



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no
Ensino Médio

CARLOS MAGNO DE MORAES

**Ensino de Permutação através da
Resolução de Problemas**

BELÉM/PA
2022

Carlos Magno de Moraes

**Ensino de Permutação através da
Resolução de Problemas**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira.

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho.

BELÉM/PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca do Centro de Ciências Sociais e da Educação - UEPA, Belém – PA

M828e Moraes, Carlos Magno de

Ensino de permutação através da resolução de problemas./ Carlos Magno de Moraes. Belém, 2022.

233f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

Orientador (a): Cinthia Cunha Maradei Pereira

1. Ensino da matemática. 2. Resolução. 3. Permutação. 4 Engenharia didática. I. Pereira, Cinthia Cunha Maradei. (Orient.). II. Título.

CDD. 22º ed.510.7

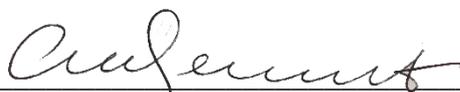
Carlos Magno de Moraes

Ensino de Permutação através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Ensino Médio.
Orientadora: Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Coorientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Data de aprovação: 15/06/2022

Banca examinadora



_____. Orientadora

Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira

Doutora em Bio Informática – Universidade Federal do Pará – UFPA
Universidade do Estado do Pará



_____. Examinador Interno e Coorientador

Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Doutor em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará



_____. Examinador Externo

Profa. Dra. Glaucianny Amorim Noronha

Doutora em Educação Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade da Amazônia

Belém/PA

2022

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à trindade: ao Espírito Santo, Senhor Jesus Cristo e ao nosso grande e bondoso Deus, por terem me concedido forças, ânimo e vigor para que eu pudesse concluir mais essa etapa da minha vida profissional com êxito e por todas as oportunidades e bênçãos alcançadas e as que ainda estão por vir.

A toda minha família, por sempre me incentivar em busca de novos desafios, e por sempre acreditar que eu era capaz.

Em especial, aos meus pais Guilhermina de Moraes e Balbino de Moraes (*in memoriam*) por me ensinarem o sentido da vida, sendo responsáveis pela pessoa que me tornei.

Aos meus queridos filhos Ana Beatriz, Carlos Gabriel e Walison e meu netinho Moisés, por me inspirarem e iluminarem. A minha querida esposa Cleonice, pela convivência ao meu lado.

As minhas queridas irmãs, Maria de Jesus, Mariana, Ivanilde, Lurdinha, Rosa (*in memoriam*) e Lúcia (*in memoriam*); aos meus queridos primos, José Reinaldo, José Raimundo (Tachiba) e ao meu cunhado Riba (Berrêdo), por me ajudarem nos momentos mais difíceis da minha vida, em especial ao meu estudo. Aos meus tios (*In memoriam*), em especial, ao tio Inácio pelos ensinamentos e incentivo, ao tio Izaias (Tizico) pelo carinho e convivência. A todos os meus sobrinhos, também pelo carinho e convivência.

Aos colegas de trabalho: Herbeth, Sebastião, Marcos Aurélio, Carlito, Ada, Graciliano, Allan, Wady, Teixeira, Serginho, Ivonete, Castro, Álvaro, Danilo, Jonas e Adiel entre outros pelo companheirismo e incentivo.

Aos colegas de turma pela parceria durante a jornada de estudos, em especial ao Max, Lene, Francisca, Antonino e Nordman.

A todos os meus professores que contribuíram com a minha formação. Em especial: Dona Francisca (comunidade de Taim, onde iniciei meus estudos), Paulinha, Elione, Abimael, Eduardo, Marcos Muniz e Eliane Pedrosa.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UEPA, pelos ensinamentos e novos saberes que recebi. Em especial, a minha orientadora Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira e meu coorientador Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho pela confiança, apoio e

disponibilidade para me orientar. À Profa. Dra. Glaucianny Amorim Noronha, pelas contribuições e sugestões em nossa pesquisa.

Aos meus queridos alunos, participantes e envolvidos no experimento. Às alunas Sebastiana de Sousa Nunes, Rebeca Oliveira Feitosa e Ana Beatriz Brito de Moraes (Filha do autor desta dissertação), pelo apoio durante o experimento da pesquisa.

A todos os servidores da UEPA que me acolheram e me trataram com respeito e carinho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), pelo apoio profissional, tornando possível esse sonho.

A todos que contribuíram direta e indiretamente com o desenvolvimento desta pesquisa. Muito

Obrigado Meu Deus!

“Quando o SENHOR trouxe do cativeiro os que voltaram a Sião, estávamos como os que sonham. Então a nossa boca se encheu de riso e a nossa língua de cântico; então se dizia entre as nações: Grandes coisas fez o Senhor a estes. Grandes coisas fez o Senhor por nós, pelas quais estamos alegres.”

(SALMOS 126:1-3)

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

RESUMO

MORAES, Carlos Magno de. **Ensino de Permutação através da Resolução de Problemas**. 2022, 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

A presente pesquisa apresenta os resultados de uma investigação que teve como objetivo analisar as dificuldades dos alunos, ao estudarem permutação, e os efeitos que uma sequência didática, construída através da resolução de problemas, proporciona para a construção de saberes, com vista a melhorar o ensino e aprendizagem de permutação, em uma turma do 2º ano do ensino médio. Como referenciais teóricos e metodológicos, utilizamos em nossa pesquisa a Engenharia Didática, que, segundo Artigue (1996), constitui-se de quatro etapas (análises prévias, análises a priori, experimentação e validação). Adotamos a Análise Microgenética proposta por Góes (2000) com entendimento de Tomio *et al.* (2017), Kelman e Branco (2014), Souza e Cabral (2010), baseado nos estudos de Vygotsk, a Resolução de Problemas proposto por Polya (1945) com as concepções de Onuchic *et al.* (2014), Dante (2009), Pinheiro e Sá (2010) e a Sequência Didática, na visão de Zabala (1998). A experimentação aconteceu no segundo semestre de 2021. Nesta etapa, apresentamos a sequência didática proposta numa turma do 2º ano do ensino médio de uma escola pública do município de Codó-MA. Durante a aplicação da sequência didática, fizemos videogravação e filmagem para descrição e análise dos dados, por meio da Análise Microgenética, além dos registros nas observações e conclusões dos estudantes. Por último, na análise a posteriori e validação, descrevemos passo a passo a análise dos resultados obtidos com a aplicação da sequência didática. Os resultados obtidos estão apresentados na versão final da dissertação, juntamente com um produto educacional para que possamos contribuir com o ensino e aprendizagem, na prática pedagógica de professores de matemática ao ministrarem o conteúdo de Permutação.

Palavras-chave: Engenharia didática. Ensino de matemática. Permutação. Resolução de problemas.

ABSTRACT

MORAES, Charlemagne de. **Teaching Permutation Through Problem Solving.** 2022, 233 f. Dissertation (Master in Mathematics Teaching) – University of the State of Pará, Belém, 2022.

The present research presents the results of an investigation that aimed to analyze the students' difficulties when studying permutation and; the effects that a didactic sequence, built through problem solving, provides for the construction of knowledge, with a view to improving the teaching and learning of permutation, in a class of the 2nd year of high school. As theoretical and methodological references, we used Didactic Engineering in our research, which, according to Artigue (1996), consists of four stages (previous analyses, a priori analyses, experimentation and validation). We adopted the Microgenetic Analysis proposed by Góes (2000) with the understanding of Tomio *et al.* (2017), Kelman and Branco (2014), Souza and Cabral (2010), based on Vygotsk's studies, the Problem Solving proposed by Polya (1945) with the concepts of Onuchic *et al.* (2014), Dante (2009), Pinheiro e Sá (2010) and the Didactic Sequence, in the view of Zabala (1998). The experiment took place in the second half of 2021. At this stage, we present the proposed didactic sequence, in a class of the 2nd year of high school, from a public school in the municipality of Codó-MA. During the application of the didactic sequence, we made video recording and filming for description and analysis of the data, through Microgenetic Analysis, in addition to the records in the observations and conclusions of the students. Finally, in the a posteriori analysis and validation, we describe step by step the analysis of the results obtained with the application of the didactic sequence. Our results are presented in the final version of the dissertation, together with an educational product so that we can contribute to teaching and learning, in the pedagogical practice of mathematics teachers when teaching the content of Permutation.

Keywords: Didactic engineering. Mathematics teaching. Problem solving. Permutation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da Engenharia Didática.....	29
Figura 2 – Boneco de E.V.A.....	80
Figura 3 – Uma das possibilidades de vestimenta – M.	81
Figura 4 – Boneca de E.V.A.....	81
Figura 5 – Uma das possibilidades de vestimenta – F.	82
Figura 6 – Letras em E.V.A.....	82
Figura 7 – Números em E.V.A.	83
Figura 8 – Vista do osso <i>Ishango</i> , com mais de 8000 anos de idade.....	109
Figura 9 – Adorno de Natal.....	115
Figura 10 - Distribuição de cópias da atividade 01 de ensino.....	137
Figura 11 - Atividade - Alunos formando números diferentes trocando os algarismos de posição.	143
Figura 12 - Atividade - Alunos formando anagramas diferentes trocando as letras de posição	144
Figura 13 - Atividade – Alunos usando o alfabeto móvel para formar anagramas.....	144
Figura 14 - Permutação de algarismos para formação de números.	145
Figura 15 - Alfabeto móvel em compensado de madeira.	146
Figura 16 -Alfabeto móvel em E.V.A.....	146
Figura 17 - Algarismo móvel em E.V.A e Plástico.	147
Figura 18 - Atividade – Alunos formando anagramas com as letras da palavra OVO.	161
Figura 19 - Atividade - Alunos formando anagramas com elementos repetidos.	161
Figura 20 - Atividade - Alunos formando números com algarismos repetidos.	162

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Dedicção ao estudo de matemática fora da escola.	95
Gráfico 2 – Gosto pela matemática.	97
Gráfico 3 – Estudo de Permutação.	99
Gráfico 4 – Grau de dificuldade em Permutação.....	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Estrutura do modelo da sequência didática.....	47
Quadro 2 - Etapa e conteúdo da Sequência Didática.....	49
Quadro 3 – Plano de ação dos encontros e atividades da Sequência Didática.....	50
Quadro 4 – Habilidades e competências sobre Análise Combinatória segundo a BNCC - EF	62
Quadro 5 – Habilidades e competências sobre Análise Combinatória segundo a BNCC – EM.....	63
Quadro 6 – Habilidades e competência de Análise Combinatória segundo o SAEB – EF....	63
Quadro 7 – Habilidades e competência de Análise Combinatória segundo o SAEB - EM....	64
Quadro 8 – Estudos sobre o ensino de Análise Combinatória (continua).....	68
Quadro 9 – Dificuldades em análise combinatória.	101
Quadro 10 – Teste de Verificação da aprendizagem em Permutação.	105
Quadro 11 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 01.....	122
Quadro 12 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 02.	124
Quadro 13 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 03.	126
Quadro 14 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 04.	128
Quadro 15 - Descrição da Aplicação da Sequência Didática.	134
Quadro 16 - Sugestões de Pinheiro e Sá (2010) para Resolução de Problemas.	135
Quadro 17 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 01 de ensino.....	138
Quadro 18 - Ficha resposta preenchida na Atividade 01 pelo grupo A.....	139
Quadro 19 - Ficha resposta preenchida na Atividade 01 pelos grupos B.	139
Quadro 20 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 01 de ensino.	147
Quadro 21 - Questões resolvidas na Atividade 01 de ensino pelo aluno A01	150
Quadro 22 - Questões resolvidas na Atividade 01 pelo aluno B02.....	151
Quadro 23 - Questões resolvidas na Atividade 01 pelo aluno C01.....	152
Quadro 24 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 02.....	154
Quadro 25 - Ficha resposta preenchida na Atividade 02 pelo grupo C.	154
Quadro 26 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 02. (continua).....	156
Quadro 27 - Questões resolvidas na Atividade 02 pelo aluno A02.....	158
Quadro 28 - Questões da Atividade 02 respondidas pelo aluno D03.	159
Quadro 29 - Ficha resposta a ser preenchida na atividade 03.	160
Quadro 30 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo A.....	163
Quadro 31 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo C.	164
Quadro 32 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo D.	164
Quadro 33 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 03. (continua).....	167
Quadro 34 - Questões resolvidas na Atividade 03 pelos alunos A02.	169
Quadro 35 - Questões resolvidas na Atividade 03 pelo aluno C03.....	170
Quadro 36 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 04.....	171
Quadro 37 - Ficha resposta preenchida na Atividade 04 pelo grupo B.....	172
Quadro 38 - Ficha resposta preenchida na Atividade 04 pelo grupo C.	173
Quadro 39 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 04. (continua).....	175
Quadro 40 - Questões resolvidas na Atividade 04 pelo aluno B02.....	177
Quadro 41 - Questões resolvidas na Atividade 04 pelo aluno C03.....	178
Quadro 42 - Sistematização dos recortes utilizados nas análises.	180

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	26
2.1 A Engenharia Didática	27
2.2 Análise Microgenética	32
2.3 Aspectos Históricos sobre a Resolução de Problemas	37
2.4 Resolução de Problemas como metodologia no Ensino de Matemática	39
2.5 Sequência Didática	46
3 ANÁLISES PRÉVIAS	51
3.1 Aspectos Curriculares de Análise Combinatória	53
3.2 Revisão de literatura sobre Análise Combinatória.....	66
3.2.1 Análise Geral da Revisão de Literatura	86
3.3 Diagnóstico com Estudantes	91
3.3.1 Metodologia da Consulta diagnóstica com estudantes	93
3.3.2 Perfil socioeconômico dos estudantes	94
3.3.3 Currículo.....	96
3.3.4 Metodologia da Aprendizagem.....	100
3.3.5 Avaliação	104
3.3.6 Análise Global do Diagnóstico com estudantes	107
3.4 Aspectos Didáticos sobre Permutação.....	108
3.4.1 Permutação Simples	110
3.4.2 Permutações Circulares	116
4 ATIVIDADES DE ENSINO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	120
4.1 Atividade 01 de Ensino.....	122
4.2 Atividade 02 de ensino	124
4.3 Atividade 03 de ensino	126
4.4 Atividade 04 de Ensino.....	128

4.5 Considerações sobre a Sequência Didática.....	130
5 EXPERIMENTAÇÃO	131
5.1 Aplicação.....	134
5.1.1 Primeiro Encontro da Atividade de Ensino	136
5.1.2 Segundo Encontro da Atividade de Ensino	137
5.1.3 Terceiro Encontro da Atividade de Ensino	153
5.2 Análise e Validação	179
5.2.1 Processo de Análise Microgenética	181
5.2.2 Considerações Gerais sobre a Experimentação	203
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	206
REFERÊNCIAS.....	210
APÊNDICES	220

1 INTRODUÇÃO

Vivemos em uma sociedade repleta de inovações científicas e tecnológicas, onde o cidadão necessita de uma formação geral, sólida, que seja capaz de ajudá-lo a pensar de forma crítica e desenvolver competências e habilidades, em especial, para resolver problemas em seu convívio social, colocando-os à luz da ciência.

Neste sentido, a escola exerce um papel fundamental na formação do indivíduo, pois possui uma visão de como melhor prepará-lo para o enfrentamento dos desafios e das exigências de uma sociedade contemporânea repleta de transformação social, cultural e tecnológica.

Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio evidenciam que:

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. [...] para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional (BRASIL, 2000, p.40).

Sendo assim, é função das instituições educacionais, de forma geral, preparar o indivíduo para que este seja um cidadão crítico, no sentido de atuar e questionar a realidade que o cerca, inserindo-o no mundo do trabalho e no contexto social.

No entendimento de Pinheiro (2008), a escola tem a responsabilidade de diminuir a distância crescente entre o “formalismo da sala de aula e a cultura de base produzida no cotidiano”, para auxiliar os estudantes a serem sujeitos pensantes, capazes de construir os elementos essenciais para a compreensão e apropriação crítica da realidade.

No entanto, observa-se com muita frequência, na maioria dos ambientes escolares, a predominância ainda do modelo de ensino e aprendizagem tradicional, onde os professores são o centro das atenções. Em muitos casos, os saberes prévios dos estudantes são desconsiderados; retirando, assim, o papel fundamental da escola.

Neste sentido, Onuchic *et al.* (2014) destacam, em Van de walle (2001), que os trabalhos no ambiente escolar devem iniciar constantemente onde os estudantes estejam, diferente de outras situações em que o início do ensino realizado pelos

professores se exerce com a exclusão dos saberes prévios dos estudantes.

É comum em muitas abordagens que o conteúdo seja ministrado priorizando apenas definições, resoluções de exercícios e exposição dos assuntos de forma pronta pelo professor. O conteúdo ministrado desta forma, na maioria das vezes, não tem nenhuma relação com situações da realidade atual ou não contém qualquer significado para o aluno.

Dessa forma, Onuchic *et al.* (2014) afirmam que o docente pode perceber gradualmente os saberes que os estudantes trazem de seu convívio social, ele tem que auxiliá-los no decorrer do processo, promovendo a interação e a ajuda mútua entre os estudantes. Excluindo, assim, o caráter aprovativo das avaliações somativas, consideradas tradicionais.

De acordo com Moraes (2005 *apud* PINHEIRO, 2008), as situações na maioria das escolas ainda continuam as mesmas, sobretudo, pelas dificuldades e limitações vivenciadas por todos que nelas fazem as suas atividades laborais.

Nesse contexto, segundo Pinheiro (2008), podemos encontrar, no professor da disciplina de Matemática, um personagem de grande relevância para a educação que continua, ainda, privilegiando o velho modelo de ensino, o modelo tradicional, pelo qual ele foi ensinado.

Este autor considera a necessidade de um novo modelo educacional que possa criar novos ambientes educacionais, capazes de incluir e acompanhar o desenvolvimento que acontece no contexto da ciência, da técnica e da tecnologia, com vista na formação do cidadão, principalmente a tecnológica, contribuindo para que ele possa atuar em um universo cada vez mais tecnológico e digital.

Assim, entendemos que esse modelo educacional representa uma proposta com alternativas metodológicas, onde o professor possa estar em constante aperfeiçoamento, em busca de conhecimentos, para poder ajudar seus alunos a construir seus saberes no ambiente escolar. A busca pela construção desses saberes passa pela formação e aperfeiçoamento que este profissional (professor), faz durante sua vivência escolar.

Neste sentido, apresentarei meu percurso de vida, minha caminhada como estudante na formação-base de primeiro e segundo graus, as dificuldades na aprendizagem, a formação em nível de licenciatura e as motivações para desenvolver esta pesquisa.

Filho de pescador e lavradores, nasci e cresci em uma pequena comunidade da Zona Rural de São Luís-MA, a comunidade de Taim, que está localizada na parte sudoeste da cidade, mais precisamente próximo ao Complexo Portuário do Itaqui, às margens da Baía de São Marcos, onde iniciei os estudos da Pré-escola e Ensino Fundamental menor com uma professora normalista, Dona Francisca. Sempre tive dificuldade para estudar, no entanto nunca desistir de sonhar com um futuro melhor.

No Ensino Fundamental menor, do antigo 2º ao 4º ano, estudei em uma Escola Pública da Rede Estadual, no povoado da Vila Maranhão. Para chegar à referida escola, tinha que andar um percurso de aproximadamente 13Km, de ida e volta para casa, pois à época não havia ônibus direto para a minha comunidade.

Sempre estudei em Escola Pública e pelo turno da manhã. Para sair a caminho da escola bem reforçado, contava com a minha querida mãe, hoje falecida, que sempre me acordava cedo já com café, a farinha, o camarão e o peixe assado ou frito e o cuscuz quando tinha, resultado da pescaria e da lavoura feita pelo meu pai, hoje também falecido. Nesta fase escolar nunca fiquei reprovado.

No Ensino Fundamental maior, antigo 5º ao 8º ano, tive ainda mais dificuldade, pois, na escola que estudei, nesta etapa, denominada de CEMA (Centro Educativo do Maranhão) no mesmo povoado (Vila Maranhão), havia um programa ofertado por uma instituição chamada de Roquete Pinto. Neste programa os professores ministravam as aulas por tutoria televisionada. Quando não era uma coisa era outra. Às vezes faltava energia ou não tinha professor, ou o aparelho necessário para assistir às aulas. Nestas situações, as aulas eram suspensas. Apesar de todos esses obstáculos, não desistir.

Para cursar o Ensino Médio, submeti-me a um seletivo para a Escola Estadual Liceu Maranhense, onde fui aprovado. Durante este curso, as dificuldades aumentaram ainda mais. Tinha que sair de casa, às 4:30hs da manhã, e caminhar 6,5km para pegar o ônibus na mesma comunidade onde fiz o Ensino Fundamental para depois chegar até a escola Liceu Maranhense que fica localizada no centro da cidade de São Luís-MA.

O retorno para casa era às 13:30hs, pois na minha comunidade não havia ônibus direto. Pegava sempre o ônibus de itinerário, Porto Grande ou Pedrinhas, comunidades que na época tinham linhas de ônibus mais próximo do meu povoado.

Chegava em casa por volta das 15:00hs. Por muitas vezes, tive que pedir carona ao motorista e cobrador, pois não tinha dinheiro para pagar passagens.

Lembro-me que a minha merenda quando saia da escola era farinha e banana, outras vezes era camarão e farinha que faziam no mercado central de São Luis-MA, porque, na maioria das vezes, não dispunha de dinheiro para fazer um lanche melhor.

Contava sempre com ajuda das minhas irmãs mais velhas, Maria de Jesus, Mariana e Ivanilde que, na época, eram empregadas domésticas. O meu sonho era terminar o Ensino Médio e conseguir um emprego de carteira assinada para não trabalhar no pesado, de pescador e/ou lavrador como meus pais.

Não desconsiderando esta profissão de pescador e lavrador, pois foi através desses tipos de trabalhos que meus pais criaram com muito orgulho os filhos, sendo um exemplo de vida para mim. Recordo-me de que as minhas irmãs mais velhas ajudavam meus pais nessas atividades, quanto a mim quando pequeno, lembro-me também de que ajudava nas tarefas mais leves. Quando já mais crescido, também pesquei e ajudei na lavoura. Toda esta situação poderia ter contribuído para desistir dos estudos e não conseguir uma ascensão social por meio deles.

Abro um espaço neste momento para agradecer ao nosso maravilhoso e bondoso “Deus Trino”, que, nos momentos difíceis de dificuldades, deram-me forças e ânimo para seguir em frente. Tudo que sou e tenho agradeço ao nosso Deus. Obrigado Senhor.

Em 1993 terminei o Ensino Médio e nesse mesmo ano perdi meu pai. No ano seguinte perdi minha mãe e, neste período, fiquei desempregado durante 2 anos. Em 1995 consegui um emprego de zelador em uma escola em São Luís. Esse foi o meu primeiro contato com alunos, mesmo não sendo em sala de aula como professor.

Ainda em 1995 fiz um seletivo para ser cobrador de ônibus. Fui aprovado e trabalhei nesta função até fevereiro de 1997. Na época de cobrador de ônibus, senti-me na obrigação de também ajudar alguns alunos que me pediam carona, por não terem às vezes o dinheiro da passagem, então me recordo de já haver passado por esta situação também.

Em 1997 prestei concurso para a antiga Escola Agrotécnica Federal de Codó-MA, para o cargo de Auxiliar Rural, sendo aprovado e nomeado para este cargo em abril do mesmo ano. Nesta função cuidava do manejo das plantas, dos animais e auxiliava os professores da área técnica no campo, nas aulas práticas com os alunos, obtendo nesse período contato direto com eles em suas aulas práticas. Neste período conheci o professor de matemática Francisco das Chagas Teixeira (Prof. Teixeira), com quem, nos horários vagos, após as atividades de campo, assistia a algumas aulas

de matemática na sala com os alunos.

Nos intervalos do almoço, por várias vezes, ficava estudando para prestar vestibular. Alguns alunos, nas vésperas de prova, procuravam-me para revisar os assuntos de matemática e, assim, estudávamos juntos. Durante os estudos, identifiquei que vários alunos apresentavam dificuldades para assimilar os assuntos revisados para a prova de matemática ao mesmo tempo em que percebia também que me faltava mais conhecimento dos conteúdos desta disciplina.

Assim, descobri aos poucos o gosto por essa brilhante profissão de docente que hoje, a meu ver, considero como uma missão, mas percebia que me faltava algo a mais no conhecimento desta disciplina.

Durante todo meu Ensino Fundamental e Médio apresentei dificuldades em matemática, sobretudo em relação ao conteúdo de Análise Combinatória. Mas nunca fiquei reprovado nessa nem nas demais disciplinas.

Em junho de 1999, aconteceu, no município Codó-MA, um vestibular fruto de um convênio da prefeitura com o Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão/CEFET-MA. Prestei o vestibular e fui aprovado. Em 2003 fiz a conclusão do referido curso, mas continuei exercendo a função de Auxiliar Rural, na Escola Agrotécnica Federal de Codó-MA. Fiz vários concursos para entrar no quadro de docência em várias instituições, sem bons resultados.

Em 2006 trabalhei na Escola Municipal Senador Archer em Codó-MA, de forma voluntária, lá substituir uma professora de matemática que à época estava grávida. Trabalhei dessa forma, a fim de conseguir experiência profissional, para prestar concursos públicos e pontuar na prova de título.

Com a expansão do Ensino Técnico Profissionalizante em nosso país, foi instituída a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, vinculada ao Ministério da Educação pela Lei nº 11.892 de 29 de dezembro de 2008 que criou várias instituições em nosso país, incluindo o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), mediante integração do Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão e das Escolas Agrotécnicas Federais de Codó, São Luís-MA e de São Raimundo das Mangabeiras.

Com essa expansão surgiram vagas para docentes em diversas áreas e em vários estados, incluindo algumas regiões do Estado do Maranhão. Prestei novamente concurso público para docente da disciplina Matemática, sendo aprovado e nomeado em 2009 para trabalhar no município de Zé Doca, interior do estado do Maranhão,

onde pude assumir as primeiras turmas. Posteriormente fui transferido para o Município de Codó-MA, também interior do Estado, onde trabalho até o presente momento.

Em 2007 fiz uma especialização, em nível de aperfeiçoamento de professores na área de matemática, pelo Instituto de Ensino Superior Franciscano. Mas havia uma inquietação latente dentro de mim, por acreditar que eu poderia contribuir mais para a aprendizagem dos alunos no ensino de matemática.

Após várias tentativas para ingressar em um mestrado, finalmente em 2019 fui aprovado no Mestrado Profissional em Educação Matemática, pela Universidade do Estado do Pará. As disciplinas do referido mestrado me deram um outro olhar sobre a Educação Matemática, sobretudo no campo da Psicologia Educacional, na História da Matemática, no Currículo e Avaliação, na Modelagem, na Etnomatemática, bem como nas novas metodologias e tecnologias educacionais, entre outras, vislumbrando buscar novas alternativas metodológicas para prática do ensino de matemática em sala de aula.

Sendo Assim, sinto-me no dever de compartilhar, com meus alunos e com a sociedade, tudo o que aprendi, com vista a melhorar a educação no meu estado e em nosso país.

Neste sentido, juntamente com minha orientadora, a Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei, e meu coorientador o Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho, desenvolvemos a pesquisa com o tema: Ensino de Permutação através da Resolução de Problemas. Assim, nossa pesquisa foi escrita na primeira pessoa do plural, uma vez que ela foi desenvolvida em conjunto com meus orientadores.

Nossa pesquisa foi realizada no município de Codó-Ma, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, tendo como sujeitos da pesquisa, estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio, a fim de investigar de que forma o estudo da Permutação através da Resolução de Problemas influencia o ensino e aprendizagem dos educandos.

A escolha pelo tema foi motivada pelo fato desse conteúdo apresentar muitas dificuldades na trajetória de alunos e professores. Lembrando que este pesquisador que vos escreve sempre teve dificuldades neste assunto e que o mesmo deve ser bem trabalhado desde o Ensino Fundamental. Para minimizar essa deficiência na aprendizagem, temos que propor alternativas metodológicas como destacam alguns autores e os documentos oficiais, como os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Nesse sentido, esclarecemos que o t3pico de Permuta33o 3 um assunto abordado dentro do cont3eudo de An3lise Combinat3ria e faz parte da grade curricular do Ensino M3dio. Assim, descreveremos sobre o cont3eudo de An3lise Combinat3ria no seu aspecto curricular, did3tico e com uma revis3o de literatura. De acordo com pesquisas realizadas, percebemos que existem poucos trabalhos de investiga33o encontrados na literatura ci3ntifica brasileira com este objeto espec3fico de estudo “Permuta33o” e a nossa pesquisa contribui e servir3 para ampliar o leque neste assunto.

Na escola campo desta pesquisa, esse cont3eudo 3 trabalhado no 2^o ano do Ensino M3dio e faz parte da An3lise Combinat3ria que 3 um cont3eudo a ser ministrado no Ensino M3dio como consta nas Orienta33es Curriculares Nacionais para o Ensino M3dio (OCEN). “Os cont3eudos b3sicos est3o organizados em quatro blocos: N3meros e opera33es; Fun33es; Geometria; An3lise de dados e Probabilidade. [...] O estudo da combinat3ria e da probabilidade 3 essencial nesse bloco de cont3eudo” (BRASIL, 2006, p.70 e 79).

Os alunos, na maioria das vezes, quando chegam ao Ensino M3dio, apresentam muitas dificuldades em matem3tica, sobretudo na parte de Permuta33o. Isso ocorre devido a v3rios fatores.

Para Macedo (2019), uma das dificuldades que pode desmotivar os estudantes quando chegam ao Ensino M3dio 3 em rela33o 3 compreens3o de cont3eudos que foram ministrados no Ensino Fundamental, os quais n3o foram devidamente assimilados pelos alunos e, ao passar para os anos seguintes, carregam essas dificuldades. Como consequ3ncia disto, o aluno que apresenta uma lacuna em rela33o aos assuntos da disciplina de matem3tica dificilmente consegue compreender os cont3eudos que obedecem a uma sequ3ncia e, com a falta de base para a nova aprendizagem, aumenta ainda mais as dificuldades.

Segundo Rosas (2018), professores e alunos apresentam dificuldades na resolu33o de problemas de An3lise Combinat3ria. O ensino e aprendizagem desse cont3eudo, ministrado no Ensino M3dio, est3o indicados pelos Par3metros Curriculares Nacionais de Matem3tica (PCN).

Ainda segundo o autor, esse cont3eudo 3 um importante instrumento para o crescimento intelectual e cognitivo do estudante, por isso ele deve ser bem ministrado a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme evidencia os Par3metros Curriculares Nacionais que destacam: “a import3ncia de se trabalhar com um amplo

espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos”. (BRASIL, 1997, p.21).

É necessária e importante essa abordagem nos anos iniciais acontecerem para poder minimizar as dificuldades desses conteúdos e possibilitar aos estudantes de acordo com os PCN “lidar com situações-problema que envolvam [...], Permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem”. (BRASIL, 1997, p.40).

É inegável a relevância do conteúdo de permutação para o ensino da matemática, no Ensino Fundamental e Médio, tendo em vista que esse assunto é utilizado em várias áreas do conhecimento. Por isso, é necessário fortalecer a base acadêmica dos estudantes de modo que eles possam desenvolver autonomia e motivação necessária, para superação de suas dificuldades a respeito desse conteúdo.

Diante do exposto, surgiram as seguintes questões de pesquisa: **Quais as principais dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem de Permutação? De que forma uma sequência didática baseada na resolução de problemas pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de Permutação?**

Para tanto, designamos como **objetivo geral** desta pesquisa: **Elaborar uma sequência didática baseada na resolução de problemas que possa contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de permutação para alunos do 2º ano do Ensino Médio.**

Para o desenvolvimento da pesquisa, estabelecemos como objetivos específicos:

- Revisar na literatura o processo de ensino e aprendizagem sobre o conteúdo de Análise Combinatória;
- Identificar e analisar as dificuldades dos alunos ao estudarem Permutação;
- Fazer um diagnóstico atual sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem de Permutação através da resolução de problemas;
- Elaborar e aplicar a sequência didática para uma turma do 2º ano do Ensino Médio para verificar se sua utilização foi eficaz para a construção do ensino e aprendizagem de Permutação;

- Validar a sequência didática com vistas a elaborar um Produto Educacional resultado da referida sequência didática.

Escolhemos como metodologia de pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1996), por meio das etapas: Análise prévias; Concepção e Análise *a priori*; Experimentação e análise *a posteriori* e Validação. Além da pesquisa ser de cunho bibliográfico, qualitativa, estudo de caso pesquisa de campo e experimental.

Para responder a questão da pesquisa, buscamos apoio teórico na abordagem da Análise Microgenética proposta por Góes (2000) e outros autores que se basearam nos estudos de Vygotsky, acreditando que uma análise poderá ser feita com um olhar dessa teoria sobre as ações e noções matemáticas mobilizadas pelos alunos na resolução de situações-problema proposto por Polya (1945). Além das concepções de Onuchic *et al.* (2014), Dante (2009), Sá (2009) e Pinheiro e Sá (2010) sobre a resolução de problemas como metodologia no ensino e aprendizagem da matemática.

Para a organização da Sequência Didática (SD), tomamos como base as ideias de Zabala (1998) e Polya (1945), e sobre a Resolução de Problemas, utilizamos como recurso didático para a resolução de problemas, alguns materiais manipuláveis que, segundo Araújo e Santos (2020), podem contribuir com o processo de aprendizagem.

A sequência didática sobre o assunto de Permutação é composta de 4 atividades, onde verificamos, a partir da Engenharia didática, se esta proposta de ensino construída com base na resolução de problemas à luz da Análise Microgenética, proporcionará aos estudantes uma evolução na compreensão dos conteúdos abordados, com autonomia no processo de construção dos saberes relativos à temática em questão.

Esta pesquisa está organizada em seis capítulos. No capítulo 1, apresento meu percurso de vida; formação a nível de 1º e 2º graus e Licenciatura; as motivações; o problema e os objetivos da pesquisa. No capítulo 2, apresento os fundamentos teóricos e metodológicos nos quais usamos para o desenvolvimento desta pesquisa, como a Engenharia Didática, Análise Microgenética, Resolução de Problemas e Sequência Didática.

No capítulo 3 segue as análises prévias, onde trataremos da produção de informações essenciais da pesquisa. Ele também aborda os aspectos curriculares e uma revisão de literatura a respeito de Análise Combinatória (tendo em vista poucas pesquisas encontradas na literatura científica brasileira com o tópico específico de “Permutação”).

Os aspectos curriculares reforçam a identificação de habilidades e competências orientadas pelos documentos oficiais e exigidas em diversas avaliações, esses assuntos também são levados em consideração nos objetivos das atividades propostas na pesquisa.

Na revisão de literatura, buscamos apontar a contribuição de vários autores que têm se dedicado nos últimos anos a estudos e pesquisas sobre o ensino de Análise Combinatória e como esse conteúdo vem sendo abordado no contexto atual, relativo às tendências e perspectivas metodológicas, que nos auxiliou no desenvolvimento de nossa pesquisa e na elaboração da SD.

Apresentamos, em seguida, um diagnóstico, por meio de uma pesquisa de campo, realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Codó-MA. O objetivo da consulta diagnóstica foi analisar os aspectos sociais dos estudantes, os aspectos didático-pedagógicos, como também identificar as dificuldades dos alunos ao estudarem o conteúdo de Permutação e buscar informações em relação ao processo de ensino e aprendizagem desse assunto, além de conhecer o público de nossa pesquisa para propormos uma sequência didática e possível aplicação da resolução de problemas como estratégia de ensino na pesquisa.

Por fim, apresentamos os aspectos didáticos referentes ao objeto da pesquisa, mostrando um pouco do conceito geral, classificação de permutação e suas aplicações na resolução de problemas. Essa fundamentação matemática nos ajudou a entender os conteúdos que serão abordados dentro da sequência didática para posterior elaboração do Produto Educacional.

No Capítulo 4, apresentamos as atividades que compõem a Sequência Didática de acordo com o modelo de Zabala (1998) e da Resolução de Problemas de Polya (1945), que foram elaboradas com o objetivo de amenizar as dificuldades de ensino e aprendizagem, diagnosticadas na fase das análises prévias: revisão de literatura e pesquisa diagnóstica com alunos do 3º ano do ensino médio.

O Capítulo 5 vem apresentar a fase da experimentação da sequência didática, que desenvolvida com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública localizada no município de Codó-MA.

Para registro das informações, foram usados, nas sessões de atividades, ficha de observações de aulas, vídeo gravação para filmagem, além de outros instrumentos, como aparelho celular e caderno de anotações. Tudo para

posteriormente analisar e descrever as interações verbais que ocorreram durante a aplicação das atividades à luz da Análise Microgenética. No Capítulo 6 apresentamos as considerações finais.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste Capítulo, apresentamos os principais fundamentos teóricos e metodológicos que orientaram e deram suporte para o desenvolvimento da presente pesquisa. Iniciamos com os pressupostos teóricos da metodologia usada na pesquisa, sendo esta de cunho bibliográfico, qualitativa, estudo de caso, pesquisa de campo e experimental.

Bibliográfico, uma vez que, em nossa fundamentação teórica, fizemos uma revisão de literatura, onde buscamos contribuições de trabalhos, associados ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, a qual nos permitiu uma visão mais ampla do estudo desse conteúdo nos últimos anos. Além dos documentos oficiais que tratam dos aspectos curriculares para identificar as habilidades e competências orientadas por estes documentos que baseiam o ensino em nosso país.

A pesquisa bibliográfica é o levantamento ou revisão de obras publicadas que tem como objetivo reunir e analisar textos publicados, para apoiar a pesquisa científica. Para Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica “[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. É uma pesquisa de cunho qualitativo, uma vez que fizemos o tratamento das análises dos resultados da pesquisa, sendo de natureza social e cultural, mediante descrições, interpretações e comparações, sem considerar os seus aspectos numéricos, sendo mais participativa e por se tratar de um estudo que, segundo o Lüdke e André (1986, p. 18), é aquele que “se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma [...] contextualizada”.

É um estudo de caso, visto que fizemos uma aplicação específica de um experimento em uma determinada escola. O estudo de caso ou naturalístico, segundo Lüdke e André (1986), apresenta características gerais da pesquisa qualitativa. Entre estas características, destacamos: “os estudos de caso visam à descoberta”. Mesmo que o pesquisador comece com alguns pressupostos teóricos iniciais, ele se manterá bem atento a novos elementos que podem surgir como importantes durante a investigação.

Assim, essa característica se apoia no pressuposto de que “o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente” Lüdke e André (1986, p. 18). É uma pesquisa de campo, visto que fomos a campo de

estudos, fizemos aplicação de questionários e analisamos os resultados.

A pesquisa é de cunho experimental por se tratar de um experimento que, segundo Gil (2002, p. 47), consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto. Além de utilizarmos os pressupostos da Engenharia Didática para identificar os sujeitos e instrumentos que fazem parte desta pesquisa a partir dos trabalhos de Artigue (1996).

Em seguida comentamos sobre a Análise Microgenética de Góes (2000) e de outros autores que se basearam nos estudos de Vygotsky. Isso nos forneceu os instrumentos necessários para análise das interações verbais entre os estudantes, visando identificar os indícios de aprendizagem de seus pares.

Usaremos as concepções de Onuchic *et al.* (2014), Dante (2009), Sá (2009), Pinheiro e Sá (2010) e os documentos oficiais sobre a Resolução de Problemas, baseados nos trabalhos de Polya (1945). Por fim, as contribuições de Zabala (1998) que nos ajudaram no processo de construção da Sequência Didática.

2.1 A Engenharia Didática

As bases da Engenharia Didática segundo Carneiro (2005) estão apoiadas em autores renomados franceses, como Douady, Chevallard, Brousseau e Artigue. Segundo este autor, foi criado no campo da Didática da Matemática, nos anos 80 na França, o termo Engenharia Didática, inspirado na profissão de um engenheiro que exige domínio no saber científico para desenvolver uma atividade, bem como para buscar soluções para determinados problemas.

Como resultado das pesquisas conhecidas, como a Didática da Matemática, apareceu a Engenharia Didática como metodologia. Assim, Douady (1985, *apud* BRUM, 2014, p. 2), conceitua a Didática da Matemática como “a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos, no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática”.

Nesta direção a Didática da Matemática vai além de simplesmente investigar uma excelente forma de lecionar um determinado assunto ou definir uma ciência. De acordo com Artigue (1996), é necessário métodos de pesquisa científica que busquem relacionar a investigação e a ação sobre o sistema com base em saberes didáticos

estabelecidos previamente.

Desta forma, a Engenharia Didática como metodologia de investigação apresenta peculiaridade de uma produção didática, circundada pelo planejamento de ensino, de produção de recursos didáticos, de estrutura da experimentação apoiada nas realizações didáticas, de observação e a avaliação com características empíricas que tem como objetivo criar, desenvolver, observar e examinar as situações didáticas.

De acordo com Brum (2014), é tarefa do docente propor ao educando questões de aprendizagem para elaborar seu próprio saber para atender as exigências do meio social. Neste sentido, é necessário que os estudantes tenham excelentes condições e situações de ensino para motivá-los a construir de forma significativa sua aprendizagem sempre valorizando a investigação, sem que haja influencia direta do professor no desenvolvimento do aprendizado do aluno.

Segundo Brum (2014), os pressupostos de Brousseau (1996), ao fixar, examinar e dar sentido ao objeto em estudo, trazem contribuições importantes para o ensino e aprendizagem dos estudantes.

Este trabalho de pesquisa tem como base as seguintes metodologias: a Engenharia Didática, pesquisa bibliográfica, qualitativa, estudo de caso, pesquisa de campo e experimental. A Engenharia Didática como metodologia de investigação, segundo Artigue (1996):

Caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p.196 *apud* LOPES; PALM; SÁ, 2018, p.163).

Assim, deu-se a escolha desta metodologia, pelo motivo de que a Engenharia Didática, proposta por Carneiro (2005), esclarece que ela:

Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. [...] pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico (CARNEIRO, 2005, p.90).

Baseado na citação acima, ressaltamos que, durante todo percurso da investigação, deve haver uma ligação entre os saberes teóricos e a aplicação prática para possibilitar aos professores e estudantes uma prática investigativa. Dessa maneira, os produtos realizados em sala de aula podem ser utilizados e reproduzidos pela comunidade escolar, bem como por quem deles demonstrarem interesse.

Segundo Artigue *et al.* (1995, *apud* SILVA, 2019), a Engenharia Didática, enquanto investigação, apresenta particularidade de um experimento em aulas baseando-se em “realizações didáticas”, isto é, por meio de ideias, de realizações, de análises e investigação de situações didáticas, realizando comparação entre as anotações e validade das atividades no experimento.

É importante conhecer as etapas da Engenharia Didática para compreender sua metodologia, que de acordo com Artigue (1996), compreende quatro fases a seguir: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori*; 3) experimentação; 4) análise *a posteriori* e validação. Conforme demonstrado na Figura 1.

Figura 1 - Etapas da Engenharia Didática.



Fonte: Adaptada de Pommer (2013, p. 22).

Essas fases serão delineadas a seguir, sendo relacionadas com as ações de nossa pesquisa.

A primeira fase da Engenharia Didática é a das análises prévias. Segundo Artigue (1996, *apud* LOPES; PALMA; SÁ, 2018, p.163), ela estabelece a análise epistemológica dos conteúdos compostos no planejamento de ensino, no resultado do ensino rotineiro, na capacidade dos alunos de superarem as atividades, nas lacunas e obstáculos dos efeitos por eles provocados, bem como no local de realização das atividades didáticas com os objetivos da investigação.

Nesta etapa realizamos uma revisão bibliográfica referente às principais

temáticas desenvolvidas no nosso objeto de estudo (Permutação). Para isso, procuramos informações em documentos oficiais nacionais, como: nos Parâmetro Curriculares Nacionais de matemática (PCN); na Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN).

Para ampliar nossa pesquisa, analisamos o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) com a finalidade de adquirir orientações e informações direcionadas a nossa temática. Fizemos também uma consulta diagnóstica para identificar as possíveis dificuldades e lacunas apresentadas pelos estudantes no tópico de Permutação.

A segunda fase compreende a concepção e análise *a priori*. Lopes, Palma e Sá (2018) destacam que é o momento em que o pesquisador escolhe as variáveis importantes para o estudo e prepara os materiais que serão trabalhados com os alunos em sala de aula, isto é, a atividade pedagógica levando em consideração as análises prévias para atingir o objetivo proposto.

Dessa forma, para nosso trabalho construímos uma sequência de atividades baseadas na metodologia da Resolução de Problemas. Nesta etapa foram produzidas 4 atividades com suas respectivas análise *a priori*, seguindo os tópicos do conteúdo de Análise Combinatória, a saber: permutação simples, permutação com repetição e permutação circular.

Nos tópicos dos conteúdos, são abordados o conceito de permutação, as técnicas para calcular as quantidades de permutações simples, permutação com repetição e permutação circular na resolução de problemas.

A Engenharia Didática tem como terceira fase a experimentação que, conforme Pommer (2013), compreende o período de aplicação das atividades em sala, que foram planejadas e elaboradas para um grupo de pessoas ou estudantes. Desta forma, a experimentação consiste nos seguintes pressupostos:

- A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
- O estabelecimento do contrato didático;
- A aplicação do instrumento de pesquisa;
- O registro das observações feitas durante a experimentação (MACHADO, 2002, p. 206 *apud* POMMER, 2013, p. 25).

Neste sentido, foram preparados alguns materiais que foram direcionados aos estudantes, como: questionário socioeconômico que tem por finalidade mostrar o perfil dos alunos que farão parte da investigação; 4 atividades baseadas no ensino de

matemática (Permutação) através da resolução de problemas; questões de aprofundamento, além de registros diários com áudios das falas e anotações sobre as atividades dos alunos.

Ao levarmos em consideração as ações descritas, é importante definirmos a quantidade de estudantes que farão parte da pesquisa para estabelecer um “contrato didático”, ou seja, serão regras que deverão ser acordadas e respeitadas no início do processo, ao aplicarmos as atividades da pesquisa, sempre observando o que queremos com cada atividade, para, no final de todo o processo, apurarmos se os estudantes conseguiram realizar todas as atividades. Pois serão essas atividades que nos levarão às conclusões da nossa pesquisa.

Para Macedo (2019), a fase da experimentação é a parte mais importante da pesquisa, visto que é o momento em que o aluno será o personagem principal nessa etapa, mesmo com a interferência necessária do professor no processo para sanar as dúvidas. A autonomia dos estudantes nessa fase é importante, pois mostrará se as atividades realizadas pelo professor foram compreendidas pelos estudantes.

A análise *a posteriori* e validação é correspondente à quarta e última fase que de acordo com Pommer (2013), está sustentada em cima de um conjunto de informações adquiridas no decorrer do experimento, através das observações, produção escrita ou de som e registros realizados pelos alunos. Ainda nesta fase, Artigue (1996, p. 208, *apud* LOPES; PALMA; SÁ, 2018, p. 164) destaca que é “no confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação”.

Nessa fase levamos em consideração os dados fornecidos pelos estudantes, por meio dos instrumentos de coleta de informações indicados anteriormente.

Essa etapa, segundo Artigue (1996), apoia-se no conjunto de informações produzidas no decorrer da experimentação que são as observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos estudantes em sala de aula. Essas informações podem ser complementadas por dados obtidos com a utilização de metodologias externas, como questionários e entrevistas individuais ou em pequenos grupos realizadas em vários momentos de ensino.

Ainda de acordo com Artigue (1996), esta fase é caracterizada pelo tratamento das informações obtidas para a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em quais condições as questões levantadas foram

respondidas. Dessa forma, é possível analisar se ocorreram e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

A seguir apresentamos as noções da Análise Microgenética proposta por Góes (2000) e as concepções de outros autores baseados nos estudos de Vygotsky, na qual nos apoiaremos para analisarmos os possíveis indícios de aprendizagem provenientes dos registros escritos e das interações verbais, através dos diálogos entre professor e aluno e entre aluno-aluno que serão estimulados de forma intencional pelas intervenções presentes nas atividades que compõem a sequência didática proposta.

2.2 Análise Microgenética

No Brasil a partir da década de 80, segundo Tomio *et al.* (2017), intensificaram-se os cursos de Pós-graduação, dando origem aos grupos de pesquisa, na área de Educação, resultando em investigações [...] que acontecem entre sujeitos no ambiente escolar através de estudos qualitativos e colaborativos.

Essa relação entre sujeito e estudo, para Macedo (2019), deve ser considerada em uma investigação no sentido de dar importância para ouvir o sujeito, como ele pensa e os saberes que ele possui sobre determinado assunto.

Tomio *et al.* (2017) evidenciam a importância do diálogo entre pesquisadores em Educação e especialistas de outras áreas do conhecimento para as práticas profissionais, assim como para o surgimento de novas modalidades de investigação, envolvendo a área de Educação com outras formas teórico-metodológicas.

Neste contexto, Macedo (2019) destaca que os programas e grupos de pesquisas desenvolveram outras maneiras investigativas para os objetos de estudos vinculados ao ensino e aprendizagem à luz da abordagem histórico-cultural apoiadas principalmente nos trabalhos de Vygotsky, dando possibilidade a uma visão mais cuidadosa aos aspectos de construção subjetiva em situações culturais, especialmente “na relação dialética entre sentido e significado, entre pensamento e linguagem” (MACEDO, 2019, p. 29).

Assim, surge a necessidade de outras modalidades de pesquisa, de métodos e de instrumentos de produção e análise de dados com um novo suporte teórico para fundamentar estudos em Educação. Nestas novas perspectivas de investigação,

segundo este autor, é utilizada a Análise Microgenética no contexto da produção científica.

De acordo com Tomio *et al.* (2017, p. 32), Vygotsk, influenciado pelas concepções de Karl Marx, “propõe uma maneira alternativa de se estudar a formação da consciência em processos dialéticos e históricos, dada as condições materiais (interações sociais de produção)”. Mediante suas bases epistemológicas, ele apresenta outra maneira de entender o indivíduo, para tanto, sugere uma nova forma de se coletar informações e olhá-los no sentido de definir princípios teóricos e metodológicos.

Dessa maneira, para Macedo (2019), Vygotsk apresenta preocupação com a formação do indivíduo, dando ênfase ao processo dialógico, isto é, a interação entre as pessoas e como buscar informações de aprendizagem por meio das falas e interações entre os participantes.

Ainda segundo Tomio *et al.* (2017), Vygotsk faz referência a ideia de Werner (Psicólogo alemão) ao lembrar as “camadas genéticas” existentes no comportamento humano, formadas nas etapas vividas pelo indivíduo no desenvolvimento psicológico”.

Para esse autor, a finalidade da investigação seria o descobrimento das múltiplas camadas genéticas no comportamento do indivíduo. Nesse sentido, ressalta Macedo (2019) que estas camadas genéticas são relevantes para analisar a aprendizagem dos alunos, sendo que seu comportamento influencia no seu aprendizado.

Como abordagem metodológica, a Análise Microgenética, segundo Rossy (2014), leva em consideração os aspectos sociais e culturais dos sujeitos em análise, encontrando suporte na matriz histórico-cultural e no desenvolvimento da sociedade utilizando-se do termo genética.

A autora acima ressalta que, para Góes (2000), o termo “genética” está associado à sociogenética por fazer relação com aspectos da cultura e da sociedade. Esse contexto, segundo Rossy (2014), passa pelas concepções fundamentais de Vygotsky, onde as relações do indivíduo com o outro e com a cultura influenciam diretamente na gênese da sociedade, assim essas relações devem ser consideradas ao examinar as ações de determinado sujeito.

É destacado no trabalho de Tomio *et al.* (2017, p. 37) que o termo “*Microgênese*” foi cunhado por Werner há 50 anos (FLYNN; PINE; LEWIS, 2006), para descrever o método denominado “*of the microgenetic experimental tradition in*

psychology” (VALSINER, 2005, p. 11). Percursor dele e de Vigotski, Wertsch, no ano 1978, em sua obra “*Microgenesis as a tool for developmental analysis*”, escrita juntamente com C. Addison Stone cita o termo “*Microgênese*” e, conseqüentemente, “microgenética”.

Dessa forma, a abordagem Microgenética, segundo Wertsch (1998a, p. 56), faz parte da pesquisa sociocultural que procura “[...] entender a relação entre o funcionamento mental humano, por um lado, e o contexto cultural, histórico e institucional, por outro”.

Tomio *et al.* (2017, p. 37) destaca também que estes autores apresentam ainda uma interpretação analítica que separa as investigações em duas categorias: uma que dar prioridade a “análise do funcionamento mental nos fenômenos socioculturais e outra que analisa os processos psicológicos ou outros conduzidos pelos indivíduos como forma de compreensão dos fenômenos socioculturais” (TOMIO *et al.*, 2017, p. 37).

Para Kelman e Branco (2004, p. 95), o conceito de “*microgenese*” apareceu a partir do momento que Vygotsky observou a emergência de determinados processos mentais quando preparava os sujeitos para participarem de certo experimento. “A microgênese seria, portanto, um domínio genético, porque Vygotsky percebeu que era exatamente no aqui e agora das ações e interações diante de uma situação problema” (KELMAN; BRANCO, 2004, p. 95) que estavam os processos mentais mais ricos.

Ainda de acordo com Tomio *et al.* (2017), na atualidade, a Microgenética se expandiu como método investigativo na Europa e EUA (FLYNN; PINE; LEWIS, 2006 *apud* TOMIO *et al.*, 2017). No Brasil, esses autores identificaram pesquisas na área de Educação, como teses, dissertações e artigos que fazem uso do “Método Microgenético” na forma de “Análise Microgenética” dos dados.

As investigações nos contextos educacionais vêm utilizando um método de abordagem designada por Góes (2000, p. 9) de “Análise Microgenética”. Em geral, esse método é uma forma de construir informações “que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação” (GÓES, 2000, p. 9), e resulta na descrição cuidadosa dos eventos que estão relacionados à utilização de vídeo, gravação, filmagem e, posteriormente, submetidos à transcrição das falas dos participantes para retirar informações das ações e interações.

Neste sentido, Góes (2000) evidencia que a pesquisa não deve desvincular-se de um olhar sociogenética histórico-cultural e semiótica do homem. Esta autora considera que:

As proposições conceituais e metodológicas devem ser interdependentes e congruentes teoricamente [...] Vygotsky (1984) [...] argumenta pela necessidade de examinar a dimensão histórica e alerta para o fato de que privilegiar a história não é estudar eventos passados, mas sim o curso de transformação que engloba o presente, as condições passadas e aquilo que o presente tem de projeção do futuro (GÓES, 2000, p. 12-13).

Assim, a Análise Microgenética é formada por instrumentos de interpretação de eventos que são obtidos mediante interações verbais, tomando como base as relações intersubjetivas e as condições sociais em diferentes contextos.

Para Souza e Cabral (2010, p. 110), a Análise Microgenética é um instrumento metodológico com desdobramento da Psicologia Histórico-Cultural que é utilizada com frequência em pesquisa de interações dialógicas no ambiente escolar, possibilitando identificar transições genéticas – “minúcias que indicam indícios de aprendizagem” – que acontecem ao longo das interações entre professor-estudante e entre estudante-estudante.

As interações de diálogo, segundo Souza e Cabral (2010), entre professor-estudante e entre estudante-estudante trazem facilidade na compreensão e no aprimoramento das ações desenvolvidas pelos estudantes, além de possibilitar a explicação de sua construção e mudanças cognitivas.

Os autores reiteram que, na relação dialógica de construção de saberes entre sujeitos, a Análise Microgenética exige intencionalidade, planejamento, tempo e atenção aos pequenos detalhes que acontecem na relação dialógica de construção de saberes entre os sujeitos. Os autores afirmam que a Microgenética é uma metodologia adequada a estas exigências.

Segundo Macedo (2019), essas interações quando bem compreendidas entre professor e aluno podem servir para uma boa construção dos saberes mutuos. Dessa forma, o autor ressalta a importância das interações feita entre o professor e o estudante através de sua fala e resposta, sendo eles os agentes principais em um processo de investigação.

Para Kelman e Branco (2004, p. 95), na Psicologia atual, a Microgênese apresenta várias funções dentro de contextos socioculturais, como o ambiente escolar. Permitindo, entre outras possibilidades, o estudo de características do

indivíduo em desenvolvimento, que “vão se constituindo na dinâmica das interações verbais e não-verbais e na observação das negociações que ocorrem no fluxo interativo entre professor-aluno e aluno-aluno, no face-a-face” (KELMAN; BRANCO, 2004, p. 95). As autoras destacam que essa abordagem metodológica é apropriada para o estudo dos fenômenos os quais influenciam a relação entre cultura e socialização.

Neste contexto, Cabral (2004, *apud* MACEDO, 2019) considera que a Análise Microgenética se constitui em um forte instrumento de pesquisa no ambiente escolar entre pessoas que estão em situações de ensino-aprendizagem. No que se refere ao professor, ao se deparar com os questionamentos dos alunos em sala, pode usar esse instrumento para a facilitação da troca de saberes entre eles, melhorando a aprendizagem.

Para Kelman e Branco (2004), a Análise Microgenética, no ambiente escolar, é importante, porque ela permite a observação de como acontece o processo ensino-aprendizagem e quais são as particularidades do contexto de determinada sala de aula para, assim, identificar quais são as habilidades comunicativas necessárias ao longo dos processos de interação que facilitam ou causam dificuldade na aprendizagem.

Assim, Macedo (2019) ressalta a importância de:

reconhecer o exame de processos interativos e as pistas de internalização, focalizando os aspectos intersubjetivos e dialógicos, recortando o material documentado em poucos ou vários episódios que sejam significativos para o propósito do estudo, buscando traçar o curso de transformações (GOÉS, 2000 *apud* MACEDO, 2019, p. 32).

Por meio desses recortes, os docentes podem identificar quais os principais erros dos alunos e melhorar a aprendizagem, planejando melhor suas aulas.

Tomio *et al.* (2017, p. 38) destacam em sua investigação que Siegler e Crowley (1991) apontam os três momentos básicos que caracterizam a abordagem Microgenética:

1. As observações abrangem todo o período do processo, desde o início da mudança até o momento em que atinge um estado relativamente estável;
2. A densidade das observações se acentua em relação à alteração do fenômeno;
3. O comportamento observado é submetido à análise e experimentação intensiva, buscando inferir os processos que deram origem a ambos os

aspectos quantitativos e qualitativos da mudança.

O investigador deve seguir esses três passos da abordagem Microgenética, observando a pesquisa e as transformações que acontecem durante o processo.

Ao utilizarmos a Análise Microgenética em nossa pesquisa, levamos em consideração as interações dialógicas e observações na sala de aula, entre professor-estudante e estudante-estudante. Essas interações nos deram suporte para encontrar indícios de aprendizagem dos alunos, pois a Análise Microgenética foi de grande importância para a análise dos processos em nossa investigação. Ela permitiu levar os alunos a interagirem na pesquisa para possivelmente melhorar os resultados no final de nossa pesquisa.

A seguir apresentamos a Resolução de Problemas em seus aspectos históricos e como Metodologia no Ensino de Matemática.

2.3 Aspectos Históricos sobre a Resolução de Problemas

Praticamente em todas as civilizações a Matemática, como área do conhecimento humano, sempre desempenhou uma grande influência entre os povos. Segundo Silva (2017), o aperfeiçoamento desse campo do saber permitiu a sobrevivência de várias gerações, conforme constam nos registros históricos. A sistematização da Matemática atualmente é resultado de um longo processo de estudos em vários momentos da história.

Neste sentido, para Chaquiam (2017), as teorias que hoje se apresentam finalizadas foram resultados de fortes desafios enfrentados com muito trabalho e que, na maioria delas, sua ordem foi diferente daquela exposta após todo processo de formalização. Assim, o nascimento de uma teoria não está desvinculado de mudanças sociais que exigem pessoas com mais preparação, sendo que a escola tem a responsabilidade de cumprir a função de melhor preparar o indivíduo para atuar nas transformações dos contextos sociais (ONUChic *et al.*, 2014, p. 18).

Com a mudança da sociedade agrária para a sociedade industrial que culminou com uma nova atividade econômica, a população do começo do Século XX reivindicava que as pessoas possuíssem mais conhecimento da Matemática para ser aplicado no cotidiano.

Neste sentido, segundo Silva (2017), com o aumento da produção e de sua

concorrência, muitas pessoas mudaram para as cidades. Esta mudança repentina nos indivíduos teve o lucro como alvo principal. Então, a Matemática passou a ser uma área importante da ciência e seu aprimoramento significaria uma estratégia para o desenvolvimento de um novo modelo econômico.

Dessa forma, coube à Matemática, como componente escolar, fornecer ao cidadão saberes necessários para sua atuação na sociedade. Assim, surge a Resolução de Problema (RP) como teoria. Sendo que grande parte da população neste período não foi atingida pela aprendizagem matemática (ONUChic *et al.*, 2014).

Entre a segunda metade da Década de 1930 e final da Década de 1940, nos Estados Unidos, o destaque no Ensino de Matemática esteve sobre sustentação da “Teoria Significativa” de Willian Brownell. Neste cenário, segundo Onuchic *et al.* (2014), a Resolução de Problemas é constituída como teoria pelo cientista e professor de matemática George Polya. Em 1945, a referida teoria é lançada em seu famoso livro: “A arte de resolver problemas”.

Durante a década de 1980, várias investigações foram feitas com destaque para o estudo da abordagem da Resolução de Problemas. O livro designado de “Novas Direções para a Matemática da Escola Elementar” é um exemplo destas pesquisas, lançado em 1989 pela NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática – Estados Unidos), sendo sua sigla derivada das suas iniciais em língua inglesa *National Council of Teachers of Mathematics*.

Os autores Onuchic *et al.* (2014, p. 29) destacam três forma de abordagem para o ensino de Resolução de Problema, conforme Schroeder e Lester (1980): “(1) ensinando sobre resolução de problemas, (2) ensinando para resolver problemas e (3) ensinando via resolução de problemas”.

O ensino “sobre” Resolução de Problemas faz uso do método indicado por Polya (1945,1995). No ensino “para” a aplicação da Matemática na resolução de problemas rotineiros ou não depende da escolha do professor. Já no ensino “via” resolução de problemas, o entendimento da matemática passa pela compreensão dos problemas.

Para esse tipo de abordagem, é necessário iniciar determinado assunto de Matemática com uma situação-problema. Entre as três abordagens “sobre”, “para” e “via” respectivamente, a terceira é a que mais se relaciona com as recomendações do livro “Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar”, lançado pelo NCTM em 1989.

A Resolução de Problemas (RP) é considerada a parte mais importante das tarefas de Matemática com a presença marcante na história de várias civilizações. A RP serviu de base para a construção de novos saberes, revelando sua importância na formação de vários níveis de ensino.

No ambiente escolar, referente às aulas de Matemática, a relevância dada à Resolução de Problemas é bem nova, somente nas últimas décadas o interesse para resolver problemas passou a ser mais valorizada pelos professores de Matemática.

Durante os anos de 1980, as bases das teorias de aprendizagem estavam voltadas para os processos do pensamento matemático, entre estas teorias, destacam-se o Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotsky. A Resolução de Problemas também é evidenciada com foco na aprendizagem por descoberta (OLLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Nesta direção, Sá (2009) reforçou que em 1980 a Resolução de Problemas teve grande relevância no Ensino da Matemática, conforme recomendação da agenda do NCTM dos Estados Unidos, e ressalta que a Resolução de Problemas consta, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como estratégia de ensino, bem como nos objetivos da Matemática nos níveis fundamentais de ensino.

A Resolução de Problemas utilizada pela NCTM influenciou grandemente o Ensino de Matemática em diversas partes do mundo. A seguir apresentamos a Resolução de Problemas como metodologia no Ensino de Matemática.

2.4 Resolução de Problemas como metodologia no Ensino de Matemática

Todas as pessoas têm noção do que pode ser um problema, ainda que de forma intuitiva. Dante (2009) ressalta que, de modo geral, pode-se afirmar que problema é um “obstáculo” que pode ser superado, alguma coisa a ser determinada e para resolvê-la requer um pensamento consciente da pessoa. Este autor destaca que:

o que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro. Por exemplo, se o pneu da bicicleta de Beto nunca furou e ele não sabe o que fazer nessa situação – e quer resolvê-la, pois gosta de andar de bicicleta -, então esse é um problema para ele. Mas se ele sabe que nesse caso deve procurar uma borracharia e que há uma bem próxima dali a situação não chega a ser um problema, pois não exigirá um processo de reflexão para solucioná-la. (DANTE, 2009, p. 11-12).

Uma determinada situação passa a ser um problema para uma pessoa quando esta foge do controle, por não possuir, no primeiro momento, meios adequados para resolvê-la. Assim, resolver um determinado problema é “encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado” (DANTE, 2009, p. 14).

Cabe ressaltar que é preciso desenvolver com os estudantes determinadas estratégias que, de modo geral, aplicam-se a uma variedade de situações. Essas ferramentas ajudam na análise e na resposta de determinadas situações para encontrar os elementos desconhecidos.

Neste contexto, “um problema se diferencia de um exercício, na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam de forma imediata à solução” Pozo (1998, p. 16 *apud* MIRANDA, 2015, p. 18).

Dessa forma, Dante (2009) evidência a diferença entre exercícios e problemas, conforme descritos a seguir:

Exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou procedimento. [...] Situação - Problema ou Problema – processo [...] é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução (DANTE, 2009, p. 48).

Para executar uma ou mais habilidades algorítmicas, o estudante precisa ler a atividade e retirar as informações importantes. Já a resolução de problema, além de exigir iniciativa, é necessária associar a capacidade de criar aos saberes de algumas estratégias. Sabe-se que é relevante o equilíbrio entre as diferentes tarefas de exercícios e de problemas que são ministrados no ambiente escolar durante o período letivo.

Para Miranda (2015) um “problema matemático” é uma situação desconhecida que precisa de um conjunto de informações e instrumentos da matemática necessária para uma pessoa resolver. Assim, é importante que o estudante esteja em sintonia com a investigação para encontrar respostas para as questões desafiadoras.

Neste contexto, um problema matemático, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado” (BRASIL, 1998, p. 41). Para os PCN é possível haver resposta, tendo em vista que ela não se encontra a

princípio disponível.

Resolver um problema não se restringe simplesmente em entender o que foi apresentado e em emitir respostas adotando métodos convenientes. Para encontrar uma resposta coerente, faz-se necessário o desenvolvimento de habilidades que possam permitir verificar os resultados e fazer comparação entre caminhos diferentes para encontrar a referida solução.

O verdadeiro entusiasmo de estudar a Matemática acontece quando o estudante por ele mesmo consegue resolver um problema. Com a sensação do “eu sou capaz de fazer isso”, sua autoconfiança cresce de forma extraordinária. O hábito de pesquisa no estudante e sua curiosidade podem ser suscitados por meio de um bom problema (DANTE, 2009).

Dessa forma, Polya (1995) afirma que estas experiências serão capazes, em uma faixa etária susceptível, de produzir o gosto pela atividade intelectual e deixar seu registro na mente e no caráter por toda uma geração. Para estimular o gosto pela independência de pensamento e oferecer-lhe certas formas para atingir este objetivo, o professor de Matemática deve desafiar a curiosidade dos estudantes, apresentando-lhes problemas compatíveis com os saberes destes, ajudando-os através de questionamentos que os motive e aumente a curiosidade.

A Resolução de Problemas é uma habilitação prática que é adquirida por imitação, ou seja, na tentativa de encontrar a solução de um problema, é preciso observar como outros indivíduos os resolvem para podermos imitá-los. Se aprende a resolver um problema, praticando-os.

Uma das formas de conduzir as transformações na Educação e estimular as diferentes pesquisas educacionais é o fato de desenvolver nos estudantes a sua capacidade de aprender a aprender. Assim, percebe-se a necessidade dos estudantes nas diferentes etapas e áreas da Educação em obter habilidades e estratégias que lhes possibilitem sua compreensão. Para tanto, torna-se necessário levar os alunos a se tornarem indivíduos com capacidade de enfrentar diferentes situações em contextos diferentes para fazer com que busquem aprender novos saberes e habilidades.

Nesta perspectiva, uma das maneiras que possibilita aos estudantes que aprendam a aprender é o uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Para Soares e Pinto (2012), esta metodologia é baseada na apresentação de

situações que exijam dos estudantes uma atitude ativa ou um esforço para que eles possam buscar suas próprias respostas e o seu próprio saber.

A Resolução de Problemas como metodologia se constitui como uma excelente ferramenta para o ensino. Para os PCN, a Resolução de Problemas “possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos” (BRASIL, 1998, p. 40).

Dessa forma, o estudante pode ser conduzido a interpretar, refletir a situação-problema e desenvolver um ou mais procedimentos de resolução com estratégias diferentes para resolver a situação-problema que lhe é apresentada; contribuindo, assim, para sua aprendizagem.

De acordo com Pinheiro e Sá (2010), o docente, para realizar sua prática pedagógica através de situações-problema, ao entrar na sala de aula, não deve propor um problema e imediatamente apresentar uma nova definição. Por isso, é necessário que o estudante se familiarize com a situação-problema e se envolva com os saberes que pretende atingir.

Para a resolução de um problema, conforme o esquema de George Polya, existem quatro etapas que são fundamentais, a saber: “(1) Compreender o problema; (2) elaborar um plano; (3) executar o plano; (4) fazer o retrospecto ou verificação” (DANTE, 2009, p. 29). A dinâmica de resolução de um problema apresenta riqueza e complexidade, que não se reduz a seguir instruções de forma gradual, semelhante a um conjunto de regras ou algoritmo que poderão conduzir à resposta.

No entanto, de modo genérico, as etapas auxiliam quem resolve a ter orientação no decorrer do processo de resolução. Estas fases não podem ser inflexíveis, fixas e não cometidas de erros.

Na 1ª etapa: Compreender o problema. É preciso compreender o problema antes de começar a resolução, para tanto é necessário ler atentamente a questão proposta.

Na 2ª fase: Elaborar um plano. Para resolver o problema, traçamos um plano de ação para atingir o que foi proposto, fazendo um linque entre as informações do problema e sua demanda.

Na 3ª fase: executar o plano. Nesta etapa, é necessário colocar em prática o que foi traçado no plano, fazendo a verificação de cada passo a ser seguido.

Na 4ª e última etapa: Fazer o retrospecto ou verificação. Aqui é analisada a resposta encontrada, fazendo a verificação do resultado. Esta fase possibilita ao aluno repassar todo problema, rever como imaginou no início e como direcionou um método de solução, como fez as operações, bem como todo o percurso para determinar a resposta. É o momento para exercitar a aprendizagem, constatar e concertar possíveis erros.

Nessa mesma direção, Onuchic *et al.* (2014, p. 22-23) também destacam que em 1945 Polya teve a primeira publicação de seu livro “A arte de resolver problemas”, onde ele apresenta uma sucessão de quatro etapas necessárias para a execução no decorrer da resolução de qualquer problema, conforme segue: “1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano e 4) examinar a solução obtida”.

Assim, a preocupação de Polya, ao apresentar as referidas etapas, estava direcionada para o aperfeiçoamento das capacidades de destreza e talento dos alunos, ao desenvolver a resolução de problemas, para tanto, os docentes deveriam tornar-se bons resolvidores de problemas para estimularem seus alunos a serem também.

Algumas ideias sobre o desenvolvimento do pensamento heurístico são apresentadas em um curso ministrado por Polya em *Stanford*, em 1967, de acordo com relato a seguir por Onuchic *et al.* (2014, p. 23-24):

Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva. Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial quando é mais sugestiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ver necessidade para eles. Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma prova [demonstração]. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova. [...] (ONUCHIC *et al.*, 2014, p. 23-24).

Para Polya a maneira natural para aquisição de saberes é aprender por etapas de forma gradual. A partir dos trabalhos de Polya, houve um olhar mais abrangente e mais compreensível e acessível da resolução de problemas nos currículos escolares de matemática. (ONUCHIC *et al.*, 2014).

Para Pinheiro e Sá (2010), a metodologia da Resolução de Problemas tem alcançado uma grande estruturação do saber que forma as unidades de estudo durante as disciplinas ministradas. A aprendizagem é complementada pelas atividades que auxiliam a transposição do saber, bem como sua reconstrução. “A

compreensão, análise, síntese e avaliação” são exemplos típicos da reconstrução dos saberes em diversos níveis de aprendizagem.

Num processo de construção, os conceitos matemáticos absorvidos não são as ideias que os docentes de Matemática imaginam ou esperam que os estudantes tenham. Gradualmente novas ideias são formadas a partir da reflexão e da comprovação que os estudantes fazem sobre elas, através dos diferentes caminhos e direcionamentos dados pelo professor.

É fundamental os debates com os estudantes através de grupos de trabalho. As chances da compreensão de uma ideia ser verdadeira aumentam quando forem oferecidas aos estudantes melhores condições para pensar e testar essas ideias.

Por outro lado, Pinheiro e Sá (2010) compreendem que a metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, através da Resolução de Problemas, estabelece um percurso metodológico para o Ensino de Matemática e apresentam a metodologia da Resolução de Problemas como “ponto de partida”. Nesta metodologia, é apresentada uma situação problema para começar o processo de ensino, estimulando o desenvolvimento da aprendizagem, atingindo os saberes matemáticos determinados previamente pelo docente.

Onuchic *et al.* (2014) consideram o Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas como uma metodologia.

A junção das palavras ensino, aprendizagem e avaliação revelam que este processo de ensino e aprendizagem devem acontecer conjuntamente no decorrer da construção do saber pelo estudante, tendo o docente como mediador. Durante a resolução de problemas, a avaliação é desenvolvida, tornando-se parte integrante do ensino para acompanhar a evolução e aprendizagem dos educandos.

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, apresenta um problema como ponto de partida, além de orientar a aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

Assim, Onuchic *et al.* (2014, p. 45) apresentam, como sugestão para o desenvolvimento dessa metodologia em sala de aula, as atividades organizadas nas seguintes etapas: “(1) Proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas”.

Nessa sugestão, os docentes devem começar as atividades propondo um

problema para os estudantes resolverem. Este problema inicial é denominado de “problema gerador” que pode ser escolhido ou elaborado pelo próprio docente ou proposto também pelos estudantes, tendo em vista a construção de um conteúdo, conceito ou procedimento. Sendo que o referido conteúdo apropriado à resolução do problema ainda não fora ministrado em sala de aula.

A execução das ações é desenvolvida exclusivamente pelos estudantes, sem fornecer as respostas já finalizadas, o docente observa as atividades dos estudantes e auxilia-os nas atividades, bem como a utilizar seus saberes previamente estabelecidos, estimulando a troca de ideias entre eles.

Assim, a resolução de problemas deve ser a principal estratégia de ensino sendo defendida e recomenda por Van de walle (2001, *apud* ONUCHIC *et al.*, 2014) em trabalhos no ambiente escolar, onde as atividades possam iniciar constantemente e onde os estudantes estejam, diferente de outras situações em que o início do ensino se dar no lugar que os professores ficam. Excluindo, assim, os saberes prévios dos estudantes.

Durante a resolução do problema, a avaliação do desenvolvimento dos estudantes é feita de forma contínua. Pois, o docente pode perceber gradualmente os saberes que os estudantes trazem de seu convívio social para auxiliá-los no decorrer do processo sobre a interação e ajuda mútua entre os estudantes. Excluindo, assim, o caráter aprovativo das avaliações somativas consideradas tradicionais.

Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que “educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática” (BRASIL, 1998, p. 39-40). Esta preferência de trabalho leva os saberes matemáticos a terem significados para os estudantes, quando estes estão diante de situações provocadoras que lhes desafiam a buscar e a realizar estratégias de respostas.

A proposta dos PCNEM, para atingir os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, privilegia o tratamento de situações problema, sobretudo tomadas em situações reais. “A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado” (BRASIL, 2000, p. 129).

Nesta mesma direção, os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998 destacam que a Resolução de Problemas, como base organizadora do

desenvolvimento do ensino e aprendizagem deve ser sintetizada nas seguintes proposições a serem seguidas:

- A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada [...];
- Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular; [...] (BRASIL, 1998, p. 40-41).

A Resolução de Problemas é um direcionamento para a aprendizagem que possibilita um ambiente favorável para aprender conceitos, procedimentos e ações matemáticas. Observamos, na Resolução de Problemas como metodologia no Ensino de Matemática, um potencial para transformar o estudante em autor principal do seu aprendizado, de forma a percorrer o caminho necessário por meio de situações desafiadoras e elaboradas pelo professor.

Em nossa pesquisa utilizamos a metodologia da Resolução de Problemas, juntamente com a abordagem da Análise Microgenética para que o aluno possa vivenciar todos os momentos do ensino e aprendizagem e seja construtor de seu próprio conhecimento. A seguir apresentamos o modelo de Sequência Didática de Zabala (1998) que achamos convenientes para ser trabalhado o conteúdo de Permutação no Ensino Médio.

2.5 Sequência Didática

No Brasil a partir da Década de 90, começa a utilização da Sequência Didática (SD) com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Sendo indicada para qualquer área do saber, foi primeiramente desenvolvida no âmbito da linguística, posteriormente chegando à Matemática. Composta por diversas atividades envolvendo questionamentos, atitudes, procedimentos e ações. A Sequência Didática é desenvolvida pelos estudantes e mediada pelo professor.

As atividades que compõem a sequência são ordenadas de forma que o tema em estudo seja aprofundado. Essas atividades são diversificadas em termos de

estratégia como: leituras, aula dialogada, simulações computacionais, experimentos, entre outras. Assim, o tema será abordado durante um conjunto de aulas planejadas e analisadas previamente, com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática de modo que os estudantes se aprofundem e se apropriem dos temas desenvolvidos (MACEDO, 2019).

Na pesquisa realizada, levamos em consideração esse conjunto de aulas previamente definidas, para desenvolver a aprendizagem dos alunos no que se refere aos conceitos e cálculos de Permutação que abordaremos em cada atividade.

A Sequência Didática é um procedimento metodológico que vem sendo cada vez mais utilizado durante o processo de ensino e aprendizagem, sobretudo nos trabalhos de pesquisa. De acordo com Zabala (1998, p.18 *apud* SUCUPIRA, 2017, p. 29.), uma Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos”.

Então, a Sequência Didática consiste em uma intervenção pedagógica com a intenção de alcançar determinados objetivos educacionais e permitir uma análise das abordagens educativas, tomando como base as variáveis a que as práticas são submetidas (ZABALA, 1998).

Neste sentido, elaboramos uma Sequência Didática, considerando os tipos e formas de articulação das atividades que, segundo Zabala (1998), são particularidades das propostas didáticas. Nesta perspectiva, apresentamos a Sequência Didática com a estrutura que achamos conveniente e a que se adaptam a nossa pesquisa, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Estrutura do modelo da sequência didática.

FASE	DESCRIÇÃO	ENCAMINHAMENTO
1	Apresentação por parte do docente de uma situação problemática.	O professor expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos.
2	Proposições de problemas ou questões e Busca de soluções.	Os alunos individualmente ou coletivamente orientados pelo professor expõem as respostas intuitivas ou suposições, sobre o problema ou situação proposta.
3	Conceituação e algoritmo.	O professor apresenta uma atividade que conduza o aluno à descoberta de novos conceitos, a partir de roteiros de atividades, o aluno a responde.
4	Elaboração de conclusões.	Os alunos, coletiva ou individualmente, mediados pelo professor, elaboram as conclusões que se referem às questões propostas nas atividades da etapa anterior.

5	Generalização das conclusões e síntese.	O professor demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas as situações que cumprem determinadas condições.
6	Exercitação.	Os alunos realizam exercícios com o uso do algoritmo.
7	Avaliação.	Os alunos expõem os resultados obtidos nos exercícios escritos ou verbalmente.

Fonte: Adaptado de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019, p. 152).

Com base no Quadro 1, levaremos em consideração as seguintes categorias referentes aos conteúdos conceituais, as procedimentais e as atitudinais, para melhor entendimento da estrutura que adotaremos para abordagem dos conteúdos. Zabala (1998) considera que os conteúdos conceituais correspondem ao desenvolvimento das capacidades cognitivas, permitindo a operação com informações relativas às operações e ideias relacionadas ao objeto. Segundo esse autor:

As atividades que podem garantir um conhecimento melhor do que cada aluno compreende implicam a observação do uso de cada um dos conceitos em diversas situações e nos casos em que o menino ou a menina os utilizam em explicações espontâneas. (ZABALA, 1998, p. 205 *apud* SILVA, 2019, p. 152).

Quanto aos Conteúdos procedimentais, eles estão relacionados ao saber fazer, ou seja, a execução dos conteúdos está sujeita à verificação com uso adequado de instrumentos, de conversão de linguagem, do pesquisar, além de fazer outras questões relacionadas a habilidades de aplicação sobre as atividades desenvolvidas.

Já os conteúdos atitudinais apresentam subjetividade comportamental com desafio para “a percepção de características e avaliação dos elementos observados pelo docente, pois eles estão associados às atitudes e valores formados frente a um conhecimento adquirido ou informação recebida” (SILVA, 2019, p. 53).

O autor considera que a tentativa de dar uma resposta às questões propostas nas aulas de matemática pode estar relacionada a vários fatores que podem influenciar no comportamento proativo, entre eles se destaca a falta de interesse pela mesma questão que pode estar associada às situações sociais e cognitivas. Neste sentido, durante as atividades, a reflexão, a iniciativa e as relações interpessoais podem ser levadas em consideração.

A Sequência Didática (SD) permite o desenvolvimento dos conteúdos procedimentais, no que tange ao uso de fórmulas e no desenvolvimento de habilidades e competências relacionados ao nosso tema, diferente das abordagens

clássicas que se baseiam no tripé: definição, exemplo e exercício.

Já o modelo da SD está em conformidade com as concepções de Góes (2000), além de outros autores que se baseiam nos estudos de Vygotsky sobre a Análise Microgenética. Essa análise permite as interações verbais entre os estudantes visando identificar os indícios de aprendizagem de seus pares. O referido modelo encontra-se também de acordo com a metodologia de Resolução de Problemas proposto por Polya e pelos documentos oficiais.

Em relação aos conteúdos conceituais, em nosso tema eles se apresentam na compreensão dos conceitos relacionados ao estudo de Permutação. Já os conteúdos atitudinais irão aparecer no momento das trocas de ideias e diálogos entre os alunos e entre professor e alunos. Sendo assim, o Quadro 2 apresenta uma explicação dos tipos de conteúdo observado em cada etapa da estrutura apresentada no Quadro 1, em relação aos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais que aparecerão nas atividades propostas.

Quadro 2 - Etapa e conteúdo da Sequência Didática.

ETAPA	CONTEÚDO		
	Conceitual	Procedimental	Atitudinal
1. Apresentação por parte do docente de uma situação problemática.	X		
2. Proposições de problemas ou questões e Busca de soluções.	X	X	X
3. Conceituação e algoritmo.	X	X	
4. Elaboração de conclusões.	X	X	X
5. Generalização das conclusões e síntese.	X		
7. Aplicação.	X	X	
8. Exercitação.	X	X	
9. Avaliação.	X	X	X

Fonte: Adaptado de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019, p. 153-154).

O planejamento das atividades a serem desenvolvidas nos encontros da experimentação, conforme Quadro 1, visa buscar atividades que permitem aos estudantes compreenderem e orientar suas diferentes capacidades.

Esta proposta, de acordo com Zabala (1998 *apud* SILVA 2019, p.154), permite que “os alunos controlem o ritmo da sequência, atuando constantemente e utilizando uma série de técnicas e habilidades”. Nesta perspectiva, as habilidades e as competências dos estudantes dispostas nos documentos oficiais foram levadas em consideração em nossa pesquisa.

Elaboramos um plano de ação dos encontros e atividades, como consta no

Quadro 3, sendo que, no primeiro encontro, antes de aplicar as atividades, fizemos uma revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), Fatorial e Noções sobre Anagrama a fim de dar suporte ao desenvolvimento das referidas atividades.

Quadro 3 – Plano de ação dos encontros e atividades da Sequência Didática.

ENCONTRO	ATIVIDADE	OBJETIVO	DATA	HORÁRIO
1º	Permutação Simples	Introduzir o conceito de Permutação.		
2º	Exercícios de aprofundamento	Desenvolver habilidades de resolver problemas envolvendo permutação simples.		
3º	Permutação com Repetição	Descobrir uma forma prática de determinar o total de Permutação com Repetição e Fazer o estudante perceber que: $P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$		
4º	Permutação Circular	Descobrir uma forma prática de determinar o total de Permutação com Repetição e fazer o estudante perceber que: $(PC)_n = (n - 1)!$		
5º	Exercícios de aprofundamento	Desenvolver habilidades de resolver problemas que envolvam: permutação com repetição e permutação circular.		

Fonte: Adaptado de Pinheiro (2008).

Os tópicos trabalhados na Sequência Didática foram noções gerais e conceito de permutação, técnicas para calcular as quantidades de permutações simples, permutação com repetição e permutação circular na Resolução de Problemas. Além disso, propomos várias questões de aprofundamento destinadas à execução e fixação da aprendizagem de cada uma das atividades (*Vide* Quadro 3).

Nossa Sequência Didática foi estruturada seguindo o modelo de Zabala (1998), as ideias de Polya (1945) sobre a Resolução de Problema e da abordagem da Análise Microgenética de Góes (2000) com entendimento de Kelman e Branco (2004) e Souza e Cabral (2010). Pensamos numa sequência de atividades que mostre alguns conceitos importantes e aplicações sobre Permutação para que os estudantes possam assimilar e formalizar ideias, dando respostas de acordo com as perguntas e questionamentos das atividades propostas. A seguir, apresentamos as análises prévias que nos ajudaram no desenvolvimento de nossa pesquisa.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Este capítulo visa apresentar as análises prévias que é a primeira etapa da Engenharia Didática. Para a elaboração da proposta de nosso experimento, torna-se necessário conhecer os sujeitos que estarão envolvidos na pesquisa, pois, no contexto da investigação, as análises prévias servem para essa finalidade. De acordo com Carneiro (2005):

As análises prévias, é estruturada com objetivos de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções (CARNEIRO, 2005, p. 93).

Assim, o professor ou pesquisador deverá buscar, nas análises prévias, um ponto de equilíbrio entre sua proposta e o que é estudado de forma tradicional para melhorar o ensino e aprendizagem do conteúdo a ser ministrado.

Para Artigue (1996 *apud* CARNEIRO, 2005, p. 93), essa análise deve incluir a distinção de três dimensões: 1) dimensão epistemológica, associada às características do saber em jogo; 2) dimensão didática, associada às características do funcionamento do sistema de ensino; 3) dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

Na dimensão epistemológica, fizemos uma revisão de literatura, onde buscamos contribuições de trabalhos associados ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, a qual nos permitiu ter uma visão mais ampla do estudo desse conteúdo nos últimos anos. Descrevemos ainda sobre os aspectos didáticos que nos deram suporte teórico e epistemológico ao objeto da pesquisa. Essa fundamentação matemática nos ajuda a entender os conteúdos que serão abordados dentro da Sequência Didática.

Já na dimensão didática, destacamos os aspectos curriculares que tratam de identificar as habilidades e competências orientadas pelos documentos oficiais que baseiam o ensino em nosso país: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais, Sistema de Avaliação da Educação Básica, Base Nacional Comum Curricular e seus descritores, além de vários autores que já pesquisaram sobre currículo.

Por fim na dimensão cognitiva associada às características do público ao qual se dirige o ensino e aprendizagem, aplicamos uma consulta diagnóstica com os

estudantes para conhecer o público de nossa pesquisa no sentido de buscar informações para propormos nossa Sequência Didática.

Dessa forma, apresentamos, a seguir, os estudos e as atividades que serviram de base para elaboração de nossa Sequência Didática e que serão levadas em consideração em nosso experimento.

Descrevemos um estudo de Análise Combinatória em seus aspectos curriculares e revisão de literatura. Tendo em vista poucos trabalhos de pesquisa encontrados na literatura brasileira com o tópico específico de “Permutação”, retiramos informações e contribuições de vários autores que serviram de base para nossa pesquisa. Esses estudos foram utilizados para construir a nossa sequência de atividades, além de informações que proponham alternativas metodológicas e didáticas para o ensino e aprendizagem de Permutação.

Outros documentos importantes são os aspectos curriculares que trataram de identificar as habilidades e competências orientadas pelos documentos oficiais e exigidas em diversas avaliações, sendo também levados em consideração nos objetivos das atividades propostas em nossa pesquisa.

Na revisão de literatura, buscamos apontar a contribuição de vários autores que têm se dedicado nos últimos anos a estudos e pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Como este conteúdo vem sendo abordado no contexto atual relativo às tendências e perspectivas metodológicas que nos auxiliou no desenvolvimento desta pesquisa e na elaboração de nossa SD.

Em seguida apresentamos um diagnóstico realizado por meio de uma pesquisa de campo com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Codó-MA. O objetivo desta consulta foi analisar os aspectos sociais dos estudantes, aspectos didáticos – pedagógicos, identificar as dificuldades dos alunos ao estudarem o conteúdo de Permutação e buscar informações em relação ao processo de ensino-aprendizagem desse assunto.

Este levantamento serviu para conhecermos o público de nossa pesquisa, no sentido de buscar informações para propormos uma Sequência Didática e possível aplicação da Resolução de Problemas como estratégia de ensino em nossa pesquisa.

Por fim descrevemos os aspectos didáticos referentes ao objeto da pesquisa, mostrando um pouco do conceito geral e da classificação de Permutação e suas aplicações na Resolução de Problemas. Essa fundamentação matemática nos ajudou a entender os conteúdos que serão abordados dentro da Sequência Didática.

Dessa forma, o planejamento, o desenvolvimento e as análises propostas em nossa pesquisa tiveram como base toda fundamentação teórica apresentada.

3.1 Aspectos Curriculares de Análise Combinatória

A Matemática, desde o início das primeiras civilizações, vem desempenhando um papel relevante na sociedade de modo geral, de forma especial, nas diferentes áreas do conhecimento. Neste sentido, Onuchic *et al.* (2014) diz:

A matemática tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento da sociedade desde os tempos pré-históricos até o presente. Hoje esse papel é mais significativo do que antes e promete tornar-se ainda mais no futuro. Assim a educação matemática é de grande interesse e suscita grandes debates [...] (WILLOUGHBY, 2000, p.1 *apud* ONUCHIC *et al.*, 2014, p.40).

Desse modo, a Matemática tem sido uma ferramenta de grande importância para o avanço das ciências no contexto social. Assim, concordamos com Brasil (2002, p. 111) quando afirma que, em nossa sociedade, “o conhecimento matemático é necessário; em uma grande diversidade de situações e apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana” (BRASIL, 2002, p. 111).

Nesta mesma direção, para D’Ambrosio (1996), em qualquer diálogo a respeito da Matemática, bem como do seu ensino, é indispensável levar em consideração uma percepção da História da Matemática. Segundo esse mesmo autor, para se propor qualquer mudança em Educação Matemática e Educação em Geral, é necessário ter uma noção mesmo que de maneira indefinida e incompleta do porquê e de quando se decidiu levar a Matemática à importância que tem hoje.

O autor acima também destaca que, para o desenvolvimento da Matemática, nos dias atuais é necessário conhecer os aspectos históricos e o momento elevado da Matemática que passou.

Nesta perspectiva e considerando o contexto atual, é importante compreender o Ensino de Matemática conectado com um planejamento dentro de um olhar voltado para o currículo desta disciplina. O docente tem o dever de planejar todas as ações que irão nortear todo esse processo. Desse modo, entendemos que podemos chamar de currículo toda experiência de vida adquirida ao longo da trajetória de um indivíduo.

Nesse sentido, segundo Mello (2014, p. 1), “as decisões sobre currículo envolvem diferentes concepções de mundo, de sociedade e, principalmente,

diferentes teorias sobre o que é o conhecimento, como é produzido e distribuído, qual o seu papel nos destinos humanos”.

Na mesma direção acima segue D’Ambrosio (1996, p. 18) ao dizer que “Todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não-dicotômicas entre si”. Esse autor afirma que o processo de aquisição do conhecimento está submetido ao contexto natural, cultural e social; sendo, portanto, dinâmico e nunca acabado. Este autor define currículo como sendo a “estratégia para a ação educativa”. Onde destaca ainda três componentes importantes que estão conectados em um mesmo processo ao analisar o currículo, são eles: objetivos, conteúdo e métodos.

Nesse sentido, para Melo (2014), currículo é todo conhecimento que os estudantes adquirem durante sua vida escolar, necessários para atuar na sociedade. Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio evidenciam que:

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. [...] para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. (BRASIL, 2000, p.40).

Segue-se o mesmo pensamento de Santos (2003, p. 6 *apud* GODOY, 2011 p.135) quando diz que “o conhecimento, o ensino e a aprendizagem são elementos sujeitos a condições sociais e culturais [...] para se desenvolver um amplo campo de estudos e significativas proposições no plano curricular”. Esse autor considera que, para aplicar os diferentes saberes matemáticos no dia a dia, devem-se levar em consideração os contextos ambiental, cultural, social e político.

Assim, é importante que o currículo escolar seja voltado para valorizar nos alunos o seu talento e saber espontâneo, adquiridos de sua vivência social, para despertar a consciência de um cidadão preparado para ser inserido no mundo do trabalho, sempre levando em consideração as características regionais, culturais e sociais do ambiente em que vivem os alunos.

Percebe-se, no decorrer da história, que tanto o currículo, quanto o Ensino de Matemática vêm sendo estruturados, seja no cenário nacional, seja no mundial. Com a criação da LDBEN (1996), segundo Silva (2019) a disciplina de Matemática tornou-

se obrigatória e o currículo foi organizado de uma forma geral, como está escrito no Art. 26 da presente lei que estabelece que:

Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996, p. 09).

Dessa forma, o parágrafo § 1º do referido artigo faz referência ao Currículo de Matemática. Ainda de acordo com Silva (2019), as competências propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio foram indicadas para a Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Sendo que tais competências já tinham sido previstas na LDBEN (1996), descrevendo, sobretudo, as habilidades básicas para o ensino e aprendizagem de Matemática do Ensino Médio e das tecnologias a ela relacionadas (BRASIL, 1997).

As competências e habilidades previstas na BNCC constituem a formação geral básica. Os currículos do Ensino Médio são compostos pela formação geral básica e faz referência aos documentos das DCNEM/2018 (Parecer CNE/CEB nº 3/2018 e Resolução CNE/CEB nº 3/201858) (BRASIL, 2018, p.470).

Por outro lado, segundo Onuchic *et al.* (2014), nas diferentes etapas pela qual passou a Educação Matemática, foram realizados diferentes pontos de vista de como ensinar, aprender e avaliar; bem como identificar de que forma a Matemática deveria ser trabalhada na perspectiva do currículo, métodos e processo.

Essas reflexões aconteceram no século XX, mais precisamente, na Década de 1980, com análises acerca do que se pretendia alcançar e de como se deveria fazer com as atividades de Matemática no ambiente escolar. Deste modo, dentre um número elevado de relatórios e artigos referentes à Educação Matemática, as autoras destacam dois documentos de grande importância produzidos nos Estados Unidos nas décadas de 1980 a 1990, são eles: os documentos “Uma Agenda para a ação” e os “padrões” em 1989 e 1991.

De acordo com estas autoras, no final da Década de 1980, ocorreu uma série de pesquisas realizadas pelo NCTM, (Conselho Nacional de Professores de Matemática – Estados Unidos), as quais resultou na edição dos *Standards 2000* (NCTM, 2000). Estes documentos se destacaram na sistematização e divulgação da RP (Resolução de Problemas) como um papel de suma importância no currículo das escolas americanas, refletindo também nos currículos de vários países.

Nesta mesma direção, segundo Santos (2008 *apud* GODOY, 2011), com as influências do Movimento da Matemática Moderna (MMM), houve divergências de pensamentos ligados às formações dos currículos e ao processo de Ensino da Matemática, chegando a posicionamentos e concepções que iriam nortear um novo contexto. Dessa forma, o autor evidencia alguns documentos, entre eles, destaca-se o documento produzido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), com o título de *An agenda for action: recommendation for School Mathematics of 1980*, que iria servir para orientar estas mudanças no que se refere à reestruturação do Currículo de Matemática Básica. Esse documento tinha como sugestão que:

[...] tais orientações tinham a finalidade de atender melhor as necessidades matemáticas de uma população diversificada de estudantes em uma sociedade marcada progressivamente pela presença de tecnologias. As recomendações foram: a resolução de problemas como foco; as destrezas básicas deveriam ir além do cálculo; obter vantagens do uso de calculadoras e computadores; aplicar *Standards* rigorosos de eficácia e rendimento; avaliar o êxito dos programas de Matemática; desenvolver currículo flexível para promover o acesso com grande variedade de opções; ajuda pública para o ensino de matemática para se alcançar níveis compatíveis com a importância da compreensão matemática (SANTOS, 2008, p. 4 *apud* GODOY, 2011, p. 106-107).

Embora o Movimento da Matemática Moderna não tenha produzido os resultados esperados, esse movimento, segundo D'Ambrósio (1996), apresentou grande influência no surgimento de novos líderes na área da Educação Matemática, além de eliminar muitas coisas que se fazia no Ensino da Matemática de características semelhantes no mundo inteiro, com mudanças, sobretudo, para melhorar a forma de ministrar as aulas e as avaliações.

Neste contexto, segundo Onuchic *et al.* (2014), o Brasil renova suas orientações curriculares, seguindo esse movimento, recomendando que as atividades de matemática, no ambiente escolar, tenham, como ponto de partida, a Resolução de Problemas; sendo, portanto, a base do Ensino da Matemática.

Influenciado por esse novo cenário, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental foram sendo estruturados. Neste sentido, Brasil (1998) tem um olhar voltado para a importância de haver um “direcionamento do Ensino Fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão”, além da “importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento” (BRASIL, 1998, p. 20). Desta forma, concordamos com Godoy (2011)

quando afirma que estas ideias desencadearam uma análise crítica do currículo e do Ensino de Matemática na Década de 80, mais precisamente no começo dos anos 90.

Levando-se em consideração os objetivos propostos e mencionados anteriormente pelo NCTM, bem como pela MMM, as novas sugestões para os currículos tiveram um olhar bem mais específico em relação ao Ensino de Matemática, antes dos PCN. Para Godoy (20011), um novo ensino desta disciplina viria a ter um caráter de libertação e assumiria o papel de preparar os indivíduos para uma sociedade envolvida com a ciência e com a tecnologia. Seguindo esta linha de pensamento, Godoy (20011) considera que os objetivos do Ensino da Matemática deveriam capacitar o estudante para:

[...] planejar ações e projetar as soluções para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade; compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente; usar independentemente o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca; aplicar matemática nas situações do dia-a-dia; avaliar se resultados obtidos na solução de situações problemas são ou não são razoáveis; fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos [...]; utilizar a noção de probabilidade para fazer previsões de eventos ou conhecimento [...] (PCM, 1995, p.46 *apud* GODOY, 2011, p. 108).

Sendo assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) começaram a ser elaborados por volta dos anos 90. No entanto, iremos abordar apenas o currículo relacionado à disciplina de Matemática.

Para o ensino dessa disciplina, os PCN menciona em seu texto de introdução que a Matemática “constitue um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite, de fato, a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, nas relações sociais e da cultura”, além de estar na “vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos” (BRASIL, 1998, p. 59).

Seguindo essa mesma linha, os PCN de Matemática tentaram ir mais além quando consideram que a Matemática deveria ter um currículo voltado para a “formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno”, assim como em sua “aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares” (BRASIL, 1998, p. 28).

Neste sentido, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDBEN) estabelece em seu Art. 22 que “A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando,

assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”.

Sendo assim, para formar cidadão que possam resolver seus problemas em diferentes áreas do conhecimento na vida diária, Dante (1998) considera que é necessário constar no currículo de Matemática elementar das crianças a Resolução de Problemas como parte essencial para que elas desenvolvam desde cedo sua capacidade de enfrentar situações-problema.

Nessa caminhada para a construção dos PCN de Matemática, o ensino da matéria, ao começar as atividades em sala, deveria ter sugestões com uso de procedimentos na escola; e esses deveriam ser guiados pela Resolução de Problemas que seria realizado no decorrer do processo de aprendizagem, quebrando a estrutura de Ensino Tradicional, que iniciam com as definições, seguidas de exemplos para chegar aos exercícios.

Os novos pensamentos frutos dos PCN foram muito além da metodologia de ensino, por meio da Resolução de Problemas antes do início das atividades, eles apresentaram outras possibilidades nos direcionamentos das práticas, no desenrolar das atividades de Matemática, no ambiente escolar, como podemos observar: “o uso da história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem favorecer o contexto dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução” (BRASIL, 1998, p.42).

Diante deste contexto, podemos entender que o currículo da disciplina de Matemática deve ser estruturado seguindo essas novas perspectivas, onde o estudante possa ser ator principal na construção de seu próprio saber no despertar da consciência de um cidadão crítico, preparado para ser inserido no mundo do trabalho e contribuir com uma sociedade envolvida com as inovações tecnológicas.

O assunto de Permutação, tema de nossa pesquisa, é abordado dentro do conteúdo de Análise Combinatória, conforme consta nos documentos oficiais mencionados anteriormente. Portanto, em nossa pesquisa trataremos do conteúdo de Análise Combinatória do ponto vista curricular.

Sabe-se, por meio de pesquisas realizadas, que, durante o período da modernidade, a Álgebra, segundo Pinheiro (2015), foi bem estruturada, tendo como um dos principais assuntos debatidos, o desenvolvimento binomial com foco na Resolução de Problemas. Neste período, com a necessidade de entender como funcionavam as expressões binomiais, a Análise Combinatória conquistou seu espaço

na Matemática, sobretudo com o estudo das permutações e das combinações.

O assunto fica evidente conforme ressalta o autor, na primeira coletânea de textos de Análise Combinatória, escritos em inglês por Nicholson em 1818, tendo como título “Análise Combinatória aplicação para problemas da álgebra”.

Com a criação do Colégio Pedro II, em 1838, segundo Valente (2007 *apud* PINHEIRO, 2015), a Matemática desenvolvida nessa escola passou a servir de referência no cenário nacional, tornando-se palco dos debates sobre o que deveria ser ensinado aos estudantes secundarista e o que deveria constar nos livros didáticos para serem adotados no país.

Neste período, de acordo com Pinheiro (2015), já havia uma preocupação direcionada com as estruturas curriculares dos livros didáticos, no colégio Pedro II, com influências do ensino das escolas francesas.

Segundo Lorenz e Vechia (2004 *apud* PINHEIRO, 2015), durante a metade do Século XX até 1890, os livros didáticos que predominavam no Ensino de Matemática no Colégio Pedro II tiveram como autor Cristiano Benedito Ottoni e continham em seus sumários: Álgebra, Geometria e Trigonometria. Os autores destacam que, em 1852, foi publicado por Ottoni, no Rio de Janeiro, o livro “Elementos de Álgebra” para os estabelecimentos de ensino secundário e superior, sendo esse utilizado no colégio Pedro II até 1870.

Essa obra, segundo Valente (2007, p. 151 *apud* PINHEIRO, 2015) é uma coleção do “*Elémensd’ Algèbre*” de Bourdon de 1817. Em 1891, a versão do “*Elémensd’ Algèbre*” consta no capítulo V, um subtítulo reservado ao estudo do Binômio de Newton, apresentando consequências das fórmulas, denominada por Bourdon (1891) de “Teoria das Combinações”, a qual corresponde ao desenvolvimento das fórmulas de Permutação, de Arranjo e de Combinação Simples.

Com a reforma de Benjamim Constant em 1890, logo após a Proclamação da República em 1889, segundo Lorenz e Vechia (2004, p. 64 *apud* PINHEIRO, 2015), houve profundas alterações no currículo do Colégio Pedro II na área de Matemática. Nesse período, segundo o autor o livro “*Elémensd’ Algèbre*”, de Bourdon foi oficialmente inserido no programa de 1895 como livro didático.

Com a reforma de Francisco Campos, segundo Teixeira (2012), o ensino secundário foi dividido em dois ciclos: curso fundamental, com cinco anos de duração e com o objetivo de possibilitar uma formação geral e básica; e cursos complementares, com dois anos de duração que dessem condições aos estudantes

escolherem cursos superiores com suas respectivas profissões.

Nessa reforma, o autor afirma que a disciplina de Matemática surge unificando as disciplinas de Aritmética, de Álgebra e de Geometria que até então estavam separadas sendo obrigatória em todas as séries do Ensino Fundamental, com currículos e programas rígidos e prescritos, de forma especial no ensino secundário.

A portaria de nº 1405 de 14 de dezembro de 1951, segundo Teixeira (2012), trouxe várias recomendações metodológicas que já constavam nos currículos da reforma de Francisco Campos, tais recomendações indicavam os conteúdos de “Noções sobre Análise Combinatória” para o Programa Mínimo de Matemática, para o Curso Colegial (hoje correspondente ao Ensino Médio). O conteúdo de Álgebra seria ministrado na 2ª série, com a utilização do livro didático de Matemática 2, tanto para o programa de Matemática do curso clássico como para o curso científico.

Seguindo a mesma direção acima, Teixeira (2012, p. 112) ressalta que, no “Programa Moderno de Matemática para o Colegial – ainda na 2ª Série – o primeiro tópico diz respeito à Análise Combinatória e ao Binômio de Newton”, constando dentro do conteúdo a Análise Combinatória Simples, as Noções de Probabilidades e o Binômio de Newton.

Ainda nessa mesma linhagem, influenciado pelo MMM (movimento da matemática moderna) foi fundado o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática – GEEM em São Paulo, esse grupo era formado em sua maioria por profissionais da área de Matemática. Para a proposta curricular de 1951, o GEEM sugere, na 2ª edição de seu livro de 1965, que se trabalhe com “Noção de Probabilidades”, mantendo o conteúdo de Análise Combinatória Simples.

No entanto, os documentos oficiais recomendam que o ensino de Análise Combinatória seja ministrado desde os anos iniciais para uma melhor aprendizagem e aprimoramento dos estudantes em sala e no contexto social em que estão inseridos.

Neste sentido, Rosas (2018) afirma que esse conteúdo é um importante instrumento para o crescimento intelectual e cognitivo do estudante e deve-se ser bem ministrado a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme evidencia os Parâmetros Curriculares Nacionais, que destacam “a importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos” (BRASIL, 1997, p. 21).

Vale ressaltar que os estudantes, na maioria das vezes, ao chegarem ao

Ensino Médio, apresentam muitas dificuldades em Matemática, sobretudo na parte de Permutação decorrente de vários fatores.

Para Macedo (2019), uma das dificuldades que pode desmotivar os estudantes ao chegarem ao Ensino Médio é com relação à compreensão de conteúdos que foram ministrados no Ensino Fundamental, os quais não foram devidamente assimilados pelos alunos e, ao passar para os anos seguintes, carregam com sigio essas dificuldades. Como consequência disso, este aluno que está de certa forma atrasado com a disciplina dificilmente consegue compreender os conteúdos que obedecem a uma sequência, faltando-lhe a base para a nova aprendizagem, aumentando ainda mais as dificuldades.

É necessária e importante essa abordagem nos anos iniciais, para poder minimizar as dificuldades desses conteúdos e possibilitar aos estudantes, ao chegarem ao ensino médio, “lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p. 40).

O conteúdo de Análise Combinatória faz parte da grade curricular do Ensino Médio, sendo ministrado no 2º ano na maioria das escolas públicas e particulares de nosso país e consta nas Orientações Curriculares onde falam que “Os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. [...] O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo” (BRASIL, 2006, p. 70-79).

Além dos documentos oficiais que tratam do currículo escolar, citados anteriormente, temos a BNCC (2017) que é um documento com características normativas que define um conjunto de aprendizagem necessário aos estudantes para serem desenvolvidas no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica.

Para o desenvolvimento das habilidades previstas nesse documento oficial, é importante levar em consideração as experiências e os saberes matemáticos vivenciados pelos alunos, sempre havendo conexões entre os objetos de estudos e a vivência do dia a dia deles. Além disso, é importante incluir os alunos, desde o Ensino Fundamental, num processo gradual de compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática.

Ressaltamos ainda o SAEB, que é um Sistema de Avaliação da Educação Básica, em larga escala, que trata das habilidades em Matemática requeridas dos estudantes nesses documentos, de forma especial, na área de Permutação. Só para

reforçar, afirmamos que o assunto de Permutação é tratado dentro do conteúdo de Análise Combinatória.

No que consta no Ensino Fundamental de acordo com a BNCC, as habilidades estão organizadas segundo unidades de saberes da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Em relação à Probabilidade, os alunos têm a possibilidade a partir das séries iniciais, de “construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos” (BRASIL, 2017, p. 528).

Já no Ensino Médio, para a BNCC, o estudo de Probabilidade não é abordado de maneira específica e separado, no entanto o ensino desse conteúdo é lembrado nas competências específicas de Matemática e suas tecnologias para:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017a, p. 97).

No mesmo documento oficial, encontramos o conteúdo de Análise Combinatória no subtema da Probabilidade e Estatística (*Vide* Quadro 4).

No que se refere ao Ensino Fundamental, o estudo desse conteúdo se apresenta mais evidente no 8º ano, onde a BNCC (2017) recomenda a utilização do princípio multiplicativo no cálculo de Probabilidade com a pretensão de capacitar os estudantes com a seguinte habilidade e competências:

Quadro 4 – Habilidades e competências sobre Análise Combinatória segundo a BNCC - EF

UNIDADE TEMÁTICA	HABILIDADE E COMPETÊNCIA	OBJETO DO CONECIMENTO
Probabilidade e estatística	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

Fonte: Elaborado pelo Autor (2020).

No Ensino Médio o conteúdo de Análise Combinatória também se encontra inserido no mesmo tema Probabilidade e Estatística, sendo ministrado na 2ª série do

Ensino Médio na maioria das escolas Brasileiras. Deste modo, esse documento oficial propõe alcançar nos alunos habilidades e competências, conforme Quadro 5.

Quadro 5 – Habilidades e competências sobre Análise Combinatória segundo a BNCC – EM.

UNIDADE TEMÁTICA	HABILIDADE E COMPETÊNCIA	OBJETO DO CONECIMENTO
Probabilidade e estatística	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	Problemas de contagem, princípios multiplicativo e aditivo e diagrama de árvore.
Probabilidade e estatística	(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	Espaço amostral de eventos aleatórios e cálculo de probabilidade.
Probabilidade e estatística	(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos.	Cálculo de probabilidade
Probabilidade e estatística	(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (BNCC, 2017 p. 546).	Cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para o desenvolvimento dessas habilidades, é necessária a sensibilidade do professor para a prática docente, além de uma exposição clara, efetiva e detalhada do conteúdo nos livros didáticos.

Dentre as avaliações em larga escala no Brasil, destacamos o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que aplica a Prova Brasil com objetivo de realizar uma avaliação diagnóstica de caráter nacional, na quarta e oitavas séries ou nos atuais (quinto e nono ano do Ensino Fundamental), tendo, como foco na disciplina Matemática, a Resolução de Problemas.

A Matriz de Referência de Matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB apresenta as competências e habilidades estruturadas por anos e séries avaliadas com seus respectivos descritores. Em relação a análise combinatória, o descritor D20 apresenta a seguinte habilidade a ser desenvolvida pelos alunos do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental (*Vide* Quadro 6).

Quadro 6 – Habilidades e competência de Análise Combinatória segundo o SAEB – EF

HABILIDADE	COMPETÊNCIA
D20	Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da

	multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.
--	--

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Já os descritores D32 e D33 apresentam as seguintes habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos do 3º ano do Ensino Médio, conforme Quadro 7.

Quadro 7 – Habilidades e competência de Análise Combinatória segundo o SAEB - EM

HABILIDADES	COMPETÊNCIAS
D32	Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
D33	Calcular a probabilidade de um evento.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Diante do exposto acima, podemos constatar que o conteúdo de Análise Combinatória se apresenta no Ensino Fundamental confirmando a necessidade de se trabalhar esse conteúdo desde os anos iniciais, conforme os documentos oficiais. No entanto, percebemos que o tópico de Permutação com Repetição não consta na relação dos descritores, conforme a relação disponível dos descritores do PDE/SAEB.

Sabe-se que muito se tem discutido sobre o processo avaliativo no Ensino de Matemática em nosso país, com propostas inovadoras voltadas para as práticas avaliativas que objetivam garantir a qualidade do ensino e da aprendizagem. Dessa forma Silva (2019) afirma que, para contribuir com o processo avaliativo interno e externo à escola, é necessário que estas correntes estejam conectadas.

De acordo com Silva (2019, p. 42), “o modelo de avaliação em larga escala do SAEB, as matrizes do ENEM, o Projeto Político Pedagógico da escola (PPP), aliados à falta de qualificação docente em lidar com as questões de ordem pedagógica”, não consideram as particularidades e experiência dos estudantes, sobretudo relativo ao domínio da tecnologia que faz parte de sua vivência, além de priorizar, muitas vezes, o ensino baseado apenas no conteúdo.

Neste sentido, Nehring *et al.* (2011) ressaltam que a Prova Brasil e o SAEB são sistemas de avaliação que visam fazer um levantamento da real situação em que se encontra o Sistema de Educação para poder direcionar orientações de políticas

públicas voltadas a implementação de igualdade e melhoria da Educação no nosso país.

Entretanto, esses autores afirmam que pesquisas revelam que os planos de ensino das escolas não estão estruturados, em conformidades com os descritores dessas avaliações que apontam índices baixos no desempenho dos estudantes, sobretudo na disciplina de matemática.

De acordo com Dante (1999), a avaliação deve ter um caráter diagnóstico, ser contínua e dinâmica. Para este autor, a observação, registro, provas, testes, trabalhos, entre outros, não podem ser usados para punir os estudantes ou apenas para ajuizar valores.

Nesse contexto, segundo D'Ambrosio (1996), o alto índice de reprovação e o grande número de evasão escolar têm sido obstáculos para a melhoria da Educação. O autor ressalta a necessidade de se procurar outros meios de avaliação que sejam diferentes daqueles que estão sendo usados para submeter os estudantes a serem testados em avaliações, tais como prova, exames, questionários e algo semelhante.

Ainda de acordo com D'Ambrosio (1996), para um resultado eficiente em um sistema de avaliação, deve-se considerar:

Análise do comportamento, individual e social, que resultou da passagem pelo sistema. Uma análise de impacto social, assim como de comportamento dos indivíduos e da sociedade como um todo é que deveria ser aplicada. Os resultados da aplicação de instrumentos tradicionais poderão dar, na melhor das hipóteses e mediante elaborados modelos de interpretação, apenas informações parciais focalizadas e geralmente pouco relevante sobre a qualidade do sistema. (D'AMBROSIO, 1996, p. 62).

Sendo assim, o autor considera que, para haver uma avaliação efetiva no sistema, deve-se investir no desenvolvimento da criatividade individual e social, em que possa ser incluído o exercício pleno da cidadania. Para que isso ocorra, é necessário um repensar permanente dos parâmetros de avaliação.

Ainda segundo D'Ambrosio (1996), imaginar um currículo obrigatório que atenda o país inteiro e que tenha um resultado satisfatório no melhoramento da Educação, é uma grande utopia. Para esse autor, na Educação Moderna, o currículo deve ser combinado, ou seja, é preciso ser feito um contrato entre professores, estudantes e comunidade com reflexos naquilo que é desejado e necessário mediante as possibilidades, dando respostas às características locais.

Como vimos, o Ensino de Matemática, em especial a Análise Combinatória, é fruto de um debate histórico com inovações curriculares que passou por reformas até

chegarem a atual BNCC (2017), porém é consenso na literatura atual o ensino por competências com foco na Resolução de Problemas.

A BNCC é o mais recente documento oficial de referência curricular para a Educação Básica no Brasil e encontra-se em fase de implementação. Dessa forma, livros didáticos, Projetos Políticos Pedagógicos das Escolas, além das grades curriculares precisam estar em sintonia com as novas orientações desse documento oficial.

Neste contexto é importante a busca de alternativas metodológicas que contribuam com o ensino e aprendizagem dos estudantes, tendo um olhar voltado para as competências e habilidades, bem como para as avaliações de forma geral, sendo capaz de formar um cidadão crítico e participativo para atuar na sociedade.

Assim, podemos considerar que os aspectos curriculares abordados neste estudo estão dentro dos critérios das análises prévias da Engenharia Didática que, segundo Carneiro (2005) e sugeridas por Artigue (1996), estão na dimensão didática que associa às características do funcionamento do sistema de ensino, permitindo refletir sobre a importância das prescrições curriculares, no tocante ao planejamento e nas possíveis análises avaliativas dos saberes norteados pelas competências e habilidades.

As habilidades e competências orientadas pelos documentos oficiais, apontadas em nossos aspectos curriculares, serão levadas em consideração nos objetivos das atividades em nossa pesquisa.

Compreendemos a importância dos aspectos curriculares que envolvem a Matemática, em especial o conteúdo de Análise Combinatória, sobretudo ao tópico de Permutação que precisa de um olhar voltado para novas pesquisas. Então prosseguimos com as análises prévias, propondo a seguir, uma revisão de literatura sobre o conteúdo de Análise Combinatória.

3.2 Revisão de literatura sobre Análise Combinatória

A intenção, ao realizar esta revisão de literatura, decorreu da necessidade de conhecer pesquisas relacionadas às tendências e perspectivas ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Para que tudo ocorra conforme o planejado, é essencial conhecer o público alvo da pesquisa, perceber as dificuldades que os alunos podem vir a apresentar durante o nosso experimento com a intenção de buscar

indícios de aprendizagem e alternativas metodológicas, para propormos uma Sequência Didática a fim de diminuir as dificuldades dos alunos ao estudarem Permutação, na melhoria do ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Nesse sentido, enfatizamos a importância de identificar e analisar as possíveis contribuições de trabalhos relacionados ao nosso objeto de estudo que foram importantes para a construção de nossa Sequência Didática.

Em nossa análise, identificamos pesquisas que investigaram as Sequências Didáticas com alternativas metodológicas. Observamos algumas dificuldades dos alunos ao resolverem problemas de Análise Combinatória, além da predominância da memorização de fórmulas e deficiências na formação dos professores da Educação Básica à Graduação. Estas investigações vieram contribuir de forma significativa para o desenvolvimento da nossa pesquisa no que tange às questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de Permutação, sobretudo na elaboração da nossa Sequência Didática.

Para tanto, iniciamos delimitando nosso tema. Partindo de minha experiência como docente da Educação Básica, sabe-se que o assunto de Permutação é geralmente ministrado no 2º ano do Ensino Médio, na maioria das escolas públicas, sendo abordado dentro do conteúdo de Análise Combinatória. Assim, buscamos trabalhos acadêmicos com a temática (análise combinatória), tendo em vista que as tentativas de utilizar o termo em específico “Permutação” não foram bem sucedidas, encontramos apenas a palavra-chave (Permutação).

Durante a busca e seleção da pesquisa relacionada ao nosso objeto de estudo, usamos “Análise Combinatória” como palavra-chave. Utilizando a ferramenta de busca *on-line* “Google Acadêmico”, selecionamos 10 trabalhos (por considerar este número uma quantidade suficiente para compreendermos como o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória vem sendo abordado no contexto atual), com a intenção de buscar as informações relevantes para a nossa pesquisa, sendo nove dissertações e uma tese.

Na revisão, incluímos somente trabalhos (dissertações e tese) publicados no período de 2011 a 2019, nos quais a metodologias estão entrelaçadas com a nossa linha de pesquisa e publicados na íntegra, disponíveis em base de dados de suas respectivas instituições. Durante a seleção, foram excluídos trabalhos nos quais a metodologia não apresentou relação com a nossa linha de pesquisa. Em relação aos artigos, todos encontrados foram eliminados, pois eram publicações em periódicos de

parte das dissertações selecionadas, sendo mais conveniente a análise do trabalho na sua íntegra.

Na etapa seguinte da revisão, fizemos o estudo e o registro dos trabalhos selecionados, organizando os textos com as seguintes informações: objetivos, procedimentos metodológicos utilizados e principais resultados alcançados, a fim de buscar informações em um processo de maior aproximação com nossa pesquisa.

Os critérios citados anteriormente buscaram facilitar o processo de entendimento do contexto das pesquisas existentes, sobre o ensino de análise combinatória. Listamos no Quadro 8 nosso estudo de revisão de literatura, com a seguinte divisão: autores e ano de publicação e instituição e título, onde a organização foi pensada com a finalidade de ficar visível ao leitor. As pesquisas estão disponíveis em banco de dados online de suas respectivas Instituições.

Na última etapa desse estudo, faremos uma avaliação geral sobre as revisões de literatura.

Quadro 8 – Estudos sobre o ensino de Análise Combinatória (continua).

AUTOR	INSTITUIÇÃO	TÍTULO: DISSERTAÇÕES/TESE
Ambrozi (2017)	Universidade de Caxias do Sul – UCS.	Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória.
Rosas (2018)	Universidade Estadual do Pará - UEPA	Ensino de Análise combinatória por atividades.
Fonseca (2015)	Universidade Federal de Sergipe – UFSE.	O ensino da análise combinatória: um estudo dos registros da representação semiótica por meio de sequência Didática.
Conceição (2019)	Universidade Estadual do Pará – UEPA.	Ensino de Análise combinatória no ensino Médio por atividades.
Atz (2017)	Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS.	A análise combinatória no 6º ano do ensino fundamental por meio de resolução de problemas.
Gonçalves (2014)	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.	Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio.
Lima (2011)	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais PUC – MG.	Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados.

Gerdenits (2014)	Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR	Raciocínio Combinatório: uma proposta para professores de matemática do ensino fundamental – anos finais.
Pinheiro (2015)	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC - SP	Análise Combinatória: Organizações matemáticas e didáticas dos livros escolares brasileiros no período entre 1895 – 2009.
Martins (2018)	Universidade Federal do Espírito Santo - UFES	Ensino de Análise Combinatória: Um estudo das representações de professores de matemática do ensino médio público de São Mateus.

Fonte: Elaborado pelo Autor a partir da pesquisa bibliográfica (2019).

Em cada pesquisa foi realizado a análise e apresentação de resultados. Foram também extraídos informações sobre objetivo da pesquisa, metodologia e principais resultados e conclusões, buscando informações que se aproximavam de nossa investigação. Em seguida foram descritas e ao final realizamos uma análise geral sobre os estudos do ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

• **Ambrozi (2017)**

Para contribuir com o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, Ambrozi (2017), em seu trabalho, desenvolveu um estudo que teve como objetivo a construção de uma Sequência Didática com atividades que integram o uso de jogos que venham contribuir com o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória. Para tanto, formulou a questão de pesquisa: “ Qual a colaboração de uma sequência didática, com atividades em que se utilizam materiais manipuláveis, recursos digitais e jogos, para a aprendizagem de Análise Combinatória?”.

Em sua metodologia, Ambrozi (2017) fez uso da Engenharia Didática. A pesquisa foi realizada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio em 2016. Ao realizar as atividades, ele fez observações e anotou-as em um diário de bordo do professor, nas produções dos estudantes, nos registros das suas falas e nas respostas a questionários respondido.

A pesquisa foi desenvolvida em 7 etapas envolvendo jogos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória, entre os quais: *Yellow out*, *Twibik*, Pulo do Sapo, Jogo do Quadrado, Jogo Senha, Jogo Bicolorido e Jogo Trilha Combinatória. Ao final de cada etapa, os conceitos eram explorados com grupo de alunos.

Os resultados observados, segundo o autor, são indicativos de que a sequência de jogos da dinâmica combinatória promoveu uma retomada de consciência em relação os alunos que associaram conceitos que estudaram anteriormente.

Após a realização dos jogos, o autor aplicou atividades em que percebeu nos estudantes a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, por meio da construção do conjunto de jogadas, sendo associada à árvore de possibilidades. Porém, alguns alunos não assimilaram totalmente o princípio da contagem, pois apresentaram dificuldades na interpretação da questão.

Já o Jogo Senha auxiliou os alunos a associarem os conceitos de Permutações e de Arranjos Simples, sem ainda conhecê-los formalmente. Segundo o autor, mesmo com dificuldades de interpretação, de compreensão de alguns significados ou de atingirem a condição de uma generalização algébrica, os alunos, na sua maioria, conseguiram responder adequadamente as perguntas que introduziram o conceito de combinação.

Neste sentido, para o autor, o trabalho desenvolvido com jogos envolveu os alunos, motivando-os a se desafiarem, a superarem barreiras e a construir sentido e compreensão dos assuntos estudados. O trabalho e questão deu origem a um Produto Educacional que pode contribuir com o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

O autor destaca ainda que houve uma melhora significativa no entrosamento das equipes de trabalho. Após a análise das etapas da Sequência Didática, afirmou que a utilização de jogos, como suporte de aprendizagem em sala de aula, é um modo eficaz que apresentou bons resultados para a aprendizagem.

• **Rosas (2018)**

O objetivo do trabalho de Rosas (2018) foi avaliar os efeitos de uma Sequência Didática através da resolução de questões de Análise Combinatória, a fim de contribuir com o ensino e aprendizagem deste conteúdo. Para tanto, o autor apresentou como questão norteadora da pesquisa: “A sequência didática proposta propicia uma participação efetiva e um bom desempenho dos alunos na resolução de questões de Análise Combinatória”? “A sequência oferecida aos alunos desenvolve competências e habilidades para resolverem problemas de Análise Combinatória”?.

Em seu trabalho o autor usou, como metodologia, pressupostos da Engenharia

Didática. Primeiramente fez as análises *a priori* para verificar, através de etapas de sondagem, as ideias que os alunos trazem sobre o tema que foi trabalhado, e após a aplicação da Sequência Didática, diagnosticou se houve aprendizagem significativa no desempenho dos alunos.

O autor realizou seu experimento em um colégio público na cidade de Vigia de Nazaré – PA, localizado no Nordeste Paraense, na região do Salgado, com 32 discentes do 1º ano do Ensino Médio. As atividades foram realizadas entre os meses de maio e junho de 2017.

Na execução das atividades, ele usou um caderno de anotações e câmera de vídeo e gravador de celular para registro das tarefas que serviu para compartilhar as discussões dos alunos durante os trabalhos. Nas fases das análises *a posteriori* confrontou os resultados da aplicação com as observações que fez nas análises *a priori*.

Assim, nas análises dos resultados Rosas (2018), observou-se que os estudantes não conseguiram distinguir problemas de Arranjos, de Combinação e de Permutação, os quais já eram esperado pelo autor, no exame de pré-teste. Então, houve intervenção e aplicação de jogos de dominó combinatório, de carta combinatória e de *pif-paf* combinatório para que os alunos compreendesem e distinguíssem os conceitos e problemas relacionados a esses assuntos.

Rosas (2018) considerou que o uso de Jogos no Ensino de Matemática é um instrumento de grande importância para provocar debates, respeitando as ideias distintas e a capacidade de consubstanciar conclusões, possibilitando vários caminhos para um mesmo resultado. Cabe aos participantes a escolha dos procedimentos.

O autor percebeu que os alunos apresentaram evolução. O raciocínio combinatório foi realizado. O métodos de resoluções foram assimilados e as ideias relacionadas aos assuntos de Análise Combinatória foram experimentadas com atividades de resoluções de questões. O pós-teste teve melhores resultados.

O autor concluiu informando que o bom rendimento dos discentes no pós-teste foi devido à metodologia de sua Sequência Didática que desenvolveu competências, habilidades e promoveu a participação entre os estudantes. Isso lhe ofereceu excelente rendimento e serviu para responder seu problema de pesquisa. Por fim, ele sugere aos docentes do Ensino Fundamental e Médio que prossiga em busca de novos procedimentos metodológicos que identifiquem a dedicação e as

especificidades de cada estudante.

• Fonseca (2015)

Para contribuir com o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória Fonseca (2015), em sua investigação apresentou a questão norteadora da pesquisa: “Quais competências e habilidades uma proposta de ensino que enfatiza a mobilização dos registros de representação semiótica pode trazer para o ensino e a aprendizagem de análise combinatória?”.

A pesquisa acima teve como objetivo geral investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica, em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na Resolução de Problemas. Para tanto, o autor estabeleceu os seguintes objetivos específicos:

- 1 – Verificar a contribuição da coordenação dos registros de representação semiótica para o ensino de Análise Combinatória;
- 2 – Identificar estratégia utilizada na Resolução dos Problemas propostos;
- 3 – Analisar os argumentos apresentados pelos alunos nas atividades desenvolvidas na sequência de ensino a partir de registros dos protocolos de pesquisa.

O autor usou em seu trabalho aplicando em uma escola pública de Ensino Médio, localizada em Aracajú-SE, a Engenharia Didática como metodologia de ensino, sendo composto de 5 sessões. A análise *a priori* foi dividida em duas partes, e ao final da última etapa aplicou um protocolo e através dele analisou os registros de representações semióticas que foram utilizados para o conteúdo matemático.

Na primeira parte da análise, os alunos assistiram ao filme “de malas prontas” para abordar os conteúdos do princípio fundamental da contagem e de fatorial e permutação. Na segunda parte foi assistido o filme “desejos”, que abordou os conteúdos arranjo e combinação. Segundo o autor, os conteúdos arranjo e combinação evidenciaram dificuldades pelos estudantes em elaborar uma situação esquemática ou um diagrama de árvore, embora tenham tido melhores habilidades no princípio fundamental da contagem.

O autor informa ainda que percebeu, nas resoluções propostas, que os alunos visualizaram e realizaram as transformações do objeto matemático, melhorando seu entendimento na fixação dos conteúdos.

Desse modo, o pesquisador concluiu que os resultados obtidos nesta

Sequência Didática confirmaram a hipótese da pesquisa, por meio de avaliações, de protocolos de trabalho e por debates em sala de aula.

• **Conceição (2019)**

Para contribuir com o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, Conceição (2019), seu trabalho de pesquisa teve como objetivo investigar a possibilidade de realizar a sequência de ensino para se inserir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas, utilizando a resolução de situações-problemas como ponto de partida. Para tanto, o autor elaborou a seguinte questão de pesquisa: “Uma sequência didática, destacando a resolução de problemas como modelo introdutório, proporciona condições favoráveis para que sejam internalizados conceitos, levando o aluno desenvolver habilidades triviais para solucionarem as situações problemas de Análise Combinatória?”

Em sua investigação, o pesquisador utilizou a Engenharia Didática como metodologia para aperfeiçoar a habilidade intuitiva e desenvolver o raciocínio combinatório na resolução de problemas em análise combinatória. Na fase de experimentação, ele aplicou a Sequência Didática, no segundo semestre do ano de 2018, em 3 turmas de 2º ano do Ensino Médio do turno matutino de uma escola pública estadual, localizada no município de Ananideua/PA, região metropolitana da grande Belém com 89 estudantes.

Os trabalhos tiveram 11 encontros, onde cada um correspondeu a uma atividade. Fez uso dos jogos de *PIF-PAF* da Análise Combinatória, de cartas da contagem e de dominó combinatório, além de ter aplicado um pré-teste com o objetivo de descobrir se os alunos estavam aptos a resolver problemas que envolvem as habilidades básicas do ensino de Análise Combinatória. A eficácia da Sequência Didática foi testada em um pós-teste.

Nas análises dos resultados, Conceição (2019) percebeu que alguns grupos formados pelos estudantes apresentaram conclusões inválidas ou parcialmente inválidas apresentando dificuldades em determinar o número total de possibilidades, de calcular o fatorial de um número, de identificar arranjo e combinação simples (por não perceberem quando a ordem dos elementos altera ou não altera os agrupamentos), bem como no cálculo de Permutação com Repetição, onde vários grupos não perceberam que as ordens das letras repetidas nas questões não

interferem na formação dos agrupamentos.

Entretanto, no desenvolvimento das atividades, houve melhora significativa na aprendizagem. O autor percebeu ainda que os discentes, em sua grande maioria, começaram a apresentar conclusões validas devido a uma maior interação dos estudantes na realização das atividades.

Conceição (2019) analisou as questões do pós-teste e verificou que o desempenho foi diferente do pré-teste. O autor informa que o percentual médio de acertos chegaram a 65,5% e observou que em todas as questões, o percentual de acertos aumentaram.

Os estudos concluíram que os estudantes apresentaram melhora no desempenho da aprendizagem de Análise Combinatória, considerando o antes e o depois da realização de sua metodologia de ensino. Ele destaca que a aplicação da Sequência Didática alcançou os objetivos propostos e atendeu à questão norteadora de investigação. O autor acredita que seja possível trabalhar outros assuntos da Matemática para além da Análise Combinatória, sempre buscando adaptar a metodologia ao contexto escolar do aluno.

• **Atz (2017)**

O trabalho de Atz (2017) teve como objetivos verificar como o aluno se apropria dos conceitos de Análise Combinatória e como a Resolução de Problemas poderia auxiliar no ensino desse conteúdo no Ensino Fundamental. Para tanto, a estudiosa apresentou, como questão norteadora da pesquisa, a seguinte pergunta: “Como a Resolução de Problemas pode auxiliar alunos de 6º ano a compreender os conceitos de Análise Combinatória?”.

Em seu trabalho, a autora usou a Engenharia Didática como metodologia de ensino, em uma escola particular do município de São Leopoldo – RS. A pesquisa foi realizada com 32 alunos de 10 a 12 anos de idades e teve 50 minutos de duração que correspondeu a cada aula. A aplicação dos trabalhos foi realizada em outubro de 2016. A autora destaca como um dos objetivos propostos para os alunos, ao final da aplicação da sequência didática:

1 - Resolver situações problema que envolvam o raciocínio combinatório, entre tanto:

- O conceito de fatorial de um número;

- O Princípio da Adição;
- O Princípio Fundamental da Multiplicação;
- A Permutações Simples;
- A Permutações com Repetição;
- A Combinação Simples.

Na realização dos trabalhos, as aulas foram gravadas em áudio e os alunos registraram a resolução das atividades em forma de cópia manual. Esta produção escrita, juntamente com as gravações das aulas, serviu de instrumento de coleta de informação para a pesquisa.

Para melhor coerência dos resultados, foram propostas várias atividades envolvendo os assuntos de Análise Combinatória. Segundo a autora, o direcionamento de atividades elaborado para a classe exigiu crescente habilidade de interpretação e análise dos problemas propostos.

Nas análises dos resultados, Atz (2017) verificou que parte da turma demonstravam um olhar apreensivo, por ainda não terem suas dúvidas esclarecidas, em relação aos conteúdos de Análise Combinatória propostos nas atividades. A autora então interveio, incentivou e auxiliou os alunos que não conseguiam avançar na resolução dos problemas, conduziu-os a pensar de outra forma para compreender que há diferentes formas de chegar à mesma resposta.

Em diversos momentos, ela percebeu que os alunos estavam em constante aprendizado, pois estavam aperfeiçoando sua maneira de pensar, amadurecendo suas ideias e fazendo conexões entre conteúdos anteriores e o que era proposto.

Desse modo, a autora concluiu que se deve refletir a respeito do caminho para o qual os alunos estão sendo guiados, para promoverem novas descobertas criativas, na busca de uma aprendizagem própria.

- **Gonçalves (2014)**

No trabalho de Gonçalves (2014) encontramos as seguintes questões problematizadoras da pesquisa: “A metodologia de resolução de problemas facilita o entendimento e a aprendizagem em Análise Combinatória? Como é ensinado esse conteúdo aos nossos alunos? A simples aplicação de fórmulas inibe o desenvolvimento do raciocínio combinatório? Esta aplicação é útil em algum

momento?

O trabalho teve como objetivo mostrar como o Princípio Fundamental da Contagem e as técnicas de Resolução de Problemas, quando trabalhadas de forma planejada e correta, atingem resultados surpreendentes relacionados aos aspectos cognitivos dos alunos, nessa área da Matemática.

Na investigação, a pesquisadora utilizou a engenharia didática como metodologia de ensino. O ambiente da pesquisa se deu na rede particular no Colégio São Paulo, Unidade Teresópolis, localizada no bairro do Alto, na cidade de Teresópolis, estado do Rio de Janeiro, no ano de 2013. Foram entrevistados 87 alunos na faixa etária de 15 a 18 anos divididos em quatro turmas. Na execução dos trabalhos ela utilizou a resolução de problemas e as técnicas do Princípio Fundamental da Contagem. Também foi elaborado uma lista de atividades em forma de exercícios. A autora confrontou as análises *a posteriori* entre os dados recolhidos e a análise *a priori* para a interpretação dos resultados obtidos.

Na fase de experimentação, as turmas foram divididas em grupos de quatro e cinco alunos. Foi proposto para turma três problemas de Análise Combinatória para serem resolvidos. Ela mostrou todas as possibilidades existentes das questões, como uma avaliação diagnóstica. Segue abaixo as questões escolhidas pela autora.

1 - Quantos números de quatro dígitos podemos formar utilizando apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

2 - João e Maria têm quatro figurinhas numeradas de 1 a 4. Eles decidem repartir suas figurinhas, ficando cada um com duas. Por exemplo, Maria poderia ficar com as figurinhas 1 e 4, enquanto João ficaria com as figurinhas 2 e 3. De quantos modos eles podem repartir as figurinhas entre si, dessa forma?

3 - Para a formação de um comitê, são escolhidas três pessoas entre André, Bernardo, Carlos e Daniel, para que ocupem os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Sabendo que uma mesma pessoa não pode ocupar mais de um cargo diferente, quantos comitês distintos podem ser formados?

Na fase de análise *a priori* a autora aplicou e analisou quatro questões que seguem abaixo:

1) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em três times com 5 jogadores?

2) Quantos são os números com cinco dígitos no qual o algarismo 2 figura

3) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre oito

homens e cinco mulheres. De quantos modos distintos podemos montar essa comissão?

4) De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de quatro pessoas cada?

Nas análises dos resultados, Gonçalves (2014) analisou em seu diagnóstico que os alunos ficaram meio confusos e não sabiam como começar a resolver as questões. Neste sentido, a autora fez intervenção mostrando uma das possibilidades para os estudantes entenderem melhor o que estava sendo pedido nas questões. A autora percebeu ainda que houve erro relacionado à combinação simples, pois os alunos não perceberam que a ordem de escolha dos agrupamentos não importa.

Após a avaliação diagnóstica, percebeu-se que os estudantes desenvolveram um raciocínio combinatório, e que os problemas de contagem podem ser resolvidos analisando todas as possibilidades e fazendo a contagem um a um dos elementos.

Ao fim desta etapa foram desenvolvidos os conteúdos relativos à Análise Combinatória. Na fase de análises a posteriori Gonçalves (2014) verificou que as questões foram resolvidas através do Princípio Multiplicativo (PFC). Esse método traz mais certeza quanto à resolução das questões.

Gonçalves (2014) concluiu que durante a aplicação das atividades da pesquisa de campo, quanto mais facilidade e domínio matemático o aluno apresentar, mais tranquilidade ele tem para resolver problemas de análise combinatória empregando apenas conhecimentos do PFC. A pesquisadora afirma que essa metodologia de ensino pode trazer aos alunos um desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático melhor, informando que a Resolução de Problemas é um instrumento metodológico que faz o estudante ser capaz de analisar, criticar e defender suas ideias.

• Lima (2011)

O trabalho de Lima (2011) tem como questão norteadora da pesquisa a seguinte: “Que contribuições podem oferecer um conjunto de atividades visando o ensino da análise combinatória e o desenvolvimento do raciocínio combinatório do estudante e suas habilidades para lidar com problemas?”.

A pesquisa tem como objetivo investigar as contribuições que um conjunto de atividades, para o ensino da Análise Combinatória, oferece ao desenvolvimento do raciocínio combinatório do estudante e o despertar de possíveis habilidades para lidar

com problemas.

O autor considera também os seguintes objetivos específicos a serem alcançados como:

- Elaborar e aplicar um conjunto de atividades sobre Análise Combinatória, para que o estudante experimente metodologias como investigações matemáticas e Resolução de Problemas;
- Incentivar o estudante a ler, interpretar e resolver diversas situações problema;
- Proporcionar um ambiente em que o aluno possa construir enunciados de problemas, gerando autonomia nesses indivíduos para lidar com a Análise Combinatória.

O referencial teórico e metodológico foi constituído segundo o autor, pela teoria dos registros de representação semiótica, propostas por Raymond Duval e pela teoria de Resolução de Problemas de George Polya.

Em seu trabalho Lima (2011), usou uma sequência de atividade como metodologia. O estudo foi realizado com estudantes do 2º ano do Ensino Médio durante o mês de agosto de 2010 em uma escola estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizadas em Barbacena, cidade do interior de Minas Gerais. Em seu estudo, a autora fez uma abordagem qualitativa. Ela utilizou como ferramenta de coleta de dados um diário de campo, para registro de cada aula, durante a realização das atividades. A sequência de atividades foi realizada em vinte e três aulas, de 50 minutos cada.

Na primeira aula foi realizada uma Introdutória para verificar o que os alunos conheciam a respeito dos problemas de contagem. Nas outras aulas, a autora desenvolveu atividades que levassem os alunos a refletir e a construir soluções para vários problemas.

Nas análises dos resultados Lima (2011), informou que quando as atividades eram resolvidas, ao final de cada aula, os resultados eram socializados com toda a turma. Os estudantes aproveitavam o momento para entender o que não havia ficado muito claro, durante a aula e socializaram diferentes tipos de registros utilizados para solucionar um mesmo problema.

A autora concluiu que os resultados apresentados evidenciaram a participação dos alunos na construção do próprio conhecimento, à medida que buscavam estratégias para resolver os problemas propostos.

• **Gerdenits (2014)**

O trabalho de Gerdenits (2014) teve como objetivo propor aos professores de Matemática uma sequência de atividades para introduzir de maneira intuitiva e natural a noção de Análise Combinatória, no Ensino Fundamental maior. Inicialmente a autora fez uma descrição dos documentos oficiais e curriculares da secretaria de educação do estado de São Paulo, também efetuou descrição do panorama histórico e fundamentação teórica, para saber a situação de aprendizagem dos alunos do 6º ao 9º ano relacionadas a aprendizagem desse conteúdo.

Na metodologia a autora aplicou três atividades com os alunos do ensino fundamental da escola pública estadual “professor Lauro Sanchez”, localizada na região norte da cidade de Sorocaba – SP. As atividades foram aplicadas em 2013, com 71 alunos em 3 turmas A, B e C, com 5 problemas e duração de 50 minutos para cada uma.

Essas atividades segundo a autora, serviram para diagnosticar as dificuldades e defasagem dos estudantes em Análise Combinatória, bem como para nortear o aprimoramento e análises dessas atividades. Em 2014 a autora retoma as atividades com alunos do 6º ao 9º ano e depois aplicou outras atividades sobre o raciocínio combinatório nas mesmas turmas para detectar as dificuldades e conceitos não aprendidos.

Por fim, a autora desenvolveu materiais manipuláveis com folhas de várias cores de EVA, cola quente e velcro utilizados para costura, com o objetivo de auxiliar no entendimento de conceitos básicos de Análise Combinatória no Ensino Fundamental.

Nas análises dos resultados Gerdenits (2014), percebeu que os alunos tiveram muita dificuldade na interpretação e na resolução de problemas referentes ao arranjo e a combinação simples, por não perceberem que em arranjo, (a ordem altera os agrupamentos), já na combinação, (a ordem dos elementos não diferem os agrupamentos). Quanto aos estudantes que participaram da primeira tarefa 30% a 43% deixaram em branco. Com exceção da segunda atividade, os erros dos alunos atingiram 45% no primeiro problema, 22,5% no terceiro, 35% no quarto e 31% no quinto.

A autora afirma ainda que devido as dificuldades apresentadas pelos estudantes na primeira atividade, foram proposto duas outras atividades, nas quais os resultados foram melhores. Com base neste estudo e diante das dificuldades dos

estudantes em lidar com resolução de problemas de Análise Combinatória com o auxílio de conceitos básicos, a autora aplicou atividades com materiais manipuláveis relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória com 21 alunos do 7º ao 8º ano, conforme Figuras 2 a 7.

Figura 2 – Boneco de E.V.A.



Fonte: Gerdenits (2014)

Figura 3 – Uma das possibilidades de vestimenta – M.



Fonte: Gerdenits (2014)

Figura 4 – Boneca de E.V.A.



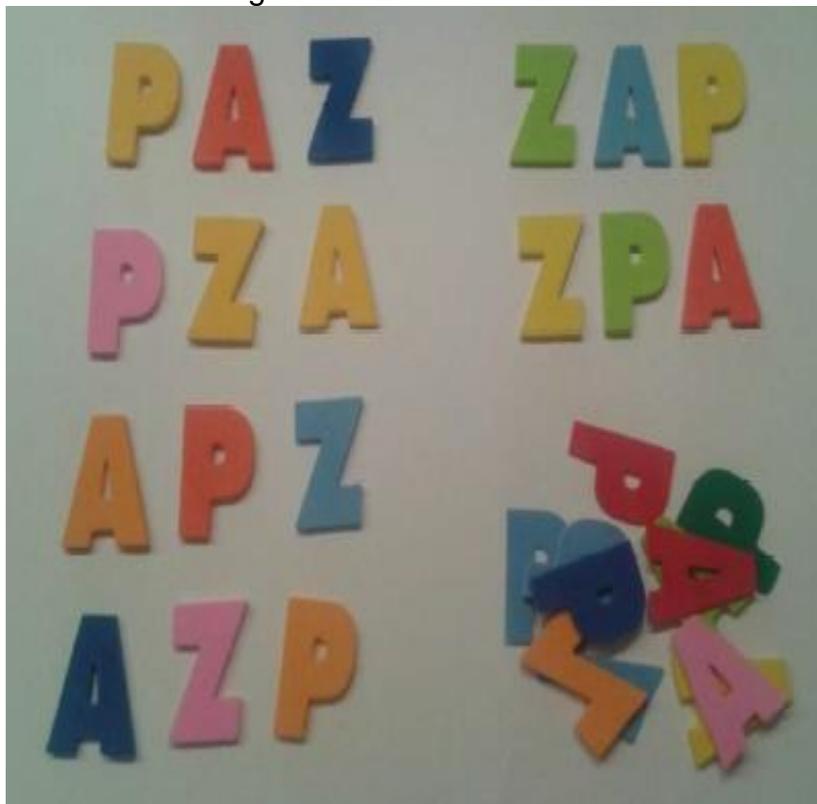
Fonte: Gerdenits (2014)

Figura 5 – Uma das possibilidades de vestimenta – F.



Fonte: Gerdenits (2014)

Figura 6 – Letras em E.V.A.



Fonte: Gerdenits (2014)

Figura 7 – Números em E.V.A



Fonte: Gerdenits (2014)

Com atividades em E.V.A, a autora constatou que os alunos tiveram mais facilidade em organizar as estratégias para resolver problemas de contagem. Melhorando de forma significativa seu aprendizado.

A autora ressalta que grande parte dos alunos e professores da escola básica apresentam dificuldade no conteúdo de Análise Combinatória, pois a abordagem desse conteúdo usando somente definições e fórmulas, acaba transformando o ensino num trabalho mecânico e deixa lacunas na aprendizagem dos estudantes.

Assim, a autora concluiu que outras metodologias como os materiais manipuláveis trabalhados na pesquisa, permitem que o aluno construa seu aprendizado. A pesquisadora recomenda que ocorra essa abordagem desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

- **Pinheiro (2015)**

Na pesquisa de Pinheiro (2015), encontramos a questão norteadora que questiona: “Que características de inserção dos saberes da análise combinatória nos livros didáticos podem ser identificadas no período de 1895 – 2009?”. Aqui tem como objetivo geral investigar as organizações matemáticas e didáticas da Análise

Combinatória, por meio de uma análise dos livros didáticos, utilizados nas escolas brasileiras, no período entre 1895 – 2009. Para isso, o autor considerou dois objetivos específicos a serem alcançados que são:

- 1 – Identificar no Percurso histórico dos livros didáticos de matemática, no período entre 1895 a 2009, os saberes da análise combinatória;
- 2 – Analisar as organizações praxeológicas nos livros didáticos entre o período de 1895 a 2009.

A metodologia usada por Pinheiro (2015) examinou vários aspectos didáticos e matemáticos produzidos em 7 livros que transitaram nas instituições educativas brasileiras, no período em questão. Ele também realizou um estudo bibliográfico e analisou informações obtidas na pesquisa.

Segundo o pesquisador, a produção dos dados para este trabalho consta da junção de livros escolares que abordam os conhecimentos, em Análise Combinatória, com enfoque histórico do Ensino de Matemática nas escolas brasileiras.

Para tanto, realizou estudos de vários autores como Valente (2007 e 2011), Lorenz e Vechia (2004), “Euclides Roxo, Constituição da Educação Matemática do Brasil” e Dassie (2008), além de ter visitado ambientes de livros usados, de acervos bibliográficos públicos, particulares e universidades, entre outros.

Pinheiro (2015) observou que, ao longo de sua investigação, presenciou produções científicas com grandes influências de renovações educacionais que geraram modificações, no modo de olhar e de ministrar a Matemática nas instituições de ensino no Brasil. O autor afirma ainda que nos anos de 1930 até final de 1960, o ensino de Arranjos e Combinação Simples era realizado através do uso de fórmulas.

Entretanto, as resoluções dos exercícios desses conteúdos nos livros, segundo o autor, também eram feitas apenas com o uso de fórmulas. O autor ainda destaca que com o Movimento da Matemática Moderna passou a usar novas técnicas de contagem na teoria dos conjuntos e nas ideias de funções. Este procedimento ofereceu, ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, uma base mais sólida.

As ideias práticas/teóricas identificadas nos livros entre 1900 a 1960, para atividades que abrangeram os Arranjos e Permutação Simples, eram compostas por processo de contagem direta. Os livros do período compreendido entre 1960 a 1980 eram constituídos principalmente pelo princípio multiplicativo e pelas ideias de funções injetoras, sobrejetora e bijetoras. Já de 1980 a 2009 as ideias eram compostas pelo

princípio multiplicativo e depois pela aplicação de fórmulas, para as mesmas atividades desse intervalo de tempo.

Pinheiro (2015) concluiu que os livros atuais ainda não conseguem apresentar uma direção com metodologia que assegurem aos educandos a resposta, para assunto circundado pela Permutação com Elementos Repetidos e; em particular, a capacidade de empregar as técnicas de uso nas atividades.

Nesse sentido o autor reforça que no conteúdo dos livros didáticos predominam a permanência da memorização do uso de fórmulas, no pensamento combinatório. Isso pode ser motivo pelo qual as questões de contagem apresentam dificuldades, para os estudantes na hora da resolução. Para o autor são necessário trabalhos que incluam o momento didático técnico, o tempo exploratório e a teoria em sintonia, para empregar uma metodologia de resolução de problema com um pensamento combinatório mais sólido para os alunos.

- **Martins (2018)**

Em Martins (2018) encontramos uma pesquisa com o tema: “Ensino de Análise Combinatória: Um Estudo das Representações de Professores de Matemática do Ensino Médio Público de São Mateus – ES”. Ela tem como objetivo geral analisar as representações dos professores de Matemática, com relação a Análise Combinatória e suas repercussões na prática pedagógica. O autor considera dois objetivos específicos a serem alcançados:

- 1 - Considerar fatores que direta ou indiretamente influenciam o trabalho docente relativo a Análise Combinatória;
- 2 - Reconhecer as possibilidades pedagógicas do ensino de Análise Combinatória.

Martins (2018) aponta a questão norteadora da pesquisa que questiona: “Quais são as representações do professor de Matemática sobre Combinatória e como elas repercutem na sua prática pedagógica”?

Na metodologia da pesquisa, o autor fez uma investigação com vinte e nove professores de turmas do Ensino Médio, nas escolas estaduais de São Mateus – ES em 2017. Para produção dos dados, foi utilizado, como ferramenta de coleta, entrevistas e questionários *on-line*, enviados por e-mail, por meio do dispositivo do *Google Drive* disponível na internet.

Nas análises dos resultados, Martins (2018) destaca na pesquisa deficiências

na formação dos professores da Educação Básica a Graduação. A maioria dos docentes considera que a Análise Combinatória é um dos conteúdos mais difíceis de ensinar no Ensino Médio e afirmam que esses assuntos não foram devidamente ensinados na sua formação inicial. Neste sentido, o autor conclui que os docentes precisam de formação continuada e de alternativas didáticas para ensinar esse tema.

3.2.1 Análise Geral da Revisão de Literatura

Esta revisão de estudos foi muito importante para a fundamentação da nossa pesquisa, permitindo sua continuidade. Ela nos amparou em alternativas metodológicas com contribuições e experiências de ensino que serviram de base para a construção da nossa Sequência Didática. Assim, enfatizamos a importância de identificarmos e analisarmos as várias contribuições de trabalhos que utilizam jogos e materiais manipuláveis, entre outros, como metodologia de ensino.

Os trabalhos analisados nos proporcionaram perceber algumas das principais dificuldades que os estudantes podem apresentar durante nosso experimento, tais como: determinar o número de elementos em cada etapa; distinguir os problemas entre arranjo, permutação e combinação simples, por não perceberem quando a ordem altera ou não altera os agrupamentos, além da dificuldade de compreensão e interpretação do enunciado dos problemas.

Este estudo nos auxiliou no planejamento, nas tomadas de decisão e na preparação de uma proposta de atividades que venham valorizar a aprendizagem significativa, promovendo interatividade e a autonomia nos estudantes na construção de saberes individuais e coletivo.

A seguir, descrevemos as dificuldades e os resultados que cada trabalho indicou, em nossa revisão de estudo, será também destacado os aspectos mais relevantes como as contribuições para a nossa temática, bem como os assuntos que são pré-requisitos para o estudo de Permutação.

• **Ambrozi (2017)**

Elaborou Ambrozi (2017), um conjunto de atividade que chamou de Dinâmica Combinatória, composta por sete etapas envolvendo os jogos: *Yellow Out*, *Twibik*, Pulo do Sapo, Jogo do Quadrado, Jogo Senha, Jogo Bicolorido e Jogo Trilha

Combinatória. Após a realização dos jogos aplicou atividades nas quais percebeu nos estudantes a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, por meio da construção do conjunto de jogadas que segundo o autor, está associada à árvore de possibilidades.

Alguns alunos não assimilaram totalmente o princípio da contagem e apresentaram dificuldade na interpretação da questão. O Jogo Senha auxiliou os alunos a associarem os conceitos de Permutações e de Arranjos Simples, sem ainda conhecê-los formalmente. Segundo o autor, mesmo com dificuldades de interpretação e de compreensão de alguns significados, os alunos, em sua maioria, conseguiram responder adequadamente as perguntas que introduziram o conceito de combinação. Ressaltou que a utilização de jogos, como suporte de aprendizagem, em sala de aula é um modo eficaz, pois apresenta resultados significativos para a aprendizagem.

- **Rosas (2018)**

Rosas (2018) observou que alguns estudantes não conseguiram identificar o número de elementos para cada etapa nas atividades. Eles tiveram dificuldades em distinguir problemas de Arranjos, Combinação e Permutação, por não perceberem se a ordem altera ou não os agrupamentos. Preencheram os quadros contendo informações das atividades. Aplicou jogos de dominó combinatório, de carta combinatória e *Pif-Paf* da combinatória, para superação dessas dificuldades. Sugeriu a resolução de mais exercícios de fixação, para despertar o cognitivo dos alunos, fazendo com que o conhecimento matemático dos pesquisados elevassem ainda mais o intelecto deles.

- **Fonseca (2015)**

Fonseca (2015) destaca que os estudantes apresentaram dificuldades nos assuntos de arranjo e combinação simples, embora tenham tido uma maior habilidade no princípio fundamental da contagem. Para superar essas dificuldades os alunos assistiram ao filme, “de malas prontas”, para abordar os conteúdos de princípio fundamental da contagem, de fatorial e de permutação, além do filme “desejos” que abordou os conteúdos de arranjo e combinação. O autor considera essa pesquisa como uma ferramenta para auxiliar alunos e docentes no Ensino de Matemática.

- **Conceição (2019)**

Este pesquisador percebeu em seu trabalho que alguns grupos de estudantes apresentaram conclusões inválidas ou parcialmente inválidas. Eles tiveram dificuldades em determinar o número total das possibilidades, dos cálculos dos fatorial de um número, dos arranjo e combinação simples, por não perceberem que a ordem dos elementos pode alterar ou não os agrupamentos. Também houveram dificuldades em Permutação com Repetição, onde vários grupos não perceberam que a ordem das letras repetidas nas questões não interferem no resultado da formação dos agrupamentos.

O autor ressaltou ainda que as questões 9 e 10 do pós-teste, foram consideradas mais difíceis para os alunos, por apresentarem formação de grupamentos através de uma combinação simples. Para corrigir essas dificuldades, utilizaram-se os jogos de *Pif Paf* da Análise Combinatória, as Cartas da Permutação e o Dominó Combinatório. O autor acredita que é possível trabalhar outros assuntos da matemática, para além da Análise Combinatória, sempre buscando adaptar a metodologia ao contexto escolar do aluno.

- **Atz (2017)**

A pesquisadora percebeu que no momento da realização de algumas atividades vários alunos não compreenderam o enunciado da questão, sendo que a principal dificuldade deles era extrair do problema as informações necessárias, para resolvê-la. Uma outra parte dos alunos, ainda, demonstravam dificuldade com a eliminação das repetições referente ao assunto de combinação simples. A autora então interveio por meio de auxílio e incentivo, aos alunos que não conseguiam avançar na resolução dos problemas. Ela instigou-lhes a pensar de outra forma a compreenderem que existem diferentes formas de chegar a uma mesma resposta.

- **Gonçalves (2014)**

Gonçalves (2014), em sua pesquisa, enfatiza o uso do PFC para a aprendizagem dos estudantes. Para isso foi elaborado uma lista de atividades em

forma de exercícios, para o ensino de Análise Combinatória. A pesquisadora, destaca erro relacionado a combinação simples, Pois os alunos não estavam percebendo que a ordem das escolhas dos agrupamentos não importam. Ela observou que quase todos os alunos preferiram o uso do PFC, alegando a não necessidade da memorização de fórmulas. A autora concluiu que a Resolução de Problemas é um instrumento metodológico que faz o estudante ser capaz de analisar, criticar e defender umas ideias.

- **Lima (2011)**

Na pesquisa de Lima (2011) identificou-se dificuldade em alguns estudantes de encontrar solução para questões de Permutação Simples e Permutação com Repetição. A autora destaca erro dos alunos em algumas questões, por não conseguiram usar corretamente a fórmula de permutação com repetição ao resolverem questões proposta. Ela mostrou a fórmula para o cálculo de permutações, com elementos repetidos, auxiliou os alunos frente aos problemas propostos e após tentativas a atividade foi realizada com sucesso.

- **Gerdenits (2014)**

A pesquisa de Gerdenits (2014) analisou que alguns alunos apresentaram muita dificuldade de interpretação ao resolverem problemas referente a arranjo e combinação simples, por não perceberem que em arranjo (a ordem altera os agrupamentos), já na combinação (a ordem dos elementos não difere os agrupamentos). Para superar essas dificuldades e auxiliar no entendimento de conceitos básicos de análise combinatória, no Ensino Fundamental, a autora aplicou atividades com materiais manipuláveis relacionados a esse conteúdo.

- **Pinheiro (2015)**

Afirma Pinheiro (2015) que, nos anos de 1930 e final de 1960, o ensino de Arranjos e Combinação simples e de resoluções dos exercícios desses conteúdos nos

livros didáticos eram realizados por meio do uso de fórmula. De 1960 a 2009 os livros apresentaram ideias compostas pelo princípio multiplicativo e depois pela aplicação de fórmulas. O autor concluiu que os livros atuais ainda não conseguem apresentar uma direção técnica com a metodologia que assegure aos educandos a resposta para o assunto circundado pela Permutação com Elementos Repetidos.

No conteúdo dos livros didáticos, predomina a permanência da memorização do uso de fórmula, motivo pelo qual as questões de contagem apresentam dificuldades para os estudantes resolverem. Para este autor é necessário trabalhos que incluam o momento didático da técnica, do tempo exploratório e do teórico, para empregar uma metodologia de resolução de problema com um pensamento combinatório mais sólido para os alunos.

- **Martins (2018)**

Em sua pesquisa, observou deficiências na formação dos professores, da Educação Básica a Graduação, A maioria dos docentes consideraram que a Análise Combinatória é um dos conteúdos mais difíceis de ser ensinado, no Ensino Médio, e afirmaram que o devido assunto não foi devidamente ensinado em sua formação inicial. O autor concluiu dizendo que os docentes precisam de formação continuada e de alternativas didáticas para ensinar esse tema.

Concluimos afirmando que as pesquisas de um modo geral apresentam ideias semelhantes e convergem em alguns pontos. O primeiro deles é o uso de jogos que auxiliam de uma forma muito positiva os assuntos que são pré-requisitos para o assunto de Permutação, a saber: Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Fatorial, Arranjo e Combinação simples. Outro aspecto relevante sobre o uso de jogos, enfatizado por alguns autores, é que esse recurso didático é um instrumento de grande importância, para provocar debates respeitando as ideias distintas e a capacidade de fazer conclusões, bem como serve de suporte de aprendizagem em sala de aula, para tornar o ensino desses conteúdos interessante, participativo e motivador, apresenta resultados significativos para a aprendizagem.

Através dos estudos percebemos também que os assuntos que os alunos tiveram mais dificuldades estão relacionados a arranjos e combinação simples e permutação com repetição. Os autores identificaram que as principais dificuldades dos estudantes foram em determinar o número de elementos em cada etapa e distinguir

os problemas entre arranjo e combinação simples, por não perceberem se a ordem altera ou não os agrupamentos.

Foi destacado o uso frequente de fórmulas, para resolução das questões, para alguns autores, a memorização dessas fórmulas, provocam dificuldades nos estudantes na resolução de problemas propostos. Outro destaque, em estudos apontados por alguns autores, foram as deficiências na formação dos professores de Educação Básica e que perpassa para a graduação.

Os autores da pesquisa informaram que a maioria dos docentes considerou que a Análise Combinatória é um dos conteúdos mais difíceis de ensinar no Ensino Médio e afirmaram que esses assuntos não foram devidamente ensinados em sua formação inicial. Portanto, professores e estudantes apresentam dificuldades nesse conteúdo.

Entre as sugestões citadas no estudo, temos o uso de jogos e de materiais manipulativos, além da capacitação e formação continuada dos professores para transformar o ensino e aprendizagem de Matemática mais prazerosa, motivadora e significativa.

Pelo exposto, consideramos que essa revisão de literatura está dentro dos critérios das análises prévias da engenharia didática que segundo Carneiro (2005), estão sugeridas por Artigue (1996), na dimensão epistemológica, associada às características do saber. Assim, ajudara em nossa pesquisa a conhecer o público e a perceber dificuldades que os alunos poderão vir a apresentar durante o nosso experimento.

Percebemos também como o conteúdo de análise combinatória vem sendo abordado no contexto atual, em relação ao planejamento escolar e as tendências metodológicas. Isso tudo nos auxiliou nas tomadas de decisões, e na elaboração de uma proposta de atividades que venha valorizar a aprendizagem significativa, promovendo interatividade e autonomia nos estudantes na construção de seus saberes.

Apresentamos a seguir uma consulta diagnóstica realizada com estudantes, com a intenção de produzir informações a respeito do processo de ensino e aprendizagem de Permutação para nossa pesquisa.

3.3 Diagnóstico com Estudantes

As pesquisas desenvolvidas no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará – UEPA passam por uma disciplina denominada de Currículo e Avaliação da Aprendizagem no Ensino da Matemática, onde é desenvolvida a parte procedimental da pesquisa, por meio de uma consulta diagnóstica realizada com alunos e de acordo com o tema específico de cada pesquisa.

Esta consulta diagnóstica está dentro dos critérios das análises prévias da Engenharia Didática que, segundo Carneiro (2005) e sugeridas por Artigue (1996), inclui-se na dimensão cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino. Desse modo, a consulta diagnóstica que aplicamos nos ajudou a conhecer os alunos que irão participar de nossa pesquisa, e nos auxiliou na elaboração das atividades que usaremos em nossa Sequência Didática sobre o assunto de Permutação.

Assim, apresentamos nesta seção os resultados de uma consulta diagnóstica realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Codó-MA sobre o conteúdo de Permutação.

As informações foram produzidas por meio da aplicação de um questionário (ver Apêndices C e D) composto por perguntas com questões fechadas e de múltipla escolha referentes ao perfil sócioeconômico dos estudantes, onde nele pudemos analisar o gênero, a idade, a escolaridade dos responsáveis, os hábitos de estudos e gosto, ou seja, afinidade com a Matemática e a prática pedagógica no ensino de Permutação percebido pelos alunos.

O objetivo desta consulta foi analisarmos, nos estudantes, os aspectos sociais e os didáticos–pedagógicos para identificarmos as dificuldades ao estudarem o conteúdo de Permutação e, com isso, buscarmos informações em relação ao processo de ensino e aprendizagem desse assunto. Além de conhecer o público de nossa pesquisa, na busca de indícios de aprendizagem, montamos uma Sequência Didática que considera as características dos alunos, onde será apresentada mais à frente.

A lista de perguntas foi dividida da seguinte forma: i) Perfil sócioeconômico e estudantil, visando identificar o perfil social dos alunos e a importância da família no auxílio das atividades escolares, para conhecer o público alvo de nossa pesquisa; ii) aspectos didáticos – pedagógicos (currículo, metodologia da aprendizagem e avaliação), para compreendermos como estar sendo desenvolvido o ensino e

aprendizagem deste conteúdo, bem como a percepção dos alunos quanto ao grau de dificuldade em estudar tópicos relacionados aos conteúdos de Permutação, a fim de propor atividades para superar tais dificuldades. A seguir a metodologia de nossa consulta diagnóstica.

3.3.1 Metodologia da Consulta diagnóstica com estudantes

Em nossa investigação, somou-se a disciplina Currículo e Avaliação da Aprendizagem no Ensino da Matemática da Universidade Estadual do Pará – UEPA que foi realizada junto à turma de mestrado no período de 08 de abril a 28 de junho de 2019. Para a conclusão da referida disciplina, foi solicitado aos alunos que fizessem um artigo com temas do Ensino Fundamental e Médio sobre orientações de duas professoras.

Para tanto, foi encaminhado um ofício da coordenação do referido programa aos diretores das escolas para permitir a aplicação, junto aos alunos, de um trabalho de pesquisa cujo objetivo foi analisar os assuntos dos temas de cada estudante do mestrado por meio de atividades da referida disciplina. Foi entregue também um termo de consentimento livre esclarecido e um questionário sócioeconômico para os alunos, bem como uma minuta para os professores das turmas com o objetivo de promover a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

O questionário é um método de coleta de informações. Esse Método segundo Gil (2008) é definido como técnica de indagação, formada por perguntas direcionadas a pessoas com a intenção de conseguir informações sobre um determinado assunto. O autor ressalta ainda que a elaboração de um questionário é baseado em transcrever objetivos da investigação em questões específicas. Quanto as questões respondidas, elas irão oferecer informações solicitadas, para indicar as particularidades da população investigada.

A primeira etapa da pesquisa incluiu a elaboração de um questionário sócioeconômico, contendo 22 questões e um quadro de dificuldades seguidas de um pré-teste contendo 10 questões específicas, sobre Permutação; além de assuntos abordados em Análise Combinatória.

Na segunda etapa ocorreu o contato com a diretora e a equipe pedagógica da escola estadual de Ensino Médio, onde aplicamos os questionários. Essa escola localiza-se no bairro centro no município de Codó - MA. Nesse encontro foi acordado

com a diretora, com a equipe pedagógica e com os professores da escola, a data de aplicação dos instrumentos de pesquisa, tendo em vista a aproximação da Semana Santa e o período avaliativo, pois a equipe não queria que houvesse desistência dos alunos na realização das atividades.

A aplicação dos questionários foi realizada em duas turmas de 3º ano do ensino médio e em cada um dos três turnos de funcionamento da escola (Manhã, tarde e noite), perfazendo uma amostra total de 100 alunos. A utilização dos três turnos justifica-se em função da coincidência da Semana Santa e de um feriado (aniversário da cidade) na terça – feira, 16 de abril de 2019. Nesse período houve uma evazão dos alunos na referida escola, mesmo assim a pesquisa não foi comprometida. Ao entrarmos nas turmas, os alunos foram informados de todo procedimento para a resolução dos questionários. Aos mesmos foi assegurado o anonimato e suas identidades foram preservadas. Exclarecemos que tivemos ajuda dos professores da turma para realização das atividades.

A organização dos dados foi realizada com o auxílio do *Google Drive*, que é um dispositivo prático utilizado para este fim e está disponível na *Internet*. A escolha desse dispositivo deu-se pela facilidade de análise de dados e gráficos que ele possui. Por meio dessa ferramenta, foram analisados e gerados, gráficos, tabelas e dados percentuais dos resultados da pesquisa.

Após a pesquisa de campo, foi feita a tabulação das informações divididas por categorias: socioeconômica, currículo, metodologia e avaliação. Tudo exposto a seguir.

3.3.2 Perfil socioeconômico dos estudantes

Esta seção apresenta o perfil dos estudantes que participaram da pesquisa. Os dados mostram a caracterização dos alunos no que se refere as questões de gênero, idade, escolaridade dos responsáveis, hábitos de estudos e a importância da família no auxílio às atividades escolares dos alunos.

As informações da descrição do perfil sócio econômico dos estudantes investigados nesta pesquisa, com uma amostra de 100 alunos, indicaram que 55% eram do gênero feminino e 45% do gênero masculino, sendo as mulheres predominantes em relação aos homens. Estes estão distribuídos nos três turnos de funcionamento desta escola (manhã, tarde e noite).

Os estudantes com idades entre 16 a 18 anos representam um maior percentual de 77%, pois estão na idade ideal para esta faixa etária, vem seguido dos estudantes com idades entre 19 e 30 anos que representam 23% do total da amostra, esses alunos estão inclusos nas estatísticas de idades avançada para a série, conforme PNAD (2017), cujo levantamento à época, constou a existencia de quase 2 milhões de estudantes com idade avançada.

Quanto ao questionamento: Quem lhe ajuda nas atividades de matemática? Nesta indagação temos como resultado: Prof. Particular 0%, família 15%, ninguém 76%, outros: internet 4%, amigos 3% e vídeo aula 2%. Deste modo, para entender a essa indagações, buscamos relacioná-la com as seguintes questões:

1 - Qual a escolaridade de seu responsável masculino?. Nessa pergunta tivemos como resposta: 36% informaram nível fundamental incompleto, 28% disseram não estudou, 12% fundamental, 20% médio e 4% confirmaram superior.

2 – Qual a escolaridade de seu responsável feminino? Este questionamento teve como resultado: 39% informaram nível fundamental incompleto, 16% disseram não estudou, 14% fundamental, 23% médio e 8% confirmaram superior; 3 – Com que frequência você estuda fora da escola? Os resultados constam no Gráfico 1.

Gráfico 1 - Dedicção ao estudo de matemática fora da escola.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Dos alunos pesquisados 45% disseram que só estudam no período de prova, 22% informaram que estudam somente nos finais de semana, 14% só na véspera de prova, 9% afirmaram que estudam todo dia e 10% disseram que não estudam fora da escola.

Nas respostas dos estudantes observamos que a maioria dos responsáveis

masculino e feminino apresentam escolaridades de ensino fundamental ou nunca estudaram com 64% (masculino) e 55% (feminino) respectivamente. Nessa situação, em que os pais dos estudantes apresentam níveis de escolaridades muito baixa, acabou comprometendo a orientação e o acompanhamento dos alunos em suas atividades escolares, fato comprovado quando cruzamos esta informação com o questionamento: Quem lhe ajuda nas atividades de matemática? Do resultado obtido 76% informaram que ninguém os ensina, é um percentual muito alto e tem influencia direta com a formação dos pais. Estas informações se relacionam com a 3ª indagação, a família deve servir de apoio e sustentação ao educando, para melhor esclarecimento, segue:

Segundo a LDBEN - Art. 2º, a educação, dever da família e do Estado. Trata-se, portanto, de uma responsabilidade comum a estas duas instituições. O ambiente familiar é o primeiro espaço para as crianças e jovens estudarem fora da escola. Para melhor entendimento,

É necessário e urgente ir ao encontro de estratégias que facilitem a participação de famílias pertencentes a classes sócio-económica baixas, [...], porque muitas vezes em casa, não têm amparo, ajuda, auxílio, assistência no estudo e nas tarefas diárias, [...]. A criança não pode aprender sem suficientes horas de sono, espaço para estudar e regras de comportamento (PICANÇO, 2012, p. 44).

Para a autora, há um distanciamento entre escola e família. O diálogo entre as duas instituições é importante para garantir melhores resultados e rendimento escolar para os estudantes, é preciso haver um acompanhamento familiar adequado para garantir condições e horários específicos de estudos para as crianças, adolescentes e jovens.

Portanto, não basta os pais ou responsáveis irem à escola apenas em busca de resultados de notas lançadas em boletins dos alunos. É preciso um acompanhamento mais de perto em todo percurso escolar do estudante, por parte da família e da escola, para que juntos possam oferecer um ensino de qualidade e uma socialização de normas e condutas, a fim de possibilitarem o crescimento social e intelectual do estudante.

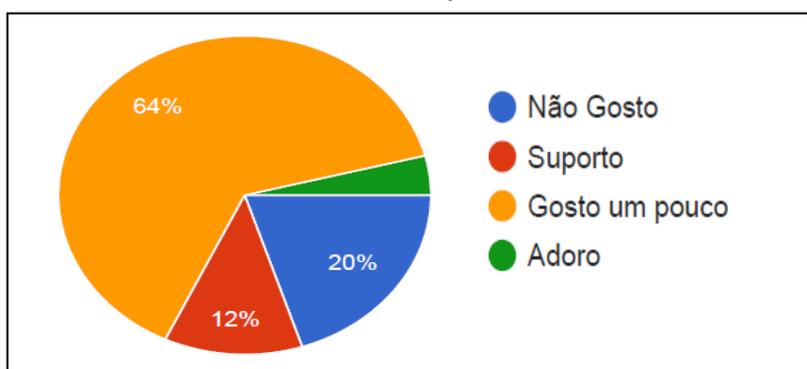
3.3.3 Currículo

Toda experiência de vida adquirida ao longo da trajetória de um indivíduo,

podemos chamar de currículo. “As decisões sobre currículo envolvem diferentes concepções de mundo, de sociedade e, principalmente, diferentes teorias sobre o que é o conhecimento, como é produzido e distribuído, qual o seu papel nos destinos humanos”. (MELLO, 2014, p.1)

Dos resultados encontrados no questionários quando indagamos os alunos se gostavam de Matemática, seguiu a seguinte ordem. Foi constatado que apenas 4% dos alunos gostavam de matemática. Já o percentual dos alunos que não gostavam da materia foi bem maior, deu um total de 20%. Os que gostavam um pouco resultaram em 64% e 12% disseram que suportavam, conforme demonstra o Gráfico 2 .

Gráfico 2 – Gosto pela matemática.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Observa-se que os alunos que não gostam de matemática ou que gostam um pouco, ainda apresentam percentuais alto para esta disciplina. Segundo o trabalho de Reis (2005), muitas pessoas se referem à matemática dizendo, ela é muito difícil, outros falam eu detesto essa disciplina. Para mudar esse quadro é necessário criar alternativas e estratégias de ensino, para acabar com estes mitos que trazem consequências e dificuldades na aprendizagem de matemática.

Ao refletir sobre esse assunto, é importante observarmos que “essas dificuldades vão se agravando ao longo da trajetória escolar e precisam ser trabalhadas para que a Matemática possa favorecer a construção do conhecimento e a formação de um cidadão autônomo, crítico e participativo”. (JESUS, 2016, p.3).

Em relação à indagação: “ Você já estudou permutação?”. Os resultados foram os seguintes: 77% disseram que não e 23% informaram que sim. Só pra lembrar, o assunto de Permutação é abordado dentro de Análise Combinatória no subtema: Probabilidade e Estatística e faz parte das habilidades dos alunos conforme determina

a BNCC. [...] “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2017, p. 548).

Sendo assim, a Análise Combinatória é um conteúdo a ser ministrado no Ensino médio como consta nas Orientações Curriculares. “Os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. [...] O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo” (OCEM, 2006, p. 70-79).

Perguntados se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/série?. Os 100% dos alunos que responderam sim na questão anterior, correspondeu a 23% da amostra informaram que estudaram o assunto Permutação em 2018. A resposta foi unânime porque se tratava de alunos sujeitos da pesquisa que se encontravam no 3º ano do ensino médio e o assunto Permutação é abordado dentro do eixo maior, Análise Combinatória que é ofertado no 2º ano do ensino médio nessa escola.

Embora a idade ideal para cursar o Ensino médio seja entre 15 a 17 anos, há um número grande de jovens e adultos fora da escola ou com idade escolar avançada. Existem “quase 2 milhões de estudantes atrasados e 1,3 milhão fora da escola”, conforme o PNAD (2017).

Para melhor entendimento sobre esse assunto, segundo o INEP (2017) “a taxa de distorção idade-série foi de 28,2% no Ensino Médio e de 18,1% no Ensino Fundamental. A rede pública apresenta taxa de distorção quatro vezes maior do que a rede privada nas duas etapas de ensino”.

Na pergunta: “ O professor de matemática demonstra domínio do conteúdo permutação?”. Responderam sim 66% dos estudantes e 34% disseram que não. Esse percentual embora seja menor, ainda assim, apresenta um índice muito alto em relação aos documentos oficiais que apontam para um ensino de qualidade, com formação continuada de professores. Conforme portal MEC – (Quarta-feira, 19 de dezembro de 2018, 14h03).

Formação de professores será norteada pelas regras da BNCC. [...] a formação inicial e continuada deve ser baseada em três dimensões: conhecimento, prática e engajamento. A dimensão do conhecimento está relacionada ao domínio dos conteúdos. A prática refere-se a saber criar e gerir ambientes de aprendizagem. A terceira dimensão, engajamento, diz

respeito ao comprometimento do professor com a aprendizagem e com a interação com os colegas de trabalho, as famílias e a comunidade escolar.” (PORTAL – MEC, 20018).

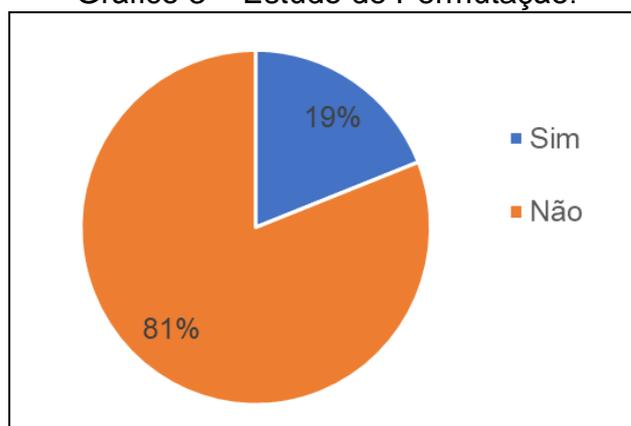
A formação continuada dos docentes é essencial para melhoraria na qualidade do ensino-aprendizagem dos estudantes, como afirmam os documentos oficiais. O Conselho Nacional de Educação (CNE), em seu Capítulo I, Art. 3, recomenda a formação inicial e continuada dos professores e destaca que:

A formação inicial e a formação continuada destinam-se, respectivamente, à preparação e ao desenvolvimento de profissionais para funções de magistério na educação básica em suas etapas – educação infantil, ensino fundamental, ensino médio – e modalidades – educação de jovens e adultos, educação especial, educação profissional e técnica de nível médio, educação escolar indígena, educação do campo, educação escolar quilombola e educação a distância. (BRASIL, 2015, p. 3).

Nesta direção, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) destaca em seu Art. 62 que “A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, [...] § 2º. A formação continuada e a capacitação dos profissionais de magistério poderão utilizar recursos e tecnologias de educação a distância” (BRASIL, 1996, p. 42).

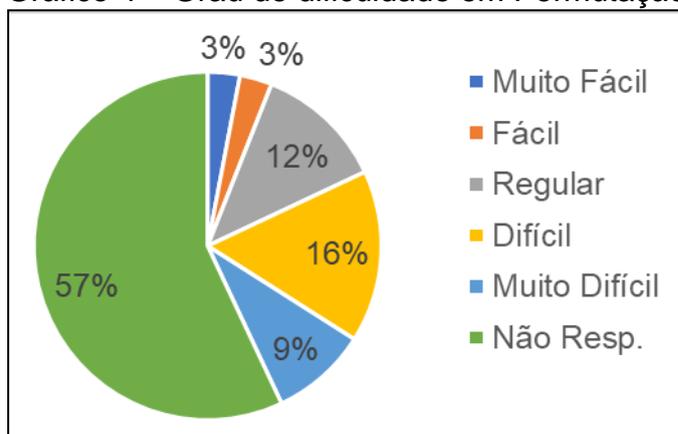
Questionado sobre: “Você lembra de ter estudado Permutação com Repetição?” e “Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?”. As respostas constam nos Gráficos 3 e 4.

Gráfico 3 – Estudo de Permutação.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Gráfico 4 – Grau de dificuldade em Permutação.



Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Segundo Handaya (2016), em análise combinatória, os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em ler e interpretar o enunciado da questão e em decorar um número grande de fórmulas. Desse modo, para compreender as limitações e dificuldades dos alunos, é importante destacar que:

[...] a memorização de fórmulas é o caminho preferido por estes profissionais, agravando ainda mais o raciocínio lógico dos alunos. [...]. É preciso que o aluno construa suas habilidades, propondo um pensar sobre situações reais, cotidianas. É possível buscar novas alternativas para a construção de um ensino em que o aluno seja o centro. (CONCEIÇÃO, 2016, p. 6).

Para esse autor é necessário que o professor encontre novas estratégias de ensino que estimule a valorização do estudante e possibilite ao mesmo, construir seu próprio conhecimento.

3.3.4 Metodologia da Aprendizagem

Segundo Libâneo (1994), é através da junção de tarefas do docente e do estudante que o processo de ensino é caracterizado. “A direção eficaz desse processo depende do trabalho sistematizado do professor que, tanto no planejamento como no desenvolvimento das aulas, conjuga objetivos, conteúdos, métodos e formas organizativas do ensino” (LIBÂNEO, 1994. p. 149).

Da indagação aos alunos. “Você consegue entender as explicações nas aulas de Matemática?”. Obtivemos as seguintes respostas: 7% informaram sempre, 32% disseram quase sempre, 44% às vezes, 15% poucas vezes e apenas 2% confirmaram

nunca. Nesse questionamento os estudantes que disseram quase sempre e às vezes são percentuais muito altos, isso demonstra que eles tiveram dúvidas no entendimento ou até mesmo não conseguiram compreender as explicações das aulas. Esta situação pode ser remetida a outros questionamentos, quando os estudantes foram submetidos às perguntas:

1 - Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo Permutação?. Tivemos como resultado os seguintes: 66% dos estudantes disseram que sim e 44% informaram que não, sendo esse um percentual alto.

2 - Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu professor (a) de matemática mais utiliza para avaliação da aprendizagem?. Nas respostas informadas pelos alunos encontramos: provas/simulados 72%, testes semanais 14%, pesquisas e projetos 0% e outros: aqui informaram trabalhos 14%.

3 - Com base na sua experiência quando estudou permutação preencha o quadro a seguir: Alternativas de respostas para os alunos. Você lembra de ter estudado? **Sim ou Não**. Qual grau de dificuldade que você teve para aprender? **Muito Fácil (MF), Fácil (F), Regular (R), Difícil (D), Muito Difícil (MD) e Não Respondeu (N. Resp)**, vide Quadro 9.

Quadro 9 – Dificuldades em análise combinatória.

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?					
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD	N.Resp.
Princípio Fundamental da Contagem	36%	64%	7%	6%	23%	12%	7%	45%
Definição de fatoriais	52%	48%	4%	8%	30%	13%	6%	39%
Consequências dos Fatoriais	41%	59%	2%	4%	27%	16%	8%	43%
Definição de Arranjos Simples	37%	63%	6%	5%	25%	14%	8%	42%
Cálculo de Arranjos Simples	34%	66%	1%	7%	16%	19%	7%	50%
Definição de Permutação Simples	25%	75%	3%	3%	16%	16%	8%	54%
Cálculo de Permutação Simples	20%	80%	1%	2%	9%	21%	8%	59%
Definição de Permutação com Repetição	21%	79%	2%	3%	11%	17%	8%	59%
Cálculo de Permutação com Repetição	19%	81%	3%	3%	12%	16%	9%	57%
Definição De Permutação Circular	15%	85%	2%	5%	8%	21%	7%	57%
Cálculo de Permutação circular	23%	77%	4%	3%	15%	17%	11%	50%
Distinção entre Arranjos e Permutação	21%	79%	1%	4%	16%	15%	8%	56%

Problemas de PFC	38%	62%	3%	7%	17%	8%	10%	54%
Problemas de arranjos Simples	28%	72%	3%	13%	13%	11%	9%	51%
Problemas de permutação Simples	27%	73%	1%	8%	13%	15%	10%	53%
Problemas de permutação Circular	21%	79%	1%	6%	10%	21%	6%	56%
Problemas de Permutação com Repetição	24%	76%	2%	7%	11%	24%	9%	57%

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

Considerando o percentual e conforme relato dos estudantes, 44% informaram que o professor não demonstrava domínio do conteúdo, sendo este percentual alto para o exercício da docência. Quanto a maneira que o professor utiliza para avaliação da aprendizagem dos discentes, 72% responderam que ele faz uso de provas e simulado, sendo um índice altíssimo, somente, para essas modalidades de avaliação. Comparamos esses fatos com o resultado das respostas dos alunos quando indagados sobre o gostar de matemática, cujas respostas dadas foram 64% gostavam um pouco e 20% disseram que não gostavam. Estes dados podem refletir em alguns dos principais motivos, pelos quais os estudantes não conseguem entender as explicações de matemática.

Para dialogar sobre esses assuntos que são relevantes no processo de ensino e aprendizagem, buscamos alguns autores para comentarem essa temática. Segundo Jesus (2016), para “a efetiva aprendizagem faz-se necessário despertar o interesse do aluno, valorizando o conhecimento espontâneo dos mesmos nos quais estão impregnados de cultura e significados, a partir de suas relações sociais fora do ambiente escolar”.

Para a autora é importante buscar o saber na experiência de vida do aluno adquirido no convívio social. Estes saberes exercem grandes influências em estimular sua vontade para estudar e aprender matemática. “As fontes de dificuldades apresentada pelos alunos não podem ser atribuídas a um único fator. É possível que muitos obstáculos geradores dos erros em Matemática nem mesmo estejam localizados no campo matemático” Bertini (2003 *apud* JESUS, 2016, p.5).

Segundo a autora são inúmeras as causas e obstáculos que dificultam o entendimento dos estudantes. É preciso que o professor esteja atento às diversas variáveis que interferem diretamente no ensino e aprendizagem da matemática.

A autora reitera que no convívio do dia a dia escolar, as aulas de matemáticas,

ainda são regadas de atividades com um número exaustivo de exercício e memorização de fórmulas e conceitos sem significados. Isto gera ainda mais dificuldades no aprendizado dos estudantes.

Neste sentido, Conceição (2016) afirma que alguns professores ainda usam as fórmulas como procedimento de resolução de questões. É necessário que o estudante crie habilidades e desenvolva ideias sobre situações problemas da realidade, na busca de novas opções para edificar o próprio conhecimento.

O autor afirma ainda que:

O maior desafio é o desenvolvimento do raciocínio lógico, desmistificando o ensino matemático. Apesar de ser mais difícil, com o desenvolvimento do raciocínio lógico a partir do princípio da contagem pelos alunos na resolução de problemas da Análise Combinatória, o aluno estará apto para resolver qualquer problema, utilizando apenas a lógica. Assim sendo, dando autonomia e propondo a auto-aprendizagem, é possível que o rendimento melhore e a educação torne-se plena para o alunado: (CONCEIÇÃO, 2016, p. 7).

Para o autor é necessário priorizar o raciocínio lógico tendo um mínimo de uso de fórmulas. Para Ambrozi (2017), o professor deve estimular e apoiar o estudante a desenvolver práticas de pesquisa, em matemática, para explorar e contextualizar situações de experiências do dia a dia que tem muito mais importância do que o uso de fórmulas prontas.

Esse autor considera que o professor deve criar estratégia de motivação nos estudantes, para eles estudarem novas maneiras de olhar e aprender a matemática na vivência do cotidiano. Portanto, o docente precisa estar junto ao educando, dando-lhe suporte na aprendizagem. O autor evidencia a produção de novos procedimentos metodológicos, para estimular o desejo dos estudantes em buscar estratégias que lhes envolvam no processo de aprendizagem.

Neste contexto, Brumano (2014) destaca que no ensino tradicional, muitas vezes, usa-se a memorização como prática de abordagem que causa dificuldades nos estudantes ao aplicarem os saberes alcançados no dia a dia. Isso é um dos motivos para o baixo desempenho e o não interesse dos estudantes, pelos conteúdos abordados. Assim, sabemos que a Análise Combinatória é ministrada com fórmulas e memorização, causando barreiras na aprendizagem dos alunos e dificultando o

entendimento dos conceitos.

Segundo a autora é preciso ir em busca de procedimentos metodológicos que favoreçam uma junção entre os estudantes e a matemática e em particular os tópicos de Permutação e os demais conteúdos de Análise Combinatória. Isto precisa ser feito porque é uma maneira de diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos no ensino e aprendizagem desse conteúdo. Para tanto, a autora indica o uso da modelagem matemática como metodologia capaz de instigar o gosto e o raciocínio lógico dos alunos pela matéria.

A autora afirma ainda que a modelagem matemática serve para criar modelos concretos que torna possível examinar os fenômenos que acontecem no dia a dia. Ela ajuda a explicar, a prever, a fazer juízo, a explorar a apercepção e transforma o estudante em uma pessoa criativa, por ser um recurso metodológico de grande importância.

3.3.5 Avaliação

A averiguação no decorrer do processo de ensino e aprendizagem de acordo com Libâneo (1994) deve se ter um processo metucioso de avaliação, pois é no desenvolvimento dessa atividade que se encontra as informações necessárias para analisar o andamento, sobre a situação de rendimento e desempenho dos estudantes.

Na pergunta: Quais formas de atividades e/ou trabalho que seu professor (a) de matemática mais utiliza para avaliação da aprendizagem?. Nas respostas informadas pelos alunos encontramos: provas/simulados 72%, testes semanais 14%, pesquisas e projetos 0% e outros: aqui informaram trabalhos 14%. Relacionamos esse questionamento com as seguintes indagações:

1 – Você gosta de matemática?. As respostas dadas pelos estudantes foram: 64% disseram gosto um pouco, 20% informaram não gostar, 12% disseram suporte e apenas 4% confirmaram que adoram.

2 – No questionamento para praticar o conteúdo Permutação com Repetição: 65% disseram que o professor apresentava uma lista de exercícios para serem resolvidos, 6% informaram que o docente apresentava jogos envolvendo o assunto, 15% disseram que o professor solicitava que os alunos resolvessem exercícios do livro didático, 10% confirmaram que o professor não propunha questões de fixação e 4% marcaram que o professor solicitava que os alunos procurassem questões sobre o

assunto para resolverem.

3 – Questionados em um teste de verificação da aprendizagem, os resultados constam no Quadro 10.

Quadro 10 – Teste de Verificação da aprendizagem em Permutação.

TESTE	CERTO	ERRADO	NÃO FEZ
1ª Questão	31%	64%	5%
2ª Questão	29%	68%	3%
3ª Questão	45%	54%	1%
4ª Questão	40%	53%	7%
5ª Questão	25%	70%	5%
6ª Questão	15%	83%	2%
7ª Questão	31%	67%	2%
8ª Questão	31%	63%	6%
9ª Questão	35%	62%	3%
Média percentual	31,33%	64,88%	3,77%

Fonte: Pesquisa de campo (2019).

O Quadro 10 informa que houve muita dificuldade nas resoluções e nas respostas das questões de verificação propostas aos alunos. Nas correções que fizemos das questões buscamos observar estratégia para resolvê-las da melhor maneira, por isso identificamos os principais erros praticados. Constatamos que as questões com respostas erradas (E) ou não fez (NF), ocorreram devido aos alunos não conseguirem interpretar corretamente o enunciado da questão, eles não souberam diferenciar o uso de conceito e técnicas de Arranjo, de Combinação e de Permutação, nem entenderam como utilizar as respectivas fórmulas.

Quanto ao percentual de 72% respondido pelos estudantes sobre a forma de aplicação de provas/simulados na avaliação da aprendizagem. Isso refletiu diretamente quando os discentes foram questionados sobre o gosto pela a matemática como constam nas respostas: 64% informaram que gostavam um pouco e 20% disseram não gostar.

Este caso, pode também se relacionar com a pergunta sobre como o professor costumava praticar o conteúdo de permutação que teve como resposta: 65% dos alunos responderam que se usava listas de exercícios como principal atividade e apenas 6% disseram que o docente realizava atividades com jogos. Já no teste de verificação constou um percentual 64.88% em média de erro dos alunos para as

questões respondidas, média 3.77% de questões não respondidas e 31.33% em média de acertos.

Tudo isso pode ser reflexo da maneira como a avaliação da aprendizagem é abordada em sala de aula. Para esclarecer melhor esses questionamentos Gitirana (2003) diz que a prova por se só como instrumento de prática avaliativa não garante saber se o estudante aprendeu ou não o conteúdo. Para essa autora é preciso que o professor reflita nas respostas para identificar possíveis dificuldades dos estudantes, na compreensão de determinados conteúdos e, a partir dos erros, compreender sua causa e origem, para buscar junto com os estudantes, respostas para o problema. Ainda podemos entender que:

Quando uma criança houve de seus responsáveis que a Matemática é difícil ou que não gosta dela, mesmo antes de ingressar a escolarização, apropriase deste sentimento e nos seus primeiros contatos com este conteúdo quando se depara com alguma dificuldade, ela transfere estes significados de repúdio passando acreditar que também não é capaz de aprender assim como seus pais (JESUS, 2016, p. 6).

De acordo com a autora, à medida que as pessoas se consideram incapazes de entender determinado conteúdo, fica mais difícil de trabalhar métodos e convencê-las que essa dificuldade, pode ser superada, principalmente relacionado à matemática.

Segundo Rosas (2018), as aulas expositivas tradicionais com o uso de exemplos e exercícios, é a forma mais utilizada pelos docentes para ministrar os conteúdos de Análise Combinatória. Segundo Ele, esse tipo de abordagem metodológico é criticada por vários autores e precisa ser revista pelos docentes, no sentido de possibilitar ao educando outras estratégias de ensino.

Neste sentido, Rosas (2018) diz que o uso de Jogos no Ensino de Matemática é um instrumento de grande importância, para provocar debates respeitando as ideias distintas e a capacidade de consubstanciar conclusões. O autor afirma que cabe aos participantes a escolha dos procedimentos. Convém ao professor indicar vários caminhos para um mesmo resultado .

A Socialização e a satisfação de propor competição, com o objetivo de restabelecer o raciocínio do conhecimento matemático são atributos importantes adquiridos, através dos jogos e das tarefas lúdicas. Rosas (2018) enfatiza ainda que é necessário que esses procedimentos estejam nos materiais didáticos. Para confirmar o posicionamento do autor sobre os jogos, buscamos o seguinte

entendimento:

Os Jogos São contextos Favoráveis para a análise da construção de conhecimentos nas interações verbais. Eles oferecem um suporte para as interações que são motivadas por uma meta conhecida por ambos os jogadores. Eles desafiam os jogadores a construir conhecimento que tornem mais favoráveis a vitória (CABRAL, 2004, p.87).

Desse modo, os participantes se enfrentam e cada uma das partes elaboram estratégias para vencerem a competição. Com isso, no percurso da disputa constroem seu próprios saberes.

3.3.6 Análise Global do Diagnóstico com estudantes

Foi realizado um cruzamento das informações obtidas do referido questionário com as ideias de alguns autores que já pesquisaram a temática; e também contrapomos com os documentos oficiais, sobre as categorias socioeconômico, currículos, metodologia e avaliação.

No levantamento de informações da pesquisa foi constatado que os estudantes apresentaram uma acentuada dificuldade na aprendizagem do conteúdo de Permutação, assim como no ler e interpretar corretamente o enunciado da questão, diferenciar os conceitos e o uso das técnicas de Arranjo, Combinação e Permutação, bem como utilizar suas respectivas fórmulas.

De acordo com as análises das respostas dos alunos foi constatado o uso frequente de lista de exercícios, provas e simulados, entre outras metodologia usado pelo professor. Este tipo de método ditos tradicionais desmotiva causando desinteresse e não estimula o estudante a aprender. Os alunos com maiores déficit na aprendizagem e baixo rendimento escolar são aqueles que apresentam dificuldade na matemática; e como consequência acabam por não gostar da disciplina.

Neste estudo diagnóstico buscamos dialogar com vários autores que orientam novas metodologias como uso de jogos, entre outros. Esses novos métodos de ensino podem ser aprendidos através da formação continuada de professores visando um ensino de qualidade, significativo e motivador, para despertar o interesse dos estudantes pela matemática.

As informações obtidas neste trabalho foram importantes, pois através das análises a respeito das dificuldades de ensino e aprendizagem, conhecemos a maneira como o professor avalia os conteúdos de matemática, articulados com as

categorias sócio económico, metodologia e no processo de avaliação.

Esta pesquisa nos mostrou que são inúmeros os fatores que contribuem para a aprendizagem dos estudantes. É importante que o professor, como mediador do processo de ensino e aprendizagem, fique sempre atento na busca de alternativas para melhorar o índice de aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Assim, acreditamos que este trabalho de pesquisa irá contribuir com alunos e professores no ensino e aprendizagem da matemática e; em particular, no ensino e aprendizagem de Permutação. Acreditamos que novas pesquisas sobre as categorias: socioeconômica, metodologia e avaliação podem ser desenvolvidas em análise combinatória, em especial no tópico de Permutação. Pode ser utilizado jogos como atividade lúdica e educativa, como também a modelagem matemática, a etnomatemática, entre outros, como instrumento de fixação da aprendizagem deste conteúdo pelos alunos.

Após o diagnóstico com os estudantes apresentamos a seguir, os aspectos didáticos sobre permutação.

3.4 Aspectos Didáticos sobre Permutação

Neste capítulo, descreveremos sobre os assuntos de Permutação Simples, Permutação com Repetição e Permutação Circular que são estudados no ensino médio, em Análise Combinatória. Aqui discorreremos sobre os conceitos e demonstração destes assuntos que serão usados, em nossa pesquisa, dentro da sequência didática sobre Permutação, além das concepções de alguns autores que utilizaremos em nossa pesquisa.

O principal objetivo da análise combinatória, de acordo com Rosas (2018) é determinar de quantas maneiras uma tomada de decisão pode ser feita ou qual é a quantidade de elementos de um determinado conjunto, tendo esses elementos, pelo menos uma característica em comum.

Vários pesquisadores se dedicaram em trabalhos que envolve a Análise Combinatória que ao longo da história despertou interesse, em pessoas que praticavam diversos jogos de azar, querendo descobrir nas partidas que faziam, as possibilidades de vencer. Entre esses estudiosos se destacam: O matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

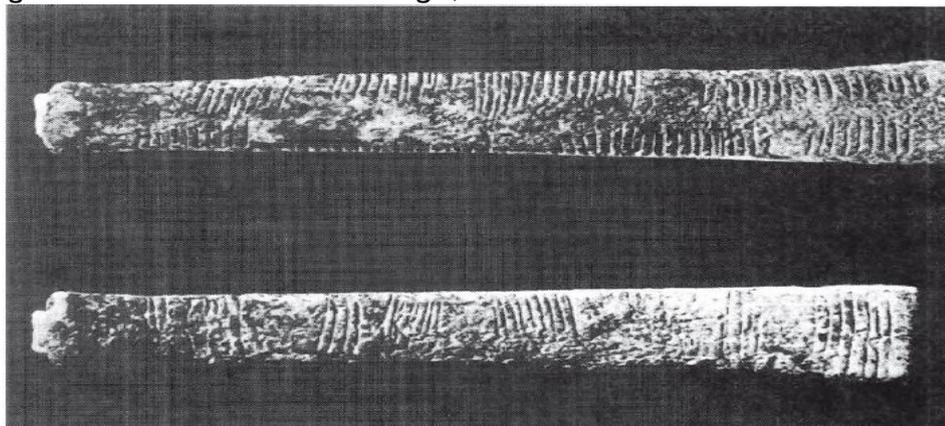
Esses estudos favoreceram o desenvolvimento dos trabalhos em Probabilidade, no Binômio de Newton e na Estatística. Além de problemas de contagem que fazem parte do dia a dia das pessoas.

A necessidade do homem em contar teve seu desenvolvimento antes dos escritos históricos. Para Rosas (2018), esta necessidade surgiu antes mesmo dos números, tendo evidências de que o processo de contagem teve início aproximadamente a 9000 anos a.C. Esse autor afirma que o homem, desde o começo da civilização humana, vem tentando encontrar diferentes maneiras para contar, primeiro com objetos, depois números, algoritmos, fórmulas, teoremas e principalmente com a lógica aplicada.

É provável que o modo mais antigo de contar, segundo Eves (2011) tenha se baseado em registro simples, usando o princípio de correspondência biunívoca, ou seja, para contar a quantidade de carneiros, associava-se cada um deles, a uma pedra, ou a um dedo ou a riscos no barro, também era marcado em talhas num pedaço de madeira ou fazendo nós numa corda.

Com o passar dos tempos foi desenvolvido arranjos de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. Depois, com o desenvolvimento da escrita, foram surgindo símbolos para representar a quantidade de objetos. Veja a Figura 8.

Figura 8 – Vista do osso *Ishango*, com mais de 8000 anos de idade.



Fonte: Eves (2011, p. 26).

Segundo esse autor, o processo de contar teve de ser sistematizado a partir da necessidade de efetuar contagens com um número de elemento muito grande que até então não eram resolvidos, por apresentarem quantidades enormes. Assim, houve a necessidade de outro método de contagem, por meio da noção de agrupamentos de

objetos de um conjunto.

Dessa forma Gerdenits (2014), destaca que:

[...] a procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da matemática e é a forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (MORGADO, 1991, p. 17 *apud* GERDENITS, 2014, p. 61).

Neste sentido, para Mendes (2014, p.11), a análise combinatória é uma ampliação dessa necessidade que estabelece conceitos e técnicas que nos possibilitam a contagem, em diferentes situações.

Como parte da matemática, a Análise Combinatória permite resolver problemas em que é necessário “escolher”, “arrumar”, e principalmente “contar” os objetos de um conjunto que segundo o autor “é uma importante ferramenta que o cidadão, hoje inserido no mundo das informações e de novas tecnologias”, tem a disposição para resolver problemas reais.

Sendo assim Rosas (2018) afirma que podemos efetuar contagem com métodos eficientes, quando aprendemos boas técnicas, principalmente em situações em que a quantidade de elementos que vamos contar sejam muito grande.

A análise combinatória é um componente da matemática que visa desenvolver técnicas que possibilitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo que esses elementos, ficam agrupados e formados sob certas condições, mas fica desnecessária a existência dessas técnicas, “se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase que impossível, sem o uso de métodos especiais” (HAZZAN, 1977, p.1).

3.4.1 Permutação Simples

A seguir, veremos as Permutações Simples como aplicação imediata do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Nesse principio os elementos formarão agrupamentos que são diferentes um do outro devido a ordem, isto é, a diferença entre eles é feita pela mudança de posição dos elementos.

Segundo Dante (2016, p. 206), permutar é o mesmo que trocar. O autor afirma

que “intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, isso é, trocar os objetos de posição”. Na permutação com elementos diferentes, no problema envolvido eles trocam de posição, montando agrupamentos diferentes. Vejamos o exemplo a seguir:

Os alunos **Beatriz (B)**, **Carlos (C)** e **Pedro (P)** querem tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado. De quantas formas distintas eles podem se distribuir nesta foto?

Fazendo uma listagem organizada, teremos as possíveis distribuição ou agrupamentos dos alunos na foto.

BCP CBP PBC
BPC CPB PCB

Lembrem-se: as disposições mudaram de configuração apenas pela troca de posição dos alunos na foto que é uma das características das permutações. Pelo P.F.C., teremos:

1ª posição na foto	2ª posição na foto	3ª posição na foto	Total de possibilidades
3 possibilidades	2 possibilidades (já foi utilizada uma pessoa)	1 possibilidades (já foram utilizadas duas pessoas)	3 . 2 . 1 = 6

Cada forma de dispor os alunos lado a lado corresponde a uma permutação das 3 pessoas, uma vez que a sequência é formada por todos os alunos. O número de posições possíveis é, portanto, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Para lezzi *et al.* (2016, p. 236), quando dado **n** elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por **n** elementos.

Cálculo do número de permutações

Sejam **n** elementos distintos e P_n o número de permutações possíveis desse **n** elementos.

Vamos contar o número de sequências formadas por **n** elementos:

- Para escolher o primeiro elemento da sequência temos n possibilidades.
- Para escolher o segundo elemento da sequência, uma vez definida a primeira posição, há $(n - 1)$ possibilidades.
- Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $(n - 2)$ maneiras.
- Escolhidos os $(n - 1)$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única. Assim, pelo PFC:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ isto é, } P_n = n!$$

Segundo Rosas (2018), a permutação simples de n elementos é uma técnica usada em Análise Combinatória, para determinar as possibilidades de formação de uma fila ou sequência, sem que haja repetição de elementos, sendo que todos os elementos são utilizados na questão.

Para Hazzan (1977, p.15), seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e identificamos por P_m o número de permutações dos m elementos de M .

Temos:

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (m - 1)]$$

Logo,

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular, se $m = 1$, podemos perceber que $P_1 = 1$

3.4.2. Permutação com Repetição

Os Agrupamentos Simples (Permutação), são caracterizados com a palavra “simples” por não haver elementos repetidos. Segundo Conceição (2019), quando formamos agrupamentos em que uma certa quantidade de elementos se repete mais de uma vez e trocando de posição, chamamos estes agrupamentos de permutação com repetição. Vale ressaltar que todos os elementos em questão devem ser

utilizados nos agrupamentos.

Para Dante (2016, p. 209), o número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

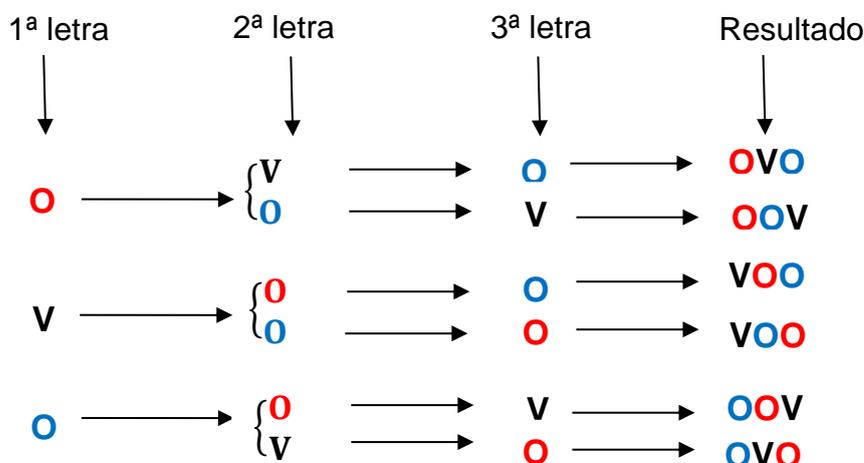
$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(representam o número de vezes que certo} \\ \text{elemento se repete)} \end{array}$$

Considere o exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra **OVO**?

Resolução:

Se os **O's** fossem diferentes. Identificando o primeiro "**O**" com a cor vermelha, e o segundo com a cor azul, teríamos as letras: **OV** e dessa forma, não teríamos mais elementos repetidos. Com a nova palavra podemos formar os seguintes anagramas, conforme árvore das possibilidades a seguir:



O total de anagramas seria $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ anagramas diferentes. Mas as permutações entre os dois **O's**, não formarão novo anagrama. Para corrigir as repetições em excesso, devemos efetuar a divisão do resultado encontrado pela quantidade de permutações dos elementos repetidos.

Quando permutamos as letras **O's** entre si, em excesso, multiplicamos o resultado por $2 \cdot 1 = 2!$, logo devemos tomar o resultado dividido por $2!$. Assim, a

quantidade de anagramas da palavra **OVO** é igual a $\frac{6}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$

Neste sentido Mendes (2014) considera que as permutações com elementos

repetidos, são vistas como aplicações de permutações simples. Para tanto, basta fazer a permutação de todos os elementos como se não tivesse repetições e em seguida dividir o resultado pelas permutações dos elementos repetidos.

Vejam o exemplo a seguir:

Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os **A's** fossem diferentes e os **T's** também, teríamos as letras **B, A₁, A₂, A₃, T₁, T₂** e o total de anagramas seria $P_6 = 6!$

Mas, as permutações entre os 3 **A's** produzirão o mesmo anagrama, ou seja, não formarão agrupamentos diferentes. Então precisamos dividir P_6 por P_3 . O mesmo ocorre com os dois **T's**: precisamos dividir também P_6 por P_2 . Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$$

Vale ressaltar que denominamos de **anagrama**, todo agrupamento formado pela troca das letras de uma palavra, com ou sem significado na linguagem comum

Permutação com repetição, de acordo com Rosas (2018) é a quantidade de permutações com n elementos em que um deles aparece se repetindo “**a**” vezes, outro “**b**” vezes, outro “**c**” vezes e assim por diante, com $\mathbf{a + b + c = n}$.

De forma geral, em Hazzan (1977, p. 35), encontramos:

1º CASO

Considere que n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 , e o restante são todos distintos entre si e distintos de a_1 .

Indiquemos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nessas condições e calculemos esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma n -úpla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos

distintos.

$$\underbrace{(_ _ _ \dots _)}_{n \text{ elementos}}$$

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação vamos escolher $n - n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1 .

Existem $\binom{n}{n - n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n - n_1)$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ elementos podem ser permutados.

Logo, existem ao todo $\binom{n}{n - n_1} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$ formas de dispormos os elementos distintos de a_1 , na permutação.

Uma vez colocados de forma distinta, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

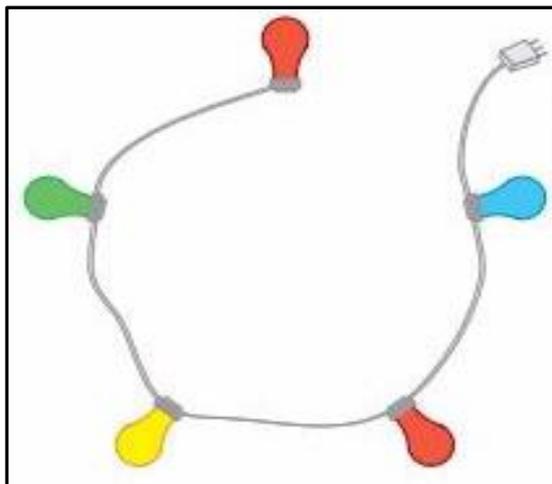
Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a_1 . Isto é:

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}$$

Considere o exemplo a seguir:

Um enfeite natalino, em forma de adorno, recebe cinco lâmpadas, sendo que duas delas possuem a mesma cor (vermelha), como mostra a Figura 9. Dispondo apenas dessas lâmpadas, de quantos modos distintos é possível distribuí-las?

Figura 9 – Adorno de Natal.



Fonte: Balestri (2016, p. 135).

Resolução:

As cinco lâmpadas podem ser distribuídas em qualquer ordem, no entanto, duas delas possuem a mesma cor (vermelha). Assim, a quantidade de maneiras distintas de distribuí-las pode ser determinada pela permutação das cinco lâmpadas, sendo duas delas repetidas. Desse modo, podemos ter: $n = 5$ e $n_1 = 2$, logo

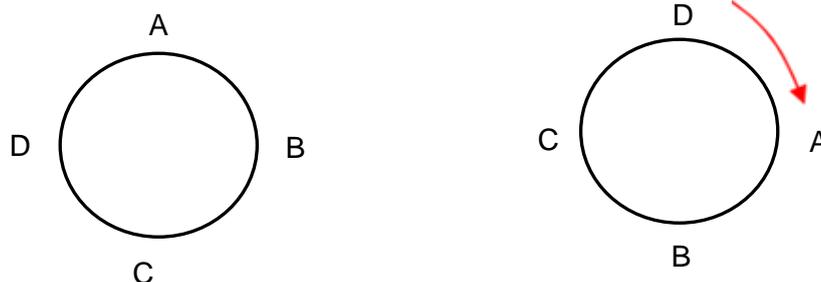
$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Portanto, existem 60 maneiras diferentes de distribuir essas 5 lâmpadas.

3.4.2 Permutações Circulares

Nessas permutações os elementos se dispõem como se fosse em uma roda de ciranda, formando ordem em círculo.

Segundo Rosas (2018, p. 77-78) quando são colocados “n objetos distintos de maneira igualmente espaçada num círculo, não importa exatamente a ordem entre eles, mas sim a posição relativa entre eles”. Este autor afirma que, diferentemente da permutação denominada de linear, na **permutação circular** o que realmente importa é que duas rotações não sejam coincidentes.



Para determinar a quantidade de permutações circulares de “n” objetos distintos, indicado por $(P_C)_n$, sem necessariamente visualizar cada uma delas, vários procedimentos podem ser utilizados. Um deles é notar que cada permutação circular consegue gerar exatamente n permutações lineares diferentes, por rotação ao girar a roda.

Logo:

$$(P_C)_n = \frac{P_n}{n}, \text{ isto é, } (P_C)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

Veja o exemplo a seguir:

De quantos modos distintos 5 crianças podem sentar-se em volta de uma mesa circular para estudar?

Resolução:

Temos que dispor as 5 crianças em círculos. Permutação circular dos 5 elementos indicados por:

$$(P_C)_5 = P_{(5-1)} = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Generalizando. Se temos n elementos distintos para dispor em uma fila circular e de forma equidistante podemos realizar esse processo de $(n - 1)!$ maneiras diferentes. Simbolizamos por:

$$(P_C)_n = (n - 1)!$$

Para Carvalho (2015, p. 30-31) é importante conhecer a fórmula que expressa

a solução de certos problemas de contagem que ocorrem com frequência.

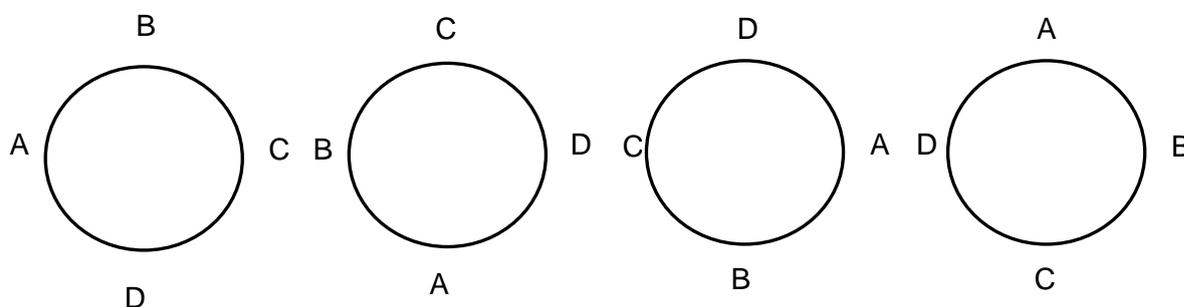
Considere o exemplo a seguir:

De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda de ciranda para brincar?

Solução:

A primeira vista, pode parecer que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos.

Entretanto, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC mostradas na figura a seguir são iguais, já que cada uma resulta da anterior por uma “virada” de $1/4$ de volta.



Para calcular o número de maneiras possíveis de se formar uma roda, podemos raciocinar de dois modos diferentes. O primeiro consiste em partir do resultado anterior ($4! = 24$) e perceber que cada roda está sendo contada 4 vezes. Logo, o número correto de rodas que podem ser formadas é $\frac{24}{4} = 6$. No segundo modo alternativamente, podemos começar por fixar a criança A na posição à esquerda (já que em qualquer roda A pode ficar nesta posição), seguindo o raciocínio agora temos 3 lugares para as 3 crianças que restaram, para um total de $3! = 6$ possibilidades. De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, considerando-se iguais disposições que coincidam por rotação (ou seja, o número de permutações circulares de n objetos) é $PC_n = (n - 1)!$.

Neste tópico apresentamos os assuntos de permutação que serão abordados em nossa sequência didática. A partir dos problemas desenvolvidos nesta seção, acreditamos que é necessário que o aluno compreenda e desenvolva questões de forma contextualizada, para isso habilidades precisam ser desenvolvidas para resolver questões que estejam relacionadas com a convivência e realidade dos estudantes.

Assim, os aspectos didáticos apresentados nesta seção estão de acordo com as análises prévias da engenharia didática que segundo Carneiro (2005), estão

sugeridas por Artigue (1996), na dimensão epistemológica, associada às características do saber. A fundamentação matemática desenvolvida nessa fase, nos ajudaram a entender os conteúdos e produzir informações que nos deram base matemática, para elaboração das atividades apresentadas a seguir em nossa Sequência Didática.

4 ATIVIDADES DE ENSINO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A nossa Sequência Didática (SD) foi estruturada em 4 atividades. Os tópicos propostos estão de acordo com as dificuldades apontadas na coleta de dados quando consultados os discente, na revisão de estudos apresentadas em nossa pesquisa e em conformidade com os descritores D20 e D32 do **SAEB – EF e SAEB – EM** respectivamente.

Tais dificuldades se acentuaram, principalmente no que se refere a ler e interpretar corretamente o enunciado da questão, elas persistiram no que diz respeito a diferenciar os conceitos e o uso das técnicas de Permutação Simples, de Permutação com Repetição, Permutação Circular, na ordem dos agrupamentos, bem como no uso de suas respectivas fórmulas.

A seguir apresentaremos uma sequência didática para o ensino de permutação, a qual achamos convenientes para serem trabalhadas em nossa pesquisa, utilizando as metodologias já mencionadas, segundo as ideias do modelo de SD de Zabala (1998) e Polya (1945), com entendimento das concepções de Onuchic et al (2014), Dante (2009) e Pinheiro e Sá (2010) sobre a resolução de problemas.

Os tópicos a serem abordados na sequência didática são noções gerais e conceito de permutação, além das técnicas para calcular as quantidades de permutações simples, permutação com repetição e permutação circular na resolução de problemas. Somando a isso, propomos várias questões de aprofundamento destinadas a execução e fixação da aprendizagem de cada uma das atividades

Após cada atividade será feita uma intervenção de formalização, onde será dado o teor formal da matemática ao tema abordado. No primeiro encontro, antes de aplicar as atividades, faremos uma revisão sobre o assunto de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), Fatorial e noções sobre Anagramas, afim de dar suporte ao desenvolvimento das referidas atividades.

Após a atividade 01 de ensino usaremos o material manipulável (alfabeto móvel e algarismos) como apoio didático para a resolução de problemas, com o propósito de firmar o conceito e as ideias sobre permutação. Na atividade 03 de ensino, usaremos também o referido material para iniciar o assunto sobre permutação com repetição. A utilização deste material é recomendada na terceira sugestão de Pinheiro e Sá (2010) para Resolução de Problemas.

Acreditamos que a utilização deste material manipulável (algarismos: para problemas envolvendo os números e alfabeto móvel: para formação de anagramas) que usaremos em nossa sequência didática, podem servir como um importante recurso didático na resolução de problemas e pode ser usado pelos professores, auxiliando-os em sua prática nas abordagens dos assuntos de permutação desde o ensino fundamental. Para transformar o estudo de análise combinatória, sobre tudo em permutação, mais atraente, lúdico e significativo, contribuindo para melhorar a aprendizagem e diminuir as dificuldades que os estudantes apresentam no estudo deste conteúdo.

Neste contexto é importante e se faz necessário o uso de materiais, recursos e práticas pedagógicas pelos docentes, como suporte e melhoria do ensino. “À formação continuada e a busca de aperfeiçoamento pessoal e profissional do professor são, sem dúvida, condições cruciais para experimentos e análises de grau de inovações dos materiais” Araújo e Santos (2020, p. 76).

A utilização de materiais manipuláveis são essenciais para facilitar o ensino e aprendizagem da matemática, sobre tudo o assunto de permutação. Os materiais manipuláveis aumentam a concepção dos estudantes sobre o que é, como e para quê aprender matemática, ultrapassando as barreiras dos mitos e preconceitos negativos da matemática, favorece uma aprendizagem através da formação de ideias e modelos.

Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. [...]. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelos alunos (RIBEIRO, 2011 *apud* ARAÚJO; SANTOS, 2020, p. 77-78).

Assim, é de suma importância o debate nos cursos de aperfeiçoamento de professores sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática. Estes professores precisam ser orientados e capacitados quanto a importância e a utilização correta destes recursos didáticos no ambiente escolar.

Apresentamos a seguir as atividades de nossa Sequência Didática. O preenchimento das fichas de respostas pelos estudantes são de fundamental importância para o entendimento e para a verificação dos padrões (fórmulas), além de facilitar a elaboração das conclusões sobre os conhecimentos aprendidos pelos

estudantes.

4.1 Atividade 01 de Ensino

ATIVIDADE 01	
Título: Permutação Simples.	
Objetivo: Compreender o conceito de Permutação Simples.	
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.	
Procedimento:	
<ul style="list-style-type: none"> • Leia atentamente a lista de questões; • Resolva cada pergunta proposta na lista de questões. 	
01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4?	
02. Os alunos Ana , Beatriz e Carlos estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?	
03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de anagrama . Quantos anagramas tem a palavra UVA ?	
04. Quantas senhas são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra GATO ?	
05. Aline , Beatriz , Carlos e Daniel são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?	

Quadro 11 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 01.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						
5ª						

Fonte: Adaptada de Rosas (2018).

Trocando a ordem (posição) dos elementos altera os agrupamentos?

Sim Não

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Análise a priori da atividade 01

Estas atividades deverão ser desenvolvidas em grupos de quatro ou cinco alunos. Esperamos que os estudantes ao fim da leitura das questões propostas, encontrem estratégias de resoluções, podendo ocorrer talvez de maneira empírica, através de diagrama de possibilidades, bem como através da compreensão da revisão sobre o Princípio Fundamental da Contagem, do Fatorial de um número e de noções sobre Anagramas, que faremos antes de aplicar a referida atividade.

Esperam-se que as possíveis dúvidas dos estudantes possam ser sanadas com o preenchimento do quadro anterior e a resolução dos exercícios de aprofundamento. Após a socialização da conclusão das atividades com a turma e a mediação do professor, os estudantes deverão chegar à formalização da definição de Permutação bem como determinar o total de Permutações Simples.

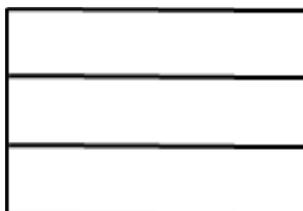
Questões de aprofundamento de Permutação Simples – atividade 01

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Determine o número de anagramas formados a partir das palavras:

- a) EVA
- b) PAI
- b) GATO
- c) FESTA

02. De quantos modos distintos três alunos (**G**abriel, **L**etícia e **P**edro) podem ser colocados em fila indiana?

03. Deseja-se confeccionar uma bandeira, com três faixas horizontais, dispondo de três cores (Azul, Branca e Cinza), sem que haja repetição de cor. De quantas maneiras isto é possível?



04. Quantas senhas são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra

AMOR?

- 05.** Utilizando-se dos algarismos 1, 2, 3 e 4 quantas senhas podemos formar com quatro dígitos distintos?
- 06.** De quantas maneiras podemos organizar cinco livros de disciplinas diferentes em uma prateleira?
- 07.** Edna e Antônio têm três filhos: Beatriz, Carlos e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado. De quantas formas distintas os membros da família podem se posicionar nessa foto?
- 08.** Um colégio resolve fazer uma programação de Cinema, de Segunda a Sexta. Para isso, os organizadores escolhem cinco filmes (Aventura, Comédia, Ficção, Romance e Terror), que serão exibidos um por dia, sem repetição. Qual é o número de maneiras diferentes de se fazer a programação nesses dias?
- 09.** Para tentar melhorar seu índice no Ibope, uma emissora de televisão resolveu mudar a ordem de sua programação, no sábado, das 12 às 17:00 horas. Os programas exibidos nesse horário são: esporte, documentário, religioso, filme nacional e filme estrangeiro. Cada um desses programas tem duração de uma hora. Qual o número de maneiras diferentes de se formar essa programação?
- 10.** Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. Qual o tempo em horas necessário para todas as mudanças possíveis?

4.2 Atividade 02 de ensino

ATIVIDADE 02

Título: Permutação Simples.

Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de Permutação Simples.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**.

Considerando a palavra FESTA, determine o número de anagramas que começam por F.

02. Quantos são os anagramas da palavra FESTA que começam com A e terminem com F.

03. Determine o número de anagramas da palavra FESTA que tenham as letras F e E juntas, nessa ordem.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades após a fixação dos elementos para a				Total de permutação
		1ª etapa/ posição	2ªetapa/ posição	3ªetapa/ posição	4ªetap/posição	
1ª						
2ª						
3ª						

Fonte: adaptada de Rosas (2018)

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Análise a priori da atividade 02

Esta atividade deve ser desenvolvida em grupos de quatro ou cinco alunos. Esperamos que os estudantes ao fim da leitura das questões propostas, encontrem estratégias de resoluções, através da compreensão sobre o estudo de permutação simples. Alguns estudantes poderão apresentar dificuldades em determinar o total de permutações.

Esperamos que as possíveis dúvidas possam ser sanadas com o preenchimento do quadro anterior e a resolução dos exercícios de aprofundamento.

Após a socialização da conclusão das atividades com a turma e a mediação do professor, os estudantes deverão determinar o total de permutações simples.

Questões de aprofundamento de Permutação Simples – atividade 02

1. Quantos anagramas da palavra EDITORA:

- a) começam com A
- b) começam com A e terminam com e?

02. Uma vez por ano, dona Ivanilde, que mora no Rio de Janeiro, quer visitar parentes em Fortaleza, Piauí, Brasília, São Luis e Belém.

- a) De quantas formas distintas ela pode escolher as cidades para visitar?
- b) De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Ivanilde pretende encerrar as visitas em Belém?

03. De quantos modos diferentes podem sentar-se 5 alunos,

- a) se ficarem todos em fila?
 b) se ficarem todos em fila, mas os lugares extremos forem ocupados pelo mais velho e pelo mais novo?

04. de quantas maneira 6 pessoas podem dispor-se em uma fila de modo que o mais velho e o mais novo fiquem juntos, nessa ordem.

05. De quantas formas é possível colocar 4 rapazes e 3 moças em fila de modo que as mulheres permaneçam juntas?

4.3 Atividade 03 de ensino

Atividade 03	
Título: Permutação com Repetição.	
Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de Permutação. com Repetição.	
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.	
Procedimento:	
<ul style="list-style-type: none"> • Leia atentamente a lista de questões; • Resolva cada pergunta proposta na lista de questões. 	
01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de anagrama . Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra OVO ?	
02. Determine o número de anagramas da palavra ANA ?	
03. Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?	
04. Quantos anagramas tem a palavra CAMA ?	
05. Trocando de posição os algarismos 1, 1, 2, 2, 3 quantos números de cinco algarismos podemos formar?	
06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra ARARA ?	

Quadro 13 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 03.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1 ^a				
2 ^a				
3 ^a				
4 ^a				
5 ^a				
6 ^a				

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Trocando a ordem (posição) dos elementos repetidos, altera os agrupamentos?

Conclusão: Sim Não

Análise a priori da atividade 3

Nesta atividade, os estudantes serão organizados em grupos de quatro ou máximo de cinco alunos. Esperamos que os estudantes no final da leitura das questões elaborem estratégias de resoluções, de acordo com experiências adquiridas anteriormente, ou de maneira empírica, através de diagrama de possibilidades. Alguns estudantes poderão apresentar dificuldades nas interpretações dos problemas propostos, devido eles não distinguirem ainda que na formação dos agrupamentos, a ordem (permutação) dos elementos repetidos não altera.

Esperamos que as possíveis dúvidas dos estudantes possam ser sanadas com o preenchimento do quadro anterior, e com a resolução dos exercícios de aprofundamento. Após a socialização da conclusão das atividades com a turma e com a mediação do professor, os estudantes deverão chegar à formalização da fórmula de Permutação com Repetição, além de determinar o total de permutações das atividades propostas.

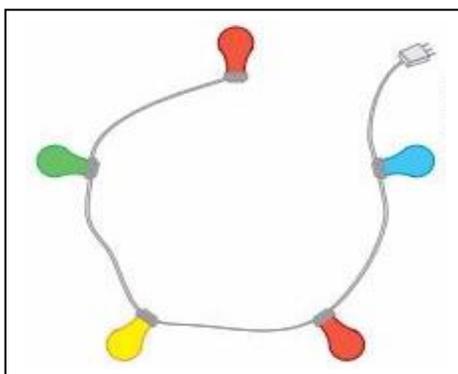
Questões de aprofundamento de Permutação com Repetição

- 01.** Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Determine o número de anagramas da palavra **PAPA**?
- 02.** De quantas maneiras distintas podem-se alinhar duas estacas azuis idênticas e duas brancas também idênticas?
- 03.** Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **BANANA**?
- 04.** Uma gatinha teve 6 filhotes, sendo 5 fêmeas e 1 macho. Quantas são as ordens possíveis para o nascimento dos filhotes?
- 05.** Um casal tem três meninos e duas meninas. De quantos modos distintos pode ter ocorrido a ordem dos nascimentos dos filhos?
- 06.** Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **ERRAR**?
- 07.** De quantas maneiras distintas podem-se alinhar três estacas vermelhas idênticas e três amarelas também idênticas?

08. Um estudante que nasceu em 1988, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele poderá formar?

09. De quantos modos distintos podemos dispor 3 livros idênticos de matemática, 2 livros idênticos de Física e 2 livros de português também idênticos em uma prateleira?

10. Um enfeite natalino em forma de adorno, recebe cinco lâmpadas, sendo que duas delas possuem a mesma cor (vermelha), como mostra a figura a seguir. Dispondo apenas dessas lâmpadas, de quantos modos distintos é possível distribuí-las?



Fonte: Balestri (2016, p. 135)

4.4 Atividade 04 de Ensino

Atividade 04

Título: Permutação Circular.

Objetivo: Compreender o processo de como chegar ao resultado de uma Permutação Circular.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
 - Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.
1. De quantos modos podemos dispor 3 amigos (**Antônio**, **Bia** e **Carlos**) num círculo em lugares equidistantes? (com a mesma distância entre eles).
 2. De quantas formas distintas 4 crianças Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?
 3. De Quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?
 4. Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas.

Quadro 14 – Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 04.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90°, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações circulares em cada uma das questões?

Conclusão:

Análise a priori da atividade 4

A atividade 4 deve ser desenvolvida em grupos de quatro ou cinco alunos. Esperamos que os estudantes ao fim da leitura das questões propostas, encontrem estratégias de resoluções, através da compreensão sobre permutação simples e da revisão sobre fatorial que faremos antes de aplicar as referidas atividades. Alguns estudantes poderão apresentar dificuldades em determinar o total de permutações, por não terem domínio do assunto.

Esperamos que as possíveis dúvidas dos estudantes possam ser sanadas com o preenchimento do quadro anterior e com a resolução dos exercícios de aprofundamento. Após a socialização da conclusão das atividades com a turma e a mediação do professor, os estudantes deverão chegar à formalização da fórmula de Permutação Circular, além de determinar o total de permutações propostas nas atividades.

Questões de aprofundamento de Permutação Circular

1. De quantos modos podemos dispor 4 jogadores em uma quadra circular?
2. De quantos modos podemos dispor 5 pessoas em torno de uma mesa circular?
3. De quantas maneiras 5 amigos podem ocupar os cinco bancos de uma roda gigante?
4. De quantos modos 7 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria,

duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?

5. De quantos modos 6 crianças podem ocupar os três bancos de 2 lugares em uma roda gigante?

4.5 Considerações sobre a Sequência Didática

Esperamos que esta sequência de atividades, venham ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre o conteúdo de permutação. Fazendo-os compreender conceitos e regras para aplicação na resolução de problemas, no dia a dia, além de sua importância na sociedade.

O sucesso na aplicação desta sequência está condicionada ao comprometimento do professor aplicador e dos estudantes, em seguir os passos da metodologia de ensino proposta por Góes (2000), Polya e Zabala (1998), além das concepções de Onuchic et al (2014), Dante (2009), Sá (2009), Pinheiro e Sá (2010), e dos documentos Oficiais sobre a resolução de problemas, tendo o professor como mediador para obtenção dos saberes, e sempre permitindo que o estudante tenha autonomia e seja construtor de seu próprio conhecimento.

Estamos propondo uma atividade de ensino diferente da tradicional, proporcionando que o estudante assimile os conceitos e elabore estratégia de resolução de maneira mais autônoma e efetiva.

Para superar as dificuldades no processo de aprendizagem o professor aplicador, estimulou a cooperação e a participação mútua entre os alunos, para o enriquecimento das atividades que foram realizadas em grupo.

Na próxima subseção vamos descrever como realizamos a etapa de experimentação, que compõe a terceira fase da Engenharia Didática.

5 EXPERIMENTAÇÃO

No presente capítulo, descrevemos o lócus, os sujeitos e o desenvolvimento do experimento, seguidos da análise e validação das atividades da sequência didática para o ensino e aprendizagem de permutação, segundo os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa e que fazem parte da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996).

As aplicações das atividades experimentais da sequência didática foram realizadas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, turno da tarde do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão/Campus Codó, localizado na Estrada Puraquê, S/N – Zona Rural, Codó-MA. A turma possui 36 alunos matriculados, sendo a mesma dividida em dois grupos, em virtude dos protocolos de segurança contra o Covid-19.

As aulas presenciais na escola campo da pesquisa retornaram dia 22 de novembro de 2021, as turmas foram divididas em grupos com aulas presenciais alternadas de 15 em 15 dias para cada grupo. Como a minha primeira aula ocorreu dia 26/11/2021 com o primeiro grupo da turma participante da pesquisa, conversei com minha orientadora para a aplicação da sequência didática neste primeiro grupo, tendo em vista o encerramento do ano letivo (férias dos estudantes).

Contamos apenas com 13 alunos participantes (entre homens e mulheres). Foi emitido um Ofício da Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará, junto a referida escola campo, solicitando autorização para aplicação do experimento, Além de termo de compromisso aos pais e alunos para autorização destes a participarem da pesquisa.

Aplicamos o experimento com a respectiva autorização da escola, dos pais e dos alunos. Além dos 13 estudantes, participaram duas alunas: Sebastiana de Sousa Nunes (estagiária) e Rebeca Oliveira Feitosa – bolsista e Ana Beatriz Brito de Moraes (filha do autor desta dissertação) como observadoras, que contribuíram com a gravação de vídeos, áudios e entrevistas.

Atuamos como docente nesta escola a mais de nove anos e por experiência sabemos das carências, das limitações e das dificuldades envolvidas no sistema de ensino que afetam a aprendizagem de nossos estudantes, sobretudo, em função da escola está localizada em uma região muito pobre. Acreditamos que contribuiremos

para o desenvolvimento positivo e para a mudança desta realidade com o produto educacional, fruto de nossa pesquisa.

Os alunos participantes da pesquisa foram avaliados com base nos objetivos das atividades propostas de forma contínua e dinâmica, durante a aplicação das referidas atividades. Também foram avaliados os aspectos relacionados a compreensão dos conteúdos como os conceitos e procedimentos matemáticos, as atitudes, o raciocínio, as capacidades de comunicação oral, a frequência, a participação em grupo e os diálogos por meio das interações entre estudantes e estudantes e entre professor e estudante e o relacionamento com os colegas e com o professor.

Foram realizadas observações para identificarmos as possíveis dificuldades e os avanços no desempenho das atividades em sala. Essas observações foram feitas a partir das informações coletadas dos estudantes, por meio do registro em fichas de atividades individuais e em grupo, com áudios e gravação em vídeos.

Nesta perspectiva, segundo Libâneo (1994), no decorrer do processo de ensino e aprendizagem deve-se ter um processo cuidadoso de avaliação, pois é no desenvolvimento desta atividade que se encontram as informações necessárias para analisar o andamento, sobre a situação de rendimento e desempenho dos estudantes.

Para este autor, “os resultados relativos que decorrem desse processo dizem respeito ao grau em que se atingem os objetivos e em que se cumprem exigências do domínio dos conteúdos, a partir de parâmetros de desempenho escolar” (LIBÂNEO, 1994, p. 190). O autor afirma ainda que:

A avaliação é uma tarefa didática necessária e permanente do trabalho docente, que deve acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem. Através dela, os resultados que vão sendo obtidos no decorrer do trabalho conjunto do professor e dos alunos são comparados com os objetivos propostos, a fim de constatar progressões, dificuldades, e reorientar o trabalho para as correções necessárias. (LIBÂNEO, 1994, p. 195).

A avaliação é um processo dinâmico que deve ser feita de forma contínua. Ela não se restringe apenas à aplicação de testes, conceitos e/ou notas. Mas um diagnóstico de todo percurso de ensino e aprendizagem do estudante, para buscar soluções após o professor constatar dificuldades em determinados assuntos ou conteúdo.

Antes de iniciarmos as atividades da sequência didática, fizemos uma oficina

de revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Fatorial e Anagramas, sendo que estes assuntos são pré-requisitos para o estudo de Permutação. Assim, a oficina foi ministrada por meio de aulas expositivas dialogadas, com a utilização de quadro branco, computador e um material de apoio que cada um dos alunos recebeu.

Esta oficina de revisão serviu para minimizar as possíveis dificuldades que os estudantes poderiam apresentar durante a aplicação, além de dar suporte ao desenvolvimento das atividades da SD, sendo realizada dia 26 de novembro de 2021, no período da tarde das 14:00h às 15:30h antes da aplicação do experimento, no retorno às aulas presenciais da referida escola.

Ao final da oficina de revisão, deixamos um tempo somente para tirar as dúvidas dos alunos. Alguns ainda apresentavam pequenas dúvidas, mas na interação com o professor/pesquisador, conseguiram entender melhor os assuntos explorados na oficina de revisão. Após esse momento iniciamos a seguir a fase da experimentação.

A sequência didática, objeto de aplicação de nosso experimento, abordou o conteúdo de Permutação que faz parte da grade curricular da disciplina de matemática do 2º ano do ensino médio da escola campo. Vale ressaltar que, é preciso compreender o contexto da experimentação tão difundida pela escola francesa, a saber: “[...] os fatos e acontecimentos são apreendidos em um contexto de normas constantes e, por isso, podem ser sistematicamente observados, organizados e sujeitos a uma intervenção, permitindo fazer inferências e previsões sobre os acontecimentos” (SANTOS, 2020, p. 143).

Assim, para nosso experimento, observamos a Engenharia Didática que tem como terceira fase da pesquisa, a experimentação que está diretamente ligada às atividades propostas pela Sequência Didática. Para Pommer (2013), esta fase compreende o período de aplicação das atividades em sala de aula que foram planejadas e elaboradas para um grupo de pessoas ou estudantes, tendo como pressupostos explicitar os objetivos e condições de realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação.

Esta fase da experimentação é a parte mais importante da pesquisa, é o momento em que o aluno será o personagem principal nessa etapa. Mesmo que o professor interfira no processo, pois sempre é necessária essa interferência, visto que

com as dúvidas vem a explicação delas. Mas a autonomia dos estudantes nessa fase é importante, pois mostrará se as atividades preparadas pelo professor estão sendo compreendidas pelos estudantes. (MACEDO, 2019).

Assim, descrevemos a aplicação da Sequência Didática composta de 4 atividades baseadas no ensino de matemática (Permutação) através da resolução de problemas, em seguida analisamos as atividades da SD por meio dos registros diários, áudios das falas e as anotações dos alunos.

Utilizamos as fases de 1 a 7 da estrutura do modelo da sequência didática de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019, p. 152), Dante (2009), Pinheiro e Sá (2010), Onuchic et al (2014) que destacam as quatro etapas necessárias para a resolução de qualquer problema propostas por Polya (1945), a análise microgenética proposta por Góes (2000) e Souza e Cabral (2010), onde apoiamos nossa fundamentação teórica e metodológica.

5.1 Aplicação

A aplicação da sequência didática para o ensino de permutação através da resolução de problemas foi realizada nos dias 26 de novembro de 2021, 09 e 10 de dezembro de 2021. Usamos as nossas próprias aulas de Matemática para aplicar a sequência didática na turma nos dias 26 de novembro e 10 de dezembro de 2021.

Assim, conseguimos finalizar nossa pesquisa. Vejamos a seguir no quadro 15 a descrições da aplicação da SD.

Quadro 15 - Descrição da Aplicação da Sequência Didática.

Data aplicação	Atividade	Título/Atividade	Tempo
26/11/2021	Revisão	PFC, Fatoria e Anagramas	90 minutos
09/12/2021	1ª	Permutação Simples	90 minutos
10/12/2021	2ª	Permutação Simples	45 minutos
10/12/2021	3ª	Permutação com Repetição	80 minutos
10/12/2021	4ª	Permutação Circular	50 minutos

Fonte: Elaborada pelo autor (2021).

A aplicação da sequência didática foi feita pelo próprio professor pesquisador, com auxílio de duas alunas (estagiaria e bolsista) respectivamente e da filha do autor desta pesquisa, já mencionadas anteriormente que colaboraram auxiliando no uso dos

equipamentos de áudio e vídeos para que pudéssemos identificar os indícios de aprendizagens apresentados pelos estudantes.

Na aplicação das atividades, os alunos participantes foram divididos em quatro grupos (A, B, C e D), sendo organizados pelos estudantes por meio da afinidade entre eles. Dos 13 alunos participantes da oficina de revisão, contamos apenas com 12 alunos para aplicação da experimentação, (com um aluno faltoso), em que foram nomeados da seguinte forma por grupo ao qual pertenciam:

- Grupo A com três alunos (**A01, A02 e A03**);
- Grupo B com três alunos (**B01, B02 e B03**);
- Grupo C com três alunos (**C01, C02 e C03**);
- Grupo D com três alunos (**D01, D02 e D03**).

Para o desenvolvimento das atividades de nosso experimento, utilizamos as sugestões do modelo da sequência didática de Zabala (1998), numeradas de 1 a 7, sugestões de Pinheiro e Sá (2010), numeradas de 1 a 11, conforme quadro 16 a seguir:

Quadro 16 - Sugestões de Pinheiro e Sá (2010) para Resolução de Problemas.

NÚMEROS	SUGESTÕES
1	Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
2	Determine qual é o problema mais simples e interessante para turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
3	Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
4	Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
5	Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
6	Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
7	Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
8	Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
9	Sistematize o conceito o conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
10	Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
11	Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado.

Fonte: Pinheiro e Sá (2010).

Seguimos ainda, as recomendações de Onuchic et al (2014) que destacam as quatro etapas necessárias para a resolução de qualquer problema propostas por Polya (1945) em sua primeira publicação de seu livro “A arte de resolver problemas”, conforme segue:

- 1) compreender o problema;

- 2) estabelecer um plano;
- 3) executar o plano;
- 4) examinar a solução obtida.

Esses passos para o ensino por meio da Resolução de Problemas servem como guia e direcionamento para elaborar aulas que despertem o interesse e vontade de participação dos estudantes, permitindo uma interação maior entre os alunos e entre alunos e professor. A seguir, descrevemos os nossos encontros.

5.1.1 Primeiro Encontro da Atividade de Ensino

O nosso primeiro encontro foi realizado no dia 26 de novembro de 2021 no turno vespertino, das 14:00h às 15:30h, com 13 alunos do 2º ano do ensino médio da turma participante da pesquisa. Neste encontro, expliquei aos alunos sobre a importância e o desenvolvimento da pesquisa, solicitei que eles contribuíssem com o nosso trabalho de pesquisa e em seguida, distribuímos os termos de consentimentos para a assinaturas dos alunos e para que seus pais os autorizassem a participarem da pesquisa.

Fizemos também uma revisão sobre os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), Fatorial e Anagramas, em que contribuiu bastante para o desenvolvimento da sequência didática. Ao explicar sobre a importância da participação e contribuição dos estudantes para nossa pesquisa, em que esta seria de grande valia para a formação de seu professor, gerou nos estudantes uma grande expectativa.

Eles estavam ansiosos para iniciar logo as atividades. Essa vontade de participar da pesquisa constatamos logo no decorrer da oficina de revisão e também durante todo o experimento. Os estudantes estavam atenciosos e bem motivados. Alguns alunos apresentaram pequenas dúvidas relativo aos assuntos abordados na oficina de revisão, sobretudo na identificação das etapas do evento e o número de possibilidades para cada etapa.

Assim deixamos um tempo somente para tirar as dúvidas dos alunos que ainda apresentavam dificuldades, mas na interação com o professor/pesquisador, conseguiram entender melhor os assuntos explorados na oficina de revisão. A seguir descreveremos o nosso segundo encontro (primeira atividade de ensino).

5.1.2 Segundo Encontro da Atividade de Ensino

O segundo encontro ocorreu no dia 09 de dezembro de 2021 (quinta-feira) no turno da tarde, das 15:30h às 17:00h, com a participação de 12 alunos da referida turma que participou da pesquisa. Iniciamos este encontro com orientações sobre o desenvolvimento das atividades da sequência didática. Após as orientações os estudantes se dividiram em equipes/ grupos de três alunos de acordo com a afinidade entre eles.

Em seguida, iniciamos nossa primeira atividade de ensino sobre Permutação Simples com a distribuição de cópias a cada grupo e a cada estudante, contendo os procedimentos e as questões a serem respondidas por eles, bem como a ficha de respostas necessárias para sua realização.

Figura 10 - Distribuição de cópias da atividade 01 de ensino.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Solicitamos aos estudantes que fizessem uma leitura minuciosa dos procedimentos contidos na folha de atividade e após esta leitura, poderiam responder às perguntas solicitadas. Neste momento utilizamos a 1ª etapa para resolução de problemas propostas por Polya (1945), descrito em nossa fundamentação teórica e metodológica, conforme entendimento de Dante (2009), onde este aponta que é preciso compreender o problema antes de começar a resolução, para tanto é necessário ler atentamente a questão proposta.

Consideramos ainda, nessa etapa da aula sobre Permutação Simples, as seguintes sugestões: 1, 2 e 3, conforme podemos observar no Quadro 16, Estrutura do modelo da sequência didática de Zabala (1998), e no quadro 16, as sugestões: 2, 3, 4 e 5 para Resolução de Problemas de Pinheiro e Sá (2010) e as quatro etapas necessárias para resolução de problemas propostas por Polya (1945), onde nos respaldamos em nossa fundamentação teórica e metodológica.

Nossa expectativa era que os alunos compreendessem as ideias das Permutações Simples, registrando todas as etapas de pensamento que tivessem durante a realização desta atividade para perceber a relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades propostos nos problemas para chegar a sua conclusão.

os alunos poderiam resolver as questões da maneira que achassem mais conveniente (poderiam montar as possibilidades, listá-las, usar a calculadora, raciocínio lógico, materiais manipuláveis e etc.), sempre discutindo as soluções em grupo, que preenchessem a ficha de respostas conforme o que estava sendo proposto na atividade 01 de ensino.

Quadro 17 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 01 de ensino.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						
5ª						

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Trocando a ordem (posição) dos elementos altera os agrupamentos?

Sim Não

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Os quadros a seguir apresentam os extratos de protocolo dos grupos para a

atividade 01 de ensino sobre Permutação Simples. O leitor poderá ir até a atividade 01 de ensino no apêndice para verificar as questões apresentadas.

Quadro 18 - Ficha resposta preenchida na Atividade 01 pelo grupo A.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª	3	3	2	1	—	6
2ª	3	3	2	1	—	6
3ª	3	3	2	1	—	6
4ª	4	4	3	2	1	24
5ª	4	4	3	2	1	24

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

No Quadro 18, o grupo **A** percebeu os conceitos, conseguiu compreender bem as questões, identificou as etapas/posições e a quantidade total de possibilidades e preencheu a ficha de respostas corretamente, como consta na ficha de resposta informada pelo referido grupo.

Quadro 19 - Ficha resposta preenchida na Atividade 01 pelos grupos B.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades da				Total de permutações
		1ª etapa/ posição	2ª etapa/ posição	3ª etapa/ posição	4ª etapa/ posição	
1ª	3	3	2	1		3
2ª	3	3	2	1		6
3ª	3	3	2	1	4	6
4ª	4	4	3	2	1	24
5ª	4	4	3	2	1	24

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Notamos que os grupos **B, C e D**, no preenchimento da coluna (Total de

permutações) se equivocaram no resultado total de permutações, referente a 1ª questão, apresentando o resultado 3 no total de permutações, diferente do solicitado, onde deveria ser 6. Na 3ª questão, há apenas três elementos e três etapas/posição. O grupo **B** e **D** se equivocaram preenchendo a 4ª etapa, com 4 possibilidades, onde deveria ficar em branco.

Nas demais questões (2ª, 4ª e 5ª), estes grupos perceberam os conceitos, identificaram as etapas/posições e a quantidade total de possibilidades, preenchendo o restante da ficha de respostas corretamente, conforme observamos na ficha de respostas preenchida pelo grupo **B**.

O grupo **D**, na 5ª questão se equivocou no resultado do total de permutação. Onde deveria ser 24, o grupo apresentou 22 como resultado.

Nesta atividade de ensino, os estudantes compreenderam o conceito de permutação, conseguiram compreender bem as questões, identificaram as etapas/posições e a quantidade total de possibilidades. Tiveram uma boa compreensão daquilo que lhes fora proposto, como podemos observar nos diálogos onde destacamos o episódio I, turnos: 3 a 16, 31 e 32, 39 e 40.

- (3) **P** – Na primeira questão nós temos os algarismos dois, três e quatro ... qual é a quantidade “n” de elementos?
- (4) **A** – Três elementos.
- (5) **P** – Três elementos, então vocês vão preencher lá na ficha, certo. Trocando os algarismos de posição, formamos números diferentes?
- (6) **A** – Sim.
- (7) **P** – Vamos ter a primeira, segunda e terceira posição. Então vocês vão contar o número de possibilidades. Na primeira posição, vamos ter quantas possibilidades?
- (8) **A** – Três possibilidades.
- (9) **P** – Na segunda posição, quantas possibilidades?
- (10) **A** – duas.
- (11) **P** – Na terceira?
- (12) **A** – uma possibilidade.
- (13) **P** – o que é preciso fazer para encontrar o total
- (14) **A** – uma multiplicação: três vezes dois, vezes um.
- (15) **P** – Certo. Essa que é a ideia. Então três vezes dois, vezes um, vai dar quanto?
- (16) **A** – Seis.

(31) **P** – O que vocês acham que pode ser uma permutação? (professor retoma o debate na sala de aula).

(32) **A** – É uma troca dos elementos.

(39) **P** – Vocês gostariam de acrescentar mais alguma coisa? Muito bem! Então resumindo. Permutação é ... o que mesmo? Vamos lá, ...?

(40) **A** – Troca da posição dos elementos.

Alguns grupos apresentaram pequenas dificuldades na identificação das etapas/ posição ou para encontrar o total de permutações, solicitados nas questões propostas na atividade 01 de ensino. Estas dificuldades já eram esperadas, visto que na revisão de literatura que fizemos constatamos que alguns autores apontam dificuldades relacionadas ao assunto de Permutação. Bem como na pesquisa de diagnóstico com alunos que realizamos.

Estas dificuldades se tornam evidentes na pesquisa de Conceição (2019) que pontuou dificuldades em sua atividade relacionada a Permutação Simples.

Dessa forma, consideramos que as dificuldades que os estudantes apresentaram na atividade 01 de nossa sequência didática foram parecidas com as dificuldades constatadas na pesquisa de Conceição (2019).

Ressaltamos que durante a aplicação da atividade estávamos constantemente indo aos grupos para tirar as dúvidas dos alunos, sempre que solicitado.

A maioria dos grupos conseguiram desenvolver bem as ideias de Permutação Simples preenchendo a ficha de respostas corretamente na atividade 01 de nossa sequência didática. Estes estudantes perceberam os conceitos, conseguiram identificar o número de possibilidades de cada etapas/ posição e efetuaram a multiplicação entre elas corretamente. Usaram o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C) e Fatorial ou encontraram outras estratégias como a formação de anagramas para encontrar o total de permutações, solicitados nas questões propostas.

Assim, consideramos que estes alunos apresentaram entendimento das ideias de Permutação Simples similares com o entendimento dos estudantes da pesquisa de Rosas (2018), constatados em nossa revisão de literatura.

Acreditamos que o bom entendimento dos alunos na atividade 01 de nossa sequência didática sobre o assunto de Permutação Simples se deu também em função da oficina de revisão que fizemos, onde foi bem explorado os assuntos de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Fatorial e Anagramas.

Consideramos que o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), sem o uso de fórmulas, apresenta uma boa estratégia para o entendimento dos estudantes na resolução de problemas que envolvem os assuntos de Permutação.

Neste sentido, observamos em nossa revisão de literatura que Gonçalves (2014, p. 62), destaca em conversa informal com os estudantes onde eles afirmaram que a utilização do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.), “traz mais certeza quanto à resolução das questões já que, para a aplicação das fórmulas é necessária uma análise mais minuciosa do problema”. Este autor ressalta ainda que a metodologia da resolução de problemas se mostra eficiente através do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.).

Na atividade 01 de ensino, de nossa sequência didática, queríamos que os estudantes percebessem em sua conclusão que a Permutação Simples de “n” elementos é o próprio Fatorial desse número “n”, ou seja, o produto desse número “n” por todos os seus antecessores naturais positivos e que a ordem de escolha dos elementos altera o evento (agrupamento), além do número de elementos do conjunto ser igual ao número de etapas/posição.

Eles Poderiam resolver as questões propostas nesta atividade da melhor maneira que achassem (poderiam montar as possibilidades, listá-las, usar calculadora, raciocínio lógico e etc.), além do uso do Fatorial de um número, anagramas (que consideramos uma forma de permutar os elementos de um agrupamento) ou através do P.F.C. que foram trabalhados em nossa oficina de revisão.

Escrevemos no quadro: P3 e P4 e logo em seguida pedimos que os estudantes informassem como seriam efetuados os cálculos.

Eles responderam, P3 é 3 vezes 2 vezes 1 que é igual a 6 e para calcular P4, a resposta foi 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1 que é igual a 24. Observamos nesta hora, que estávamos no momento certo para anunciarmos que 5. 4. 3. 2. 1 é igual a 5! (fatorial de cinco) e poderia ser escrito como $P5 = 5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120$.

Em seguida apresentamos aos estudantes a formalização de Permutação Simples baseado em lezzi *et al.* (2016), através do Data Show que levamos para sala de aula como apoio pedagógico. Assim, consideramos a 3ª sugestão de Pinheiro e Sá (2010) que orienta para a sistematização do conceito e do conteúdo que se pretende trabalhar. Além da 5ª fase do modelo de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019), como consta em nossa fundamentação teórica e metodológica, onde descreve que o

professor demonstre a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas as situações.

Tivemos ainda um tempo de 20 minutos para resolver algumas questões de aprofundamento. Nesta parte acatamos a 6ª etapa do modelo de SD de Zabala (1998 *apud* SILVA 2019), quadro 1 onde descreve que os estudantes devem realizar exercícios com o uso do algoritmo. Seguimos ainda, a 11ª sugestão de Pinheiro e Sá (2010), conforme Quadro 16 que sugere propor novos problemas envolvendo o assunto sistematizado.

Nosso objetivo, além de aprofundar o conteúdo, era lembrar o que foi aprendido, principalmente por conta do pequeno tempo que ainda tínhamos neste encontro, as outras questões os estudantes levariam para exercitarem em casa.

Ao final da atividade apresentamos aos alunos um material manipulativo com letras e algarismos que levamos para sala de aula como apoio didático para firmar e fixar o conceito e as ideias sobre permutação. Neste momento, solicitamos a presença de três alunos a frente da turma com os algarismos 1, 2 e 3 para formarem números diferentes trocando-os de posição.

Com as letras “P”, “A”, e “I”, para formarem palavras diferentes Com as trocas das letras (os Anagramas). A fim de melhorar o entendimento das ideias sobre Permutação Simples, principalmente dos estudantes que apresentaram mais dificuldades, conforme segue.

Figura 11 - Atividade - Alunos formando números diferentes trocando os algarismos de posição.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 12 - Atividade - Alunos formando anagramas diferentes trocando as letras de posição



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

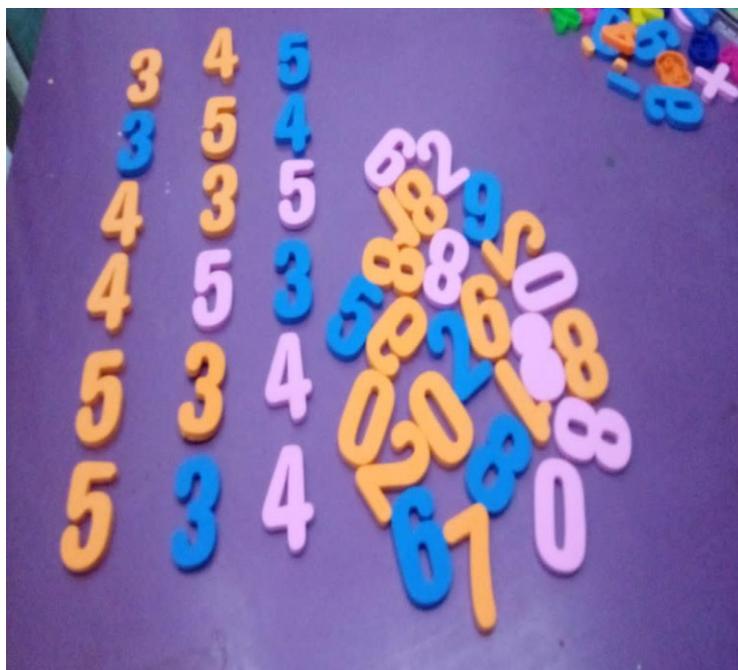
Em seguida os alunos tiveram um tempo de 20 minutos para praticarem o material manipulativo com as letras e números de forma lúdica.

Figura 13 - Atividade – Alunos usando o alfabeto móvel para formar anagramas



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

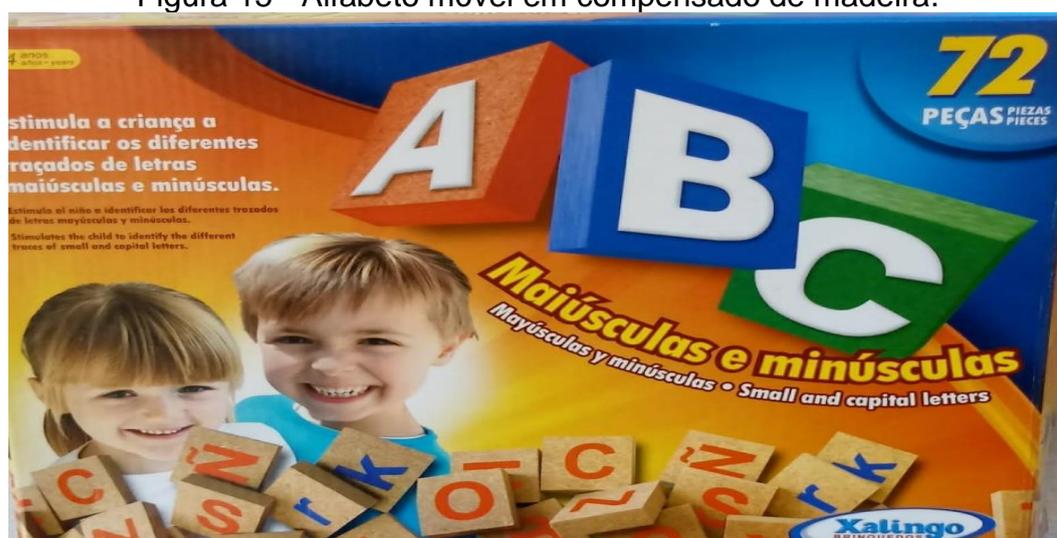
Figura 14 - Permutação de algarismos para formação de números.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Após este momento percebemos que os alunos que apresentaram maiores dificuldades no assunto de permutação simples melhoraram o entendimento do conceito, bem como na identificação das etapas/ posição ou na multiplicação para encontrar o total de permutações, desenvolvendo de forma satisfatória as questões propostas na atividade 01. Este material que usamos nas atividades (alfabeto móvel e algarismos) podem ser adquiridos com facilidade no comércio em geral ou podem ser confeccionados pelo próprio professor e os alunos com material de EVA, cartolina, madeira, plástico entre outros. Em nosso experimento utilizamos os materiais conforme segue.

Figura 15 - Alfabeto móvel em compensado de madeira.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 16 -Alfabeto móvel em E.V.A



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Figura 17 - Algarismo móvel em E.V.A e Plástico.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Acreditamos que a utilização deste material manipulável (algarismos: para problemas envolvendo os números e alfabeto móvel: para formação de anagramas) que usamos em nossa pesquisa, podem servir como um importante recurso didático na resolução de problemas, podendo auxiliar aos professores em sua prática nas abordagens dos assuntos de permutação desde o ensino fundamental.

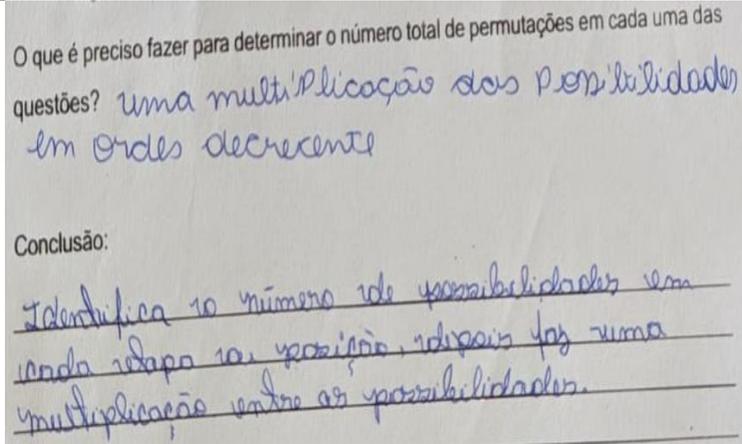
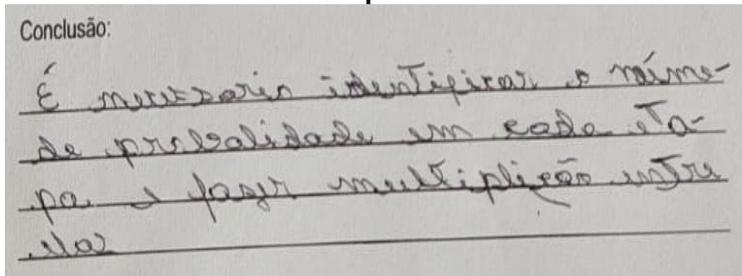
Além de transformar o estudo de análise combinatória, sobre tudo em permutação, mais atraente, lúdico e significativo, contribuindo para melhorar a aprendizagem e diminuir as dificuldades que os estudantes apresentam no estudo deste conteúdo.

Ao final tivemos uma boa compreensão daquilo que fora proposto aos estudantes, estando os resultados apresentados pelas conclusões dos grupos sobre o estudo de Permutação Simples (atividade 01), no Quadro 20.

Quadro 20 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 01 de ensino.

Alunos	Conclusões	Validade
--------	------------	----------

<p>A01 A02 A03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo A</p> <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões? É necessário observar a quantidade de elementos, para fazer por meio da multiplicação, até chegar a quantas maneiras serão possíveis.</p> <p>Conclusão: É necessário multiplicar a quantidade de elementos, colocando pela ordem decrescente de elementos, ao chegar em um número possível de como fazer a troca.</p> <p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo A:</p> <p>É necessário observar a quantidade de elementos, para fazer por meio da multiplicação, até chegar a quantas maneiras possíveis. É necessário multiplicar a quantidade de elementos, colocando pela ordem decrescente de elementos, ao chegar em um número possível de como fazer a troca.</p> <p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>O grupo A percebeu que para obtermos o resultado é necessário realizarmos a multiplicação dos elementos que podem ser colocados em ordem decrescente sendo possível a sua troca, podendo ser feita através do P.F.C. ou Fatorial. Assim, consideramos que este grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação simples.</p>
<p>B01 B02 B03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo B</p> <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões? Identificar o número de possibilidades e multiplicar</p> <p>Conclusão: É necessário identificar o número de possibilidades em cada etapa e fazer uma multiplicação entre elas</p> <p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo B:</p> <p>Identificar o número de possibilidade e multiplicar. É necessário identificar o número de possibilidade em cada etapa e fazer uma multiplicação ente elas</p> <p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>O grupo B percebeu que para obtermos o resultado é necessário identificar o número de possibilidade em cada etapa, e em seguida faz-se uma multiplicação entre elas. podendo ser feita através do P.F.C. ou Fatorial. Consideramos que o referido grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p> <p style="text-align: center;">Grupo C</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação simples.</p>

<p>C01 C02 C03</p>	 <p>Transcrição da conclusão do Grupo C: Uma multiplicação das possibilidades em ordens decrescente. Identificar o número de possibilidades em cada etapa ou posição, depois faz uma multiplicação entre as possibilidades.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo C percebeu que para obtermos o resultado é necessário identificar o número de possibilidade em cada etapa ou posição, e em seguida faz-se uma multiplicação entre estas possibilidades. podendo ser feita através do P.F.C. ou Fatorial. Assim, consideramos que o referido grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação simples.</p>
<p>D01 D02 D03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo D</p>  <p>Transcrição da conclusão do Grupo D: É necessário identificar o número de probabilidade em cada etapa. e fazer multiplicação entre elas.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo D percebeu que para obtermos o resultado é necessário identificar o número de probabilidade (possibilidade) em cada etapa, e em seguida faz-se uma multiplicação entre elas. Porém trocaram o termo possibilidade por probabilidade.</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação simples.</p>

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Assim, os alunos alcançaram o objetivo proposto nesta atividade de ensino que era compreender o conceito de permutação. Apesar de que alguns alunos trocaram a palavra possibilidade por probabilidade, mas demonstraram que entenderam bem o assunto.

Prosseguimos com os protocolos das questões resolvidas de forma individual pelos estudantes, onde seguimos as recomendações de Onuchic *et al.* (2014), que

destacam as quatro etapas necessárias para a resolução de qualquer problema propostas por Polya (1945), conforme indicamos em nossa fundamentação teórica e metodológica.

Quadro 21 - Questões resolvidas na Atividade 01 de ensino pelo aluno **A01**.

01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4?
 $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

02. Os alunos Ana, Beatriz e Carlos estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?
 $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas tem a palavra **UVA**?
 $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

04. Quantas **senhas** são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra **GATO**?
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

05. Aline, Beatriz, Carlos e Daniel são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Observamos que os estudantes **A01** e **D01** responderam as questões corretamente, fazendo uso da ideia de Fatorial e do princípio fundamental da contagem, permitindo aos alunos uma melhor compreensão na resolução das questões, conforme podemos observar nas resposta do aluno **A01**.

Quadro 22 - Questões resolvidas na Atividade 01 pelo aluno B02.

01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4?
3 formas.

02. Os alunos Ana, Beatriz e Carlos estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?
 $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ 6 formas diferentes

03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas tem a palavra **UVA**?
UVA, UAV, VAU, AVU, VUA, AUV - 6 formas.

04. Quantas **senhas** são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra **GATO**? $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ senhas

05. Aline, Beatriz, Carlos e Daniel são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?
24 dias.

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

No Quadro 22, observamos que o aluno **B02** teve dificuldades em responder a 1ª questão. Informou um valor que não corresponde com a resposta correta. Na 2ª, 3ª e 4ª questões este aluno respondeu corretamente. Na 2ª e 4ª questão, fez uso do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C). Na 3ª questão, o aluno respondeu utilizando a ideia de anagramas, fazendo a troca de seus elementos corretamente, o que corresponde também a ideia de Permutação. Na 5ª questão, ele apresenta dificuldades, embora tenha indicado a resposta correta, não informou a estratégia de resolução para chegar ao resultado.

Quadro 23 - Questões resolvidas na Atividade 01 pelo aluno C01.

01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4? 234
 3 324
 432

02. Os alunos **Ana**, **Beatriz** e **Carlos** estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?
 $A B C = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas tem a palavra **UVA**?
 $U V A = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

04. Quantas **senhas** são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra **GATO**? $G A T O = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

05. **Aline**, **Beatriz**, **Carlos** e **Daniel** são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?
 $A B C D = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Na primeira questão, observamos no Quadro 23 que o aluno **C01** não conseguiu desenvolver todas as trocas dos algarismos corretamente na 1ª questão, fazendo uma contagem menor que o solicitado. As questões 2ª, 3ª, 4ª e 5ª, este aluno respondeu corretamente. Na 2ª questão ele fez uso da ideia de Anagrama (o que corresponde também a ideia de Permutação) e do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Na 3ª, 4ª e 5ª questão, usou a ideia de Anagramas, (o que corresponde a ideia de Permutação) e Fatorial que foram estudados em nossa oficina de revisão.

O Aluno **D03** respondeu a 1ª questão usando a ideia do fatorial. Nas questões 2ª, 3ª, 4ª e 5ª respondeu de forma semelhante ao aluno **C01**.

Conforme expomos, consideramos que os estudantes apresentaram um bom desempenho na aprendizagem da atividade 01, proposta em nossa SD.

A seguir descreveremos o nosso terceiro encontro, que corresponde a

segunda, terceira e quarta atividade.

5.1.3 Terceiro Encontro da Atividade de Ensino

O terceiro encontro ocorreu no dia 10 de dezembro de 2021 (sexta-feira) no turno da tarde, das 14:00h às 17:00h, neste encontro tivemos a participação dos mesmos 12 alunos da referida turma. Iniciamos solicitando que os estudantes ficassem nas mesmas equipes/ grupos que eles haviam se organizado na atividade anterior de acordo com a afinidade entre eles.

5. 1. 3. 1 Segunda Atividade de Ensino

Realizamos nossa segunda atividade de ensino das 14:00h às 14:45h, dando continuidade ao assunto de Permutação Simples, com um nível de dificuldade mais elevada que a atividade 01 de ensino nas questões propostas, onde distribuimos cópias a cada grupo e a cada estudante contendo os procedimentos e as questões a serem respondidas, bem como a ficha de respostas necessárias para sua realização.

solicitamos aos estudantes que fizessem uma leitura minuciosa dos procedimentos contidos na folha de atividade e após esta leitura, poderiam responder às perguntas solicitadas. Neste momento nos respaldamos em nossa fundamentação teórica e metodológica, seguindo as orientações de Dante (2009), Zabala (1998), Pinheiro e Sá (2010) e Polya (1945).

Nossa expectativa, nesta atividade era que os alunos descobrissem uma maneira de obter os resultados, gerando uma conclusão de como se resolver os problemas que envolvem o assunto de permutação simples através do preenchimento da ficha de respostas, registrando todas as etapas de pensamento que tivessem durante a realização da mesma para perceber a relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades propostos nos problemas para chegar a sua conclusão.

os alunos poderiam resolver as questões da maneira que achassem mais conveniente (poderiam montar as possibilidades, listá-las, usar a calculadora, raciocínio lógico e etc.), além dos conhecimentos adquiridos na atividade anterior, sempre discutindo as soluções em grupo, que preenchessem a ficha de respostas conforme o que estava sendo proposto na atividade 02 de ensino.

Os quadros a seguir apresentam os extratos de protocolo dos grupos para a atividade 02 de ensino sobre Permutação Simples. O leitor poderá ir até a atividade 02 de ensino no apêndice para verificar as questões apresentadas.

Quadro 24 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 02.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades após a fixação dos elementos para a				Total de permutação
		1ª etapa/ posição	2ªetapa/ posição	3ªetapa/ posição	4ªetap/posição	
1ª						
2ª						
3ª						

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?

Conclusão:

Quadro 25 - Ficha resposta preenchida na Atividade 02 pelo grupo C.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Qual o número de possibilidades após a fixação dos elementos para a				Total de permutação
		1ª etapa/ posição	2ªetapa/ posição	3ªetapa/ posição	4ªetap/p osição	
1ª	5	4	3	2	1	24
2ª	5	3	2	1		6
3ª	5	4	3	2	1	24

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Observamos que todos os grupos (A, B, C e D) desenvolveram bem as questões, identificaram as etapas/posições e a quantidade total de possibilidades e preencheram a ficha de respostas corretamente, conforme podemos observar na ficha preenchida pelo grupo C, no Quadro 25.

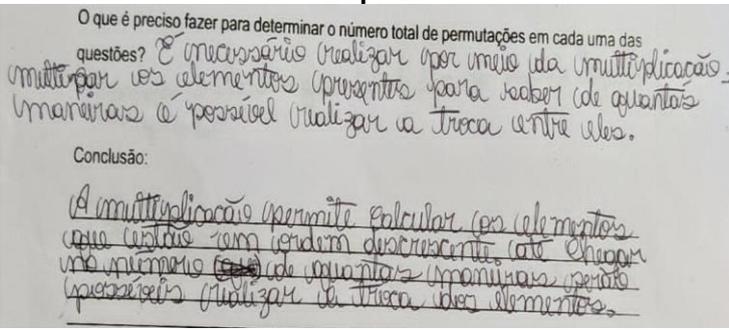
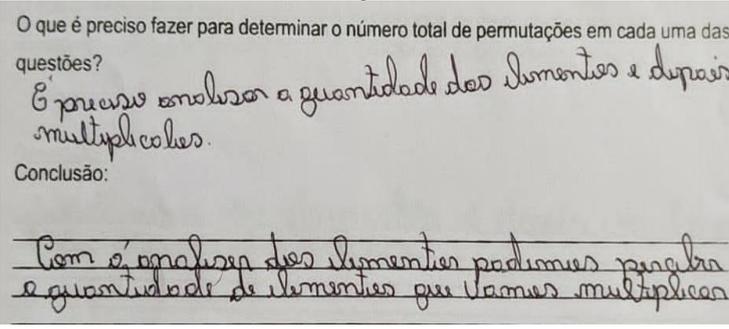
Assim, consideramos que nesta atividade de ensino, os estudantes tiveram uma boa compreensão daquilo que lhes fora proposto, como podemos observar nos diálogos onde destacamos o episódio episódio I, turnos: 72 a 95.

- (72) **P** – (Professor faz a leitura da 1ª questão da atividade 02 de ensino e pergunta para os alunos). Vamos lá! Grupo A, o que se pede na primeira questão?
- (73) **A** – Determine o número de anagramas que começam com a letra “F”
- (74) **P** – Certo! Olhem só eu pergunto para o grupo B. Quantas letras nós temos na palavra festa?
- (75) **A** – Cinco.
- (76) **P** – Muito Bem! Então eu vou perguntar agora para o grupo D. Ele está pedindo para fixar qual letra?
- (77) **A** – A Letra “F”
- (78) **P** – Letra “F” não é. O grupo C concorda?
- (79) **A** – Sim.
- (80) **P** – Então vamos lá. Vejam só gente. Nós podemos até usar a ideia dos tracinhos não é. Porque é muito útil para resolver esse tipo de questão. (professor faz alguns tracinhos no quadro). Agora prestem atenção. Ele tá pedindo para fixar qual letra?
- (81) **A** – letra “F”
- (82) **P** – Muito bem! Então vamos fixar a letra “F”. Aí vocês já vão preenchendo na ficha de resposta. Tá bom! Qual a quantidade “n” de elementos?
- (83) **A** – Cinco.
- (84) **P** – Então preencham aí. Vocês agora vão preencher a ficha do grupo. Continuando. Psiu! Vamos fazer silêncio. Qual o número de possibilidade após a fixação do elemento (F) para a primeira posição. Quantas possibilidades?
- (85) **A** – Quatro possibilidades.
- (86) **P** – Muito bem! Então escrevam aí. E para a segunda etapa ou posição. Vamos lá.
- (87) **A** – Três.
- (88) **P** – Então escrevam aí, três. E para a terceira posição ou etapa?
- (89) **A** – Duas.
- (90) **P** – Para a quarta?
- (91) **A** – Uma possibilidade.
- (92) **P** – ...Como fazemos para encontrar o total de anagramas ou permutações?
- (93) **A** – multiplicamos as possibilidades.
- (94) **P** – Certo! Quanto vai dar?
- (95) **A** – vinte e quatro.

Vale ressaltar que à medida que os alunos apresentavam alguma dificuldade o professor/pesquisador estava constantemente indo de grupo em grupo para tirar as suas dúvidas. Nesta atividade, queríamos que os estudantes compreendesse o processo de como chegar ao resultado de Permutação com repetição.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões de cada grupo na Atividade 02 de ensino.

Quadro 26 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 02. (continua)

Alunos	Conclusões	Validade
<p>A01 A02 A03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo A</p>  <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões? É necessário realizar por meio da multiplicação, multiplicar os elementos presentes para saber de quantas maneiras é possível realizar a troca entre eles.</p> <p>Conclusão:</p> <p>A multiplicação permite calcular os elementos que estão em ordem decrescente até chegar no número de quantas maneiras serão possíveis realizar a troca dos elementos.</p>	<p>Análise válida para o cálculo de permutação simples.</p>
	<p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo A:</p> <p>É necessário realizar por meio da multiplicação, multiplicar os elementos presentes para saber de quantas maneiras é possível realizar a troca entre eles.</p> <p>A multiplicação permite calcular os elementos que estão em ordem decrescente até chegar no número de quantas maneiras serão possíveis realizara a troca dos elementos.</p>	
	<p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>O grupo A percebeu que para obtermos o resultado é necessário multiplicar os elementos presentes para saber de quantas maneiras é possível realizar a troca entre eles. analisar a quantidade de elementos para em seguida multiplica-los. Porém é necessário identificar o número de possibilidades em cada etapa/posição para em seguida efetuar a multiplicação entre elas. Consideramos que o referido grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p>	
<p>B01 B02 B03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo B</p>  <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?</p> <p>É preciso analisar a quantidade dos elementos e depois multiplicá-los.</p> <p>Conclusão:</p> <p>Com a análise dos elementos podemos analisar a quantidade de elementos que vamos multiplicar</p>	<p>Análise parcialmente</p>

	<p>Transcrição da conclusão do Grupo B: É preciso analisar a quantidade dos elementos e depois multiplicá-los. Com a análise dos elementos podemos perceber a quantidade de elementos que vamos multiplicar.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo B percebeu que para obtermos o resultado é necessário analisar a quantidade de elementos para em seguida multiplica-los. Porém o grupo não informou que a quantidade destes elementos forma as etapas/ posição, número de possibilidades de cada etapa/posição para poder efetuar a multiplicação entre elas.</p>	válida para o cálculo de permutação simples.
<p>C01 C02 C03</p>	<p>Grupo C</p> <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões? <i>multiplicar as possibilidades</i></p> <p>Conclusão: <i>identificar os elementos e depois multiplicar as possibilidades</i></p> <p>Transcrição da conclusão do Grupo C: Multiplicar as possibilidades. Identificar os elementos e depois multiplicar as possibilidades.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo C percebeu que para obtermos o resultado é necessário identificar o número de elementos e após multiplica-se as possibilidades, sendo necessário, identificar antes, o número destas possibilidades em cada etapa/posição. Assim, consideramos que o referido grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p>	Análise válida para o cálculo de permutação simples.
<p>D01 D02 D03</p>	<p>Grupo D</p> <p>O que é preciso fazer para determinar o número total de permutações em cada uma das questões?</p> <p>Conclusão: <i>Podem ser feitas através da multiplicação entre as etapas</i></p> <p>Transcrição da conclusão do Grupo D: Pode ser feita através da multiplicação entre as etapas.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo D percebeu que para se obter o resultado, podemos fazer uma multiplicação entre as etapas. Porém é necessário identificar o número de possibilidades em cada etapa/posição para em seguida efetuar a multiplicação entre elas. Consideramos que o referido grupo desenvolveu a ideia de permutação.</p>	Análise válida para o cálculo de permutação simples.

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Assim, os alunos alcançaram o objetivo proposto nesta atividade de ensino que era compreender o processo de como chegar ao resultado de Permutação Simples.

Seguiremos com os protocolos das questões resolvidas de forma individual pelos estudantes, onde seguimos as recomendações de Onuchic *et al.* (2014), para a resolução de problema propostas por Polya (1945), conforme descritos na atividade anterior.

Quadro 27 - Questões resolvidas na Atividade 02 pelo aluno A02.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Considerando a palavra FESTA, determine o número de anagramas que começam por F. \overline{FESTA}

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

02. Quantos são os anagramas da palavra FESTA que começam com A e terminem com F. \underline{Festa} = $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

03. Determine o número de anagramas da palavra FESTA que tenham as letras F e E juntas, nessa ordem.

\overline{FEsta}

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Observamos no Quadro 27 que o estudante **A02** respondeu as questões corretamente fazendo uso da ideia de Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), Fatorial e Permutação de “n” elementos. Na segunda questão, embora tenha efetuado o cálculo corretamente, o aluno se equivocou na troca das letras A com F.

Quadro 28 - Questões da Atividade 02 respondidas pelo aluno D03.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Considerando a palavra FESTA, determine o número de anagramas que começam por F. $P \text{ --- } \text{---}$
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

02. Quantos são os anagramas da palavra FESTA que começam com A e terminem com F. $A \text{ --- } \text{---} F$
 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

03. Determine o número de anagramas da palavra FESTA que tenham as letras F e E juntas, nessa ordem.

$\boxed{FE} \text{ --- } \text{---}$
 ~~$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$~~
 $4! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

Observamos no Quadro 28 que o estudante **D03** respondeu as questões corretamente fazendo uso da ideia de Fatorial, Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C) e Permutação de “n” elementos. Percebemos ainda que o referido aluno havia se equivocado na contagem das possibilidades em cada etapa/posição, referente a 3ª questão, mas logo em seguida, corrigiu o erro, conforme demonstrado no quadro 26 a cima.

Para fixar o assunto estudado, distribuímos várias questões de aprofundamento seguindo as recomendações do modelo de SD de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019) e Pinheiro e Sá (2010), como informado na atividade anterior. Pelo exposto consideramos que os alunos tiveram um bom desempenho nesta atividade. A seguir descreveremos a nossa terceira atividade de ensino (Permutação com Repetição).

5. 1. 3. 2 Terceira Atividade de Ensino

A nossa terceira atividade, relacionada ao assunto de Permutação com Repetição, foi realizada no dia 10 de dezembro de 2021 (sexta-feira), no período da tarde das 14:45h às 16:05. Foi mantida a mesma formação dos grupos das aulas anteriores. Distribuímos cópias a cada grupo e a cada estudante contendo os procedimentos e as questões a serem respondidas, bem como a ficha de respostas

necessárias para sua realização.

Solicitamos aos estudantes que fizessem uma leitura minuciosa dos procedimentos contidos na folha de atividade e após esta leitura, poderiam responder às perguntas solicitadas. Seguimos as orientações de Dante (2009), Zabala (1998), Pinheiro e Sá (2010) e Polya (1945), conforme descritos nas atividades anteriores.

Nosso objetivo, nesta atividade era fazer com que os grupos preenchessem a ficha de respostas a seguir e a partir dela percebessem o padrão e descobrisse uma forma para se resolver as questões de Permutação com Repetição, além de formalizar uma conclusão, sobre o Assunto.

os alunos poderiam resolver as questões da maneira que achassem mais conveniente (poderiam montar as possibilidades, listá-las, usar a calculadora, raciocínio lógico, materiais manipuláveis e etc.), sempre discutindo as soluções em grupo, que preenchessem a ficha de respostas conforme o que estava sendo proposto na atividade 03 de ensino.

Quadro 29 - Ficha resposta a ser preenchida na atividade 03.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1 ^a				
2 ^a				
3 ^a				
4 ^a				
5 ^a				
6 ^a				

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Ressaltamos que antes de iniciarmos a referida atividade 03 de ensino, fizemos uso do material manipulável como apoio didático na resolução de problemas, conforme já descrevemos a sua importância para a aprendizagem dos estudantes no ensino de matemática, destacados pelos autores: Gerdenits (2014), Pinheiro e Sá (2010) e Araújo e Santos (2020).

Solicitamos a presença de três estudantes, à frente da sala, cada um com as respectivas letras da palavra “OVO”. Em seguida perguntamos a turma se ao trocar os “Os” de posição gerava uma palavra diferente, onde eles responderam que “não”.

Logo após, perguntamos se trocando apenas o “V” de posição, gerava uma nova palavra (anagrama), os estudantes responderam que “sim”. Conforme a Figura 18 dos estudantes.

Figura 18 - Atividade – Alunos formando anagramas com as letras da palavra OVO.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Deixamos dez minutos desta atividade, dado o pequeno tempo que tínhamos para os estudantes praticarem o material manipulativo. Mesmo assim, ajudou bastante a eles perceberem que ao trocar de posição os elementos repetidos não geravam novos agrupamentos, como consta nas Figuras 19 e 20.

Figura 19 - Atividade - Alunos formando anagramas com elementos repetidos.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Figura 20 - Atividade - Alunos formando números com algarismos repetidos.



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

com isso já íamos trabalhando se a ordem de escolha dos elementos gerava novos agrupamentos e começávamos estimular os estudantes a descobrir uma forma prática para determinar o total de permutação com repetição levando-os assim, a gerar um padrão e construir sua fórmula.

Nossa postura durante esta atividade para orientá-los a responder as questões foi:

- 1º - Questioná-los se a resolução por meio de permutação simples, estava fazendo com que criassem agrupamentos a mais;
- 2º- Perguntar para os estudantes, se era necessário ter feito a permutação dos elementos repetidos dentro de cada agrupamento, ou seja, a troca destes elementos alterava o agrupamento;
- 3º - Perguntar o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estava em excesso;

Essas perguntas fizeram com que eles preenchessem a tabela (ficha de respostas) até a última coluna para obter o resultado. A partir daí, as dúvidas foram diminuindo.

De modo geral, nesta atividade, os grupos encontraram algumas dificuldades quanto aos elementos repetidos, se a troca destes elementos gerava novos agrupamentos. Assim, ficamos atentos, íamos nos grupos para incentivá-los a não esquecerem de verificar se os agrupamentos mudam quando os elementos repetidos

são trocados de posição e que tentassem montar as possibilidades, para comparar com as respostas encontradas.

Os quadros a seguir apresentam os extratos de protocolo de cada grupo para a atividade 03 de ensino sobre Permutação com Repetição. O leitor poderá ir até a atividade 03 de ensino no apêndice para verificar as questões apresentadas.

Quadro 30 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo A.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1ª	3	1	2	3
2ª	3	1	2	3
3ª	4	1	2	12
4ª	4	1	2	12
5ª	5	2	2	30
6ª	5	2	2, 3	10

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Observamos que o grupo **A e B**, chegaram as mesmas conclusões, conforme observamos na ficha preenchida pelo grupo **A**. Conseguiram compreender as questões, identificaram a quantidade total de elementos “n”, os elementos repetidos, a quantidade de vezes que se repetem e o total de permutações.

Quadro 31 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo C.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1ª	3	1	2	3
2ª	3	1	2	3
3ª	4	1	2	12
4ª	4	1	2	12
5ª	5	2	4	30
6ª	5	2	5	10

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

No Quadro 31, observamos que o grupo **C**, na quarta coluna, em relação a 5ª e 6ª questões embora tenha indicado o total de permutações, não conseguiu identificar corretamente a quantidade de vezes em que os elementos se repetem. Nas demais questões (1ª, 2ª, 3ª e 4ª), conseguiu compreender bem, identificando a quantidade total de elementos “n”, os elementos repetidos, a quantidade de vezes que se repetem e o total de permutações.

Quadro 32 - Ficha resposta preenchida na Atividade 03 pelo grupo D.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Quantidade de elementos repetidos	Quantidade de vezes que repete	Total de permutações
1ª	3	1	2	3
2ª	3	1	2	3
3ª	4	1	2	12
4ª	4	1	2	12
5ª	5	2	2-2	30
6ª	5	A-3-R-2 2	A-3-R-2	10

Fonte: Dados da Pesquisa (2021).

No Quadro 31, observamos que o grupo **D**, conseguiu compreender bem todas as questões, identificou a quantidade total de elementos “n”, os elementos repetidos,

a quantidade de vezes que se repetem e o total de permutações. Porém na 6ª questão, havia informado a resposta correta da quarta coluna, na terceira coluna. Mas logo corrigiu como consta na referida ficha, informando as respostas corretas nas respectivas colunas.

Na atividade 03 de ensino, os estudantes tiveram uma boa compreensão daquilo que lhes fora proposto, como podemos observar nos diálogos onde destacamos o episódio episódio II, turnos: 147 a 178.

(147) **P** – (... Professor pede a um aluno do grupo B para fazer a leitura da terceira questão para a turma toda).

(148) **A** – Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os quatro dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

(149) **P** – Tá. Muito bem! Vamos lá. Qual foi o ano que o aluno nasceu?

(150) **A** – mil novecentos e oitenta e nove.

(151) **P** – Temos elementos repetidos?

(152) **A** – sim

(153) **P** – Então vamos logo preencher a ficha relativo à terceira questão. Quantos elementos "n" nós temos, respondam?

(154) **A** – Quatro.

(155) **P** – quantos elementos se repete?

(156) **A** – "um".

(157) **P** – Que elemento é esse?

(158) **A** – Nove.

(159) **P** – Quantas vezes ele se repete?

(160) **A** – Duas.

(161) **P** – Então, como é que fazemos para determinar o total de permutação. Na verdade, se todos os elementos fossem diferentes, seria permutação de quem? De quantos elementos?

(162) **A** – permutação de quatro.

(163) **P** – todo mundo concorda que é permutação de quatro?

(164) **A** – Sim

(165) **P** – Isso gente. Se fosse permutação de quatro, seria como?

(166) **A** – quatro fatorial.

(167) **P** – Como nós temos elementos repetidos, o que precisamos fazer para corrigir a quantidade de repetições excessiva? Como é que faz?

(168) **A** – Fazemos uma divisão.

(169) **P** – Aí eu faço uma divisão (pelo total de permutações repetidas) para corrigir os elementos que possivelmente, nós poderíamos está contando em excesso ok. Então vamos lá. Teríamos permutação de quatro (P4). (Professor escreve as operações no quadro). Nós temos na verdade?

(170) **A** – Quatro fatorial dividido por dois fatorial.

(171) **P** – Muito bem! E aí como é que eu faço?

(172) **A** – Quatro vezes três, vezes dois fatorial.

(173) **P** – Porque que eu posso encerrar aqui no dois fatorial?

(174) **A** – Porque o número está se repetindo duas vezes.

(175) **P** – Eu posso fazer o processo do cancelamento (simplificação)?

(176) **A** – Sim.

(177) **P** – Quem sobrou e qual é o resultado final?

(178) **A** – quatro vezes três. Igual a doze.

Nesta atividade, queríamos que os estudantes compreendesse o processo de como chegar ao resultado de Permutação com repetição. Mostramos aos alunos que nas permutações com repetições, a troca de posição dos elementos repetidos não formam novos agrupamentos. Para determinar o total de permutação com repetição, basta fazer a permutação de todos os elementos como se não tivesse repetições e em seguida divide-se o resultado pelas permutações dos elementos repetidos.

Em seguida apresentamos aos estudantes a formalização de Permutação com repetição no Data Show que levamos para sala de aula como apoio pedagógico, baseado em Dante (2016, p. 209),. Assim, consideramos a 3ª sugestão de Pinheiro e Sá (2010) que orienta para a sistematização do conceito e do conteúdo que se pretende trabalhar. Além da 5ª fase do modelo de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019), como consta em nossa fundamentação teórica e metodológica, onde descreve que o professor demonstre a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas as situações.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões de cada grupo na Atividade 03 de ensino.

Quadro 33 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 03. (continua)

Alunos	Conclusões	Validade
A01 A02 A03	<p style="text-align: center;">Grupo A</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutação com repetição em cada uma das questões? <i>É preciso realizar uma divisão, pois possui elementos que se repetem.</i></p> <p>Conclusão: <i>Por meio da divisão é possível encontrar os elementos agrupados, pois será necessário realizar essa divisão já que possui elementos repetidos.</i></p>	Análise válida para o cálculo de permutação com repetição.
	<p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo A:</p> <p>É preciso realizar uma divisão, pois possui elementos repetidos. Por meio da divisão é possível encontrar os elementos agrupados, pois será necessário realizar essa divisão já que possui elementos repetidos.</p>	
	<p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>O grupo A percebeu que para obtermos o resultado é necessário realizar uma divisão, pois por meio dessa divisão é possível encontrar os elementos agrupados. Porém o grupo não informou que essa divisão é feita para corrigir os agrupamentos contados em excesso, em virtude dos elementos repetidos, que ao serem trocados de posição, não geram novos agrupamentos. É importante destacar que a divisão informada pelo referido grupo, deve ser feita após o resultado de todas as permutações e em seguida divide-se este resultado pelas permutações dos elementos repetidos.</p>	
B01 B02 B03	<p style="text-align: center;">Grupo B</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutação com repetição em cada uma das questões? <i>É preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos</i></p> <p>Conclusão: <i>Trocando a ordem dos elementos não altera os agrupamentos</i> <i>É preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos.</i></p>	Análise válida para o cálculo de permutação com repetição.
	<p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo B:</p> <p>É preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos. Trocando a ordem dos elementos não altera os agrupamentos.</p>	
	<p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p>	

	<p>O grupo B percebeu que para obtermos o resultado é preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos, percebeu ainda que trocando a ordem dos elementos não altera os agrupamentos. É importante frisar que a divisão informada por eles, deve ser feita após o resultado de todas as permutações e em seguida divide-se este resultado pelas permutações dos elementos repetidos.</p>	
<p>C01 C02 C03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo C</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutação com repetição em cada uma das questões?</p> <p><i>Identificar o número de elementos e depois fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos</i></p> <p>Conclusão:</p> <p><i>Trocando a ordem dos elementos não altera os agrupamentos. É preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos.</i></p> <p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo C:</p> <p>Identificar o número de elementos e depois fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos. Trocando a ordem dos elementos não altera os agrupamentos. É preciso fazer uma divisão pelo total de elementos repetidos.</p> <p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>O grupo C percebeu que para obtermos o resultado é preciso identificar o número de elementos, em seguida faz-se uma divisão pelo total de elementos repetidos. Percebeu ainda que trocando a ordem destes elementos não altera os agrupamentos. É importante frisar que a divisão informada pelo grupo, deve ser feita após o resultado de todas as permutações e em seguida divide-se este resultado pelas permutações dos elementos repetidos.</p>	<p>Análise válida para o cálculo de permutação com repetição.</p>
<p>D01 D02 D03</p>	<p style="text-align: center;">Grupo D</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutação com repetição em cada uma das questões?</p> <p><i>É preciso calcular e dividir</i></p> <p>Conclusão:</p> <p><i>É necessário que se realize uma divisão</i></p> <p style="text-align: center;">Transcrição da conclusão do Grupo D:</p> <p>É preciso calcular e dividir. É necessário realizar uma divisão.</p> <p style="text-align: center;">Análise da conclusão:</p> <p>Embora o grupo tenha informado em sua conclusão a necessidade de se calcular e dividir para encontrar o total de permutações com repetição, não informou de que maneira é feito este cálculo, divisão e para que serve.</p>	<p>Análise válida para o cálculo de permutação com repetição.</p>

Concluimos que os alunos alcançaram o objetivo proposto na atividade 03 de ensino que era compreender o processo de como chegar ao resultado de permutação com repetição.

Seguiremos com os protocolos das questões resolvidas de forma individual pelos estudantes, onde seguimos as recomendações de Onuchic *et al.* (2014), para a resolução de problema propostas por Polya (1945).

Quadro 34 - Questões resolvidas na Atividade 03 pelos alunos A02.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **OVO**? $P_3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$

02. Determine o número de anagramas da palavra **ANA**? $P_3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$

03. Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição? $P_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$

04. Quantos anagramas tem a palavra **CAMA**? $P_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$

05. Trocando de posição os algarismos 1, 1, 2, 2, 3 quantos números de cinco algarismos podemos formar? $P_5 = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$

06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **ARARA**?
 $P_5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Observamos que os estudantes **A02** e **B03** responderam as questões corretamente fazendo uso da ideia de Fatorial e Permutação de “n” elementos, corrigindo as contagens em excesso por meio da divisão entre o total de permutações e as permutações dos elementos repetidos, conforme podemos observar nas resposta do aluno A02, no Quadro 34.

Quadro 35 - Questões resolvidas na Atividade 03 pelo aluno C03.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **OVO**? $\frac{3!}{2!} = 3$

02. Determine o número de anagramas da palavra **ANA**? $\frac{3!}{2!} = 3$

03. Um aluno, que nasceu em **1989**, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição? $\frac{4!}{1!1!1!1!} = 24$

04. Quantos anagramas tem a palavra **CAMA**? $\frac{4!}{1!1!1!1!} = 24$

05. Trocando de posição os algarismos 1, 1, 2, 2, 3 quantos números de cinco algarismos podemos formar? $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$

06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **ARARA**? $\frac{5!}{3!2!} = 10$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Observamos no Quadro 35 que o estudante **C03** respondeu as questões corretamente fazendo uso da ideia de Fatorial e Permutação de “n” elementos e anagramas. Corrigindo as contagens em excesso por meio da divisão entre o total de permutações e as permutações dos elementos repetidos.

Para fixar o assunto estudado, distribuímos várias questões de aprofundamento seguindo as recomendações do modelo de SD de Zabala (1998 *apud* SILVA, 2019) e Pinheiro e Sá (2010). Resolvemos algumas questões, as outras, os estudantes levariam para exercitarem em casa.

Nosso objetivo, além de aprofundar o conteúdo, era lembrar o que foi aprendido, principalmente por conta do pequeno tempo que ainda tínhamos neste encontro. Contudo, ao final tivemos uma boa compreensão daquilo que fora proposto aos estudantes. A seguir descreveremos a nossa quarta atividade de ensino (Permutação Circular).

5. 1. 3. 3 Quarta Atividade de Ensino

A nossa quarta atividade, correspondeu ao assunto de Permutação Circular, foi realizada no dia 10 de dezembro de 2021 (sexta-feira), no período da tarde das 16:20h às 17:10h. Após um intervalo de 15 minutos que demos para os alunos descansarem, a sala de aula já estava preparada para iniciarmos a referida Atividade de Ensino.

Foi mantida a mesma formação dos grupos das aulas anteriores. Distribuímos cópias a cada grupo e a cada estudante contendo os procedimentos e as questões a serem respondidas, bem como a ficha de respostas necessárias para sua realização.

Solicitamos aos estudantes que fizessem uma leitura minuciosa dos procedimentos contidos na folha de atividade e após esta leitura, poderiam responder às perguntas solicitadas. Seguimos as orientações de Dante (2009), Zabala (1998), Pinheiro e Sá (2010) e Polya (1945), conforme já descrevemos nas atividades anteriores.

Nosso objetivo, nesta atividade era fazer com que os grupos preenchessem a ficha de respostas a seguir e, percebessem o padrão e compreendessem o processo de como chegar ao resultado uma Permutação Circular. Além de formalizar uma conclusão sobre o Assunto.

os alunos poderiam resolver as questões da maneira que achassem mais conveniente (poderiam montar as possibilidades, listá-las, usar calculadora, raciocínio lógico e etc.), além dos conhecimentos adquiridos na oficina de revisão, sempre discutindo as soluções em grupo, que preenchessem a ficha de respostas conforme o que estava sendo proposto na atividade 04 de ensino.

Quadro 36 - Ficha resposta a ser preenchida na Atividade 04.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90°, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutações circulares em cada uma das questões?

Conclusão:

Os quadros a seguir apresentam os extratos de protocolo dos grupos para a atividade 04 de ensino sobre Permutação Circular. O leitor poderá ir até a atividade 04 de ensino no apêndice para verificar as questões apresentadas.

Quadro 37 - Ficha resposta preenchida na Atividade 04 pelo grupo B.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90°, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª	3	X	—	—	X	2
2ª	4	X	—	—	X	6
3ª	5	X	—	—	X	24
4ª	5	X	—	—	X	24

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Os grupos **B e D** identificaram a quantidade de elementos “n”, responderam as questões 1ª, 2ª e 3ª corretamente. Na 4ª questão, ao determinar o total de permutações circulares, os grupos não perceberam que as duas amigas deveriam ficar juntas formando apenas um elemento, não havendo restrição para a posição delas, podendo trocar de posição, neste caso deveriam dividir o resultado das permutações por 4 e efetuar a multiplicação do resultado por 2! (que corresponde a permutação das duas amigas que deveriam ficar juntas), onde o resultado ficaria 12, o grupos informou 24 como resposta, conforme podemos observar na ficha do grupo B, Quadro 37.

Quadro 38 - Ficha resposta preenchida na Atividade 04 pelo grupo C.

Questões	Quantidade total de elementos (n)	Fazendo rotações (giros) de 90°, as configurações ficam iguais?		Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?		Total de permutações
		Sim	Não	Sim	Não	
1ª	3	X			X	2
2ª	4	X			X	6
3ª	3	X			X	24
4ª	5	X			X	6

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Os grupos **A e C** identificaram a quantidade de elementos “n”, respondeu as questões 1ª, 2ª e 3ª de forma correta. Na coluna total de permutações, ao determinar o total de permutações circulares, o grupo não percebeu que não há restrição para a posição das duas amigas, elas podem trocar de posição, neste caso deveriam efetuar a multiplicação do resultado 6 (seis) por 2! (que corresponde a permutação das duas amigas que deveriam ficar juntas), onde o resultado ficaria 12, conforme podemos observar na ficha do grupo **C**, Quadro 38.

Ao serem questionados: fazendo rotações, ou seja, giros de 90°, as configurações ficam iguais? Todos os grupos responderam “sim”. Trocando as pessoas (elementos) de posição os agrupamentos ficam iguais? a resposta dos grupos foi “não”, consideramos estas respostas dadas pelos estudantes como ideias válidas para o estudo de permutação circular. Fizemos alguns exemplos de rotações (giros) de 90° no quadro com algumas questões para que os alunos percebessem estas ideias.

Na atividade 04 de ensino, os estudantes tiveram uma boa compreensão daquilo que lhes fora proposto, como podemos observar nos diálogos onde destacamos o episódio III, turnos: 291 a 299 e 333 a 340.

(291) **P** – ... (Aluna fez a leitura da segunda questão). De quantas formas distintas quatro crianças: Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?

- (292) **P** – ... (Professor faz a ilustração com a primeira letra das crianças no quadro)
... Eu pergunto para vocês. Qual é a quantidade “n” de elementos da segunda questão?
- (293) **A** – Quatro.
- (294) **P** – Todo mundo concorda? Sim ou não?
- (295) **A** – Sim.
- (296) **P** – Fazendo rotações ou giros de noventa graus as configurações ficam iguais?
- (297) **A** – Sim.
- (298) **P** – Agora vamos lá. Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?
- (299) **A** – Não
- (333) **P** – Isso. No restante das questões, vocês fazem a mesma técnica. Na segunda questão, temos quantos elementos “n”
- (334) **A** – Quatro.
- (335) **P** – Como eles vão estar em forma circular, faz o quê? .. Diminui quanto?
- (336) **A** – “um”
- (337) **P** – Certo! diminui uma unidade. Vai ficar quanto?
- (338) **A** – Três fatorial
- (339) **P** – Muito bem! Vai dar quanto?
- (340) **A** – Seis

Ressaltamos que à medida que os alunos apresentavam alguma dificuldade estávamos constantemente indo de grupo em grupo para tirar as suas dúvidas. Nesta atividade, queríamos que os estudantes compreendesse o processo de como chegar ao resultado de permutação circular. Mostramos a eles que nas permutações circulares, se pegarmos uma determinada configuração e não trocarmos a posição relativa entre os elementos e apenas girá-los, fazendo rotações de 90° graus, não formamos novos agrupamentos, podendo assim ter agrupamentos em excesso.

Para corrigir essa contagem indevida, basta identificar a quantidade de elementos “n”, em seguida calculamos as permutações como se fosse permutações simples de “n” fatorial e dividimos o resultado pelo número destes elementos.

Escrevemos no quadro:

Para calcularmos a permutação circular de 3 elementos, fazemos da seguinte maneira.

$$\frac{3!}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2!}{\cancel{3}} = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Para calcularmos a permutação circular de 4 elementos, fazemos da seguinte forma.

$$\frac{4!}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 3!}{\cancel{4}} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Em seguida pedimos que os estudantes informassem como seriam efetuados os cálculos para calcular as permutações circulares de 5 e 6 elementos. Eles responderam, que para a permutação de 5 elementos, divide 5! Por 5 que é igual a 4!, que é igual a 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1, sendo 24 a resposta e para a permutação de 6 elementos divide 6! Por 6 que é igual a 5! que é igual a 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1, que é igual a 120.

Nesta hora percebemos, que estávamos no momento certo para anunciarmos que a permutação circular de “n” elementos é igual a (n - 1)!

Em seguida apresentamos aos estudantes a formalização de Permutação Circular no Data Show que levamos para sala de aula como apoio didático, baseado em Para Carvalho (2015). Assim, consideramos a 3ª sugestão de Pinheiro e Sá (2010) que orienta para a sistematização do conceito e do conteúdo que se pretende trabalhar. Além da 5ª fase do modelo de Zabala (1998 *apud* SILVA 2019), como consta em nossa fundamentação teórica e metodológica, onde descreve que o professor demonstre a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas as situações.

A seguir, mostraremos a análise das conclusões de cada grupo na Atividade 04.

Quadro 39 - Análise das conclusões dos grupos sobre a atividade 04. (continua)

Alunos	Conclusões	Validade
A01 A02 A03	<p>Grupo A</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutações circulares em cada uma das questões?</p> <p><i>Calcular o número de permutações e dividir o número de elementos</i></p> <p>Conclusão:</p> <p><i>Primeira calcular o número de permutações e depois dividirmos o número de elementos.</i></p>	<p>Análise parcialmente válida para o estudo de permutação circular.</p>

	<p>Transcrição da conclusão do Grupo A: Precisa-se calcular o número de permutações e logo depois dividimos o número de elementos.</p>	
	<p>Análise da conclusão: O grupo A percebeu que para obtermos o resultado é necessário determinar o número de permutações E em seguida dividimos o número de elemento. É importante frisar que a “divisão” em que o grupo se refere, deve ser efetuada entre o total de permutações e o número de elementos do agrupamento.</p>	
<p>B01 B02 B03</p>	<p>Grupo B</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutações circulares em cada uma das questões?</p> <p><i>Fazer a divisão</i></p> <p>Conclusão:</p> <p><i>Segundo as rotacões as configurações permanecem iguais</i></p> <p><i>Calculamos de permutações e ocorre a divisão pela quantidade de elementos</i></p> <p>Transcrição da conclusão do Grupo B: Fazendo as rotações as configurações permanecem iguais. Calculamos de permutações e ocorre a divisão pela quantidade de elementos.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo B percebeu que para obtermos o resultado é necessário calcularmos o número de permutações, ocorrendo a divisão desta pela quantidade de elementos. O referido grupo descreve ainda que ao fazer as rotações as configurações permanecem iguais. É importante frisar que a “divisão” em que o grupo se refere, deve ser efetuada entre o total de permutações e o número de elementos do agrupamento.</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação circular.</p>
<p>C01 C02 C03</p>	<p>Grupo C</p> <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutações circulares em cada uma das questões? <i>Calculamos o número de permutação e dividimos pela quantidade de elementos.</i></p> <p>Transcrição da conclusão do Grupo C: Calculamos o número de permutações e dividimos pela quantidade de elementos.</p> <p>Análise da conclusão: O grupo C percebeu que para obtermos o resultado é necessário calcularmos o número de permutações e em seguida dividimos o resultado pela quantidade de elementos. É importante frisar que estes elementos são formadores dos agrupamentos.</p>	<p>Análise válida para o estudo de permutação circular.</p>

D01 D02 D03	Grupo D <p>O que é preciso fazer para corrigir o número de agrupamentos que estão em excesso e chegar ao resultado correto, determinando o número total de permutações circulares em cada uma das questões?</p> <p>Conclusão:</p> <p><i>Calculamos o número de agrupamentos e dividimos pela quantidade de elementos.</i></p>	Análise válida para o estudo de permutação circular.
	Transcrição da conclusão do Grupo D: Calculamos o número de permutações e dividimos pela quantidade de elementos.	
	Análise da conclusão: O grupo D percebeu que para obtermos o resultado é necessário calcularmos o número de permutações e em seguida divide-se o resultado pela quantidade de elementos. É importante ressaltar que estes elementos formam os agrupamentos.	

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Concluimos que os alunos alcançaram o objetivo proposto na atividade 04 de ensino que era de compreender o processo de como chegar ao resultado de permutação circular.

Seguiremos com os protocolos das questões resolvidas de forma individual pelos estudantes, onde seguimos as recomendações de Onuchic *et al.* (2014), para a resolução de problema propostas por Polya (1945), também já descritos nas atividades anteriores.

Quadro 40 - Questões resolvidas na Atividade 04 pelo aluno B02.

<p>1. De quantes modos podemos dispor 3 amigos (Antônio, Bia e Carlos) num círculo em lugares equidistantes? (com a mesma distância entre eles).</p> <p>$P_3 \equiv (3-1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$</p> <p>2. De quantas formas distintas 4 crianças Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular? $4-1 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$</p> <p>3. De Quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda? $5-1 = 4! = 24$ ($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$)</p> <p>4. Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas. $5-1 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$</p>
--

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Observamos no Quadro 40 que o estudante **B02** respondeu a 1ª, 2ª e 3ª questões corretamente fazendo uso da ideia de Fatorial de $(n - 1)!$. Na quarta questão, errou nos cálculos. Não percebeu que as duas amigas deveriam ficar juntas formando apenas um elemento, e como não houve restrição para a posição, elas poderiam trocar de posição, neste caso deveria dividir o resultado das permutações por 4 e efetuar a multiplicação do resultado por 2!. Ao invés de ter como resultado 24, seria $2 \cdot 6 = 12$.

Quadro 41 - Questões resolvidas na Atividade 04 pelo aluno C03.

1. De quantos modos podemos dispor 3 amigos (Antônio, Bia e Carlos) num círculo em lugares equidistantes? (com a mesma distância entre eles).
 $P_3 = \frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2!}{3} = 2! = 2$

2. De quantas formas distintas 4 crianças Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?
 $P_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

3. De Quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?
 $P_5 = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

4. Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas.
 $P_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Observamos no Quadro 41 que o estudante **C03** respondeu a 1ª, 2ª e 3ª questões corretamente fazendo uso da ideia de Fatorial efetuando a divisão entre o total de Permutação $(n!)$ e o número de elementos do agrupamento. Na quarta questão, errou nos cálculos não percebeu que as duas amigas deveriam ficar juntas formando apenas um elemento, e como não houve restrição para a posição, elas poderiam trocar de posição, neste caso deveria dividir o resultado das permutações por 4 e efetuar a multiplicação do resultado por 2!. Ao invés de ter como resultado 6, seria $2 \cdot 6 = 12$.

Para fixar o assunto estudado, distribuimos várias questões de aprofundamento seguindo as recomendações do modelo de SD de Zabala (1998 *apud* SILVA 2019) e Pinheiro e Sá (2010). Resolvemos algumas questões, as outras, os estudantes levariam para exercitarem em casa.

Nosso objetivo, além de aprofundar o conteúdo, era lembrar o que foi

aprendido, principalmente por conta do pequeno tempo que ainda tínhamos nesta atividade. Contudo, ao final tivemos uma boa compreensão daquilo que fora proposto aos estudantes.

A seguir descreveremos a análise *a posteriori* e validação.

5.2 Análise e Validação

A análise *a posteriori* e validação corresponde a quarta e última fase da Engenharia Didática. Esta fase segundo Pommer (2013), está sustentada em cima de um conjunto de informações adquiridas no decorrer do experimento, através das observações, produção escrita ou de som e registros realizados pelos alunos.

Para Artigue (1996), esta etapa se apoia no conjunto de informações produzidas no decorrer da experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos estudantes em sala de aula. Essas informações podem ser complementadas por dados obtidos pela utilização de metodologias externas como questionários, entrevistas individuais ou em grupos pequenos realizadas em vários momentos de ensino.

Assim, levaremos em consideração as informações obtidas na revisão de literatura, além dos dados fornecidos pelos estudantes por meio dos instrumentos de coleta de informações obtidos no diagnóstico com estudantes indicados anteriormente.

A validação é o processo de análise para identificação dos possíveis indícios de aprendizagem e conseqüentemente a avaliação das possíveis potencialidades da seqüência didática aplicada. Assim, apresento informações obtidas durante a fase da experimentação, ou seja, a aplicação da seqüência didática nas quais identifique os possíveis indícios de aprendizagem por parte dos estudantes, ao considerarmos os objetivos e habilidades que eram esperadas em cada atividade da seqüência didática sobre o estudo de Permutação

As análises do material produzido na aplicação da seqüência didática estruturadas foram feitas com o uso da Análise Microgenética, proposta por Góes (2000) e entendimento de Souza e Cabral (2010) e Kelman e Branco (2014) como abordagem metodológica de análise.

As atividades escritas respondidas pelos alunos, os áudios e a gravação de vídeo foram os recursos usados para registros do material analisado. Vale destacar

que foram consideradas apenas as interações verbais relacionadas ao objeto de estudo.

As interações verbais professor-aluno e aluno-aluno foram gravados, transcritos na ordem em que ocorreram e organizadas em turno, segmento e episódio e posteriormente analisados, seguindo as definições da análise microgenética. Para Macedo (219, p. 119):

- Turno: corresponde a fala do professor/pesquisador ou do aluno.
- Segmento: é conjunto de turnos transcritos em ordem cronológica de cada tarefa que compõe uma atividade, com vistas a alcançar os objetivos propostos.
- Episódio: conjunto de segmentos, correspondente a cada atividade.

para fins de análises das interações verbais entre estudante-estudante e professor-estudante, Souza e Cabral (2010), consideram que os diálogos devem ser subdivididos em episódios, esses, em segmentos e esses, em turnos. Os turnos foram numerados de acordo com a fala, silêncios e manifestações distintas relativas a cada interlocutor.

A seguir exibimos no Quadro 42 a estrutura das análises feitas, sistematizamos a estrutura dos recortes empregados para análise da sequência didática sobre Permutação, onde é apresentado episódio, atividade, descrição, segmento, objetivo e turno. Vejamos.

Quadro 42 - Sistematização dos recortes utilizados nas análises.

Episódio	Atividade	Descrição	Seguimento	Objetivo	Turno
I	Permutação Simples	Situação didática. Os estudantes responderam algumas perguntas. Com essas perguntas, conceituaram e identificaram um padrão para Permutação Simples. Assim foi feita sua formalização.	1	Conceituar Permutação Simples e Descobrir uma forma prática de determinar o total Permutação Simples.	1 - 71
			2	Descobrir uma forma prática de determinar o total Permutação Simples.	72 -111
II	Permutação com Repetição	Situação didática. Os	3	Descobrir uma forma prática	112-233

		estudantes responderam algumas perguntas. Com essas perguntas, identificaram um padrão para Permutação com Repetição. Assim foi feita sua formalização.		de determinar o total de Permutações com Repetição.	
III	Permutação Circular	Situação didática. Os estudantes responderam algumas perguntas. Com elas, identificaram um padrão para Permutação Circular. Assim foi feita sua formalização.	4	Descobrir uma forma prática de determinar o total de Permutações Circulares.	234 - 348

Fonte: Adaptado de Macedo (2019).

A seguir, apresentamos os episódios de ensino que ocorreram durante as aulas. Seguimos as seguintes sugestões de Pinheiro e Sá (2010): (Sugestões: 6, 8, 9, 10), Góes (2000) e Souza e Cabral (2010) sobre análise microgenética. Além de Polya (1945) com entendimento de Dante (2009) e Onuchic *et al.* (2014) sobre resolução de problema.

5.2.1 Processo de Análise Microgenética

No início das atividades, expliquei aos estudantes a finalidade e importância da pesquisa, que fazia parte do meu mestrado profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, e a participação destes era muito importante para a análise da pesquisa. Informei que iria fazer perguntas orais aos estudantes para ver suas respostas e raciocínios em cada etapa das atividades.

Expliquei também que iria gravar as respostas dos estudantes, pois faz parte do processo da pesquisa armazenar os diálogos em sala de aula, para que, posteriormente, pudesse transcrever os diálogos entre professor estudante e estudante-estudante. Para tanto utilizamos a abordagem metodológica “análise

microgenética” proposta por Góes (2000) que conceitua como: uma forma de construir informações que requer atenção a detalhes e os recortes de episódios interativos, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, tendo como resultado uma narrativa minuciosa dos acontecimentos.

Dessa forma seguimos as ideias de Barbosa e Vaz (2019) que destacam quatro preceitos que orientam uma análise microgenética:

- 1 – Os indivíduos são observados por um período de mudança no desenvolvimento, indicando a mudança individual como unidade de análise;
- 2 – As observações são realizadas antes durante e depois de um episódio no qual uma rápida mudança ocorre;
- 3 – Os dados são produzidos com elevada densidade de observações relativas ao período de mudança no desenvolvimento;
- 4 – Os comportamentos observados são intensivamente analisados, qualitativamente e quantitativamente, com objetivo de identificar processos que dão origem à mudança no desenvolvimento.

A análise microgenética no ambiente escolar permite observar como acontece o processo ensino-aprendizagem, quais são as qualidades do contexto de determinada sala de aula, e assim detectar quais são as habilidades comunicativas necessárias durante as interações que facilitam o processo de aprendizagem. Kelman e Branco (2004).

Assim as interações dos diálogos por meio das observações na sala de aula, entre professor-estudante e estudante-estudante, nos deram suporte para encontrar os indícios de aprendizagem dos estudantes.

Durante os episódios destacamos alguns turnos que transcorreram no processo das atividades e que demonstram a participação e o entendimento dos estudantes, conforme apresentamos a seguir. Indicamos a fala do professor com a letra “P” e a fala dos alunos por “A”.

Episódio I

Turnos de 1 – 111

Segmento 1
Turnos de 1 – 71

O objetivo das atividades de ensino 01 e 02 era fazer os estudantes perceberem a quantidade “n” de elementos, a relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades propostos nos problemas para chegar a sua conclusão. Assim conceituar e determinar o total de permutação simples. Além de fazer os alunos perceberem que para determinar as permutações de uma certa quantidade “n” de elementos, basta calcular “n” fatorial

(1) **P** – ... Vocês vão preencher essa ficha de respostas aqui, tá. Vocês vão fazer a leitura das questões direitinho Daqui a pouco a gente vai fazer os questionamentos para vocês. Cada um vai responder de acordo com o que vocês entenderam ... tá bom.

(2) **A** – Tá bom.

(3) **P** – Na primeira questão nós temos os algarismos dois, três e quatro ... qual é a quantidade “n” de elementos?

(4) **A** – Três elementos.

(5) **P** – Três elementos, então vocês vão preencher lá na ficha, certo. Trocando os algarismos de posição, formamos números diferentes?

(6) **A** – Sim.

(7) **P** – Vamos ter a primeira, segunda e terceira posição. Então vocês vão contar o número de possibilidades. Na primeira posição, vamos ter quantas possibilidades?

(8) **A** – Três possibilidades.

(9) **P** – Na segunda posição, quantas possibilidades?

(10) **A** – duas.

(11) **P** – Na terceira?

(12) **A** – uma possibilidade.

(13) **P** – o que é preciso fazer para encontrar o total

(14) **A** – uma multiplicação: três vezes dois, vezes um.

(15) **P** – Certo. Essa que é a ideia. Então três vezes dois, vezes um, vai dar quanto?

(16) **A** – Seis.

(17) **P** – Vocês estão conseguindo responder as questões e preencher a ficha de respostas? (professor dar um tempo de alguns minutos para os alunos responderem as questões e preencherem a ficha de respostas).

(18) **A** – sim.

- (19) **A** – Estou Fazendo a primeira questão.
- (20) **A** – Deu nove.
- (21) **A** – Não.
- (22) **A** – É com dois, três e quatro.
- (23) **A** – Duzentos e trinta e quatro, duzentos e quarenta e três.
- (24) **A** – Trezentos e vinte e quatro, trezentos e quarenta e dois
- (25) **A** – Quatrocentos e vinte e três, quatrocentos e trinta e dois
- (26) **A** – tá certo. Acabou
- (27) **A** – ...Trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades ... onde que está as meninas? (aluno fazendo a leitura da quinta questão e interagindo com o grupo para entender como resolver).
- (28) **A** – Quer dizer somente os meninos ...
- (29) **A** – Eu quero saber quantas meninas.
- (30) **A** – Qual a possibilidade de os quatro ... a tá certo os quatro meninos
- (31) **P** – O que vocês acham que pode ser uma permutação? (professor retoma o debate na sala de aula). Então eu pergunto para o grupo “A”.
- (32) **A** – É uma troca dos elementos.
- (33) **P** – Eu pergunto ao grupo “B”. Vocês concordam com a resposta dos colegas?
- (34) **A** – Sim.
- (35) **P** – O grupo “C” concorda também com os colegas?
- (36) **A** – sim.
- (37) **P** – O grupo “D” concorda?
- (38) **A** – sim
- (39) **P** – Vocês gostariam de acrescentar mais alguma coisa? Muito bem! Então resumindo. Permutação é ... o que mesmo? Vamos lá, ...?
- (40) **A** – Troca da posição dos elementos.
- (41) **P** – Muito bem. Então olha só gente, se nós tivéssemos por exemplo. Quatro pessoas pra dispor em uma fila. A Pessoa “A”, a Pessoa “B”, a Pessoa “C”, e a pessoa “D”. olhem pra cá gente. Eu tenho as quatro pessoas para distribuir na fila. Como que eu faço? A gente viu que quando temos quatro elementos pra distribuir em uma fila. Psiu! Nós podemos está utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C) né. O que que se refere o Princípio Fundamental da Contagem?
- (42) **A** – Uma multiplicação
- (43) **P** – Como é que eu faço. Eu identifico o número de possibilidades em cada uma

das etapas. Não é isso.

(44) **A** – sim.

(45) **P** – Depois eu faço o que?

(46) **A** – Multiplica

(47) **P** – Isso. Multiplica o número de possibilidade entre as etapas. Não é isso. Muito bem. Então podemos também gente, olhem só. Nós temos quatro elementos tá. Podemos trabalhar o fatorial de quatro. Fatorial de quatro quanto vem ser?

(48) **A** – Quatro vezes três, vezes dois, vezes um que é igual a vinte e quatro.

(49) **P** – Então para a permutação de quatro elementos (P_4) eu utilizo quatro fatorial ($4!$). Se é três elementos, eu utilizo a permutação de três elementos que vem ser igual a três fatorial ($3!$). e se for cinco elementos. Vai ser permutação de quem?

(50) **A** – permutação de cinco elementos.

(51) **P** – Vai dar quanto? Em gente vai dar quanto?

(52) **A** – Cinco fatorial.

(53) **P** – E fatorial de cinco vai dar quanto. Vamos lá gente.

(54) **A** – Cinco vezes quatro, vezes três, vezes dois, vezes um.

(55) **P** – Muito bem! Vai dar quanto?

(56) **A** – 120.

(57) **A** – Agora ... eu disponho de “n” elementos para eu fazer essa permutação, ou seja, a troca dos elementos de posição ... como é que eu faço?

(58) **A** – “n” fatorial.

(59) **P** – Então ... prestem atenção que aqui, nós temos uma pequena fórmula para a gente utilizar em uma certa quantidade de números, elementos ou objetos. Para fazer a permutação, basta que a gente calcule na verdade o fatorial de “n” elementos. Se esse “n” elementos for quatro, vai ficar?

(60) **A** – Quatro fatorial.

(61) **P** – Se “n” for três, vai ficar?

(62) **A** – Três fatorial.

(63) **P** – E se for cinco?

(64) **A** – cinco fatorial.

(65) **P** – Então podemos ter Permutação de “n” elementos que é igual a “n” fatorial, ou seja $P_n = n!$.

(66) **P** – (No final da atividade o professor dispõe para os alunos alguns minutos para praticarem o material manipulativo com Algarismos e alfabeto móvel e faz algumas

perguntas sobre o uso deste material). Vocês estão conseguindo desenvolver a ideia das trocas das letras (permutação) e números, em pessoal?

(67) **A** – sim.

(68) **P** – Estão não é. Vocês estão percebendo que é interessante utilizar essa brincadeira como recurso didático para facilitar a aprendizagem?

(69) **P** – estamos

(70) **P** – Pronto! Em relação a questão da brincadeira com o material utilizando aqui as letras para formar os anagramas, ... vocês acham que compreendem melhor as ideias de permutação?

(71) **A** – Sim, Sim.

Segmento 2

Turnos de 72 – 111

(72) **P** – (Professor faz a leitura da 1ª questão da atividade 02 de ensino e pergunta para os alunos). Vamos lá! Grupo A, o que se pede na primeira questão?

(73) **A** – Determine o número de anagramas que começam com a letra “F”

(74) **P** – Certo! Olhem só eu pergunto para o grupo B. Quantas letras nós temos na palavra festa?

(75) **A** – Cinco.

(76) **P** – Muito Bem! Então eu vou perguntar agora para o grupo D. Ele está pedindo para fixar qual letra?

(77) **A** – A Letra “F”

(78) **P** – Letra “F” não é. O grupo C concorda?

(79) **A** – Sim.

(80) **P** – Então vamos lá. Vejam só gente. Nós podemos até usar a ideia dos tracinhos não é. Porque é muito útil para resolver esse tipo de questão. (professor faz alguns tracinhos no quadro). Agora prestem atenção. Ele tá pedindo para fixar qual letra?

(81) **A** – letra “F”

(82) **P** – Muito bem! Então vamos fixar a letra “F”. Aí vocês já vão preenchendo na ficha de resposta. Tá bom! Qual a quantidade “n” de elementos?

(83) **A** – Cinco.

(84) **P** – Então preencham aí. Vocês agora vão preencher a ficha do grupo. Continuando. Psiu! Vamos fazer silêncio. Qual o número de possibilidade após a

fixação do elemento (F) para a primeira posição. Quantas possibilidades?

(85) **A** – Quatro possibilidades.

(86) **P** – Muito bem! Então escrevam aí. E para a segunda etapa ou posição. Vamos lá.

(87) **A** – Três.

(88) **P** – Então escrevam aí, três. E para a terceira posição ou etapa?

(89) **A** – Duas.

(90) **P** – Para a quarta?

(91) **A** – Uma possibilidade.

(92) **P** – ...Como fazemos para encontrar o total de anagramas ou permutações?

(93) **A** – multiplicamos as possibilidades.

(94) **P** – Certo! Quanto vai dar?

(95) **A** – vinte e quatro.

(96) **A** – Vamos para a segunda questão.

(97) **A** – Porque aqui ó. Quantos anagramas da palavra “festa” que começam com a letra “A” e terminam com “F”?

(98) **A** – Então coloca o “A” no começo e “F” no final

(99) **A** – Sobra três, dois ...

(100) **P** – ... (Professor faz a leitura da segunda questão e pergunta aos estudantes).
Quais as letras que precisamos fixar.

(101) **A** – As letras “A” e “F”.

(102) **P** – como fazemos para distribuir essas letras?

(103) **A** – colocamos a letra “A” no começo e “F” no final.

(104) **P** – Isso mesmo! Podemos usar novamente a ideia do tracinho (professor faz alguns tracinhos no quadro e pergunta, após fixar as letras “A” no início e “F” no final).

Quantas possibilidades nós vamos ter para a primeira posição ou etapa?

(105) **A** – Três possibilidades.

(106) **P** – Para a segunda

(107) **A** – Duas.

(108) **P** – E para a terceira posição??

(109) **A** – Uma possibilidade.

(110) **P** – e quanto vai ser o total de anagramas?

(111) **A** – seis.

Com estes diálogos, na atividade de ensino 01 e 02 (permutação simples), fizemos os alunos perceberem e definir um conceito para Permutação que é uma “troca das posições dos elementos”, conforme turnos 31 a 40. Quando o professor perguntou aos estudantes o que eles achavam que poderia ser uma permutação. Os alunos reponderam que é uma troca das posições dos elementos. Perceberam a quantidade total de elementos “n”, o número de possibilidade em cada etapa/posição das questões propostas como percebemos nos turnos apresentados.

Em seguida fizemos eles perceberem que o produto das possibilidades de cada etapa/posição dos elementos resulta no total de permutação, onde eles calcularam através do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) e Fatorial que foram bem explorados em nossa oficina de revisão. Com isto fizemos os alunos perceberem que para determinar as permutações de uma certa quantidade “n” de elementos, basta calcular “n” fatorial, como podemos encontrar nos turnos: 41 a 65.

Assim, por meio do desenvolvimento dessas operações, bem como o preenchimento da ficha de respostas, fizemos os alunos perceberem o padrão e chegarem à fórmula de permutação simples $P_n = n!$. Com estes diálogos os alunos apresentaram uma boa aprendizagem na Atividade 01 e 02 de ensino. Assim encerramos o episódio I. A seguir o episódio II.

Episódio II

Segmento 3
Turnos de 112 – 233

O objetivo desta atividade de ensino era fazer os estudantes perceberem a quantidade “n” de elementos, quantidade de vezes dentre os “n” elementos, um certo elemento se repete “a” vezes, “b” e assim, sucessivamente. Perceberem que a troca dos elementos repetidos não gera um novo anagrama ou agrupamento. Perceberem ainda que para determinar o total de permutação com repetição, basta fazer a permutação de todos os elementos como se não tivesse repetições (permutação simples) e em seguida dividir o resultado pela multiplicação das permutações dos elementos repetidos.

(112) **P** – (o professor distribuiu cópias da atividade e deu um tempo para os estudantes resolverem as questões propostas na atividade 03. Logo em seguida fez questionamentos). ... Bom! Gente olhem só, prestem atenção. Nós iremos agora dar continuidade as atividades. Como vocês já perceberam, essa atividade se refere a permutação com repetição. A atividade anterior foi sobre permutação simples. Vou só repetir. Para agente calcular a permutação simples de “n” elementos eu faço como? Vamos lá.

(113) **A** – “n” fatorial.

(114) **P** – Muito bem! Certo. Só lembrando, se eu tenho por exemplo permutação de quatro elementos. Então vai ficar como?

(115) **A** – Quatro fatorial. Quatro vezes três vezes dois vezes um que é igual a 24.

(116) **P** – Se for cinco, vou calcular por?

(117) **A** – cinco fatorial.

(118) **P** – Muito bem! E aí eu posso usar também a ideia do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.). Posso ou não posso?

(119) **A** – Pode.

(120) **P** – Posso, posso sim né. É isso aí! Então gente, para permutação com repetição, vamos chamar três voluntários para agente ver como é que vamos proceder. Tá bom! Podemos ter dois meninos e uma menina, pode ser? (os alunos se dirigiram à frente do quadro com as letras da palavra “OVO”. Professor põe a aluna com a letra “V”, entre os dois alunos com a letra “O”.) Todos prestando atenção para cá. Vai ficar assim, a menina fica no meio com a letra “V”. Já tá claro e evidente que nós temos aí na verdade a palavra?

(121) **A** – OVO.

(122) **P** – Agora deixa eu perguntar. Temos letras iguais

(123) **A** – Sim.

(124) **P** – Quais letras?

(125) **A** – Letra “O”.

(126) **P** – Olhem só esses dois “ÓS” que formam a palavra “OVO”, estão se repetindo, tá certo. Agora vamos trocar os rapazes (os alunos) de lugar (posição). Vamos lá. (professor troca os alunos com os “ÓS” de posição). Eu pergunto para vocês, mudou a palavra?

(127) **A** – Não.

(128) **P** – Temos a mesma palavra de antes. E trocando o “V” de posição (professor

troca a menina de posição duas vezes). Formamos a mesma palavra “OVO”

(129) **A** – Não.

(130) **P** – Formamos palavras diferentes?

(131) **A** – Sim.

(132) **P** – Quais palavras podemos ter?

(133) **A** – “VOO”.

(134) **P** – (professor muda novamente a menina de posição e pergunta). Que palavra temos agora?

(135) **A** – “OOV”.

(136) **P** – ... Ele pede quantos anagramas tem a palavra “OVO”. Olha só, a princípio quantas letras tem a palavra ovo?

(137) **A** – Três.

(138) **A** – Muito bem! Então vejam só. Nós temos aqui a palavra “ovo” (professor põe a palavra “ovo” no quadro, com os “ÓS” de cores diferentes.) Quando eu troco os “ÓS” agente percebeu que não forma um novo anagrama, um novo agrupamento. Seria, no caso se fossemos trabalhar com permutação simples, os “ÓS” se fossem diferentes agente trabalharia permutação de ... ?

(139) **A** – Três fatorial.

(140) **P** – que vai ser?

(141) **A** – Três vezes dois, vezes um.

(142) **P** – Muito bem! Acontece que a troca desses “ÓS” não vai gerar um novo anagrama, como nós escrevemos aqui. Certo! Mas vejam só. A ideia na verdade, se a gente fosse fazer todos os anagramas, a gente ia encontrar quanto?

(143) **A** – permutação de três.

(144) **P** – Vai dar quanto?

(145) **A** – seis.

(146) **P** – Muito bem! Nós iríamos está contando agrupamentos em excesso, ou seja, seis, certo! A gente poderia na verdade está trocando apenas a letra “V”.

(147) **P** – (... Professor pede a um aluno do grupo B para fazer a leitura da terceira questão para a turma toda).

(148) **A** – Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os quatro dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

(149) **P** – Tá. Muito bem! Vamos lá. Qual foi o ano que o aluno nasceu?

- (150) **A** – mil novecentos e oitenta e nove.
- (151) **P** – Temos elementos repetidos?
- (152) **A** – sim
- (153) **P** – Então vamos logo preencher a ficha relativo à terceira questão. Quantos elementos "n" nós temos, respondam?
- (154) **A** – Quatro.
- (155) **P** – quantos elementos se repete?
- (156) **A** – "um".
- (157) **P** – Que elemento é esse?
- (158) **A** – Nove.
- (159) **P** – Quantas vezes ele se repete?
- (160) **A** – Duas.
- (161) **P** – Então, como é que fazemos para determinar o total de permutação. Na verdade, se todos os elementos fossem diferentes, seria permutação de quem? De quantos elementos?
- (162) **A** – permutação de quatro.
- (163) **P** – todo mundo concorda que é permutação de quatro?
- (164) **A** – Sim
- (165) **P** – Isso gente. Se fosse permutação de quatro, seria como?
- (166) **A** – quatro fatorial.
- (167) **P** – Como nós temos elementos repetidos, o que precisamos fazer para corrigir a quantidade de repetições excessiva? Como é que faz?
- (168) **A** – Fazemos uma divisão.
- (169) **P** – Aí eu faço uma divisão (pelo total de permutações repetidas) para corrigir os elementos que possivelmente, nós poderíamos está contando em excesso ok. Então vamos lá. Teríamos permutação de quatro (P4). (Professor escreve as operações no quadro). Nós temos na verdade?
- (170) **A** – Quatro fatorial dividido por dois fatorial.
- (171) **P** – Muito bem! E aí como é que eu faço?
- (172) **A** – Quatro vezes três, vezes dois fatorial
- (173) **P** – Porque que eu posso encerrar aqui no dois fatorial?
- (174) **A** – Porque o número está se repetindo duas vezes.
- (175) **P** – Eu posso fazer o processo do cancelamento (simplificação)?
- (176) **A** – Sim.

(177) **P** – Quem sobrou e qual é o resultado final?

(178) **A** – quatro vezes três. Igual a doze.

(179) **P** – Ok, vocês já podem escrever aí. (professor pede para um outro aluno fazer a leitura da quinta questão).

(180) **A** – Trocando de posição os algarismos “um”, “um”, “dois”, “dois” e “três”, quantos números de cinco algarismos podemos formar?

(181) **P** – Muito bem! Observe que a quinta questão se refere (também) a uma certa quantidade de elementos. Nós temos elementos repetidos?

(182) **A** – Sim

(183) **A** – Que elementos são estes?

(184) **A** – “um” e “dois”

(185) **A** – Então vamos lá, (professor escreve os elementos no quadro). Nós temos na verdade quantos elementos?

(186) **A** – cinco.

(187) **A** – Preencham lá na ficha de vocês. Qual é a quantidade de elementos repetidos?

(188) **A** – Dois.

(189) **A** – Quantidade de vezes que eles se repetem?

(190) **A** – Quatro.

(191) **A** – (Professor percebe que os alunos se equivocaram ao informar a quantidade de vezes que os elementos se repetem, fez intervenção corrigindo o erro dos alunos). Na verdade, o elemento “dois” se repete quantas vezes?

(192) **A** – ... Duas.

(193) **P** – E o elemento “um” se repete quantas vezes?

(194) **A** – Duas.

(195) **P** – E para a gente determinar o total de permutações, faríamos como se fosse permutações simples, considerando todos os elementos diferentes?

(196) **A** – Não.

(197) **P** – Não né! Então vamos ver se vocês entendem melhor. Olhem só a ideia é como se estes elementos repetidos fossem diferentes. Vamos lá, temos quantos elementos?

(198) **A** – Cinco elementos.

(199) **P** – Se são cinco elementos, a princípio, a gente poderia trabalhar permutação simples de cinco elementos, correto?

(200) **A** – Isso.

(201) **P** – Quando a gente faz assim, vamos está fazendo contagem excessiva. Entenderam? Para corrigir essa contagem excessiva o que precisamos fazer?

(202) **A** – Uma divisão.

(203) **P** – Muito bem! Todos concordam com a resposta do colega?

(204) **A** – Sim.

(205) **P** – Neste caso aqui, gente, o algarismo “Um” se repete duas vezes e o algarismo “dois” se repete também duas vezes. Ficaria como? (professor expõe as operações no quadro). Dividimos cinco fatorial por quem?

(206) **A** – Por dois fatorial.

(207) **P** – Multiplicado por ...

(208) **A** – Dois fatorial.

(209) **P** – (Dividimos pela multiplicação das permutações dos elementos repetidos). Ficaria assim, todos prestando atenção para cá. A gente desenvolve este cinco fatorial do numerador até chegar em um valor igual ao denominador. Ficaria como?

(210) **A** – Cinco vezes quatro, vezes três, vezes dois.

(211) **P** – No dois eu finalizo e faço o que?

(212) **A** – põe o fatorial.

(213) **P** – E agora. ... (no denominador)?

(214) **A** – Dois fatorial vezes dois fatorial.

(215) **P** – Como é que faço? Posso fazer simplificação?

(216) **A** – pode.

(217) **P** – me ajudem a fazer este cálculo. Quem foi que sobrou

(218) **A** – Cinco vezes quatro, vezes três.

(219) **P** – Dividido por quem?

(220) **A** – Dois fatorial.

(221) **P** – O resultado final, quanto dar?

(222) **A** – Trinta.

(223) **P** – Então é isso aí gente. Vamos fazer a leitura da sexta questão. Vamos ouvir aqui a leitura do colega.

(224) **A** – Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra “ARARA”

(225) **P** – Certo ... (professor expõe a palavra “arara” no quadro e as operações) ... Um certo elemento se repete “a” vezes e um outro elemento se repete “b” vezes. Olha só, vamos pegar essa ideia, prestem atenção para cá. Na palavra “ARARA”, nós

temos quantos elementos?

(226) **A** – Cinco.

(227) **P** – destes cinco elementos, quais se repetem?

(228) **A** – O “A” e o “R”.

(229) **P** – Agora imagine que ao invés de termos cinco elementos, a gente tenha uma quantidade “n” de elementos, dentre estes “n” elementos, um certo elemento se repete “a” vezes e um outro elemento se repete “b” vezes. Como ficaria a permutação? Esse “n” elemento aqui é como se fosse o cinco, como ficaria?

(230) **A** – Permutação de “n” (P_n) igual a n fatorial.

(231) **P** – dividido por quem? Vamos lá!

(232) **A** – dividido por “a” fatorial (a!) multiplicado por b fatorial (b!)

(233) **P** – Muito bem! (professor expõe estas informações no quadro). Então gente, olha só, aqui vocês percebem, que a gente pode está, na verdade encontrando a permutação de um determinado elemento “n”, entre os quais um certo elemento se repete “a” vezes, um outro elemento se repete “b” vezes, outro “c” vezes e assim, por diante. Aqui, nós temos uma expressão para determinar as permutações com repetição.

Na atividade de ensino 03 (permutação com repetição), por meio dos diálogos, fizemos os estudantes perceberem a quantidade “n” de elementos, quantidade de vezes dentre os “n” elementos, um certo elemento se repete “a” vezes, “b” vezes e assim, sucessivamente conforme episódio II, turnos: 224 a 233.

Perceberam também que a troca dos elementos repetidos não gera um novo anagrama ou agrupamento, ver episódio II, turnos: 120 a 129. Onde o professor pôs uma aluna com a letra “V”, entre os dois alunos com a letra “O” e pediu para os alunos prestarem atenção. Informou que se tratava da palavra “OVO”. Em seguida o professor perguntou? Temos letras iguais? Os alunos responderam que “sim”.

O professor trocou os alunos com a letra “O” e perguntou se mudou a palavra. Os alunos responderam que “não”. Dessa forma os estudantes tiveram melhor compreensão quanto as trocas dos elementos repetidos.

Para fixar esta ideia, o professor apresentou aos alunos o material manipulativo (alfabeto móvel) que levou para sala de aula como apoio didático onde foi importante para os estudantes diferenciarem e perceberem quando a troca dos elementos forma ou não forma novos agrupamentos. Conforme episódio II, turnos: 120 a 146.

Perceberam que para determinar o total de permutação com repetição, basta fazer a permutação de todos os elementos como se não tivesse repetições e em seguida divide-se o resultado pela multiplicação das permutações dos elementos repetidos, conforme destacamos no episódio II, turnos: 180 a 222. O entendimento dessas informações foi importante para os estudantes perceberem o padrão e chegarem ao total de permutação com repetição.

De modo geral, nesta atividade, os grupos encontraram algumas dificuldades para resolver as questões propostas. Alguns alunos ainda estavam confusos quanto aos elementos repetidos, a quantidade de vezes que se repetem ver episódio II, turnos 189 a 195 e se a troca dos elementos repetidos gerava novos agrupamentos. Assim, ficamos atentos, íamos nos grupos para incentivá-los a não se esquecerem de verificar se os agrupamentos mudam quando os elementos repetidos são trocados de posição e que tentassem montar as possibilidades, para comparar com as respostas encontradas. Desse modo, íamos tirando as dúvidas dos estudantes com mais dificuldades.

Com estes diálogos os alunos apresentaram uma boa aprendizagem na Atividade 03 de ensino. Assim encerramos o episódio II e a seguir o episódio III.

Episódio III

Segmento 4
Turnos: 234 – 348

O objetivo desta atividade de ensino era fazer os estudantes perceberem a quantidade “n” de elementos, perceber que fazendo rotações ou giros de noventa graus no sentido horário ou anti-horário as configurações ficam iguais, ou seja, não geram novas configurações ou agrupamentos. Perceber que a troca de posição dos elementos, os agrupamentos não ficam iguais. Além de fazê-los perceberem que para determinar o total de permutação circular, basta fazer a permutação de todos os elementos “n”, isto é, n fatorial (n!), em seguida divide-se o resultado pela quantidade de elementos “n”.

(234) **P** – (o professor distribuiu cópias da atividade e deu um tempo para os estudantes resolverem as questões propostas na atividade 04. Logo em seguida deu

início as atividades, fazendo ilustração no quadro para exemplificar a posição de quatro pessoas em um ambiente de forma circular).

... Vamos ter (por exemplo) as pessoas A, B, C e D. Vamos fazer um giro. Pode ser no sentido horário ou anti-horário de noventa graus. O “A” vai passa pra cá (ocupa o lugar de “C”), o “C” vem para cá (ocupa o lugar de “B”), o “B” vem pra cá (ocupa o lugar de “D”) e assim por diante. O “B” vai permanecer sempre em frente do “A”. vocês estão percebendo a rotação e o giro?

(235) **A** – Sim.

(236) **P** – Esse giro na verdade é de noventa graus certo! Então vamos continuar fazendo esse giro(rotação). O “A” vai vim pra essa posição. O “B” vai continuar em frente o “A”, então vamos fixar logo. O “C” vem para cá e o “D” vem pra cá. Na verdade, são quatro elementos. Vamos fazer mais uma (professor faz mais uma rotação) ... o “B” vai estar em frente de “A” certo! Deu para perceber aí?

(237) **A** – Sim.

(238) **P** – O que nós queremos mostrar para vocês com isso, é que conseguimos na verdade quatro rotações, configurações idênticas e que era para ter apenas uma, certo! Observe que se fizermos mais uma rotação, vamos para o início ou seja lá para a primeira (configuração). Aqui nós pegamos na verdade, como se fosse quatro amigos. Nós podemos fazer com três, com cinco, com seis e assim por diante, de acordo com a situação (problema). Novamente nós temos quatro pessoas dispostas no círculo, fazendo a rotação, nós conseguimos quatro configurações idênticas. Contamos “quatro”, mas é como se tivéssemos contando somente “uma”. Certo. Para verificar uma configuração diferente, você troca por exemplo o “D” e o “C”, aí seria diferente. (professor faz ilustração no quadro e troca de posição os elementos “C” e “D”. Vamos fixar o “A” e “B”, vamos fazer agora uma troca que nós chamamos de “permutação entre “C” e “D”. Essa configuração aqui, na verdade não fizemos rotação. ... aqui, fizemos o que?

(239) **A** – Uma troca.

(240) **P** – Sim, temos uma configuração diferente. O que a gente quer mostrar para vocês é o seguinte, se eu tenho quatro configurações idênticas, se por exemplo tivéssemos que calcular essa permutação entre essas quatro pessoas, como fizemos no início, seria assim, permutação de quatro elementos. Isso aqui vai dar quanto? Agente viu lá na permutação simples.

(241) **A** – Quatro fatorial.

(242) **P** – Vocês concordam com ele?

(243) **A** – Sim.

(244) **P** – Beleza! Tranquilo! (professor expõe no quadro, quatro fatorial). Acontece que quando a gente faz isso na permutação circular, na verdade está contando de forma excessiva, ou seja, estamos contando “quatro” configurações idênticas, onde era para contar só “uma”. Essa aqui, certo! Para que a gente possa corrigir esse excesso, o que precisamos fazer? (professor mostra no quadro a ilustração das configurações em excesso).

(245) **A** – Dividir

(246) **P** – Dividir por...?

(247) **A** – Dividir por dois, não ...

(248) **A** – Dividir por quatro.

(249) **P** – Dividir por quatro não é. Ou seja pela quantidade de elementos. Agora aqui, se a gente fosse fazer direto, ia contar de forma excessiva. Certo! ... Observe, vai ter a seguinte situação (professor expõe as operações no quadro). Vamos dividir por quatro. Neste caso, não temos fatorial do denominador. Só a divisão pela a quantidade de elementos, que no caso é quatro. Como eu faço para resolver?

(250) **A** – Quatro vezes três.

(251) **P** – ... Detalhe, a gente vai botar o fatorial aqui, só para vocês observarem uma coisa, certo! Dividido por quatro. Como eu faço agora, neste caso específico? Quatro no numerador e quatro no denominador.

(252) **A** – Simplifica.

(253) **P** – Muito bem (professor simplifica os valores “Quatro”). E agora quem vai ficar

(254) **A** – Três fatorial

(255) **P** – Interessante que a gente pode perceber, o que aconteceu aí? Eu tinha quatro pessoas para dispor no círculo, eu vou trabalhar com três fatorial. Desenvolvendo, encontramos três fatorial. Se fosse cinco pessoas? Vamos lá. Se eu tivesse cinco pessoas para dispor em um círculo. Como é que eu faria. Seria permutação das cinco pessoas ... seria?

(256) **A** – Cinco fatorial.

(257) **P** – Muito bem! Dividido por quanto?

(258) **A** – Por quatro fatorial.

(259) **P** – (professor percebendo que o aluno se equivocou ao informar a quantidade correta para dividir, chamou a atenção da turma para correção do erro). Aqui agora eu

tenho cinco elementos. Vou dividir por quanto?

(260) **A** – Por cinco.

(261) **P** – Vou dividir por cinco porque a quantidade de elemento agora é cinco (professor expõe as operações no quadro). Agora quanto é que dar?

(262) **A** – Cinco vezes quatro ...

(263) **P** – Isso a gente coloca o fatorial para ver um detalhe. Divide por cinco. E agora o que precisa fazer.

(264) **A** – Simplifica.

(265) **P** – Vai ficar quanto aqui?

(266) **A** – Quatro fatorial.

(267) **P** – Muito bem! Observem que para quatro elementos em um círculo eu trabalho com três fatorial. Pra cinco eu vou trabalhar com quanto?

(268) **A** – quatro fatorial.

(269) **P** – E se tivermos, por exemplo, uma quantidade “n” de elementos. Como é que vou proceder? Se eu tenho quatro, diminui uma unidade, vou trabalhar com três fatorial. Com cinco elementos, diminui uma unidade, vou trabalhar com quatro fatorial. .. tá certo pessoal, pode ser?

(270) **A** – Sim.

(271) **P** – E com “n” elementos ... Vai ficar ...?

(272) **A** – “n” menos “um” fatorial.

(273) **P** – Muito bem! Então gente olhem só. A gente tem na verdade, uma formulazinha para calcular a quantidade “n” de elementos dispostos em forma circular. “Permutação circular”, na verdade vem ser aquela permutação em que os seus elementos vão esta dispostos em forma circular. Deu para perceber o que é uma permutação circular?

(274) **A** – Sim.

(275) **P** – Aquela “Permutação Simples” seus elementos estão dispostos em fila. A gente calcula por ...?

(276) **A** – “n” fatorial.

(277) **P** – Muito bem! E quando eles (elementos) estão em círculo eu vou trabalhar com quem?

(278) **A** – “n” menos “um” fatorial.

(279) **P** – Pronto! Muito bem!

(280) **P** – ... (Professor faz a leitura da primeira questão). Como é que vocês vão fazer?

Eu pergunto para vocês, qual é a quantidade “n” de elementos na primeira questão?

(281) **A** – Três.

(282) **P** – A outra pergunta é o seguinte. Fazendo rotações, ou seja, giro de noventa graus, as configurações ficam iguais ou diferentes. O que vocês acham. Não é mudança (troca) é fazendo rotações?

(283) **A** – Ficam iguais.

(284) **P** – Como é que vocês vão responder?

(285) **A** – Sim.

(286) **P** – Beleza! Trocando as pessoas de lugar os agrupamentos ficam iguais ou não?

(287) **A** – ficam.

(288) **P** – Pessoal! Trocando, trocando?

(289) **A** – Não.

(290) **P** – Eles não ficam iguais não é! Então vocês vão responder aí na ficha de vocês. Vamos agora para a segunda questão.

(291) **P** – ... (Aluna fez a leitura da segunda questão). De quantas formas distintas quatro crianças: Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?

(292) **P** – ... (Professor faz a ilustração com a primeira letra do nome das crianças no quadro) ... Eu pergunto para vocês. Qual é a quantidade “n” de elementos da segunda questão?

(293) **A** – Quatro.

(294) **P** – Todo mundo concorda? Sim ou não?

(295) **A** – Sim.

(296) **P** – Fazendo rotações ou giros de noventa graus as configurações ficam iguais?

(297) **A** – Sim.

(298) **P** – Agora vamos lá. Trocando as pessoas de lugar, os agrupamentos ficam iguais?

(299) **A** – Não

(300) **P** – Beleza agora vamos para a terceira questão. Quem gostaria de fazer a leitura.

(301) **A** – (Aluno fez a leitura da terceira questão). De quantos modos cinco crianças podem formar uma roda de ciranda?

(302) **P** – Como vocês vão preencher a fichinha? Qual a quantidade “n” de elementos?

(303) **A** – Cinco

- (304) **P** – Fazendo rotações ou giros de noventa graus, as configurações ficam iguais? Sim ou não?
- (305) **A** – Não.
- (306) **P** – Fazendo apenas o giro?
- (307) **A** – Não
- (308) **P** – (professor percebendo as dificuldades dos estudantes, reforça a pergunta para tirar as dúvidas dos alunos, se referindo a explicação anterior). Só o giro, só o giro, fica igual ou não?
- (309) **A** – fica igual
- (310) **P** – Todo mundo concorda?
- (311) **A** – Sim.
- (312) **P** – Pronto! Trocando de posições as pessoas, ficam iguais?
- (313) **A** – Não.
- (314) **P** – Pronto! Então preencham aí ... Alguém do grupo D pode fazer a leitura da quarta questão.
- (315) **A** – Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas.
- (316) **P** – Vamos preencher a ficha. Qual a quantidade “n” de elementos
- (317) **A** – Dois e três.
- (318) **P** – (professor percebe que alguns alunos apresentam dificuldades em identificar a quantidade de elementos e os ajuda a encontrar o valor correto) Então vocês vão somar, não é?
- (319) **A** – sim
- (320) **P** – Vai dar quanto?
- (321) **A** – cinco
- (322) **P** – fazendo rotações?
- (323) **A** – fica iguais.
- (324) **P** – E trocando as pessoas de lugar, ficam iguais?
- (325) **P** – Não.
- (326) **P** – Então preencham lá. Agora vocês irão determinar o total de permutações, certo?
- (327) **P** – Quantos elementos nós temos na primeira questão
- (328) **A** – Três.
- (329) **P** – O Três é como se fosse “n”. como você vai proceder. De três diminui uma

unidade...

(330) **A** – Fica dois... fatorial

(331) **P** – Muito bem! E quanto é dois fatorial?

(332) **A** – Dois.

(333) **P** – Isso. No restante das questões, vocês fazem a mesma técnica. Na segunda questão, temos quantos elementos “n”

(334) **A** – Quatro.

(335) **P** – Como eles vão estar em forma circular, faz o quê? .. Diminui quanto?

(336) **A** – “um”

(337) **P** – Certo! diminui uma unidade. Vai ficar quanto?

(338) **A** – Três fatorial

(339) **P** – Muito bem! Vai dar quanto?

(340) **A** – Seis

(341) **P** – O pessoal concorda?

(342) **A** – Sim.

(343) **P** – Beleza! Vamos imaginar cinco elementos para dispor de forma circular. (para calcular), eu preciso fazer o quê?

(344) **A** – Diminuir uma unidade.

(345) **P** – Diminui uma unidade não é! Vai ficar quanto?

(346) **A** – Quatro Fatorial.

(347) **P** – Como eu faço para calcular quatro fatorial?

(348) **A** – Quatro vezes três, vezes dois, vezes um.

Com estes diálogos, na atividade de ensino 04 (permutação circular), fizemos os estudantes perceberem a quantidade “n” de elementos. Podemos observar estas informações no episódio III, turnos: 280 a 281; 291 a 295; 301 a 303. Perceberem que fazendo rotações ou giros de noventa graus no sentido horário ou anti-horário as configurações ficam iguais, ou seja, não geram novas configurações ou agrupamentos, conforme podemos observar no episódio III, turnos: 234 a 237; 282 a 285; 296 a 297; 322 a 323. O professor pôs lestras no quadro em forma de círculos para exemplificar e mostrar aos estudantes que fazendo apenas giros ou rotações de noventa graus não forma novos agrupamentos

Perceberam que ao trocar a posição dos elementos, os agrupamentos não ficam iguais, isto é, eles ficam diferentes. Vejamos no episódio III, turnos: 298 a 299;

312 a 313; 324 e 325. Perceberam que para gerar novas configurações nas permutações circulares, é necessário trocar os elementos de posição. Esta situação, podemos verificar no episódio III, turnos: 238 a 240.

Os Estudantes perceberam ainda que para determinar o total de permutação circular, basta fazer a permutação de todos os elementos “n”, isto é, n fatorial (n!), em seguida divide-se o resultado pela quantidade de elementos “n”. Onde por meio do desenvolvimento dessas operações, bem como o preenchimento da ficha de respostas, fizemos os alunos perceberem o padrão e chegarem à fórmula de permutação circular. Ver episódio III, turnos: 244 a 274. O entendimento dessas informações foi importante para os estudantes chegarem ao total de permutação circular.

De modo geral, nesta atividade, alguns estudantes apresentaram dificuldades quanto ao giro ou rotação de noventa graus, se as configurações ficam iguais ou não. Estas informações ficam mais evidentes no episódio III, turnos: 304 a 311, bem como na troca das posições dos elementos. Além de se equivocarem ao informar a quantidade correta de elementos para efetuar a divisão, conforme podemos observar no episódio III, turnos: 255 a 261.

Assim, ficamos atentos, íamos nos grupos para tirar as suas dúvidas mostrando as ilustrações das configurações e rotações feitas no quadro durante a atividade. Com estes diálogos os alunos apresentaram uma boa aprendizagem na Atividade 04 de ensino. Assim encerramos o episódio III.

Dessa forma, consideramos de grande relevância as interações por meio dos diálogos entre os participantes de nosso experimento para a aprendizagem dos estudantes, onde a interação dos alunos com o professor funcionou de forma mais efetiva no episódio I, turnos: 57 a 65, momento em que o professor estimulou os estudantes a perceberem e descobrirem o padrão. O professor explicou que este padrão é usado para determinar o total das permutações simples. Para tanto basta calcular n fatorial. Após este diálogo, o professor apresentou a fórmula $P_n = n!$, aos estudantes.

No episódio I, turnos: 66 a 71 o professor perguntou aos estudantes, se eles estavam desenvolvendo e compreendendo a ideia de permutação com o material (alfabeto móvel e algarismos). Os alunos responderam que sim, confirmando que compreenderam melhor as ideias de permutação com o uso deste material.

No episódio II, turnos: 120 a 141, neste momento o professor usa o material

manipulativo (alfabeto móvel) para iniciar o assunto de permutação com repetição, mostrando aos estudantes que a troca dos elementos repetidos não forma um novo anagrama ou agrupamento. No episódio III, turnos: 308 a 313, momento em que o professor percebe as dificuldades dos alunos e reforça a pergunta, se referindo a explicação anterior, estimulando-os a encontrar a resposta correta.

A interação dos diálogos entre os estudantes, aconteceu de forma mais efetiva no episódio I, turnos: 19 a 26, onde os estudantes conversavam entre eles sobre como encontrar o resultado da primeira questão e viam se as respostas estavam sendo iguais ou diferentes. No episódio I, turnos: 27 a 30. Após o professor ter dado um tempo para os estudantes responderem as questões e preencherem a ficha de respostas, os alunos fizeram a leitura da quinta questão, interagindo em diálogos entre eles para entender e retirar as informações necessárias para resolvê-la.

Assim, consideramos que a aprendizagem dos estudantes foi boa. Eles apresentaram um bom desempenho durante as atividades de ensino. Isto pode ser percebido, através do preenchimento pelos estudantes das fichas de respostas de forma correta, bem como nas resoluções das questões propostas, onde notamos indicativos de aprendizagem. A seguir as considerações gerais sobre o experimento.

5.2.2 Considerações Gerais sobre a Experimentação

Durante os diálogos observamos a interatividade entre Professor e estudantes, tendo o retorno esperado. Fizemos as perguntas para que os estudantes chegassem à solução esperada em cada situação, como podemos notar no decorrer dos turnos. Consideramos importante esse diálogo para compreensão e entendimento das leituras para uma boa interpretação do enunciado das questões, momento em que se retira as informações necessárias para resolução dos problemas.

Durante os turnos, utilizamos a 1ª etapa para resolução de problemas propostas por Polya (1945), descrito em nossa fundamentação teórica e metodológica, conforme entendimento de Dante (2009), onde este aponta que é preciso compreender o problema antes de começar a resolução, para tanto é necessário ler atentamente a questão proposta. A exemplo, ver episódio II, turnos 147 a 178, momento em que o professor solicita a um aluno para fazer a leitura da “terceira questão” para toda a turma. Feita a leitura, o professor fez perguntas onde por meio delas, conduziu aos estudantes, auxiliando-os para que eles chegassem à solução

esperada.

Ao receber cópias do problema, cada estudante fez uma leitura individual do problema. Neste momento, ele teve possibilidade de refletir, se colocando em contato com a linguagem matemática para desenvolver sua própria compreensão das questões propostas. Após esta etapa, os estudantes reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. Onuchic et al (2014).

Assim, orientamos aos estudantes que fizessem uma leitura minuciosa dos procedimentos contidos na folha de atividade na forma individual e em grupos para entenderem o enunciado das questões propostas e após esta leitura, poderiam responder às perguntas solicitadas. Em seguida auxiliamos na compreensão das ideias solicitadas nos problemas para que eles chegassem a sua solução.

Durante o processo de resolução do problema, é importante fazer perguntas orais direcionando os questionamentos para conduzir o estudante a fazer inferência, generalizações, deduzir, argumentar e sintetizar as informações que podem ser trabalhadas em pequenos grupos para possibilitar a interação entre seus pares, permitindo que as estratégias de solução sejam compartilhadas Pozo e Angón (1998 *apud* SANTANA, 2016).

Para Onuchic *et al.* (2014), a função do professor é observar o trabalho dos grupos, destacando a importância de interação. Assim, o professor ao perceber as dificuldades dos estudantes, não deve indicar a resposta, mas fazer perguntas que favoreçam a continuidade da tarefa, incentivando-os a utilizarem seus saberes prévios estimulando a troca de ideias.

Sabemos que a aprendizagem é um processo contínuo e dinâmico para a construção do saber que pode ocorrer na forma individual ou na forma coletiva. Nesta perspectiva a aprendizagem dos estudantes em nossa sequência didática aconteceu por meio da interação entre alunos e entre alunos e professor. As discussões dialógicas (turnos) produzidas nestas interações revelaram como os estudantes fizeram para o preenchimento das fichas de respostas e para responder as atividades propostas, sempre com um olhar atento e intermediador do professor.

Embora tenha ocorrido em nosso experimento algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes, ressaltamos que as interações foram importantes para a institucionalização e aprendizagem dos conteúdos matemáticos sobre permutação abordados em nossa sequência didática.

Assim consideramos que a aprendizagem dos estudantes nas atividades

propostas foi satisfatória, conforme podemos constatar durante os turnos (diálogos) apresentados. Ressaltamos a importância da oficina de revisão que fizemos. A referida oficina de revisão possibilitou aos estudantes reverem os assuntos que são pré-requisitos para o estudo de permutação, onde ajudou bastante e de forma significativa para a aprendizagem dos alunos durante o experimento.

Por fim, após a aplicação de nossa sequência didática sobre permutação, percebemos que este experimento usando a resolução de problemas teve uma boa assimilação por parte dos estudantes. Houve uma aprendizagem significativa em todas as etapas dessa sequência didática.

Na aprendizagem significativa, o estudante é considerado um indivíduo que estar constantemente em busca de conhecimentos para produzir novos saberes através do processo educativo. Nesta perspectiva David Ausubel (1980, 2003), destaca “a importância de identificar e de considerar os conhecimentos já dominados pelo aluno [...] possibilitando que o novo seja adquirido por um processo de comparação com as estruturas cognitivas já existente” David Ausubel (1980, 2003 *apud* CORDEIRO, 2015, p. 17).

Assim, consideramos que a sequência didática baseada na resolução de problemas no ensino e aprendizagem de permutação que apresentamos, contribuiu para que os estudantes alcançassem uma aprendizagem significativa dos saberes matemáticos abordados. Dessa forma podemos considerar que o objetivo da pesquisa foi alcançado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa é fruto de uma pesquisa do grupo de estudo da Universidade Estadual do Pará, a partir dos meus orientadores que sugeriram o tema e aplicamos em nossa sequência didática. Nosso objetivo foi elaborar uma Sequência Didática, baseada na Resolução de Problemas que possa contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de permutação para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Os alunos na maioria das vezes, ao chegarem ao Ensino Médio, apresentam muitas dificuldades em matemática, sobretudo na parte de permutação. Isso decorre de vários fatores. A partir destas informações, surgiram as seguintes questões de pesquisa: Quais as principais dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem de permutação? De que forma uma sequência didática baseada na resolução de problemas pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de permutação?

Com esses questionamentos, elaboramos nossa fundamentação teórica e metodológica baseada na Engenharia Didática de Artigue (1996), onde desenvolvemos as quatro fases previstas para orientar as etapas de nossa pesquisa, além das concepções de Onuchic *et al.* (2014), Dante (2009), Sá (2009) e Pinheiro e Sá (2010) e os documentos oficiais, sobre a resolução de problemas como metodologia no ensino da matemática.

Para a organização e elaboração de nossa sequência didática, tomamos como base as ideias de Zabala (1998) e Polya (1945) com o entendimento de Dante (2009), Onuchic *et al.* (2014) e Pinheiro e Sá (2010) sobre a Resolução de Problemas. A Sequência Didática foi composta de quatro atividades relacionadas aos assuntos de permutação simples, permutação com repetição e permutação circular, que gerou um produto educacional desenvolvido em nosso experimento.

Durante as atividades, observamos que os alunos responderam a maioria das questões corretamente usando o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C), fatorial, a ideia de anagrama, a calculadora e raciocínio lógico ou listando as possibilidades, permitindo aos alunos uma melhor compreensão na resolução dos problemas apresentados.

Alguns alunos apresentaram dificuldades nas atividades de ensino. As principais foram: dificuldades na identificação das etapas/ posição, dificuldades em interpretar corretamente o enunciado do problema, para traduzir adequadamente da linguagem verbal à linguagem matemática, elas persistiram no que diz respeito a

ordem dos agrupamentos, dificuldades em distinguir que na formação dos agrupamentos, a ordem (permutação) dos elementos repetidos não geram novos agrupamentos, além da dificuldade em usar as técnicas para encontrar o resultado das permutações com repetições e permutações circulares em algumas questões propostas.

Assim, durante a aplicação da atividade estávamos constantemente indo aos grupos para tirar as dúvidas dos alunos, sempre que solicitado. Resolvemos algumas atividades de aprofundamento, onde por meio delas, os estudantes entenderam melhor as técnicas para encontrar o total de permutação simples, permutação com repetição e permutação circular.

O uso do material manipulável como recurso didático na resolução de problemas que usamos, foi importante para os alunos perceberem a formação de agrupamentos diferentes trocando a ordem (posição) dos elementos na permutação simples e permutação com repetição.

Nas atividades de ensino por meio dos diálogos usando a análise microgenética fizemos os alunos compreenderem o conceito de permutação, compreenderem o processo de como acontece a permutação e o processo de como chegar ao resultado do total de permutação simples, permutação com repetição e permutação circular.

Mostramos aos alunos que nas permutações com repetições, a troca de posição dos elementos repetidos não formam novos agrupamentos.

Fizemos alguns exemplos de rotações (giros) de 90° no quadro com algumas questões para que os alunos percebessem estas ideias. Mostramos a eles que nas permutações circulares, se pegarmos uma determinada configuração e não trocarmos a posição relativa entre os elementos e apenas girá-los, fazendo rotações de 90° graus, não formamos novos agrupamentos, podendo assim ter agrupamentos em excesso.

Durante os diálogos obtivemos uma boa interação entre Professor e estudantes e entre estudantes e estudantes, tendo o retorno esperado. Fizemos as perguntas para que os alunos chegassem à solução esperada em cada situação, como podemos notar no decorrer dos turnos.

Outro momento importante evidenciado na sequência didática foi o espaço de aprendizagem construído com a formação de grupo de alunos, conforme percebemos na interação dos diálogos entre eles. O desenvolvimento da aprendizagem de forma compartilhada construiu espaços para o fortalecimento das relações interpessoais

entre os alunos, e contribui para a construção de sua própria aprendizagem. Foi destinado ainda um tempo específico para a prática do material manipulável em grupo, este momento foi importante para o processo de socialização e ampliação do entendimento dos conteúdos explorados na sequência didática.

A partir de nossa sequência didática foi possível trazer para o estudante uma autonomia na resolução dos problemas, onde o mesmo pode buscar recursos como o material manipulável, raciocínio lógico, calculadora, entre outros. A partir dessa autonomia os alunos compreenderam os conceitos e as ideias sobre permutação. Assim é possível obter uma aprendizagem significativa a partir da sequência didática apoiada na resolução de problemas.

Os resultados da sequência didática foram positivos e mostraram avanços significativos dos estudantes participantes, evidenciados claramente com as observações e conclusões das atividades. Dessa forma podemos afirmar que as questões de pesquisa foram respondidas e o objetivo da pesquisa foi alcançado.

Assim, esperamos que o produto educacional fruto de nossa pesquisa possa contribuir com o ensino e aprendizagem na prática pedagógica de professores de matemática ao ministrarem o conteúdo de Permutação. Esperamos que professores do ensino médio e/ou fundamental, continuem em busca de novas metodologias de ensino que reconheça os aspectos sociais, o ambiente onde vive, o esforço e o ritmo de cada estudante.

Há ainda de se considerar que as permutações, tratam-se de um tema relevante no eixo da análise combinatória que tem conquistado bastante destaque nos dias atuais. Segundo Atz (2017) este destaque é devido ao desenvolvimento da Matemática Discreta na segunda metade do século XX. Este crescimento aos tempos atuais é devido a importância de sua aplicação em várias áreas do conhecimento, dentre elas se destacam a computação e suas subáreas: algoritmos de computador, linguagens de programação, criptografia e desenvolvimento de programas computacionais (softwares).

Além de aplicação na biologia computacional, com as linguagens de códigos, sobre tudo na genética, nos rearranjos que são mutações que alteram os seguimentos de um genoma. Segundo Alexandrino (2019, p. 11) ao usar permutações, os problemas de Rearranjo de Genomas consistem em encontrar uma sequência de rearranjos [...] que transformam uma permutação em outra". Os estudos das permutações ajudam a elucidar diversos problemas presentes em nosso dia a dia.

Assim, é importante que o professor desperte nos estudantes o gosto e o envolvimento com o conhecimento científico e a pesquisa.

Sobre a pesquisa que apresentamos referente ao ensino de Permutação, acreditamos que abra espaço para novas investigações sobre esta temática, cremos na continuidade deste estudo sobre a mesma metodologia de ensino, acrescentada de novos instrumentos, como por exemplo os jogos, outros materiais manipuláveis, aplicativos e softwares, acompanhando o conhecimento científico e tecnológico no ambiente escolar, sempre com o objetivo de melhorar o ensino.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

AMBROZI, Luiz. **Jogos em uma Sequência Didática para o Ensino de Análise Combinatória**. 2017. 163f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: <<https://www.uces.br/site/midia/arquivos/produto-luiz-ambrozi.pdf>> Acesso em: 16 mai. 2019.

ATZ, Dafne. **A Análise Combinatória no 6º Ano do Ensino Fundamental por Meio da Resolução de Problemas**. 2017.139. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/164618> > Acesso em: 06 jun. 2019.

ALEXANDRINO, Alexsandro Oliveira. **Problemas de Ordenação de Permutações por Operações Ponderadas**. 2019. 76f. Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Campinas, São Paulo, 2019. Disponível em: <<https://www.ic.unicamp.br/~zanoni/students/mestrado/alexsandro/tese.pdf>> Acesso em: 09 de jul. 2022

ARAÚJO, Gerliane Rocha de., Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. Materiais Manipuláveis como Recurso para a Resolução de Problemas de Combinatória por Alunos com Deficiência Visual. **Revista Educação Inclusiva - REIN**, Campina Grande, PB, v.4, n.01, Edição Especial-2020, p.74-85. Disponível em: <<https://revista.uepb.edu.br/REIN/article/view/217/153>.> Acesso em: 23 de jan. 2021.

BARBOSA, João P. V., Vaz Arnaldo M. Análise Microgenética de Processos de Aprendizagem na Pesquisa em Educação em Ciências. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias** Vol. 18, Nº 3, 458-477 (2019). Disponível em: <<http://revistas.educacioneditora.net/index.php/REEC/article/view/344/17>> Acesso em: 18 de abr. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática e suas tecnologias - PCN+ (Ensino Médio)**. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 12 mai. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 15 jul. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMT, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em:

09 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 05 set. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática. Ensino de primeira a quarta série**. Brasília: MEC, 1997. Brasília, DF: 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>> Acesso em 25 set. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>> e <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. acesso em: 11 set. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, Brasília, DF: 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> Acesso em: 19 mai. 2019.

BRASIL, **Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96**, de 20 de dezembro de 1996. BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf> Acesso em: 08 set. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação: ensino fundamental, Prova Brasil, matrizes de referências, tópicos e descritores**. 132 p. Brasília: MEC, SEB, INEP, 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7619-provabrazil-matriz-pdf&category_slug=fevereiro-2011-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 02 set. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Instituto Nacional de estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Censo Escolar** Brasília, DF: 2018. Disponível em: <http://inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/dados-do-censo-escolar-rede-publica-tem-maior-numero-de-alunos-com-idade-acima-do-recomendado-para-a-serie-de-ensino/21206#:~:text=Em%202017%2C%20a%20taxa%20de,nas%20duas%20etapas%20de%20ensino> Acesso em: 19 out. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Portal MEC Notícias Educação Básica**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article/211-noticias/218175739/72141-formacao-de-professores-sera-norteadas-pelas-regras-da-bncc?Itemid=164#:~:text=Forma%C3%A7%C3%A3o%20de%20professores%20ser%C3%A1%20norteadas%20pelas%20regras%20da%20BNCC,-Quarta%20feira%2C%202019&text=O%20ministro%20da%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Rossieli,de%20Professores%20da%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20B>

%C3%A1sica. Acesso em: 19 de out. 2020.

BRASIL, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Programa Nacional por Amostra de Domicílio**, Brasília, DF: 2017. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/21253-pnad-continua-2017-numero-de-jovens-que-nao-estudam-nem-trabalham-ou-se-qualificam-cresce-5-9-em-um-ano>> Acesso em: 19 de out. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Conselho Nacional de Educação**. Brasília, DF. MEC. 2015. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file>> Acesso em: 19 out. 2020.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e Tecnologia**. – São Paulo: Volume 2. Ed. Leya, 2016.

BRUM, Wanderley Pivatto. Contribuição da Engenharia Didática no Ensino de Matemática: Análise e Reflexão de uma Experiência Didática para o Estudo de Geometria Esférica. **SINECT - IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa – PR, 27 e 29 de nov de 2014. Disponível em: <[file:///C:/Users/Windows%2010/Downloads/01403926013%20\(3\).pdf](file:///C:/Users/Windows%2010/Downloads/01403926013%20(3).pdf)> acesso em: 28 mar. 2020.

BRUMANO, Cleusa Eunice Pereira. **A modelagem Matemática como Metodologia para o Estudo de Análise Combinatória**. 2014. 153f. Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, 2014, Juiz de fora, Minas Gerais, 2014. Disponível em: <<http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/DISSERTA%C3%87%C3%83O-CLEUZA.pdf>> Acesso em: 08 jun. 2019.

CABRAL, Natanael Freitas. **O Papel das interações Professor-Aluno na Construção de Solução Lógico-Aritmética Otimizada de um Jogo com Regras**. Belém, 2004, Pará, 2004. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1760/1/Dissertacao_PapelInteracoesProfessoraluno.pdf> Acesso em: 29 de mai. 2019.

CARVALHO, Paulo Cerzar Pinto. **Métodos de Contagem e Probabilidade** – Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: Um Referencial para Ação Investigativa e para Formação de Professores de Matemática. **ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23**, jun. 2005. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882>> acesso em: 28 de mar. 2020.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temáticos história e Matemática em Sala de Aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho., Pereira, Ducival Carvalho., Santos, Maria de Lourdes Silva. O Ensino – Aprendizagem de Análise Combinatória: O Desempenho

de Alunos de Belém do Pará. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP**, 13 a 16 de jul de 2016. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5075_3641_ID.pdf> Acesso em: 07 de jun. 2019.

CONCEIÇÃO, Dérik de Carvalho. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades**. 357f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTATUAL DO PARÁ, Belém, 2019, Pará, 2019. Disponível em:< <https://www.google.com/search?ei=lbMLXoWCGZiV5OUP8su6uAo&q=uepa+disserta%C3%A7%C3%A3o+2019+derik+Ensino+de+An%C3%A1lise+combinat%C3%B3ria+no+ensino+M%C3%A9dio+por+atividades.&oq=uepa+disserta%C3%A7%C3%A3o+2019+derik+Ensino+de+An%C3%A1lise+combinat%C3%B3ria+no+ensino+M%C3%A9dio+por+atividades.>> Acesso em: 30 de dez. 2019.

CORDEIRO, Euzane Maria. **Resolução de Problemas de Aprendizagem Significativa no Ensino de Matemática**. 108f. (Mestrado) – UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, Uberlândia, 2015, Minas Gerais, 2015. Disponível em <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14006/1/ResolucaoProblemasAprendizagem.pdf> Acesso em: 15 de abr. 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: Teoria e Prática**, São Paulo: Ática, 2009

DANTE, Luiz Roberto. **MATEMÁTICA: Contexto e Aplicações, 2: Ensino Médio** - São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio** / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, J. R. **Matemática: contexto e aplicações**. Encarte do professor.v.2. São Paulo: Ática, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática / Ubiratan D' Ambrosio**. Campinas, SP: Papirus, 1996. – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Alan Gustavo., Almeida, Emílio Leite de. O Estudo de Combinatória no Ensino Médio: uma Análise das Organizações Matemáticas no Livro didático. **Educação Matemática Pesquisa – EMP**. Disponível em: < <http://revistas.pucsp.br/emp/article/download/38907/pdf.>> Acesso em: 10 de Jun. 2019.

FLYNN, E.; PINE, K.; LEWIS, C. **The microgenetic method: time for change? The Psychologist**, v. 19, n. 3. Mar, p. 152-155, 2006.

FONSECA, Antônio Jailson dos Santos. **O Ensino da Análise Combinatória: Um Estudo dos Registros de Representações Semióticas por Meio de Sequência Didática**, 2015. 80f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Sergipe, 2015. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/5183/1/ANTONIO_JAILSON_SANTOS_FONSECA.pdf> Acesso em: 06 de jun. 2019.

GERDENITS, Gisele Aparecida Massuela. **Raciocínio Combinatório: Uma Proposta para Professores de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais**. 2014. 170f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, 2014, Sorocaba, São Paulo, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4471/6432.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> Acesso em: 22 de dez. 2019.

GITIRANA, Verônica. Planejamento e avaliação em matemática. In: MEDITAÇÃO, SILVA, Felipe da; HOFFMANN, Jussara. (Org). **Práticas avaliativas e aprendizagem significativa: em diferentes áreas do currículo**. Porto Alegre, 2003

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. – São Paulo: 6ª Edição, Atlas S.A., 2008.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **v. 20. Campinas: Cadernos Cedes, ano XX, nº 50**, Abril/ 2000. Disponível em : <<https://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf>> Acesso em: 25 fev 2021.

GODOY, Elenilton Vieira. **Currículo, Cultura e Educação Matemática: Uma Aproximação Possível**. 2011. 201f. Tese (doutorado) – UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – FACULDADE DE EDUCAÇÃO, São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-20012012-094632/publico/ELENILTON_VIEIRA_GODOY.pdf> Acesso em: 07 de set. 2020.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2014. 111f. Dissertação (Mestrado) - SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (IMPA), 2014, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/rafaela_goncalves.pdf> Acesso em: 08 de jun. 2019.

HANDAYA, Armando. Uma Reflexão Sobre Dificuldade de Aprendizagem de Análise Combinatória. **Sinergia**, São Paulo. V. 18, n.1, p. 13-17, jan/jun. 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/sinergia/article/view/71/316>. Acesso em: 18 de mai 2019.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar 5: Combinatória, Probabilidade** – São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, Gelson ... [et al.]. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume**

2. – 9. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

JESUS, Janaína Isabela de., Barroso, Elizandra de Sousa., Moura, Daniela Alves da. Ensino da Matemática: Falhas e Insucesso, um estudo de Caso em uma Escola de Para de Minas – MG. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades** São Paulo – SP, 13 a 16 de jul de 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6117_3938_ID.pdf>: Acesso em: 10 de mai. 2019.

KELMAN, Celeste Azulay. Branco, Angela Uchôa. Análise Microgenética em Pesquisa com Alunos Surdos. **Rev. Bras. Ed. Esp.**, Marília, Jan.-Abr. 2004, v.10, n.1, p.93-106. Disponível em: <http://www.paulorosa.docente.ufms.br/metodologia/Textos/Analise_microgenetica_pesquisa_alunos_surdos.pdf> Acesso em: 25 fev 2021.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática / José Carlos Libâneo**. – São Paulo: Cortez, 1994. – (Coleção magistério. Série Formação do Professor).

LIMA, Tereza Raquel Couto De. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória Através da leitura e Resolução de Problemas e da Construção de Enunciados**. 2011. 149f. Dissertação (Mestrado) - PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS (PUC), 2011, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2011. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_LimaTRC_1.pdf> Acesso em: 22 de dez. 2019.

LOPES, Thiago Beirigo., Palma, Rute Cristina Domingos da., Sá, Pedro Franco. Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). **Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.20, n.1, pp. 159-181**, 2018. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/34925/pdf#>> acesso em: 28 de mar. 2020.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986

MACEDO, Maurício dos Santos. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Função Afim**. 156f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2019, Pará, 2019.

Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/559531/1/Mauricio%20dos%20Santos%20Macedo.pdf>> Acesso em: 25 de fev 2021.

MARTINS, Géssica Gonsalves. **Ensino de Análise Combinatória: Um Estudo das Representações de Professores de Matemática do Ensino Médio Público de São Mateus**. 2018. 149f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO, 2018, São Mateus, Espírito Santos, 2018. Disponível em: <http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/tese_11847_71%20%20G%20SSICA%20GON%20ALVES%20MARTINS.pdf> Acesso em: 08 de jun. 2019.

MELLO, Guiomar Namó de. **Currículo da Educação Básica no Brasil: concepções e políticas**. São Paulo, 2014.

MENDES, Daniel Ferreira. **Abrangência das Permutações na Análise Combinatória** 68f. Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, 2014, Brasília, Distrito Federal, 2014. Disponível em: <https://www.repositorio.unb.br/bitstream/10482/17318/1/2014_DanielFerreiraMendes.pdf>. Acesso em: 23 de dez. 2020.

MIRANDA, Ana Sofia Macedo Szczepaniak. **Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino: Uma Análise das Repercussões de uma Formação Continuada**. 2015. 120f. Dissertação (Mestrado) – PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, 2015, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <<http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/6263/2/473840%20-%20Texto%20Completo.pdf>> Acesso em: 29 de mar. 2020.

NEHRING, Catia Maria., Bonoto, Danusa de Lara., Soares, Maria Arlita da Silveira., Machado, Suelen Gavioli. Currículo de Matemática: Uma Análise das Ideias propostas nos PCN e no Referencial Curricular do RS. **II CNEM – CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E IX – ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Disponível em: <<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC64.pdf>> acesso em: 10 de set. 2020.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa., Allevato, Norma Suely Gomes., Noguti, Fabiane Cristina Hopner., Justulin, Andresa Maria. (Orgs). **Resolução de Problemas – Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos de. **Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração**. 2015. 104f. Dissertação (Mestrado) – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO – UENF, 2015, Campus dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <<http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/16092015Carlos-Alberto-Lopes-dos-Santos-de-Oliveira.pdf>> Acesso em: 29 de mar. 2020.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **Análise Combinatória: Organizações matemáticas e Didáticas nos Livros Escolares Brasileiros no Período entre 1895 – 2009**. 2015. 145f. Tese (Doutorado) – PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – PUC/SP, 2015, São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11027/1/Carlos%20Alberto%20de%20Miranda%20Pinheiro.pdf>> Acesso em: 10 de set 2020.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda., Sá, Pedro Franco. O Ensino de Análise Combinatória a Partir de Problemas. SBEM – PA 2010. **Coleção Educação Matemática na Amazônia** V. 2 Disponível em: <<http://www.sbempara.com.br/files/Colecao-1---V---02.pdf>> acesso em: 08 de set. 2020.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **O Ensino de Análise Combinatória a Partir de Situações Problema**. 166f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2008, Pará, 2008. Disponível em:

<http://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/02/carlos_alberto_de_miranda%20pinheiro.pdf> acesso em: 03 de out. 2020.

PICANÇO, Ana Luísa Bibe. **A Relação Entre Escola e Família - As Suas Implicações no Processo de Ensino - Aprendizagem.** Lisboa: 2012. 152f. Dissertação (Mestrado) – ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO JOÃO DE DEUS, Lisboa, 2012. Disponível em: < <https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/2264/1/AnaPicanco.pdf>> acesso em: 13 de maio 2019.

POLYA, G. (George). **A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático.** Tradução e Adaptação – Araújo, Heitor Lisboa de. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares - São Paulo: ils.: Tabs. ISBN 978-85-914891-1-4, 2013. Disponível em: <<http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro%20Eng%C2%AA%20Did%C3%A1tica%202013.pdf>> acesso em: 11 de mar. 2020. <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document>> acesso em: 21 de set. 2020.**

REIS, Leonardo Rodrigues dos. **Rejeição à Matemática. Causas e Formas de Intervenção.** Brasília: 2005 Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12005/leonardorodriguesdosreis.pdf>> acesso em 11 de maio 2019.

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de análise combinatória por atividades.** 315f. (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, 2018, Pará, 2018. Disponível em: <<https://doc-0k-0o-docs.googleusercontent.com/docs/securesc/qggk2acfbv25vehr731n378hq0v7nt1n/00muisqd09ln8gj4tnqknubo4d67uu57/1560960000000/12949868903871117807/00193106216936576382/1N2brbZGRFCIRdGoGZv0rvMu9dj8Zbew9?h=18226202333151870530&e>> Acesso em: 29 de mai 2019.

ROSSY, Nayra da Cunha. **Fração e Sua Representação como Medida de Comprimento: Uma Experiência de Ensino-Aprendizagem no Contexto de um Laboratório de Educação Matemática.** (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, Belém, 2014, Pará, 2014. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/8569/6/Dissertacao_FracaoRepresentacaoMedida.pdf> Acesso em: 25 de fev 2021.

SANTANA, Geralda de Fatima Neri. **Resolução de Problemas: Ações Pedagógicas de Professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental.** (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, Paraná, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/4492/1/000224220.pdf>> Acesso em: 27 de mar 2022.

SÁ, Pedro Franco de. A resolução de problemas como ponto de partida nas aulas de

matemática. **Revista Trilhas**, Belém, v. 11, n. 22, p. 7-24, jan./dez. 2009.

SÁ, P. F. de. **Momentos de uma aula de Matemática por atividade**. Belém, 2017. Não impresso.

SILVA, Diogo Pinheiro da. **A Aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2017. 116f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, Maceió, Alagoas, 2017. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/1888/1/A%20aprendizagem%20de%20an%c3%a1lise%20combinat%c3%b3ria%20no%20ensino%20m%c3%a9dio.pdf> > Acesso em: 07 de set. 2020.

SANTOS, Francisco Nórdman Costa. **O Ensino de Polígonos por Atividades Experimentais**. 2020. 283f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, Pará, 2020. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/597715/1/Francisco%20N%C3%B3rdman%20Costa%20Santos%20Produto%20Educativo.pdf>> acesso em: 01 jan. 2022.

SILVA, Renato Darcio Noletto. **Ensino de Pirâmides na construção de aplicativos para smartphones**. 2019. 293f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ, Belém, Pará, 2019. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559520>> acesso em: 20 ago. 2020.

SOARES, Maria Teresa Carneiro; Pinto Neuza Bertoni. **Metodologia da Resolução de Problemas**. (2012) Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_soares_pinto.pdf> Acesso em: 23 abr 2022.

SOUZA, Eva Santos de; CABRAL, Natanael Freitas. O Laboratório de Educação Matemática – LEMA/UNAMA – E a Psicologia Histórico-cultural: Uma Aproximação da Formação Inicial na Licenciatura em Matemática com o Ensino e a Pesquisa. **Revista Cocar**. Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará. v.4. n.7. Belém: EDUEPA, jan/jun/2010. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/44> Acesso em: 25 fev 2021.

SUCUPIRA, Iara da Silva. **Sequência Didática como Estratégia Facilitadora do Processo de Ensino-Aprendizagem de Frações**. 2017. 133f. Dissertação (Mestrado) - UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO, “PROFESSOR JOSÉ DE SOUZA HERDV”, 2017, Duque de Caxias, Duque de Caxias. 2017. Disponível em: <<http://tede.unigranrio.edu.br/bitstream/tede/293/5/Iara%20da%20Silva%20Sucupira.pdf>> Acesso em: 05 de out. 2020.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Um Estudo sobre os Conhecimentos necessários ao Professor de Matemática para a Exploração de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental**. 2012. 459f. Tese (Doutorado) - UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO (UNIBAN) São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/3494/1/PAULO%20JORGE>>

%20MAGALH%c3%83ES%20TEIXEIRA.pdf > acesso em: 07 de set. 2020.

TOMIO, Daniela., Schroder, Edson., Adriano, Graciele Alice Carvalho. A Análise Microgénética como Método nas Pesquisas em Educação na Abordagem Histórico-Cultural. **Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v. 25, n. 3, p. 28-48**, set./dez. 2017. Disponível em: <<https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/9525/pdf>> Acesso em: 25 fev 2021.

VALSINER, J. **General Introduction. Developmental Science in the making: the role of Heinz Werner**. In: VALSINER, J. (Ed.). Heinz Werner and developmental science. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2005. p. 1-17.

WESTRCH, J. V. **A necessidade a ação na pesquisa sociocultural**. In: WERSTCH, J. V.; DEL RÍO, P.; ALVAREZ, A. Estudos sociais da mente. Porto Alegre: Artmed, 1998a. p. 56-71.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4557186/mod_resource/content/1/texto11B_azabala_1998.pdf> acesso em: 03 de out. 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada O uso de atividades para o Ensino de PERMUTAÇÃO, sob a responsabilidade dos(as) pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando (a) Carlos Magno de Moraes**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar um diagnóstico do **Ensino de Permutação** a partir da opinião dos estudantes. A sua colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o **Ensino de Permutação**.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientador e orientando Carlos Magno de Moraes** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém - PA, 12 de abril de 2019.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor(a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), para participar da pesquisa intitulada: um diagnóstico do **Ensino de Permutação**. Sob a responsabilidade dos pesquisadores **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva, orientadoras e orientando (a) Carlos Magno de Moraes** vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho estamos buscando diagnosticar o ensino de Permutação com Repetição a partir da opinião dos estudantes. A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada.

Você e o aluno não terão gastos ou ganho financeiro por participar na pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica gerando um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o Ensino de Permutação com Repetição.

Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Maria de Lourdes Silva Santos, Ana Kelly Martins da Silva e orientando (a) Carlos Magno de Moraes** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (MPPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n.Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém - PA, 12 de abril de 2019.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____

autorizo _____ que _____ meu/minha

filho(a) _____ a participar do projeto

citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

APÊNDICE C - MINUTA DA PESQUISA AO DIRETOR DA ESCOLA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
(PMPEM – UEPA)

MINUTA DA PESQUISA

Tema da pesquisa: O Ensino de Permutação
Orientador: Maria de Lourdes Silva Santos e Ana Kelly Martins da Silva (Docente do PMPEM-UEPA).
Discente: Carlos Magno de Moraes (Discente do PMPEM-UEPA).

Prezado(a) Diretor(a)

Estamos realizando uma pesquisa que tem como objetivo, promover a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. O trabalho é uma solicitação da disciplina Currículo e Avaliação da Aprendizagem Matemática e para realização e êxito, necessitamos de sua colaboração no sentido de autorizar uma pesquisa com os estudantes do (ano) 3ª série do Ensino Médio.

A investigação se dará por meio da aplicação de um questionário composto de 22 perguntas de múltipla escolha que tem por objetivo traçar um perfil dos alunos investigados no que concerne aos aspectos relativos a aprendizagem do tema supracitado e mais um teste de 10 questões objetivas para verificação das dificuldades apresentadas pela amostra de estudantes.

Nos comprometemos com os aspectos éticos em relação ao material produzido na instituição, para tanto solicitaremos que os alunos preencham um Termo de Consentimento Livre Esclarecido. Desde já agradecemos sua colaboração com o trabalho. Informamos que todos os materiais que serão utilizados na pesquisa seguem em anexo.

Belém – PA, 15 de abril de 2019.

**Discente do Programa de Mestrado
Profissional em Ensino de Matemática
(PMPEM - UEPA)**

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO SOCIOEDUCACIONAL DO ALUNO EGRESSO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1- **Idade:** _____ anos 2- **Gênero:** Masculino Feminino 3- **Série/Ano**-----

4- **Tipo de escola que estuda?** Municipal Estadual Conveniada outra

5- **Você já ficou em dependência?** Não Sim. Em quais disciplinas? _____

6- **Você gosta de Matemática?** Não gosto Suporto Gosto um pouco Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**

Superior Médio Fundamental Fundamental incompleto Não estudou

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**

Superior Médio Fundamental Fundamental incompleto Não estudou

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**

Professor particular Família Ninguém Outros. Quem? _____

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**

Todo dia Somente nos finais de semana No período de prova Só na véspera da prova Não estudo fora da escola.

11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**

Sempre Quase sempre Às vezes Poucas vezes Nunca

12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados?**

sim não às vezes

13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?** Sim Não Às vezes

14- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?**

Contente Tranquilo com Medo Preocupado com Raiva com Calafrios

15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho que**

seu Professor (a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?

Provas/simulado Testes semanais Seminários Pesquisas Projetos Outros. Quais? _____

16- **Você já estudou permutação ?** Sim Não

17- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano/ série?**

18- **Seu professor de matemática demonstra domínio do conteúdo**

permutação? Sim Não

19. Como **você avalia as explicações do seu professor de matemática?**

Ruim Regular Boa Excelente

20- **Quando você estudou permutação, a maioria das aulas:**

- Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;
- Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;
- Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
- Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
- Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- **Para praticar o conteúdo de permutação seu professor costumava:**

- Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
- Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
- Não propunha questões de fixação;
- Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência **quando você estudou permutação preencha o quadro a seguir. (MF: Muito Fácil; F: Fácil; R: Regular; D: Difícil; MD: Muito difícil)**

Conteúdo	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?				
	Sim	Não	MF	F	R	D	MD
Princípio Fundamental da Contagem (PFC)							
Definição de Fatorial							
Consequências dos Fatoriais							
Definição de Arranjo Simples							
Cálculo de Arranjo Simples							
Definição de Permutação Simples							
Cálculo de Permutação Simples							
Definição de Permutação com Repetição							
Definição de Permutação Circular							
Cálculo de Permutação Circular							
Distinção entre Arranjo e Permutação							
Situações-Problemas sobre o Princípio Fundamental da Contagem							
Situações-Problemas sobre o Arranjo Simples							
Situações-Problemas sobre Permutação Simples							
Situações-Problemas sobre Permutação Circular							

APÊNDICE E - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO AOS ALUNOS PARTICIPANTES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Ensino de Permutação Através da Resolução de Problemas, sob a responsabilidade dos pesquisadores **orientadora: Cinthia Cunha Maradei Pereira e orientando: Carlos Magno de Moraes**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando **analisar as dificuldades dos alunos ao estudarem permutação e os efeitos que uma sequência didática, construída através da resolução de problemas proporciona para a construção de saberes, com vistas a melhorar o ensino e aprendizagem de permutação em uma turma do 2º ano do ensino médio**. A sua colaboração na pesquisa será na participação nos diagnósticos, preencher e responder o questionário e as atividades propostas.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo qualitativo da relação entre metodologia didática e a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos sobre Permutação. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **A orientadora Cinthia Cunha Maradei Pereira e orientando Carlos Magno de Moraes** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

Belém, _____ de _____ de 2021.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Participante da pesquisa

APÊNDICE F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO AOS PAIS DOS ESTUDANTES



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhor (a) responsável você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu filho (a), participar da pesquisa intitulada Ensino de Permutação Através da Resolução de Problemas, sob a responsabilidade dos pesquisadores **orientadora: Cinthia Cunha Maradei Pereira e orientando Carlos Magno de Moraes**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Nesta pesquisa nós estamos buscando **analisar as dificuldades dos alunos ao estudarem permutação e os efeitos que uma sequência didática, construída através da resolução de problemas proporciona para a construção de saberes, com vistas a melhorar o ensino e aprendizagem de permutação em uma turma do 2º ano do ensino médio.** A colaboração do aluno (a) será preencher o questionário com as perguntas norteadoras para a realização da pesquisa e essa atividade ocorrerá nas dependências da escola sob a supervisão de um professor.

Em nenhum momento o aluno (a) será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade do discente será preservada. Você e o aluno não terão gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo qualitativo da relação entre metodologia didática e a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos sobre Permutação.

Você é livre para decidir se seu filho (a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **A orientadora Cinthia Cunha Maradei Pereira e orientando Carlos Magno de Moraes** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542

_____, _____ de _____ de 2021.

Assinatura do pesquisador

Eu, _____
autorizo que meu/minha filho(a) _____
a participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável
APÊNDICE G – QUESTÕES PROPOSTAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 1

Título: Permutação Simples

Objetivo: Conceituar Permutação Simples

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Quantos números de três algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 2, 3 e 4?

02. Os alunos **Ana**, **Beatriz** e **Carlos** estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?

03. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas tem a palavra **UVA**?

04. Quantas **senhas** são possíveis formar, de quatro dígitos, com as letras da palavra **GATO**?

05. **Aline**, **Beatriz**, **Carlos** e **Daniel** são estudantes do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Para não haver conflitos entre eles por causa da posição em que cada um quer sentar-se, a professora sugeriu um rodízio completo dos alunos na fila, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro cadeiras?

ATIVIDADE 2

Título: Permutação Simples

Objetivo: Descobrir uma forma prática de determinar o total Permutação Simples

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Considerando a palavra FESTA, determine o número de anagramas que começam por F.

02. Quantos são os anagramas da palavra FESTA que começam com A e terminem com F.

03. Determine o número de anagramas da palavra FESTA que tenham as letras F e E juntas, nessa ordem.

Atividade 3

Título: Permutação com Repetição

Objetivo: Descobrir uma forma prática de determinar o total de Permutações com Repetição.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

01. Qualquer ordenação das letras de uma palavra (com ou sem sentido), chama-se de **anagrama**. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **OVO**?

02. Determine o número de anagramas da palavra **ANA**?

03. Um aluno, que nasceu em 1989, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

04. Quantos anagramas tem a palavra **CAMA**?

05. Trocando de posição os algarismos 1, 1, 2, 2, 3 quantos números de cinco algarismos podemos formar?

06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra **ARARA**?

Atividade 4

Título: Permutação Circular

Objetivo: Descobrir uma forma prática de determinar o total de Permutações Circulares.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente a lista de questões;
- Resolva cada pergunta proposta na lista de questões.

1. De quantos modos podemos dispor 3 amigos (**A**ntônio, **B**ia e **C**arlos) num círculo em lugares equidistantes? (com a mesma distância entre eles).
2. De quantas formas distintas 4 crianças Ana, Beatriz, Carlos e Daniel podem se sentar em uma mesa circular?
3. De Quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?
4. Duas amigas e três amigos vão dispor-se em forma de círculo. De quantas formas eles podem formar-se, sendo que as amigas devem ficar juntas.

APÊNDICE H – CRONOGRAMA DA PESQUISA

Etapas	Meses (2019/2020)									
	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
Revisão de estudos (Análises Prévias)		x	x	x						
Estudo Diagnóstico (Análises Prévias)		x	x	x						
Fundamentação Teórica (Concepções e análise <i>a priori</i>)						x	x	x		
Elaboração da Sequência Didática (Concepção e análise <i>a priori</i>)						x	x	x		
Ajustes da Sequência Didática (Concepção e análise <i>a priori</i>)								x	x	x

Etapas	Meses (2021/2022)											
	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez	
Qualificação (Ajustes do texto)	x	x	x									
Qualificação (Apresentação)				x								
Aplicação da Sequência Didática (Experimentação)										x	x	
Análise <i>a posteriori</i> e validação	x	x	x	x		x	x	x				
Escrita do texto Final da dissertação.	x	x	x	x								
Defesa da dissertação e entrega do produto educacional					x							



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem

