativa no ensino de matemática.

Observamos que com toda essa reflexão, veio a importância da formação continuada e seus efeitos para o professor. Precisamos mudar o jeito de trabalhar, procurar por métodos que incentive a participação dos alunos, para que eles não fiquem apenas esperando uma lista de exercícios com inúmeras questões para serem avaliados, como ser fosse a única forma de analisar a competência e as habilidades do que eles “aprendem” em uma aula, como se fosse a única atitude positiva para a aprendizagem.

Logo, conclui-se que o ensino por meio da História da Matemática, incentiva a participação direta dos alunos, pois proporcionou uma abordagem surpreendente e satisfatória. Ao conhecerem a origem de um problema matemático, que envolveu a teoria da probabilidade, os estudantes têm a oportunidade de acompanhar a constituição, evolução e a resolução dessas situações ao longo do tempo, desde os primeiros jogos de azar até as situações, mas complexas envolvendo a teoria da probabilidade.

Diante da impossibilidade na aplicação desta pesquisa com os alunos da educação básica, em decorrência do período de pandemia, recomenda-se a validação desse produto educacional, para analisá-lo na perspectiva do estudante. Ademais outros estudos podem ser realizados, outros recortes históricos da teoria da probabilidade podem ser produzidos, de acordo com a necessidade do ensino, por exemplo fazer um recorte histórico sobre a probabilidade condicional ou a probabilidade geométrica, e com isso respectivamente a elaboração de novas atividades históricas, além de poder fazer adaptação dos textos e mesmo das atividades para qualquer nível de ensino na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cecilia Manoella Carvalho. **Um Modelo Didático de Referência para o Ensino de Probabilidade**. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2018

ALMEIDA, Alfredo Betâmio de. **O Problema Epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate.** 2005. Universidade Nova Lisboa. Disponível em https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/36874/2/BETaMIODEALMEIDA.pdf Acesso em 2021.

ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2009.

AVELAR, Afonso Reis de. **Reflexões Sobre o Ensino de Probabilidade em Nível Básico e Resolução de Alguns de seus Problemas Clássicos.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Brasília, 2018.

BERLINGOFF, William P; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática Através dos Tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. Editora Edgard Blücher. São Paulo, 2008.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática - Bianchini**: manual do professor. 9. Edição. Coleção 4v. de 6º ao 9º ano. Editora Moderna, São Paulo, 2017.

BOGA NETO, Francisco Rodrigues. **Uma Proposta para Ensinar os Conceitos da análise combinatória e de Probabilidade: uma aplicação do uso da História da matemática, como organizador prévio, e dos mapas conceituais.** Dissertação (Mestrado em Ciência e Educação Matemática), Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. Editora da Universidade de São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDEMBERG, João Claúdio. **Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o olhar da Pluralidade**. Curitiba. CRV, 2021, p. 23-46.

BRANDEMBERG, João Cláudio. **Revisitando a História da Matemática e enfatizando aspectos de sua formação (composição, consolidação) no campo da Educação Matemática**. Revista COCAR, n. 14, Edição Especial – Dossiê Tendências de Educação Matemática, Belém, julho 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. MEC, Brasília - DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: nov. de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática.** Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: **X Seminário Nacional de História da Matemática.** Campinas, 2013.

CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática: um elo entre contextos, textos e atividades**. SBEM, Belém, Outubro 2022. 68p.

CHAQUIAM, Miguel. **História e Matemática: um elo e quatro contextos.** Revista COCAR, n. 14, Edição Especial – Dossiê Tendências de Educação Matemática; Belém, 2022.

CHAQUIAM, Miguel. História e Matemática: dos contextos às atividades. In: **Anais da X Bienal de matemática,** SBEM, SBEM-PA, Belém, 2022. 72p.

CHAQUIAM, Miguel. Historia y Matemáticas Integradas a Través de un Diagrama Metodológico. In: **Revista Paradigma**, Vol. XLI, Nº Extra 1; Abril de 2020 / 197-211.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios Temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, Miguel. O Uso da História da Matemática e dos Conteúdos Matemáticos na Sala de Aula. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo. 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da Teoria á Prática - Campinas, SP, Papirus, 2012.

DÖRRIE, Heinrich. **100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution.** Tradução in inglês: David Antin. Dover Publications, New Youk, 1965.

EICHENBERGER Neto, João. **História da Matemática**. Editora e Distribuidora Educacional. Londrina: S.A., 2016. 224 p.

EUGÊNIO, Robson da Silva. O Letramento Probabilístico nos anos Finais do Ensino Fundamental. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Curitiba, Paraná, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. edição. Editora da Unicamp. Campinas, São Paulo. 2011

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes. **Estatística E Probabilidade**: Uma proposta para os anos iniciais do ensino fundamental. 2014. Dissertação (Mestrado), Ponta Grossa, 2014.

FOSSA, J. A. APLICAÇÃO DO TRIÂNGULO DE PASCAL. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 11, p. 22–34, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v4i11.38. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/38. Acesso em: 15 mai. 2022.

GADELHA, Augusto. **Notas de Aula Teoria de Probabilidade I**. Uma Pequena História da Probabilidade. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dicionário de Biografias Científicas.** Volume II. Tradutor: Carlos Almeida Pereira. Contraponto. Rio de Janeiro, 2007.

GIORDANO, Cassio Cristiano. Formação de professores que ensinam Probabilidade & Estatística na Educação Básica e os desafios da BNCC. In: **IV Formação de Professores de Matemática e Contemporaneidade** [livro eletrônico]. Organizadores José Carlos Gonçalves Gaspar [et. al.]. Pantanal Editora, Nova Xavantina, MT, 2022, 82p.

GNERI, Mario Antonio. **A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade.** IMECC, UNICAMP. https://www.ime.unicamp.br/~veronica/ME203ME414/apostilaprob.pdf. Acesso em 15/03/2023.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinício de Macedo. **O CENÁRIO DO ENSINO DE MATEMÁTICA E O DEBATE SOBRE O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA**. Práxis Educacional. Vitória da Conquista v. 8, n. 13. jul./dez. 2012. p. 253-280.

Historia de la Probabilidad. Disponivel em: <https://www.academia.edu/25039875/HISTORIA_DE_LA_PROBABILIDAD>. Acesso em 10/02/2023

HOFMANN, Joseph Ehrenfried. **Historia de la Mtemática**. Editorial Limusa. México, 2002.

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. **A Probabilidade que a História nos Conta**. In: XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Chiapas, México, 2015

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. **A Probabilidade na Educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática**. 2014, J94p.Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo. UNIAN, 2014.

KATZ, Victor J. **História da Matemática.** Tradução: Filipe Duarte. Segunda Edição. Lisboa, 2010

KOLMOGOROV, A. N. **Foundations of Probability Theory**. Tradução: Nathan Morrison. Segunda edição em língua inglesa. New Jersey: Chelsea Publishing Company, 1956.

LAPLACE, Pierre-Simon. **Ensaio Filosófico sobre as probabilidades.** Tradução: Pedro Leite de Santana. Ed. PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2010.

LIMA, Felipe Mascagna Bittencourt. **O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogos dos Discos**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

LIMA, E. T. D. Probabilidade em livros didáticos de Matemática dos anos Finais: diferentes concepções. In: **Zetetiké,** campinas, São Paulo, v. 28, n.1, p. 1-18, dez. 2020.

LINTZ, Rubens Gouvêa. **História da Matemática**. Unicamp, Campinas, São Paulo, 2007.

LOPES, Alice Casimiro. **A BNCC na contramão do PNE 2014-2024:** Avaliação e perspectivas. Organização: Márcia Angela da S. Aguiar e Luiz Fernandes Dourado [Livro Eletrônico]. Recife: ANPAE, 2018, p. 23-27.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. 2ª edição. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MENDES, Iran Abreu. **História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas**. Revista COCAR. n. 14, Edição Especial – Dossiê Tendências de Educação Matemática; Belém, 2022.

MENDES, Iran Abreu. **Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática sob o olhar da Pluralidade**. Curitiba. CRV, 2021, p. 63-74.

MENDES, Iran Abreu. **História para o Ensino da Matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula**. Revista COCAR, Edição Especial N. 3, Belém, 2017, p. 145-166

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores**.** Belém, SBHMat, 2016. 124p.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro, 2009

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado:** como o acaso determina nossas vidas. Tradução Diego Alfaro; Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2009.

NUNES, José Messildo Viana. ALMOULOUD, Saddo Ag. GUERRA, Renato Borges. O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio. In: **Boletim de Educação Matemática**, vol. 23, núm. 35B, abril, 2010, pp. 537-562. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

O'CONNOR, J. J. and ROBERTSON, **E. F. Last Update**. January, 1999. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kolmogorov/. Acesso em 02/09/22.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. INVESTIGANDO AS POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DOS INSTRUMENTOS HISTÓRICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA. **In: Anais eletrônico do 15º Seminário de História da Ciência e da Tecnologia**, Florianópolis, Santa Catarina, 2016.

PEREIRA, A. C. C. Editorial. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, n. 21, p. 1–5, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v7i21.4462. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4462. Acesso em: 15 mai. 2022.

QUEIROZ, Cileda; COUTINHO, Silva. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** In: REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC. São Paulo. 2007

RESTREPO B, Luis F; GONZÁLEZ L, Julián. **La Historia de la Probabilidad.** Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias. Universidad de Antioquia, vol. 16, núm. 1, marzo, 2003, pp. 83-87, Medellín, Colombia. ISSN: 0120-0690.

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=295026121011> Acesso em 20/02/2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

ROTUNNO, Sandra Aparecida Martins. **Estatística e Probabilidade**: Um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SALSA, Ivone da Silva. MOREIRA, Jeanete Alves. **Probabilidade e Estatística** – 2. ed. – Natal: EDUFRN, 2014.

SAMÁ, Suzi. SILVA, Rejane Conceição Silveira da. Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir da Base Nacional Comum Curricular. In: **Revista Zetetiké**, Campinas, São Paulo, v.28, 2020, p.1-21

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A Produção de Significações sobre Combinatória e Probabilidade numa Sala de Aula do 6º ano do Ensino Fundamental a Partir de uma Prática Problematizadora**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade São Francisco, Itatiba, 2015

SECADES, Marta García. **El Surgimiento De La Teoría De La Probabilidad**. Comunicación presentada a las VII Jornadas de ASEPUMA Universidad de Sevilla. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla. 2000

TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. **Gerolamo Cardano: Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar?** in: Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. 2011

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de; VASCONCELOS, Gabriel Brabo de; CHAQUIAM, Miguel. Um percurso pela história da probabilidade. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática,** *[S. l.]*, v. 9, n. 26, p. 31 – 46, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.7990. Disponível em: http://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7990. Acesso em: ago. 2022.

VASCONCELOS, Veraciv Brabo de; CHAQUIAM, Miguel. Recortes Históricos para o Ensino de Probabilidade. In: Anais da **X Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática** [livro eletrônico] / organização Universidade Federal do Pará. Belém, 2022.

VIALI, Lorí. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. In**: Revista Brasileira de História da Matemática** - Vol. 8 nº 16 - pág. 143-153. ISSN 1519-955X, PUC-RS/UFRGS, 2008

VIDARTE, J.; CHACHAPOYAS, N.; CAVALARI, M. F. O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 24, p. 84–103, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i24.5078. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5078. Acesso em: set. 2022.

WALDMANN, Gustavo T.; SILVA, Giane C.; SANTOS JUNIOR, Guataçara dos. O Ensino de Probabilidade e Estatística e as Tendências em Educação Matemática: uma análise em dissertações e teses. In: **Revista Espacios**, 2017. Disponível em: https://www.revistaespacios.com/a17v38n35/a17v38n35p04.pdf Acesso em: mai. 2022.

WARSI, Karl. **O Livro da Matemática.** Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. 1ª edição. Globo livros. Rio de Janeiro. 2020.

ZINDEL, Marcia Longen. **Tomada De Decisão E Risco: A Contribuição Dos Matemáticos E Estatísticos.** Estadística y Sociedad, México, p.05-30, n.5 Noviembre. 2018

APÊNDICE

Apêndice A – Questionário de Pesquisa para Professores de Matemática

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Prezados (as) professores (as), Sou estudante do curso de Mestrado Profissional do ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Estou desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de matemática, com a finalidade de futuramente elaborar produtos educacionais que possam ajudar no ensino mais dinâmico de matemática na educação básica. Para a efetivação da referida pesquisa, é importante sua participação ao responder às questões a seguir. Ressalto que sua identificação será preservada e que as informações serão utilizadas para fins acadêmicos.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO *

☐ Eu, aceito participar deste projeto, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido da pesquisa intitulada. O uso de atividades para o Ensino de PROBABILIDADE, sob a responsabilidade das pesquisadoras Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kely Martins da Silva, orientadoras e orientanda Veraciv Brabo de Vasconcelos vinculados a Universidade do Estado do Pará. Estou ciente que esta pesquisa busca realizar um diagnóstico do ensino de probabilidade a partir da opinião dos professores de matemática. Tenho clareza que minha colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras importantes para a realização da pesquisa. Em nenhum momento serei identificado. Estou ciente que resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim minha identidade será preservada. Estou ciente ainda que os produtos desta pesquisa serão de natureza acadêmica com um estudo sobre o ensino de probabilidade.

INFORMAÇÕES PESSOAIS

1 - Nome *

____

2 - Informe seu Sexo *

☐ Feminino
☐ Masculino

3 - Informe a sua Idade *

____

4 - Nível de formação (Titulação Máxima) *

☐ Ensino Médio
☐ Ensino Superior
☐ Especialização

- ☐ Mestrado
- ☐ Doutorado

5 - Tipo de formação inicial *
- ☐ Licenciatura Plena em Matemática
- ☐ Bacharelado em Matemática

Outro:________________________________

6 - Tempo de Serviço como Professor de Matemática? *
- ☐ Menos de um ano
- ☐ 1 - 5 anos
- ☐ 6 - 10 anos
- ☐ 11 - 15 anos
- ☐ 16 - 20 anos
- ☐ 21 - 25 anos
- ☐ 26 - 30 anos
- ☐ 31 - 35 anos
- ☐ Mais de 35 anos

ATUAÇÃO PROFISSIONAL

7 - Como você costuma inicia suas aulas de Matemática? *
- ☐ Pela definição seguido de exemplos e exercícios;
- ☐ Com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
- ☐ Criando um modelo para a situação e em seguida analisar o modelo;

Outro:____.

8 - Do que você mais sente falta quando ministra suas aulas de Matemática? *
- ☐ Formação inicial sólida;
- ☐ Domínio de classe;
- ☐ Compreensão dos Conceitos Matemáticos;
- ☐ Formação continuada;
- ☐ Metodologias Diferenciadas de Ensino;
- ☐ Recursos Didáticos e Pedagógicos;

Outro:_____________________________________.

9 - Você seleciona os conteúdos de matemática para ensinar a partir de que? (Marque mais de uma opção, se necessário) *
- ☐ Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN;
- ☐ Base Nacional Comum Curricular - BNCC;
- ☐ Livro Didático;
- ☐ Caderno de Orientação da Rede de Ensino;

Outro: ______________________________________.

10 - Quais as principais formas de avaliação que você costuma aplicar/utilizar? (Marque mais de uma opção, se necessário) *
- ☐ Prova oral
- ☐ Prova Escrita
- ☐ Teste
- ☐ Simulado
- ☐ Autoavaliação

- Trabalho em grupo
- Trabalhos individuais
- Produções no caderno
- Avaliação entre alunos
- Seminário

Outro: ____________________________________.

11 - Para fixar o conteúdo ministrado, você costuma? *
- Apresentar uma lista de exercícios para ser resolvido;
- Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- Mandar resolver os exercícios do livro didático;
- Propõe a resolução de questões por meio de softwares;

Outro:____.

12 - Você considera a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada? *
- Sim
- Não

13 - Você considera que seus alunos gostam de aprender matemática? *
- Todos
- A maioria
- A minoria
- Nenhum

14 - Quais as maiores dificuldades dos seus alunos nas aulas de matemática? *
- Compreensão dos conceitos/ideias
- Compreensão das regras
- Resolução dos problemas
- Associar com as situações do cotidiano
- Falta de conhecimento da Matemática básica

Outro:____

15 - Qual Unidade Temática da matemática você considera mais importante nas suas aulas? *
- Números
- Álgebra
- Geometria
- Grandezas e Medidas
- Probabilidade e Estatística

FORMAÇÃO CONTINUADA

16 - A rede de Ensino onde você atua oferece formação continuada? *
- Não oferece
- Oferece raramente
- Oferece frequentemente
- Oferece sempre

17 - Quando é ofertado cursos de formação continuada na sua cidade, você: *
- Não participa
- Participa poucas vezes
- Participa muitas vezes
- Participa sempre

18 - Você já utilizou a História da Matemática, como recurso didático no ensino de algum conteúdo matemático? *

- ☐ SIM, regularmente.
- ☐ SIM, esporadicamente.
- ☐ NÃO

19 - Você considera que o ensino de conteúdos matemáticos por meio da História da Matemática pode despertar maior interesse do aluno quanto ao que está sendo ensinado? *

- ☐ SIM, independente do conteúdo e da abordagem histórica.
- ☐ SIM, mas pendente do conteúdo matemático.
- ☐ SIM, mas dependente da abordagem da história da matemática.
- ☐ EM PARTE, pois dependente do conteúdo ou da história da matemática.
- ☐ NÃO, independentemente do conteúdo matemático.
- ☐ NÃO, independentemente da abordagem histórica.
- ☐ NÃO, independentemente do conteúdo matemático ou da abordagem histórica.

20 - Em relação ao ensino de conteúdos matemáticos relacionados a probabilidade, você considera que o uso da história pode incentivar o aluno em aprofundar os conhecimentos no ensino da probabilidade: *

- ☐ SIM
- ☐ NÃO
- ☐ TALVEZ

21 - Em qual série do Ensino Fundamental, você costuma ensinar sobre o conteúdo de probabilidade? (Marque mais de uma opção, se for o caso) *

- ☐ 6º ano
- ☐ 7º ano
- ☐ 8º ano
- ☐ 9º ano
- ☐ Não ensino probabilidade no Ensino Fundamental

22 - Caso você ensine PROBABILIDADE no ensino fundamental. Qual o grau de dificuldade para os alunos aprenderem? Preencha o quadro a seguir com base na sua experiência de professor para expressar essa dificuldade. *

- caso não ensine, marque a primeira coluna "Não Ensina".

	Não Ensina	Muito Fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil
Noções de Probabilidade	☐	☐	☐	☐	☐
O conceito de Probabilidade	☐	☐	☐	☐	☐
Experimento aleatório	☐	☐	☐	☐	☐
Evento dependente	☐	☐	☐	☐	☐
Evento independente	☐	☐	☐	☐	☐
Espaço amostral	☐	☐	☐	☐	☐
Probabilidade Condicional	☐	☐	☐	☐	☐
Cálculos de probabilidade	☐	☐	☐	☐	☐

23 - Existe algum aspecto que você gostaria de referir-se quanto ao ensino da probabilidade na educação básica? *

____

APÊNDICE B – Questionário para Professores – Validação do Produto Educacional

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

RECORTES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Meu nome é **Veraciv Brabo de Vasconcelos**, sou estudante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Estou apresentando a você, docente de Matemática, um Produto Educacional composto de três textos e atividades para uso do ensino de Probabilidade na educação básica, usado como norte o Diagrama Metodológico, proposto por CHAQUIAM (2022), para que você possa avaliar e contribuir com o meu trabalho.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO *

☐ Confirmo minha participação na avaliação do produto educacional intitulado "Recortes da História da Matemática para o Ensino de Probabilidade", com o objetivo de validar e coletar dados para responder à questão de pesquisa e defesa da dissertação de Veraciv Brabo de Vasconcelos, do programa de mestrado.

PERFIL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Nome
____

Idade *
____

Nível de formação (Titulação Máxima) *
☐ Graduação
☐ Especialização
☐ Mestrado
☐ Doutorado

Nível de Ensino que atua*
☐ Fundamental
☐ Médio
☐ Superior

Rede de Ensino que atua*
☐ Pública

- ☐ Privada

Tempo de Serviço como Professor de Matemática? *

- ☐ até 5 anos
- ☐ entre 5 e 10 anos
- ☐ entre 10 a 15 anos
- ☐ entre 15 a 20 anos
- ☐ entre 20 a 25 anos
- ☐ entre 25 a 30 anos
- ☐ mais de 30 anos

TEXTO HISTÓRICO: Uma História da Probabilidade

No link desta seção, está disponível o texto principal desta pesquisa, é importante sua leitura para posterior, avaliações e contribuições neste produto. <UMA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE>

1. Você considera que o uso de recortes da história e atividades relacionados a teoria da probabilidade, pode ajudar os alunos a compreender melhor o seu conceito, e entender "como", "porque" e "pra quê" surgiu essa teoria?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

2. Você considera que o uso de exemplos históricos na educação básica pode ajudar a desenvolver o pensamento crítico e a compreensão de como a probabilidade evoluiu?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

3. Você acredita que a história da probabilidade pode ajudar os alunos a compreender a matemática de uma maneira mais ampla e interessante?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

4. Você acha que a história da probabilidade pode inspirar o aluno a se interessar mais pela matemática?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)

☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

5. O recorte histórico sobre o ensino da probabilidade e as atividades apresentadas, podem contribuir para a formação didática e pedagógica do professor de matemática?
☐ De nenhuma forma (0%)
☐ Pontualmente (25%)
☐ Em parte (50%)
☐ Na maioria das vezes (75%)
☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

Recorte I e Atividades

As atividades apresentadas nesta seção, são sugestões ao ensino de probabilidade construídas a partir do texto principal. Clique no link para fazer a leitura e consequentemente sua avaliação. <UM PROBLEMA QUE DEU INÍCIO A TEORIA DA PROBABILIDADE>

1. O recorte histórico "Um problema que deu início a Teoria da Probabilidade", apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?
☐ De nenhuma forma (0%)
☐ Pontualmente (25%)
☐ Em parte (50%)
☐ Na maioria das vezes (75%)
☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

2. O conteúdo da Atividade I está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?
☐ De nenhuma forma (0%)
☐ Pontualmente (25%)
☐ Em parte (50%)
☐ Na maioria das vezes (75%)
☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

3. A Atividade I apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?
☐ De nenhuma forma (0%)
☐ Pontualmente (25%)
☐ Em parte (50%)
☐ Na maioria das vezes (75%)
☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

4. As questões constantes para a Atividade I, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?
☐ De nenhuma forma (0%)

□ Pontualmente (25%)
□ Em parte (50%)
□ Na maioria das vezes (75%)
□ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

Recorte II e Atividades

As atividades apresentadas nesta seção, são sugestões ao ensino de probabilidade construídas a partir do texto principal. Clique no link para fazer a leitura e consequentemente sua avaliação. <UMA HISTÓRIA DA TEORIA DA PROBABILIDADE>

1. O recorte histórico "Um História da Teoria da Probabilidade", apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?
□ De nenhuma forma (0%)
□ Pontualmente (25%)
□ Em parte (50%)
□ Na maioria das vezes (75%)
□ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

2. O conteúdo da Atividade II está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?
□ De nenhuma forma (0%)
□ Pontualmente (25%)
□ Em parte (50%)
□ Na maioria das vezes (75%)
□ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

3. A Atividade II apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?
□ De nenhuma forma (0%)
□ Pontualmente (25%)
□ Em parte (50%)
□ Na maioria das vezes (75%)
□ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

4. As questões constantes para a Atividade II, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?
□ De nenhuma forma (0%)
□ Pontualmente (25%)
□ Em parte (50%)
□ Na maioria das vezes (75%)
□ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

Recorte III e Atividades

As atividades apresentadas nesta seção, são sugestões ao ensino de probabilidade construídas a partir do texto principal. Clique no link para fazer a leitura e consequentemente sua avaliação. <DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA À DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA>

1. O recorte histórico "Da Definição Clássica à Definição Axiomática", apresenta um texto compreensível para o nível da educação básica?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

2. O conteúdo da Atividade III está compatível com o objetivo, habilidades e competências propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

3. A Atividade III apresenta uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

4. As questões constantes para a Atividade III, estão alinhadas ao objetivo, competências e habilidades propostas?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)
- ☐ Em parte (50%)
- ☐ Na maioria das vezes (75%)
- ☐ Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?

____

AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL (RECORTES HISTÓRICOS E ATIVIDADES)

1. Na sua percepção, o conjunto de atividades relacionadas à História da probabilidade contribui com o ensino dos seus conteúdos na educação básica?

- ☐ De nenhuma forma (0%)
- ☐ Pontualmente (25%)

- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

2. A apresentação de recortes históricos e atividades pode promover uma melhor interação entre professor, aluno e saber?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

3. Na sua percepção, as atividades propostas fornecem aos alunos uma nova visão sobre probabilidade?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

4. Os recortes históricos e atividades sobre a teoria da probabilidade, fornecem novas perspectivas de ensino para os professores?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

5. Você percebe que os textos e atividades podem ser adaptadas para diferentes níveis de ensino e perfis dos alunos?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)
- Integralmente (100%)

Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

6. Você perceber que os recortes históricos e as atividades apresentadas podem ser relacionados ou adaptados com tarefas sobre probabilidade no livro didático?

- De nenhuma forma (0%)
- Pontualmente (25%)
- Em parte (50%)
- Na maioria das vezes (75%)

☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

7. Na sua concepção, a adaptação das atividades do recorte histórico para o contexto do livro didático pode ajudar a tornar o ensino de probabilidade mais contextualizado?
☐ De nenhuma forma (0%)
☐ Pontualmente (25%)
☐ Em parte (50%)
☐ Na maioria das vezes (75%)
☐ Integralmente (100%)
Quais sugestões você daria para melhorar a utilização deste produto em sala de aula?
____

8. Como você sugere adaptar as atividades propostas nos recortes históricos envolvendo a probabilidade para o mais próximo da realidade dos alunos?
____
____

9. Existem aspectos que poderiam ser aprimorados ou reformulados neste produto? Por favor, detalhe suas observações e sugestões para uma melhoria no ensino da probabilidade por meio da sua história, enquanto proposta metodológica.
____
____

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem