Universidade Estadual do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Josué Augusto Gonçalves da Silva

O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS COM O GEOGEBRA

BELÉM-PA
2025

Josué Augusto Gonçalves da Silva

ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS COM O GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

BELÉM-PA

2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

Silva, Josué Augusto Gonçalves da

O ensino das funções seno e cosseno por atividades experimentais com o Geogebra / Josué Augusto Gonçalves da Silva. — Belém, 2025.
274 f.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2025.

1. Funções seno e cosseno. 2. Educação matemática. 3. Engenharia didática. 4. Aplicativo Geogebra. I. Título.

CDD 22.ed. 515. 7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

Josué Augusto Gonçalves da Silva

O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS COM O GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Data de aprovação: 24/09/2025

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO FRANCO DE SA
Data: 24/09/2025 17:39:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___________________________________. Orientador
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Universidade do Estado do Pará.

Documento assinado digitalmente
gov.br CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Data: 30/09/2025 19:54:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

___________________________________. Examinador Interno
Profa. Dra. Cinthia Cunha Maradei Pereira
Doutora em Bioinformática pela Universidade Federal do Pará (UFPA)
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
gov.br SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO
Data: 24/09/2025 19:16:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____ _____________________________. Examinador Externo
Prof. Dr. Saul Rodrigo da Costa Barreto
Doutor em Educação, Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará-UFPA
SEDUC- Pará

BELÉM-PA
2025

AGRADECIMENTOS

Nada se compara à gratidão que sinto pela minha família. Entretanto, as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta jornada merecem meu profundo agradecimento.

A Deus, por me proporcionar saúde, resiliência e inteligência para não desistir dos caminhos que escolhi.

À minha querida mãe, Professora Márcia Helena da Cunha Gonçalves, que me inspirou a seguir a carreira de educador.

À minha esposa, Amanda Coelho Rodrigues, que me apoiou incondicionalmente nos momentos mais desafiadores, incentivando-me a perseguir meus objetivos.

À minha outra família, que ganhei em 2019: a família Franco, em especial ao Sr. Josué e D. Naura.

Ao curso de Mestrado, ao Programa de Pós-Graduação no Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), e a todo o corpo docente e discente, pelos conhecimentos sobre práticas de ensino, metodologias e Educação Matemática que me proporcionaram.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, por sua inestimável orientação, paciência, generosidade em compartilhar seus conhecimentos e valiosas sugestões que foram fundamentais para a finalização desta pesquisa.

À minha amiga Aline Reis, que ganhei durante o curso, pelas conversas e pelo apoio mútuo que nos incentivaram a perseverar. A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste sonho.

RESUMO

SILVA, Josué Augusto Gonçalves da. **O ensino das Funções Seno e Cosseno por Atividades Experimentais com o GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2025.

Este trabalho visa apresentar um estudo sobre as funções trigonométricas seno e cosseno através de atividades experimentais com o apoio do Aplicativo GeoGebra. A escolha do tema investigado, funções trigonométricas, deu-se pelo fato de ser um conteúdo que a maioria dos alunos do Ensino Médio, mais especificamente do 2º ano, considera complexo e excessivamente abstrato. A questão norteadora desta pesquisa é: Quais as contribuições da aplicação de uma sequência didática, elaborada na perspectiva das Atividades Experimentais, que poderão potencializar o processo de ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno com os alunos do 2.º ano do Ensino Médio com o auxílio do GeoGebra nos smartphones? O objetivo geral desta pesquisa é investigar as contribuições de uma sequência didática, com o intuito de melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos do 2° ano do Ensino Médio sobre o conteúdo das funções trigonométricas seno e cosseno, com a utilização do aplicativo GeoGebra. O lócus desta pesquisa, no primeiro momento, foi a escola pública EEEM Professora Antonia Rosa, localizada no município de São João da Ponta/PA. Os sujeitos foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Utilizamos o Ensino de Matemática por Atividades Experimentais com base em Sá (2019) e Resolução de Problemas, baseados em Polya (1995) e Sá (2019), como metodologia de ensino. Nossa metodologia de pesquisa baseia-se nas ideias e pressupostos da Engenharia Didática, metodologia da vertente da Didática Matemática proposta por Artigue (1995), que apresenta quatro etapas. Na primeira etapa, chamada de análises prévias, estão contidas pesquisas bibliográficas como dissertações, artigos, teses, documentos educacionais, análises de livros que abordam pontos relevantes sobre o tema e, também, uma consulta a professores de matemática acerca do conteúdo abordado. Na segunda etapa, chamada de concepção e análise a priori, apresentamos a nossa sequência didática, baseada nas atividades experimentais de Corrêa (2016), onde construímos aplicativos no GeoGebra para serem utilizados em 9 atividades sobre as funções seno e cosseno. Na terceira etapa, optamos por utilizar um questionário para validação da nossa Sequência Didática por professores de Matemática. Nas análises e discussões, obtivemos como resultado que a Sequência Didática apresenta muita potencialidade para o ensino das funções seno e cosseno com o uso do GeoGebra, enriquecendo as aulas com uma linguagem tecnológica que pouco é usada e fazendo os estudantes serem mais participativos ao longo da atividade. A partir disso, elaboramos um produto educacional[1] referente à nossa sequência didática e, também, um livro on-line no site do GeoGebra, compostos por questões de múltipla escolha.

Palavras-chave: Funções seno e cosseno. Educação Matemática. Engenharia Didática. Aplicativo GeoGebra

[1] Link: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1132243

ABSTRACT

SILVA, Josué Augusto Gonçalves da. Teaching Sine and Cosine Functions through Experimental Activities with GeoGebra. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) – State University of Pará, Belém, 2025.

This work aims to present a study on the trigonometric functions sine and cosine through experimental activities supported by the GeoGebra application. The choice of the investigated topic—trigonometric functions—was made due to the fact that it is a subject most high school students, particularly those in the 2nd year, consider complex and excessively abstract. The guiding question of this research is: What are the contributions of implementing a didactic sequence, developed from the perspective of Experimental Activities, that could enhance the teaching and learning process of sine and cosine functions for 2nd-year high school students with the help of GeoGebra on smartphones? The general objective of this research is to investigate the contributions of a didactic sequence aimed at improving the teaching and learning of sine and cosine trigonometric functions among 2nd-year high school students using the GeoGebra application. The initial setting of this research was the public school EEEM Professora Antonia Rosa, located in the municipality of São João da Ponta, Pará, Brazil. The subjects were 2nd-year high school students. We adopted the Teaching of Mathematics through Experimental Activities based on Sá (2019) and Problem Solving, based on Polya (1995) and Sá (2019), as the teaching methodology. Our research methodology is based on the ideas and assumptions of Didactic Engineering, a methodological approach within Mathematical Didactics proposed by Artigue (1995), which comprises four stages. In the first stage, called preliminary analysis, we included bibliographic research such as dissertations, articles, theses, educational documents, and textbook analyses that address relevant aspects of the topic, along with interviews with mathematics teachers about the content. In the second stage, known as conception and a priori analysis, we present our didactic sequence, based on the experimental activities of Corrêa (2016), in which we developed GeoGebra applets to be used in nine activities on sine and cosine functions. In the third stage, we chose to use a questionnaire for the validation of our Didactic Sequence by mathematics teachers. In the analysis and discussion, the results showed that the Didactic Sequence has strong potential for teaching sine and cosine functions using GeoGebra, enriching classes with a technological approach that is rarely used and encouraging greater student participation throughout the activity. Based on this, we developed an educational product related to our didactic sequence and also an online book on the GeoGebra website, composed of multiple-choice questions

Keywords: Sine and cosine functions. Mathematics Education. Didactic Engineering. GeoGebra application

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTAÇÃO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLA

TDIC’s	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
RED	Recursos Educacionais Digitais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Base da Educação
PCNEM	Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
CIABA	Centro de Instrução Almirante Brás de Aguiar
ED	Engenharia Didática
DM	Didática da Matemática
SD	Sequência Didática
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
ITA	Instituto Tecnológico na Aeronáutica

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\subset$	contido
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual que
$\geq$	Maior ou igual que
$\forall$	Para todo
$\times$	Produto cartesiano
$\Longrightarrow$	Se, então
N	Conjunto dos números naturais
Z	Conjunto dos números inteiros
Z_+	Conjunto dos números inteiros positivos
R	Conjunto dos números reais
$\sum$	Somatória
e	Número de Euler $\cong \mathbf{2,71}$
π	Número Pí $\cong \mathbf{3,14}$

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Vivemos em uma época em que a incorporação das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no cenário atual tem demonstrado o quão indispensáveis elas se tornaram na sociedade. Assim, é notório que chamadas em vídeo em celulares e computadores, compras online, pagamentos digitais, entre outros benefícios, estejam cada vez mais presentes nas atividades humanas.

O uso das TDIC na educação não é diferente, pois elas contribuíram para as aulas remotas em diversos tipos de escolas, permitindo dar continuidade ao ano letivo em meio às restrições causadas pela pandemia devido ao coronavírus SARS-CoV-2, causador da doença COVID-19 em 2020. Profissionais da educação em todo o mundo se empenharam para descobrir e experimentar novas formas de ensinar, transformar práticas culturais e pensar em experiências imersivas de aprendizagem que possam aproximar as situações da realidade dos alunos.

Quando cursei a minha licenciatura em matemática, de 2014 a 2018, tive apenas duas disciplinas que envolviam tecnologia. Estudamos softwares como MatLab e o programa R, ambos com programações difíceis de serem utilizadas e que seriam inviáveis para estudantes do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio.

Em 2020, ao conseguir ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática na Universidade Estadual do Pará (PPGEM/UEPA), participei de uma disciplina online chamada “Tecnologias de Informática no Ensino de Matemática” com os professores Fábio José da Costa Alves e Cinthia Cunha Maradei Pereira. Eles abordaram três ferramentas tecnológicas educacionais: GeoGebra, App Inventor e Scratch. Como eu já tinha familiaridade com o GeoGebra e outros programas educacionais, facilitou entender o funcionamento do App Inventor e do Scratch.

Nesse mesmo ano, fiz um curso de extensão intitulado “Introdução ao Scratch para jogos educacionais”, oferecido pela UFPA, através da Faculdade de Matemática do campus de Castanhal. Em 2022, fiz um curso de GeoGebra oferecido pela Unespar, campus de Apucarana, ambos os cursos online.

Dessa forma, ao proporcionar disciplinas e reflexões em teorias sobre o conhecimento matemático e Educação Matemática, motivou-me na construção de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem da Matemática que envolvesse as tecnologias digitais educacionais de modo a dar significado aos discentes, caracterizando pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, os quais estes adquirem significado para o sujeito, que segundo Viganó & Lima (2015) para que ocorra a significância para o sujeito (aluno):

> é preciso que o professor atue como mediador neste processo e que o aluno queira aprender. Assim, ambos, docente e aluno, devem envolver-se num processo mútuo de interação, que deve incluir o objeto de conhecimento, visando atribuir significados e desenvolver aprendizagem com compreensão de conceitos (VIGANO; LIMA, 2015, p. 3).

No documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em relação a Matemática, destacam-se duas competências gerais referentes ao uso das tecnologias, das quais são, respectivamente:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

Dessa forma, a pesquisa em questão está voltada ao estudo das Funções Trigonométricas seno e cosseno com o apoio do Aplicativo GeoGebra. A escolha do tema investigado, funções trigonométricas, se deu pelo fato de ser um conteúdo que a maioria dos alunos do Ensino Médio, mais específico do 2º ano, consideram-na complexa e excessivamente abstrata, que segundo Corrêa (2016):

> além de precisarem assimilar os temas que são próprios deste assunto, ainda precisam lembrar outros temas anteriormente estudados, tais como circunferência, arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico, que funcionarão como pré-requisitos para introduzir este conteúdo (CORRÊA, 2016, p. 20).

E para suprir essas dificuldades optou-se em utilizar as ferramentas digitais como recurso didático, pois permitirá uma relação mais atrativa do ensino e aprendizagem entre professor – aluno – conhecimento, que segundo Azevedo & Alves (2019, p. 103) as tecnologias educativas facilitarão “uma transposição didática e conhecimento prático, envolvendo manipulação pelo próprio aluno, cálculos mentais e criatividade no ato de resolver uma situação-problema”.

Visando auxiliar professores de matemática do Ensino Médio, apresentamos alguns trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática que exploram tendências metodológicas para o ensino da disciplina, com foco no uso de tecnologias, no ensino por atividades experimentais e na resolução de problemas. Entre eles, destacam-se as obras de Medeiros (2018), Corrêa (2016), Azevedo & Alves (2019) e Gama (2020).

É comum que a abordagem tradicional do professor torne as aulas repetitivas e desmotivadoras para os estudantes, que também enfrentam dificuldades na resolução de problemas matemáticos. Contudo, o ensino de matemática vai além da mera aplicação de fórmulas e regras, da memorização, de aulas expositivas, do uso exclusivo de livros didáticos, de exercícios no quadro e de atividades de fixação.

> Ensinar Matemática em qualquer etapa da vida escolar, ensino fundamental ou ensino médio, tem sido um desafio para os educadores, ora pelo desinteresse dos alunos, ora pela dificuldade da escolha metodológica (TASHIMA; SILVA, 2007, p. 4).

A participação ativa do professor nas discussões pedagógicas da escola é essencial, assim como a busca por estratégias didáticas que otimizem o ensino da matemática. Para enfrentar as dificuldades no aprendizado das funções trigonométricas, o uso do software GeoGebra é proposto como um recurso facilitador. O objetivo é que o estudante, ao explorar o software, se torne um protagonista em seu próprio processo de descoberta e aprendizado, pois:

> As dificuldades de aprendizagem na Matemática podem acarretar baixos rendimentos e geram preocupações entre os envolvidos O insucesso de muitos estudantes é um fator que os leva, cada vez mais, a terem certa aversão a essa disciplina, desenvolvendo dificuldades ainda maiores com o passar dos anos escolares (PACHECO; ANDREIS, 2018, p. 106).

A falta de laboratórios de informática adequados em muitas escolas, ou o uso inadequado dos que existem, representa um desafio para o ensino. Para superar essa barreira e aproveitar o acesso cada vez maior dos alunos a celulares e tablets, adotaremos essa tecnologia como ferramenta para promover o desenvolvimento cognitivo crítico, especialmente no estudo das funções seno e cosseno.

O desenvolvimento da abordagem desse trabalho, em primeiro momento, seria realizado em uma escola da rede pública estadual chamada EEEM Professora Antonia Rosa, localizada no município de São João da Ponta, Estado do Pará, em uma turma de 2° ano do Ensino Médio.

A questão norteadora desta pesquisa é: ***Quais as contribuições da aplicação de uma sequência didática, elaborada na perspectiva das Atividades***

Experimentais, poderão potencializar o processo de Ensino e Aprendizagem das Funções seno e cosseno com os alunos do 2.º ano do Ensino Médio com o auxílio do GeoGebra?

O objetivo geral desta pesquisa é: ***Investigar as contribuições de uma sequência didática, com intuito de melhorar o Ensino e Aprendizagem dos alunos do 2° ano do Ensino Médio sobre o conteúdo das Funções Trigonométricas seno e cosseno, com a utilização do aplicativo GeoGebra****.*

E para buscar as respostas para nossa sequência didática, nos conduziremos a:

- contemplar aspectos epistemológico sobre as funções seno e cosseno; integrar recursos tecnológicos enquanto instrumento para o ensino das funções em questão;
- Identificar as dificuldades de ensino e aprendizagem escolar nos trabalhos acadêmicos sobre as funções trigonométricas;
- Analisar os documentos oficiais educacionais sobre a abordagem da trigonometria;
- Analisar os livros didáticos e provas de vestibular para identificar como estão organizados o conteúdo e as questões sobre as funções trigonométricas;
- Analisar o questionário docente para verificar como são ministrada o conteúdo funções seno e cosseno em sala de aula;
- integrar recursos tecnológicos enquanto instrumento para o ensino das funções em questão; compreender matematicamente fenômenos físicos periódicos para o estudo das funções seno e cosseno;
- elaborar uma sequência didática sobre as funções trigonométricas de acordo com a ED.
- analisar efeitos da ED a partir de ambientes tecnológicos para o ensino e aprendizagem de funções seno e cosseno

Para isso, a nossa experimentação terá como base as ideias e pressupostos da Engenharia Didática, metodologia da vertente da Didática Matemática, que segundo Artigue (1995, p. 36) “caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino" descrita no **capítulo 2**.

A autora definiu quatro fases da Engenharia Didática, as quais são:
1ª fase: de análises prévias; 2ª fase: de concepção e da análise a *priori*; 3ª fase: de experimentação; 4ª fase: de análise a *posteriori* e validação.

Na primeira fase (**Capítulo 3**) analisamos cinco livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio de acordo com a Taxinomia de Bloom; trabalhos como artigos, dissertações e teses produzidos nos últimos 10 anos; documentos oficiais como Base Nacional Comum Comum Curricular (BNCC), Parâmetro Curricular Nacional do Ensino Médio (PCNEM) , O Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA), Plano Nacional de Educação (PNE) , SAEB e Provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Centro de Instrução Almirante Brás de Aguiar (CIABA) e o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), relacionados ao nosso objeto de estudo.

Nesse capitulo descrevemos de maneira detalha o desenvolvimento da Trigonometria que vai desde os Babilônio e Egípcios (1850 a. C.) até os estudos de Leonard Euler (1707-1783) que fez a transição das razões trigonométricas (utilizando figuras) para funções periódicas com curvas e variáveis.

Descrevemos, também, a parte matemática começando pelo conceito de conjuntos que se estende até o conceito da função de Euler de um número real conectada a um arco no ciclo trigonométrico.

Na pesquisa diagnóstica, feita com professores de matemática, tinha como objetivo coletar informações sobre o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno, especialmente no que diz respeito à utilização das TDIC como ferramentas pedagógicas. Para isso, aplicou-se um questionário online aos professores. Adicionalmente, a pesquisa abrange a descrição da organização dos pré-testes aplicados aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, bem como a criação e aplicação de questionários socioeconômicos aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

Inicialmente, a pesquisa adotou uma abordagem quantiqualitativa, combinando a análise estatística de dados mensuráveis com a interpretação das opiniões e práticas dos professores. Essa abordagem, conforme Vieira (2009, p.5) explica, permite ao pesquisador "classificar, ordenar ou medir as variáveis para apresentar estatísticas, comparar grupos ou estabelecer associações", além de analisar os dados qualitativos provenientes das respostas e hábitos dos participantes

Além disso, descrevemos algumas tendencias educacionais para servir como pressupostos teóricos, as quais foram: Resolução de problemas, Ensino por Atividades experimentais e as ferramentas tecnológicas educacionais

Na segunda fase do trabalho (**Capítulo 4**), detalhamos a Sequência Didática desenvolvida. Elaboramos onze aplicativos no GeoGebra, os quais foram integrados em nove atividades para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. Para o design dessas atividades, adaptamos o modelo proposto por Correa (2016) à plataforma GeoGebra.

O **Capítulo 5** apresenta a análise e discussão dos resultados, com foco em compreender as percepções e opiniões de professores de Matemática do Ensino Médio a respeito da nossa sequência didática. Essa sequência, como mencionado, visa o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno utilizando o GeoGebra. Para tanto, aplicamos um questionário online a um grupo de 15 docentes, com o objetivo de coletar suas avaliações e sugestões sobre a proposta pedagógica.

2. DESCRIÇÃO DAS FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A metodologia da Engenharia Didática (ED) surgiu como decorrência da vertente conhecida como Didática da Matemática [2](DM) durante as discussões desenvolvidas no IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática) no final da década de 1960.

Segundo Sá e Alves (2011) a ED teve sua origem na escola francesa de Didática da Matemática através dos trabalhos de G. Brousseau (1986) e R. Douady (1984), o qual o primeiro criou o conceito da ED e que depois foi amplamente estudado, desenvolvido e divulgado por Artigue (1988).

A metodologia da ED também é caracterizada, em comparação com outros tipos de pesquisa baseados na experimentação em sala de aula, pelo registro em que se localiza e pelas formas de validação a que está associado. Diferente de outras pesquisas, a ED se distingue, por exemplo, no registro dos estudos de caso e cuja validação é essencialmente interno, baseado no confronto entre a análise a *priori* e a *posteriori,* e, portanto, ela é única, não pelos objetivos de pesquisa, mas pelas características de seu funcionamento metodológico.

Segundo Artigue (1995, p. 34) na década de 1980, a ED foi percebida como o meio de abordar duas questões cruciais, dado o estado de desenvolvimento da DM na época, as quais foram:

- Relações entre pesquisa e ação no sistema educacional;
- O papel que deve ser feito para desempenhar as "realizações" didática" em aula, dentro das metodologias de pesquisa em didática.

A noção de engenharia didática traçou seu caminho no edifício didático com esta dupla função. Ela passa a significar tantas produções para o ensino, baseadas em resultados de pesquisas que utilizaram metodologias fora da sala de aula, quanto uma metodologia de pesquisa específica.

Por ter uma interligação da dimensão teórica da racionalidade com à experimentação da prática educativa, utilizaremos essa metodologia de investigação para construção da sequência didática visando o estudo das funções seno e cosseno, pois acreditamos que esse é um caminho ou um meio adequado para se alcançar o

---

2 Segundo Pais (2013, p. 11) “é uma das tendências da grande área da educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber matemático”

nosso objetivo, mostrando como trilhar a investigação da nossa pesquisa em sala de aula.

A Engenharia Didática se enquadra na perspectiva da pesquisa qualitativa, que segundo Pommer (2013) ela inicialmente tem como finalidade:

> estudar problemas relativos à aprendizagem de conhecimentos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, dificuldades e obstáculos, compreender os níveis de desenvolvimento das estratégias dos alunos, a aprendizagem, introdução e construção de conhecimentos específicos, a formação de professores, explicitar a relação entre temas da matemática e outras áreas de conhecimento, dentre outras. (POMMER, 2013 p. 21)

Essa concepção ampla, investigativa e formativa evidencia uma complexidade de objetivos a serem alcançados no estudo de problemas relativos à aprendizagem matemática. Estudar os problemas da aprendizagem não se limita a identificar erros, mas a compreender os processos cognitivos, afetivos e sociais que estruturam o aprender e o ensinar.

A seguir apresentamos como são descritas as quatros fases da ED, segundo Artigue (1995): 1ª fase, das *análises preliminares*, a 2ª fase, da *concepção e da análise a priori*, a 3ª fase, da *experimentação* e a 4ª e última fase, da *análise a posteriori e validação*

Mas para que o trabalho possa ter sucesso, é muito importante que todas essas fases sejam realizadas, desde a criatividade inicial do pesquisador até a aplicação da experimentação em sala de aula. Além disso, para conseguir o nível de confiança da pesquisa é necessário que cada fase possua uma sistematização de controle na execução do projeto.

2.1. Análises preliminares ou prévias

Na investigação de engenharia didática, esta fase não se baseia apenas numa didática geral não só com base num quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos anteriormente adquiridos na área de estudo, mas também com base numa série de análises preliminares. As mais frequentes dizem respeito, segundo Artigue (1995):

> A análise epistemológica dos conteúdos abrangidos pelo ensino; A análise do ensino tradicional e seus efeitos; A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam a sua evolução; A análise do campo de restrições em que deve ser colocado implementação didática eficaz; E, claro, tudo isto é feito tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1995, p. 38, tradução nossa)

Nessa fase, o pesquisador realiza uma investigação bibliográfica para elaboração da sequência didática a ser construída. Segundo Pommer (2013), é o momento em que as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, trará uma análise geral dos aspectos históricos-epistemológicos do assunto do ensino a ser trabalhados e dos seus efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

Para Almouloud (2007, apud ALVES; SÁ, 2011, p.150) as análises prévias contemplam um estudo da organização matemática, análise da organização didática do objeto matemático escolhido e definição das questões de organização.

Alves e Sá (2011) ressaltam que em muitas situações desta primeira etapa, é exigido de o pesquisador buscar as referências teóricos e também, um estudo de campo quando ainda não estão disponíveis resultados sobre as concepções dos docentes e discentes do tema a ser trabalhado na pesquisa.

Além disso, durante essa fase o objeto de estudo é submetido a inferências, tais como levantamento de comprovações empíricas, ressaltar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições do mundo real sobre a qual a experiência será realizada

2.2. Concepção e análise a *priori*

Nesta segunda fase, o pesquisador toma a decisão de agir um certo número de variáveis do sistema não fixadas pelas restrições. Essas são as variáveis de comando que ele percebe como relevantes em relação ao problema estudado. Segundo Artigue (1995) essas variáveis são descritas como “macrodidáticas ou globais, relativas à organização global de engenharia e as variáveis microdidáticas ou locais, relativas à organização local de engenharia, ou seja, a organização de uma sequência ou uma fase”.

Alves e Sá (2011) afirmam que nesta etapa os objetivos centrais estão na construção de uma sequência didática para nortear o conteúdo em questão de modo a formular hipóteses com base nos resultados obtidos nas análises prévias e assim, ser possível exercer algum tipo de controle, relacionado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a compreensão dos conceitos em estudo.

Para que essa fase seja bem sucedida, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de atividades que serão desenvolvidas de acordo com o assunto com o objetivo de garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica. Segundo Pais (2013, p. 102) uma sequência didática é “formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista sem caráter específico para a pesquisa.

E com isso elaboremos um conjunto de atividades juntando materiais seguindo os resultados da primeira fase, análises prévias, com o intuito de conduzir os alunos a desenvolverem certas competências e habilidades em relação ao conteúdo de funções seno e cosseno.

2.3. Experimentação

Nesta fase é onde se desenvolve a aplicação da Engenharia Didática, que é desenvolvida no campo da prática educativa. Nesta etapa ocorrem as aplicações dos instrumentos da pesquisa que são utilizados para se testar as hipóteses formuladas para que possa fazer as possíveis correções ou mudanças.

Segundo Alves e Sá (2011, p. 157) “Nesta fase o pesquisador ou a equipe de pesquisa deve desenvolver as atividades planejadas e, ao mesmo tempo, realizar o maior número de registros possíveis em quantidades e diversidade”.

Esses registros podem ser as observações por meio de relatório em sala de aula; gravações em áudio, vídeo, produções das escritas dos alunos, manipulações de materiais didáticos, entre outras.

Contudo, independente da escolha do registro, é imprescindível que ocorra uma transparência de uma descrição mais confiável possível com a realidade em que a experiência foi realizada. Para Pais (2013, p. 103) “quando a aplicação da sequência didática não for diretamente coordenada pelo pesquisador, é preciso que a equipe de professores esteja suficiente consciente quanto aos objetivos da pesquisa, pois, caso contrário, os resultados podem ser prejudicados”.

Assim, de acordo com as suas experiencias, Alves e Sá (2011) indicam que durante a experimentação, é muito importante:

> - Dispor dos instrumentos de produção de informações previsto na análise a *priori;*
> - Todo material esteja devidamente providenciado;
> - Nada seja improvisado;
> - O pesquisador e equipe estejam muito preparados teoricamente;
> - O pesquisador e equipe dominem todas as atividades previstas para cada sessão;
> - O objetivo da pesquisa esteja sempre norteando cada ação da experimentação.
>
> (ALVES; SÁ, 2011, p. 158)

O conjunto de orientações apresentadas por esses autores reflete a importância do rigor metodológico e do planejamento consciente no processo de experimentação em pesquisas educacionais. Cada ponto mencionado expressa uma dimensão fundamental do profissionalismo e da responsabilidade científica que devem nortear o pesquisador durante a aplicação de uma sequência didática.

2.4. Análise *posteriori* e validação

Nesta fase é o momento em que os resultados/informações que foram obtidas quando aplicada a sequência didática, que é a experimentação da pesquisa, serão confrontados de acordo com as anotações feitas no relatório.

Os autores Guimarães, Barlette e Guadagnini (2015) afirmam que as relações que se estabelecem entre os novos significados adquiridos pelo aluno sobre o conhecimento em questão e as situações didáticas nas quais os novos significados ocorrem, é indispensável observar com antecedência a *priori* o tratamento dos dados colhidos, permitindo a interpretação dos resultados, e analisar comparativamente a *posteriori* à realização da ED, e reiteram que:

> a fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas, discutida anteriormente, é de fundamental importância para o processo de validação e é a base para esta fase da análise à posteriori. É nessa fase que se organizam os dados obtidos na fase da experimentação e se analisam os resultados, e se confirmam ou refutam as hipóteses formuladas. (GUIMARÃES; BARLETTE; GUADAGNINI, 2015, p. 218)

É nessa etapa que o educador deixa de ser apenas o elaborador da sequência didática e passa a ser um observador crítico de sua própria prática, interpretando os efeitos reais que suas escolhas pedagógicas tiveram no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, atingir a realidade das construções dos alunos durante as atividades no decorrer do desenvolvimento da sequência didática, o processo de aprendizagem por meio das discussões, distinção entre definições, propriedades e associações dos registros de representação contribuem para a superação dos problemas do conteúdo estudado o que permitirá a validação do objetivo da pesquisa.

3. ANÁLISES PRÉVIAS

Neste subtópico será apresentado alguns informativos de documentos curriculares que juntos aos questionamentos de pesquisadores, apresentam opiniões acerca do assunto Funções trigonométricas atrelados ao uso das tecnologias digitais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que permite aos professores e gestores escolares a ampliação e o aprofundamento de temas educacionais. Nela podemos encontrar os mais variados objetivos de modo a formar estudantes com habilidades e conhecimentos essenciais para o século XXI, melhorando a aprendizagem de cada disciplina e discussões pedagógicas para o desenvolvimento de projetos educativos e materiais didáticos.

Adotar uma BNCC significa superar os desafios da educação e que professores possam cada vez mais desenvolver metodologias de Ensino ou aplicar aquelas já criadas, para que a aprendizagem a todos os estudantes seja estimuladora, mobilizando seus conhecimentos, habilidades e raciocínios.

A BNCC é um documento orientador que aponta o que se espera que os alunos desenvolvam ao longo da sua vida escolar. Já os currículos são documentos que compreendem um planejamento do que será ensinado, juntos eles têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica.

As redes de Ensino exigem que União, Estados, Distrito Federal e Municípios somem esforços para a colaboração e responsabilidades no processo de correção das desigualdades.

O objeto de estudo da elaboração deste trabalho, voltado para Funções Trigonométricas seno e cosseno, tem como apoio o aplicativo GeoGebra em Smartphones para serem aplicadas nas turmas do 2° ano do Ensino Médio. Mas antes de falar sobre esse tema é preciso lembrar de dois assuntos da Matemática que são: Funções (Álgebra) e Trigonometria no triângulo retângulo e na Circunferência (Geometria).

Para isso, é necessário analisar as 8 competências específicas da Matemática do Ensino Fundamental, mais especificamente o 9° ano. Dessas encontra-se alguns referentes ao tema desta pesquisa, as quais são, em ordem numérica no documento da BNCC (2018):

> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, **Álgebra, Geometria**, Estatística e Probabilidade).
>
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive **tecnologias digitais** disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
>
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas […] utilizando diferentes registros e linguagens (**gráficos, tabelas**,) […] (BRASIL, 2018, p. 267, grifos nossos).

O Quadro 1 mostra os objetos de estudo e habilidades que os estudantes do Ensino Fundamental do 9° ano precisam adquirir durante o ensino da trigonometria.

Quadro 1 - Álgebra e geometria e suas habilidades

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Funções: representação numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis
	Razão de grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	Relações métricas no triângulo retângulo	(EF09MA13) Demonstrar relações

	Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes

Fonte: BRASIL (2018, p. 316-319)

Com base no nosso objeto de estudo, este quadro demonstra a interconexão entre tópicos da Álgebra (Funções) e da Geometria (relações entre arcos e ângulos na circunferência e semelhança de triângulos na Trigonometria).

As habilidades (EF09MA06) e (EF09MA11) são fundamentais para o desenvolvimento da disciplina, servindo como base para a compreensão da Trigonometria no Ensino Médio. Espera-se que, ao ingressarem nesse nível de ensino, os alunos aprofundem sua compreensão das definições, conceitos e interpretações, desenvolvendo o pensamento computacional para resolver e formular problemas relacionados a Funções e Trigonometria. Isso se justifica pela familiaridade prévia dos estudantes com esses assuntos, ainda que abordados de forma menos formal no 9º ano do Ensino Fundamental.

Com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral, a última etapa da Educação Básica, o Ensino Médio, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) – Lei nº 9.394/96, garante que:

> **Art. 35.** O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de 3 (três) anos, terá como finalidades:
> I– a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, p. 24)

Seguindo este Art. 35, Brasil (2018, p. 471) afirma que a etapa do Ensino Médio “contribui para que os estudantes possam construir e realizar seu projeto de vida, em consonância com os princípios da justiça, da ética e da cidadania.

Para que seja alcançadas essas metas, os estudantes precisam desenvolver habilidades durante o processo escolar, adquirindo práticas de investigação, de construção de métodos nas resoluções de problemas.

O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) tornou-se essencial na rede educacional, exigindo a integração de recursos digitais no processo de ensino e aprendizagem.

A implementação de metodologias que utilizem objetos digitais, no entanto, enfrenta desafios. Muitos professores não possuem familiaridade com as tecnologias digitais e carecem da qualificação necessária para o manuseio eficaz desses recursos educacionais. Adicionalmente, a maioria dos cursos de graduação em Matemática não oferece formação específica em ferramentas digitais educacionais, para que os futuros professores possam aplicar em suas salas de aulas.

Hoje, a importância da utilização de recursos tecnológicos em sala de aula é inegável. O propósito é transformar a forma como os alunos interagem com o conhecimento, tanto individualmente quanto em grupo, especialmente nas disciplinas exatas. Ao conectar os conteúdos a aplicações práticas do dia a dia, esses recursos demonstram como o conhecimento pode ser utilizado no mundo real. Além disso, a BNCC (2018) propõe que:

> [...] os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 528)

A BNCC (2018) reafirma a importância de assegurar aos jovens percursos que lhes permitam integrar-se em uma sociedade em contínua transformação. Isso envolve capacitá-los para o exercício de profissões ainda não existentes, o uso de tecnologias a serem desenvolvidas e a resolução de problemas que se apresentam como inéditos. A BNCC conclui que as profissões do futuro estarão, em maior ou menor grau, relacionadas à computação e às tecnologias digitais.

A computação e as tecnologias se caracterizam por diversos aspectos, entre os quais destacamos:

> - usar diversas ferramentas de *software* e aplicativos para compreender e produzir conteúdo em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
>
> - utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. (BRASIL, 2018, p. 475)

Ao propor o uso de diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conhecimento, a BNCC (2018) reconhece a tecnologia como um meio de representação e exploração de ideias matemáticas. Esses recursos permitem visualizar fenômenos abstratos, como funções, transformações geométricas, relações trigonométricas ou estatísticas, tornando o aprendizado mais concreto e interativo

O Plano Nacional de Educação (PNE) 2014-2024, que compreende a inovação e a tecnologia como estratégias para atingir os fins educacionais desejados, segundo disposto nas metas 5 (estratégias 5.3, 5.4 e 5.6) e 7 (estratégias 7.12 e 7.15). Até 2024 o Brasil deverá cumprir metas do PNE por meio de estratégias que incluem o uso das tecnologias:

- **Meta 3**: 85% dos jovens de 15 a 17 anos matriculados no ensino médio. (p. 53).
- **Meta 5**: 100% das crianças do 3º ano do ensino fundamental alfabetizadas. **Estratégia 5.3**: selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para a alfabetização de crianças, [...]. **Estratégia 5.4**: fomentar o desenvolvimento de tecnologias educacionais e de práticas pedagógicas inovadoras que assegurem a alfabetização e favoreçam a melhoria do fluxo escolar e a aprendizagem dos(as) alunos(as), consideradas as diversas abordagens metodológicas e sua efetividade. **Estratégia 5.6**: promover e estimular a formação inicial e continuada de professores(as) para a alfabetização de crianças, com o conhecimento de novas tecnologias educacionais e práticas pedagógicas inovadoras (p. 58-59).
- **Meta 7**: Fomentar a qualidade da educação básica em todas etapas e modalidades (...) para atingir as metas do IDEB**. Estratégia 7.12**: incentivar o desenvolvimento, selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para a educação infantil, o ensino fundamental e o

> ensino médio [...] métodos e propostas pedagógicas, com preferência para *softwares* livres e recursos educacionais abertos [...]. **Estratégia 7.15**: universalizar, até o quinto ano de vigência deste PNE, o acesso à rede mundial de computadores em banda larga de alta velocidade e triplicar, até o final da década, a relação computador/aluno(a) nas escolas da rede pública de educação básica, promovendo a utilização pedagógica das tecnologias da informação e da comunicação (p. 63-64).

A seguir, serão apresentadas as competências e habilidades relacionadas ao estudo das Funções Trigonométricas no segundo ano do Ensino Médio. Dentre as cinco competências específicas da Matemática para essa etapa, destacamos as de número 3 e 4. O Quadro 2 a seguir detalha as habilidades correspondentes a cada uma delas:

Quadro 2 - Habilidades que os alunos do Ensino Médio devem apresentar

UNIDADES TEMÁTICAS	COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Álgebra e Geometria	Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria
		(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
	Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.),	(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em

Álgebra	na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
		(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
		(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base nos dados obtidos em pesquisas por amostras estatística, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

Fonte: BRASIL (2018, p. 536)

Com foco nas habilidades relacionadas às Funções Trigonométricas seno e cosseno, destacam-se as competências (EM13MAT306) e (EM13MAT308). As habilidades (EM13MAT403), (EM13MAT404), (EM13MAT405) e (EM13MAT406) complementam a resolução de problemas específicos.

Ademais, a pesquisa se baseou em documentos curriculares do Estado do Pará, fornecidos pela Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA), articuladora do Sistema de Ensino Estadual, através do Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular (ProBNCC). O Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA) para o Ensino Médio está alinhado aos desafios do "Novo Ensino Médio", cuja principal característica é a organização da etapa em três pilares estruturantes:

a) Necessidade de implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC);
b) Necessidade de flexibilização curricular, por meio de Itinerários Formativos; e
c) A ampliação da Carga Horária mínima do ensino médio para 3.000 horas,

A proposta para o novo ensino médio do Pará visa contribuir para a formação das juventudes e demais sujeitos do ensino médio paraense, comprometidos com a sua formação humana, bem como, com a sociedade na qual estão inseridos, de modo que reflitam criticamente os contextos local, nacional, regional e global, para que possam atuar como agentes de transformação social.

Em relação à Matemática, o DCEPA (2021) destaca a importância de articular com as demais áreas do conhecimento uma interdisciplinaridade de modo a proporcionar a leitura, representação, compreensão, análise e intervenção em situações sociais, políticas, econômicas, culturais, territoriais, científicas, tecnológicas e do mundo do trabalho e que elas estejam alinhadas com as categorias: números e álgebra, grandezas e medidas, geometria, e, probabilidade e estatística.

No entanto, para que o processo de ensino e aprendizagem possa agregar o desenvolvimento de habilidades do "pensar matematicamente", o DCEPA (2021) ressalta:

> [...] a necessidade de dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados, cabendo ao professor ser criterioso e cuidadoso na escolha dos conteúdos a serem trabalhados, a fim de propiciar ao aluno o "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que venha auxiliá-lo na apropriação do conhecimento. Assim o pensamento matemático vem contribuir como elo entre o fazer matemático e o saber escolar. (SEDUC/PA, 2021, p. 223)

Assim, considerando a matriz curricular da área da matemática do conteúdo das funções trigonométricas seno e cosseno, o DCEPA (2021) apresenta habilidades que já constam na BNCC Ensino Médio. Ver Quadro 3.

Quadro 3 - Funções trigonométricas na educação básica paraense

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO

CE3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente	(EM2MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	- Relações métricas e trigonométricas em triângulos e suas aplicações em diversos contextos.
CE3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente	(EM2MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	- Funções trigonométricas seno e cosseno e suas aplicações em diversos contextos.

Fonte: ProBNCC- Etapa do ensino Médio (2021)

Com seus anos de experiência como docente no ensino médio, Sobrinho (2015, p. 19) afirma que umas das dificuldades que os alunos apresentam é que “Normalmente, os conceitos de razões trigonométricas são primeiros estudados em nível do triângulo retângulo para, posteriormente, serem analisados no ciclo trigonométrico e representados, enquanto funções, no plano cartesiano”.

Além disso, segundo o autor:

> boa parte dos materiais didáticos disponíveis para esse tema em sala de aula abordam essas três representações das razões trigonométricas (no triângulo retângulo, no ciclo trigonométrico e no plano cartesiano), posteriormente definidas por funções trigonométricas, de forma distinta e desconexa, deixando uma lacuna entre os mesmos conceitos, previamente estudados, e suas aplicações e/ou contextualizações. (SOBRINHO, 2015, p. 19-20)

Como professor, concordo com Sobrinho em relação à essa fragmentação didática recorrente no ensino da Trigonometria. Em muitos materiais, os conceitos de seno, cosseno e tangente são apresentados em etapas isoladas — primeiro no triângulo retângulo (como razões entre lados), depois no ciclo trigonométrico (como coordenadas de um ponto em movimento) e, finalmente, como funções trigonométricas no plano cartesiano.

Essa abordagem compartimentalizada impede que o estudante perceba a continuidade conceitual entre essas representações, ou seja, que o seno de um ângulo no triângulo é o mesmo valor que define a ordenada do ponto no ciclo, e que ambos se traduzem na função seno representada graficamente.

Já Nascimento (2019), na condição como docente, a partir da experiência em sala de aula ministrando a disciplina de Matemática, ele observou que:

> os exercícios e provas desenvolvidas pelos discentes demonstram que eles não compreendem o significado do conteúdo relativo à disciplina. Da mesma forma, não compreendem a linguagem simbólica utilizada neste conteúdo, como consequência não conseguem compreender a Trigonometria como um instrumento matemático com capacidade para resolver problemas em um dado contexto. (NASCIMENTO, 2019, p. 13)

Nesse trecho compreendemos que a dificuldade dos estudantes em atribuir significado à linguagem matemática, especialmente aos símbolos e expressões que representam as funções trigonométricas, demonstra que o ensino muitas vezes tem privilegiado a manipulação algébrica e a memorização de fórmulas, em detrimento da interpretação semântica e da aplicação contextualizada. Como resultado, o estudante consegue calcular o seno de um ângulo, mas não entende o que esse valor representa, nem como ele se relaciona com um fenômeno físico, geométrico ou cotidiano.

Para Silva (2018), em suas observações durante sua experimentação com funções seno e cosseno, os alunos em sua maioria apresentavam maior dificuldade em resolver problemas, quando eram trabalhadas conceito de periodicidade das funções trigonométricas e, também, pela razão da falta de conhecimento prévios deles. E se o aluno não dispõe desses conhecimentos, a significância do conteúdo trabalhado demorará para eles compreenderem.

3.1. Misconceptions no ensino das funções trigonométricas

Nas observações desses autores acima citados, relato aqui concepções equivocadas durante a minha trajetória como estudante, tanto na Educação Básica quanto no curso de Matemática. E, também, apresentar possíveis causas que dificultam o entendimento do conteúdo trigonometria.

No 2° ano do ensino médio, ao estudar trigonometria, algumas questões me intrigavam. Uma delas era a aparente dualidade do número π: por que ele tem um valor aproximado de 3,14, mas corresponde a 180° na circunferência? Lembro que, quando o professor nos pedia para converter valores entre graus e radianos, eu fazia os cálculos da seguinte maneira:

Para obter $\frac{5\pi}{6}$ radianos em graus, bastava substituir o π por 180° e resolver a operação, resultando em 150°.

Um equívoco que permaneceu por muito tempo e não procurei tirar essa dúvida com os professores. O que na verdade acontece é que há o conceito de correspondências entre os arcos unitários da circunferência com os arcos unitários em radianos, onde 360° corresponde a 2π e, consequentemente, 180° corresponde a π.

Este fato se deu pela falha de conhecimento conceitual sobre o ciclo trigonométrico. Mas segundo Nunes & Santana (2017) "o erro não surge acidentalmente, mas em decorrência de estratégias e regras pessoais adquiridas de conhecimentos matemáticos anteriores."

Os estudos sobre equívocos (Misconceptions) estão presentes em áreas do conhecimento como a Psicologia da Educação, a Pedagogia e a Educação Matemática, sobretudo, em virtude da amplitude, do seu significado e da relevância nos contextos educacionais. As pesquisas sobre a dificuldade do aprendizado de trigonometria ainda são escassas, mas os que já foram produzidos conseguem nortear os estudos desse tópico tão importante para as ciências exatas.

3.1.1. Algumas concepções errôneas na trigonometria

Nunes & Santana (2017) discutem alguns tipos de erros e suas origens que estão arraigadas no ensino de matemática, seguindo as perspectivas de Graeber & Johnson (1990), as quais são: supergeneralização, superespecialização, tradução errônea e concepções limitadas.

Na minha experiência como professor, identifiquei equívocos frequentes dos alunos durante o estudo da trigonometria. Complementando essa observação, apresento comentários de colegas professores sobre as atividades em que os estudantes mais erram, utilizando as categorias de erros propostas por Graeber & Johnson (1990) como base para análise.

Na supergeneralização, se um estudante toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende a outra classe.

1) *Durante a graduação em Matemática, ao nos depararmos com problemas envolvendo derivadas, era comum eu e meus colegas nos questionarmos: "Como resolver essa expressão seno de 'grau 3'?" Esse equívoco derivava da nossa familiaridade com o conceito de grau em expressões polinomiais. Por exemplo, em um polinômio como* $3x^3 + 2x - 1$*, o grau é claramente 3. No entanto, não podemos aplicar essa mesma noção a expressões como* $sen^3(x) + 5$*, pois as funções trigonométricas não se enquadram na definição de polinômios e, portanto, não possuem o conceito de grau da mesma forma.*

2) *Outro exemplo que pode ser citado é sobre a propriedade distributiva. O trabalho de Chaves, Sad e Zocolotti (2018) apresenta resolução de alunos que resolveram operações de soma e produto para a relação de* $sen(a + b)$*. Eles aplicaram a chamada "o chuveirinho", ou seja, multiplicando sen com* a *e depois sen com* b*, assim:* $sen(a + b) = sen(a) + sen(b)$*, utilizando a distributiva nos arcos.* A forma correta dessa soma de arcos é: $sen(a + b) = sen(a).cos\,(b) + sen(b).cos\,(a)$.

Na categoria superespecialização as concepções errôneas dos alunos impõem a uma classe toda uma propriedade de alguma subclasse. Ou, se um aluno adiciona alguma restrição a um conceito, a um princípio ou a um procedimento que não é uma característica da classe toda.

3) *Por exemplo: Mathias (2020) aponta como um erro comum na trigonometria a noção de que o radiano é adimensional. Segundo ele, essa confusão surge ao se aplicar a fórmula* $\boldsymbol{c = \alpha . r}$ *a medidas em vez de valores numéricos, já que a fórmula representa uma equação entre números, não entre unidades de medida.*

Sobre traduções errôneas: Muitos erros acontecem enquanto os estudantes traduzem determinadas formas tais como palavras, símbolos ou fórmulas, tabelas e gráficos.

4) *Por exemplo: Na pesquisa dos autores Dionizio, Brandt e Moretti (2014, p. 529) eles relatam que alguns estudantes não conseguem identificar qual é a hipotenusa em um triângulo retângulo. Mesmo se houver a rotação da figura ele ainda comete o erro.*

5) *Outro equívoco segundo estes autores muito comum dos alunos é trocar propriedades do seno pelo cosseno.* $sen(\theta) = \frac{Cat.adj.}{hipotenusa}$.

Sobre concepções limitadas: Se a concepção errônea de um estudante é notada pela falta de um conceito, de um procedimento ou de um princípio ou, se o estudante tem apenas uma noção limitada daquele conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada. Por exemplo:

6) *Durante algumas aulas sobre trigonometria que ministrei alguns estudantes ,quando estudaram as relações seno, cosseno e tangente no 9º ano do fundamental, relataram que eles aprendiam relacionar os ângulos e os lados de um triângulo retângulo, ao chegar no 2º ano do ensino médio eles argumentaram que as noções e propriedades vistas na série anterior não se aplica no ciclo trigonométrico, o que os leva achar que as relações de seno, cosseno e tangente sejam aplicadas apenas nos triângulos retângulos.*

3.1.2. Algumas causas das Misconceptions

Muitos alunos não conseguem resolver certas situações-problema de trigonometria por não possuírem os conhecimentos prévios necessários e se julgam impossibilitados de construir esse saber, o que os leva ao esquecimento dos assuntos que foram disponibilizados para auxiliar a aprendizagem.

A trigonometria é um assunto muito difícil de ser ensinado e compreendido e quando ela é ministrada utilizando muitos cálculos algébricos, os alunos começam a se entediar e consequentemente, as fórmulas e conceitos não trazem significados para eles. Para Orhun (2004, apud FEIJÓ, 2018)

> A impressão é que a trigonometria geralmente é ensinada por meio do método professor-ativo e os alunos aprendem a trigonometria memorizando o conhecimento pronto e repetindo-o. Sabe-se que esta aprendizagem geralmente é efetiva em um curto prazo e é difícil transferir o princípio aprendido para novas situações. Os principais motivos dos erros dos alunos são decorrentes do método de ensino. (ORHUN, 2004, p.210, apud FEIJÓ, 2018, p. 20)

Pesquisas de Chigonga (2016, apud FEIJÓ, 2018) indicam que a apresentação inadequada do conteúdo de trigonometria pelos professores contribui para concepções equivocadas dos alunos. Em alguns casos, os docentes recorrem a estratégias de memorização, como músicas e macetes para arcos notáveis, em vez de explorar os conceitos subjacentes. Essa abordagem superficial pode levar a um aprendizado inadequado, um pensamento informal e dificuldades na resolução de problemas devido a concepções errôneas.

Corrêa (2016) analisou livros didáticos de trigonometria utilizados em escolas públicas do Pará e observou que a falta de atividades que estimulem a criatividade dos alunos, juntamente com a ausência de metodologias de ensino-aprendizagem eficazes, pode ser uma das causas das dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo.

3.1.3. Recomendações pedagógicas

A trigonometria é um conteúdo que envolve várias representações, como: figuras geométricas, interpretação de gráficos, formulas, diagramas e símbolos. E, para facilitar a compreensão desse assunto, o emprego dos recursos tecnológicos em sala de aula pressupõe, obrigatoriamente, um reflexo sobre a prática pedagógica desenvolvida pelos docentes, no sentido de contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem. Esses recursos fazem uso de modelagem computacional, que permite a demonstração de fenômenos naturais, aproximando a realidade vivenciada pelo discente com o processo de ensino e de aprendizagem.

Uma lacuna comum no 9º ano do ensino fundamental é a ausência da perspectiva histórica do seno como instrumento de medição de inclinações – a base para a criação dos conceitos de ângulo e comprimento de arco. Integrar a história da matemática ao ensino pode enriquecer a compreensão dos estudantes, revelando o significado original desses conceitos, intimamente ligado à construção de rampas e templos nas culturas antigas.

Outra sugestão que pode ser colocada aos professores é, em vez de ensinar os conceitos das definições de seno, cosseno e tangente a partir de triângulos retângulos, começar explicando essas relações no ciclo trigonométrico, para que os alunos não tenham o problema de compreendê-las apenas como valores para ângulos, mas também para números reais.

Com isso, torna-se possível identificar determinadas concepções equivocadas manifestadas por alunos do ensino médio durante o estudo das funções trigonométricas. A partir da análise de atividades oriundas de investigações educacionais, constata-se que os equívocos observados nas resoluções desses estudantes estão, em grande parte, associados à insuficiente compreensão dos conceitos fundamentais relacionados ao conteúdo abordado.

Ademais, a utilização de estratégias mnemônicas por parte dos docentes — frequentemente empregadas de forma mecânica — aliada a explicações pouco aprofundadas, contribui significativamente para a persistência dessas dificuldades conceituais.

O professor não deve se limitar a corrigir o erro do estudante e apresentar a solução correta. É importante que ele demonstre a construção da fórmula e do conceito, facilitando a compreensão e a atribuição de significado ao assunto por parte do aluno.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997):

> o erro é inevitável no processo de aprendizagem escolar, mas é uma maneira de formalizar o acerto pois, através da experimentação de diferentes alternativas para resolução de um problema, o aluno constrói uma lógica própria visando uma solução a esse problema (BRASIL, 1997, apud NUNES & SANTANA, 2017, p. 65)

Sendo assim, ao analisar as atividades e as causas dos equívocos sobre o ensino das funções trigonométricas, apontou-se algumas recomendações pedagógicas para que sejam utilizadas pelos professores. Uma delas é o uso das tecnologias que segundo Pastana e Neide (2017), os softwares educacionais como recurso ajuda os estudantes na compreensão e aplicação de conceitos no ensino dessas funções.

3.2. Estudos sobre as funções trigonométricas em trabalhos anteriores

Em busca de compreendermos sobre pesquisas ao estudo das funções trigonométricas seno e cosseno, neste tópico apresentaremos um estudo bibliográfico no contexto do uso das TDIC’s, com ênfase no GeoGebra, como recurso didático. Realizou-se pesquisas de dissertações e artigos nos Bancos de Dados, em rede Nacional, do PPGEM/UEPA (Programa de Pós-Graduação no Ensino de Matemática), no Google Acadêmico e na BDTD (Biblioteca digital Brasileira de Teses e Dissertações), com trabalhos produzidos dos anos de 2015 até 2025.

Das dissertações pesquisadas no PPGEM/UEPA referente ao ensino das funções trigonométricas, encontramos os trabalhos de Gama (2020) com o título “Sequência didática para o Ensino da função seno”, Ferreira (2022) com o título “uma sequência didática para o ensino da função cosseno”, Costa Neto (2022) com o tema “Ensino de Funções trigonométricas seno e cosseno por meio de atividades no Geogebra”, Filho (2023) com o título “ função seno: uma sequência didática para o ensino médio inspirada nos fenômenos da natureza” e Junior (2024) com “uma sequência didática para o ensino de equações trigonométricas, e, também, dois trabalhos que envolvia o ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo, em Medeiros (2018) e Silva (2019).

Ainda no Programa, buscamos trabalhos referente ao uso do GeoGebra como apoio no ensino de Matemática encontrando sete produções que foram de Araújo (2019), Brígida (2019), Carmo (2019), Marques (2019), Medeiros (2018), Modesto (2019) e Oliveira (2019). Já referente a utilização de outras tecnologias encontramos cinco trabalhos usando o App Inventor em Barreto (2018), Maués (2017), Moreira (2018), Pinheiro (2017) e Silva (2019).

Já nos bancos de dados da BDTD utilizamos como pesquisa a frase “Ensino das funções Trigonométricas com o uso do Geogebra” referente nos últimos 6 anos. Encontrando apenas 3 trabalhos. Com isso buscamos trabalhos com o tema “Ensino das Funções Trigonométricas”, onde encontramos 12 dissertações.

Em seguida, no Google Acadêmico buscamos por dissertações que tivesse como estudo “funções trigonométricas” encontrando 12 trabalhos. Assim, a partir dessas pesquisas foram selecionados 10 trabalhos para serem analisadas que estão organizadas no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4 - Trabalhos de pesquisas analisados

Classe dos estudos	Significado	Autor	Tema da pesquisa

Estudo com o uso das TDICs	São estudos que se baseiam na utilização dos recursos tecnológicos no ensino da matemática, possibilitando a interação digital dos educandos com os conteúdos da matemática e, também, reconhecer a importância das ferramentas digitais em sala de aula.	Silva (2013)	O Ensino de Funções Trigonométricas com auxílio do GeoGebra
		Medeiros (2018)	O Ensino dos conceitos básicos de Trigonometria no triângulo retângulo com o uso do Software educacional GeoGebra
		Moreira (2018)	Geometria Espacial cálculo de volume usando App Inventor
		Silva (2018)	A utilização do aplicativo GeoGebra para Smartphones como recurso didático nas aulas de matemática do Ensino Fundamental
		Nascimento (2019)	O uso do Geogebra no ensino das funções trigonométricas no 2° ano do ensino médio IFMT campus Cuiabá
		Ferreira (2023)	Sequência didática para o ensino da função cosseno
Estudos experimentais	Refere-se à ampliação do processo de ensino-aprendizagem de funções trigonométricas, onde envolve pesquisa-ação, invenções, criação de protótipos, resoluções de desafios, aspectos que colocam os alunos para idealizar situações sendo o protagonista na construção do seu conhecimento	Sobrinho (2015)	O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas
		Corrêa (2016)	O Ensino de Funções Trigonométricas por atividades
		Gama (2020)	Uma sequência didática para o ensino da função seno.
Estudos diagnósticos	É o estudo que utiliza de recursos, meios técnicos com o objetivo de localizar e corrigir os problemas e dificuldades dos alunos, determinando suas causas em relação às funções trigonométricas	Sousa (2018)	Software GeoGebra no Ensino da Trigonometria: proposta metodológica da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2021)

3.2.1. Estudo com o uso das TDICs.

O trabalho produzido por (SILVA, Evandro. 2013), com o título “O Ensino de Funções Trigonométricas com auxílio do GeoGebra”, teve como objetivo propor o uso do software GeoGebra através de tutorias em formas de roteiro como recurso didático a ser utilizado pelos professores, para que estes busquem alternativas para explorar as peculiaridades relativas do ensino dessas funções de forma crítica, investigativa e dinâmica, de modo a deixar as aulas mais atraentes para os alunos.

Esta pesquisa foi aplicada em uma escola pública e tiveram como sujeitos alunos do 2° ano do ensino médio e professores da rede pública. As atividades que foram propostas aos alunos tiveram como auxiliador a ferramenta GeoGebra, pois segundo o autor este software possui uma interface de fácil manipulação e dinamismo.

Ainda segundo Silva (2013), o GeoGebra possui outras características de fácil manuseio que é a “construção de equações e coordenadas de forma direta pelo teclado dos computadores de diversos objetos, tais como: pontos, retas, segmentos de reta, círculos, polígonos, gráficos ilustrativos de funções em dimensões de 2D e 3D”. Assim como, possui a vantagem de trabalhar com variáveis associadas a números, pontos e vetores.

Silva (2013) afirma que uma das razões que remete a dificuldade de aprendizagem dos alunos no ensino da trigonometria está relacionada as metodologias que são impostas pelos professores, a qual o tema é abordado exclusivamente de muita abstração com cálculos que não dão significância alguma para os alunos.

Para melhorar o ensino e a construção das funções trigonométricas foi elaborado um roteiro de como construir os gráficos de cada função, que foram seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, todas seguindo um roteiro. Em seguida foi apresentado análises dos parâmetros que constitui a definição mais abrangente da função seno do tipo $f(x) = a + b.sen(cx + d)$ em suas implicações no domínio, na imagem e no período da mesma.

O roteiro se constitui numa sequência de um tutorial para a construção de uma determinada expressão trigonométrica, mostrando o passo a passo de como utilizar as ferramentas do software GeoGebra. Ao final de cada roteiro das funções, Silva (2013) ainda propõe que estes roteiros podem ser transformados num applet (aplicativo Java) e inserido numa plataforma de ensino virtual, tipo o ambiente Moodle, possibilitando por exemplo, a criação de um curso/módulo sobre este assunto.

(SILVA, Evandro, 2013) afirma que o uso de softwares educativos em sala de aula facilita a visualização, os efeitos em que cada função se comporta e a interpretação de gráficos feitas pelos alunos, pois pode-se relacionar vários fenômenos físicos como pressão sanguínea do coração, o comportamento das marés, tensão de uma corrente elétrica e entre outras aplicações que possa envolver funções trigonométricas.

A fundamentação teórica se baseou nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs) que realça que, o artefato principal da temática está nas resoluções de problemas. E, também, nos estudos sobre a implementação de recursos da informática no ensino realizados em trabalhos de Dissertações e Artigos referentes ao tema.

Para a sua metodologia o autor apresentou uma abordagem didática experimental, explorativa e analítica de propriedades de funções trigonométricas, utilizando a forma tradicional de ensino (quadro, definições, exemplos e exercícios) em um grupo de alunos e em outro grupo, utilizando-se o GeoGebra.

Com a aplicação do experimento, (SILVA, Evandro, 2013) concluiu que a ferramenta GeoGebra contribuiu de maneira mais eficaz no processo de ensino-aprendizagem dos alunos, os quais tiveram mais acertos nas resoluções de problemas. O autor finaliza propondo que as escolas possam ter salas de informáticas com máquinas suficiente e professores preparados e dispostos a fazerem o uso de tal tecnologia de mediação.

Medeiros (2018), realizou uma pesquisa com o tema de dissertação “O Ensino dos conceitos básicos de Trigonometria no triângulo retângulo com o uso do Software educacional GeoGebra”, objetivando investigar uma sequência didática com o auxílio dessa ferramenta junto aos alunos do 9° ano do ensino fundamental.

Medeiros (2018) propôs em elaborar uma sequência didática utilizando o GeoGebra como ferramenta para auxiliar professores em aulas de Matemática, para que estimule os alunos a pensar, interpretar e argumentar sobre o comportamento de gráficos, figuras, ângulos, comprimento entre outras do contexto trigonométrico.

A pesquisa foi realizada em uma escola municipal de ensino fundamental do município de Marabá/PA.

A fundamentação teórica teve como base os princípios da Didática da Matemática, especialmente na Teoria das situações Didáticas e na noção de transposição Didáticas de autores como Brousseau (1986) e Chevallard (1991), respectivamente, buscas em sites de universidades e programas de Pós-graduação, Google acadêmico, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD e, também, estudos do uso das novas tecnologias da informação e comunicação (TIC) no contexto educacional em artigos e dissertações, apresentando a importância das ferramentas tecnológicas como instrumento para promover a aprendizagem de processos cognitivos dos alunos.

Medeiros (2018) aponta algumas dificuldades no ensino-aprendizagem da trigonometria, como por exemplo, o ensino pautado no tradicionalismo, o uso exagerado de fórmulas e conceitos que não trazem significado algum para o aluno, o uso de metodologias aplicadas pelos professores que não trazem estímulos e muito menos resultados satisfatórios de aprendizagem.

Para suprir essas dificuldades, Medeiros (2018) fez uso das novas tecnologias da informação e comunicação (TIC), mais especificamente o GeoGebra, na educação como recurso para o ensino da Trigonometria. O autor escolheu o Geogebra por ser um software de matemática dinâmica gratuito e de código aberto que combina geometria, álgebra, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Mas segundo ele, as tecnologias não são unanimidades entre os professores, pois para estes os alunos se tornarão dependentes da tecnologia e que poderão perder a capacidade de pensar, de realizar cálculos mentais e de executar algoritmos de maneira escrita.

Porém, apesar dos contra a maioria dos educadores e pesquisadores apoiam a utilização desses recursos tecnológicos, pois estamos vivendo em um mundo cada vez mais informatizado. Em trabalhos citados por Medeiros (2018), Borba e Penteado (2001) destacam que o acesso a informática deve ser visto como um direito do aluno, sendo uma “alfabetização tecnológica” parte necessária para que ele possa aprender a ler, escrever e refletir através dessa nova mídia.

A metodologia esteve baseada nos pressupostos da Engenharia Didática de Michelle Artigue (1988) sendo uma pesquisa do tipo pesquisa-ação referente a aplicação/experimentação, utilizando-se abordagens de pesquisa qualitativas e quantitativas.

Na aplicação da experimentação, foi bordado 5 atividades sendo que a sala de informática foi o ambiente de estudo para usar o GeoGebra. Os alunos trabalharam em sua maioria em dupla. Medeiros (2018) afirma que os alunos não tiveram grandes dificuldades para executar as atividades propostas, já que tiveram auxílio do professor/pesquisador e de colegas que ajudavam uns aos outros. Apesar de pouca dificuldade em manusear o software GeoGebra e interpretar algumas atividades erroneamente, os alunos gostaram bastante de utilizar o computador para realizar as aplicações.

Medeiros (2018) conclui que a transposição do conteúdo ensinado utilizando o GeoGebra contribui satisfatoriamente na construção de conceitos básicos trigonométricos desenvolvidos pelos alunos, favorecendo a capacidade de investigar e verificar através das observações e registrá-las de maneira escrita. Ainda em seus resultados, ele afirma que uso da tecnologia favorece o desenvolvimento de situações didáticas, podem resultar perceptivelmente em uma mudança de comportamento e a evolução no aprendizado dos alunos.

No trabalho dissertativo de Moreira (2018), intitulado por “Geometria Espacial cálculo de volume usando App Inventor”, utilizou-se um aplicativo em mobile (celulares) que teve como objetivo verificar se a aprendizagem de Geometria Espacial se torna mais eficaz a partir de uma sequência didática através de construções de aplicativos.

A intenção de utilizar a fermenta, o App inventor em Smartphones, foi para contribuir na unificação da Matemática escolar com a Matemática informatizada, para que o aluno possa encontrar áreas e volumes de sólidos geométricos realizando cálculos de forma mais dinâmica e prática, trazendo-o para o campo de ator ativo.

A ideia de Moreira (2018) foi projetada para apoiar professores de Matemática, tentando suprir as dificuldades encontradas quando se leciona Geometria Espacial. A pesquisa teve como lócus uma escola pública do Maranhão, com sujeitos de estudo alunos do 3° ano do ensino médio e professores da rede pública.

O Trabalho de Moreira (2018) está fundamentado em Dissertações de mestrados já realizados sobre o ensino de Geometria Espacial, no ensino e aprendizagem de alguns autores como Pontes (2014) e Chaves (2013), em livros didáticos e Artigos. Seguindo estudos de autores que contribuem para o referencial teórico, Moreira (2018) utiliza a Engenharia Didática de Brousseau (1986) e Michelle Artigue (1996), e nas teorias do campo da educação ele toma como apoio Piaget e Vygotsky.

Segundo Moreira (2018) muitas dificuldades dos alunos estão relacionadas com a interpretação de textos inadequada, efetuação de contas do ensino básico realizada de forma equivocada, transformação de unidades de medidas serem feitas sem o cuidado de obedecer às regras matemáticas e principalmente não assimilar de fato o que é o volume, ou melhor, o que o valor representa e como mensurar tendo uma noção quantitativa do resultado obtido.

Para ele, há outros motivos pelo qual os alunos podem estar tendo todas essas dificuldades, por exemplo, a não assimilação de conteúdos básicos nas séries anteriores em que o mesmo foi submetido provocando uma sequência de problemas em cadeia.

A ideia de usar o aplicativo Inventor em sala de aula é que, ao construir aplicativos no celular esta ferramenta trará o aluno para o campo de ator ativo, ou seja, fazer com que ele faça parte das ações que envolvem o seu contexto, utilizando-se da tecnologia como aliada. Ele enfatiza que a ferramenta app inventor é totalmente livre, sem restrições de uso, e sua programação em blocos é de fácil compreensão, na qual os alunos e professores de qualquer disciplina poderá fazer uso sem maiores problemas.

Ele ainda ressalta que tanto o professor quanto o computador com seus softwares são mediadores no processo de ensino-aprendizagem do aluno, mas para ocorrer a transmissão do saber matemático é importante que os professores saibam manusear os recursos tecnológico e, também, que haja interação entre aluno-aluno e professor-aluno no ambiente de estudo.

A metodologia aplicada por Moreira (2018) se baseou, primeiramente, nas análises previas para obtenção de informações sobre as dificuldades existentes dos alunos quando se estuda Geometria Espacial, a elaboração de questionário para alunos egressos do 2° ano do ensino médio em escolas públicas. E na aplicação do App inventor nos Smartphones, Moreira (2018) realizou 4 atividades, onde cada uma dessas seguiram uma sequência de como construir as figuras Espaciais, um tutorial, nas quais foram ATIVIDADE 1: Construção de aplicativo estudo do Paralelepípedo.

ATIVIDADE 2: Construção de aplicativo estudo do Cilindro. ATIVIDADE 3: Construção de aplicativo estudo do Cone. ATIVIDADE 4: Construção de aplicativo estudo da Esfera.

Depois da experimentação aplicada, realizou-se análises das resoluções das atividades dos alunos usando como referência a semiótica de Duval (2003). Moreira (2018) conclui que houve dificuldades na construção de aplicativo, pois sabia que as limitações dos alunos já eram esperadas pelo fato de ser uma metodologia nova e por realizarem muitos cálculos matemáticos.

No entanto, apesar das dificuldades iniciais com a nova tecnologia, foi bastante produtiva e satisfatória, pois à medida que os alunos construíam uma figura mais empolgados eles ficavam, se interessando em aprender como funciona as dimensões em 3D.

Em suas considerações, Moreira (2018) enfatiza que para que um experimento, desta natureza tenha êxito, é necessário, do professor, um planejamento e uma mudança na postura em sala, onde deverá deixar de ser somente ativo, adquirindo também uma postura de orientador e que os alunos deixam de ser atores passivos para serem atores ativos.

Já na dissertação de **(**Silva, Elanny, 2018) com o título “A utilização do aplicativo GeoGebra para Smartphones como recurso didático nas aulas de matemática do Ensino Fundamental”, o trabalho teve como objetivo levantar informações sobre o perfil dos professores acerca da utilização das mídias digitais em sala de aula e fora dela. Visa-se também, analisar perfil dos alunos quanto a utilização de aplicativos educacionais em estudos didáticos nas aulas de matemática, analisando a eficiência e o aprendizado.

Para ter a construção do trabalho, a autora levantou informações históricas sobre o desenvolvimento de algumas tecnologias e suas influências no meio social, e de como elas evoluíram dentro das escolas. A pesquisa foi realizada em uma escola municipal de ensino fundamental com alunos do 9° ano no Estado de Maranhão.

A ideia de aplicar o GeoGebra em Smartphones é que em todos os lugares o crescente uso de tecnologias moveis é cada vez mais frequente nos dias atuais e, por essa razão, utilizou-se essa ferramenta na sua experimentação. De acordo com a autora há muitos professores que ainda tem receios de utilizar essas ferramentas digitais por medo de errar, por não terem tempo para preparem algo novo e por não terem a técnica necessária para manusear os equipamentos.

Por outro lado, as pesquisas feitas por Silva, Elanny (2018) mostraram que a inserção das tecnologias digitais nas práticas do ensino de matemática apresentou melhorias na aprendizagem, bem como na desmitificação de que a disciplina é algo difícil de se aprender.

Assim, na aplicação da experimentação, que envolveu 13 alunos, apenas 5 alunos tinham aparelho smartphone, o que não impediu de começar a experimentação já que os alunos poderiam formar grupos.

A pesquisa é classificada como abordagem qualiquantitativa, se preocupando com o aprofundamento da compreensão do grupo social e as análises de dados, que procura levantar informações sobre as relações das variáveis e descrever as causas de um fenômeno. Também é uma pesquisa descritiva, pois buscou ter uma visão do perfil dos professores acerca da utilização de mídias digitais através de um questionário online com a participação de 35 professores.

A atividade foi realizada em três encontros sendo o primeiro a apresentação do aplicativo GeoGebra, um tutorial de como manusear as propriedades dos objetos da tela de visualização. No segundo encontro foi executada a atividade em que os alunos deveriam aplicar os passos orientados para gerar gráficos de funções do 1° e 2° graus. E por fim, foram generalizados os conceitos sobre essas funções, traduzindo-os para a linguagem matemática.

A autora afirma que a maioria dos professores não acompanharam o desenvolvimento tecnológico voltado para o ensino e aprendizagem dos alunos, e que eles usam mais o aparelho *smartphone* apenas para interesse próprio de comunicação e busca de informação, mas não como um instrumento de ensino nas aulas.

Após a experimentação, ela conclui que os alunos conseguiram absorver as informações ministradas, pois percebeu-se que, mesmo com algumas dificuldades de interpretação eles tiveram maior entendimento sobre as funções de 1° e 2° graus já que a visualização das expressões era construída rapidamente, poupando tempo e desgastes dos alunos.

No trabalho de Nascimento (2019) cujo o tema foi “O uso do GeoGebra no ensino das funções trigonométricas no 2° ano do ensino médio IFMT campus Cuiabá” teve como objetivo investigar como a utilização do *software* GeoGebra pode potencializar a exploração de tópicos da trigonometria. Nascimento (2019) considera que as tecnologias estão mais presentes no cotidiano das pessoas, e que isso torna-se imperativo que o professor disponha de práticas pedagógicas dinâmicas em que faça uso das mesmas.

O desenvolvimento da sua pesquisa teve como proposta de intervenção pedagógica o *software* GeoGebra a partir de uma sequência didática realizada em um laboratório de informática. Os sujeitos da pesquisa foram 34 alunos do 2° do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso-IFMT.

Nascimento (2019) organiza seu trabalho em quatro capítulos. O primeiro capítulo é composto pela introdução, na qual se apresenta a estruturação do estudo, abordando, entre outros aspectos, os objetivos, a justificativa e a metodologia da pesquisa. O segundo capítulo consiste na fundamentação teórica onde é abordado as Tecnologias digitais no ensino da Matemática e o *software* GeoGebra. O terceiro capítulo compreende os procedimentos metodológicos. No quarto capítulo, ele elaborou a análise da intervenção pedagógica desenvolvida a partir do *software* GeoGebra, seguida, logo após, pelas Considerações Finais.

Como referencial teórico, Nascimento (2019) se apoia nas obras de Amado e Carreira (2015) Borba (2010, 2016), Dullius (2015), Gravina (2001, 2012), Paiva (2016), Penteado (2010), Quartieri (2015, 2016), Valente (1997), entre outros.

A sua metodologia caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa sistematizada, elaborada de forma exclusiva pelo pesquisador contando com exercícios que possibilitaram aos estudantes a interação com o *software* GeoGebra, tendo a Trigonometria como elemento principal.

A pesquisa apresentou 24 aulas de 50 minutos cada. Os alunos seguiram um planejamento das atividades elaborada pelo autor da pesquisa.

Os objetivos das aulas 1 e 2 referem-se à apresentação do *software* GeoGebra aos estudantes e à execução das atividades possibilitando a interação com a plataforma. Ao realizar esta atividade, foi possível perceber que alguns estudantes a desenvolveram de forma mais célere, outros nem tanto. Contudo, possibilitou-se que cada um trabalhasse em seu próprio ritmo.

As aulas 3 e 4 tiveram como objetivo a construção e a visualização do círculo trigonométrico e, posteriormente, do radiano. Durante essa aplicação Nascimento (2019) afirmou que a maioria dos estudantes conseguiram acertar as questões. Já os estudantes que erraram alguns dos itens, percebeu-se que tiveram dificuldade em relacionar o comprimento do arco com o ângulo tanto no GeoGebra quanto no cálculo manual. Nesse caso o autor repetiu a atividade para que eles pudessem compreender melhor.

Nas aulas 5, 6, 7, 8 e 9, teve-se como objetivo definir as principais razões trigonométricas no círculo trigonométrico: Seno, Cosseno e Tangente, bem como visualizar a trigonometria no triângulo retângulo. Nessa fase foi observado que a grande maioria dos estudantes conseguiram extrair as informações feitas no Geogebra e respondesse de forma correta as atividades. Destacamos aqui, segundo Nascimento (2019), as dificuldades apresentadas pelos alunos, que foram:

- Não conseguiram visualizar na figura o lado do triângulo que representava o seno e o cosseno, nem mesmo identificar ou comparar os valores de seno e cosseno de determinados ângulos;
- Observou-se que visualizaram de forma incorreta, no círculo, os valores da tangente de vários ângulos, não conseguindo relacionar os valores de seno, cosseno e tangente no *software* nem com o cálculo manual.

Nas aulas de 10 a 14 os objetivos foram usar as simetrias do círculo trigonométrico para relacionar seno, cosseno e tangente entre ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes e posteriormente compreender e construir essas funções no ciclo trigonométrico, relacionando-as no plano cartesiano. O autor destaca que os erros dos alunos foram diminuindo à mediada que prosseguia as atividades e que eles perceberam que os gráficos poderiam ser construídos ao mesmo tempo e com cores diferentes e com movimento no GeoGebra.

Nas aulas 15 e 16 o objetivo foi a construção por meio do software, visualizar os comportamentos das funções seno, cosseno e tangente, determinar o domínio, a imagem e o período de cada função.

Nessa atividade o autor observou que os alunos não tiveram dificuldades para construir os gráficos das funções por meio do *software*, porém, tiveram problemas com as análises dos gráficos. Ele afir0ma que a dificuldade na interpretação dos mesmos, uma das hipóteses, foi o fato de não conseguirem realizar a análise em razão de não se terem apropriado dos conceitos. Ele destaca que não basta apenas corrigir o erro, pois é importante fazer com que o estudante possa perceber sua ocorrência, identificar sua origem e superar o obstáculo que lhe deu causa

E por fim, nas aulas de 17 a 24, as atividades tiveram como propósito estudar os efeitos das funções seno, cosseno e tangente quando manipulavam os coeficientes e parâmetros delas no GeoGebra e em seguida resolver algumas aplicações do mundo real como, batimentos cardíacos por um determinado tempo, o movimento de um pistão de um motor que se movimenta periodicamente, o movimento de uma roda-gigante e as enchentes das marés em determinadas horas.

Em suas considerações, o autor argumenta que foi um desafio em utilizar o GeoGebra como recurso didático, pois sempre teve dificuldade de adotar metodologias de ensino mais dinâmicas em suas práticas pedagógicas cotidianas. Portanto, foi a superação dessas dificuldades que resultou na proposta e no desenvolvimento desta pesquisa.

Ele destacou que ao usar o GeoGebra a interação entre alunos e professor possibilitou que eles criassem hipóteses, explorassem alternativas de modo coletivo e que isso favoreceu a discussão e interatividade professor-aluno.

O autor finaliza que o docente deve considerar o software como recurso didático de uma metodologia ativa e dinâmica, que possibilitem aos alunos a consolidarem os conteúdos matemáticos.

A pesquisa de Ferreira (2023) com o título “Sequência didática para o ensino da função cosseno” teve como objetivo analisar os indícios de aprendizagem resultantes da aplicação de uma Sequência Didática (SD) envolvendo função cosseno. Seu trabalho estava centrado em um público alvo com estudantes do 2º ano do ensino médio de escolas públicas do Estado do Pará. As fundamentações teóricas se baseavam em trabalhos de Gama (2020), Correêa (2016), Bortolossi (2020). A sua sequência didática estava estruturada no modelo das UARC proposta por Cabral (2017).

A revisão de estudos foi realizada em três categorias de pesquisa: as diagnósticas, experimentais e teóricas. Foi feito, também análise de um livro didático de Paiva (2015) para investigar como a função cosseno é apresentada nesse material. Ferreira (2023) realizou um diagnóstico com 77 estudantes do 3º ano do ensino médio da rede pública investigando seus perfis econômicos, o currículo da escola, a metodologia utilizada pelos professores e avaliando o ensino da função cosseno através de um teste de verificação com 10 questões discursivas.

Os dados mostraram que os estudantes apresentam muitas dificuldades ao se depararem com questões que envolva interpretação de texto, transposição gráfica para algébrica e manipulação matemática limitado. Ferreira (2023) afirma que o estudante até sabe o assunto, mas em algum momento no processo de aprendizagem perdeu a confiança em seus conhecimentos e talvez por uma fraca relação entre professor-aluno.

A sequência didática é composta por 5 UARCS’s ou seja, cinco propostas de atividades associadas a função cosseno. Esse conjunto de atividades de Ferreira (2023) é uma adaptação do trabalho de Gama (2020), isto é, em vez dos estudantes manipular materiais físicos eles utilizarão aplicativos tecnológicos no GeoGebra para resolver os questionamentos de cada UARC. Para cada Atividade foi construído um aplicativo no Geogebra e durante a experimentação, é necessário que o celular ou o computador esteja conectado à internet para que os aplicativos possam abrir.

Ferreira (2023) explica que durante os procedimentos metodológicos o objetivo era aplicar sua Sequência didática com os estudantes do 2° ano do ensino médio, porém com o advento da Pademia da Covid-19, foi necessário utilizar outra forma de validar seu trabalho. Ele redirecionou o processo para professores de matemática avaliar sua Sequência didática, no total de 20 docentes pertencentes ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), vinculados à UEPA.

Desta maneira, Ferreira (2023) obteve como resultado que a SD desenvolvida apresenta potencialidades ao ensino de Função Cosseno, devido a atratividade vinculada ao uso da tecnologia, bem como a linguagem adequada que permite uma evolução gradativa do objeto matemático, além do papel protagonista que o aluno assume no decorrer da sequência.

Ele destaca que: “a atratividade vinculada ao uso do geogebra, bem como, as influências em relação ao papel de mediador para o professor, de um ser mais ativo para o aluno e no re(descobrimento) do saber de forma gradual”. Além disso, embora tenha existido um redirecionamento do processo de aplicação da sequência, entendemos que o objetivo elencado foi respondido.

E finaliza que os argumentos indicados, ressaltou que esta pesquisa trouxe consigo além das contribuições acadêmicas supracitas para o ensino de Função Cosseno, diversas outras contribuições. E que essa sequência didática possa ser apontada para trabalhar outras funções trigonométricas, bem como, o uso de outros recursos didáticos apontados como válidos por autores que trabalham com a Educação Matemática.

3.2.2. Estudos experimentais

O trabalho elaborado por Corrêa (2016), com o título “O Ensino de Funções Trigonométricas por atividades”, apresentou como objetivo geral avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática no desempenho dos alunos em resoluções de problemas matemáticas, dando mais ênfase em funções trigonométricas.

A ideia de trabalhar este tema surgiu pelo fato de que o assunto em questão é apresentado aos alunos com muita complexidade, além de assimilar os temas que estão inseridos neste assunto e de lembrar outros assuntos anteriores, tais como circunferência, arcos, ângulos e o ciclo trigonométrico, que funcionarão como pré-requisitos para introduzir este conteúdo.

Com sua experiência como docente em escola pública e com a produção de um trabalho de especialização titulada como “Uma experiência no Ensino de Problemas com as 4 operações em Abaetetuba” com o intuito analisar uma sequência didática por meio de atividades para o ensino das quatro operações no 6º ano do Ensino Fundamenta, ela explica que a metodologia “Ensino por atividades” possibilita ao aluno argumentar, raciocinar diante das situações que lhes são propostas, fazer indagações junto a seus pares e tirar suas próprias conclusões, tendo o professor como orientador mediador da aprendizagem e não como o detentor do conhecimento.

Este trabalho é configurado como Metodologia de Descoberta, que segundo alguns trabalhos citados por Corrêa (2016), como de Ronca e Escobar (1988) e Mendes e Sá (2006), a aprendizagem por Descoberta se relaciona a uma situação de ensino, em que o professor não explicita aos alunos os conceitos e princípios que estes deverão aprender, através de exemplo e atividades que facilitem aos alunos a dedução dos conceitos e relações matemáticas.

Corrêa (2016) realizou esta pesquisa em uma escola pública do município de Abaetetuba/PA, tendo como sujeitos alunos do 2° ano do ensino médio. As análises prévias tiveram como base um questionário socioeconômico e testes avaliativos, analisando-as graficamente e estatisticamente. A fundamentação teórica de Corrêa (2016) se apoiou nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, em trabalhos já pesquisados em várias dissertações de mestrados acerca do ensino-aprendizagem de funções trigonométricas e em livros didáticos.

Nas análises das pesquisas que utilizaram a tecnologia como apoio no ensino de matemática, a autora encontrou argumentações significativas em que o uso dessas ferramentas educacionais, como calculadoras, software e aplicativos, mostrou-se eficaz no ensino-aprendizagem no ensino das funções trigonométricas. Ela afirma que as tecnologias possibilitam um avanço na aprendizagem, a partir de uma forma diferenciada de ensino, o qual possibilita ao aluno a curiosidade, o interesse e com isso, o aprendizado.

A metodologia de pesquisa se baseou nos princípios da Engenharia Didática de Artigue (1996), caracterizada por ser um esquema experimental, baseado em "realizações didáticas" na sala de aula, isto é, na concepção, na observação e na análise de sequências didáticas. Essa metodologia é composta pelas seguintes etapas didáticas: análises prévias, concepção e análise à *priori*, experimentação e análise à *posteriori* e validação.

As pesquisas referentes das análises prévias sobre o ensino-aprendizagem das funções trigonométricas, em que teve a participação de 100 professores e 100 alunos, os resultados que Corrêa (2016) obteve foi que 66% dos professores revelaram que suas aulas de funções trigonométricas na Educação Básica iniciavam pela definição seguida de exemplos e exercícios, mostrando que grande parte dos professores ensinam de maneira tradicional as aulas de matemáticas.

Na aplicação das atividades Corrêa (2016) afirma que durante a realização do experimento, os alunos apresentaram dificuldades em relação aos cálculos onde as informações se apresentavam por meio de expressões envolvendo funções. Mas segundo ele, isso já era esperado de acordo com os testes inicias com os alunos egressos do 2º ano do Ensino Médio.

Porém, no decorrer de cada aula, os alunos evoluíram de forma a apresentar soluções corretas, melhoraram suas escritas em relação às observações e conclusões e pudemos notar nos mesmos a satisfação quando faziam suas resoluções corretamente.

Corrêa (2016) conclui, depois da aplicação da sequência didática, que essa metodologia de ensino proporcionou resultados favoráveis a aprendizagem dos alunos, pois após as atividades aplicadas obtiveram maior desempenho nas resoluções de questões sobre conteúdos de funções trigonométricas.

Em suas considerações finais Corrêa (2016) em consonância com as análises prévias, quando ministradas aulas de funções trigonométricas utilizando metodologias que possam avançar o aprendizado do aluno, certamente os resultados serão muitos significativos. E de acordo com os dados coletados no pré-teste e pós-teste, os resultados tiveram avanços significativos quando utilizado o Ensino por atividades de maneira planejada. Assim, o trabalho servirá de auxílio para ajudar os docentes em suas aulas de matemática.

No trabalho de pesquisa de Sobrinho (2015**)** teve como objetivo central de a "investigação das possíveis contribuições que uma metodologia baseada na Técnica de Resolução de Problemas, de George Polya, pode ter para com o processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, bem como para com o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos da 2ª série do Ensino Médio.

A sua pesquisa foi realizada no Estado de São Paulo com 8 alunos do 2° ano do Ensino Médio. Dentre as questões que ele buscou responder ao final da pesquisa, estavam:

(1ª) Como realizar a generalização do conceito de razão trigonométrica (seno, cosseno e tangente), estudado no triângulo retângulo, para o ciclo trigonométrico?

(2ª) Como realizar a transição da generalização procedida no ciclo trigonométrico para o estudo das funções trigonométricas no plano cartesiano, de forma lógica e dedutiva?

Essas perguntas surgiram, segundo a sua experiência como docente, pelo fato de os alunos apresentarem dificuldades ao estudar e relacionar os conceitos de razões trigonométricas, trabalhados primeiramente no triângulo retângulo, com os das funções correspondentes, representadas no plano cartesiano. Dentre os motivos dessas dificuldades ele destacou os livros e apostilas, que em sua visão estes não criam conexões entre os conceitos trabalhados e as atividades do cotidiano dos alunos.

Utilizando como base teórica a técnica de Resoluções de Problemas de George Polya e os Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio (PCNEM), foi proposta Atividades Didáticas para que fossem desenvolvidas pelos alunos, que ele nomeou de: Atividade 1 –Calculando distâncias inacessíveis; Atividade 2 – Medindo o comprimento da sombra de uma estada fixada ao solo; e, Atividade 3 – O Estudo das Funções Trigonométricas.

Quadro 5 - Recorte da atividade 1 de Sobrinho (2015)

1ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – CALCULANDO DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

Situação-Problema

"Em Vargem Grande do Sul a Matriz é chamada de 'Sant' Ana' e encontrasse localizada em sua praça central. Calcule a altura do sino, em relação ao piso da
praça, utilizando-se para isso de seus conhecimentos matemáticos."

Objetivo

O objetivo central dessa 1ª atividade didática é contextualizar, através da situação-problema descrita, a necessidade e utilização do conceito de "razão trigonométrica" para resolver o problema proposto.

Tempo previsto para realização da atividade

3 horas-aula, de 50 minutos cada.

Material necessário ao desenvolvimento da atividade

Para cada aluno participante desta atividade serão necessários:

- Papel sulfite A4;
- Lápis;
- Cola quente;
- Borracha;
- Uma tabela com as medidas do seno, cosseno e tangente de ângulos menores que 90º;
- Transferidor;
- Trena;
- Alfinete de mapa;
- Um canudo grosso de refrigerante; e,

Copo de plástico com tampa.

Fonte: Sobrinho (2015, p. 40)

Nessa atividade o autor espera que os alunos se recordem dos conceitos de razões trigonométricas, estudadas durante o 9º ano do Ensino Fundamental. Caso isso não ocorra, ele interviria. Durante a sua aplicação, ele observou que os alunos não recordaram os conceitos das razões de seno, cosseno e tangente e por conta disso, foi revisado em sala de aula as respectivas relações trigonométricas.

Ele afirmou que o fato de os alunos não terem lembrado os conceitos foi por conta que, nos anos anteriores, estes mesmos alunos tiveram um ensino tradicional desses conceitos em que o professor era ele mesmo.

Com isso, após a realização da primeira atividade didática, foi observado que os alunos compreenderam melhor o conceito de razão trigonométrica, através de sua aplicação na resolução de um problema real. Mas ele afirma que os alunos só conseguiram chegar ao real entendimento na atividade 2.

Quadro 6 - Recorte da atividade 2 de Sobrinho (2015)

2ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – MEDINDO O COMPRIMENTO DA SOMBRA DE UMA ESTACA FIXADA NO SOLO

Objetivo Pretende-se, nessa atividade, desenvolver no aluno habilidades que o conduzam a verificar a necessidade e importância da construção do ***círculo trigonométrico***, como sendo a ferramenta matemática que o auxiliará na resolução dos questionamentos levantados nessa fase da pesquisa. **Tempo previsto para o desenvolvimento da atividade** Dois dias, sendo que, no primeiro dia, serão necessárias 4 horas para coleta de dados (medições dos comprimentos das sombras e dos ângulos). No segundo dia, serão necessárias 3 aulas de 50 minutos cada, onde, de posse dos dados coletados no primeiro dia, pretende-se responder às perguntas descritas na *"Expectativa do desenvolvimento da atividade".* **Material necessário ao desenvolvimento da atividade** ● Papel Sultite A4; ● Papel Milimetrado; ● Lápis; ● Borracha; ● Compasso; ● Transferidor; ● Régua; ● Trena; ● Barbante; Giz (de várias cores).

Fonte: Sobrinho (2015, p. 43)

Na segunda atividade o autor espera que os alunos possam desenvolver habilidades que o conduzam a verificar a necessidade e importância da construção do círculo trigonométrico, como sendo uma ferramenta matemática.

Após o término das duas atividades o autor conclui da seguinte forma:

> "sempre que possível, devemos buscar associar o conceito matemático estudado a sua aplicação prática, por meio de um problema "não rotineiro", segundo a definição de Polya. Certamente, agindo desta maneira, estaremos aumentando a possibilidade do aluno melhor compreender o conceito estudado e aplicá-lo durante a resolução de um problema de seu cotidiano." (SOBRINHO, 2015, p. 111)

Na última atividade o autor afirmou que durante a passagem da tabela contendo os registros das medições para a construção do gráfico cartesiano das funções seno e cosseno, em folha de papel milimetrado, foi que os alunos tiveram a noção real do objetivo da atividade didática proposta. Ou seja, de compreenderem os conceitos de máximo e mínimo de funções, e de sua possível periodicidade.

De modo geral, o autor faz algumas observações acerca da utilização da Técnica de resolução de problemas como planejar com mais detalhes as atividades didáticas; prever o tempo a ser gasto na execução da atividade didática planejada, para que possa cumprir, sem atropelos, boa parte do conteúdo programático prevista para a série acadêmica e pensar em formas de aplicar esse tipo de metodologia em grupos de alunos mais numerosos, já que a sua envolveu poucos alunos.

Em conclusão, ele considera esta metodologia de trabalho de sala de aula, baseada na Resolução de Problemas, como essencial para a condução de qualquer Processo de Ensino e Aprendizagem avaliado como sendo de qualidade, pois ela proporcionou, a cada atividade, responder às dúvidas dos alunos e pôde construir os conceitos matemáticos sobre funções trigonométricas.

Em Gama (2020), com a pesquisa referente a uma sequência didática no ensino da função seno, teve como objetivo evidenciar as contribuições ao processo de ensino e aprendizagem da função seno aos estudantes do 2º ano do ensino médio a partir da utilização de uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC).

Sua fundamentação teórica se baseou na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau; Psicologia Histórico-Cultural, de Lev Vygotsky; Análise Microgenética; Análise do Discurso.

Gama (2020) apresenta duas hipóteses, considerando as respostas dos discentes quando estes estão aprendendo algum conteúdo:

> i. O aluno consegue resolver o problema dando respostas corretas ou
> ii. o aluno não consegue alcançar a resposta correta, carecendo de um ensino para resolver o problema proposto.
>
> Assim, as respostas dos alunos, segundo essa teoria, evidenciam sua aprendizagem (GAMA, 2020, p. 17)

Aqui é considerado que essas hipóteses geram aprendizagem escolar a partir de constantes adaptações que o professor cria durante a resolução de problemas. Além disso, o autor enfatiza que o professor deve “sondar os conhecimentos prévios dos discentes, buscando encontrar as limitações dos alunos. [...], o professor deverá propor situações novas, contendo dificuldades adequadas às faixas de aprendizagem dos escolares” (GAMA, 2020, p. 18).

Gama (2020), utilizando a Teoria das Situações didáticas, descreve que as resoluções das atividades podem ser de conduzidas de duas formas, que são: Situação didática e situação a-didática. A primeira, as ações dos discentes são conduzidas por regras criada pelo professor. A segunda os discentes não necessitam de um sistema didático.

Gama (2020) afirma que essa teoria pode ser caracterizada como um “jogo didático” que envolve saber-professor-aluno. Esse “jogo” apresenta três fases que conduzirão na resolução do problema que segundo Brousseau (1996) D’Amore (2007b) e Almouloud (2014), citados por Gama (2020), são:

> a) *Fase de ação*: O professor propõe um problema (ou uma situação) relacionado a um determinado conhecimento e propõe aos discentes. A solução mais adequada é justamente o conhecimento que o professor espera despertar no aluno;
> b) *Fase da formulação*: O aluno tem a oportunidade de discutir com o professor ou com seus pares sobre as decisões tomadas na fase de ação, tentando escrever de tal forma que sua escrita seja aceita por todos e tenta comunicar seu raciocínio mediante um modelo e uma linguagem mais clara possível;
> c) *Fase da validação*: o modelo encontrado pelos alunos é compartilhado aos que ainda estão com dificuldades em encontrá-lo. Aos que foram comunicados o modelo, é facultado pedidos de verificações, demonstrações e explicações e o apresentador terá a oportunidade de justificar seu raciocínio mostrando-lhes a pertinência de seu modelo e, se possível, fornecer um modelo semântico para sua proposta de resposta;
> d) *Fase da institucionalização*: O professor institucionaliza o conhecimento, dando
> validade àqueles conhecimentos construídos corretamente nas fases anteriores, devendo “estabelecer e dar um *status* oficial a conhecimentos surgidos durante a atividade em classe” (GAMA 2020, p. 20).

Diante disso, a sequência didática, seguindo as UARC’s estruturadas por Cabral (2017), direciona o professor na elaboração das atividades e tarefas, além de ajudar o planejamento da seleção destas, fazendo com que seja melhorado o processo de ensino e aprendizagem. Elas apresentam seis etapas que são: *intervenção inicial; intervenção reflexiva; intervenção exploratória; intervenção formalizante; intervenção avaliativa restritiva; intervenção avaliativa aplicada*

Gama (2020) realizou um questionário socioeconômico e dificuldades dos estudantes do 3º ano do ensino médio em aprender funções trigonométricas. Dentre as atividades propostas no questionário foi identificado que os discentes têm dificuldades em reconhecer o segmento de seno no ciclo trigonométrico e em fazer a representação gráfica.

Outro percentual negativo foi em relação à dificuldade de fazer a redução ao 1° quadrante. Também, os discentes apresentaram dificuldades em calcular e encontrar o conjunto imagem de função seno, além de não conseguirem compreender a linguagem simbólica. A questão 5 de seu teste pedia para encontrar a Im(f). Para isso o estudante deveria lembrar como construir o gráfico da função seno e saber que a imagem de uma função é analisada no eixo vertical y.

Figura 1 - Recorte da questão 5

QUESTÃO 5: A imagem da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 2 + 3.senx$ é:

a) $Im(f) = [-1{,}5]$

b) $Im(f) = [1{,}5]$

c) $Im(f) = [0{,}5]$

d) $Im(f) = [-1{,}3]$

Fonte: Gama (2020, p. 184)

Gama (2020) também realizou questionário com 60 professores de matemática referente ao ensino de função seno em sala de aula. Em sua coleta de dados a pesquisa apontou que 10% deles trabalham em três escolas, enquanto que 20 % precisam assumir outras profissões junto a de professor.

Concordamos com Gama (2020) ao dizer que há um desgaste ao professor em administrar todas as horas de trabalho acima de 6 horas diária, pois segundo o autor "[...] inevitavelmente, ele (no caso o professor) deixará em algum momento que essas situações tragam implicações às suas aulas e ao aprendizado do estudante. "(Gama, 2020, p. 62).

Destacamos aqui, também, a metodologia que cada professor utiliza quando ministra o conteúdo de função seno. A pesquisa informou que a maioria dos pesquisados (25 deles) iniciam suas aulas pela definição, seguida de exemplos e exercícios, enquanto que a minoria (2 deles) utilizam as tecnologias digitais para resolver problemas.

A parte histórica e matemática sobre a função seno é bastante resumida, mas destaca-se aqui o estudo da função seno a partir da Função de Euler que relaciona um número real x a um ponto P no ciclo trigonométrico, representado por um arco de medida x.

Em consonância com Gama (2020), ele afirma que nos livros didáticos a maioria deles iniciam o estudo das funções trigonométricas seno e cosseno relacionados aos arcos e ângulos no ciclo trigonométrico em vez de um número real qualquer.

Dessa forma, Gama (2020) elaborou 8 atividades, chamadas de UARC's. início a Função de Euler e finalizando na construção do gráfico da função $f(x) = sen(x)$. A figura mostra o quadro 8 indicando o número, o título e os objetivos dos alunos e do professor em cada UARC.

As atividades experimentais se utilizaram de Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno para que fosse preenchidas tabelas e quadros conforma cada problema proposta. Elas poderiam ser utilizadas com o uso de aplicativos educacionais como o Geogebra, bastava construí-los dentro do app para que fosse manuseado mexendo apenas um objeto ou digitando valores.

Dentre as atividades construídas por Gama (2020), destacamos a UARC 3 onde é explorada a ralação de número real e pontos na circunferência usando a função de Euler. Ver imagem a seguir:

Ilustração 1 - Recorte da UARC 3

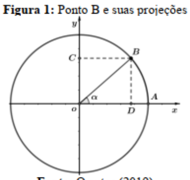
4.3- UARC 3: A função de Euler e a razão trigonométrica seno

MATERIAIS: Lista de tarefas, lápis, borracha e caderno.

PROCEDIMENTOS: Fazer a leitura do texto e resolver as questões propostas.

Você lembra da brincadeira a roda gigante? Pois bem, considere que ela tenha sido representada no ciclo trigonométrico (Figura 1). Nela, foram representados os pontos de embarque/desembarque (ponto A) e o ponto B. Além destes pontos, o tio da criança marcou nos eixos x e y os pontos D e C, respectivamente, formando os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$. Esses segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ são as projeçoes ortogonais do ponto B sobre os eixos x e y, respectivamente:

Figura 1: Ponto B e suas projeções



Fonte: O autor (2019)

A partir das informações apresentadas e da figura acima, onde se tem o triângulo ODB, retângulo em D, responda:

1) Os segmentos $\overline{DB}$ e $\overline{OC}$ têm o mesmo comprimento?
2) Qual a medida do segmento $\overline{OB}$?
3) Utilizando a razão trigonométrica seno, investigue a relação existente entre o seno e o segmento $\overline{OC}$.

INTERVENÇÃO FORMALIZANTE 4

$$sen\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$$

Sabendo que: $\overline{BD} = \overline{OC}$ e que $\overline{OB} = 1$, temos: $sen\alpha = \frac{\overline{OC}}{1}$

Logo: $sen\alpha = \overline{OC}$

O seno de um arco no ciclo trigonométrico é igual ao segmento $\overline{OC}$, correspondente à projeção ortogonal do raio do ciclo trigonométrico (com extremidade no ponto B) sobre o eixo $0y$.

Fonte: Gama (2020, p.89)

Em suas considerações finais, Gama (2020) afirma que às dificuldades de ensino e aprendizagem da função seno pode ser atribuído ao ensino tradicional, onde há uma hegemonia quando se ensina o conteúdo, não que isso possa ser excluído, mas que perca a hegemonia e que seja colocada em prática outros métodos.

Além disso, o cansaço de administrar horas de trabalho e trabalhos paralelos a de professor, consomem o tempo de produzir e se adaptar a novas metodologias junto ao imenso conteúdo que a matemática apresenta.

Já em relação a sua sequência didática, Gama (2020) conseguiu atingir seus objetivos, pois as unidades constituintes foram bem harmonizadas entre si e que:

> estudantes puderam seguir as ideias matemáticas constantes na estória científica sempre remetendo, por exemplo, à mesma estória científica (da roda gigante) da UARC 1 até o fim da aplicação da sequência didática. Além disso, a partir da Análise Microgenética, percebi que as frequentes Intervenções Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO’s) contribuíram significativamente para que os escolares conseguissem internalizar o conhecimento matemático ensinado (GAMA, 2020, p. 178)

3.2.3. Estudos diagnósticos.

Já na pesquisa elaborada por Sousa (2018), com o título “Software GeoGebra no Ensino da Trigonometria: proposta metodológica da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT”, tem como objetivo investigar as contribuições produzidas nos últimos 5 anos por egressos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que estejam relacionadas com o software GeoGebra com o ensino de Trigonometria, buscando compreender qual o impacto que o uso dessa ferramenta poderá melhorará o aprendizado do aluno.

Este trabalho foi realizado inteiramente a pesquisas bibliográficas em bancos de dados do PROFMAT separando e analisando quais temas são mais abordados em estudos da trigonometria, que apresentam descrição, delineamento, recursos, amostras e contextos desenvolvidos com aplicações sobre o assunto utilizando a ferramenta GeoGebra como proposta metodológica para o ensino da trigonometria.

Sousa (2018) afirma que o Ensino de Matemática é marcado pelas grandes dificuldades dos alunos em compreender muitos conteúdos, conceitos, fórmulas e algoritmos, comportamentos das funções, em especial a Trigonometria, que é uma das áreas da Matemática que se mais utiliza conceitos abstratos.

Ele afirma que para superar essas dificuldades, no universo da sala de aula e fora dela, muitos recursos são amplamente utilizados tanto por professores para o ensino, quanto por alunos para a aprendizagem, e a tecnologia mostrou-se indispensável para desenvolver novos processos e métodos para um efetivo trabalho pedagógico, contudo no ensino da Trigonometria.

Mas para que as dificuldades sobre o tema sejam superadas é imprescindível que os professores estejam dispostos a buscar novas formas de ensinar e aprender, desenvolvendo práticas docentes com o uso das tecnologias, tornando o processo de ensino aprendizagem mais rico e eficiente.

Segundo Sousa (2018) não basta apenas escolher uma ferramenta digital e em seguida utilizá-las nas aulas de Matemática. A escolha do software no ensino da Matemática deve levar em consideração itens como; quais serão os objetivos almejados com o uso da tecnologia, as possibilidades de recursos multimídia (vídeo, som, imagens, textos e filmes), os conteúdos previstos, a clareza quanto a instalação, utilização e os custos para sua aquisição.

Assim, de acordo com esses itens uma das ferramentas educacionais de fácil manuseio é o software GeoGebra que permite estudar a Geometria e Álgebra de maneira concomitante, gratuito e de fácil instalação e manipulação tornando o estudo da Trigonometria mais interessante, contribuindo para o processo de ensino aprendizagem dos nossos alunos.

A fundamentação teórica teve como base os autores de Artigos de periódicos e Dissertações de Mestrados do PROFMAT. Muitos desse autores afirmam que a isenção de tecnologia educacionais contribuem para melhorar o aprendizado dos alunos, desde que os professores se aperfeiçoem no processo de manusear os objetos tecnológicos com intuito de melhorar o entendimento das disciplinas, em especifica da Matemática.

Sousa (2018) cita os trabalhos de Borba e Penteado (2016) onde afirmam que muitos professores não são a favor da utilização das tecnologias no ensino de matemática, pois argumentam que elas podem causar perigo na aprendizagem dos alunos e que estudantes só iriam se concentrar em apertar teclas e apenas e obedecer às ordens das máquinas, contribuindo para que eles sejam apenas repetidores de tarefas, não precisando mais raciocinar e deixará de desenvolver sua inteligência.

Maltempi (2008) citado por Sousa (2018), afirma que a inserção das tecnologias em sala de aula exige dos professores novas práticas de ensino, pois ela não é parada e transforma a relação do ensino-aprendizagem pelo seu dinamismo.

Outros autores como D’Ambrosio (1997), Silva e Maldener (2011) e Mol (2013) ressaltam a importância da história da Matemática como elemento motivador no ensino da disciplina, pois com isso pode-se explorar a origem e o desenvolvimento de tópicos da matemática como por exemplo, a trigonometria.

Dos resultados obtidos ao analisar as 134 Dissertações, apenas 20 apresentaram como recurso educacional o GeoGebra. Sousa (2018) elaborou uma proposta metodológica que pudesse ser utilizada livremente, um site com aplicações do GeoGebra hospedado no seguinte domínio http://trigonometria.nasnuvens.net.br o qual apresenta 6 aplicações.

Sousa (2018) conclui que o GeoGebra de forma geral, mostrou-se importante ferramenta para auxiliar na interpretação de exercícios não só da trigonometria, mas em outros tópicos da Matemática, melhorando o desempenho do ensino-aprendizagem satisfatoriamente.

A seguir veremos as análises de livros didáticos referente ao conteúdo das funções trigonométricas, verificando como os tópicos estão organizados, métodos e ferramentas utilizados para contribuir no ensino e aprendizagem dos alunos, de modo a ser um material de apoio ao professor em suas atividades.

3.3. Análises de livros didáticos da 2ª série do Ensino Médio

Para as análises dos livros didáticos utilizaremos os pressupostos da teoria cognitiva da Taxonomia de Bloom para o ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno. A Taxonomia de Bloom é um instrumento educacional que tem como objetivo ajudar no planejamento, organização e controle dos objetivos de aprendizagem. Dentre as vantagens que essa teoria apresenta no contexto educacional, Ferraz e Belhot (2010, p. 422) destacam:

> - Oferecer a base para o desenvolvimento de instrumentos de avaliação e utilização de estratégias diferenciadas para facilitar, avaliar e estimular o desempenho dos alunos em diferentes níveis de aquisição de conhecimento; e
> - Estimular os educadores a auxiliarem seus discentes, de forma estruturada e consciente, a adquirirem competências específicas a partir da percepção da necessidade de dominar habilidades mais simples (fatos) para, posteriormente, dominar as mais complexas (conceitos)

A Taxonomia tem seu significado do grego *taxis*, que é ordenação, e *nomos*, que é sistema, norma, ou seja, é todo sistema de classificação ordenada.

Na categoria cognitiva, a taxonomia apresenta 6 dimensões, que estão representadas no quadro a seguir:

Quadro 7 - Estrutura do processo cognitivo na Taxonomia de Bloom

1. Lembrar: Relacionado a reconhecer e reproduzir ideias e conteúdo. Reconhecer requer distinguir e selecionar uma determinada informação e reproduzir ou recordar está mais relacionado à busca por uma informação relevante memorizada. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Reconhecendo e Reproduzindo.
2. Entender: Relacionado a estabelecer uma conexão entre o novo e o conhecimento previamente adquirido. A informação é entendida quando o aprendiz consegue reproduzi-la com suas "próprias palavras". Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Interpretando, Exemplificando, Classificando, Resumindo, Inferindo, Comparando e Explicando.
3. Aplicar: Relacionado a executar ou usar um procedimento numa situação específica e pode também abordar a aplicação de um conhecimento numa situação nova. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Executando e Implementando.
4. Analisar: Relacionado a dividir a informação em partes relevantes e irrelevantes, importantes e menos importantes e entender a inter-relação existente entre as partes. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Diferenciando, Organizando, Atribuindo e Concluindo.
5. Avaliar: Relacionado a realizar julgamentos baseados em critérios e padrões qualitativos e quantitativos ou de eficiência e eficácia. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Checando e Criticando.
6. Criar: Significa colocar elementos junto com o objetivo de criar uma nova visão, uma nova solução, estrutura ou modelo utilizando conhecimentos e habilidades previamente adquiridos. Envolve o desenvolvimento de ideias novas e originais, produtos e métodos por meio da percepção da interdisciplinaridade e da interdependência de conceitos. Representado pelos seguintes verbos no gerúndio: Generalizando, Planejando e Produzindo.

Fonte: Ferraz e Belhot (2010, p.429)

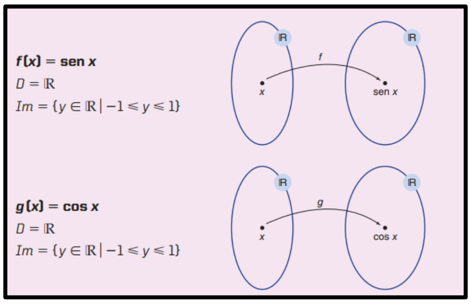
A presente análise visa investigar a abordagem do conteúdo de funções trigonométricas em livros didáticos, com foco na adequação das metodologias, na eficácia da resolução de exercícios e na relevância das questões propostas para a compreensão do tema pelos alunos. Para tanto, selecionamos cinco obras do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que tratam de trigonometria e funções trigonométricas: Paiva (2010), Balestri (2016), Longen (2016), Leonardo (2020) e Bonjorno, Júnior e Sousa (2020).

No livro de Paiva (2010) com o nome "Matemática 2", encontra-se no capítulo 5 as "Funções trigonométricas". Nesse capítulo os conteúdos estão organizados da seguinte forma: As funções seno e cosseno; Movimentos periódicos; Outras funções trigonométricas; Funções trigonométricas inversas.

Na introdução, Paiva (2010) inicia o conteúdo citando algumas situações do mundo real como, o movimento dos planetas, estação do ano, fases da lua, velocidade das batidas das músicas para estudar os fenômenos periódicos que podem ser modelados por funções trigonométricas.

Em seguida, quando defini as funções seno e cosseno, Paiva (2010) relaciona tópicos anteriores sobre circunferência trigonométrica relembrando que a medida em radianos é um número real e com isso, expressa as funções do tipo $f(x) = sen(x)$ $g(x) = cos\ (x)$ usando a ideia de conjunto:

Figura 2 - Definição da função de seno e cosseno usando conjunto

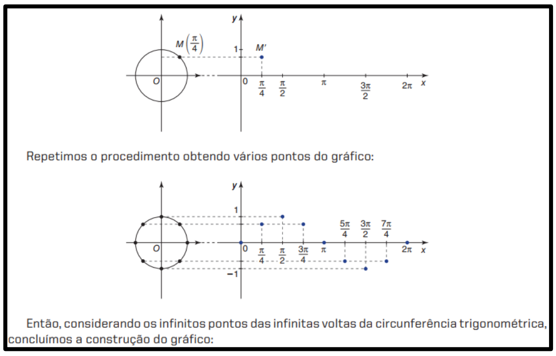


Fonte: Paiva (2010, p. 158)

Encontramos os verbos “Identificar” e “Analisar” cujo o objetivo é conhecer os gráficos das funções seno e cosseno e depois organizar o processo metodológico da construção desses no plano cartesiano.

Paiva (2010) utilizou o método geométrico para a construção dos gráficos. Para isso, construiu a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano de eixos ortogonais.

Figura 3- Construção do gráfico da função seno



Fonte: Paiva (2010, p. 159)

Porém, quando chega aos exercícios resolvidos, que foram treze, o autor utiliza uma tabela onde é colocado valores para x e y das funções do tipo $f(x) = a + b.cos\ (mx + d) e\ g(x) = a + b.sen(mx + d)$, isto é, outro método.

Verificou-se que há apenas uma questão resolvida envolvendo contextualização do mundo real, que se referia ao movimento da “grande roda de Pequim” descrita por uma função seno.

Na seção sobre Movimentos Periódicos, os verbos “analisar”, “obter” e “resolver” são utilizados para auxiliar na compreensão do comportamento de fenômenos periódicos relacionados às funções trigonométricas. Essa seção apresenta quatro exercícios que exploram situações-problema envolvendo pêndulos, o movimento do pistão de um carro, a amplitude das marés e a pressão da água do mar em uma caldeira. Adicionalmente, são propostas cinco questões contextualizadas.

Nas seções dedicadas às demais funções trigonométricas e suas inversas, Paiva (2010) replica a metodologia utilizada para construir as funções seno e cosseno, empregando os verbos "identificar", "analisar", "usar" e "resolver"**.** No entanto, as funções tangente, secante, cossecante e cotangente são abordadas com poucas resoluções de exercícios e sem a apresentação de problemas contextualizados resolvidos. Ao tratar das funções inversas, Paiva (2010) utiliza a calculadora científica como recurso didático para a obtenção de valores das funções inversas de seno, cosseno e tangente.

Embora este capítulo apresente poucas resoluções de situações-problema e priorize questões voltadas ao cálculo e à determinação de valores, nas páginas finais são disponibilizadas atividades complementares, totalizando sessenta e cinco questões. Dentre elas, dezesseis são provenientes de vestibulares e envolvem problemas contextualizados, relacionados a situações do mundo real.

Em Balestri (2016), encontra-se organizados a trigonometria nos capítulos 1 e 2. No primeiro é abordado a trigonometria na circunferência relacionando as relações seno, cosseno e tangente. No segundo é trabalhada as funções trigonométricas, as relações, equações e transformações trigonométricas.

No capítulo 1, os objetivos são de “Reconhecer” os elementos de uma circunferência; “Determinar” a medida linear e a medida angular de um arco; “Identificar” os quadrantes de uma circunferência trigonométrica; “Reconhecer” os ângulos notáveis e as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência.

A introdução explora o contexto da prova de 200 metros rasos no atletismo, esclarecendo uma dúvida comum: por que os atletas, mesmo correndo a mesma distância, parecem ter posições vantajosas nas curvas? A explicação reside no fato de que os corredores das raias internas percorrem um raio menor, compensando o efeito da curva.

Em seguida, o texto apresenta um panorama histórico da trigonometria, desde suas origens na antiguidade com Hipócrates, Eratóstenes e Hiparco de Niceia. Para facilitar a compreensão, revisa conceitos fundamentais da geometria, já estudados no 9º ano do ensino fundamental, como circunferência, diâmetro, corda, raio e arco. A prova de atletismo serve como exemplo prático para ilustrar a medição de ângulos e arcos na pista curva, conduzindo à dedução das fórmulas do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$) e da relação entre as medidas linear e angular de um arco.

Nas atividades resolvidas, que foram cinco, três delas tinham situação no mundo real como a corrida de atletismo, ponteiro de um relógio e a trajetória de um automóvel quando faz uma curva. A estratégia utilizada na resolução consistia em colocar na tabela a medida em graus e medida em radianos e em seguida, fazer regra de três para criar uma equação e ser resolvida.

O conjunto de questões propostas era composto por dez itens. Seis deles apresentavam situações contextualizadas, abrangendo áreas como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e exames vestibulares. Os verbos utilizados nas instruções das questões incluíam “determine”, “expresse”, “construa”, “analise” e “desenhe”. A aplicação da circunferência trigonométrica foi ilustrada com exemplos de patinação artística, envolvendo piruetas, e de bodyboarding, com manobras que descrevem um giro completo em torno de um ponto fixo.

A partir dessa contextualização, o livro defini ciclo trigonométrico com o uso do círculo no eixo xOy e mostra como cada ponto está associado a um arco. Com desenhos de circunferências, mostra-se os arcos côngruos e como se obtém e para isso, é deduzido a relação $\alpha + k.360°$ ou $\alpha + k.2\pi$.

Já nas resoluções de exercícios encontramos duas apenas, sem contextualização. Nas questões propostas há sete, sendo que três delas há contextualização envolvendo, ponteiro de relógio e um brinquedo eletrônico com disco que se movimenta.

Nas relações seno e cosseno na circunferência, utiliza-se semelhança de triângulos para demonstração das relações de simetria, redução ao 1º quadrante e a relação fundamental da trigonometria.

Destacamos aqui a utilização da roda-gigante de Cingapura, para construção de um gráfico característico das funções trigonométricas do tipo $h = 90 + 75.sen\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$, em que x é o número de cabine, pois fazer a ponte das relações seno e cosseno para funções trigonométricas é complexo para o aluno. O livro recomenda utilizar calculadora para construção.

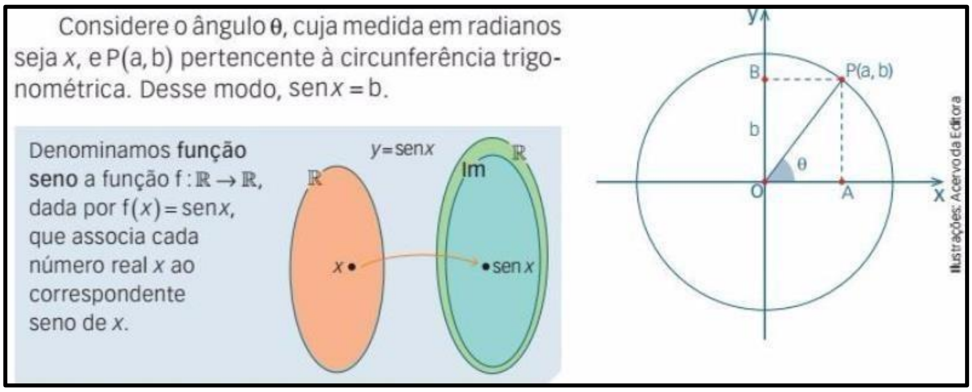
Antes de iniciar o capítulo 2, o livro apresenta um tutorial para construção das relações seno e cosseno na circunferência com o uso do GeoGebra para ser utilizada com os alunos.

Chegando às funções trigonométricas, capitulo 2, os objetivos são "Compreender" o conceito de função seno e função cosseno; "Identificar" o período e a imagem; "Reconhecer" os gráficos dessas funções; "Relacionar" as razões trigonométricas e "Resolver" equações trigonométricas.

O livro aborda situações de como visualizar o som da vibração das cordas de uma guitarra utilizando um osciloscópio (aparelho de visualização de ondas), contextualizando o que são ondas sonoras e como elas se comportam, e que são descritas por funções do tipo trigonométrica $M(t) = m + a.sen(\omega.t)$ onde a é a variação máxima em relação a m, $\omega = 2\pi f$ em que f é a frequência da onda e t o tempo, em segundos.

Usa-se a noção de conjunto para definir função seno e função cosseno e, a roda gigante para construir a circunferência e os gráficos de cada uma delas, relacionando cada número real a um arco em radianos.

Figura 4 - Definição da Função seno



Fonte: Balestre (2016, p. 38)

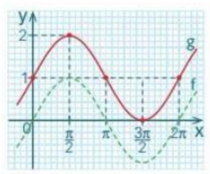
Mostra-se a periodicidades das funções seno e cosseno de 2π em 2π como sendo $senx = sen(x + k.2\pi)$ e $cosx = cos\ (x + k.2\pi)$, sendo x$R,\ \ k \in Z.$ A imagem, o domínio, intervalos crescentes e decrescentes.

O livro emprega o GeoGebra para a construção gradual dos gráficos das funções seno e cosseno. Este recurso tecnológico, de fácil implementação em sala de aula, requer apenas a inserção de comandos por parte dos alunos.

Outo método de construção dos gráficos do tipo $f(x) = a + b * Trig(c * x + d)$ é a utilização de tabelas com de coluna x com valores 0, $\frac{\pi}{2}, \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ que são substituídas em f(x) para ser encontradas valores de y. Há três exemplos dessa construção.

Figura 5 - Construção de gráficos do tipo f(x)=a+sen(x)

x	$y = g(x) = 1 + \text{sen}\,x$	(x, y)
0	$y = 1 + \text{sen}0 = 1 + 0 = 1$	$(0,1)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 1 + \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
π	$y = 1 + \text{sen}\pi = 1 + 0 = 1$	$(\pi, 1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 1 + \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 1 + (-1) = 0$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
2π	$y = 1 + \text{sen}2\pi = 1 + 0 = 1$	$(2\pi, 1)$



O gráfico de $g(x) = 1 + \text{sen}\,x$ é congruente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, porém transladado $|1| = 1$ unidade para cima, pois $a = 1 > 0$. Assim, $\text{Im}(g) = [0, 2]$, e o período é 2π.

Fonte: Balestre (2016, p. 43)

Este livro, publicado em 2016, apresenta estratégias para a conceituação das relações seno e cosseno, bem como de suas respectivas funções. A utilização de métodos de resolução de problemas baseados em situações do mundo real e ferramentas digitais, como calculadoras e o software GeoGebra, torna o conteúdo mais atraente e organizado.

Nas atividades resolvidas, observam-se quatro questões descontextualizadas, focadas exclusivamente na construção de gráficos. Já nas atividades propostas, de um total de quatorze, sete exploram situações do cotidiano, como o pôr do sol em um determinado período, a tensão em um circuito elétrico, a órbita de um satélite e a deformação de uma mola.

No livro de Longen (2016), as funções seno e cosseno encontra-se no capítulo 4, dentro da Unidade 2: Trigonometria. Nesse capítulo o autor começa falando sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo de uma maneira bem direta, expressando matematicamente as relações de seno, cosseno e tangente.

Implicitamente encontramos o verbo “Relembrar”, pois o objetivo é fazer com que o aluno consiga lembrar as relações de seno, cosseno e tangente e para isso, o autor utilizou o triângulo retângulo e dali expôs as relações matematicamente.

Outro verbo encontrado foi “Entender” o qual o procedimento que se utilizou foi a circunferência em um sistema de coordenadas cartesianas cujo o objetivo era que o aluno pudesse estabelecer uma conexão entre as relações de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo com a ideia de funções.

Contudo, apesar da apresentação de arcos e ângulos, da circunferência trigonométrica e dos conceitos de seno e cosseno de um arco, consideramos que os procedimentos utilizados podem não ser suficientes para uma compreensão completa das funções seno, cosseno e tangente. Adicionalmente, observamos uma carência de exemplos e exercícios resolvidos, com a maioria dos poucos existentes focados em cálculos e transformações.

Além disso, constatou-se duas páginas contendo a História da Matemática, referindo-se ao movimento do planeta em torno do sol, mostrando os estudos que os povos babilônios construíram ao logo dos milênios através da astronomia.

Ao chegar nas funções seno e cosseno, Longen (2016) começa explicando sobre movimento harmônico simples com um exemplo de uma mola, mostrando que esse movimento tem uma relação matemática envolvendo a função do tipo $x(t) = A.cos\,(\omega.t + \varphi)$ e logo depois, Longen (2016) defini a função seno nos conjuntos dos reais $f: R \longrightarrow R\ defida\ por\ f(x) = sen(x)$.

Para construir os gráficos ele propõe a utilização de uma calculadora para verificar valores das coordenadas dos senos e assim localizar esses pontos no plano cartesiano. O mesmo raciocínio segue ao aplicar para a função cosseno $f(x) = cos\,(x)$.

Em relação aos exemplos resolvidos o livro aborda apenas quatro exemplos, sendo uma de função seno e outra de função cosseno do tipo $f(x) = a + sen(x)\ \ e\ \ g(x) = b.cos\,(x)$ e as duas últimas, envolvia aplicações do mundo real que tratava do movimento harmônico de uma partícula e a outra, referia-se ao movimento ordenado dos elétrons de uma corrente elétrica, ambas expressadas por uma função cosseno.

Para o esboço dos gráficos das funções f(x) e g(x), foi utilizado como método tabelas onde foram colocados valores em radianos para x e suas correspondentes no eixo dos y. Já questões para reflexões encontrou-se onze, sendo que nenhuma envolveu situação-problema. O autor ainda propõe a utilização da ferramenta *Winplot* para construção e análise dos gráficos.

Nas últimas páginas Longen (2016) acrescenta treze questões do Enem e vestibulares sendo que nove delas foram referentes a situações-problemas.

A respeito do conteúdo e dos exercícios resolvidos, consideramos que foram concisos e objetivos, apresentando os conceitos das funções trigonométricas de forma resumida, sem muitas demonstrações ou deduções detalhadas. Observamos que o autor focou na interpretação das transformações nos gráficos das funções seno e cosseno do tipo $f(x) = a + b \cdot cos(mx + n)$ $e\, g(x) = a + b \cdot sen(mx + n)$ quando os valores dos parâmetros reais a, b, m e n eram alterados. Acreditamos que a análise e a compreensão do comportamento dessas funções são responsabilidades do aluno, de modo que ele possa construir seu próprio entendimento. Quanto às questões propostas, apesar de em número reduzido, empregaram verbos como “Determine”, “Construa”, “Compare”, “Justifique”, “Analise” e “Elabore”, o que evidencia a abrangência das seis dimensões da taxonomia.

Em Leonardo (2020), no livro Conexões, é apresentado o capítulo 2: Trigonometria no triângulo retângulo. Os objetivos são “identificar” e “calcular” razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de resolver problemas que envolvam essas razões e usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.

No capítulo 3: Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer, tem-se como objetivo calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano, além de conhecer o ciclo trigonométrico, ampliando as razões trigonométricas para o ciclo trigonométrico, e aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.

No capítulo 4: Funções trigonométricas, tem-se o objetivo de relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos, além de estender o domínio das funções trigonométricas ao conjunto dos números reais (R), resolver equações trigonométricas, construir e analisar gráficos de funções trigonométricas. Neste capítulo, o livro apresenta um estudo de fenômenos periódicos, viabilizando a modelagem de fenômenos naturais, físicos e sociais com comportamento cíclico ou periódico, possibilitando a representação, de modo aproximado, de oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo, permitindo, inclusive, que sejam feitas previsões em muitas situações

Na introdução, verifica-se uma situação contextualizada envolvendo a alta e baixa das marés, fenômeno periódico natural que é modelado pela função cosseno. A descrição desse fenômeno é feita da seguinte forma:

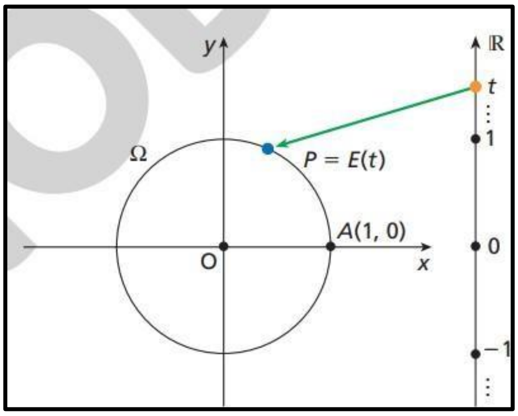
“Em uma cidade litorânea do Nordeste brasileiro, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre por volta das 6 h e das 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:”

$h(t) - 1{,}5 - 1{,}05.\cos\left(t.\frac{\pi}{6}\right)$ *, em que o tempo t é medido em hora a partir da meia-noite.*

Em sequência é plotado o gráfico dessa função onde é mostrada o comportamento periódico da maré. O livro vai descrevendo as observações importantes sobre a maré através do gráfico e depois confirma resolvendo os cálculos da função h(t).

Depois dessa contextualização, é apresentado na sequência a definição de uma função periódica. Resolve um exercício sobre essa função e em seguida propõe dois exercícios para os alunos tentarem resolver observando os gráficos. Posteriormente, é relembrado o ciclo trigonométrico ampliando o estudo para várias voltas, associando números reais aos pontos do ciclo e para isso, é apresentando a função de Euler.

Figura 6 - Função de Euler

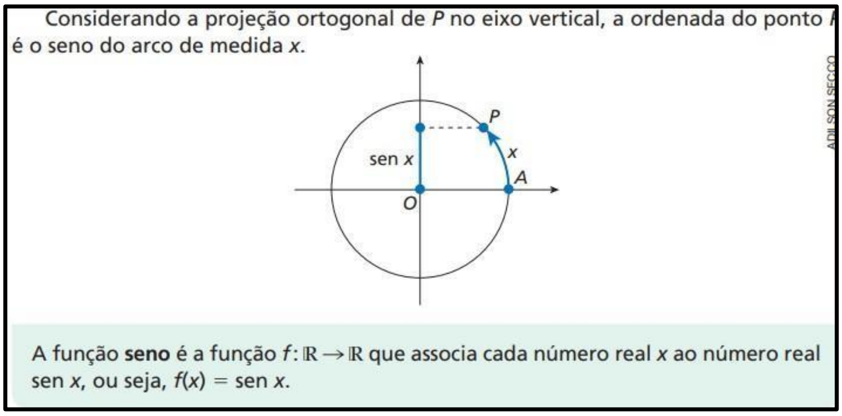


Fonte: Leonardo (2020, p. 80)

E vai sendo descrito ao longo do livro as condições quando o número t é igual a zero, menor que zero e maior que zero. Além disso, tem-se a relação de radianos como números reais e uma breve definição sobre domínio e imagem de uma função.

Chegando na função seno e função cosseno observamos que o livro aborda primeiro a análise dessas funções no ciclo trigonométrico de como cada uma se comporta, colocando em sequência suas definições.

Figura 7 - Definição da função seno em Leonardo


Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto
é o seno do arco de medida x.

A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x)$ = sen x.

Fonte: Leonardo (2020, p. 83)

Para ficar mais didático, é feito um pequeno tutorial de como construir a função seno e a função cosseno a partir do ciclo trigonométrico usando o software de Geometria dinâmica, para que seja estudada seus respectivos gráficos.

É importante acrescentar observações a respeito do software a ser utilizado para realizar as atividades. Dependendo do aplicativo ou software escolhido, o passo a passo da construção pode mudar de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é fundamental familiarizar-se com o programa antes de utilizá-lo em sala de aula.

Outro método que observamos para a construção dos gráficos das funções seno e cosseno é através de dados de uma tabela de valores para x, onde inicialmente são considerados valores da primeira volta, para os quais o seno e o cosseno são conhecidos. As características de cada função são descritas em seguida, como o período, o conjunto imagem, a amplitude, a paridade (se é função par ou ímpar).

Sobre os exercícios resolvidos, havia três. Um deles era uma situação-problema que envolvia a população de zebras, dada por uma função seno.

Os outros dois exercícios solicitavam cálculos e determinações específicas. Dos doze exercícios propostos aos alunos, a maioria apresentava situações contextualizadas envolvendo fenômenos naturais. Inicialmente, ao analisar o livro, notei a ausência da construção de gráficos do tipo $f(x) = a + b\ Trig(cx + d)$ e da análise das alterações em seus parâmetros.

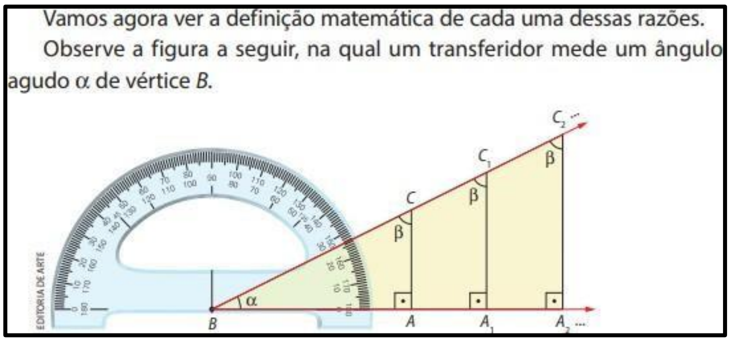
No entanto, ao final do capítulo, encontrei a construção desses gráficos utilizando tabelas e software, juntamente com um passo a passo detalhado para o professor conduzir a atividade em sala de aula. Ademais, os exercícios resolvidos utilizavam software como ferramenta de apoio.

Para finalizar, o livro apresenta vinte e duas questões contextualizadas para aplicação em sala de aula. Além de desafios, há um texto sobre o som, que descreve os problemas de saúde que podem ser causados pela exposição a potências sonoras acima de determinado nível de decibéis, e como esse fenômeno pode ser modelado pela função seno.

No livro dos autores Bojorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020), o estudo das funções trigonométricas inicia-se no capítulo 3 e finaliza no capítulo 4. No capítulo 3, intitulado “Razões trigonométricas na circunferência”, é apresentada, na primeira página, a História da Matemática, onde observamos um texto sobre as grandes navegações. Esse texto menciona ferramentas utilizadas para navegar, como o teodolito e as bússolas, que permitem estudar os ângulos.

Outra abordagem histórica refere-se à tábua Plimpton 322, que contém problemas sobre medidas de triângulos retângulos. Quando se chega ao estudo das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, o livro apresenta a construção de rampas usando um transferidor para definir essas relações.

Figura 8 - Construção de rampas



Fonte: Bojorno, Giovanni Jr., Sousa (2020, p. 56)

Para alinhar essas razões é apresentado um estudo das medidas dos arcos em grau e radiano de uma circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio unitário.

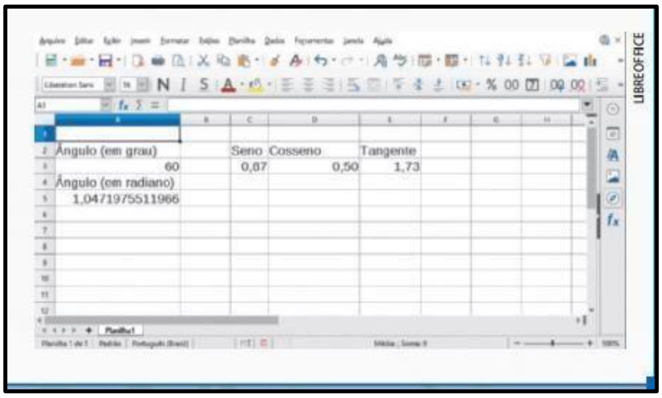
As atividades resolvidas que foram seis, apresentam resoluções para determinar e calcular as medidas dos arcos em graus ou em radianos, além de encontrar a quantidade de voltas de um objeto numa circunferência.

O livro apresenta valores dos arcos de seno e cosseno e para isso, propõe-se utilizar software Geogebra ou uma calculadora científica para obter esses valores tanto em graus quanto em radianos. Mais à frente é demonstrado geometricamente como se obtém a relação entre seno e cosseno no ciclo trigonométrico, a relação fundamental $sen^2(x) + cos^2\,(x) = 1$.

As questões propostas têm como verbos “determine”, “simplifique”, “relacione”, que foram 20, sendo que a última mostra um problema do século XIX gravados em madeiras, chamados de Sangaku, referente à circunferência.

Posteriormente há um tutorial de como construir uma calculadora trigonométrica no Libre Office, para obter os valores de seno, cosseno e tangente em graus e radianos.

Figura 9 - Calculadora trigonométrica no Libre Office



Fonte: Fonte: Bojorno, Giovanni Jr., Sousa (2020, p. 118)

No cap. 4 chamada “Funções trigonométricas”, encontra-se no início uma abordagem histórica sobre a cultura indígena de como eles observavam o movimento da lua como sendo o calendário para suas estações anuais periodicamente. Além disso, o livro traz o relógio de pêndulo para abordar o movimento oscilatório explicando que na natureza há fenômenos com essas características.

Ao definir a função seno e cosseno, o livro apresenta a relação de um número real x a cada valor dos arcos de $sen(x)$ ou $cos\ (x)$, seu domínio e contradomínio e também seu gráfico. O livro traz indicações de vídeos e áudios, através de links, de fenômenos envolvendo às funções periódicas.

As atividades resolvidas que foram 5, além mostra construções de gráficos do tipo $f(x) = a + b * tigo(c * x + d)$ para encontrar o domínio e imagens, há situações-problemas envolvendo contextos como: População de espécies, sistema massa-mola e ondas sonoras de um gravador.

As questões propostas que no total foram 21, trazem problemas para construir gráficos, comparar valores, analisar dados em tabelas, encontrar valores máximos e mínimos envolvendo número de clientes em um supermercado, a expressão que modela o volume de ar no pulmão de um ser humano.

3.3.1. Considerações das análises dos livros didáticos

Até este ponto, realizamos uma análise detalhada dos livros didáticos, capítulo por capítulo, e o que observamos foi que há uma variação significativa na abordagem das funções trigonométricas entre as obras analisadas. Enquanto livros mais antigos apresentam poucos recursos práticos, outras obras mais recentes vêm incorporando recursos tecnológicos, como softwares e aplicativos, para explorar as funções seno e cosseno. Essas ferramentas facilitam a visualização e compreensão dos conceitos. Assim, percebe-se a importância de atualizar os materiais conforme as inovações no ensino da matemática.

A seguir, apresentaremos as nossas considerações acerca dos livros analisados, com base nos critérios de abordagem didática e uso de recursos pedagógicos. Avaliaremos como cada obra trata o ensino das funções trigonométricas, especialmente as funções seno e cosseno. Também destacaremos pontos positivos e limitações observadas em cada material. Nosso objetivo é contribuir para uma escolha mais criteriosa de livros que favoreçam a aprendizagem significativa

Quadro 8 - Considerações sobre o conteúdo das funções trigonométricas nos livros

AUTOR (ES)	COLEÇÃO	ANO/EDIÇÃO	EDITORA	ALGUNS RESULTADOS
Manoel Rodrigues Paiva	Matemática 2	2010; 2ª ed.	Moderna	A abordagem para o ensino de funções seno e cosseno utiliza diagramas para ilustrar o conceito de funções trigonométricas. As atividades propostas, baseadas em contextos reais, possibilitaram a análise dos parâmetros da expressão do tipo $f(x) = a + b.Trigo(m.x + n)$. As questões apresentadas focavam em tarefas de determinação e construção. No entanto, o material carece de sugestões metodológicas para o professor aplicar em sala de aula, limitando-se a recomendar o uso de calculadora científica para a resolução de problemas relacionados a funções inversas.
Rodrigo Dias Balestri	Matemática: Interação e tecnologia	2016; 2ª ed.	Leya	Este livro de 2016 oferece aos professores estratégias inovadoras para ensinar seno, cosseno e suas funções. Ao conectar os conceitos a situações do mundo real e integrar ferramentas digitais, como calculadoras e GeoGebra, o material torna o aprendizado mais interessante e organizado para os alunos. O livro também inclui sugestões de diálogos para auxiliar o professor na condução das aulas.

Adilson Longen	Matemática: padrões e relações	2016; 1ª ed.	Editora do Brasil	Os conteúdos e exercícios resolvidos, embora resumidos e diretos, podem prejudicar a compreensão aprofundada das funções trigonométricas devido à falta de demonstrações e deduções detalhadas. A ausência de situações contextualizadas nas questões propostas dificulta a aplicação prática do conhecimento pelos estudantes. A não utilização de ferramentas digitais para explorar as funções compostas seno e cosseno também impede uma aprendizagem mais interativa e significativa.
Fábio Martins de Leonardo	Conexões: matemática e suas tecnologias	2020; 1ª ed.	Moderna	Os conteúdos e exercícios resolvidos, embora resumidos e diretos, podem prejudicar a compreensão aprofundada das funções trigonométricas devido à falta de demonstrações e deduções detalhadas. A ausência de situações contextualizadas nas questões propostas dificulta a aplicação prática do conhecimento pelos estudantes. A não utilização de ferramentas digitais para explorar as funções compostas seno e cosseno também impede uma aprendizagem mais interativa e significativa.
José Roberto Bojorno; José Rui Giovanni Júnior; Paulo Roberto Câmara de Sousa	Prisma Matemática: Geometria e Trigonometria	2020; 1ª ed.	FTD	Este livro explora o ciclo trigonométrico, utilizando demonstrações geométricas e ferramentas tecnológicas para facilitar a compreensão dos conceitos. Pretende-se oferecer suporte ao professor no planejamento e organização de atividades em sala de aula, auxiliando na elaboração de exercícios. O Capítulo 4, complementando o Capítulo 3 sobre funções trigonométricas, apresenta exemplos de aplicações dessas funções periódicas em contextos culturais e situações do mundo real. Propõe-se, ainda, a formulação de problemas que estimulem a análise e resolução por parte dos estudantes.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

3.4. Contexto histórico das funções trigonométricas

O mundo que conhecemos hoje é um mundo digital, acessível, onipresente e dominado por um simples toque. Por trás de cada clique, cada transação e cada conexão, uma complexa rede de números e equações se entrelaça, transformando-se em informação ao alcance de nossos dedos.

Estamos tão habituados à tecnologia que muitos sequer conseguem imaginar um tempo em que ela não existia. Apesar da enorme distância entre um ábaco e um computador, existem padrões que os conectam. É a história, essa ferramenta que nos situa no tempo e no espaço, que nos permite entender como a busca por soluções práticas impulsionou o desenvolvimento da matemática.

Neste tópico é abordado o desenvolvimento histórico da Trigonometria[3] até chegar às funções trigonométricas, que atualmente é um ramo da Matemática, que surgiu com a observação do céu, que sempre fascinou o homem. Para a elaboração desta etapa, usou-se como referência Boyer (1974), Eves (2011) e Roque (2012).

3.4.1. A trigonometria dos babilônios e egípcios (sec. XIX a. E. C.– sec. VI d. E. C.)

A sua origem está diretamente relacionada à astronomia, agrimensura e navegações uma vez que as necessidades humanas proporcionaram descobertas científicas de grande relevância para a humanidade contribuindo significativamente para a busca de meios de produção agrícola. Para produzir alimento, tornou-se necessário o conhecimento dos astros, das estações do ano, do movimento da Terra, e foi exatamente nesse momento que a matemática demonstrou suas contribuições.

A matemática é uma ciência que busca modelar a realidade em fórmulas, estruturas e padrões, graças a essa ciência conseguimos transcrever a realidade numericamente e geometricamente.

Historicamente os antigos egípcios e babilônios foram os primeiros povos a utilizarem razões de triângulos semelhantes, mas foi na Grécia de Hiparco (por volta

[3] A palavra Trigonometria vem do grego TRI - três, GONO - ângulo e METRIEN - medida, significando medida de triângulos. Trata-se, assim, do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

de 180-125 a. E. C[4].) e Ptolomeu (por volta de 100-170 d. E. C.), onde vemos nascer, com teoremas e demonstrações, as primeiras tabelas de cordas que hoje conhecemos como seno.

Na Índia encontramos vários matemáticos e astrônomos que, movidos pelo conhecimento dos céus, criam uma linguagem trigonométrica própria e um conjunto de técnicas engenhosas e sofisticadas que lhes permitem a obtenção de tabelas de semicordas, mais rigorosas que as gregas.

Nos textos cuneiformes das tábulas babilônicas do período de 2000 a. E. C. a 1600 a. E. C. foram encontrados valores para pí $\pi = 3$, onde eles consideravam a circunferência como o triplo de seu diâmetro. Foram encontrados recentemente que os babilônios estimavam valor para π como sendo 31/8. Indiscutivelmente devemos aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais.

Segundo Eves (2011, p.63) “os babilônios eram infatigáveis construtores de tábulas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria. É impressionante a profundidade e a diversidade dos problemas considerados por ele”.

Dentre as tábuas cuneiformes encontradas, destaca-se a de Plimpton 322, nome dado a coleção G. A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a. E. C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945. A tábua apresenta quatro colunas e 15 fileiras de números escritos na escrita cuneiforme da época e que os valores são de lados de um triângulo retângulo escrito em sistema sexagesimal, que no caso foram a da hipotenusa e um dos catetos

A tábua de Plimpton 322 descreve uma sequência de 15 triângulos retângulos, cujas inclinações diminuem progressivamente. Nela, observam-se valores da secante de um ângulo específico, oposto a um dos catetos. A tábua exibe um padrão numérico especial, conhecido como termo pitagórico, um anacronismo, pois Pitágoras nasceu aproximadamente 1300 anos depois. Isso sugere que a placa de Plimpton 322 descreve as formas de triângulos retângulos utilizando uma forma inovadora de trigonometria, baseada em proporções em vez de ângulos e círculos.

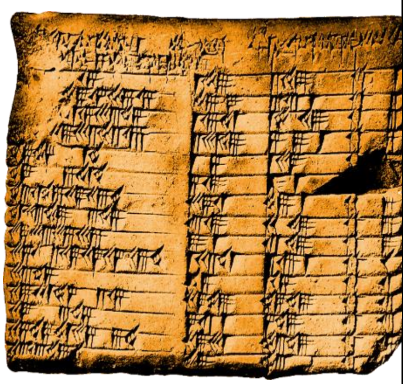
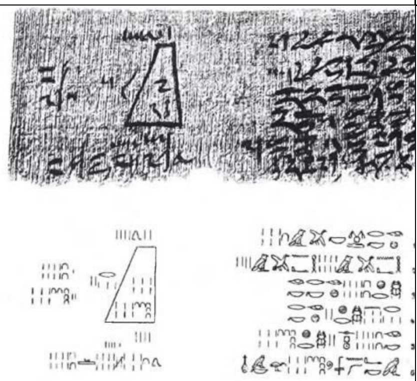
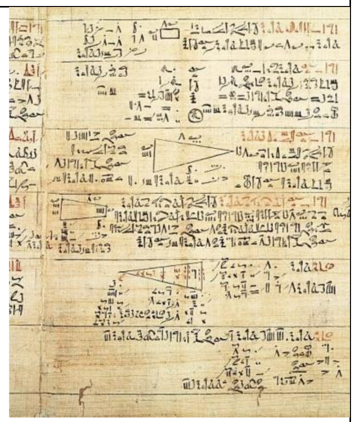
---

4 Utilizaremos a abreviações “a. E. C.” e “d. E. C.” como sendo: antes da Era Comum e depois da Era Comum, respectivamente.

Essas evidências indicam que os babilônios, naquela época remota, conheciam a representação geral dos ternos pitagóricos primitivos e a relação entre os lados de um triângulo e seus ângulos – conceitos fundamentais para a compreensão moderna das relações de seno e cosseno.

Além da Plimpton 322, outros dois documentos egípcios antigos abordam questões trigonométricas: o papiro de Moscou (ou Golenischev), datado de 1850 a.C., e o papiro de Rhind (ou Ahmes), datado de 1650 a.C. Juntos, eles apresentam 110 problemas matemáticos, em sua maioria de natureza simples.

Ilustração 2 - Documentos antigos envolvendo trigonometria

Tábua Plimptom 322 (Universidade de Colúmbia)	Papiro Moscou (Museu Pushkin)	Papiro Rhind (Museu Britânico)
 Fonte: Eves, 2011, p. 65	 Fonte: Eves, 2011, p. 86	 Fonte: Eves, 2011, p. 74

Segundo Eves (2011, p. 83) com base nesses documentos “os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o “percurso” e a “elevação” — isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura” e um dos problemas que envolve relações sobre trigonometria é tratado no problema 56 do papiro Rhind, onde pede-se que encontre o *seqt* de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura cujo lados medem 360 cúbitos.

Este problema mostra a relação da inclinação, chamada de *seqt* de um triângulo e sua altura chamada de cúbitos, ou seja, relação da cotangente. É impressionante como esses povos antigos já estudavam os triângulos, e o Teorema de Pitágoras é a prova disso.

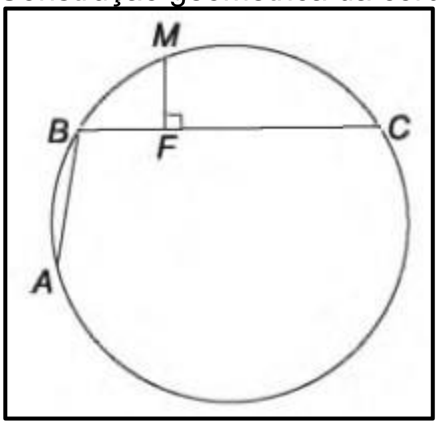
Sabe-se que o desenvolvimento dos diversos ramos da matemática não evoluiu da mesma maneira e ao mesmo tempo. O estudo da trigonometria na Antiguidade foi gradualmente construído não por um único homem, mas sim por vários sábios, tais como: Thales de Mileto (625-546 a. E. C.), Pitágoras (570-495 a. E. C.), Aristarco de Samos (310-220 a. E. C.), Arquimedes de Siracusa (287-212 a. E. C.), Eratóstenes de Cirene (276-194 a. E. C.), Hiparco de Niceia (190-120 a. E. C.), Menelau de Alexandria (70- 130 E.C.), Claudio Ptolomeu (85- 165 E. C.).

Considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Arquimedes realizou diversos estudos e descobertas para a ciência nas áreas da geometria, aritmética, hidrostática, mecânica, estatística, Física.

Na trigonometria, Arquimedes ao estudar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo ele constatou que inscrevendo polígonos regulares na circunferência, encontrou uma aproximação para o valor do “π” expressa em 310/71< π < 310/70, valor melhor que a dos egípcios e a dos babilônios. Em seu teorema sobre a corda quebrada, não sabemos se ele visualizou algum significado trigonométrico em sua demonstração, mas hoje a sua equação é equivalente a fórmula $sen(x - y) = senx.cosy - cosx.seny$.

O teorema era descrito da seguinte forma: Dados sobre uma circunferência os pontos *A*, *B* e *C*, a união das duas cordas *AB* e *BC* chama-se corda quebrada *ABC*. Consideremos em uma circunferência uma corda quebrada *ABC*, com *BC* > *AB*, como mostra na Figura 10.

Figura 10 - Construção geométrica da corda quebrada



Fonte: Eves (2011, p. 217)

Dessa forma, o menor arco subtendido pela corda *BC* é maior que o menor arco subtendido pela corda *AB*. Seja *M* o ponto médio do arco *ABC*. Pela desigualdade anterior, sabemos que *M* está entre *B* e *C*. Seja então *F* o pé da perpendicular baixada de *M* sobre a corda *BC*. O *teorema da corda quebrada* diz que, feita a construção anterior, tem-se *F* é o ponto médio da corda quebrada, ou seja, *AB* + *BF* = *FC*.

Foi com Eratóstenes que se produziu a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando somente um bom raciocínio, geometria e medições simples com o conhecimento sobre semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Ressaltamos que, o trabalho de Eratóstenes só foi possível graças ao estudo do conceito de ângulo e de como medi-lo.

Durante séculos os matemáticos gregos já apresentavam uma vasta contribuição de estudos de relações entre retas e círculos aplicadas em problemas envolvendo astronomia. Mesmo a trigonometria não tendo uma sistematização, alguns valores de seno, cosseno e tangente já eram conhecidos por muitos matemáticos da época, mas de forma desorganizadas.

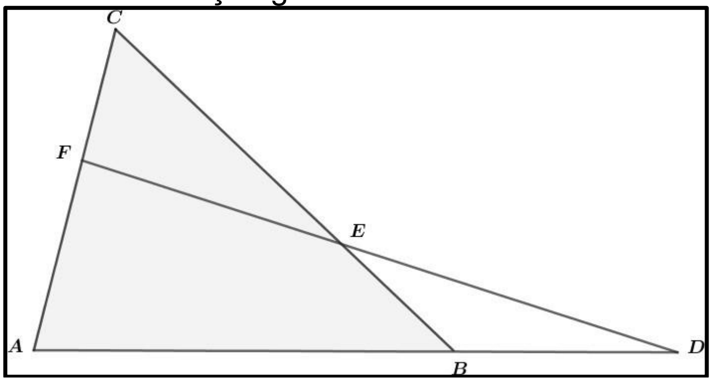
Então, por volta de 180- 125 a. E. C., o astrônomo Hiparco de Nicéia construiu a primeira tabela trigonométrica que tinha como função relacionar cada arco da circunferência à sua respectiva corda. Os seus cálculos astronômicos e trigonométricos eram feitos por meio do sistema sexagesimal (base 60) o qual, talvez, tenha dividido o círculo em 360º. Por conta dessa organização e seus estudos sobre relações de ângulos e arcos ele é considerado por muitos matemáticos e historiadores como o “pai” da trigonometria.

Por volta do século I d. E. C., Menelau de Alexandria produziu livros onde continha estudos sobre “Cordas num círculo”. Este matemático adaptou-se uma base para triângulos esféricos que era análoga à de Euclides I para triângulos planos, que servia apara aplicação de fenômenos astronômicos.

Dentre seus trabalhos está o “teorema de Menelau” sobre trigonometria das cordas que diz: *se os lados AB, BC, CA de um triângulo são cortados por uma transversal nos pontos D, E, F respectivamente, então AD. BE. CF = BD. CE. AF.*

Estendendo para relações trigonométricas essa equação equivale a sen (AD). sen (BE). sen (CF) = sen (BD). sen (CE). sen (AF). Ver Figura 11 a seguir.

Figura 11 - Construção geométrica do teorema de Menelau



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Ainda nesse século da Era comum, outro cientista grego, considerado um dos astrônomos e geógrafos mais influentes de sua época, chamado Claudio Ptolomeu, desenvolveu a teoria geocêntrica que prevaleceu durante 1400 anos. Ele fez observações astronômicas em Alexandria e escreveu a obra o *Almagesto*[5] que reúne uma quantidade considerável de conhecimentos de astronomia e matemática da época.

A Obra é composta de 13 livros, que detalha a teoria dos movimentos do Sol, da Lua e dos planetas, com contribuições importantes e originais ao apresentar detalhes dos movimentos de cada um desses corpos. Há, também, oito livros que são apresentados estudos sobre trigonometria, que segundo Eves (2011, p. 204), são:

- O Livro I contém, em meio a algum material astronômico preliminar, a tábua de cordas mencionada anteriormente feita por Hiparco, acompanhada de uma explanação sucinta da maneira como ela foi obtida a partir da fértil proposição geométrica conhecida como teorema de Ptolomeu que diz*: Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos.*
- O Livro II considera fenômenos que dependem da esfericidade da Terra.
- Os livros III, IV e V desenvolvem o sistema astronômico geocêntrico por meio de epiciclos.
- No Livro IV figura uma solução do *problema dos três pontos* da agrimensura: Determinar o ponto a partir do qual se veem os pares de três pontos dados segundo ângulos dados. Esse problema tem uma história longa e às vezes é

5 Segundo Boyer (1974, p. 119) “devido às frequentes referências da chamada a coleção “maior” como sendo *megiste,* surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o *Almagesto* (“o maior”) e é por esse nome que a obra é conhecida a partir de então”.

conhecido como "Problema de Snell" (1617) ou "Problema de Pothenot" (1692).

- No Livro VI, em que é dada a teoria dos eclipses. Os Livros VII e V III dedicam-se a apresentar um catálogo de 1028 estrelas fixas. E os livros restantes ocupam-se dos planetas. O *Almagesto* manteve-se um trabalho-modelo sobre astronomia até os tempos de Copérnico e Kepler.

Uma vez estabelecida esse modelo geocêntrico, Ptolomeu passa a descrever a Matemática que necessita para fundamentar suas ideias em sua obra. Apresenta métodos trigonométricos assentados da função Crd (corda), que está relacionado com a função seno, ou seja:

$$sen(\theta) = \frac{Crd\ 2\theta}{120}$$

Além disso, ele construiu tábua de cordas (senos), dividindo a circunferência do círculo em partes hoje denominadas por graus, minutos e segundos

3.4.2. A trigonometria dos Hindus e dos Árabes (sec. V – XII d. E. C)

Até aqui, exploramos os estudos de trigonometria desenvolvidos pelos matemáticos babilônios e egípcios. Essa matemática floresceu até o século VI d.E.C., quando culturas na Índia e no mundo árabe começaram a se destacar, legando-nos uma nova forma de matemática.

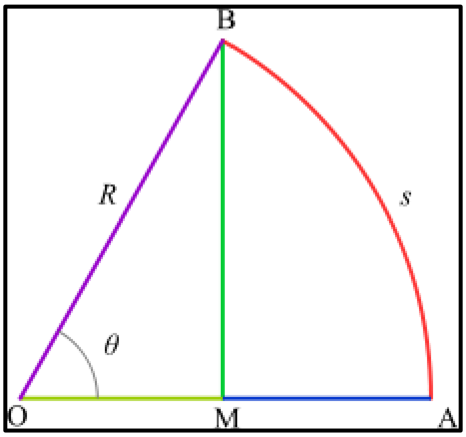
Em 476 d.E.C. nasceu Aryabhata, autor do "Aryabhatiya", um dos mais antigos textos matemáticos indianos. Essa obra concisa, escrita em versos, contém 123 estrofes que descrevem regras de cálculo aplicadas à astronomia e à matemática. Outra obra importante da época é o "Siddhantas", um conjunto de textos ou sistemas de astronomia geralmente redigidos em sânscrito e em formato épico.

Uma das contribuições significativas de Aryabhata para a trigonometria foi o seu método para construir uma tabela de valores de seno utilizando versos. É importante notar que, naquela época, os conceitos de seno e ângulo ainda não eram formalmente definidos. No entanto, seus trabalhos já demonstravam, de forma implícita, a relação entre os comprimentos de arco de uma circunferência e suas respectivas cordas.

Essas duas obras apresentavam uma introdução análoga a que temos hoje, a função seno, que substituiu a tabela grega das cordas que continha valores dos senos de ângulos até 90° para vinte e quatro intervalos iguais de $3°\frac{3}{4}$ (3°45': três graus e quarenta e cinco minutos) cada um e, para expressar o comprimento do arco e o comprimento do seno na mesma unidade

Para obter o valor de uma determinada corda de uma circunferência, Aryabhata utilizava o segmento que correspondia à metade da corda gerada por um arco com o dobro do tamanho, o qual essa meia-corda era chamada de *jya.* Transformando o procedimento para os dias atuais, temos a seguinte construção:

Figura 12 - Representação moderna da obtenção da meia-corda



Fonte: José Tadeu Arantes (2017)

Na figura a cima, Arantes (2017) descreve como se deu o procedimento:

> o segmento *S* é o arco produzido na circunferência de raio *R* pelos pontos A e B. Estes, unidos ao centro O, formam o ângulo *θ*. O segmento verde BM, perpendicular à base, era chamado de *jya*. O segmento verde mais claro OM era chamado de *koti-jya*. E o segmento azul MA era chamado de *utkrama-jya*. Todas essas grandezas trigonométricas referiam-se ao arco *S*. Mas podem ser facilmente associadas ao ângulo *θ*. Os conceitos de *jya* e *koti-jya* são precursores dos conceitos modernos de seno e cosseno. (ARANTES, 2017)

Matematicamente para os hindus, o comprimento da meia corda era calculado por $Rsen(\theta)$ que é equivalente a,

$$\frac{1}{2}crd(2\theta) = jya(arco\ S) = Rsen(\theta)$$

Onde crd=corda

E, para o cosseno temos,

$$koti - jya(arco\ S) = Rcos(\theta)$$

E para o seno versor, temos,

$$utkrama - jya(arco\ S) = R\big(1 - cos\ (\theta)\big)$$

A origem da palavra "seno" é curiosa e envolve uma tradução equivocada. O termo, como conhecemos hoje, foi introduzido pelos europeus através da palavra latina "sinus", que é uma tradução da palavra árabe "Jaib". "Jaib" significa "dobra", "bolso" ou "prega de uma vestimenta", e essa tradução para "seno" não tem relação direta com o conceito matemático que a palavra representa.

A confusão surgiu porque os árabes, ao adaptarem a palavra sânscrita "Jya", que se referia à corda de um arco (de caça ou de guerra), para seu dialeto, a transformaram em "Jiba" em vez de "Jaib". Essa tradução errônea persistiu e é utilizada até os dias atuais para designar a função trigonométrica seno.

Os matemáticos hindus desenvolveram técnicas de aproximação, pois não havia métodos para se calcular a tabela de cordas. Do século VI com Aryabhata ao século XII com Bhaskara (1114-1185) foi possível encontrar técnicas cada vez mais sofisticadas para descobrir essas aproximações.

Esses métodos antecederam algumas ideias que posteriormente seriam aprimoradas pelos europeus. Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o *Almajesto* e a Trigonometria de *jiva* – de origem hindu – o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe Al-Battani, conhecido na Europa como Albategnius e foi o primeiro a transmitir a teoria dos senos para os europeus, adotando a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação – o círculo de raio unitário – surgiu o nome da função seno.

Tudo que os Árabes aprenderam sobre matemática teve como base as obras dos hindus. Seus cálculos astronômicos apresentavam dois tipos de trigonometria: a geometria grega das cordas, encontrada no *Almagesto*, e as tabelas hindus de senos, derivadas através dos *Siddhantas.*

Num livro chamado "sobre o movimento das estrelas", de Al-Battani, se encontra uma equação em termos do comprimento da sombra de um gnômon vertical de altura a devido à elevação do sol acima do horizonte, expressa da seguinte forma:

$$b = \frac{\big(asen(90° - A)\big)}{sen(A)}$$

Através dessa expressão, ele construiu “tabelas de sombras”, que modernamente representa valores das cotangentes de 1° a 90°.

Mesmo que o povo hindu tenha conseguido apresentar um estudo sobre trigonometria, os materiais adquiridos na Alexandria tomaram uma característica nova. Ao passo que a trigonometria de Ptolomeu era pautada na relação funcional entre cordas de um círculo e os arcos centrais que subtendem, os hindus converteram essas ideias em um estudo da correspondência entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subtendido no centro pela corda toda. Desse modo, nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos de seno de um ângulo.

3.4.3. A sistematização das Funções Trigonométricas (sec. XIV – XIX)

Até aqui vimos subdivisões de acontecimentos de povos que contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria. Mas, por volta do século XIV durante o período do Renascimento, a trigonometria deixou de ser parte da astronomia e passou a ser mais analítica, estudadas pelos europeus a partir do século XVI. Uma das causas que levaram o desenvolvimento da trigonometria analítica na primeira metade do século XVII foi o papel crescente da matemática em descrever o mundo físico ao nosso redor.

Nesse período os matemáticos experimentaram enormes dificuldades para a confecção de tabelas de funções trigonométricas. Os recursos aritméticos de cálculo se limitavam às operações com números inteiros e frações simples. As frações decimais foram introduzidas pela primeira vez na Europa no ano de 1585 por Simo Stevin em sua obra *La Disme*.

Nesse período nasceu um dos grandes matemáticos da época, Johann Muller (1436-1476), mais conhecido pelo nome de Regiomontanus, aluno de George Peuerbach (1423-1469). Foi a partir da obra de Regiomontanus chamada “*De triangulis*” que a Europa adquiriu hegemonia no campo da trigonometria. Em seus trabalhos escreveu sobre proposições de resoluções de triângulos, demonstração das leis dos senos, problemas envolvendo ângulos e áreas de triângulos e cálculos de tábuas trigonométricas.

O conteúdo de trigonometria começa no Livro II, com o enunciado literal e não simbólica da lei dos senos, ou seja, os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Também aparece a fórmula pra a área de um triângulo em termos dos comprimentos de dois lados e o ângulo formado por esses lados.

As confecções das tabelas trigonométricas tinham, nessa época, um papel relevante que com esforços dos matemáticos puderam ser editadas. Um deles foi Nicolau Copérnico (1473-1543) um astrônomo que revolucionou a visão do mundo ao conseguir colocar a Terra movendo-se e torno do Sol. Em seu tratado *“De revolutionibus orbiom coelestium”*, publicado em 1543, é apresentado divisões fundamentais sobre trigonometria, semelhante à obra de Regiomontanus.

Seus estudos sobre o movimento retilíneo resultante da composição de dois movimentos circulares lhe rendeu um teorema que diz: Se um círculo menor rola sem deslisar ao longo do interior de um círculo maior de diâmetro duas vezes maior, então o lugar geométrico de uma ponte que não está sobre a circunferência do círculo menor, mas que é fixo com relação a esse círculo menor, é uma elipse.

George Rheticus (1514-1574), que foi aluno de Copérnico, definiu as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. Rheticus chamava o seno de “perpendiculum” e o cosseno de “base” do triângulo com a Hipotenusa fixa.

O primeiro autor a utilizar termos modernos como “tangente” e “secante” foi Thomas Fincke (1561 – 1656) no seu Geometrie rotundi, de 1583. Bartholomeo Pitiscus (1561 – 1613) inventou o termo “trigonometria” que parece no título de sua obra *Trigonometriae sive*, de *dimensione triângulos*, *Liber* (Livro de Trigonometria, ou a medição de triângulo).

Galileu Galilei (1564 – 1642) em seus estudos sobre movimentos para entender os fenômenos físicos de queda livre e movimento dos projéteis esteve debruçadas à criação de equipamentos de guerra para Marinha de Veneza. Até mesmo o telescópio aprimorado por ele não foi para comprovar o heliocentrismo, mas sim para as práticas da guerra aumentando o alcance de observação.

Nessas observações sobre o movimento, o objetivo era discutir como um objeto cai, não importando saber o motivo dele cair, e essa descrição era puramente geométrica. Ou seja, ao cair verticalmente, era preciso saber como as grandezas variavam umas em relação às outras, e a resposta a essa pergunta implica a utilização de proporções matemáticas para relacionar as grandezas (representadas geometricamente). As leis naturais eram escritas em linguagem matemática, mas essa linguagem era geométrica, sintética, de tipo euclidiano, e não envolvia as fórmulas algébricas que conhecemos hoje.

Como afirma Roque (2012, p. 241 grifo nosso)

> Desde tempos anteriores a Galileu, uma **curva** já era vista como uma trajetória, podendo representar, por exemplo, o percurso de uma bala de canhão. Outros problemas técnicos, como os suscitados pela óptica, teriam modificado o estatuto das curvas geométricas nas primeiras décadas do século XVII, caso das cônicas.

Nessa época já investigavam como transformar um raio luminoso cilíndrico em um feixe de cônicas, e a consequência disso para a geometria é que a o problema das curvas ópticas implicavam a busca de curvas desconhecidas, que realizassem certos efeitos ópticos. Em termos gerais, os matemáticos da época procuraram ampliar o universo do curvo de objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas.

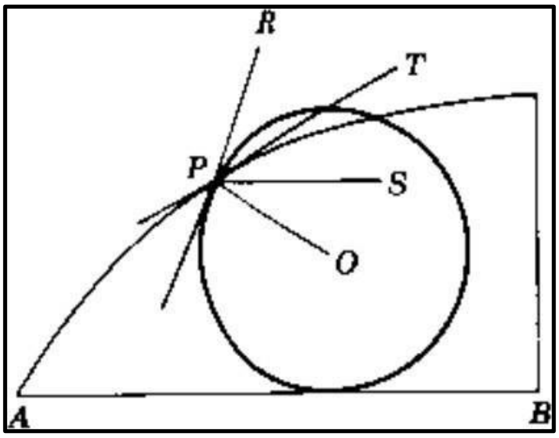
curvas descritas por um movimento contínuo ou por vários movimentos sucessivos, cada um sendo completamente determinado pelos precedentes.

O francês François Viète (1540-1603) não era um matemático por vocação, mas foi graças a seus estudos que formalizou simbolicamente a trigonometria trabalhada na época por meio de notações matemáticas, pois a linguagem ainda era a linguagem comum. Segundo Boyer (1974, p. 227) a trigonometria de Viète tinha uma conexão com as suas fórmulas e ângulos múltiplos de seno e cosseno. A trigonometria podia servir de auxiliar para a álgebra, que permitiu a ele a observar que o problema da trissecção do ângulo levava a uma equação cúbica.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) foi um matemático e físico francês conhecido por suas descobertas sobre ciclóides e pelo uso do método dos indivisíveis para calcular áreas. Em 1635, ele esboçou um arco de uma “sinusóide” (uma curva que representa graficamente uma função seno ou cosseno um marco importante que indica a transição gradual da trigonometria, antes focada exclusivamente nos triângulos, para a abordagem funcional que prevalece atualmente. A construção geométrica desse arco, elaborada por Roberval, pode ser encontrada no livro de Boyer (1974) e é feita da seguinte forma:

> Num ponto P sobre a ciclóide como sujeito a dois movimentos iguais, um de transição, outro de rotação. Quando o círculo gerador rola sobre a reta de base AB (Figura 17.6), P é carregado horizontalmente, ao mesmo tempo que gira em torno de O, o centro do círculo. Ponrtanto por P traça-se a horizontal OS, para o movimento de translação, e uma reta PR tangente ao círculo gerador, para a componente de rotação. Como o movimento de translação é igual ao de rotação, a bissetriz PT do ângulo SPR é a tangente à ciclóide. (BOYER, 1974, p. 260)

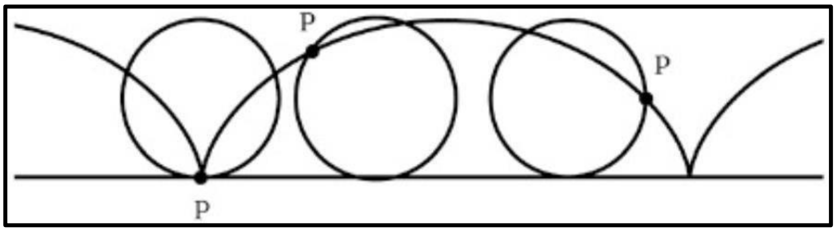
Figura 13 - Ciclóide



Fonte: boyer (1974, p. 260)

Problemas relacionados à procura de tangentes nesse período, fez com que a construção geométrica apresentasse uma significação técnica ou física. O ponto P ao se movimentar de acordo com o círculo em uma superfície plana, os matemáticos perceberam que o rastro deixado pelo ponto P era sempre igual, deixando uma curva em forma de arco. Ver Figura 14.

Figura 14 - Curva feita pelo ponto P



Fonte: Roque (2012, p. 304)

Segundo Roque (2012) entre os séculos XIV e XVII os estudos relacionados a técnicas e solução de curvas estava ligado ao desenvolvimento de alguns problemas físicos dessa época. Um desses problemas se referia à relojoaria, estudo de pêndulos, feito por Huygens (1629-1695), onde era preciso obter cronômetros mais precisos para os relógios, principalmente cronômetros marítimos, pois o balanço dos navios altera as amplitudes das oscilações. Outro problema tratava-se do “problema das cordas vibrantes”, que estuda as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades.

Isaac Newton (1642-1727), o renomado cientista inglês, é conhecido por suas descobertas fundamentais, incluindo o Teorema Binomial, o Cálculo, a Lei da Gravitação Universal e a compreensão da natureza das cores. Em 1664, Newton fez uma importante observação: algumas funções podem ser representadas por séries infinitas. Ele percebeu que a análise por séries infinitas possuía a mesma consistência interna e obedecia às mesmas leis gerais da álgebra de quantidades finitas.

Newton expandiu as funções arcsen(x), sen(nx) e cos(nx), o que permitiu que sen(x) e cos(x) fossem tratados como números, e não apenas como grandezas geométricas. Aos poucos, ele transitou suas anotações geométricas para esboços manuscritos algébricos, instrumentos algoritmos e notações. A exemplo disso, ele substituiu letras q_0, p_0 por x e y como sendo quantidades que fluem as quantidades de taxa de variação

Sustentado sobre ombro de gigantes como Galileu, Fermat, Huygens e outros, Newton pode enxergar mais longe, o que proporcionou a escrever a sua obra prima em 1687 *Philosophiae naturalis principia mathematica* mais conhecido como *Principia*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) outro matemático inglês que também é considerado como o criador do cálculo, que fez a descoberta independente da de Newton. Leibniz foi o primeiro a publicar esse trabalho. Desde Galileu a curva era descrita como sendo a trajetória de uma bola de canhão, por exemplo.

A partir do Século XVII o conceito de curva recobria três aspectos: a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e a curva como polígono com número infinito de lados. Leibniz com seus métodos infinitesimais contribui para essa mudança.

Leibniz encontrou um novo método para máximos e mínimos e anunciou regras para obter a derivada de soma, diferenças, produtos, quociente, potências e raízes. E para lidar com as curvas era preciso fazer relações entre grandezas, que não podiam ser tratados com a álgebra ordinária, como curva e sua tangente. Essa visão de Leibniz contribui para o surgimento da ideia de Função com relação entre quantidades.

Ao determinar a diferença entre Frações e Razões, Leibniz não formulou um conceito para Funções, mas ele já admitia que quantidades devem estar em relação (Uma Razão). As diferenciais dx e dy seriam infinitesimais expressa como $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ (modernamente). Para Roque (2012, p.319) em linguagem atual, esse princípio estabelece o seguinte:

> é sempre necessário determinar a variável em relação à qual se quer derivar. Uma quantidade varia em função da outra, ou seja, já temos aqui uma noção de variável dependente e variável independente, associadas atualmente à noção de função.

Essa discussão sobre “diferenciar em relação a”, levará à definição de função no século XVIII, substituindo a diferencial pela derivada, que é uma função. Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido que usamos hoje.

Essas ideias de representar sen(x) e cos(x) como séries infinitas de modo a se tornarem números e representar f(x) como sendo função e “x “como variável desta, culminou na definição de funções trigonométricas com o matemático Abraham Kastner (1719-1800) em 1758.

Quando Galileu estudou o movimento de pêndulos, ele já sabia que havia um movimento periódico e que estava relacionada com curvas chamadas cicloides. Em 1710 a periodicidade das funções trigonométricas foi comprovada pela primeira vez pelo matemático Thomas F. de Langny.

No século XVIII, a trigonometria tornou-se como é hoje “funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo”, definida pelo matemático Leonard Euler (1707-1783). A transição das razões trigonométricas (utilizando figuras) para funções periódicas com curvas e variáveis, atingiu seu ponto mais alto quando Euler criou a função e, chamada de função de Euler. Seus livros eram escritos em análise pura da matemática, sem recorrer a problemas geométricos para explicar as regras de cálculo. Foi com Euler o cálculo passou a ser visto como uma teoria das funções.

A publicação da *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise dos Infinitesimais) de Euler em 1748 marcou um ponto de virada no tratamento das funções trigonométricas, permitindo a resolução de diversos problemas em ciências físicas. Por exemplo, abriu caminhos para o estudo dos sons musicais produzidos por cordas vibrantes e para a análise da propagação de calor.

Através da fórmula de Euler, é possível expressar sen(x) e cos(x) em função da variável “x”. Além disso, utilizando séries, podemos determinar o valor do seno associado à coordenada de um ponto em um círculo unitário (tópico que será abordado em detalhe posteriormente), conforme:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

Sendo que em 1748 Euler exprimiu as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos como sendo:

$$e^{ix} = cos\,(x) + isen(x),$$

Expressão obtida através da identidade cujo nome leva o seu dada por:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Onde i é a unidade imaginária.

Assim, apresentou-se até aqui como se desenvolveu a trigonometria de funções. No próximo tópico é apresentado a trigonometria com símbolos e descrição de seus conceitos que hoje é usado.

López e Bruno (2023, p. 14) afirma que a Trigonometria:

> encontrou inúmeras aplicações na ciência, tecnologia e engenharia modernas. Da arquitetura e topografia a à física, computação gráfica e processamento de sinais, os princípios trigonométricos sustentam vários campos. O desenvolvimento de calculadoras e computadores avançados expandiu ainda mais o alcance e a precisão dos cálculos trigonométricos, tornando-os uma ferramenta indispensável no século XXI.

A trigonometria se desdobra em duas vertentes principais: a trigonometria aplicada e a trigonometria das funções trigonométricas.

A trigonometria aplicada, com relevância direta no mundo real, dedica-se à resolução de problemas práticos, como o cálculo de distâncias inacessíveis e medidas indiretas. Fundamenta-se na associação de ângulos (α) a valores numéricos específicos, como cos(α) e sen(α), que constituem as relações métricas. Estas relações estabelecem fórmulas que interligam comprimentos de segmentos em figuras geométricas, como lados, alturas e bissetrizes. Essencialmente, essa vertente da trigonometria permite relacionar ângulos com comprimentos.

Por outro lado, a trigonometria das funções trigonométricas, que são funções de variáveis reais, ganhou uma nova dimensão com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e da Análise Matemática. O surgimento dessas áreas impulsionou a compreensão das funções trigonométricas básicas (seno, cosseno) e suas derivadas (tangente, secante, cossecante, cotangente), elevando a teoria trigonométrica a um nível mais abstrato e fundamental.

Para uma compreensão completa, é fundamental analisar as funções cosseno (cos(t)) e seno (sen(t)), definidas para todos os números reais t. Embora raramente abordadas em profundidade no ensino básico, essas funções são cruciais para estudantes que pretendem seguir carreiras em áreas exatas. O estudo aprofundado ocorre em disciplinas de cálculo, onde a trigonometria é aplicada em contextos como a análise de Fourier, e encontra aplicações práticas em áreas como engenharia elétrica, engenharia civil, música eletrônica e muitas outras.

3.5. Parte Matemática das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno

No subtópico anterior, exploramos a história das funções seno e cosseno, um processo de sistematização conceitual longo e gradual. Agora, este subitem apresenta as noções matemáticas fundamentais dessas funções, detalhando suas definições, conceitos, propriedades e demonstrações. Nossa análise se baseia nas obras de Iezzi (2013), Leithold (1994) e Lima (2014).

O estudo das funções seno e cosseno transcende a Matemática, encontrando aplicações significativas em áreas como Física, Biologia, Medicina e diversas

Engenharias. Nesses campos, modelos matemáticos envolvendo essas funções são frequentemente utilizados para descrever fenômenos periódicos.

Na Física, por exemplo, o Movimento Harmônico Simples (MHS) em sistemas como molas e pêndulos simples pode ser estudado utilizando estas funções. Em Medicina, a análise da frequência cardíaca, ou seja, o número de batimentos em um dado intervalo de tempo, também se beneficia do uso dessas funções. Já na Engenharia Elétrica, elas são cruciais na análise de circuitos de corrente alternada.

No nosso dia a dia, exemplos de fenômenos periódicos são abundantes, como: o movimento dos ponteiros de um relógio, a trajetória de um ponto na borda de uma roda de bicicleta, e até mesmo o movimento dos planetas ao redor do Sol.

Portanto, antes de definirmos formalmente as funções seno e cosseno, é crucial estabelecermos o conceito fundamental de função. Sem dúvida, a noção de função é um dos pilares da Matemática.

Ao longo da história, o conceito de função passou por diversas reformulações até alcançar a definição rigorosa que utilizamos atualmente, baseada na teoria dos conjuntos.

3.5.1. Definição de função

Utilizaremos a linguagem de conjuntos para definirmos função. Um conjunto ou coleção é formada de objetos, chamados de elementos. Quando um objeto x é um dos elementos que pertence o conjunto A, escrevemos $x \in A$. Caso contrário, $x \notin A$ (x não pertence a A).

Definição 1. Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação de f de A em B (simbolicamente, $f: A \rightarrow B$) recebe o nome de aplicação de A em B ou função em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

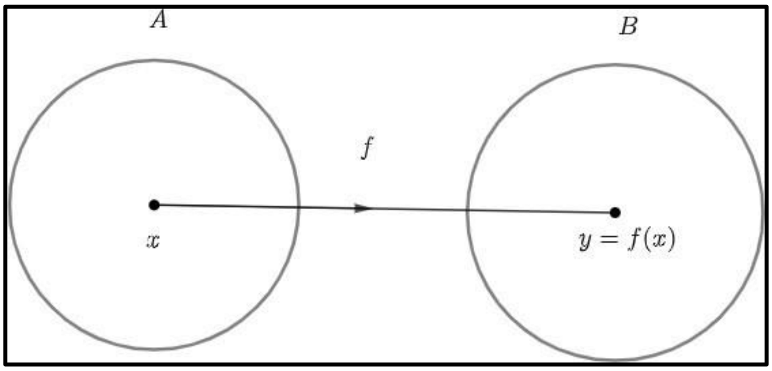
Uma função $f\colon A \longrightarrow B$ consta de três partes:

- um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida),
- um conjunto B, chamado o contradomínio da função, (ou o conjunto onde a função toma valores), e

- uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).

Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Figura 15 - Representação de função em termos de conjuntos



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

É importante evitar confusão em relação entre "f " e "$f(x)$" . A primeira é a função, enquanto que a segunda é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio. Gama (2020) afirma que nos livros didáticos (e até nos livros mais avançados):

> costumam utilizar uma linguagem “imprecisa” dizendo “função $f(x)$" para se referir à transformação feita por f ao elemento x, embora o mais adequado seria dizer “função f " ou “$y = f(x)$” para dizer que y é uma função em x , embora saibamos que neste último caso, o que seria adequado era dizer que "y é o resultado da transformação de x pela função f”. (GAMA, 2020. p. 73)

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1. Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$;
2. Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B

Isso quer dizer que dois pares ordenados não podem ter o mesmo número, assegurada que y seja único para valores específicos de x. Os números $x\ e\ y$ são variáveis. Dados os valores atribuídos a x e como o valor de y independe da escolha de x, x será a variável independente e y, a variável dependente.

Exemplo 1. Sejam P o conjunto dos polígonos do plano, R o conjunto dos números reais e $f: P \longrightarrow R$ a função que associa a cada x sua área $f(x)$.

Definição 2. Chamamos de domínio de f o conjunto Df dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, então $Df = A$.

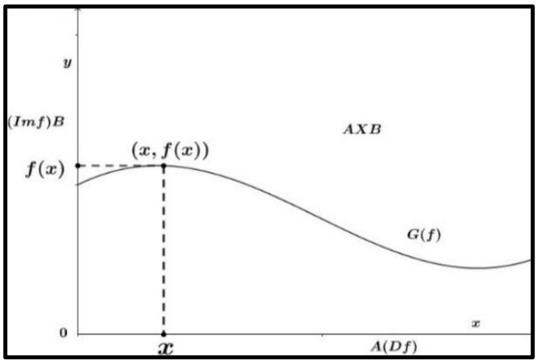
Definição 3. Chamamos de imagem de f o conjunto Imf dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, $Imf \subset B$.

Definição 4. Chamamos de gráfico da uma função $f: A \longrightarrow B$ o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $\big(x,\ f(x)\big)$, onde $x \in A$ é arbitrário. Em símbolos, temos:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$$

Um esboço do gráfico de uma função f está representado na imagem a seguir:

Figura 16 - Esboço do gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

É importante destacar que para termos uma função, é preciso existir exatamente um valor da variável dependente para cada valor da variável independente no domínio da função. Em termos geométricos isso significa que o gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto.

Definição 5. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é chamada de injetiva (ou biunívoca) quando, dados x_1, x_2 quaisquer em A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras: quando $x_1 \neq x_2$, em A, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$, em B.

Definição 6. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é dita sobrejetiva (ou sobre B) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$

E quando uma função $f: A \longrightarrow B$ é injetiva e sobrejetiva, ao mesmo tempo, dizemos que ela é uma função bijetiva (ou uma correspondência biunívoca) e que tem inversa definida em todo o conjunto B. A chamada correspondência biunívoca, justamente por ser unívoca nos dois sentidos:

1. Cada elemento em A tem um só correspondente em B pela f; e
2. Cada elemento de B tem um e um só correspondente em A pela inversa de f^{-1}, simbolicamente: $f^{-1}: B \longrightarrow A$.

Definição 7. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é dita periódica de período T (também chamada de T-periódica) se existe uma constante positiva $T > 0$ tal que

$$f(x) = f(x + T)$$

Para todo $x \in A$

O menor valor de T que satisfaz a condição acima é chamado período de f**.**

Observação 1. Se uma função f é periódica de período T, então, f também é periódica de período kT, onde $k \in N$, pois

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = \cdots = f(x + kT).$$

Vejamos um exemplo de uma função periódica.

Exemplo 2. Seja $f: R \longrightarrow R$ uma função definida por $f(x) = x - (x)$, onde (x) é uma função que representa "o maior inteiro menor que ou igual a x", isto é, dado o número real x, sempre existem dois números inteiros consecutivos n e $n + 1$ tais que $n \leq x < n + 1$. Assim, dando valores para n, temos:

$$\text{Se } 0 \leq x < 1,\ (x) = 0;\ \Longrightarrow f(x) = x - 0 = x$$

$$\text{Se } 1 \leq x < 2,\ (x) = 1; \Longrightarrow f(x) = x - 1$$

$$\text{Se } 2 \leq x < 3,\ \ (x) = 2;\ \ \Longrightarrow f(x) = x - 2$$

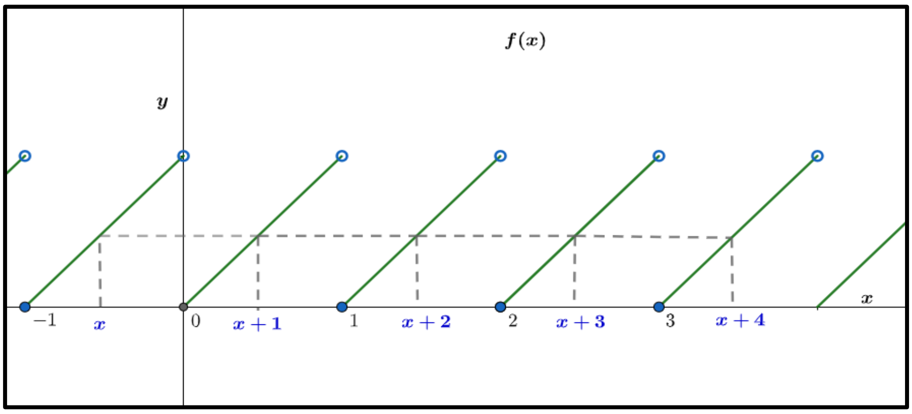
$$\text{Se } -1 \leq x < 0,\ \ (x) = -1;\ \ \Longrightarrow f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$\text{Se } -2 \leq x \leftarrow 1,\ \ (x) = -2;\ \ \Longrightarrow f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$\text{Se } -3 \leq x \leftarrow 2,\ \ (x) = -3;\ \ \Longrightarrow f(x) = x - (-3) = x + 3$$

O gráfico dessa função é descrito na Figura 17 a seguir:

Figura 17 - Gráfico da expressão f(x)=x-⟦x⟧



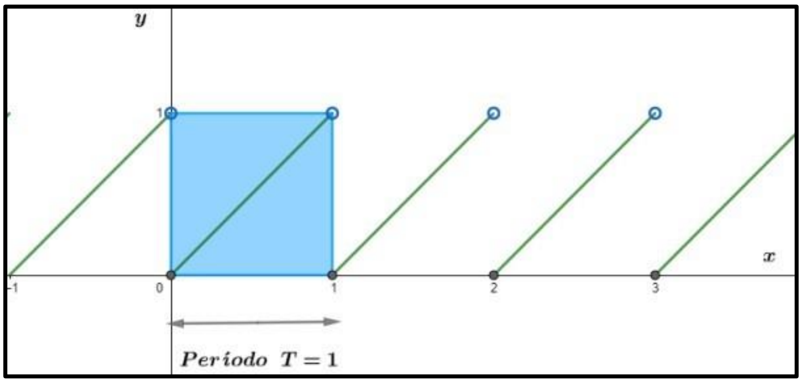
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

No gráfico podemos perceber que:

$$f(x) = f(x+1) = f(x+2) = f(x+3) = f(x+4) = \cdots (para\ todo)\ \forall x \in R$$

Portanto, existem infinitos números kT inteiros tais que $f(x) = f(x + kT),\ x\forall\in R$. O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete. Nesse caso o período é o comprimento do tal elemento. E nesse exemplo a função tem período de $T = 1$.

Figura 18 - Gráfico do período da função do exemplo 2



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

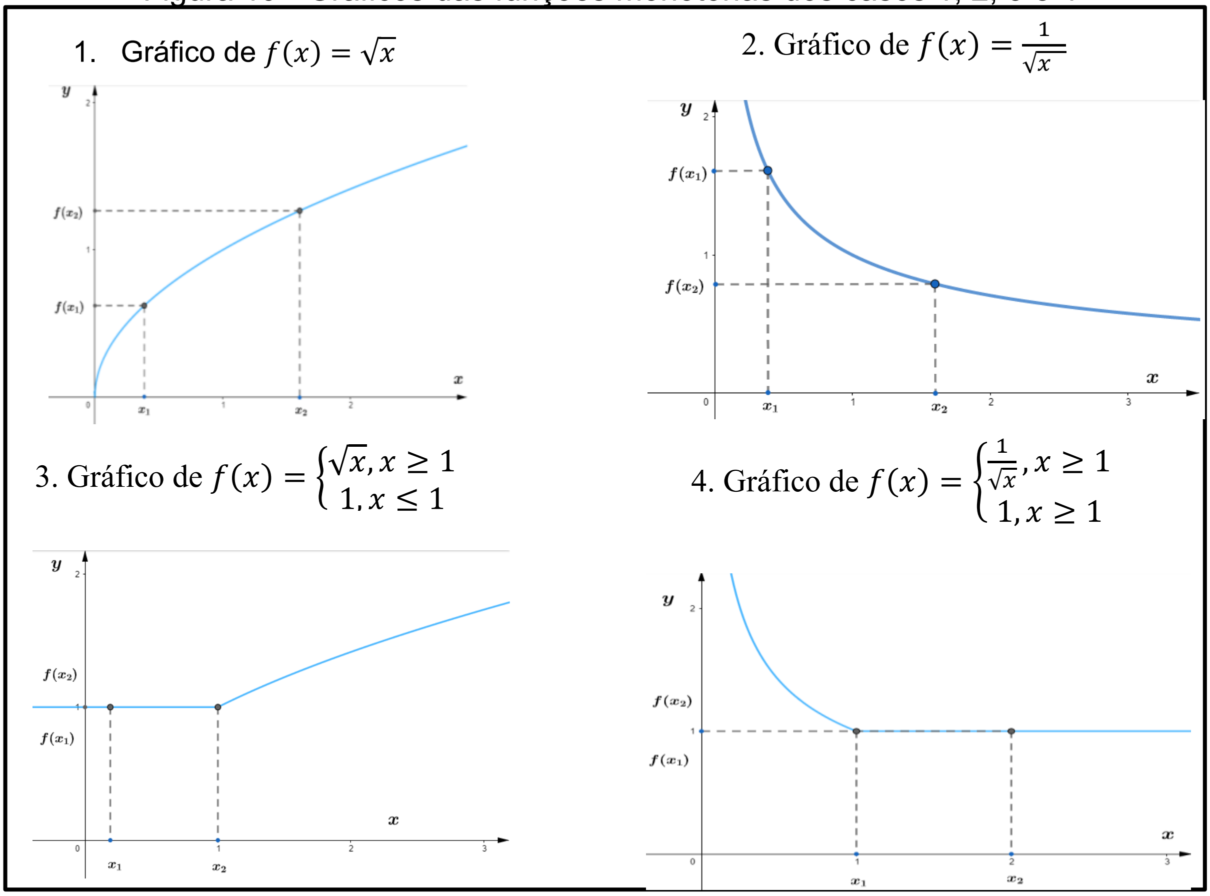
Definição 8. Seja a função $f: X \longrightarrow R$, com $X \subset R$ e $x_1,\ x_2 \in X$, chama-se:

1. Crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. Decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
3. Monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
4. Monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

Em qualquer um dos quatro casos acima, f diz-se monótona. Nos dois primeiros casos a função é dita estritamente monótona.

A seguir encontra-se gráficos que representam os quatros casos descrito acima.

Figura 19 - Gráficos das funções monótonas dos casos 1, 2, 3 e 4



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Definição 9.

I. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é denominada função par se, e somente se:

$$f(x) = f(-x),\ \forall\, x \in A$$

Isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

II. Uma função $f: A \longrightarrow B$ é denominada função ímpar se, e somente se:

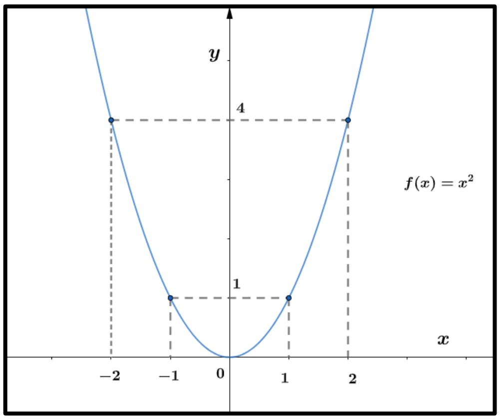
$$f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in A$$

Isto é, valores simétricos possuem imagens simétricas. Em ambos os casos (I) e (II), deve-se entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que que x estiver lá.

Exemplo 3. A função $f\colon R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^2$ é uma função par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Figura 20 - Gráfico da função par



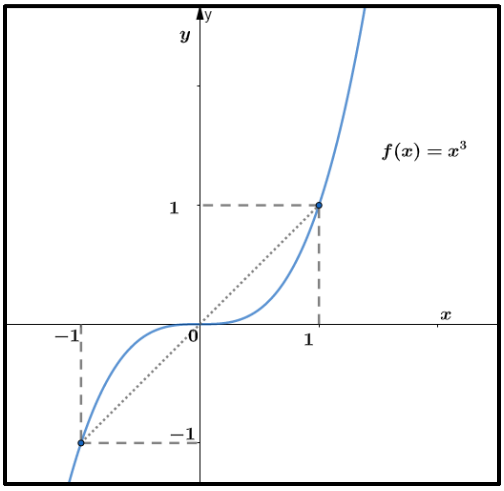
Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Notamos no gráfico a existência de uma simetria em relação ao eixo vertical y. Elementos simétricos têm a mesma imagem. No eixo do x podemos perceber que os elementos 1 e -1, 2 e –2, por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 1 e 4, respectivamente.

Exemplo 4. A função $f \colon R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -1.x^3 = -1.f(x) = -f(x)$$

Figura 21 - Gráfico da função ímpar



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Notamos que, diferente da função par que a simetria está no eixo vertical y, o gráfico da função ímpar existe uma simetria em relação a origem 0. No eixo do x os elementos simétricos têm imagens simétricas. Os elementos 1 e –1, por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e –1 (que também são simétricas).

Observação 2: Uma função que não é par nem ímpar é chamada de função sem paridade

3.5.2. Séries de potências de Seno e Cosseno

As funções trigonométricas podem ser mais bem compreendidas com o auxílio da expansão em séries infinitas de potências, ou por combinações de operações algébricas repetidas um número finito ou infinito de vezes.

No início do século XVIII o inglês Brook Taylor (1685-1731) mostrou que funções algébricas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, podiam ser representadas por uma "série de potências", que é uma série infinita de termos variáveis. Essas séries de potências podem ser usadas em várias aplicações para encontrar aproximações de números irracionais tais como $\sqrt{2}, \pi, e,$ etc., e, também, para obter valores aproximado de integrais que não podem ser integrados de forma analítica.

Definição 10. Dada a função $f: R \longrightarrow R$ uma série de potências em $(x - x_0)$ é uma série da forma:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + \ c_n(x - x_0)^n + \cdots$$

que é representada de forma de somatória por:

$$\sum_{0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n$$

onde $n \in Z_+$ e c_n são constantes reias.

Um caso especial acontece quando $x_0 = 0$. Nesse caso temos uma série de potências em x da seguinte forma:

$$\sum_{0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + \ c_n x^n + \cdots$$

A série de Taylor ou polinômio de uma função real f em torno de um ponto $x = x_0$ é uma expansão na forma de uma série de potência:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^3(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!} + \cdots$$

O polinômio pode ser aproximado para qualquer curva $f(x)$, se $f(x)$ possuir n derivadas, em torno de x_0:

$$f(x) \approx \sum_{0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Aqui $n!$ representa o fatorial de n.

A derivabilidade termo a termo das séries de potências fornece a base para uma construção rigorosa das funções trigonométricas, sem apelo `a intuição geométrica. As funções seno e cosseno são séries que ambas têm raio de convergência infinito.

Dessa forma, para todo $x \in R$, temos as seguintes séries de $sen(x)$ e $cos\ (x)$, respectivamente:

$$f(x) = sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

e

$$f(x) = cos\ (x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Não iremos nos aprofundar nas demonstrações de séries de potência de seno e cosseno, pois não é o nosso foco. Mas essas informações são importantes para os estudos do cálculo diferencial.

3.5.3. As funções trigonométricas seno e cosseno

A seguir definiremos conceitos que estão diretamente relacionados com as funções seno e cosseno. Nos livros didáticos do 2º ano do ensino médio esses conceitos aparecem nas primeiras páginas.

Também é sabido que as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, relacionadas aos ângulos de triângulos, são estudadas, geralmente, no 9° ano do fundamental e aprofundadas no 2º ano do Ensino Médio no tópico trigonometria no triângulo.

Agora vamos ampliar o estudo da trigonometria abordando essas mesmas razões na circunferência.

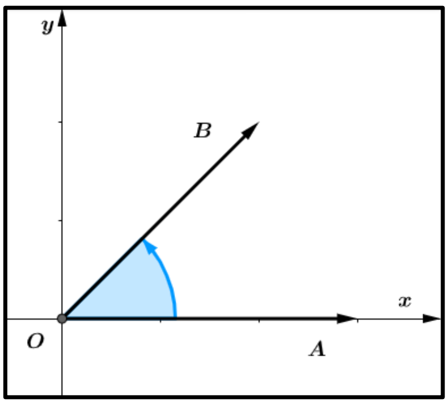
É importante que o leitor tenha conhecimento sobre funções, geometria plana, trigonometria no triângulo retângulo e triângulo quaisquer, entre outros, para compreensão dos conceitos e das argumentações.

Em geometria um ângulo é definido como a união de dois raios chamados de lados, tendo um extremo em comum denominado de vértice.

Definição 11. Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta.

Qualquer ângulo é congruente a um ângulo tendo vértice na origem e um lado, chamado de lado inicial, sobre o lado positivo do eixo x. Dizemos que tal ângulo está na posição padrão. A figura a seguir mostra um ângulo $A\hat{O}B$ na posição padrão com AO como lado inicial. O outro lado OB é chamado de lado final. O ângulo $A\hat{O}B$ pode ser formado ao girarmos o lado AO até o lado OB.

Figura 22 - Ângulo no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

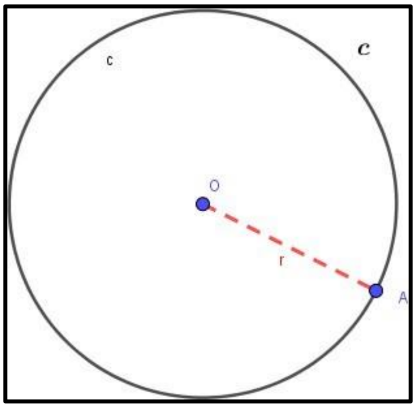
$$AO\hat{}B = \rightarrow OA \cup \rightarrow \ OB$$

O ponto O é o vértice do ângulo e $\rightarrow OA$ e $\rightarrow OB$ são as semirretas (lados do ângulo)

Definição 12. Chama-se Circunferência um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro, e a distância dada é o raio da circunferência, em símbolos tem se: Seja γ um plano e O um ponto desse plano, onde a distância entre eles é r, então

$$c(O,r) = (A \in \gamma\ )d_{A,O} = r$$

Figura 23 - Circunferência

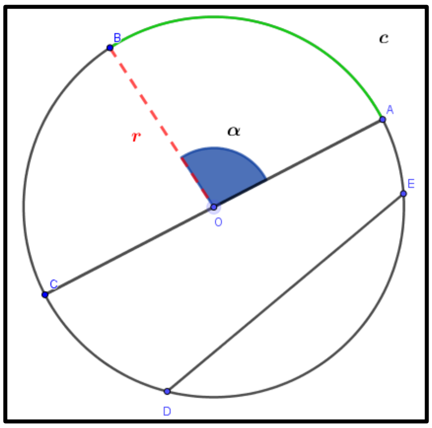


Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

No interior de uma circunferência alguns elementos são importantes no estudo de funções seno e cosseno. A

Figura 24 apresenta esses elementos.

Figura 24 - Elementos da circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Na figura temos os seguintes elementos da circunferência:

- Corda: é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência, nesse caso é$\overline{ED}$;
- Diâmetro: é uma corda que passa pelo centro O representado por $\overline{AC}$;
- Raio: é um segmento com extremidade no centro e a outra um ponto da circunferência, representado por $\overline{0B}$;
- Arco de circunferência: é a reunião dos pontos A e B e de todos os pontos de c (circunferência) que estão no interior do ângulo central $A\hat{0}B = \alpha$.

É comum encontrar problemas que evolvam ângulos de triângulos que tenha como unidade de medida o "grau". Mas, se tratando de funções trigonométricas de números reais o usual é utilizar a medida de ângulos em "radianos".

- Grau (símbolo: °): é uma medida dos ângulos planos correspondendo a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência. Cada uma dessas partes corresponde a um arco de medida angular 1 grau. O grau apresenta dois submúltiplos: minuto (´) e segundo (´´), onde 1º$60'$ e $1' = 60''$.
- Radiano (símbolo: rad): é um arco de medida angular 1 radiano (1 rad) que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência na qual está contido.

Assim, podemos estabelecer a relação de que o comprimento de um arco de circunferência (l) é proporcional à sua medida angular (α).

Em uma circunferência de raio r o seu comprimento é dado por $C = 2\pi r$, então temos a seguinte relação de proporcionalidade:

Para α em graus:

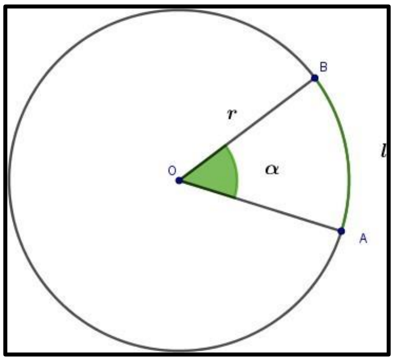
$$(360° \; - 2\pi r \; \alpha° \; - l \,) \Rightarrow l = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

Para α em radianos:

$$(2\pi \, rad \; - 2\pi r \; \alpha \, rad \; - l \,) \Rightarrow l = r\alpha$$

Em particular, numa circunferência de raio unitário, o comprimento de um arco é numericamente igual a sua medida em radianos.

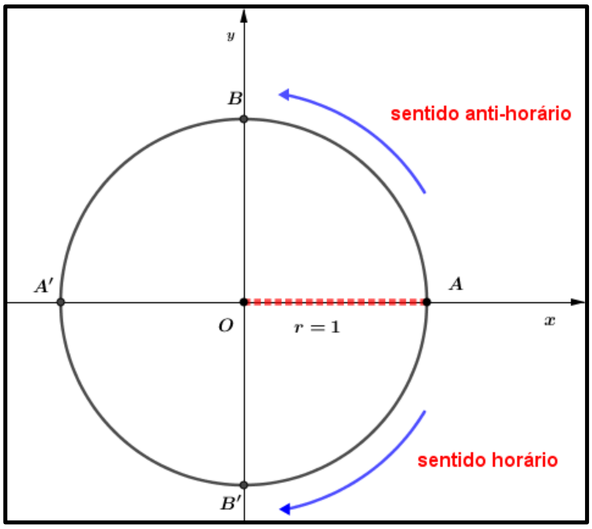
Figura 25 - Relação entre medida arco l e o ângulo α



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Definição 13. Tomemos sobre um plano γ um sistema cartesiano ortogonal xOy. Consideramos a circunferência c de centro O e raio unitário $r = 1$. Nota-se que o comprimento dessa circunferência é $C = 2\pi$, pois $r = 1$. Dessa forma define-se ciclo trigonométrico de c.

Figura 26 - Circunferência unitária

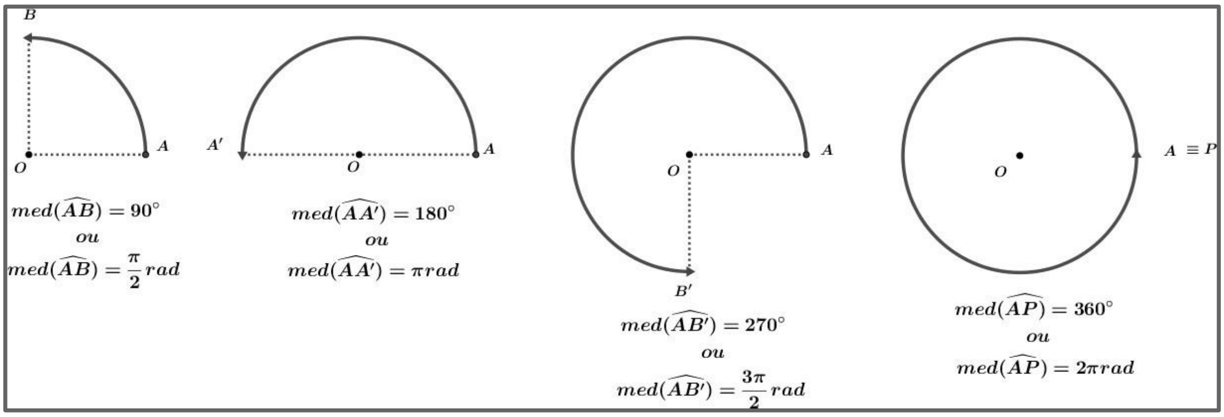


Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Por convenção estabelecemos a medida de um arco positivo se o sentido de A a B for no sentido anti-horário e negativo se for de A para B', sentido horário.

Observe a Figura 27 a seguir que mostra a medida angular de alguns arcos que estão expressa em graus e em radianos, considerando o sentido anti-horário (positivo) da circunferência.

Figura 27 - Arcos em graus e em radianos



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Note que a medida dos arcos da acima estão com valores positivos. Caso mudássemos o trajeto para o sentido horário, os valores ficariam negativos. Outro detalhe importante é que em um eixo cartesiano xOy a circunferência é dividida em quatro quadrantes congruentes. Assim, o primeiro quadrante é representado pelo arco $\widehat{AB}$; o segundo pelo arco $\widehat{BA'}$; o terceiro pelo arco $\widehat{A'B'}$ e o quarto pelo arco $\widehat{B'A}$.

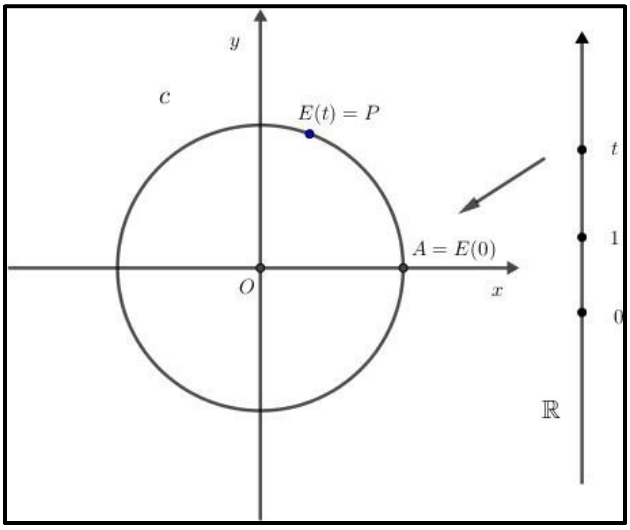
Vamos agora definir uma aplicação E de R em c, chamada de função de Euler, que associa a cada número real t um único ponto P da circunferência c, chamado de imagem de t no círculo, do seguinte modo:

$$E: R \longrightarrow c$$
$$x \longrightarrow E(t) = P(x, y)$$

Tal que,

1) Se $t = 0$, então $P = A$, ou seja, $E(0) = A$;
2) Se $t > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento t, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do trajeto;
3) Se $t < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento (t), no sentido horário. O ponto final do trajeto é P

Figura 28 - Função de Euler



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Por exemplo, ao percorremos t na reta dos reais R em um intervalo de comprimento l, então $E(t)$ percorre a circunferência unitária um arco de comprimento também igual a l. Em particular, se t percorrer a reta R de comprimento 2π, então a imagem na circunferência será de $E(t) = 2\pi$, isto é, uma volta completa no sentido anti-horário.

Isto é:

$$\forall\ t \in R,\ temos\ que\ E(t + 2\pi k) = E(t),\ para\ k \in Z$$

Em geral temos: se P é a imagem de um t_0, P será também a imagem de $t_0 \pm 2\pi,\ t_0 \pm 4\pi,\ t_0 \pm 6\pi$, etc..., ou seja, P é a imagem de todos os elementos do conjunto $\{t \in R;\ t = t_0 \pm 2k\pi,\ k \in Z$.

Dizemos, neste caso, que $t_0 \pm 2k\pi$ são as várias determinações do arco $\widehat{(AP)}$, ou seja, todos os arcos da forma $t_0 \pm 2k\pi$ são côngruos.

Outro detalhe importante é que a função de Euler não é injetora, ou seja, números reais diferentes podem estar associados ao mesmo ponto no círculo trigonométrico. Por exemplo:

$$E\left(\frac{-\pi}{2}\right) = E\left(\frac{3\pi}{2}\right); E(-\pi) = E(\pi); E(0) = E(2\pi)$$

Generalizando, temos: tomando um $t_1 > 0$ e $med(\widehat{AP}) = t_1$, associados a P existem dois arcos com medidas e sentidos diferentes. Se $med(\widehat{AP}) = t_1$ (sentido anti-horário) e $med(\widehat{AP}) = t_2$ (sentido horário, com $t_2 < 0$), temos que

$$t_1 - t_2 = 2\pi \ e \ E(t_1) = E(t_2) = P$$

Com esse estudo do ciclo trigonométrico e a função de Euler, podemos entender como associar números reais de uma reta a pontos do ciclo trigonométrico.

Agora vamos estudar as funções seno e cosseno que associam um número real t qualquer ao número correspondente ao seno e ao cosseno de um arco trigonométrico de medida angular $t\,rad$.

Definição 14. Suponha que t seja um número real. Colocando-se na posição padrão um ângulo com $t\,rad$ de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do círculo unitário com centro na origem. Se P for o ponto (x, y), então a função seno e cosseno será definida, respectivamente, por:

$$sen(t) = y \ \ e \ cos\,(t) = x$$

Da definição acima, vemos que $sen(t)$ e $cos\,(t)$ estão definidas para os valores de t. Assim sendo, o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto de todos os números reais R. Simbolicamente temos:

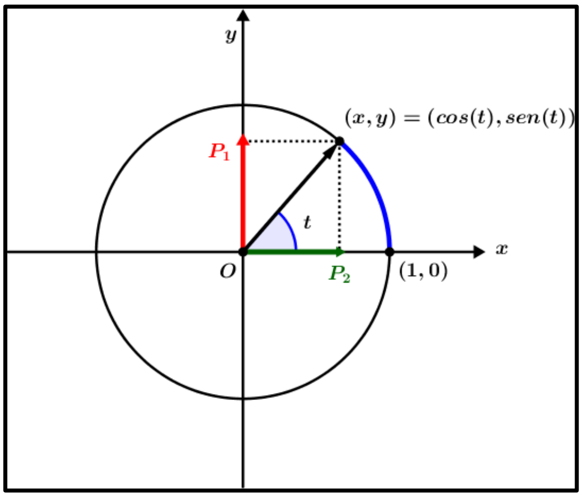
$$f\colon R \longrightarrow R$$

Onde,

$$f(t) = sen(t) \ e \ f(t) = cos\,(t)$$

A Figura 29 mostra o ponto $\big(cos\,(t),\ sen(t)\big)$ quando $0 < t < \frac{\pi}{2}$,

Figura 29 - Função seno e função cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Assim, a ordenada é $\overline{0P_1} = y = sen(t)$ e a abscissa é $\overline{0P_2} = x = cos\,(t)$. Nessas condições as funções seno e cosseno apresentam as seguintes propriedades:

Propriedades da função seno:

a) Se t é do primeiro ou segundo quadrante, então $sen(t)$ é positivo;

b) Se t é do terceiro ou quarto quadrante, então $sen(t)$ é negativo;

c) Se t percorrer o primeiro ou o quarto quadrante, então $sen(t)$ é crescente;

d) Se t percorrer o segundo ou o terceiro quadrante, então $sen(t)$ é decrescente.

e) A imagem da função seno é o intervalo $(-1,1)$, isto é, $-1 \leq sen(t) \leq 1$, $\forall\, t \in R$;

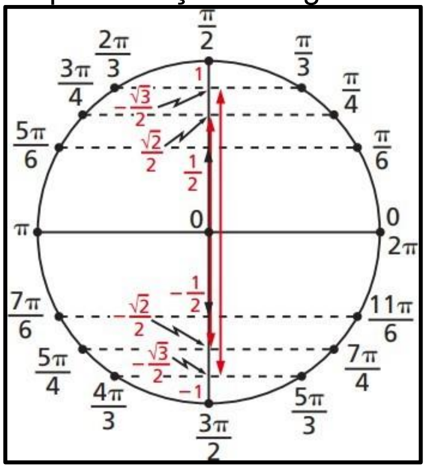
f) A função é periódica e seu período é 2π. A justificativa é, se $sen(t) = \overline{0P_1}$ e $k \in Z$, então $sen(t + k.2\pi) = \overline{0P_1}$, pois t e $t + k.2\pi$ têm a mesma imagem do ponto (x, y) no ciclo. Temos, então, $\forall\, t \in R$:

$$sen(t) = sen(t + k.2\pi)$$

E, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k.2\pi$, que no caso é 2π.

Vamos representar um diagrama com t para valores em abscissas e $sen(t)$ para valores em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado senoide, que é indicado como a variação da expressão $f(t) = sen(t)$. A figura a seguir mostra alguns valores de arcos em radianos para $sen(t)$.

Figura 30 - Representação de alguns arcos de seno

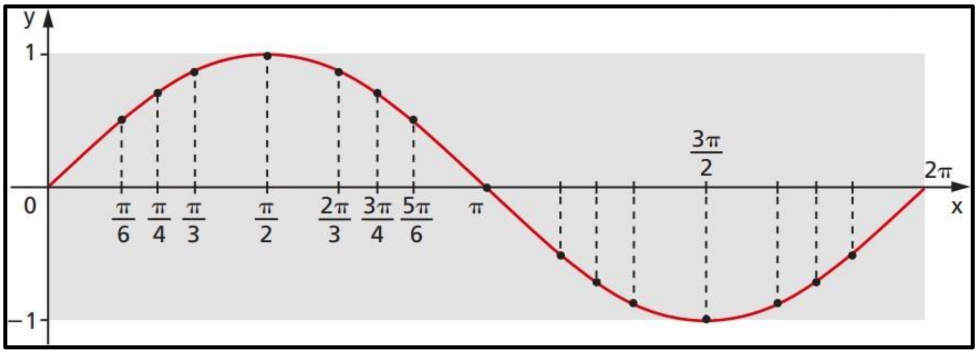


Fonte: Iezzi (2013, p. 94)

Percebe-se que no eixo vertical y $sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$; $sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ etc.

Dessa forma podemos representar esses valores no plano cartesiano em um intervalo de 0 a 2π.

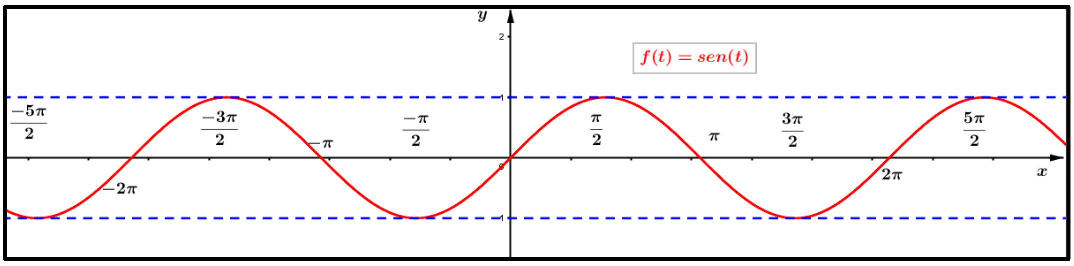
Figura 31 - Gráfico da função seno em $0 \leq t \leq 2\pi$



Fonte: Iezzi (2013, p. 94)

Nesse gráfico a função seno está definida para um período até 2π com seu domínio nos reais R. Nas dimensões do retângulo de cor cinza, temos $2\pi \times 2$ que é aproximadamente $6{,}28 \times 2$. Podemos estender para períodos maiores, isto é, para $f: R \longrightarrow R$:

Figura 32 - Gráfico estendido da função seno



Fonte: elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

Propriedades da função cosseno:

a) Se t é do primeiro ou quarto quadrante, então $cos(t)$ é positivo;

b) Se t é do segundo ou terceiro quadrante, então $cos(t)$ é negativo;

c) Se t percorrer o primeiro ou o segundo quadrante, então $cos(t)$ é decrescente;

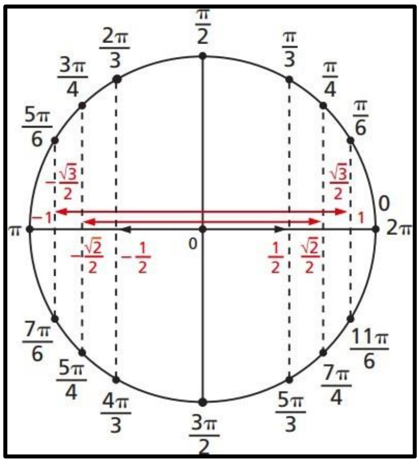
d) Se t percorrer o terceiro ou o quarto quadrante, então $cos(t)$ é crescente.

e) A imagem da função seno é o intervalo $(-1,1)$, isto é, $-1 \leq cos(t) \leq 1$, $\forall\, t \in R$;

f) A função é periódica e seu período é 2π.

A construção do gráfico, chamado de cossenoide representado pela expressão $f(t) = cos\ (t)$.

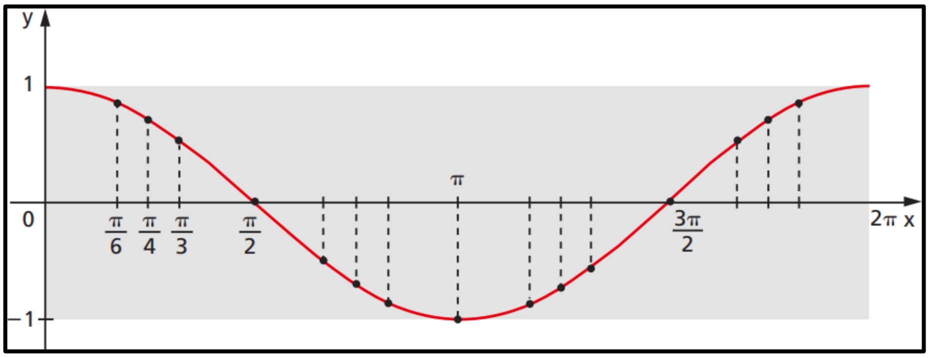
Figura 33 - Representação de alguns arcos de cosseno



Fonte: Iezzi (2013, p. 104)

No eixo horizontal x da circunferência percebemos que $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $cos(\pi) = -1$; $cos(2\pi) = 1$; $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $etc.$ Assim, transpondo para o plano cartesiano os valores da circunferência, temos:

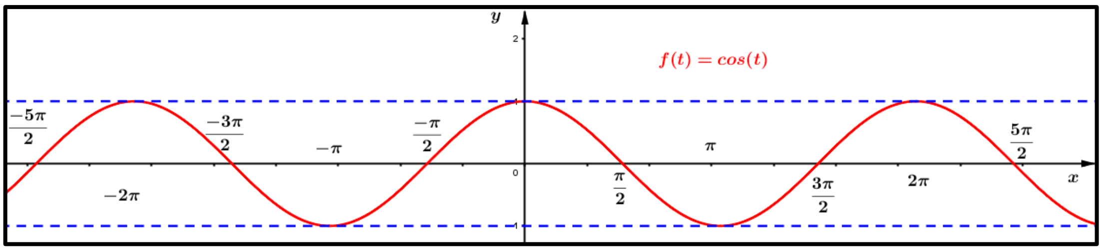
Figura 34 - Gráfico da função cosseno em 0≤t≤2π



Fonte: Iezzi (2013, p. 104)

No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo devem manter a proporção na escala $2\pi \times 2$. A forma estendida da função seno para todos os reais $f: R \longrightarrow R$, é representado da seguinte forma:

Figura 35 - Gráfico estendido da função cosseno



Fonte: Elaborado pelo autor utilizando o GeoGebra (2022)

3.6. Consulta docentes sobre o ensino das Funções seno e cosseno

O instrumento utilizado para a coleta de dados foi um questionário virtual, elaborado por meio da plataforma Google Forms, direcionado a professores que atuam ou atuaram no ensino médio. O questionário foi composto por 25 perguntas, sendo majoritariamente fechadas de múltipla escolha, com algumas questões abertas, com o objetivo de aprofundar determinadas informações. A aplicação ocorreu no período de 27 de julho de 2022 a 3 de agosto de 2023.

A pesquisa caracteriza-se, em sua essência, como quantitativa, uma vez que busca quantificar as práticas de ensino, formação docente e dificuldades percebidas no ensino das funções seno e cosseno. No entanto, assume também um caráter qualitativo, na medida em que algumas respostas abertas foram analisadas de forma interpretativa, permitindo compreender significados, percepções e experiências relatadas pelos professores. Assim, trata-se de uma abordagem predominantemente quantitativa com elementos qualitativos, especialmente na análise das respostas abertas.

O questionário abordou aspectos relacionados à prática docente, como a forma de condução das aulas de Matemática, a formação acadêmica e continuada dos professores e, com ênfase, o ensino das funções seno e cosseno. Para aprofundar essa temática, foram incluídas duas tabelas com os mesmos tópicos sobre essas funções: a primeira visava identificar, segundo os professores, as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudar tais conteúdos; a segunda procurou verificar quais tópicos são abordados com maior frequência pelos docentes em sala de aula.

Ainda que o instrumento contenha um conjunto amplo de questões, a análise concentrou-se nas respostas mais relevantes para os objetivos da pesquisa, com a finalidade de interpretar os dados à luz dos estudos de Corrêa (2016) e Gama (2020).

A produção do trabalho enfrentou alguns desafios, sendo a coleta de dados a principal dificuldade. Apesar da facilidade de divulgação do questionário online em grupos de professores, a baixa taxa de respostas atrasou o processo. Ao final, obtivemos 18 respostas de professores com experiência no ensino de funções seno e cosseno.

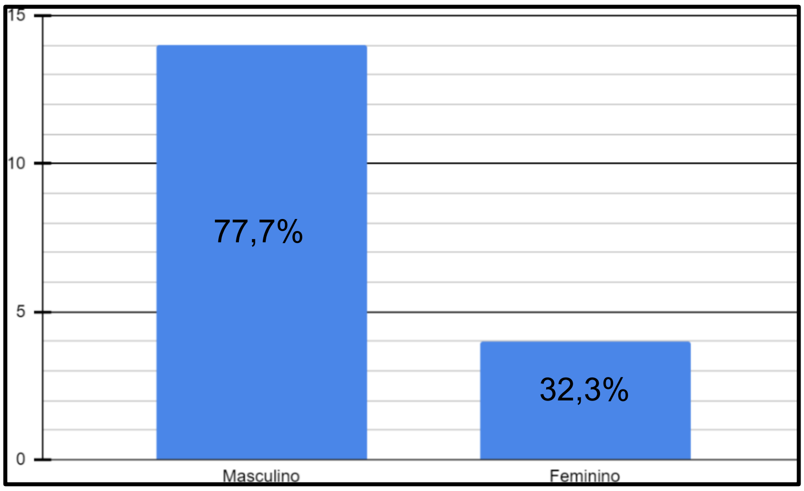
Este trabalho apresenta e analisa os resultados do questionário, investigando o ensino dessas funções pelos professores de matemática e as dificuldades de aprendizagem dos alunos. A análise comparará as respostas obtidas com resultados de pesquisas anteriores.

Tabela 1 - Gênero dos professores da pesquisa

Gênero	**Professores**
Masculino	14
Feminino	4
Total	18

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Gráfico 1 - Gênero dos professores da pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A análise do Gráfico 1 revela um predomínio de professores do sexo masculino (77,7%, correspondendo a 14 indivíduos) em relação às professoras (32,3%, representando 4 indivíduos) na amostra pesquisada. Essa distribuição desigual reflete as tendências observadas em estudos anteriores, como os de Corrêa (2016), que identificaram uma maioria de professores (63%) em relação a professoras (37%) em uma amostra de 100 docentes. Da mesma forma, Gama (2020) constatou que 80% dos 60 docentes pesquisados eram do sexo masculino, enquanto apenas 20% eram do sexo feminino.

Esses dados corroboram a persistente representação majoritária de homens em escolas públicas, universidades e, particularmente, nas áreas de ciências exatas, em detrimento da participação feminina nesses espaços.

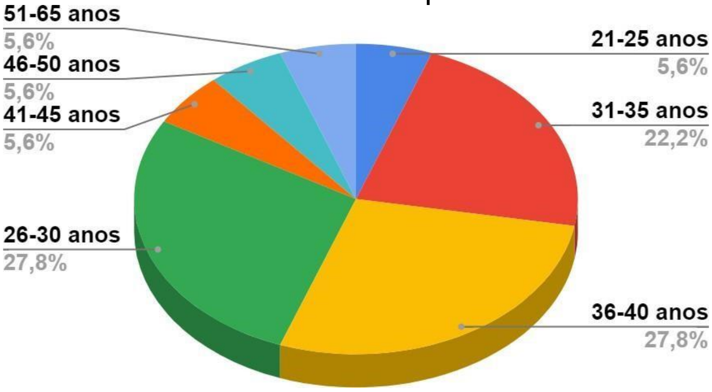
A próxima seção deste relatório abordará a distribuição por faixa etária dos professores, cujos resultados serão apresentados no gráfico a seguir

Tabela 2 - Faixa etária dos professores

Idade dos professores	Quantidade de professores
21 -25 anos	1
26 – 30 anos	5
31 – 35 anos	4
36 – 40 anos	5
41 – 45 anos	1
46 – 50 anos	1
51 – 65 anos	1
Total	18

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Gráfico 2 - Faixa etária dos professores em %



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

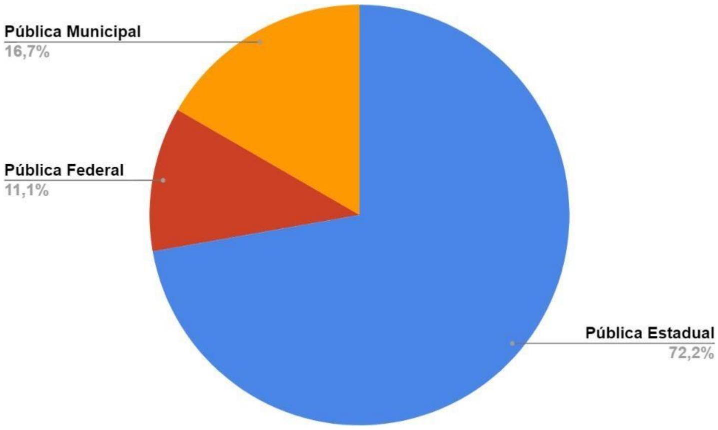
Com base nos dados apresentados no Gráfico 2, observa-se que a faixa etária predominante entre os professores é de 26 a 40 anos, representando 55,6% do total. Essa constatação corrobora os achados de Gama (2020), que identificou uma maior concentração de professores com idade superior a 36 anos, e de Corrêa (2016), cuja pesquisa apontou a faixa etária de 31 a 35 anos como a mais representativa.

Quanto ao tipo de instituição de ensino em que os professores atuam ou atuaram, a maioria (72,2%) declarou trabalhar em escolas públicas estaduais. Uma parcela menor leciona em escolas municipais (16,7%) e em instituições federais

(11,1%). Não foram identificados participantes que trabalham em escolas privadas (0,0%).

Em comparação com os dados de Corrêa (2016), verifica-se que 59% dos professores trabalham em escolas públicas estaduais, 19% em escolas municipais, 17% em instituições federais e 5% na rede privada. Os dados detalhados podem ser visualizados no Gráfico 3 a seguir.

Gráfico 3 - Tipo de escola que os docentes trabalham

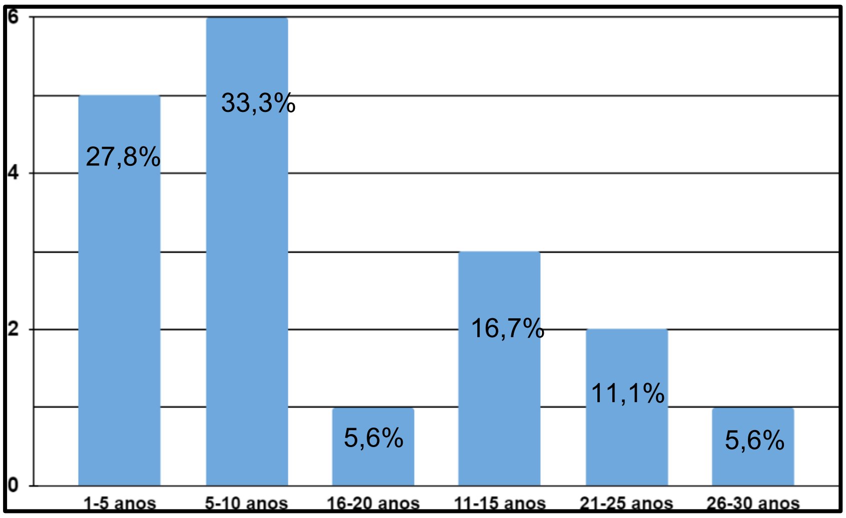


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em relação ao tempo de serviço em sala de aula, a maioria dos professores possui entre 1 e 10 anos de experiência. Especificamente, 27,8% têm entre 1 e 5 anos, enquanto 33,3% acumulam entre 5 e 10 anos. Uma análise do gráfico de Corrêa (2016) revela que 47% dos professores se encontram na faixa de 6 a 10 anos. Embora esse tempo de serviço possa ser considerado relativamente curto, isso não implica necessariamente uma falta de habilidade ou experiência no ensino da matemática.

O tempo de serviço, mesmo que limitado, sugere que esses professores possuem conhecimento suficiente para ministrar diversos conteúdos matemáticos. Essa base é fundamental para o ensino de funções trigonométricas, um tópico que exige uma didática eficaz para facilitar a compreensão dos conceitos pelos alunos. O Gráfico 4 a seguir ilustra essa distribuição.

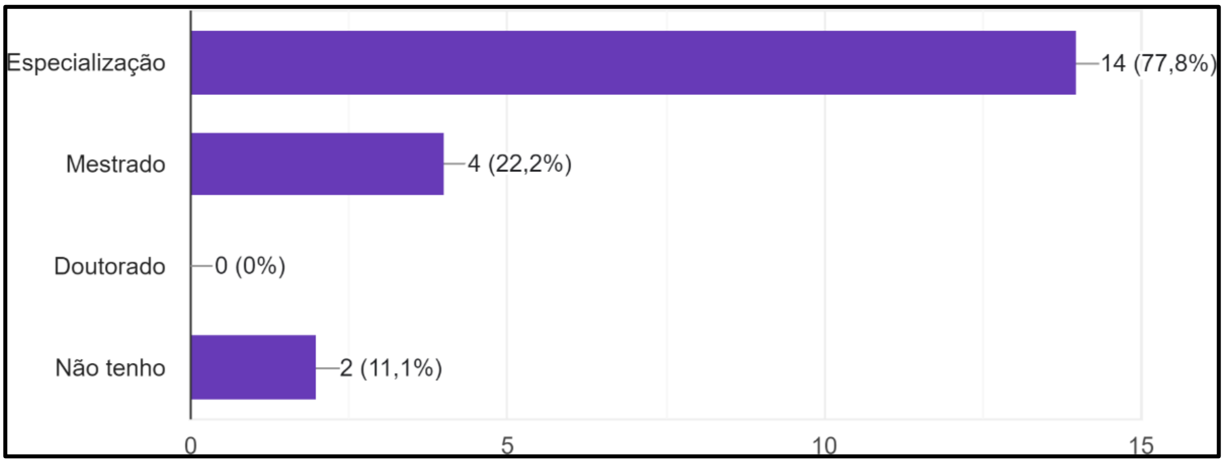
Gráfico 4 - Tempo de serviço em sala de aula



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para compreender o nível de atualização profissional do corpo docente, investigamos sua formação continuada. Os dados revelam que a grande maioria dos professores possui especialização (77,8%), sendo o mestrado a segunda titulação mais comum (22,2%). Uma pequena parcela (11,1%) possui apenas graduação, e nenhum docente relatou possuir doutorado. Este cenário demonstra o compromisso dos educadores em buscar aperfeiçoamento profissional após a graduação, visando novas abordagens de aprendizagem. (Ver Gráfico 5).

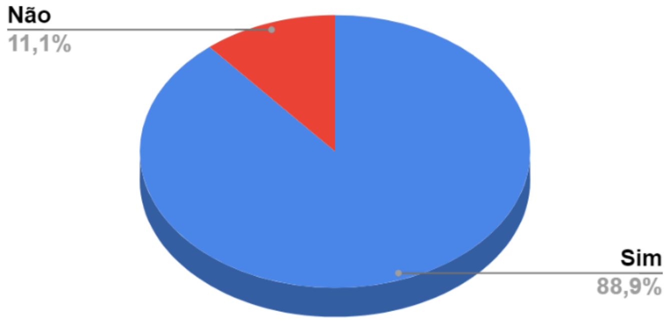
Gráfico 5 - Formação continuada dos professores



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Perguntamos aos professores se possuíam experiência no ensino das funções seno e cosseno, especificando em qual série do ensino médio costumavam abordar esses conceitos. Constatamos que uma parcela expressiva (88,9%) dos docentes já havia ensinado essas funções, ao passo que 11,1% não possuíam essa experiência.

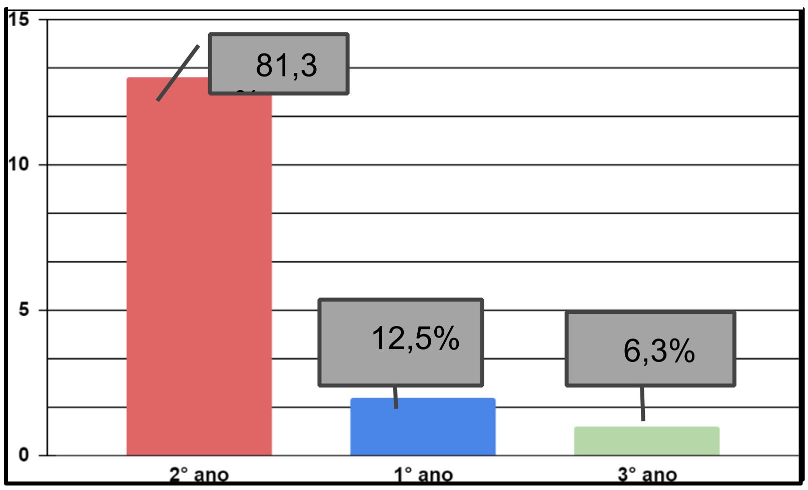
Gráfico 6 - Experiência dos professores no ensino de Funções seno e cosseno



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Em seguida, foi solicitado aos professores que indicassem em quais séries do ensino médio costumam ministrar o conteúdo relacionado às funções seno e cosseno. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Gráfico 7 - Série do Ensino Médio em que os professores ensinam funções seno e cosseno

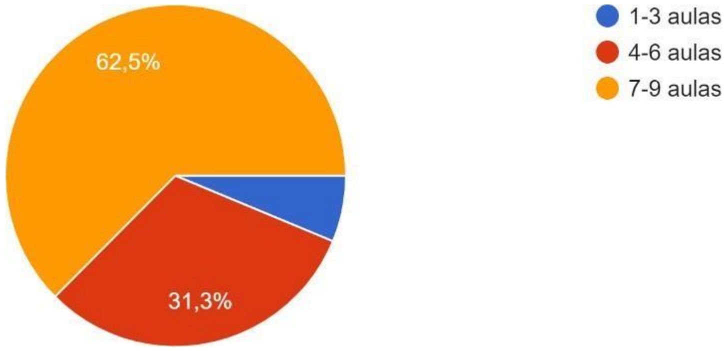


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A grande maioria dos docentes (81,3%) ensina as funções seno e cosseno no 2º ano do Ensino Médio, com uma pequena parte lecionando-as no 1º (12,5%) ou 3º (6,3%) ano. Esse padrão está alinhado com os resultados de Correa (2016), que demonstram que 76% dos professores abordam esse conteúdo no 2º ano.

Posteriormente, investigamos a quantidade de aulas que os professores utilizam para finalizar o tema.

Gráfico 8 - Aulas ministradas pelos professores



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

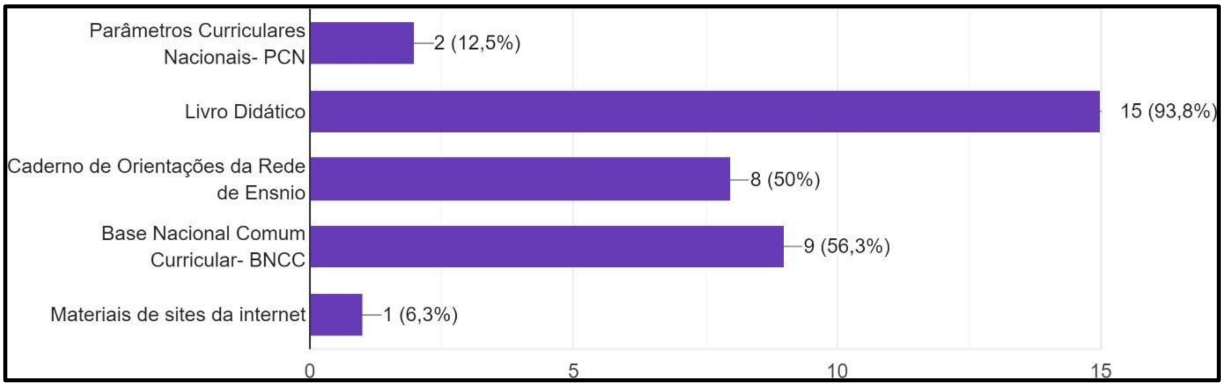
A maioria dos professores (62,5%) dedica entre 7 e 9 aulas para cobrir o conteúdo de trigonometria, enquanto 31,3% utilizam de 4 a 6 aulas. Em contrapartida, Gama (2020) observou em sua pesquisa que a maioria dos professores (83%) conclui o tema em apenas 4 aulas. Segundo o autor, muitos docentes priorizam a abrangência do conteúdo curricular em detrimento do aprofundamento em tópicos específicos.

De forma complementar, investigamos como os professores selecionam os conteúdos relacionados às funções seno e cosseno, incluindo materiais e documentos educacionais. O Gráfico 9 demonstra que a principal fonte de suporte é o livro didático, utilizado por 93,8% dos entrevistados, seguido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com 56,3%.

A BNCC tem se tornado um referencial cada vez mais presente na prática docente, influenciando inclusive a elaboração de currículos nas redes de ensino estaduais e municipais. O livro didático, outro recurso amplamente utilizado, também reflete a organização proposta pela BNCC.

A análise dos livros didáticos publicados entre 2016 e 2020 revela que o conteúdo de trigonometria é abordado com diversas propostas e sugestões para o professor, integrando recursos como a história da matemática e tecnologias digitais.

Gráfico 9 - Como os docentes selecionavam seus conteúdos



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

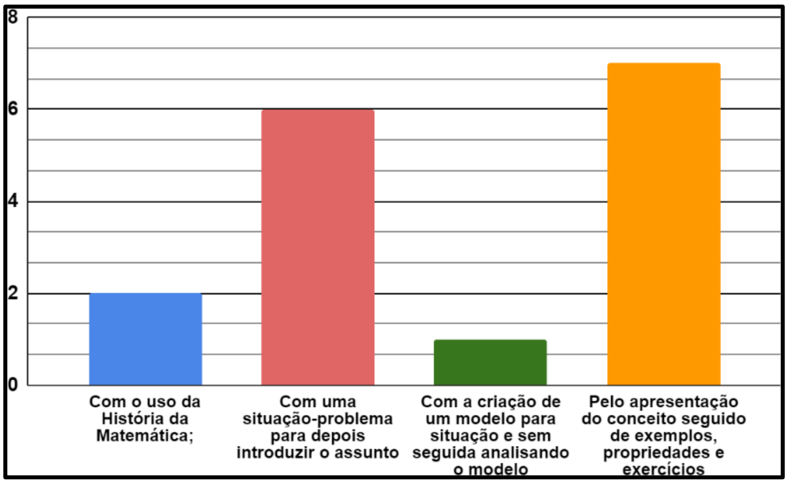
Em seguida, questionamos como eles iniciavam as aulas sobre o conteúdo relacionados às funções seno e cosseno.

Tabela 3 - Como você costuma ou costumava iniciar suas aulas sobre funções seno e cosseno?

Como você costuma ou costumava iniciar suas aulas sobre funções seno e cosseno	Professores em %
Pela apresentação do conceito seguido de exemplos, propriedades e exercícios	43,8%
Com o uso da História da Matemática	12,5%
Com uma situação-problema para depois introduzir o assunto	35,5%
Com a criação de um modelo para situação e em seguida analisando o modelo	6,3%
Com um experimento para chegar ao conceito	0,0%
Com o uso das TDIC: aplicativo, software, calculadoras, etc.	0,0%
Com o uso de jogos para depois sistematizar os conceitos.	0,0%

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Gráfico 10 - Como você costuma ou costumava iniciar suas aulas sobre funções seno e cosseno?



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A análise do Gráfico 10 revela que a maioria dos docentes (43,8%) inicia o ensino de um novo tópico seguindo a abordagem tradicional: apresentação do conceito, seguida de exemplos, propriedades e exercícios. O uso da história da matemática como ponto de partida é menos frequente (12,5%), enquanto a apresentação de uma situação-problema é utilizada por 35,5% dos professores.

Em comparação, um estudo de Correa (2016) indicou que 57% dos professores da Educação Básica iniciam o ensino de Funções Trigonométricas pela definição, seguida de exemplos e exercícios. Apenas 23% relataram utilizar uma situação-problema como introdução ao tema.

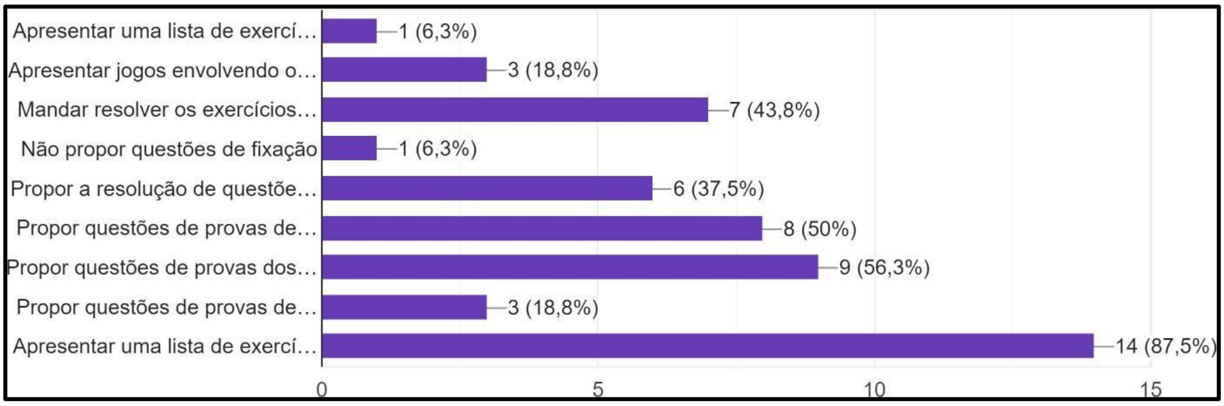
Esses dados sugerem que a maioria dos docentes tende a não empregar estratégias que favoreçam a visualização e a compreensão dos conceitos pelos estudantes. A predominância de abordagens tradicionais, que Orfão (2012) classifica como “tecnicistas”, pode não estimular o pensamento crítico e favorecer a memorização em detrimento da aprendizagem significativa. Quando questionados sobre as estratégias utilizadas para reforçar o conteúdo aprendido, os docentes forneceram os seguintes dados:

Quadro 9 - Para fixar o conteúdo de funções seno e cosseno, você costuma ou costumava

Ferramentas utilizadas para fixação do conteúdo
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
Apresentar jogos envolvendo o assunto
Mandar resolver os exercícios do livro
Não propor questões de fixação
Propor a resolução de questões por meio das tecnologias digitais (aplicativos, software, calculadoras, etc.)
Propor questões de provas de concursos públicos
Propor questões de provas de institutos federais
Propor questões de provas de escolas militares

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Gráfico 11 - Para fixar o conteúdo de funções seno e cosseno, você costuma ou costumava



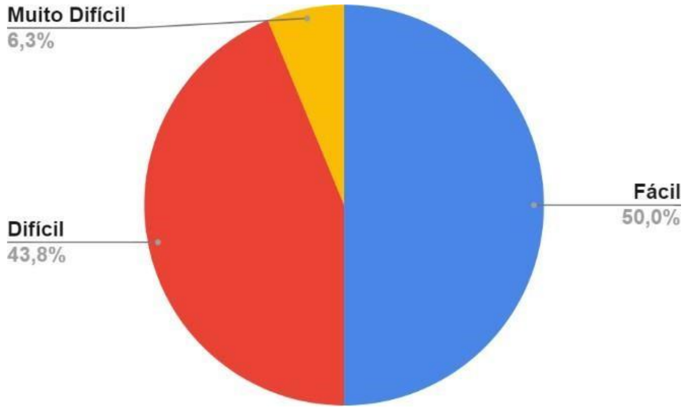
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Com base nos dados apresentados no Gráfico 11, a estratégia mais utilizada pelos docentes para consolidar o aprendizado de funções trigonométricas é a aplicação de listas de exercícios, representando 87,5% das respostas. Em seguida, figuram a resolução de questões de provas de institutos federais (56,3%) e de concursos públicos (50%).

Embora em menor escala (37,5%), alguns professores também empregam tecnologias como ferramentas para solucionar problemas relacionados ao conteúdo, utilizando recursos digitais para auxiliar na compreensão das funções seno e cosseno.

Além disso, a pesquisa investigou as dificuldades percebidas tanto pelos professores ao ensinar quanto pelos estudantes ao aprender as funções seno e cosseno. As respostas foram categorizadas em “Muito Fácil”, “Fácil”, “Difícil” e “Muito Difícil”, cujos resultados detalhados podem ser consultados nos gráficos subsequentes.

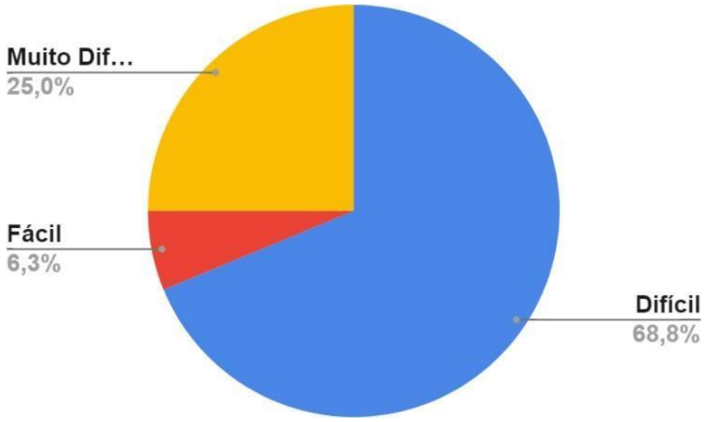
Gráfico 12 - Grau de dificuldades dos professores em ensinar função seno e cosseno



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

As opiniões dos professores sobre o ensino de funções seno e cosseno são bastante divididas: 50% consideram fácil, enquanto 43,8% relatam dificuldades.

Gráfico 13 - Dificuldade dos estudantes em aprender as funções seno e cosseno



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Conforme o Gráfico 13, a maioria dos docentes (68,8%) relata que os alunos demonstram dificuldades na compreensão das funções seno e cosseno, enquanto apenas 6,3% percebem facilidade no aprendizado. A seguir, apresentaremos uma tabela com base nos dados da pesquisa, detalhando os tópicos abordados nas aulas de funções seno e cosseno, bem como a percepção dos professores sobre o grau de dificuldade de cada tópico para os alunos.

Além de apresentar tópicos relacionados a essas duas funções, o material inclui duas perguntas direcionadas aos professores: **(1)** *"Com base em sua experiência como professor de Matemática, quais dos tópicos a seguir você costuma ou costumava abordar em suas aulas sobre funções seno e cosseno?"*; e **(2)** *"A partir de sua percepção docente, relacione os tópicos de funções seno e cosseno de acordo com o grau de dificuldade de aprendizagem apresentado pelos alunos.*"

Tabela 4 - Opiniões dos professores acerca das dificuldades de ensinar funções seno e cosseno

Conteúdo	Você costuma (costumava) ensinar (em números)		Grau de dificuldade para os alunos aprenderem (em números)			
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil
Ciclo trigonométrico	18	0	1	14	3	0
Definir função periódica	16	2	0	9	9	0
Definir função seno através do ciclo trigonométrico	17	1	0	6	10	2
Esboçar o gráfico da função seno de f(x)=sen(x)	18	0	0	3	14	1
Imagem da função seno de f(x)=sen(x)	18	0	0	7	11	0
Mostrar os sinais da função seno de f(x)=sen(x) nos quadrantes do ciclo trigonométrico	17	1	0	11	5	2
Definir período da função seno	18	0	0	10	6	2
Domínio da função seno	17	1	0	7	9	2
Imagem, domínio e período a partir do gráfico da função seno	17	1	0	5	12	1
Máximos e mínimos da função seno de f(x)=sen(x)	17	1	0	7	9	2
Função par e ímpar	13	5	0	10	6	2
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= a+b.sen(cx+d)	13	5	0	1	11	6

Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=sen(x) com o uso de software ou aplicativos de celular	12	6	0	4	12	2
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função seno	16	2	0	1	16	1
Definir função cosseno através do ciclo trigonométrico	18	0	0	5	12	1
Esboçar o gráfico da função cosseno de f(x)=cos(x)	18	0	0	4	13	1
Imagem da função cosseno de f(x)=cos(x)	18	0	0	8	10	0
Sinal da função cosseno nos quadrantes do ciclo trigonométrico	17	1	0	11	6	1
Domínio da função cosseno de f(x)=cos(x)	17	1	0	7	10	1
Máximos e mínimos da função cosseno de f(x)=cos(x)	17	1	0	0	6	2
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= a+b.cos(cx+d)	13	5	0	1	11	6
Imagem, domínio e período a partir do gráfico da função cosseno	17	1	0	4	12	2
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=cos(x) com o uso de software ou aplicativos de celular	13	5	0	4	11	3
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função cosseno	16	2	0	1	16	1

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A análise dos dados apresentados na Tabela 4 revela que a maioria dos docentes declara abordar todos os tópicos listados no questionário. Dentre eles, destacam-se os conteúdos “Ciclo trigonométrico”, “Definir as funções seno e cosseno por meio do ciclo trigonométrico” e “Imagem, domínio e período das funções seno e cosseno” — considerados fundamentais e indispensáveis para o ensino dessas funções aos alunos.

No que diz respeito às dificuldades de aprendizagem percebidas pelos professores, observou-se que, dos 24 tópicos relacionados às funções trigonométricas, 17 foram classificados como “difíceis” pelos docentes, enquanto os outros 7 foram atribuídos à categoria “fácil”.

Entre os tópicos considerados mais fáceis, a maioria dos professores indicou que os estudantes não costumam apresentar dificuldades em compreender o “Ciclo trigonométrico” (com 14 respostas, correspondendo a 77,8%) e “Mostrar os sinais da função seno $f(x) = sen(x)$ nos quadrantes do ciclo trigonométrico” (com 11 respostas, equivalentes a 61,11%).

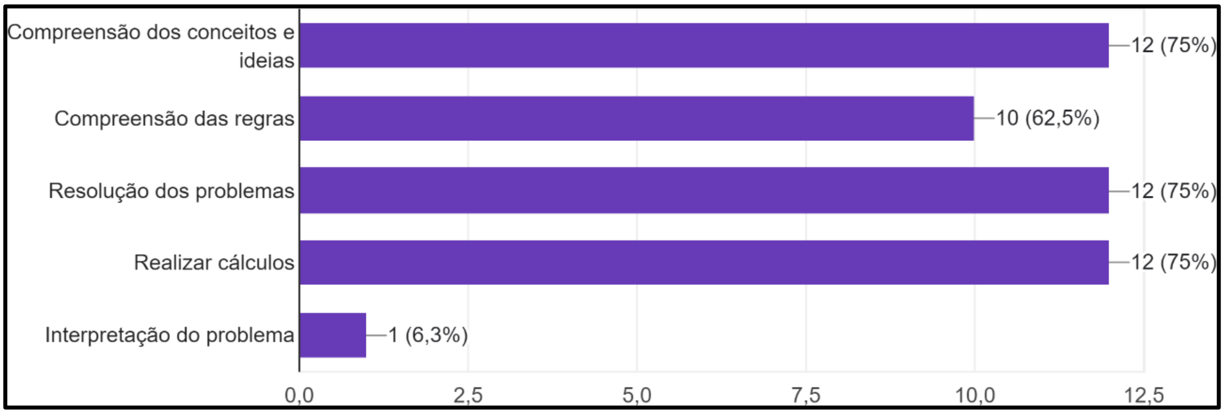
Por outro lado, entre os conteúdos avaliados como mais difíceis, destacam-se:

- “Construção do gráfico da função seno do tipo $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$”, indicado por 11 docentes (61,11%);
- “Resolver situações-problema que envolvam interpretações do gráfico da função cosseno”, apontado por 16 professores (88,9%).

Esses dados indicam que, segundo a percepção dos professores, as maiores dificuldades dos estudantes surgem especialmente a partir da introdução de análises gráficas e na resolução de situações-problema envolvendo as funções seno e cosseno na forma $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$ e $f(x) = A + Bcos(Cx + D)$.

Na última pergunta do questionário, solicitou-se aos docentes que indicassem quais eram, em sua percepção, as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao estudar o conteúdo de funções seno e cosseno. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Gráfico 14 - Quais as maiores dificuldades de seus alunos quando estudam funções seno e cosseno?



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Com base no Gráfico 14, onde os docentes indicaram as dificuldades mais comuns enfrentadas pelos alunos em sala de aula, observamos que as três principais áreas problemáticas são: “compreender os conceitos e ideias”, “resolução de problemas” e “realizar os cálculos”, cada uma delas apontada por 75% dos professores. Em contrapartida, a “interpretação do problema” não se apresenta como uma barreira significativa, sendo que os estudantes, segundo a percepção dos pesquisados, geralmente compreendem o enunciado das questões.

No entanto, como professor, afirmo que um dos principais desafios na interpretação de problemas matemáticos que envolvem funções trigonométricas está na compreensão do enunciado, que muitas vezes apresenta uma situação-problema contextualizada. A leitura exigi do estudante não apenas o conhecimento da fórmula ou das propriedades das funções seno e cosseno, mas também a habilidade de traduzir a linguagem verbal em uma linguagem matemática adequada.

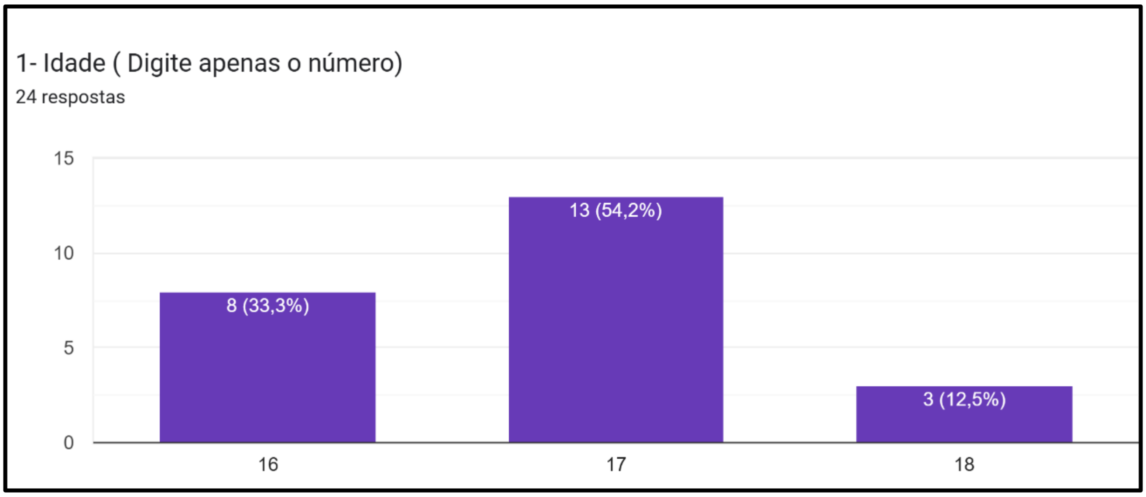
Além disso, funções como $f(x) = A + Bsen\,(Cx + D)$ ou $f(x) = A + Bcos\,(Cx + D)$ requer a compreensão de transformações (amplitude, período, fase, deslocamentos), o que demanda raciocínio abstrato e domínio de conceitos que nem sempre foram consolidados previamente.

3.7. Consulta discentes sobre o ensino e aprendizagem das Funções Seno e Cosseno

A presente seção aborda a percepção dos alunos do 3º ano do ensino médio de duas escolas públicas do Estado do Pará em relação ao ensino das funções seno e cosseno. No período de 12 a 27 de fevereiro de 2025, com o auxílio de um professor, aplicamos um teste de verificação para avaliar o domínio dos alunos sobre o conteúdo.

Dos 53 (cinquenta e três) estudantes que participaram do teste, 24 (vinte e quatro) responderam a um questionário online destinado a coletar informações sobre seu perfil. A primeira questão do questionário, direcionada à idade dos estudantes, foi utilizada na análise das informações coletadas sobre o ensino das funções trigonométricas.

Gráfico 15 - Idade dos estudantes



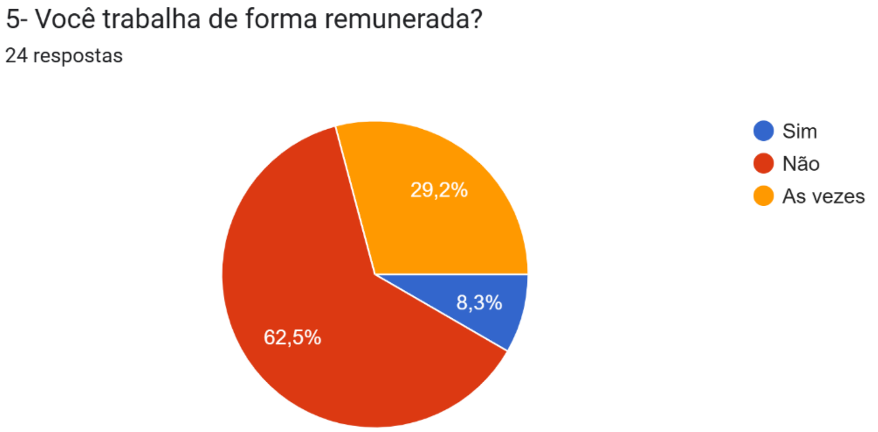
Fonte: Dados da pesquisa (2025)

A primeira questão solicitava que os estudantes informassem sua idade. Os resultados indicam que a faixa etária dos participantes varia entre 16 e 18 anos, o que está em consonância com os dados do Ministério da Educação. De acordo com o Plano Nacional de Educação (PNE), pesquisas realizadas em 2023 revelaram que 94,0% dos jovens entre 15 e 17 anos estão matriculados no Ensino Médio.

Quanto ao gênero, a amostra foi composta por 10 estudantes do sexo feminino (42%) e 14 do sexo masculino (58%). Todos os participantes cursam o 3º ano do Ensino Médio em escolas públicas.

Ao serem questionados sobre a realização de atividades remuneradas, observou-se que a maioria (62,5%, ou 15 estudantes) não trabalha. Uma parcela significativa (29,2%, ou 7 estudantes) trabalha ocasionalmente, enquanto uma minoria (8,3%, ou 2 estudantes) exerce atividades remuneradas de forma regular, conforme demonstrado no gráfico

Gráfico 16 - Atividade remunerada dos estudantes

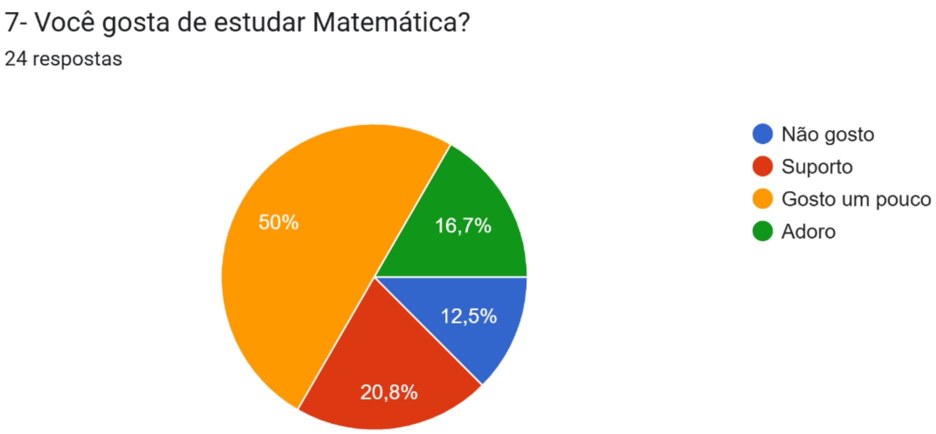


Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Questionados sobre terem repetido alguma disciplina no Ensino Médio, a maioria dos estudantes (91,7%, ou 22 estudantes) respondeu negativamente, enquanto uma pequena parcela (8,3%, ou 2 estudantes) afirmou ter repetido.

A questão seguinte investigou o interesse dos alunos em estudar Matemática, cujos resultados percentuais estão representados no gráfico a seguir.

Gráfico 17 - Gosta de estudar matemática?



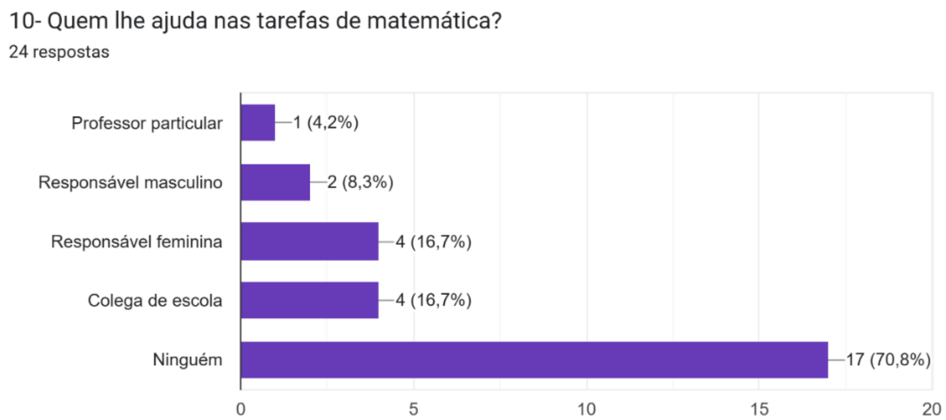
Fonte: Dados da Pesquisa (2025)

Os dados representados no Gráfico 17 indicam uma tendência geral de falta de entusiasmo em relação à disciplina de matemática entre os estudantes. A maioria (50%, correspondente a 12 estudantes) demonstra uma preferência moderada, relatando que gosta “um pouco” de estudar a matéria. Uma parcela considerável (20,8%, equivalente a 5 estudantes) manifesta aversão, afirmando que “não suporta” a disciplina. Apenas uma minoria aprecia a matemática, com 16,7% (4 estudantes) declarando que “adora” e 12,5% (3 estudantes) expressando “desgosto”.

Esses resultados sugerem que a falta de afinidade com a matemática pode estar relacionada à dificuldade em assimilar os conteúdos apresentados pelos professores.

A pergunta 10 teve como objetivo identificar as fontes de apoio que os estudantes utilizam para realizar as tarefas de matemática, permitindo a seleção de múltiplas alternativas. (Ver Gráfico 18)

Gráfico 18 - Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?



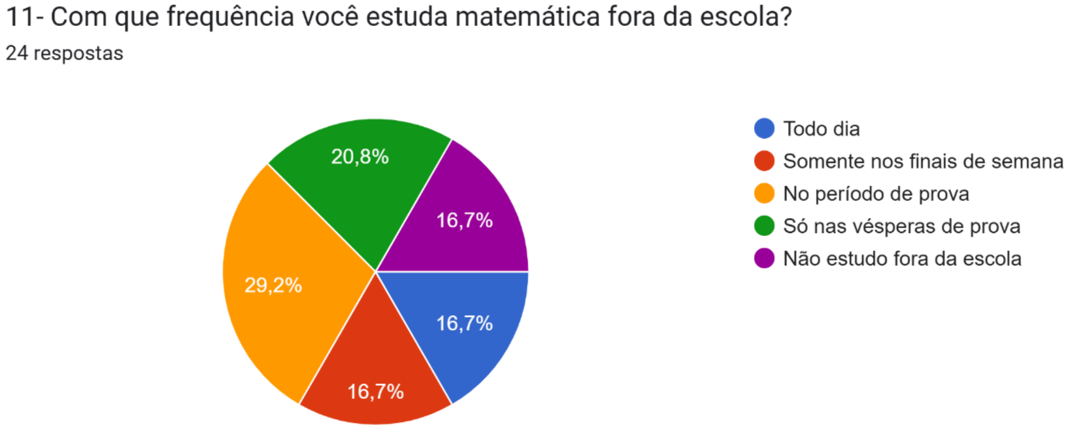
Fonte: Dados da pesquisa, 2025.

Com base nos dados coletados, observamos que a maioria dos estudantes (70,8%, correspondendo a 17 alunos) relata não receber ajuda para realizar as tarefas escolares. Quando recebem auxílio, este provém principalmente de colegas (16,7%, 4 alunos) ou da mãe/responsável feminina (16,7%, 4 alunos). Em menor frequência, o pai/responsável masculino (8,3%, 2 alunos) ou um professor particular (4,2%, 1 aluno) são os responsáveis pela ajuda.

A ausência de apoio nas tarefas de matemática, combinada com a possível falta de incentivo familiar aos estudos, pode estar relacionada a um baixo rendimento escolar e à diminuição do interesse pela disciplina.

Quanto à frequência com que os estudantes estudam matemática fora da escola (pergunta 11), os resultados indicam que: 29,2% (7 estudantes) estudam apenas no período de provas; 20,8% (5 estudantes) nas vésperas das provas; 16,7% (4 estudantes) não estudam; 16,7% (4 alunos) estudam somente nos finais de semana; e 16,7% (4 alunos) estudam diariamente.

Gráfico 19 - Frequência de estudo fora da escola

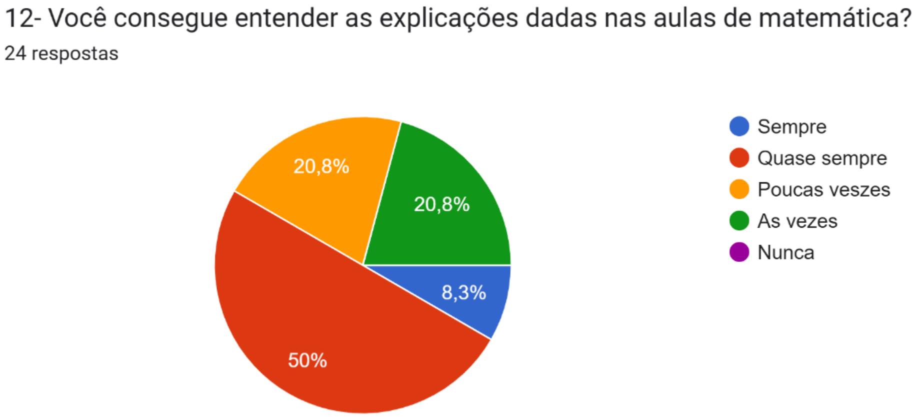


Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Os dados indicam que o hábito de estudo em matemática é baixo entre os estudantes, o que sugere uma possível falta de incentivo por parte dos seus responsáveis, conforme demonstrado no gráfico anterior.

A análise seguinte investigou, na percepção dos estudantes, a forma como os professores abordam o conteúdo de funções seno e cosseno. Na questão 12, questionamos os alunos sobre a clareza das explicações dos professores nas aulas de matemática. Os percentuais obtidos foram os seguintes:

Gráfico 20 - Entendimento dos estudantes nas aulas de matemática

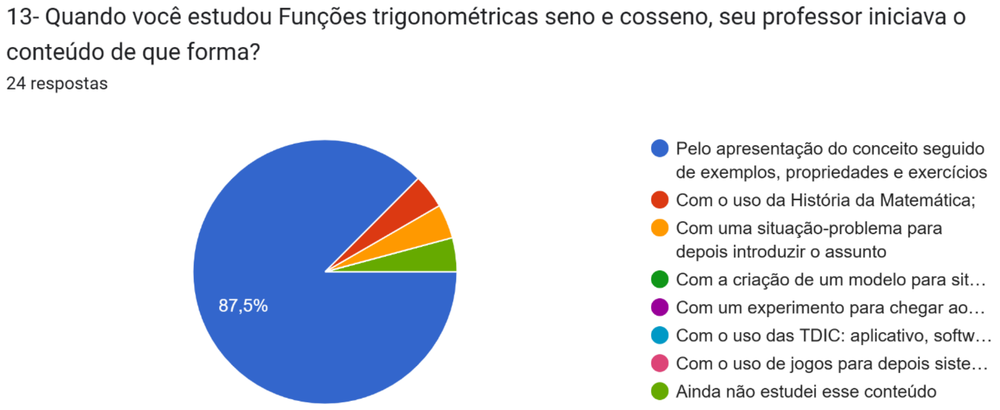


Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Com base nos dados do Gráfico 20, a compreensão das explicações do professor pelos estudantes apresenta a seguinte distribuição: 2 estudantes (8,3%) compreendem as explicações integralmente, 5 (20,8%) as compreendem às vezes, 5 (20,8%) as compreendem raramente e 12 (50%) as compreendem quase sempre. Estes resultados sugerem que uma parcela significativa dos estudantes encontra dificuldades em compreender plenamente os conteúdos apresentados. Essa dificuldade pode estar relacionada à abordagem utilizada pelos professores, bem como aos métodos e instrumentos educacionais empregados.

A pergunta subsequente, de número 13, investiga a forma como o professor de matemática introduz o conteúdo de funções trigonométricas seno e cosseno. Os resultados gráficos referentes a essa pergunta são apresentados a seguir:

Gráfico 21 - Abordagem dos professores nas aulas das funções seno e cosseno



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

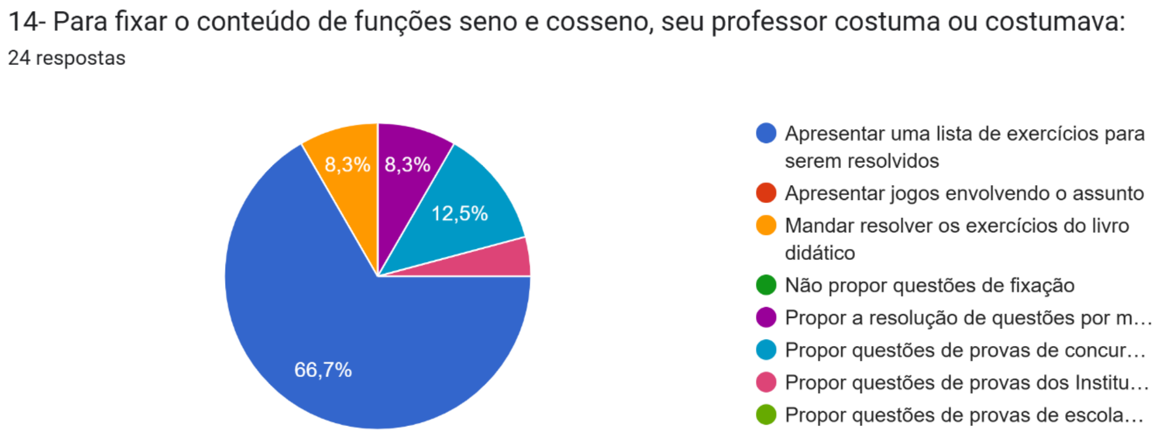
Os dados revelam que 21 estudantes (87,5%) afirmam que seus professores costumam iniciar o conteúdo de funções seno e cosseno por meio da apresentação do conceito, seguida de exemplos, explicação de propriedades e resolução de exercícios. Essa abordagem corresponde a uma prática típica do ensino tradicional, centrado na transmissão direta do conteúdo.

Outras estratégias foram pouco utilizadas, como o uso da História da Matemática ou a introdução do tema a partir de uma situação-problema. Além disso, nenhum estudante indicou o uso de jogos educacionais, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), ou atividades experimentais como recursos adotados em sala de aula.

Essa tendência se confirma nos dados obtidos a partir do questionário aplicado aos professores. Quando questionados sobre como costumam iniciar o ensino das funções seno e cosseno, 43,8% afirmaram adotar a abordagem tradicional (apresentação do conceito, seguida de exemplos, propriedades e exercícios). Nenhum dos professores (0%) relatou utilizar as TDIC, jogos ou experimentos como estratégia inicial para esse conteúdo.

Na Pergunta 14 do questionário, buscou-se compreender quais estratégias os professores utilizam para fixar o conteúdo de funções seno e cosseno. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Gráfico 22 - Fixação do conteúdo das funções seno e cosseno



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Na referida pergunta, constatou-se que 16 estudantes (66,7%) responderam que seus professores utilizam listas de exercícios como principal estratégia para fixação do conteúdo. Outros 3 estudantes (12,5%) afirmaram que são utilizadas questões de concursos públicos, enquanto 2 (8,3%) mencionaram o uso de questões do livro didático. Ainda, 2 estudantes (8,3%) relataram que são propostas atividades com o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

Os dados obtidos com os professores corroboram essa tendência: a maioria dos docentes (87,5%) indicou utilizar listas de exercícios como principal recurso para reforçar a aprendizagem das funções trigonométricas.

Na última pergunta do questionário, buscou-se verificar quais tópicos os estudantes consideram “Muito Fácil”, “Fácil”, “Difícil” ou “Muito Difícil” ao estudarem os conteúdos relacionados às funções seno e cosseno. A tabela a seguir apresenta os dados obtidos para cada conteúdo abordado

Tabela 5 - Grau de dificuldade dos estudantes quando estudam as funções seno e cosseno

Conteúdo	**Grau de dificuldade que você tem quando estuda os seguintes tópicos de funções seno e cosseno (em números)**				
	Não estudei	**Muito fácil**	**Fácil**	**Difícil**	**Muito Difícil**
Ciclo trigonométrico	3	1	8	11	1
Definir função periódica	5	2	6	9	2
Definir função seno através do ciclo trigonométrico	3	1	9	10	1
Esboçar o gráfico da função seno de f(x)=sen(x)	0	3	10	8	3
Imagem da função seno de f(x)=sen(x)	0	2	12	8	3
Sinais da função seno de f(x)=sen(x) nos quadrantes do ciclo trigonométrico	0	4	8	10	2
Período da função seno	0	3	12	6	3
Domínio da função seno	2	1	8	10	3
Máximos e mínimos da função seno de f(x)=sen(x)	3	1	8	10	2
Função par e ímpar	3	2	8	9	2
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= B.sen(x)	2	0	12	8	2

Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= B.sen(Cx)	3	0	7	11	3
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= A + B.sen(Cx)	2	1	8	10	3
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= A+B.sen(Cx+D)	3	0	7	12	2
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=sen(x) com o uso de software ou aplicativos de celular	4	0	5	12	3
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função seno	3	1	7	11	2
Definir função cosseno através do ciclo trigonométrico	3	1	8	9	3
Esboçar o gráfico da função cosseno de f(x)=cos(x)	3	0	11	7	3
Imagem da função cosseno de f(x)=cos(x)	3	0	9	9	3
Sinal da função cosseno nos quadrantes do ciclo trigonométrico	1	1	10	8	4
Domínio da função cosseno de f(x)=cos(x)	1	2	10	8	3
Máximos e mínimos da função cosseno de f(x)=cos(x)	1	3	6	10	4
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= B.cos(x)	1	2	6	11	4
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(x)	3	1	4	12	4
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(cx)	4	0	5	11	4
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(Cx+D)	4	1	6	11	3
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=cos(x) com o uso de software ou aplicativos de celular	4	1	7	8	5

Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função cosseno	3	0	8	9	4

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Os resultados indicaram que a maioria dos estudantes teve contato com os principais tópicos relacionados às funções seno e cosseno. Entre os conteúdos classificados como “Muito Fácil”, destacam-se os sinais, valores máximos e mínimos das funções Seno e Cosseno apontados com maior frequência pelos participantes.

Na categoria “Fácil”, os tópicos mais mencionados foram o ciclo trigonométrico e a atividade de esboçar os gráficos das funções básicas $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = cos\,(x)$ o que demonstra certa familiaridade dos estudantes com as representações mais simples dessas funções.

Por outro lado, a categoria “Difícil” apresentou resultados mais expressivos. Os tópicos que mais concentraram respostas nessa classificação foram a construção de gráficos das funções com parâmetros, como $f(x) = A + Bsen(Cx + D)$ e $f(x) = A + Bcos\,(Cx + D)$. Esse dado evidencia que a dificuldade aumenta à medida que novos parâmetros são inseridos nas expressões, exigindo maior compreensão das transformações na função trigonométrica.

Um ponto relevante foi o destaque ao tópico “Resolver problemas envolvendo funções seno e cosseno com o uso de softwares ou aplicativos de celular”, com o objetivo de analisar o uso de tecnologias no processo de aprendizagem. Os dados mostraram que 4 estudantes afirmaram nunca ter utilizado ferramentas digitais, enquanto 20 relataram algum tipo de uso. No entanto, observa-se um possível conflito nos resultados: embora a maioria declare já ter utilizado recursos tecnológicos, muitos também afirmam que os professores iniciam suas aulas com uma abordagem tradicional — apresentação do conceito, seguida de exemplos, propriedades e listas de exercícios.

Essa discrepância pode indicar um equívoco na interpretação da pergunta por parte dos estudantes. É possível que apenas 2 dos 20 estudantes realmente tenham utilizado aplicativos ou softwares em sala, enquanto os demais tenham respondido com base em uma expectativa ou desejo de uso futuro dessas ferramentas, e não em uma experiência concreta.

Por fim, na categoria “Muito Difícil”, os tópicos mais mencionados foram:

- Resolver problemas com o uso de tecnologias digitais;
- Resolver situações-problema que envolvam a interpretação de gráficos das funções seno e cosseno.

Esses resultados reforçam a necessidade de estratégias pedagógicas mais diversificadas, que promovam maior familiaridade dos alunos com o uso de tecnologias e com a interpretação de representações gráficas em contextos aplicados.

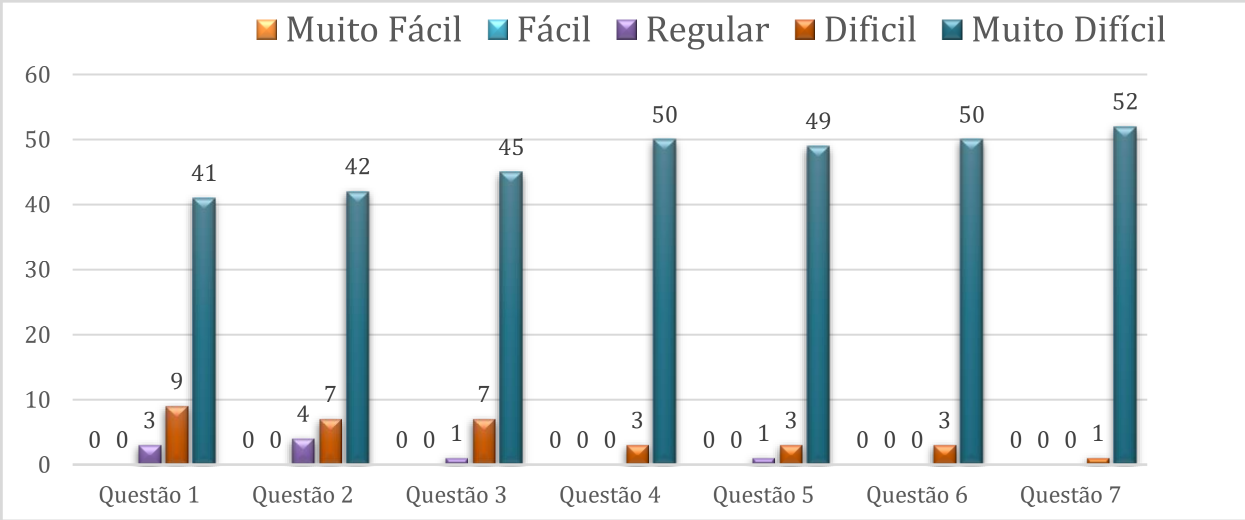
Para verificar a compreensão do conteúdo, propusemos um teste com 7 questões. Após responder a cada questão, o estudante deveria avaliar seu nível de dificuldade, escolhendo entre as opções: Muito Fácil, Fácil, Regular, Difícil ou Muito Difícil.

A primeira questão solicitava o preenchimento de uma tabela relacionada ao ciclo trigonométrico, com a determinação dos valores em graus e radianos, bem como o seno e o cosseno de cada arco. A segunda questão consistia em ordenar, de forma crescente, os arcos em radianos. A terceira questão (adaptada do Enem – 2021) envolvia a identificação de uma expressão trigonométrica a partir de um gráfico, seguida da determinação do domínio, imagem, período, valor máximo e valor mínimo da função.

Nas questões 4, 6 e 7, os estudantes precisavam construir ou identificar gráficos de funções trigonométricas. A questão 4 solicitava a construção do gráfico de uma função seno do tipo $f(x) = 3 + 2sen(\frac{\pi}{6}\ t)$. Na questão 6, era necessário construir o gráfico de uma função cosseno do tipo $f(x) = 2\,cos(\frac{\pi}{2}\ t + \frac{\pi}{4})$ e, em seguida, determinar sua imagem. A questão 7 exigia a identificação do gráfico correspondente à expressão $y = 10sen(\frac{\pi}{3}\ t)$. A questão 5, adaptada da UFRGS-RS, desafiava os alunos a encontrar os valores dos parâmetros 'a' e 'b' na expressão $f(x) = a + bsen(x)$ a partir da análise do gráfico fornecido.

A análise das respostas dos 53 estudantes revelou que a maioria considerou todas as questões “Muito Difíceis”. As questões 1 e 2 foram as que apresentaram o maior número de resoluções corretas. Para resolvê-las, os alunos recorreram à memorização dos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) e dos valores de seno e cosseno, utilizando, inclusive, o auxílio de músicas. Principais mudanças e justificativas:

Gráfico 23 - Nível de dificuldade de cada questão de acordo com os estudantes



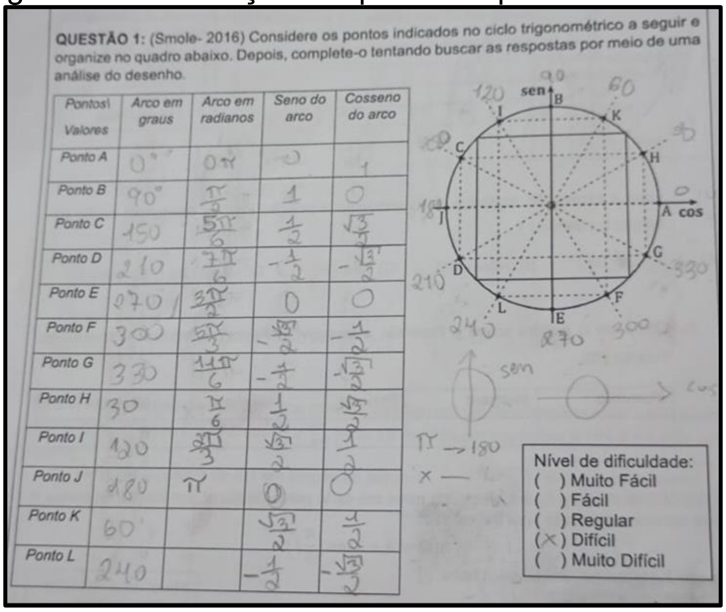
Fonte: Pesquisa de campo (2025)

No Gráfico 23, observa-se que as categorias “Muito Fácil” e “Fácil” não foram mencionadas pelos estudantes na contagem de respostas. Também é possível perceber um aumento gradual no nível de dificuldade a partir da questão 4 até a questão 7, o que sugere que os alunos enfrentam maiores desafios à medida que o conteúdo se torna mais complexo.

Essas dificuldades parecem estar relacionadas, principalmente, à interpretação de gráficos das funções seno e cosseno, bem como à manipulação algébrica necessária para resolver sistemas envolvendo essas funções. Tais aspectos exigem maior abstração e domínio de diferentes representações matemáticas, o que pode justificar o aumento nas respostas que classificam esses itens como “Difícil” ou “Muito Difícil”.

A partir dessas análises, a interpretação de problemas e a manipulação algébrica são dois dos principais desafios enfrentados pelos estudantes do ensino médio em Matemática. A dificuldade em compreender o enunciado, identificar dados relevantes e escolher estratégias adequadas compromete a aplicação do conhecimento, mesmo quando os conteúdos são conhecidos. Somado a isso, a fragilidade na base algébrica e o ensino muitas vezes descontextualizado levam os alunos a aplicar procedimentos de forma mecânica, dificultando a resolução de questões mais complexas e interdisciplinar.

Figura 36 - Resolução da questão 1 por um estudante

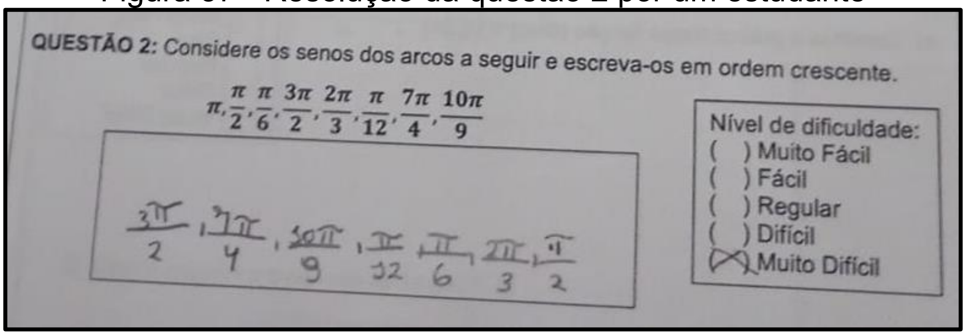


Fonte: Pesquisa de campo (2025)

Na questão 1 (Figura 36), observa-se que este estudante demonstrou compreensão sólida dos conceitos fundamentais relacionados a ângulos em graus e radianos, além de habilidade na conversão entre essas unidades por meio de uma estratégia matemática adequada (regra de três simples). A correção na maioria dos cálculos de seno e cosseno indica que ele possui uma base bem construída em trigonometria, provavelmente adquirida em etapas anteriores da aprendizagem.

Ele foi um dos poucos estudantes a completar a tabela, enquanto que a maioria de seus colegas encontrou dificuldades na mesma atividade, o que evidencia a importância de reforçar os conteúdos básicos com os demais estudantes.

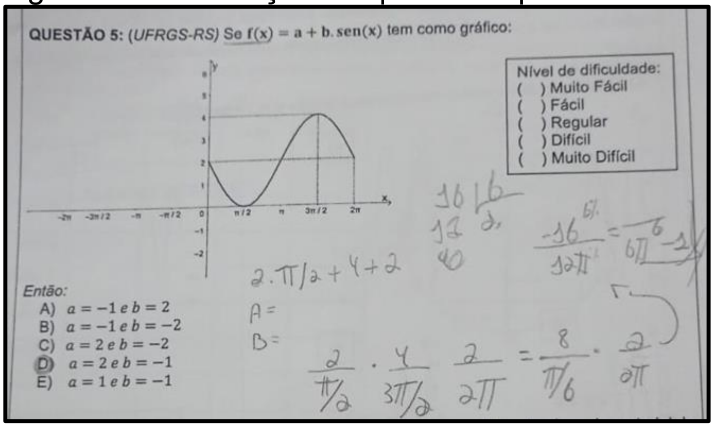
Figura 37 - Resolução da questão 2 por um estudante



Fonte: Pesquisa de campo (2025)

A classificação da questão 2 como “Muito Difícil”, mesmo com a resposta correta, revela uma insegurança no domínio do conteúdo e uma percepção limitada da própria competência. O estudante demonstrou dificuldade em acessar informações memorizadas, como os valores do seno, e só avançou após consultar a tabela. Isso indica dependência de apoio externo e baixa confiança no processo de resolução. Situações assim evidenciam a necessidade de práticas pedagógicas que valorizem o raciocínio, a autonomia e o esforço, não apenas o acerto.

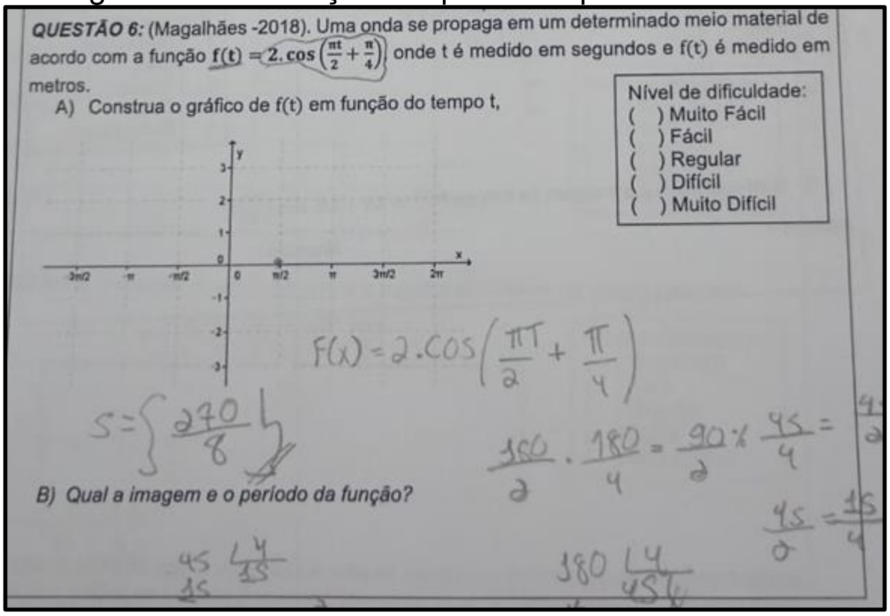
Figura 38 - Resolução da questão 5 por estudante



Fonte: Pesquisa de campo (2025)

Na questão 5 (Figura 38), observa-se que o estudante tentou, de alguma forma, obter um resultado que se aproximasse do gráfico apresentado. No entanto, seus cálculos estão bastante confusos, o que gera preocupação quanto à sua compreensão do conteúdo. A confusão nos cálculos indica dificuldades na organização e no domínio dos procedimentos matemáticos. Apesar disso, ele foi um dos poucos alunos que fez um esboço para tentar relacionar os parâmetros da função. Contudo, ao final, acabou selecionando a alternativa incorreta.

Figura 39 - Resolução da questão 6 por um estudante



Fonte: pesquisa de campo, 2025

Na questão 6 (Figura 39), observa-se que o estudante não conseguiu representar corretamente o gráfico da função cosseno. Além disso, tentou identificar a imagem e o período da função, porém sem sucesso. Seus cálculos se apresentam de forma vaga e desorganizada, sem um raciocínio claro ou direcionamento que conduzisse a uma resolução adequada da questão.

3.8. Tendências da Educação Matemática

Após apresentar a metodologia da Engenharia Didática, que orientará nossa aplicação, e os principais conceitos matemáticos relacionados às funções trigonométricas, este tópico abordará algumas Tendências da Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, o Ensino por Atividades e o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Essas abordagens visam proporcionar aos estudantes um ambiente de aprendizagem no qual possam testar hipóteses, levantar questionamentos, explorar a curiosidade e utilizar a criatividade na resolução de situações-problema.

Essas tendências são fundamentais para tornar o ensino de Matemática mais significativo e contextualizado. Elas favorecem a autonomia dos estudantes, incentivam a reflexão sobre os próprios processos de aprendizagem e ampliam a conexão entre os conteúdos escolares e o cotidiano. No contexto do ensino de funções trigonométricas, tais estratégias contribuem para superar a abordagem puramente mecânica, favorecendo uma compreensão mais profunda e integrada dos conceitos.

3.8.1. Resolução de Problemas

Durante meu período de atuação como professor de Matemática, tive a oportunidade de realizar uma atividade reflexiva com duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, na escola onde leciono. Em uma aula sobre expressões algébricas aplicadas a figuras planas, propus aos alunos uma breve investigação sobre o que compreendem por "resolver problemas". Perguntei: *"Para você, o que significa resolver problemas?"*. As respostas mais recorrentes foram:

—"É quando fazemos os cálculos dos exercícios que estão no quadro";
—"É quando encontramos a resposta certa da questão";
—"É o cálculo de soma e multiplicação."

Na sequência, questionei: *"O que é um problema?"*, e as respostas incluíram:

—"É alguma situação ruim";
—"Seria uma atividade que o professor escreve no quadro";
—"É quando uma pessoa tenta ajudar o amigo".

Por fim, perguntei: *"Quando vocês estão diante de um problema, já sabem como resolver?"*. A maioria respondeu que "Não". Ao perguntar *"O que precisa ser feito, então?"*, alguns estudantes afirmaram:

— "Temos que achar um jeito para encontrar a solução".

Iniciei este relato justamente para ilustrar uma percepção comum entre os estudantes: resolver um problema, para muitos, ainda está diretamente associado apenas à execução de cálculos ou à aplicação mecânica de procedimentos ensinados em sala de aula. A expressão "resolver problemas" é, muitas vezes, interpretada como sinônimo de "obter uma resposta", sem necessariamente envolver análise, estratégia ou compreensão do contexto proposto. Esse entendimento limitado reforça a importância de promover abordagens pedagógicas que desenvolvam o pensamento crítico, a autonomia e a construção de significado no processo de resolução de problemas matemáticos

Sá (2021, p. 6) levanta questões fundamentais sobre a resolução de problemas: “O que significa, de fato, resolução de problemas?”, “Qual a distinção entre problema, exercício e questão?” e “Como a resolução de problemas pode ser aplicada no contexto da sala de aula?”.

Para o autor, um “problema” surge quando o indivíduo envolvido não possui um método imediato ou conhecido para alcançar a solução. Em contrapartida, um “exercício” caracteriza-se pela existência de um “procedimento que conduz à solução e que é praticado para assegurar a proficiência em seu desenvolvimento” (SÁ, 2021, p. 13)

Sá (2021) ainda explica que problema está:

> associada a uma situação que uma pessoa ou um grupo de pessoas se sentem incomodados e buscam encontrar uma maneia de superar a situação estabelecida e não conhecem como alcançar o resultado desejado. Desse modo, uma dada questão poderá ser um problema para uma pessoa ou grupo de pessoas e não ser um problema para as pessoas que não se sentem incomodados com a situação ou não desejem encontrar uma solução para a mesma (SÀ, 2021, p. 13).

Identificamos em Gil (2008) que “problema” é entendido como uma questão difícil de explicar ou resolver, além do mais:

> Uma acepção bastante corrente identifica problema com questão que dá margem a hesitação ou perplexidade, por difícil de explicar ou resolver. Outra acepção identifica problema com algo que provoca desequilíbrio, mal-estar, sofrimento ou constrangimento às pessoas. Contudo, na acepção científica, problema é qualquer questão não solvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento (GIL, 2008, p. 33).

Observamos nos trechos de Sá (2021) e de Gil (2008) que o conceito de problema não se limita a uma definição única, mas assume diferentes significados conforme o contexto em que é empregado. Em termos gerais, um problema surge quando há uma situação de desconforto, dúvida ou desequilíbrio, que mobiliza uma pessoa ou um grupo a buscar uma solução. Assim, o problema não está apenas na situação em si, mas na relação que o sujeito estabelece com ela — ou seja, aquilo que é problema para uns pode não ser para outros.

Assim, o que realmente significa “resolução de problemas?” Na BNCC (2018), o termo foi ampliado para “Resolver e Elaborar Problemas”, substituindo a expressão anterior “Resolver Problemas”. Essa mudança não é apenas semântica, mas conceitual: a elaboração implica que os estudantes não se limitem a encontrar uma resposta, mas também a refletir sobre estratégias, modificar condições, questionar cenários e formular novos problemas relacionados aos conceitos estudados

Essa abordagem valoriza o pensamento crítico e a autonomia, incentivando os alunos a aprofundar sua compreensão e a desenvolver habilidades de argumentação e modelagem matemática. Assim, resolver um problema deixa de ser apenas aplicar um procedimento aprendido para se tornar uma atividade criativa e investigativa. O termo ampliado aprofunda o significado dado à resolução de problemas, em que:

> a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018, p. 536).

O documento ainda destaca que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes caminhos variados e facilitadoras de aprendizagens que estimulam a raciocinar logicamente, elaborar e experimentar hipóteses, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

No PCNEM (2006) coloca uma situação real de Física para explicar o que é resolução de problemas:

> na solução de um dado problema em que é apenas solicitado o cálculo da distância percorrida por um corpo com desaceleração constante, e de um outro em que se solicita a análise das conseqüências de altas velocidades de veículos. Embora nessas duas situações a solução do problema exija o mesmo instrumental matemático, a própria estratégia para a resolução de problemas é também diferente. Enquanto na primeira trata-se de associar os elementos do enunciado a uma equação matemática, **já na segunda são necessários a identificação da situação-problema, o levantamento de hipóteses, a escolha de caminhos para a solução, além da análise dos resultados, principalmente no que diz respeito à sua coerência com o que o aluno conhece da realidade** (BRASIL, 2006, p. 85 grifo meu).

Essa situação demonstra que nem todo problema matemático tem o mesmo valor formativo. Resolver apenas problemas de aplicação direta reforça o automatismo e a memorização; por outro lado, enfrentar problemas contextualizados estimula a autonomia intelectual, o raciocínio crítico e a integração entre teoria e prática.

O documento da BNCC (2018) estabelece que a resolução de problemas ocupa posição central no ensino de Matemática, ao afirmar que *“o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios”*.

Polya (1995), em seu prefácio ao clássico *A Arte de Resolver Problemas*, afirma que quando um indivíduo utiliza seus próprios meios para encontrar soluções, experimenta “tensão e triunfo” ao descobrir o resultado. Esse processo satisfatório pode despertar um gosto duradouro pelo pensamento mental ativo.

No contexto de sala de aula, compete ao professor estimular a curiosidade dos estudantes por meio de situações-problema contextualizadas, conectadas aos seus conhecimentos prévios. Embora exercícios tradicionais com comando como “calcule…”, “determine…” e “resolva…” permaneçam importantes para a aplicação de métodos e consolidação de propriedades, eles não devem ocupar o centro da abordagem pedagógica.

Esses exercícios servem ao aprendizado procedural, mas é fundamental conciliá-los com atividades investigativas que desenvolvam pensamento crítico, reflexão e autonomia, em consonância com a orientação da BNCC de promover a capacidade de elaborar e resolver problemas.

Conforme Onuchic (1999), o ensino da resolução de problemas em matemática começou a ser reformulado de maneira mais estruturada durante o movimento “Matemática Moderna” nas décadas de 60 e 70, influenciado pelos trabalhos de George Polya. Essa reforma baseava-se em estruturas lógicas, algébricas, topológicas e de ordem.

A necessidade dessa mudança se justificava pelo ensino de matemática no Brasil, ainda caracterizado por altos índices de retenção, formalização precoce de conceitos e uma ênfase excessiva no treinamento de habilidades e na mecanização de processos, em detrimento da compreensão dos conceitos. De acordo com Onuchic (1999) a resolução de problemas é:

> a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos preciso e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade (ONUCHIC 1999, p. 203).

Tradicionalmente, o ensino de matemática focava na memorização de fatos e na repetição de procedimentos algorítmicos. Hoje, a tendência é valorizar o aluno como participante ativo na construção do conhecimento. Problemas bem definidos são usados como instrumentos para desenvolver raciocínio, reflexão e argumentação. A resolução de problemas é vista como uma atividade complexa que envolve múltiplas habilidades cognitiva

No início do século XX, o ensino de matemática era frequentemente baseado na repetição e memorização de informações básicas, como as tabuadas. O modelo pedagógico consistia na transmissão de conhecimento pelo professor, seguido da transcrição, memorização e reprodução pelo aluno. Embora as atividades em sala de aula pudessem indicar compreensão superficial do conteúdo, poucos alunos demonstravam a capacidade de pensar criticamente e resolver problemas de maneiras diversas. Surpreendentemente, essa dinâmica encontra paralelo no contexto educacional do século XXI.

Alinhando-nos com Onuchic (1999), defendemos que o ensino e a aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas estimulam os alunos a estabelecer conexões entre a matemática e outros contextos, extrapolando a mera manipulação de números.

> o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema (ONUCHIC, 1999, p. 208).

Em nossa pesquisa, investigamos a abordagem da trigonometria em livros didáticos, com foco na distribuição de exercícios e problemas. No subtópico 3.3, dedicado à análise de livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio, notamos uma escassez de exercícios resolvidos na seção sobre funções trigonométricas. Em seguida, os livros propunham exercícios similares, que poderiam ser resolvidos aplicando as estratégias demonstradas nos exemplos. Essa observação foi feita nos livros de Paiva (2010) e Longen (2016).

Quanto à distinção entre exercícios e problemas, seguimos a perspectiva de Sá (2021), que argumenta que a classificação depende da experiência do estudante: se a questão apresenta dificuldades e exige raciocínio, assemelha-se a um problema;

se a solução é encontrada com facilidade, assume as características de um exercício. E para garantir isso é:

> necessário avaliar o material trabalhado em sala antes da proposição do exame. Se todas as questões propostas forem similares as questões trabalhadas em sala há grande chance das mesmas já terem se tornado exercícios para os alunos. Do contrário há grande chance das questões serem problemas para os estudantes avaliados (SÁ, 2021, p. 15).

Neste cenário, buscamos articular situações-problema envolvendo funções trigonométricas com aplicações em Física, com o objetivo de evitar a abordagem exclusiva centrada no cálculo algébrico de identidades e equações. Ao priorizar aspectos como a análise de gráficos, medições de distâncias inacessíveis e fenômenos periódicos, proporcionamos um ensino mais significativo e contextualizado.

Essa proposta alinha-se às melhores práticas da educação interdisciplinar, que integra conhecimentos de diferentes áreas para enriquecer a aprendizagem e tornar os conteúdos mais relevantes para os estudantes. Essa abordagem está em consonância com pesquisas que indicam impacto positivo do uso de tecnologias interativas (por exemplo, simulações GeoGebra) na compreensão das transformações trigonométricas.

3.8.2. Ensino por Atividades experimentais

Apresentaremos, nesta seção, a abordagem do ensino de Matemática por atividades, que emergiu da Teoria da Atividade (TA). Formulada inicialmente por Vygotsky e posteriormente desenvolvida por Leontiev, essa teoria influenciou a concepção do ensino por atividades. Sá (2019) aponta que, na abordagem tradicional predominante na década de 1980, o ensino por atividades não proporcionava ao estudante um papel ativo no processo de ensino, aprendizagem e avaliação.

Corrêa (2016, p. 62) define o "Ensino por Atividades" como uma aplicação prática do Método da Descoberta, que surgiu no final do século XIX e teve ampla difusão no ensino de Matemática durante a década de 1980.

Neste contexto, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre a tendência metodológica do ensino de Matemática por atividades experimentais, fundamentada nos trabalhos de Sá, Mafra e Fossa (2022), Sá (2020, 2019), Piccolo (2012) e Corrêa (2016). Sá, Mafra e Fossa (2022) propõem atividades experimentais no ensino de Matemática que podem orientar o aprendizado por meio de uma sequência de etapas, nas quais diversos conceitos matemáticos são abordados.

Os autores defendem que o ensino por atividades é mais eficaz quando "implementado em situações sociais que proporcionam uma real possibilidade de discussões propositivas, visando a elaboração final de um dado conceito matemático" (SÁ; MAFRA; FOSSA, 2022, p. 2). Para que isso ocorra, é fundamental que o professor organize um ambiente investigativo, estimulando as ações exploratórias do aprendiz.

Nessa linha, a BNCC (2018) destaca a importância de construir uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade do aprendiz, em diferentes contextos, afirmando que:

> [...] é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (BRASIL, 2018, p. 526).

Dessa forma, percebemos que necessitamos investir mais na maneira de como ensinar Matemática, criando meios de ensino e aprendizagem que incentive o aluno a constituir sua rede de conhecimentos matemáticos.

De acordo com Moreira; Pedrosa; Pontelo (2011) o início da Teoria da Atividade (TA) surgiu nas pesquisas e nas elaborações teóricas de Vygotsky (1978) e colaboradores e no contexto inicial do socialismo soviético, a partir do final da segunda década do século XX.

> o ensino por atividades se propõe a instigar o aluno a chegar ao conceito a ser estudado, e isso se dá por meio de sua própria ação durante a execução de atividades relacionadas a um conteúdo matemático, de forma que o mesmo se faça mais presente no momento da aprendizagem, ou seja, o aluno é a peça principal neste processo chamado de experimentação, a qual se faz em várias etapas seguindo os objetivos de aprendizagem que se desejam alcançar (CORRÊA, 2016, p. 22).

Considerando a necessidade de metodologias de ensino de matemática que incentivem a participação ativa do aluno e conectem o conhecimento abstrato à prática real, estudiosos da aprendizagem, como Sá (99, p. 78), defendem o método da descoberta como uma alternativa promissora. Sá (99, p.8) associa esse método ao método científico, destacando seu potencial para desenvolver habilidades como observação, análise e conclusão.

O método da descoberta possui três técnicas básicas: redescoberta, resolução de problemas e desenvolvimento de projetos, técnicas concebidas no Brasil por Hennig (1986) na década de 80 (SÁ, 2019, p. 15). Hennig (1986), citado por Sá (2019, p. 15) afirma que:

> 1ª: Aprender por descoberta é aprender a aprender.
> 2ª: Aprender por descoberta é automotivador e autogratificante.
> 3ª: Aprender por descoberta aumenta a capacidade de pensar e de raciocinar.
> 4ª: Aprender por descoberta facilita a transferência e memorização.

O ensino de matemática por atividades, segundo Sá (2019), possui as seguintes características:

> 1) É diretivo;
> 2)Tem compromisso com o conteúdo;
> 3)Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
> 11) É iterativo entre estudantes e professor (SÁ, 2019, p.16-17).

Com base em Sá (2019, p. 17), o ensino de matemática por atividades, a exemplo de outras abordagens pedagógicas, organiza-se em dois eixos principais: objetivo e modo de desenvolvimento. No que tange ao objetivo, as atividades podem ser categorizadas em dois tipos básicos: atividades de conceituação ou de redescoberta. Em relação ao modo de desenvolvimento, o ensino de matemática por atividades pode ser conduzido por meio de demonstrações ou de experimentação.

Sá (2019) também detalha a organização interna das atividades, independentemente de serem de conceituação ou redescoberta. Essa organização segue os seguintes momentos: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização. Embora esses momentos sigam recomendações semelhantes, conforme explicitado por Sá (2019), a análise e a institucionalização apresentam particularidades que variam de acordo com o objetivo da atividade. Essas diferenças serão exploradas a seguir.

No momento da **organização**, tanto quanto para conceituação quanto para redescoberta, Sá (2019) diz que nesse momento devem ser formadas as equipes, no máximo de 4 e mínimo de 2 alunos, a formação em equipes estimula, segunda ele, a troca de ideias, que é fundamental no processo de aprendizagem.

Na organização: “O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e que planejou com cuidado a atividade e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias a organização da turma” (SÁ, 2019, p.18).

Seguindo, na **apresentação**, tanto para as atividades para conceituação quanto para a redescoberta, é o momento em que o professor distribui os materiais, incluindo o roteiro, sendo esse impresso ou o professor pode disponibilizar no quadro, dependendo das condições da escola e do tipo de atividade.

O momento da **execução** é onde os alunos manipulam os materiais, fazem experimentações, realizam medidas, cálculos. É o momento em que as equipes realizam os procedimentos estabelecidos na atividade. Cabe ao professor, nesse momento, supervisionar o desenvolvimento das ações dos alunos, auxiliar, tirar dúvidas. Sá (2019) recomenda que quando um questionamento ou dúvida for sobre os procedimentos ou sobre a confecção dos materiais, o professor deve imediatamente orientar a turma a fim de a atividade prossiga de forma clara para os alunos.

Na atividade, o professor pedirá aos alunos que registrem as informações obtidas durante a execução, esse é o momento do **registro**, em que cada equipe registrará as informações da execução num espaço destinado no roteiro. Nessa fase o professor continua supervisionando o desenvolvimento, auxiliando os alunos, dirimindo eventuais dúvidas que podem ocorrer durante esse processo (SÁ, 2019).

Até aqui, os momentos das atividades tanto para conceituação quanto para redescoberta seguem as mesmas recomendações segundo Sá (2019). Após o registro, segue o momento da **análise**, aqui em relação aos tipos – conceituação e redescoberta-, há um pouco de diferença nas recomendações de Sá (2019) quanto ao objetivo. Ele diz que para ambos objetivos neste momento:

> Espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e percebam as características do objeto matemático que desejar conceituar ou definir entre as informações registradas. Este momento é crucial para o bom andamento da atividade devido, ser o momento quando os alunos deverão ter o primeiro acesso à informação desejada pelo professor (SÁ, 2019, p. 20).

O professor continua nessa fase auxiliando os alunos, sanando as dúvidas, formulando questões para que percebam relações válidas. O que difere quanto ao objetivo é que para a conceituação, segundo o autor, “caso não consiga fazer a equipe perceber o desejado deve deixar para o momento da institucionalização” (SÁ, 2019. p. 20).

Já para a redescoberta, segundo o autor, nesse momento, os resultados devem ser concluídos já com uma elaboração de uma conclusão por parte da equipe.

O último momento da atividade é o da **Institucionalização**, nessa fase, para cada tipo, ou seja, cada objetivo, Sá (2019,) a define de uma maneira. Para o tipo conceituação, quanto ao objetivo, diz que é o momento que o professor apresentará o conceito ou definição planejada a partir das observações registradas pelas equipes no quadro. Assim, com a apresentação do conceito, a última fase da atividade é finalizada e com isso a atividade. Sá (2019, p. 21) recomenda que “após essa fase seja feito um conjunto de questões relacionadas com o conhecimento trabalhado na atividade”.

A **institucionalização**, última fase para o tipo redescoberta, quanto ao objetivo, Sá (2019, p. 35) diz que” é o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise”. Aqui cada equipe vai ao quadro não registrar somente as observações durante a atividade, mas as conclusões de cada uma acerca da atividade. Ao final o professor faz suas considerações e valida e/ou reforça essa conclusão.

Após destacarmos as etapas de uma atividade, seja do tipo conceituação ou redescoberta, a seguir serão apresentadas duas propostas de atividades para alunos do 2º ano do ensino médio sobre Funções Trigonométricas.

A atividade a seguir foi elaborada por Correa (2016) em sua dissertação sobre “O ensino de funções trigonométricas por Atividades”. Essa atividade é referente a Atividade de Conceituação cujo o título é “Coeficiente, imagem e período da função seno", com a finalidade de fazer com que o aluno descubra uma relação entre o coeficiente α, a imagem e o período da função tangente: $y = a + sen(x)$.

Figura 40 - Coeficiente, imagem e período da função seno

AULA 16: Coeficiente, imagem e período da função seno.
OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o coeficiente a, a imagem e o período da função seno: $y = a + sen(x)$.
MATERIAL:
- Roteiro de atividades;
- Folha de gráficos.

PROCEDIMENTOS:
- Determinar a imagem da função seno;
- Determinar o período da função seno;
- Com base nas informações obtidas preencha os quadros a seguir:

FUNÇÃO	IMAGEM	PERÍODO
$y = 1 + senx$		
$y = 2 + senx$		
$y = 3 + senx$		
$y = \frac{1}{3} + senx$		
$y = \frac{1}{2} + senx$		
$y = -1 + senx$		
$y = -2 + senx$		
$y = -3 + senx$		
$y = -\frac{1}{3} + senx$		
$y = -\frac{1}{2} + senx$		

Após o tempo dado para que os alunos façam suas resoluções e as discussões sobre os invariantes das mesmas, faremos a seguinte definição:
DEFINIÇÃO 42: No caso da função do tipo $y = a + senx$, o coeficiente a provoca uma translação vertical de a unidades no gráfico, quando comparado ao gráfico de $y = senx$, o que interfere na imagem de f. Portanto, o gráfico "sobe" ou "desce" em relação à posição inicial de $y = senx$, conforme $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente.

Fonte: Correa, 2016, p 168.

Com esta aula, os alunos puderam observar o comportamento do gráfico de 10 funções seno, com coeficiente diferente e ao preencherem corretamente os dados da tabela com imagem e período de cada função, notaram muito facilmente que exerce influência na imagem de f e na movimentação do gráfico, para cima ou para baixo, bem como na concavidade.

Com base nos resultados apresentados, podemos classificar o Ensino por Atividades Experimentais como uma tendência da educação matemática brasileira. Essa abordagem se distingue de outras tendências por suas características específicas. Sua importância reside no fato de que, ao ser adotada em sala de aula, essa metodologia incentiva a participação ativa do aluno na construção do conhecimento. Consequentemente, o discente descobre a capacidade de aprender "fazendo", através da realização de tarefas.

Adicionalmente, destacamos que um dos elementos cruciais desse processo didático é a valorização dos conhecimentos prévios do aluno. Os novos conhecimentos são ancorados nos saberes anteriores, promovendo uma aprendizagem significativa, conforme defendido pelo psicólogo David Ausubel, cujo trabalho se dedicou à busca por aprimoramentos no processo de aprendizado.

3.8.3. O GeoGebra

A presente pesquisa sobre Funções Trigonométricas foi motivada pela dificuldade frequentemente observada na abordagem didática desse tema por muitos professores, bem como pela sua relativa negligência nos currículos escolares. O grande desafio dos educadores reside, inegavelmente, no desenvolvimento e/ou na utilização de metodologias ativas e ferramentas inovadoras que maximizem o ensino e a aprendizagem dos alunos.

Considerando que jovens e adolescentes contemporâneos dedicam uma parcela significativa de seu tempo aos dispositivos móveis, questionamos como integrar Recursos Educacionais Digitais (RED)[6], de forma a aproveitar essa conectividade em benefício do aprendizado da matemática. Essa indagação nos levou a optar pela utilização do aplicativo GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino das funções seno e cosseno.

O aplicativo *GeoGebra* pode ser baixado gratuitamente disponível em: www.geogebra.org , considerado de fácil manuseio e pode ser acessado através de qualquer aparelho eletrônico como celulares, tablets e notebooks desde que estes possuam sistema operacionais como *Android*, *IOS* e *Windows Phone*.

O *GeoGebra software* reúne Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral (ensino superior). O diferencial deste programa é que ele possui um sistema de Geometria Dinâmica que permite que o usuário realize construções de gráficos em 2D e 3D e insira equações e coordenadas, que podem estar diretamente interligadas, fazendo modificações quando necessário.

Ao acessar o site www.geogebra.org no seu navegador de buscas, vá na opção “Baixar Aplicativos”. Ao fazer isso, encontrará sete aplicativos dos quais dois

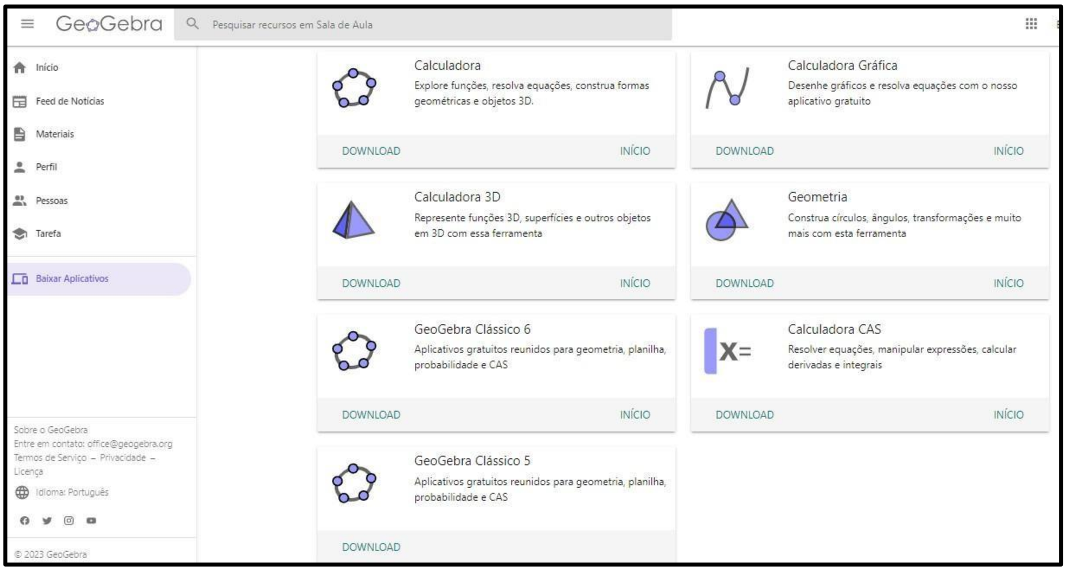
---

6 Brasil (2023): “Refere-se ao acesso de programas, aplicativos e conteúdos digitais usados na instituição escolar, que incluem por exemplo, material de aprendizado digital, programas específicos para o ensino de certas disciplinas, assim como software e aplicativos que facilitam a gestão educacional”.

apresentam a reunião dos demais aplicativos que são: GeoGebra Clássico 5 e o GeoGebra Clássico 6, que são utilizados em computadores.

O site também permite criar um perfil de usuário de forma opcional quando o programa for aberto. Caso seja criado, você poderá encontrar projetos feitos por outros usuários de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos para matemática e ciência. Também, poderá construir seus próprios materiais didáticos e compartilhar com amigos.

Figura 41 - Interface do site GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2023)

Da mesma forma acontece na Google Play Store quando pesquisadas os aplicativos do GeoGebra pelo celular. Nesse caso aparecerá seis aplicativos que são: Calculadora Gráfica GeoGebra, Suíte GeoGebra Calculadora, GeoGebra Geometria, Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, GeoGebra Scientific Calculator e GeoGebra CAS Calculator.

Dentre esses App, o que será utilizado nas nossas atividades é a Calculadora Gráfica GeoGebra, pois este permite a construção de gráficos de funções e equações; permite que encontremos pontos especiais de funções como raízes, máximos e mínimos; que salvemos e compartilhemos os resultados; permite a plotagem de curvas polares e paramétricas; permite que controlemos transformações dos gráficos através do controle deslizante. Ou seja, esse app permitirá a construção dos gráficos das funções seno e cosseno facilitando a visualização do comportamento de cada parâmetro do tipo $f(x) = a + b.Trigo(cx + d)$.

Por ser um software de matemática dinâmica livre, o GeoGebra permite construir diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos que representa funções e curvas parametrizadas. Outras vantagens é que podemos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

Além disso, podemos construir funções desde as mais simples até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos já prontos relacionado com análise matemática, GEOmetria analítica, álGEBRA, álGEBRA analítica, entre outros.

Entretanto, comparando a forma convencional de construções geométricas e a auxiliada pelo computador, destacamos a diferença:

I. Estática e única- depois de feito um desenho, o mesmo não pode ser modificado para análise de algumas propriedades;
II. Múltipla- com um único desenho é possível explorar as propriedades através de alterações que são realizadas através do computador sem modificar as propriedades geométricas.

Por essa principal característica de um único desenho se transformar em várias outras opções sem perder suas propriedades geométricas é que o Geogebra foi considerado um software de Geometria Dinâmica.

Quando utilizado em sala de aula, alguns autores que realizaram experimentação com o GeoGebra obtiveram resultados significativos na aprendizagem dos estudantes em relação à Matemática.

Nascimento (2019), de acordo com as aplicações das atividades no GeoGebra, destaca que:

> Assim, nessa perspectiva, se o desenvolvimento dessa atividade ocorresse de forma tradicional, ou seja, utilizando lousa e giz, demandaria muito tempo na construção de cada gráfico de cada função, o que impossibilitaria que os estudantes visualizassem, interpretassem e analisassem os respectivos gráficos. Portanto, devem ser levadas em conta as vantagens da agilidade e do dinamismo que o uso do *software* proporciona. (NASCIMENTO, 2019, p. 80)

O trecho destaca que, no ensino tradicional com lousa e giz, a construção de gráficos é demorada e limita a análise dos alunos. E nessa perspectiva, com o uso de softwares, esse processo se torna mais ágil e dinâmico. Isso permite aos estudantes visualizar e interpretar os gráficos com mais eficiência. Assim, a tecnologia potencializa a aprendizagem e otimiza o tempo em sala de aula

Nascimento (2019) ressalta que ao verificar as potencialidades e promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria utilizando o geogebra:

> Percebeu-se que aumentou a interação entre estudantes e professor, uma vez que, na elaboração dos gráficos das funções, ficou garantida a visualização de forma interativa, o que possibilitou que os estudantes criassem hipóteses, explorassem e propusessem alternativas, em um trabalho coletivo que favoreceu a discussão e interatividade professor-estudante. (NASCIMENTO, 2019, p. 92)

Frizzarini e Cargnin (2019) trabalharam operações com arcos utilizando como apoio o GeoGebra com estudantes de 2º ano de um curso técnico em informática. Durante a aplicação da atividade em sala de aula, os autores descrevem que o GeoGebra permitiu aos estudantes acompanhar sob duas perspectivas:

> algébrica/numérica e gráfica, os elementos abstratos envolvidos, graças às funcionalidades do Geogebra, que mostra, na janela de álgebra, as representações algébricas/numéricas dos objetos, ao mesmo tempo em que proporciona uma “visualização” desses elementos, [...] favorece o tratamento tanto no registro algébrico (que pode ser observado no texto escrito ao lado da figura), quanto no registro gráfico, ao mesmo tempo em que permite “visualizar” a conversão entre as representações. Em sala de aula, muitos estudantes iam arrastando os pontos do triângulo original para “testar” a validade da identidade. Ao fazer isto, os estudantes estavam se defrontando com as atividades cognitivas de tratamento e conversão [...] (FRIZZARINI; CARGNIN, 2019, p. 8-9)

Meneghelli e Possamai (2019) apresentam em suas pesquisas sobre a resolução de problemas de funções seno e cosseno, que os recursos tecnológicos trazem para o centro da aprendizagem a visualização das propriedades, enfatizando a experimentação, invertendo a ordem da forma tradicional de ensino, o que permite trabalhar primeiro a investigação e, depois, a teoria. E destacam que o GeoGebra: “permitir aos seus usuários a realização de manipulações em suas construções, preservando as características iniciais, visando uma melhor exploração e visualização das propriedades do objeto que se deseja estudar” (MENEGHELLI; POSSAMAI, 2019, p. 4).

Em sua Tese de Doutorado, Oliveira (2020) explica que o GeoGebra vem rompendo o estereótipo da matemática estática, pois segundo ela:

> o estudante entra em contato com a matemática dinâmica por intermédio de construções e manipulações, compreendendo, assim, o conhecimento matemático de forma diferenciada. O formato visual de exploração e

> manipulação aguça a curiosidade e espírito de pesquisador do aluno na busca por investigar as construções e passos realizados no software, proporcionando uma aprendizagem baseada em questionamentos e explorações. Salientamos que o GeoGebra é um programa de fácil manuseio e autoexplicativo, o que permite uma maior acessibilidade ao software. (OLIVEIRA, 2020, p. 158)

Assim, com os relatos desses autores em suas experimentações, nota-se a facilidade e a contribuição do uso da ferramenta GeoGebra que ajudam na melhora da aprendizagem da Matemática. Não só ela, mas metodologias que usam as TDIC's de modo eficaz tiram o estudante do lugar de receptor passivo. Ele passa a ter em suas mãos as ferramentas e participa ativamente da construção do próprio conhecimento.

O professor passa a ser um motivador e um facilitador do acesso ao saber, um mediador do processo de aprendizagem. A tarefa de pesquisar, buscar, fazer e compartilhar informações obtidas para compor o conteúdo curricular é extremamente facilitada e agilizada por meios das tecnologias digitais. Assim, cabe a ele dedicar seus esforços prioritariamente a:

1. Apresentar questões que instiguem a curiosidade pelo tema tratado;
2. Conduzir os processos de reflexão;
3. Apoiar as práticas educacionais;
4. Avaliar se o conhecimento foi assimilado satisfatoriamente.

Os avanços tecnológicos sempre tiveram um lugar de destaque na sociedade e, por isso, é fundamental que estes cheguem ao espaço educacional, proporcionando transformações e melhorias no processo de ensino e aprendizagem. Equipamentos como computador, tablet, smartphones e calculadoras são uns dos principais recursos tecnológicos para utilizar nas práticas pedagógicas. Uma diversidade de materiais que o professor tem à sua disposição, integrando-os em abordagens de ensino que valorizam suas atividades para o aluno.

Viseu e Rocha (2018) explicam que as tecnologias não substituem a atividade realizada com papel e lápis pela atividade que realiza com apoio da tecnologia, mas que se faz necessário construir articulações com essas atividades, sem esquecer do cálculo mental. E para isso, destaca-se o papel do professor de estar comprometido como o processo de ensino e aprendizagem.

Para Meneghelli e Possamai (2019, p. 3), o professor deve ser conhecedor das:

> reais capacidades, potencialidades e limitações do recurso tecnológico que deseja utilizar em sua prática pedagógica, para que o mesmo venha a contribuir de forma positiva para a aprendizagem, além de transformar o estudante em sujeito ativo na construção do seu conhecimento.

Na dissertação de Silva (2018) sobre a sequência didática utilizando applet no GeoGebra, afirma que no modelo tradicional o professor é o participante ativo da sala de aula, transmitindo seus conhecimentos sem instigar os alunos a refletir ou ter uma visão crítica dos conteúdos. E para que o educador não fique preso apenas a ser um transmissor de conhecimento, ele precisa ser estimulador da curiosidade do aluno por conhecer, questionar e buscar a informação mais relevante, fundamentada pelo recurso tecnológico

4. CONCEPÇÕES E ANÁLISES A PRIORI

Chegamos na subseção onde é disposta as informações levantadas das Análises Prévias, o qual apresentaremos os objetivos, comentários e sugestões de atividades que serão aplicadas no ensino das funções seno e cosseno como proposta da nossa Sequência Didática.

Cabral (2017, p. 12) define Sequências Didáticas (SD) como sendo:

> Um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino com a intencionalidade objetiva de estimular a aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de Matemática a partir da percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas".

Contudo, Cabral (2017) afirma que além de estabelecer uma SD o professor precisa ser incansável na promoção de um discurso dialógico, propondo aos alunos um ensino bem articulável, que valorize a reconstrução de conceitos no ambiente escolar.

Araújo (2003, apud CABRAL, 2017, p. 31) o qual diz que a SD é "um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito" e que possibilita ao professor organizar as atividades de ensino em função dos núcleos temáticos – dimensão conceitual dos objetos de estudo – e dos procedimentos estruturais – dimensão técnica e estética".

Outro autor é Zabala (1998, p. 18, apud CABRAL, 2017, p. 31) usa o termo "Sequências Didáticas" como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Os conceitos de seno e cosseno e tangente, estudadas no ensino fundamental, são discutidas apenas no triângulo retângulo. Agora, esses conceitos serão trabalhados na circunferência trigonométrica.

Ressaltamos aqui a importância de os alunos perceberem a relação entre duas abordagens, reconhecendo que o seno e o cosseno nada mais são que medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa 1 unidade, já que elas são projeções de um ponto da circunferência nos eixos x e y.

4.1. Atividade 1: Relação entre Arco e Raio

A atividade "Relação entre arco e raio" tem como propósito levar os estudantes a investigarem como a variação do raio influencia o comprimento do arco em uma circunferência. Por meio da exploração e comparação de diferentes medidas, os alunos são incentivados a descobrir uma relação matemática entre essas grandezas, desenvolvendo a capacidade de observar padrões e compreender a proporcionalidade existente entre o arco e o raio.

ATIVIDADE 1: Relação entre Arco e Raio
APLICATIVO 1 : https://www.geogebra.org/m/xkgfmabt
OBJETIVO: Descobrir uma relação entre cada arco escolhido e para cada valor do raio alterado.
MATERIAIS: Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha
PROCEDIMENTO: Para cada ângulo dado determine:

- A medida do Arco para 5 valores do Raio;
- A razão entre a medida do Arco e a medida de cada Raio utilizado;
- Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade.

1) Preencha o quadro utilizando o aplicativo 1

ÂNGULO	Raio 1	$\frac{\widehat{AB}}{R_1}$	Raio 2	$\frac{\widehat{AB}}{R_2}$	Raio 3	$\frac{\widehat{AB}}{R_3}$	Raio 4	$\frac{\widehat{AB}}{R_4}$	Raio 5	$\frac{\widehat{AB}}{R_5}$
30										
45										
60										
90										
120										
135										
150										

a) O comprimento de um arco depende do raio da circunferência em que está? Justifique.

b) A medida angular de um arco depende do raio em que está? Justifique.

c) A que conclusão você chegou?

Análise a priori: espera-se que os estudantes percebam que quanto maior o raio da circunferência, maior o comprimento do arco, pois a medida de um arco não corresponde ao comprimento desse arco. Além disso, espera-se que eles possam observar que a medida angular do arco depende apenas do comprimento do arco. Os estudantes poderão concluir que para uma medida do comprimento do arco ao mudar o valor do raio a razão $\frac{\widehat{AB}}{R}$ será sempre constante. Nessa atividade os estudantes não terão dificuldades em mexer no aplicativo e nem em observar as alterações feitas nos comandos. Talvez apresentam dificuldades nas conclusões de cada questão.

Após a atividade "Relação entre arco e raio", os estudantes responderão a uma lista de questões que reforça a compreensão da proporcionalidade entre o comprimento do arco e o raio da circunferência. Esse momento servirá para consolidar a descoberta feita durante a atividade e permitir ao professor avaliar se os alunos compreenderam a relação matemática envolvida.

Quadro – Questões de fixação propostas

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad **b)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **c)** $\frac{\pi}{2}$ rad

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

a) 30° **c)** 120° **e)** 210°
b) 60° **d)** 150° **f)** 240°

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

4. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de comprimento.

a) Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano?
b) Quantos centímetros sua extremidade percorre das 13 h às 17 h?

5. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70°. Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, calcule o comprimento aproximado do arco que ele descreve.

4.2. Atividade 2: O Radiano

A atividade “O radiano” propõe que os estudantes compreendam a medida do arco em função do raio da circunferência, percebendo que há uma proporcionalidade direta entre essas grandezas. Assim, busca-se construir o conceito de radiano como uma unidade natural de medida angular, derivada da própria geometria do círculo

ATIVIDADE 2: O Radiano
APP2: https://www.geogebra.org/m/bz797mmv
OBJETIVO: Descobrir como a medida do arco varia proporcionalmente em função do raio da circunferência.
MATERIAIS: Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha
PROCEDIMENTOS: No aplicativo 2, mude o controle deslizante R, um por um, até 5. Em seguida Mova o controle “Arrasta-me” até o final. Observe cada circunferência e determine:

- O arco correspondente para cada valor do Raio
- A medida do arco em graus de cada pedaço de Raio

1) Preencha o quadro a seguir de acordo com as observações do APP 2 OBS: Considera-se Raio em cm (centímetro)

Raio	Medida em graus de cada arco							Medida do arco de uma volta completa em cm
R_1								
R_2								
R_3								
R_4								
R_5								

a) O que você observou?

b) Que conclusão você chega sobre o que é radiano?

c) Qual o comprimento em Graus da circunferência em uma volta completa?

d) Qual o comprimento da circunferência para R=1 cm ? use $\pi = 3{,}14$

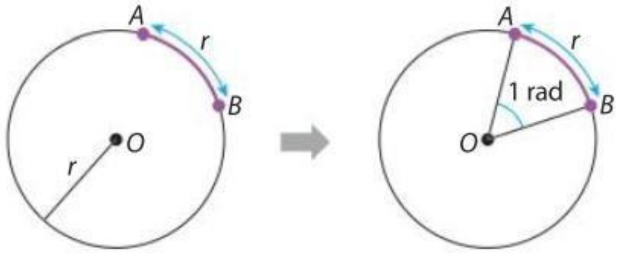
e) Compare os resultados das questões c) e d) e responda: O que você observou?

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 2)

Definição: A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio r representada abaixo. Como o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é r, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: med($\overset{\frown}{AB}$)= 1 rad

Relação entre grau e radiano



Uma circunferência mede 360° ou 2π rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou π rad.

A tabela abaixo fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Análise a priori: nessa atividade avaliamos que os estudantes possam ter dificuldades em concluir que o radiano é a medida de um arco cujo o comprimento é igual ao do raio da circunferência em que está contido. Mas eles não terão dificuldades em observar que dentro de cada circunferência cabem 6 Raios mais um pedaço de 0,28, que em cada arco o valor dos ângulos corresponde a 57,32 ° graus e que ao somar todos os ângulos o resultado é 360°, pois acreditamos que eles já possuem conhecimentos sobre comprimento de circunferência e que consigam relacionar que 360º corresponde a $2\pi\ rad$.

Após concluir a atividade "O radiano", os estudantes responderão a uma lista de questões que reforça a compreensão da relação entre arco e raio, consolidando a ideia de que o radiano é uma medida angular derivada dessa proporção. Esse momento ajudará o professor a verificar se os alunos compreenderam o conceito e sua aplicação.

Quadro – Questões de fixação propostas

1 Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

2 Um ponto P da superfície terrestre está localizado a $\frac{\pi}{7}$ rad de latitude norte. Considerando que o raio da Terra mede 6.370 km, o menor arco que une o ponto P à linha do equador tem comprimento igual a:

a) 750π km c) 450π km e) 597π km
b) 910π km d) 623π km

(*Nota*: Latitude de um ponto da superfície terrestre é a medida do menor arco de circunferência que liga esse ponto à linha do equador.)

3 (UFMA) No relógio da torre de uma igreja, o ponteiro maior mede 2 m.
Em quanto tempo a ponta móvel desse ponteiro percorre 5π metros?

a) 1 hora e 15 minutos d) meia hora
b) 1 hora e meia e) 45 minutos
c) 1 hora

4 Determine a medida, em radiano, equivalente a:
a) 30° b) 120° c) 225° d) 300° e) 240° f) 330°

5 Determine a medida, em grau, equivalente a:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{7\pi}{6}$ rad e) $\frac{5\pi}{3}$ rad
b) $\frac{3\pi}{2}$ rad d) $\frac{2\pi}{5}$ rad

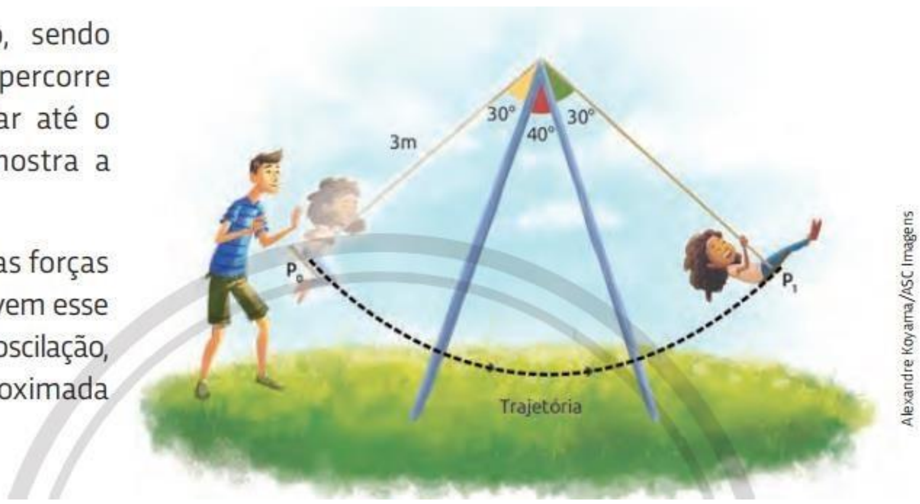
6 Uma correia faz girar duas polias de raios 4 cm e 12 cm.

Quando a polia maior gira 240°, a menor gira:

a) $\frac{7\pi}{4}$ rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad e) 6π rad
b) $\frac{7\pi}{6}$ rad d) 4π rad

Desafio Um balanço, sendo solto de um ponto P_0, percorre uma trajetória pendular até o ponto P_1, conforme mostra a imagem ao lado.

Desprezando o atrito e as forças de resistência que envolvem esse movimento na primeira oscilação, calcule a distância aproximada percorrida de P_0 a P_1.



4.3. Atividade 3: O ciclo Trigonométrico

Na atividade “O ciclo trigonométrico”, os estudantes são convidados a explorar a posição dos ângulos ao longo da circunferência, identificando os valores de seno e cosseno correspondentes a cada um. Dessa forma, compreendem como essas funções representam coordenadas de pontos distribuídos no ciclo de 0° a 360°

ATIVIDADE 3: O CICLO TRIGONOMÉTRICO

APP 3: https://www.geogebra.org/m/axagwgca

OBJETIVO: Determinar os valores de seno e cosseno para ângulos $0° \leq \beta \leq 360°$

MATERIAIS: tabela para ser preenchida, lápis ou caneta e aplicativo Geogebra

PROCEDIMENTOS:

Os estudantes deverão clicar no link do APP 3: https://www.geogebra.org/m/axagwgca e abrir o aplicativo no Geogebra. Depois eles precisam preencher a Tabela 1 e, para isso, deve-se mover o controle deslizante "$\boldsymbol{\beta}$" ou digitar na caixa de entrada “ângulo$\boldsymbol{\beta}$” o valor que está apresentado na Tabela 1. Em seguida, verificar os valores de Seno$\boldsymbol{\beta}$ e Cosseno $\boldsymbol{\beta}$ e escrever em qual quadrante se encontram os ângulos.

Após completar a tabela e responder as perguntas, acrescentamos uma situação -problema com o nome Roda a Roda para eles possam comparar o giro com o ciclo trigonométrico.

OBS: considere o giro no sentido anti-horário, como sentido positivo: Tabela 1- Determinar os valores de Seno e Cosseno.

Ângulo em graus	$\boldsymbol{Sen(\beta)}$	$\boldsymbol{Cos(\beta)}$	***Quadrante***
30°			
90°			
120			
150°			
180°			
210º			
225°			
240°			
270°			
300°			
360°			

Fonte: próprio autor (2023)

1. Observando a variação de um arco β na primeira volta da circunferência trigonométrica, responda:
   a) Qual é o valor máximo de $\boldsymbol{Sen(\beta)}$ que um ângulo pode assumir? E o mínimo?
   b) ual é o valor máximo de $\boldsymbol{Cos(\beta)}$ que um ângulo pode assumir? E o mínimo?

2. Observe os quadrantes do ciclo trigonométrico do aplicativo e responda:
   a) Em quais quadrantes o $sen(\beta)$ é positivo? E em quais é Negativo?

   b) Em quais quadrantes, quando se aumenta o valor de β, o valor de $sen(\beta)$ diminui?

   c) Em quais quadrantes, quando se diminui o valor de β, o valor de $sen(\beta)$ aumenta?

   d) Em quais quadrantes o $cos(\beta)$ é positivo? E em quais é Negativo?

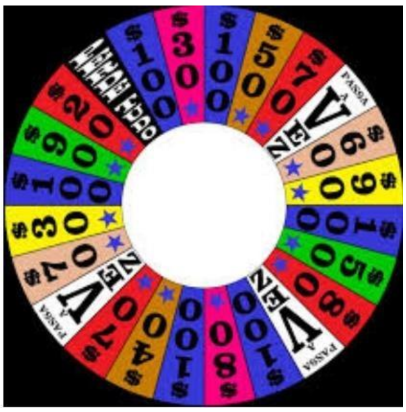
   e) Em quais quadrantes, quando se aumentai o valor de β, o valor de $cos(\beta)$ aumenta?

   f) Em quais quadrantes, quando se diminui o valor de β, o valor de $cos(\beta)$ diminui?

SITUAÇÃO-PROBLEMA:

Em um programa que se chama Roda a Roda, existe uma roleta que os participantes giram para saber qual o seu prêmio, conforme a figura. A roleta deve estar posicionada sempre no PERDE TUDO antes do giro de qualquer participante e o giro deve ser sempre no sentido horário.

a) Jairo gira a roleta 2760°. Qual é seu prêmio?
b) Qual o menor ângulo para que o prêmio de Juarez seja 100?
c) Quais ângulos fazem com que Josué perca a vez ou perca tudo?



INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 3)

Definição: Dizemos que $sen(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. seno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: seno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 2º quadrante, pois os valores de $sen(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $sen\beta$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 3 e 4.

Definição: No intervalo de [0,2π], $sen(\beta)$ cresce nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$,2π] 1 º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [$\frac{\pi}{2}$, π] e [π, $\frac{3\pi}{2}$], 2º e 3º quadrantes.

Definição: Dizemos que $cos(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. cosseno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: cosseno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 4º quadrante, pois os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 2 e 3.

Definição: No intervalo de [0,2π], $cos(\beta)$ cresce nos intervalos [π, $\frac{3\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$, 2π] 3º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{\pi}{2}$, π], 1º e 2 quadrantes.

Análise a priori: avaliamos que os estudantes conseguirão resolver esta atividade sem muita dificuldade, pois com a ajuda do aplicativo facilitará as observações e o preenchimento da tabela dos valores de $\boldsymbol{Sen(\beta)}$, $\boldsymbol{cos(\beta)}$ e $\boldsymbol{tg(\beta)}$. Eles poderão ter dificuldades em relacionar ângulos em grau para radiano e vice versa já que no aplicativo aparece apenas os ângulos notáveis e seus respectivos ângulos côngruos. Na situação-problema achamos que eles possam se equivocar no momento do giro, já que e muitas vezes giramos o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário. Além disso esperamos que os estudantes percebam que é necessário dividir a roleta em

partes iguais $\frac{360°}{24}$ = 15º.

Encerrada a atividade “O ciclo trigonométrico”, os alunos resolverão uma série de questões que fixam os valores de seno e cosseno em diferentes ângulos. A proposta visa garantir que os estudantes reconheçam o comportamento das funções no ciclo completo, identificando eventuais dificuldades na leitura dos eixos.

Quadro – Questões de fixação proposta

1. Calcule:

a) $\text{sen } 390°$ **b)** $\text{sen } 4100°$ **c)** $\text{sen } (-820°)$

2. Descubra o ângulo α do 4º quadrante cujo:

a) $\text{sen } \alpha = -\frac{1}{2}$ **b)** $\text{sen } \alpha = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Calcule o valor de cada expressão.

a) $\text{sen } 0° \cdot \text{sen } 135° + \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 360°$

b) $\text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} - \text{sen } \frac{4\pi}{3} \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3}$

15. Calcule o valor de:

a) $\cos 3990°$ **c)** $\cos (-3465°)$

b) $\cos \frac{35\pi}{3}$ **d)** $\cos \left(-\frac{40\pi}{3}\right)$

16. Calcule o valor em cada caso.

a) $\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6}$

b) $\dfrac{\cos 60° - \sqrt{3} \cdot \cos 210°}{\sqrt{3} \cdot \cos 330° - \cos 120°}$

5. Calcule o valor de:

a) $\text{sen } x \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } 2x - \text{sen } 3x$, para $x = \frac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\text{sen } 2x + \text{sen } 4x}{\text{sen } x + \text{sen } 3x}$, para $x = \frac{\pi}{6}$

6. Determine o sinal de **y** em cada caso.

a) $y = \text{sen } 100° + \text{sen } 170°$

b) $y = \text{sen } \frac{7\pi}{5} \cdot \text{sen } \frac{19\pi}{12}$

c) $y = \dfrac{\text{sen } 220° + \text{sen } 350°}{\text{sen } 140°}$

Calcule o valor das expressões.

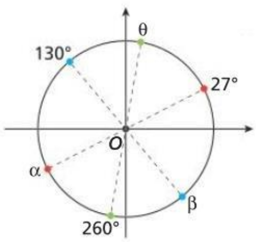
a) $\text{sen } 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen } \pi + \cos \pi$

b) $\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$

c) $\text{sen } \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$

d) $\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6}}$

Descubra os valores aproximados de sen α, sen β e sen θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: sen 27° ≃ 0,45; sen 50° ≃ 0,77 e sen 80° ≃ 0,98)



4.4. Atividade 4: Redução ao 1º quadrante

A atividade "Redução ao primeiro quadrante" busca levar os alunos a investigar como os valores de seno e cosseno se relacionam entre diferentes quadrantes. Ao comparar arcos de 2°, 3° e 4° quadrantes com seus correspondentes no 1°, o estudante descobre padrões e simetrias que simplificam o estudo das funções trigonométricas.

ATIVIDADE 4: Redução ao 1º quadrante

APP 4: https://www.geogebra.org/m/mx2uqws3

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o seno e o cosseno de um arco x do 2°, do 3º ou do 4º quadrante e, o seno e o cosseno do arco correspondente do 1° quadrante.

MATERIAIS: Folha com Tabela a ser preenchida, lápis, borracha, APP GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

A partir dos valores do seno e cosseno de arcos com extremidades no 1º quadrante do ciclo trigonométrico, podemos calcular os respectivos valores do seno e cosseno de arcos com extremidade em qualquer outro quadrante.

- Passo 1: acesse o APP 4.
- Passo 2: Clique na caixa com o nome "Sen(x)" e "Cos(x)", para aparecer valores dos de seus respectivos quadrantes.
- Passo 3: Mexa o controle deslizante " α" para alterar as posições dos ângulos.

Com as modifciações dos ângulos e suas observações, preencha o quadro a seguir.

Quadro – Redução ao 1° quadrante

REDUÇÃO DO 2° A0 1 º QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$\pi - \alpha$	$sen\alpha$	$sen(\pi - \alpha)$	$\pi - \alpha$	$-cos\alpha$	$cos\ (\pi - \alpha)$
120°						
135°						
150°						
REDUÇÃO DO 3° AO 1 º QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$\pi + \alpha$	$-sen\alpha$	$sen(\pi + \alpha)$	$\pi + \alpha$	$-cos\alpha$	$cos\ (\pi + \alpha)$
210°						

225°						
240°						
REDUÇÃO DO 4º AO 1 QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$2\pi - \alpha$	$-sen\alpha$	$sen(2\pi - \alpha)$	$2\pi - \alpha$	$cos\alpha$	$cos\,(2\pi - \alpha)$
300º						
315°						
330°						

1. A partir do preenchimento das tabelas na redução dos quadrantes 2º, 3º 4º ao 1º quadrante, responda:

    a. Na redução do 2º ao 1° quadrante o que podemos afirmar para os valores de sen(π − α) e senα? E os valores de cos(π − α) e −cosα?

2. A partir do preenchimento das tabelas na redução dos quadrantes 2º, 3º 4º ao 1º quadrante, responda:

    a. Na redução do 2º ao 1° quadrante o que podemos afirmar para os valores de sen(π − α) e senα? E os valores de cos(π − α) e −cosα?

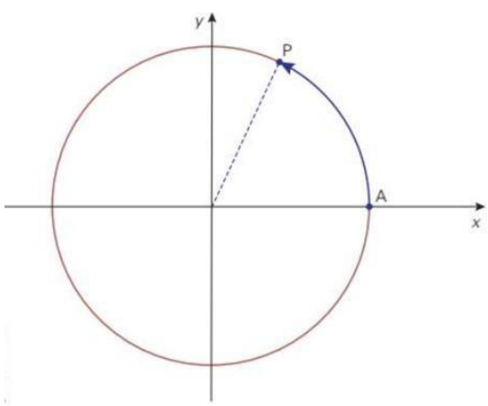
    b. Na redução do 3º ao 1º quadrante o que podemos afirmar para os valores de sen(π + α) e −senα? E os valores de cos(π + α) e −cosα?

    c. Por que podemos afirmar que cos(2π − α) = cosα?

    d. A que conclusão você chega?

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 4)

Arcos côngruos

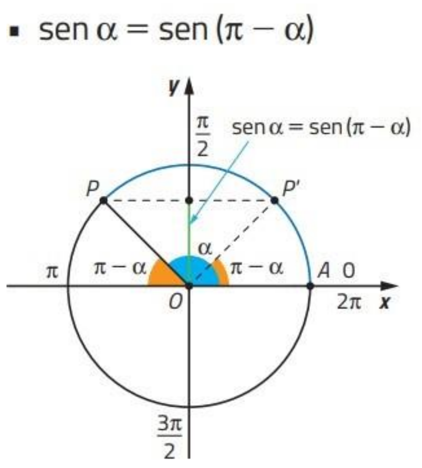


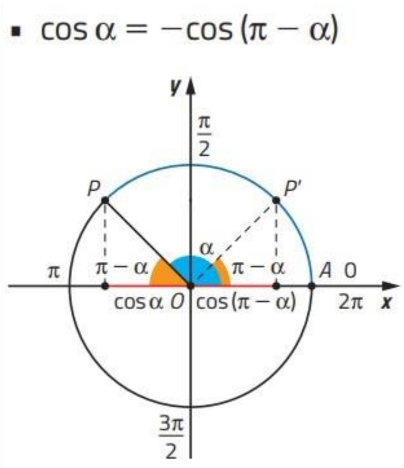
Considere um arco em uma circunferência trigonométrica com origem no ponto A e a outra extremidade no ponto P. pode-se dar um número inteiro de voltas em qualquer um dos sentidos (horário ou anti-horário). Desde inicie no ponto A e finalize no ponto P teremos arcos

Definição: Dizemos que dois ou mais arcos trigonométricos são côngruos ou congruentes entre si caso tenham a mesma extremidade.

Na redução do 2º para o 1º quadrante

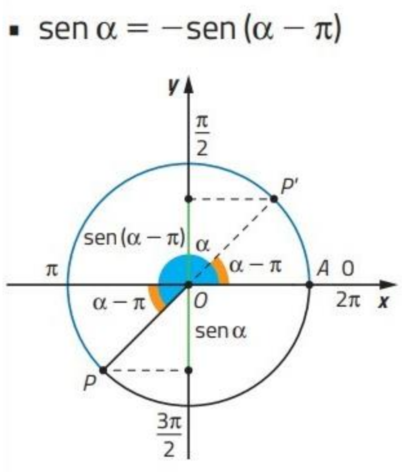
Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida angular α, com $\frac{\pi}{2}\,rad < \alpha < \pi\,rad$, temos assim a seguinte relação:

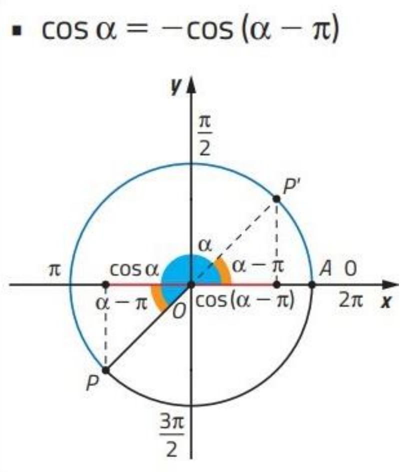




Na redução do 3º para o 1º quadrante

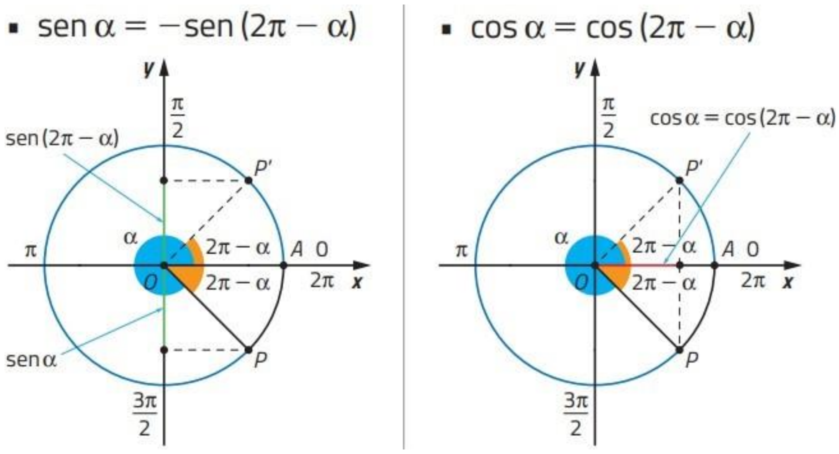
Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida angular α, com $\pi\,rad < \alpha < \frac{3\pi}{2}\,rad$, temos assim a seguinte relação:





Na redução do 4º para o 1º quadrante

Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida angular α, com $\frac{3\pi}{2}\ rad < \alpha < 2\pi\, rad,$ temos assim a seguinte relação:



Análise a priori: os estudantes não terão dificuldades em completar as tabelas quando forem realizar o procedimento do aplicativo no Geogebra. Eles poderão visualizar de forma rápida o resultado de cada valor de seno e cosseno de seus ângulos da tabela na redução do 2º, 3º e 4º para o 1º quadrante do ciclo trigonométrico. Com as perguntas propostas logo após o preenchimento da tabela, acreditamos que eles conseguirão interpretar que os valores dos arcos são iguais em $sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$, na redução do 2º ao 1º quadrante, que $sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$, na redução do 3º ao 1º quadrante. Caso venham ter dificuldade na análise, será no jogo de sinal dos ângulos de $-sen\alpha$. E concluir que $cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha$ são iguais pois pertencem ao mesmo eixo horizontal.

Depois da atividade “Redução ao primeiro quadrante”, a lista de questões permitirá aos estudantes aplicar as relações entre os quadrantes e confirmar o entendimento das simetrias e sinais do seno e cosseno. Assim, o professor poderá avaliar se os alunos conseguem generalizar as relações trigonométricas a partir do primeiro quadrante.

Quadro – Questões de fixação propostas

Questão 1- simplifique as expressões

Sendo α uma medida em grau, com $\cos \alpha \neq 0$, simplificar a expressão:

$$E = \frac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)}$$

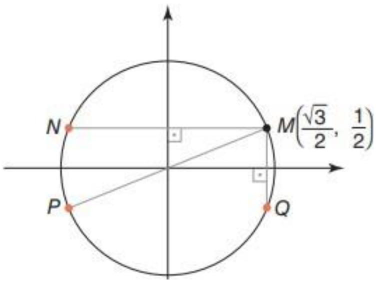
Simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos(180° + x) + \text{sen}(180° + x) + \text{sen}(180° - x)}{\cos(360° - x)},$$

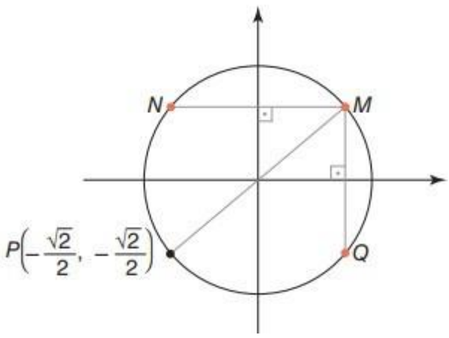
com $\cos x \neq 0$.

Questão 2- Em cada um dos itens a seguir, determine as coordenadas dos pontos assinalados.

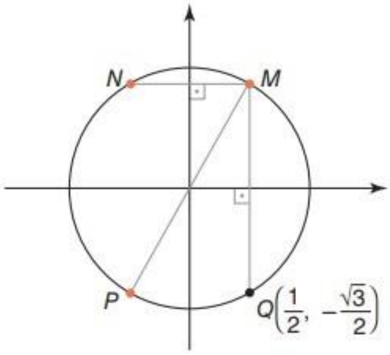
a)



b)

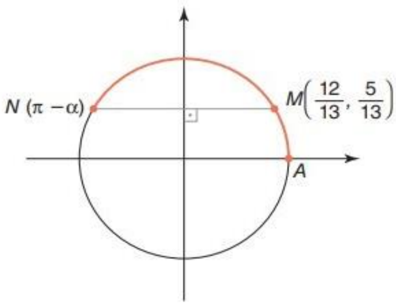


c)



Questão 3 –

Na circunferência trigonométrica abaixo, as coordenadas do ponto M são $\frac{12}{13}$ e $\frac{5}{13}$, e a medida do arco $\widehat{AN}$ na 1ª volta positiva é $\pi - \alpha$.



Calcule:

a) sen α

b) $\cos \alpha$

c) $\cos(\pi + \alpha)$

d) sen $(-\alpha)$

e) $\cos(2\pi - \alpha)$

4.5. Atividade 5: O giro inteligente: explorando ângulos e coordenadas

Em “O giro inteligente: explorando ângulos e coordenadas”, os alunos analisam o movimento circular de um corredor em uma pista para compreender como esse deslocamento pode ser descrito matematicamente. A partir dessa análise, descobrem a função de Euler como uma representação elegante e unificadora do movimento circular.

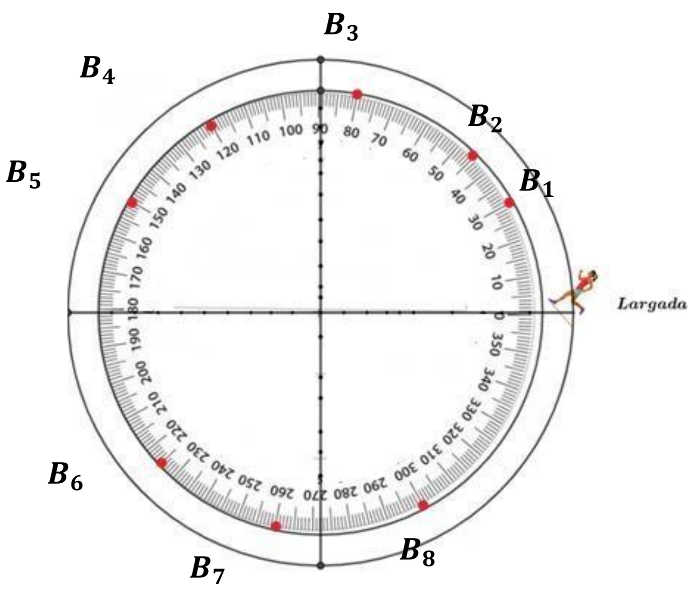
ATIVIDADE 5: O giro inteligente: explorando ângulos e coordenadas
APP 5: https://www.geogebra.org/m/azgt2wfa
OBJETIVOS: Definir a função de Euler a partir da análise do movimento circular de um corredor em uma pista.
MATERIAIS: desenho de uma pista circular graduada; lápis, borracha, régua ou barbante, calculadora e App GeoGebra

Correr é um dos exercícios físicos que pode fazer muito bem para o corpo e para a mente. Dentre os benefícios que pode proporcionar são: ajuda na saúde do coração e dos pulmões; aumenta a força e a estabilidade das articulações; reduz o risco de doenças crônicas e contribui na prevenção de sintomas de depressão, ansiedade e estresse.

Situação- Problema: Suponha que uma atleta esteja treinando em uma pista circular de X metros rasos (Figura 1) em uma das raias. Com um relógio ela cronometrava o seu percurso e, em determinado tempo passava por alguns pontos da pista, distando da largada (ponto A) em alguns metros

Figura 1 - Pista de atletismo graduada em graus

Figura 1 - Pista de atletismo graduada em graus



Vamos considerar que a distância que a atleta percorre, em certos pontos, está associada a um valor numérico real x. A pista está graduada em graus. A partir disso, preencha o quadro a seguir utilizando o APP 5: https://www.geogebra.org/m/azgt2wfa
Encontre o VALOR DE X para cada distância percorrida pela atleta

Quadro 1 – Associar o valor do comprimento a um número real

DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA ATLETA EM CERTOS PONTOS	*VALOR DE X Em metros*	*COORDENADAS DE CADA PONTO*
B_1		(,)
B_2		(,)
B_3		(,)
B_4		(,)
B_5		(,)
B_6		(,)
B_7		(,)
B_8		(,)

Responda os questionamentos

1. O valor encontrado X está associado a um único valor do ARCO? Explique.

---

2. O que você pode dizer sobre o valor da medida do segmento **BC** quando mudamos o valor do ângulo $\boldsymbol{\beta}$?

---

3. A relação criada para obter o valor real X para cada ponto percorrido pela atleta, pode ser caracterizado como uma função? Explique por quê?

---

4. Se sua resposta foi sim na pergunta anterior, como você definiria essa função? Lembrando que: Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação de f de A em B (simbolicamente, $f: A \rightarrow B$) recebe o nome de aplicação de A em B ou função em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

5. *Qual seria o domínio dessa função?*

6. Qual a imagem dessa função?

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 5)

:

Função de Euler e o ciclo trigonométrico

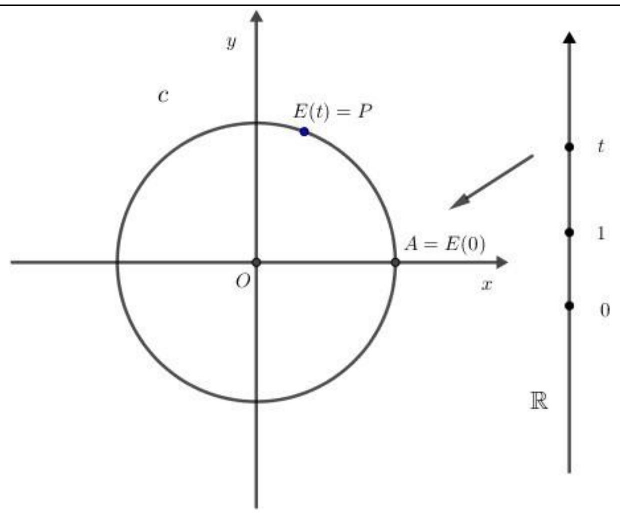
Vamos agora definir uma aplicação E de $\mathbb{R}$ em C, chamada de **função de Euler, e**m referência ao seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783)-, que associa a cada número real t um único ponto P da circunferência C, chamado de imagem de t no círculo, do seguinte modo:

$$E: \mathbb{R} \longrightarrow C$$

$$x \longrightarrow E(t) = P(x, y)$$

Intuitivamente essa função E pode ser visualizada imaginando-se C como um carretel onde se enrola a reta $\mathbb{R}$, com E(0)=A(1,0).

Imagine que a reta real é um longo fio, que deverá ser enrolada num carretel. Analogamente pode ser pensado na distância percorrida pela atleta na pista, onde cada ponto é um pedaço X da reta real $\mathbb{R}$.



Assim,

a) *Se* $t = 0$*, então* $P = A$*, ou seja,* $E(0) = A$*;*

b) *Se* $t > 0$*, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento* t*, no sentido anti-horário, e marcamos* P *como ponto final do trajeto;*

c) *Se* $t < 0$*, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento* $|t|$*, no sentido horário. O ponto final do trajeto é* P*.*

Definição: Dizemos que $sen(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. seno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: seno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 2º quadrante, pois os valores de $sen(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $sen\beta$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 3 e 4.

Definição: No intervalo de $[0,2\pi]$, $sen(\beta)$ cresce nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, 1º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, 2º e 3º quadrantes.

Definição: Dizemos que $cos(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. cosseno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: cosseno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 4º quadrante, pois os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo

y. Quando os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 2 e 3.

Definição: No intervalo de $[0,2\pi]$, $cos(\beta)$ cresce nos intervalos $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, 3º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, 1º e 2º quadrantes.

Análise a priori: A atividade proposta envolvendo pista circular avaliamos que para preencher o quadro com os valores de X e das coordenadas dos pontos B, os estudantes não terão dificuldades já que o aplicativo mostrará as informações do movimento da atleta de cada ângulo indicado. Achamos que eles terão dificuldades em interpretar nas questões 4, 5, 6 e 7 pois é necessário que seja lembrado a ideia de função. Além disso, eles precisam associar o número real X a um único ponto B na circunferência que são o (cos(x), sen(x)) e, também, escrever uma relação de função entre o número X com o os arcos de seno e cosseno.

4.6. Atividade 6: Oscilações no plano: a curva do seno

A atividade “Oscilações no plano: a curva do seno” tem como objetivo mostrar como os ângulos medidos no círculo se transformam em pontos de uma curva oscilatória. Ao observar esse comportamento, os alunos percebem que a função seno traduz o movimento circular em uma variação periódica no plano cartesiano.

ATIVIDADE 6: Oscilações no plano: a curva do seno.

APP 6: https://www.geogebra.org/m/gg96dstt

OBJETIVO: Descobrir como os ângulos distribuídos no círculo determinam o padrão oscilatório da função seno $f(x) = sen(x)$.

MATERIAIS: esquema da tarefa, lápis, borracha, régua círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: Acesse o APP 6.
- Passo 2: Selecione a caixa com o nome “Seno”.
- Passo 3: Movimente o ponto “P” na circunferência e observe o desemho no plano cartesiano.
- Passo 4: Em seguida, no Quadro 1, complete os valores das colunas de $\boldsymbol{y = sen(x)}$ e dos pares ordenados $\boldsymbol{(x, y)}$.
- Passo 5: Após prencher o **Quadro 1**, marquem os valores das coordenadas $\boldsymbol{(x, y)}$ (coluna 3) no plano cartesiano e, com o auxílio de uma régua, transportar os pontos do plano cartesiano para o ciclo trigonométrico na **IMAGEM 1.**

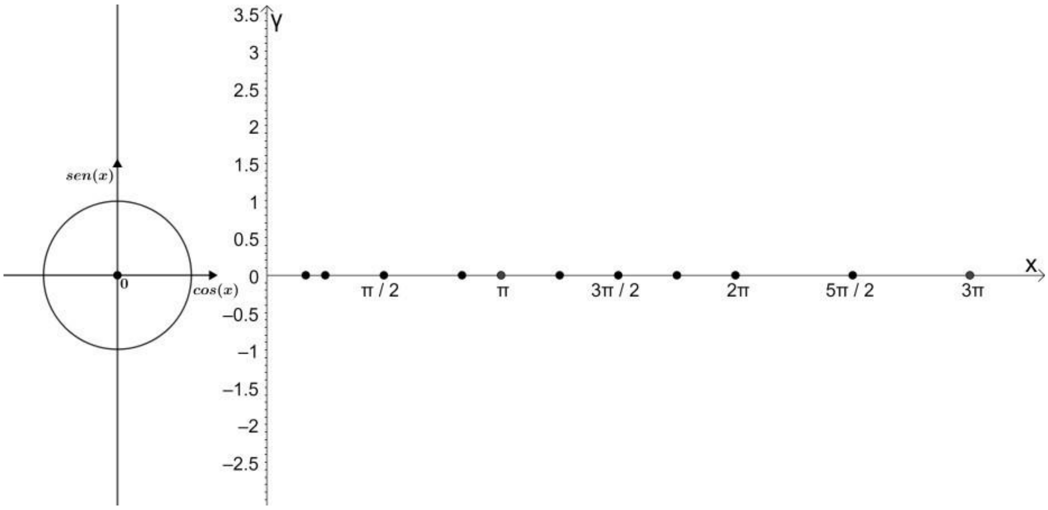
Quadro 1- Pontos no gráfico e no ciclo trigonométrico

x	$\boldsymbol{y = sen(x)}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{3\pi}{4}$		
π		
$\frac{5\pi}{6}$		
$\frac{5\pi}{4}$		

ÂNGULOS NOTÁVEIS			
Radiano	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grau	30°	45°	60º
$sen(x)$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$

$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

IMAGEM 1 - Desenhe o gráfico de seno no plano



Agora responda os seguintes questionamentos:

1. De acordo com os valores encontrado, o gráfico construído se configura como uma função? Justifique.

___

___

2. Se você repetisse o procedimento e encontrasse mais pontos

___

___

3. Ao observar o gráfico e o ciclo trigonométrico, o que eles têm em comum?

___

___

4. Como você definiria o comportamento desse gráfico?

___

___

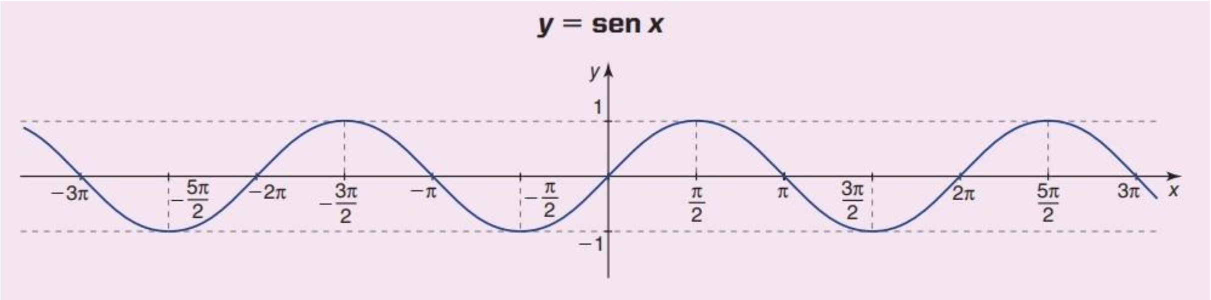
INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 6)

:

Podemos associar um número real x qualquer ao seno de um arco que mede x radianos. Para $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo, associamos o número 1, pois $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, isto é, $(x, y) = (x, sen(x)) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Definição: Definimos função seno a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o seno de um arco de x radianos, ou seja, a cada x associa $sen(x)$.

A representação da função pela lei $f(x)$ = $sen(x)$ é caracterizado como sendo uma curva **senoidal**. O seno de um ângulo (expresso em geral em radianos) é traçada em função de um ângulo θ, descreve uma oscilação repetitiva suave, sendo esta uma onda contínua.



Fonte: Paiva (2010, p.157)

Definição: Período de $f(x)$ = $sen(x)$: A função seno se repete periodicamente num intervalo de $[0,2\pi]$, pois:

$$sen(x) = sen\ (x + 2\pi) = sen\ (x + 4\pi) = \cdots = sen\ (x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Propriedade: De modo geral, o período de seno é dado por $sen\ (cx + d)$, com c e d reais com c$\neq 0$ e $p = \frac{2\pi}{|c|}$

Definição: O domínio D_f (Observando o Eixo X) e o contradomínio CD_f da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D_f = \mathbb{R} = CD_f$. O conjunto imagem de $f(x) = sen(x)$ é o intervalo de $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq sen(x) \leq 1$, no Eixo Y.

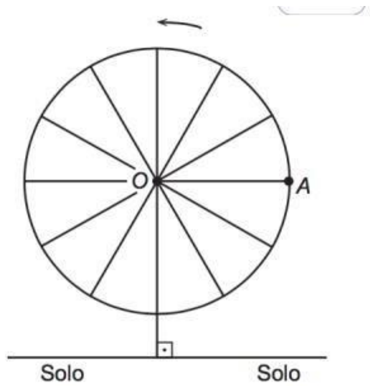
Análise a priori: nessa atividade acreditamos que os estudantes não terão dificuldades em completar a tabela e desenhar o gráfico, visto que o aplicativo mostra como se comporta a função seno. Com as atividades anteriores sobre relação entre grau e radiano eles conseguirão identificar os pares ordenados (x,y) na tabela. Acreditamos que possa haver dificuldades quando eles forem responder os questionamentos. Esperamos que possam concluir que o comportamento do ciclo trigonométrico ao plano cartesiano da expressão f(x)= sen(x) se configura uma função e que para cada valor do arco (eixo x) a um único valor para f(x) (eixo y). esperamos que eles possam concluir que o movimento da função apresenta várias repetições iguais (movimento oscilatório ou periódico).

4.7. Atividade 7: Altura em Ação: manipulando a onda da roda gigante

Na atividade “Altura em ação: manipulando a onda da roda gigante”, os estudantes são convidados a explorar o movimento circular por meio de uma simulação interativa, observando como as variações dos parâmetros da função influenciam a altura e o ritmo do movimento. O objetivo é investigar a relação entre a função matemática e o comportamento físico do giro da roda gigante, conectando teoria e prática.

SITUAÇÃO – PROBLEMA

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto, observe o comportamento do movimento da Roda Gigante construída no aplicativo GeoGebra, quando se altera os parâmetros da função COSSENO do tipo:

$$f(x) = a + b.\, cos(m.\, x + n)$$

Procedimentos: Clique no link APP: https://www.geogebra.org/m/ymfgwjfu . Em seguida selecione as caixas com os nomes “Altura”, “Ponto Altura x Tempo”, “Função: Altura x Tempo” e “Criar Função. Depois explore o objeto e responda:

1- O que acontece com o gráfico de cor Verde quando modificamos o valor do:

I. Parâmetro a?

____

____

II. Parâmetro b?

____

____

III. Parâmetro m?

____

____

IV. Parâmetro n?

____

____

2- Modifique os parâmetros a,b,m,n de modo que o gráfico de cor verde se aproxime o máximo possível do movimento da roda gigante, de cor vermelha. Depois escreva a expressão que o aplicativo gerou.

ATIVIDADE 7: Altura em Ação: manipulando a onda da roda gigante

APP 7: https://www.geogebra.org/m/v5n4pe98

OBJETIVO: Investigar a relação entre os parâmetros da função e o comportamento do movimento circular simulado da roda gigante.

MATERIAIS: Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

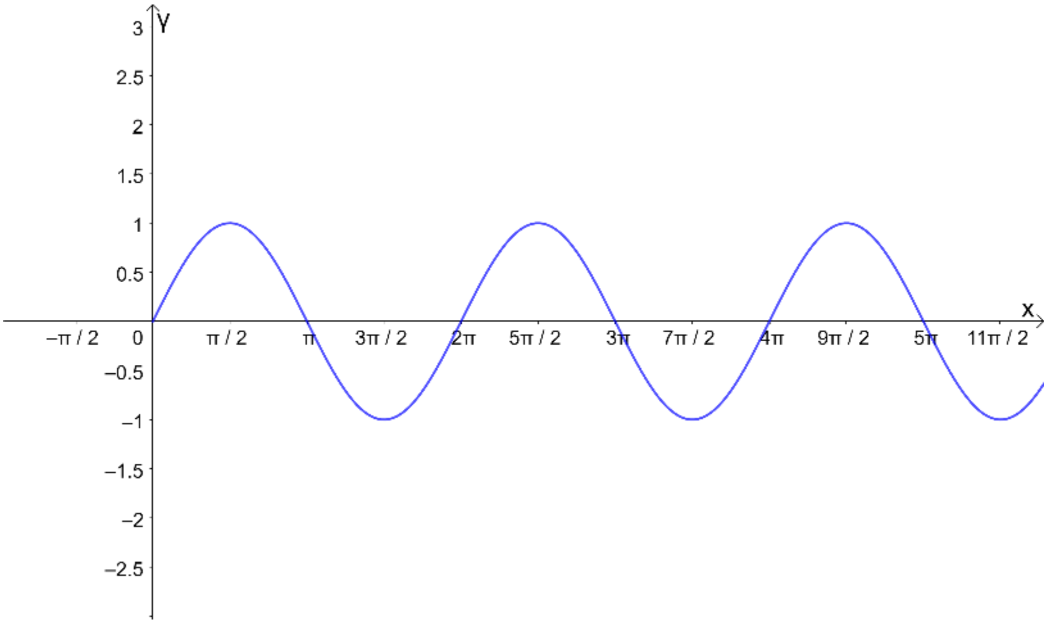
- Passo 1: Primeiro preencha a tabela de cada questão e desenhe o gráfico correspondente a expressão.
- Passo 2: Abra o **APP 7** e mude os valores do controle deslizante que contém os respectivos parâmetros na expressão:

$$f(x) = a + b.sen(c.x + d)$$

- Passo 3: Em seguida observe cada modificação dos gráficos e responda os questionamentos das questões 1,2,3 e 4

1- Soma de uma constante ao valor funcional: $\boldsymbol{f(x) = a + sen(x)}$

x	$y = 3 + sen(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x)$ = 3 + $sen(x)$ em relação ao gráfico de $g(x)$ = $sen(x)$?

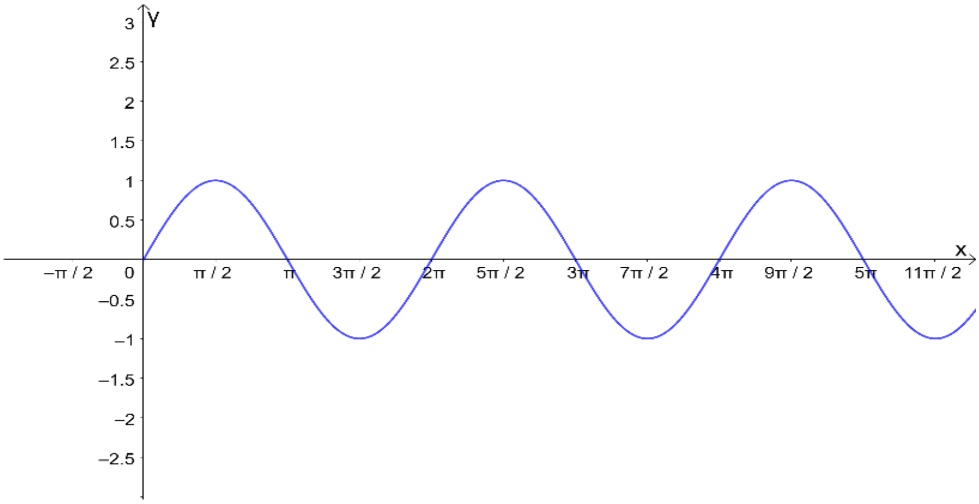
b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{a}$** para valores positivos (a > 0). Depois arraste-o para valores negativos (a < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = sen(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $\boldsymbol{f(x) = 3 + sen(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio
D_f</td><td>Imagem
Im_f</td><td>Período
P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio
$\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem
$\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período
$\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2- Multiplicação da função por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = b.sen(x)}$

x	$y = 3.sen(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x)$ = 3. $sen(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ = $sen(x)$?

____

____

b) Arreste o **parâmetro *b*** para valores positivos (b> 0). Depois arraste-o para valores negativos (b < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

____

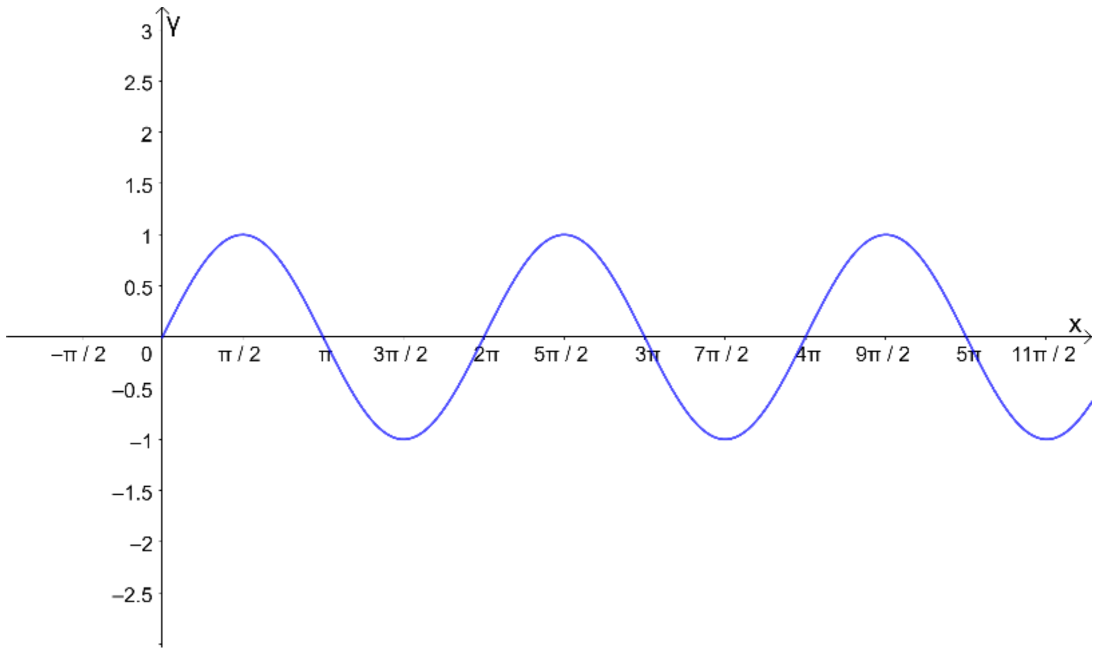
c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = sen(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = 3.sen(x)}$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

3- Multiplicação de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = sen(c.x)}$

x	$y = sen(2.x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		

$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x)$ = $sen(2.x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ = $sen(x)$?

____

____

b) Arreste o **parâmetro** $\boldsymbol{C}$ para valores positivos (c > 0). Depois arraste-o para valores negativos (c < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

____

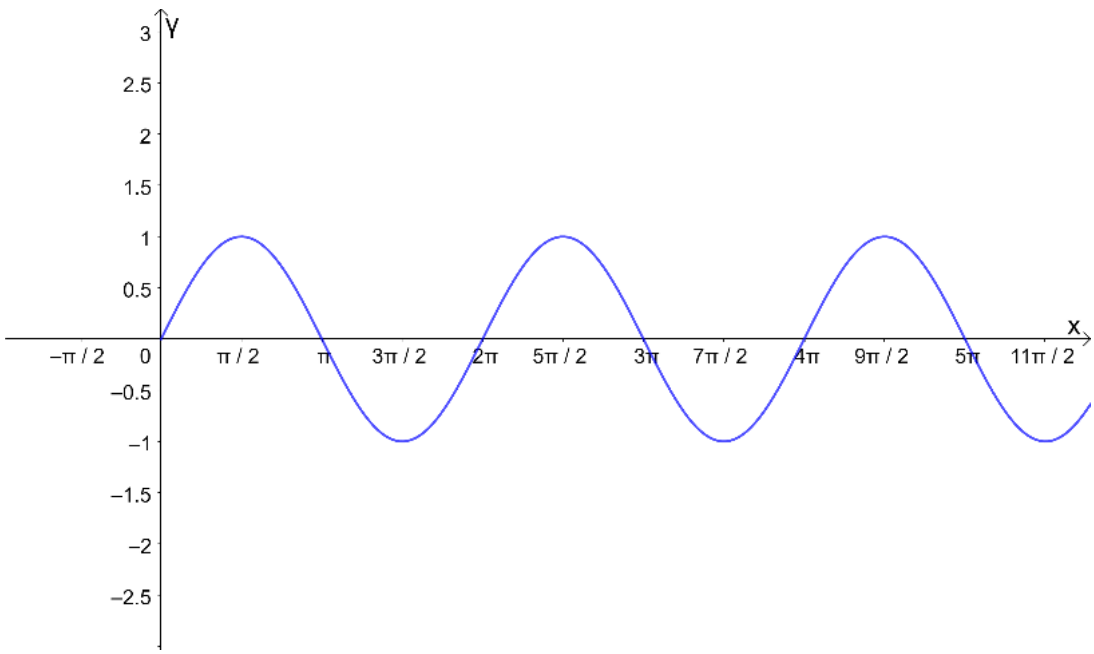
c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = sen(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$

$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

4- Soma de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = sen(x+d)}$

x	$y = sen(x+2)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = sen(x + 2)$ em relação ao gráfico de $f(x)$ = $sen(x)$?

____

b) Arreste o **parâmetro *b*** para valores positivos (d> 0). Depois arraste-o para valores negativos (d < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = sen(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = sen(x+2)}$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

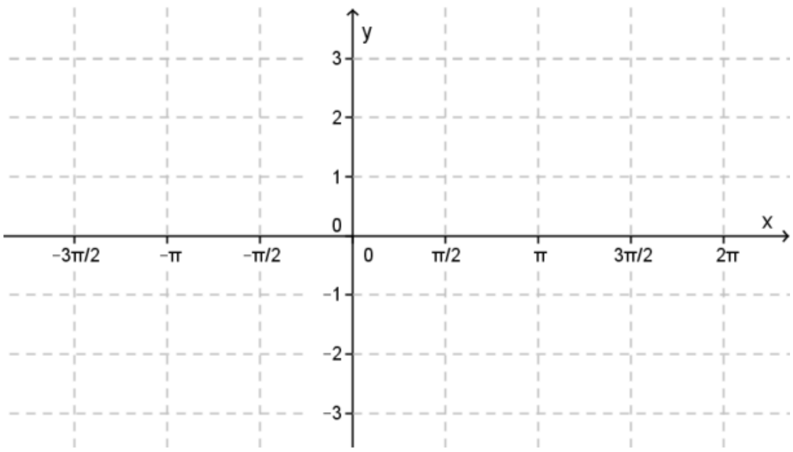
Análise a priori: Nessa atividade propomos uma situação-problema em que os estudantes precisam analisar o movimento que a roda gigante realiza com a expressão $f(x) = A + B.sen(C.x + D)$. Avaliamos que eles não tenham dificuldades em identificar que modificando a constante B o gráfico dilata verticalmente quando B>0 ou comprime verticalmente se B<0. Alterando A>0 o gráfico translada para cima enquanto que A<0 o gráfico traslada para baixo. Que modificando a constante C>0 e C<0 o gráfico comprime ou dilata horizontalmente o período da função, respectivamente. Já ao modificar a constante D>0 ou D<0 o gráfico translada na horizontal para esquerda ou para direita, respectivamente. Os estudantes poderão ter dificuldades em preencher as tabelas.

Após concluir a atividade “Altura em ação: manipulando a onda da roda gigante”, os estudantes responderão a uma lista de questões que reforça a compreensão da relação entre os parâmetros da função e o movimento circular simulado.

Quadro – Questões de fixação propostas

Questão 1: Construa o gráfico da função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

x	$x-\frac{\pi}{4}$	$sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$



Questão 2: Encontre o valor máximo e mínimo das expressões abaixo:

A) $y = 3 - sen(2x)$

B) $y = \frac{3}{2 - sen(3x)}$

Questão 3: (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5sen(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

A) $-2, 8, \pi$
B) $8, -2, \pi$
C) $\pi, -2, 8$
D) $\pi, 8, -2$
E) $8, \pi, -2$

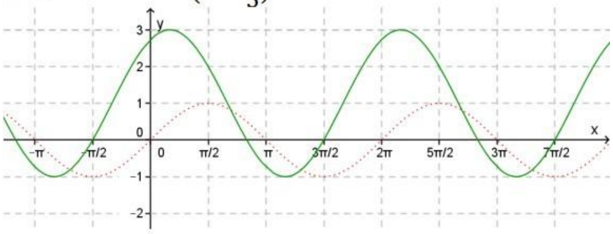
Questão 4: A partir das expressões trigonométricas encontrar o domínio, a imagem e o período de cada uma.

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	PERÍODO
$\boldsymbol{f(x) = -3sen(x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})}$			
$\boldsymbol{f(x) = 3 + 2sen(x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = sen(\frac{3\pi}{2} - 4x)}$			

Questão 5: A partir do gráfico de cada função trigonométrica quais números dos conjuntos dos Reais representa a Amplitude, o Domínio, o Período e a Imagem.

A)

$f(x) = 1 + 2sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

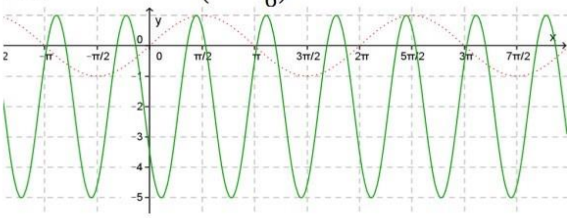


Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

B)

$f(x) = \ -2 - 3sen\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$



Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

4.8. Atividade 8: Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno

A atividade “Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno” busca levar os alunos a compreender como o deslocamento horizontal dos pontos no ciclo trigonométrico se traduz em uma curva no plano cartesiano. Assim, os estudantes descobrem a origem e o comportamento da função cosseno, visualizando a transição do movimento circular para a representação gráfica da função f(x) = cos(x).

ATIVIDADE *8*: Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno.

APP 8: https://www.geogebra.org/m/gg96dstt

OBJETIVO: Descobrir como a posição horizontal dos pontos no ciclo trigonométrico (eixo x) constrói a curva da função cosseno $f(x) = cos(x)$.

MATERIAIS: esquema da tarefa, lápis, borracha, régua círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: Acesse o APP 8.
- Passo 2: Selecione a caixa com o nome “cosseno”.
- Passo 3: Movimente o ponto “P” na circunferência e observe o desemho no plano cartesiano.
- Passo 4: Em seguida, no Quadro 1, complete os valores das colunas de $\boldsymbol{y = cos(x)}$ e dos pares ordenados $\boldsymbol{(x, y)}$.
- Passo 5: Após prencher o **Quadro 1**, marquem os valores das coordenadas $\boldsymbol{(x,\ y)}$ (coluna 3) no plano cartesiano e, com o auxílio de uma régua, transportar os pontos do plano cartesiano para o ciclo trigonométrico na **IMAGEM 1.**

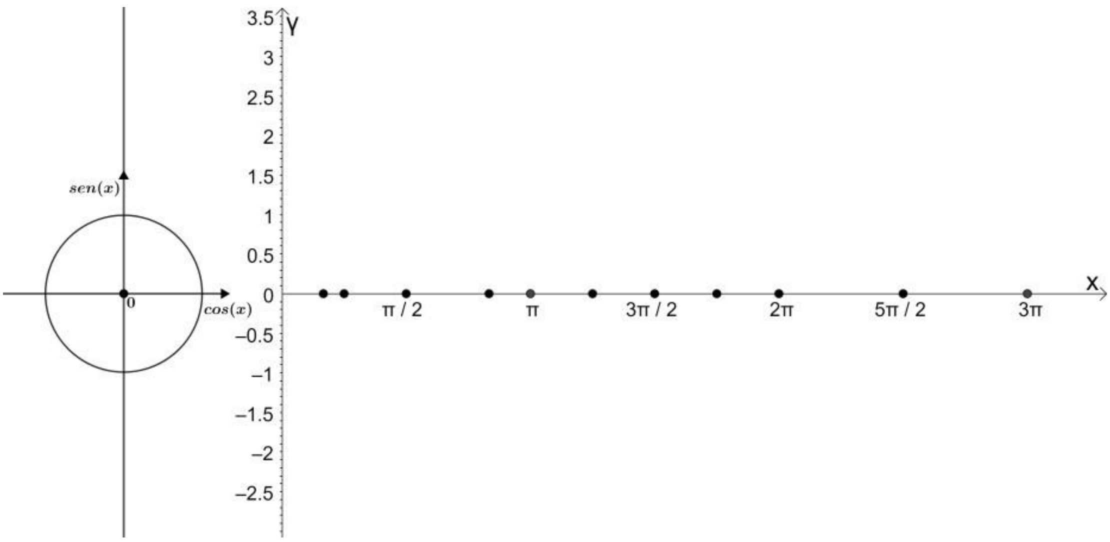
Quadro 1- Pontos no gráfico e no ciclo trigonométrico

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = cos(x)}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{3\pi}{4}$		

ÂNGULOS NOTÁVEIS			
Radiano	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grau	30°	45°	60º
$cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

π		
$\frac{5\pi}{6}$		
$\frac{5\pi}{4}$		
$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

IMAGEM 1 - Desenhe o gráfico de cosseno no plano



Agora responda os seguintes questionamentos:

1. De acordo com os valores encontrado, o gráfico construído se configura como uma função? Justifique.

---

2. Se você repetisse o procedimento e encontrasse mais pontos

---

3. Ao observar o gráfico e o ciclo trigonométrico, o que eles têm em comum?

---

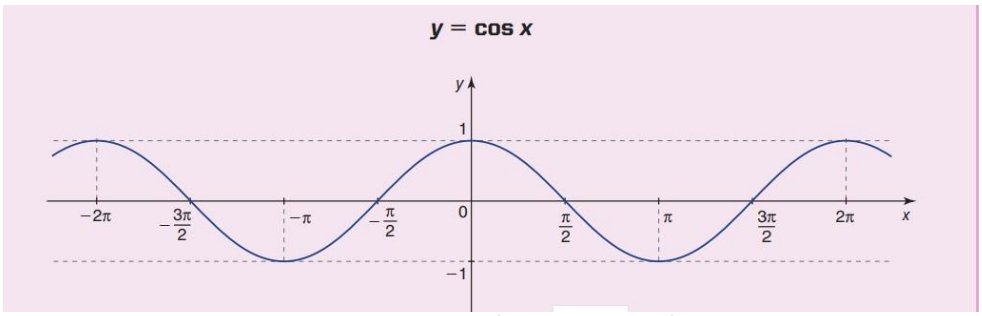
4. Como você definiria o comportamento desse gráfico?

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 8)

Podemos associar um número real x qualquer ao seno de um arco que mede x radianos. Para x = 2π, por exemplo, associamos o número 1, pois $cos(2\pi)$ = 1, isto é, (x, y) = $(x, cos(x))$ = $(2\pi, 1)$

Definição: Definimos função cosseno a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, a cada x associa $cos(x)$.

A representação da função $f(x)$ = $cos(x)$ é caracterizado como sendo uma curva **cossenoidal**. O cosseno de um ângulo (expresso em geral em radianos) é traçada em função de um ângulo θ, descreve uma oscilação repetitiva suave, sendo esta uma onda contínua. Observe:



Fonte: Paiva (2010, p.161)

Definição: Período de $f(x)$ = $cos(x)$: A função cosseno se repete periodicamente num intervalo de $[0,2\pi]$, pois:

$$cos(x) = cos(x + 2\pi) = cos(x + 4\pi) = \cdots = cos(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Propriedade: De modo geral, o período de seno é dado por cos$(cx + d)$, com c e d reais com $c \neq 0$ e $p = \frac{2\pi}{|c|}$

Definição: O domínio D_f (Observando o Eixo X) e o contradomínio CD_f da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D_f = \mathbb{R} = CD_f$. O conjunto imagem de $f(x) = cos(x)$ é o intervalo de $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq cos(x) \leq 1$, no Eixo Y.

Análise a priori: nessa atividade acreditamos que os estudantes não terão dificuldades em completar a tabela e desenhar o gráfico, visto que o aplicativo mostra como se comporta a função cosseno e por já realizarem a atividade sobre a função seno que apresenta características semelhantes. Com as atividades anteriores sobre relação entre grau e radiano eles conseguirão identificar os pares ordenados (x,y) na tabela. Acreditamos que possa haver dificuldades quando eles forem responder os questionamentos. Esperamos que possam concluir que o comportamento do ciclo trigonométrico ao plano cartesiano da expressão f(x)= cos(x) se configura uma função e que para cada valor do arco (eixo x) a um único valor para f(x) (eixo y). esperamos que eles possam concluir que o movimento da função apresenta várias repetições iguais (movimento oscilatório ou periódico).

4.9. Atividade 9*:* Cosseno Musical: criando sons no gráfico

A atividade “Cosseno musical: criando sons no gráfico”, os estudantes resolverão questões que exploram como as transformações na função cosseno afetam seu gráfico. O objetivo é fixar o entendimento sobre amplitude, frequência, fase e deslocamento, além de verificar se os alunos compreenderam a relação entre som e matemática.

SITUAÇÃO -PROBLEMA

As ondas sonoras (sons e ruídos, por exemplo) são formadas por vibrações que se propagam em meios materiais, mas não no vácuo. Tais ondas podem ser modeladas por uma função do tipo trigonométrica ou por uma soma de funções desse tipo, com parâmetros associados a características importantes dessa onda, como amplitude e frequência.

Observe um modelo matemático obtido a partir de uma onda sonora construída no aplicativo GeoGebra, que mostra o comportamento do som quando se altera os parâmetros da função $f(x) = A + B.\ cos(C.\ x + D)$.

PROCEDIMENTO*: Clique no link do APP:* https://www.geogebra.org/m/m5adyjuk . Digite na caixa “Tempo do Som” o número (em segundos) para que o som fique tocando. Em seguida, aperte o botão “Tocar”. Depois explore o objeto e reflita, respondendo os questionamentos.

1- O que acontece com o som quando modificamos o valor do:

a) Parâmetro A?

____

____

b) Parâmetro B?

____

____

c) Parâmetro C?

____

____

d) Parâmetro D?

ATIVIDADE *9*: Cosseno Musical: criando sons no gráfico

APP 9: https://www.geogebra.org/m/sxe7zz9b

OBJETIVO: Explorar de que forma a amplitude, deslocamento vertical, frequência e fase alteram a curva da função cosseno.

MATERIAIS: Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo Geogebra.

PROCEDIMENTOS:

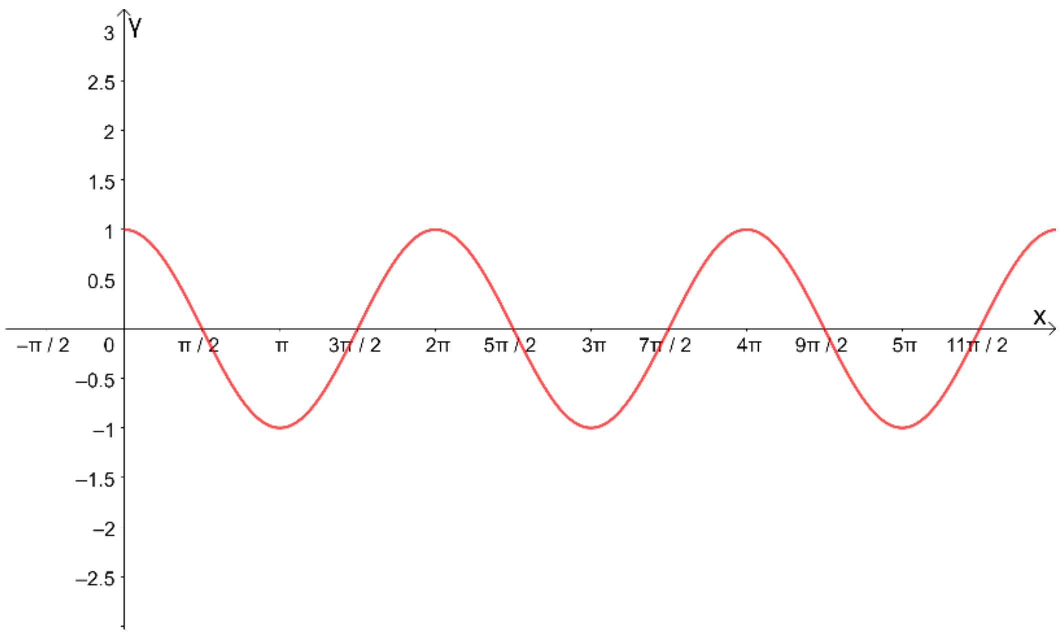
- Passo 1: Primeiro preencha a tabela de cada questão e desenhe o gráfico correspondente a expressão.
- Passo 2: Abra o **APP 9** e mude os valores do controle deslizante que contém os respectivos parâmetros na expressão:

$$\boldsymbol{f(x) = a + b.cos(c.x + d)}$$

- Passo 3: Em seguida observe cada modificação dos gráficos e responda os questionamentos das questões 1,2,3 e 4

1- Soma de uma constante ao valor funcional**:** $\boldsymbol{f(x) = a + cos\ (x)}$

x	$y = -2 + \cos(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = -2 + sen(x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = \cos(x)$?

---

b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{a}$** para valores positivos ($a > 0$). Depois arraste-o para valores negativos ($a < 0$). O que você pôde observar no gráfico da função de cosseno?

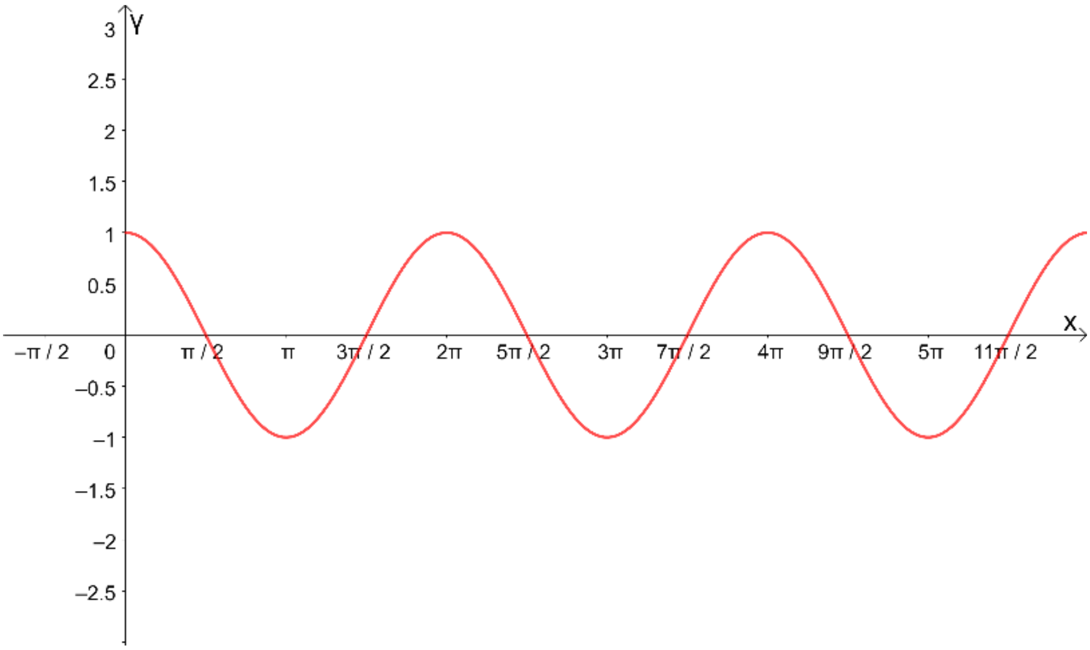
---

c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = cos(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = -2 + cos(x)}$		
Resultados						
Domínio D_g	Imagem Im_g	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio $\boldsymbol{D_f}$**	**Imagem $\boldsymbol{Im_f}$**	**Período $\boldsymbol{P}$**
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

2- Multiplicação da função por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = b.cos(x)}$

x	$y = -2.cos(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = -2.cos(x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

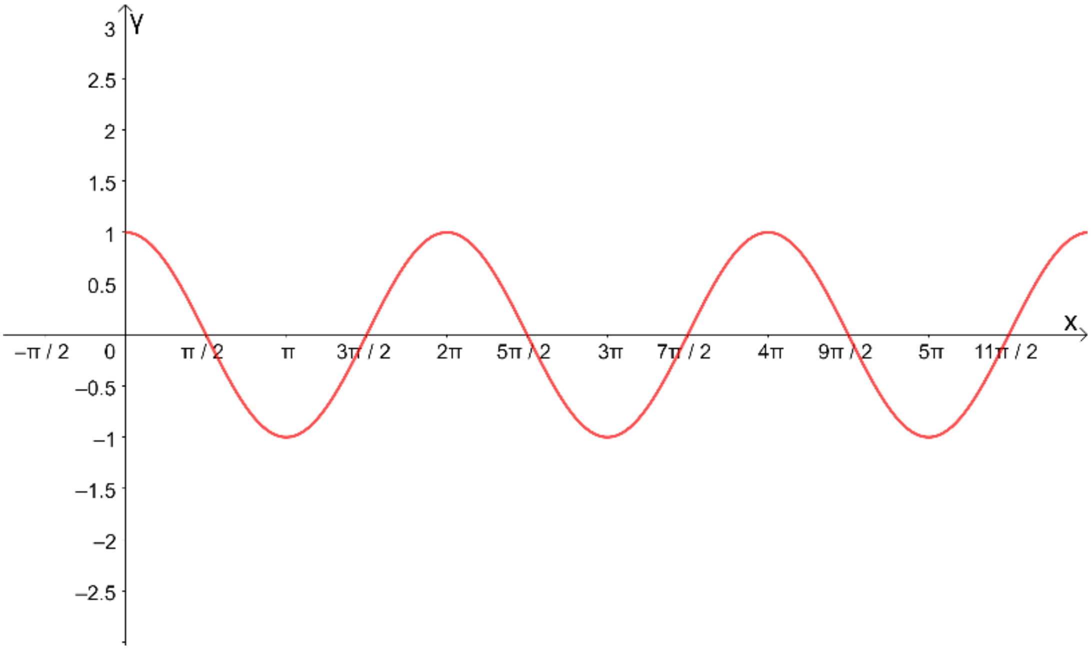
b) Arreste o **parâmetro b** para valores positivos (b> 0). Depois arraste-o para valores negativos (b < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de cosseno?

c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = cos(x)$				Função composta: $f(x) = -2.cos(x)$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio D_f**	**Imagem Im_f**	**Período P**
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

3- Multiplicação de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = cos(c.x)}$

x	$y = cos(3.x)$	(x,y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



d) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = cos(3.x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

e) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{c}$** para valores positivos (c > 0). Depois arraste-o para valores negativos (c < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

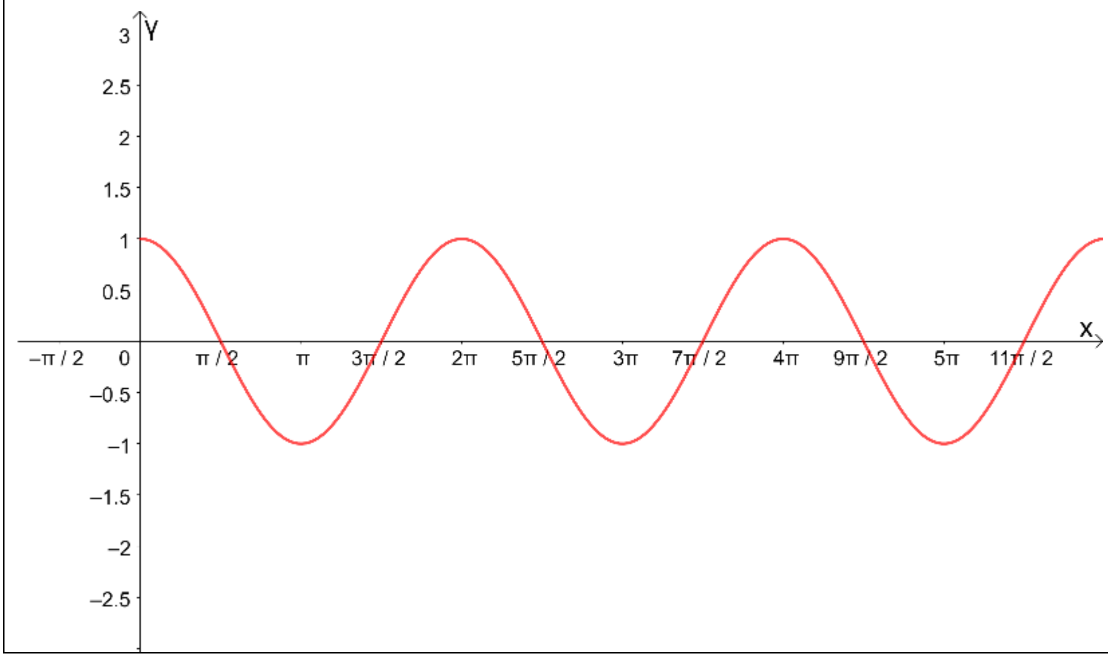
f) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = \cos(x)$	Função composta: $\boldsymbol{f(x) = cos(3x)}$
Resultados	

Domínio D_g	Imagem Im_g	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

4- Soma de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = cos(x + d)}$

x	$y = cos(x-2)$	(x,y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



d) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = cos(x - 2)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

____

____

e) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{b}$** para valores positivos (d> 0). Depois arraste-o para valores negativos (d < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

____

f) Complete o quadro

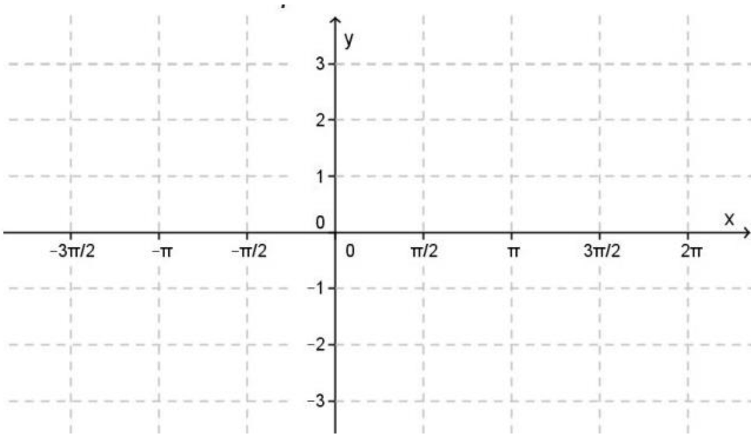
<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = sen(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $f(x) = \boldsymbol{cos(x-2)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio
D_f</td><td>Imagem
Im_f</td><td>Período
P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio
$\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem
$\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período
$\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Análise a priori: Nessa atividade propomos uma situação-problema em que os estudantes precisam analisar o som da onda e em seguida relacionar as modificações das tonalidades com a expressão $f(x) = A + B.cos(C.x + D)$. Avaliamos que eles não tenham dificuldades em identificar que ao alterar a amplitude a intensidade fica mais forte ou mais fraco, e que modificando a constante B o gráfico dilata verticalmente quando B>0 ou comprime verticalmente se B<0. Alterando o deslocamento o som parar, e modificando A>0 o gráfico translada para cima enquanto que A<0 o gráfico traslada para baixo. Que alterando a Frequência o som fica mais Agudo (som alto) ou Grave (som baixo), e que modificando a constante C>0 e C<0 o gráfico comprime ou dilata horizontalmente o período da função, respectivamente. Já ao modificar a Fase o som apresenta um pequeno "bip" que é o momento de mudança de fase, e alterando a constante D>0 ou D<0 o gráfico translada na horizontal para esquerda ou para direita, respectivamente. Os estudantes poderão ter dificuldades em preencher as tabelas.

Após a atividade “Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno”, os estudantes resolverão uma lista de questões que fortalece a compreensão da ligação entre o ciclo trigonométrico e a curva da função cosseno.

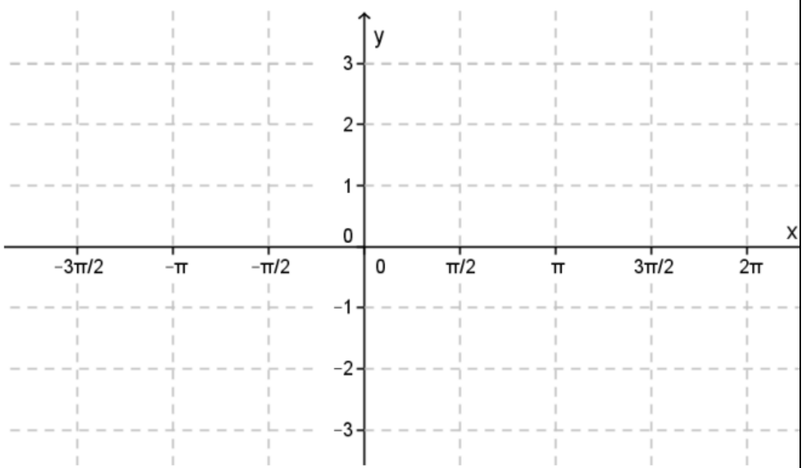
Questões de fixação propostas

Questão 1: Construa o gráfico da função $f(x)1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Questão 2: Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + \cos(x)$

x	*cos x*	*1+ cos x*



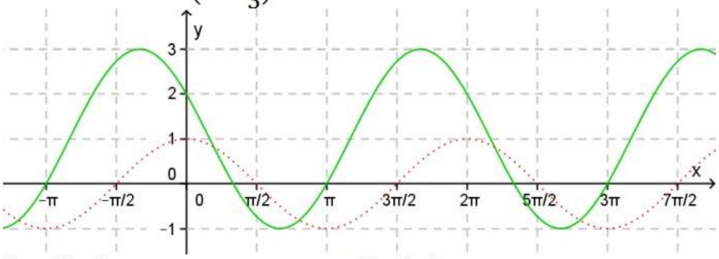
Questão 3: A partir das expressões trigonométricas encontrar o domínio, a imagem e o período de cada uma.

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	PERÍODO
$\boldsymbol{f(x) = -cos(x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = cos(-3x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = -cos(x + \frac{\pi}{6})}$			
$\boldsymbol{f(x) = -3 + 2cos(x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = cos(\frac{3\pi}{2} - 4x)}$			

Questão 4: encontre os valores da Amplitude, domínio, imagem e período nos gráficos a seguir.

A)

$f(x) = 1 + 2cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

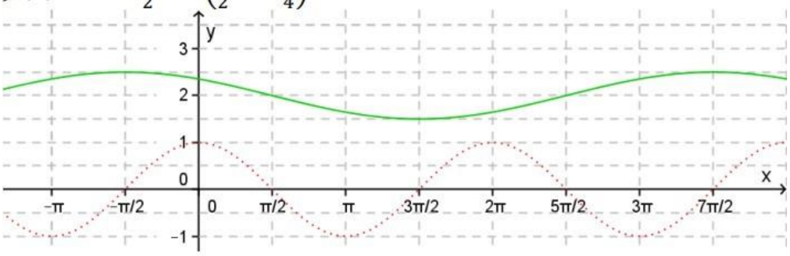


Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

B)

$f(x) = 2 + \frac{1}{2}cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$



Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

Questão 5: (UFPB) Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função $x(t) = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que t é dado em segundo e x, em metro. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

I. No instante $t = 0$, o objeto ocupa a posição $x = 4\ m$
II. O valor máximo que a posição x pode assumir é $5\ m$.
III. O valor mínimo que a posição x pode assumir é $-4\ m$.
IV. O móvel passa pela posição $x = 4$ nos tempos $t = n\pi - \frac{\pi}{4}$, com $n = 1,2,3$.

Estão corretas:
A) I e III
B) II e IV
C) I e II
D) II e III
E) III e IV

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta informações coletadas a partir das respostas de professores de matemática que atuam ou atuaram em escolas da Educação Básica no estado do Pará. As contribuições desses professores indicam que adaptações nas atividades são necessárias, dependendo do perfil de cada turma. A sugestão mais frequente foi a de ajustar o número de questões e o tempo de aplicação.

Inicialmente, planejamos aplicar nossa Sequência Didática a estudantes do 2º ano do Ensino Médio em uma escola pública no município de São João da Ponta-PA. Entre as possibilidades de validação consideradas estavam: (1) a aplicação direta do conjunto de atividades com os estudantes, (2) a oferta de um curso de GeoGebra voltado a esse público e (3) a validação da proposta por professores de Matemática.

No entanto, ao longo do desenvolvimento da pesquisa, surgiram limitações de tempo, de acesso aos estudantes e de disponibilidade de sala de informática que inviabilizaram as duas primeiras alternativas. Assim sendo, escolhemos por realizar a validação da Sequência Didática por meio da análise e contribuição de professores de Matemática, o que possibilitou uma avaliação crítica e fundamentada da proposta.

Diante disso, e considerando que o conjunto de atividades do trabalho de Corrêa (2016) já havia sido validado, optamos por criar um questionário online. O objetivo era que docentes de matemática avaliassem nossa Sequência Didática, analisando o conjunto de 9 atividades que adaptamos para o uso com o GeoGebra.

Para a coleta de dados junto aos professores, utilizou-se o questionário elaborado por Ferreira (2023) em sua dissertação de mestrado, o qual fizemos adaptações para contemplar aspectos relacionados ao ensino por meio de atividades experimentais com o GeoGebra.

Inicialmente, enviamos aos docentes nossa Sequência Didática em formato PDF, composta por nove atividades. Em cada atividade, os participantes precisavam clicar nos links disponíveis para abrir o aplicativo correspondente, com o objetivo de verificar se o aplicativo oferecia suporte adequado para a proposta apresentada.

Após essa etapa, os docentes deveriam acessar o link https://forms.gle/DHmBS6GzPT9S2r5FA para responder ao questionário online, organizado em três etapas, no qual realizaram a avaliação da Sequência Didática.

A primeira etapa descrita como **Avaliação Individual das Atividades Experimentais no GeoGebra** foi dividida em cinco seções, da seguinte forma: **seção 1**-ATIVIDADE 1 E ATIVIDADE 2; **seção 2**- ATIVIDADE 3 E ATIVIDADE 4; **seção 3**-ATIVIDADE 5, **seção 4** – ATIVIDADE 6 E ATIVIDADE 7; **seção 5** – ATIVIDADE 8 E ATIVIDADE 9. Nesta etapa os docentes deveriam responder a três perguntas para cada seção que continha o mesmo comando com a seguinte estrutura:

1 - A estrutura das Intervenções conduz a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

____

____

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

____

____

3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?

____

____

Na segunda etapa descrita como **Avaliação Conjunta das Atividades Experimentais no GeoGebra** foi dividida em apenas uma seção. Nesta era necessário responder cinco perguntas avaliando o conjunto das 9 atividades da SD.

1 - As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?

____

____

2 - Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para compatibiliza-la?

3 - O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar a adequação?

4 - Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhor ordená-la?

5 - O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?

Na terceira etapa, e última, descrita como ***Avaliação Complementar*** dividida em uma seção, que tem como foco a interatividade entre o professor, aluno e saber, contém três perguntas, onde o docente irá contribuir com argumentos plausíveis sobre a Sequência Didática.

1 - A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?

A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)

Caso assinale (A), (B), (C), ou (D), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

____

____

2 - Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) **Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica?**

____

____

b) **Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?**

____

____

c) **Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?**

____

____

3 - Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

____

5.1. Respostas das avaliações dos professores

Nessa etapa de coleta de dados, houve demora no recebimento das respostas devido à sobrecarga de trabalho dos professores, que às vezes se esquecem de responder ao questionário. Também houve alguns professores com os quais insistimos por três vezes na participação da pesquisa, sem receber retorno. Apesar de todo o esforço, conseguimos coletar 15 respostas de professores de matemática.

Na conversa que tive com eles via WhatsApp, informei que, sempre que lessem uma atividade e clicassem nos links de cada aplicativo, verificassem se o manuseio favorecia o estudante a responder às perguntas. Além disso, pedi que, ao avaliarem a sequência didática, deixassem suas sugestões, críticas e argumentos plausíveis sobre o conteúdo abordado, com a intenção de apontar melhorias.

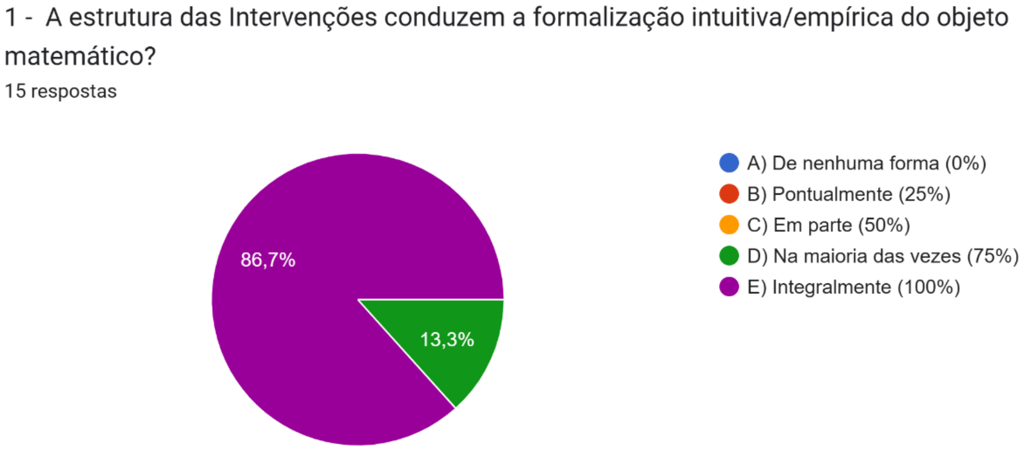
Para identificarmos quais professores deram suas sugestões, enumeramo-los de Prof. 01, Prof. 02, e assim por diante até o Prof. 15, de acordo com a data e hora de suas respostas ao questionário.

5.1.1. Avaliação a cada duas atividades

Como dito anteriormente, a primeira etapa consistiu na análise de duas atividades por seção, uma após a outra, pois se complementavam. Ou seja, a Atividade 1 complementava a Atividade 2; a Atividade 3 complementava a Atividade 4; a Atividade 5 (função de Euler), que transforma um número real em um ponto na circunferência, foi analisada isoladamente; a Atividade 6 complementava a Atividade 7; e a Atividade 8 complementava a Atividade 9.

Na seção 1 – ATIVIDADE 1 e ATIVIDADE 2: obtivemos os seguintes percentuais de acordo com os gráficos a seguir.

Gráfico 24 - Percentual da Pergunta 1 para as Atividades 1 e 2



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Pedimos que os professores marcassem uma das 5 alternativas descritas no gráfico. Percebemos que 13 (86,7%) estão integralmente de acordo com a estrutura intuitiva/empírica das intervenções do objeto matemático, enquanto 2 (13,3%) concordam na maioria das vezes. Caso tivessem sido escolhidas as alternativas A, B, C ou D, pedíamos que dessem sugestões para melhorar a formalização. Recebemos duas sugestões:

Quadro 10 - Sugestões dos professores da pergunta 1 para Atividade 1 e 2

Prof. 04	“Como você ainda não aplicou em sala com seus alunos, ajustes sempre aparecem, então é preciso, uma hora ou outra, fazer pequenos ajustes”.
Prof. 15	“Desde que estejam organizadas com base em situações didáticas que articulem a experiência concreta com a abstração progressiva”.

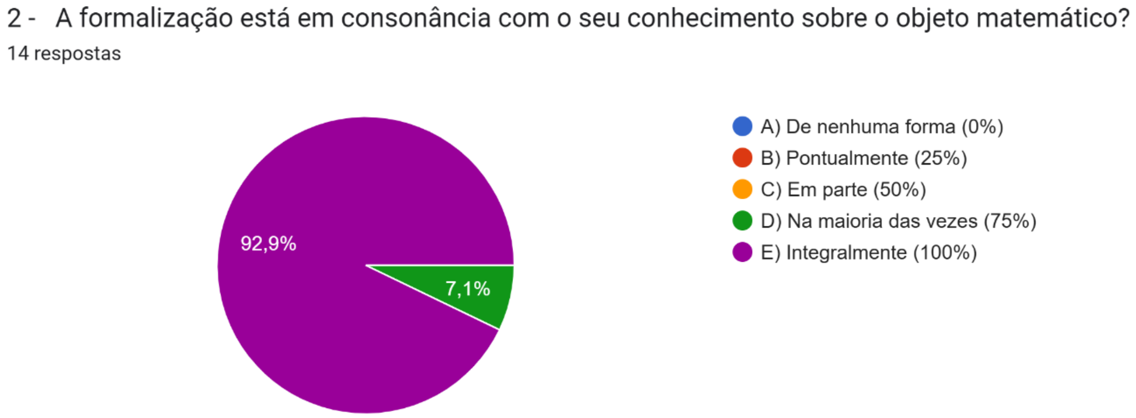
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O Prof. 4 sugere que façamos ajustes sempre que necessário. Para o Prof. 15, se a atividade estiver organizada de forma a se tornar significativa para o estudante, poderá articular a experimentação (GeoGebra) para o entendimento dos conceitos (funções trigonométricas). Esse comentário é muito pertinente, pois reforça a importância de atividades que partem do concreto e caminham para a abstração progressiva, princípio fundamental no ensino de Matemática.

Nas atividades propostas, seguimos exatamente essa lógica: iniciamos com situações concretas, como: uso de medidas no GeoGebra, simulações de figuras, manipulação de gráficos, e conduzimos o estudante para a formalização algébrica e dedução das propriedades. Como nossa sequência didática não foi aplicada, ajustes sempre serão necessários e deverão ser adaptados às especificidades de cada turma.

Na pergunta 2, obtivemos 14 respostas (92,9%) indicando que a formalização das atividades está de acordo com o conhecimento do objeto. Nessa questão, o professor que escolheu a alternativa D não deu sugestões para melhorar a formalização.

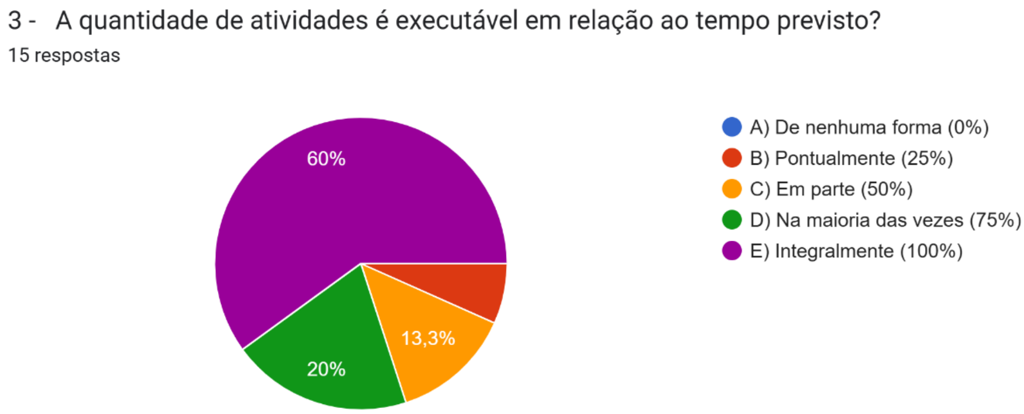
Gráfico 25 - Percentual da pergunta 2 para as Atividades 1 e 2



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Na pergunta de número 3, que tratava do tempo de execução das atividades, o gráfico mostrou que 9 (60%) dos professores concordam que o tempo para responder às atividades está em consonância, enquanto outros professores marcaram as alternativas B, C e D, gerando um percentual de 40% de discordância.

Gráfico 26 - Percentual da pergunta 3 para as Atividades 1 e 2



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Quanto as argumentações dos professores, tivemos 4 respostas para melhorar a execução das atividades com o tempo.

Quadro 11 - Sugestões dos professores da pergunta 3 para Atividade 1 e 2

Prof. 02	"Atividade deve ser realizada no mínimo em 2 horas".
Prof. 04	"Como você ainda não aplicou em sala com seus alunos, ajustes sempre aparecem, então é preciso, uma hora ou outra, fazer pequenos ajustes".
Prof. 12	"Otimizar o tempo com tutoriais dos apps na pré aula".
Prof. 11	"Caso os discentes ainda não tenham domínio do software geogebra, possivelmente as atividades solicitadas demoraram mais tempo que o imaginado. Logo, talvez seja necessária uma aula para a turma sobre o uso do geogebra".
Prof. 15	"A quantidade de atividades só será executável em relação ao tempo previsto se houver: Planejamento realista; estimativa adequada do tempo por atividade; Flexibilidade para ajustes durante a execução; Consideração do ritmo dos alunos. Mantendo uma constante reflexão-na-ação".

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Na resposta do Prof. 11 sobre o domínio dos estudantes em saber manusear o GeoGebra, o comentário é bastante relevante, pois realmente o domínio prévio do software influencia diretamente o tempo de execução das atividades.

Na elaboração da sequência, previmos que poderia haver essa dificuldade. Por isso, organizamos as atividades de forma que o professor pudesse introduzir o software de maneira gradual, explorando inicialmente comandos básicos. Precisamos, antes de iniciar as atividades, preparar uma aula para mostrar o funcionamento do software e suas aplicações.

A princípio, nossa Sequência Didática não tem como objetivo ensinar os estudantes a mexer nos comandos, construir desenhos geométricos ou aplicativos, mas sim que eles mexam no aplicativo já construído e observem as modificações dos objetos, os resultados de cada ângulo e os padrões dos gráficos para cada parâmetro da expressão $f(x) = a + b.Trig(cx + d)$.

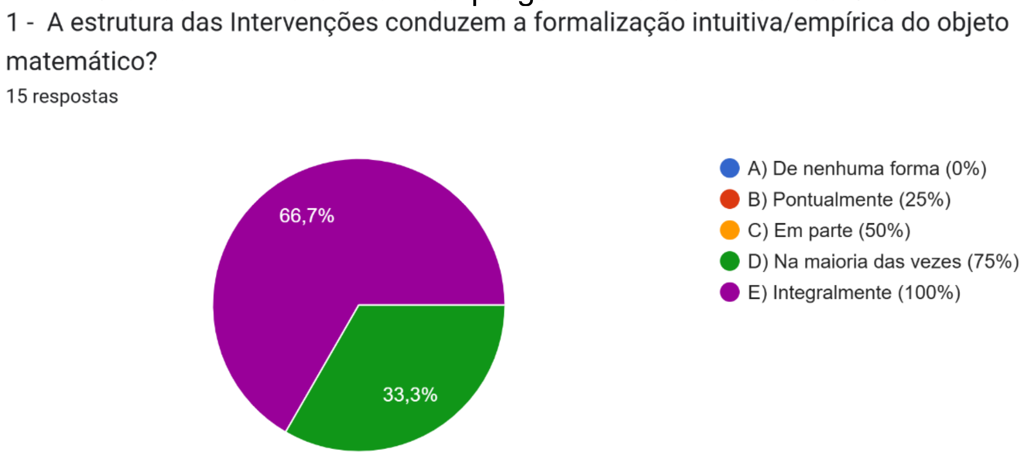
No entanto, com uma boa organização e programação adequada, o docente pode elaborar uma aula para ensinar a mexer nas configurações e comandos do GeoGebra, permitindo ao estudante visualizar simultaneamente gráficos e textos, convidando-o a interagir e aprender fazendo. Também, o professor poderá utilizar a versão online do GeoGebra, que funciona como uma rede social de aprendizado e cooperação. Aqui, os estudantes poderão baixar construções, modificá-las ou alterá-las e depois salvá-las no próprio site, contribuindo assim para o compartilhamento de conhecimento.

O Prof. 04 escreveu a mesma resposta à pergunta de número 1, enquanto que os Profs. 02 e 12 responderam que é preciso adaptar o tempo e que as atividades deveriam ser realizadas em, no mínimo, 2 horas. Essa observação encontra justificativa e aprofundamento no comentário do Prof. 15, que amplia a reflexão sobre a gestão do tempo didático e a organização da sequência de atividades. O professor reconhece que a execução eficiente das tarefas depende de planejamento realista, flexibilidade e atenção ao ritmo dos estudantes.

Nessas sugestões, podemos refletir que as adaptações são necessárias de acordo com as habilidades e conhecimentos de cada turma.

Na seção 2 – ATIVIDADE 3 e ATIVIDADE 4: obtivemos os seguintes percentuais:

Gráfico 27 - Percentual da pergunta 1 das Atividades 3 e 4.



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

De um total de 5 professores (33,3%), recebemos 3 sugestões. No entanto, uma dessas sugestões era idêntica à resposta fornecida na questão 1 das Atividades 1 e 2. Portanto, incorporaremos apenas uma das sugestões que consideramos relevante.

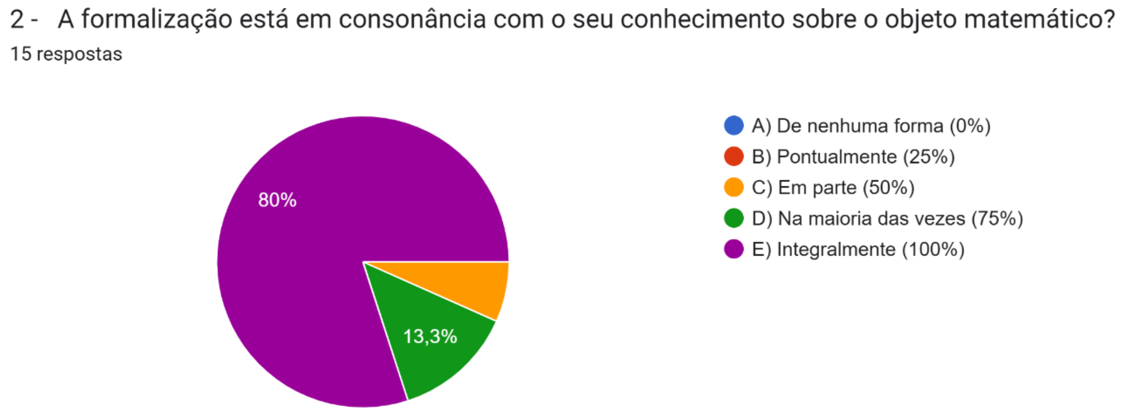
Quadro 12 - Sugestões dos professores da pergunta 1 para Atividade 3 e 4

Prof. 15	“Bom, a estrutura das intervenções pode conduzir, desde que esteja ancorada em situações concretas, representações visuais e exploração ativa por parte dos alunos. Então, sim”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nesta argumentação, o Prof. 15 afirma que, desde que as questões apresentem representações visuais, os estudantes conseguem resolver as atividades. Esse comentário reforça a importância de ancorar a prática em representações visuais e exploração ativa. Nesse sentido, a utilização do GeoGebra foi justamente a estratégia escolhida para atender a essa necessidade, pois possibilita ao aluno vivenciar a matemática de forma dinâmica e investigativa. Os aplicativos que construímos para as atividades 3 e 4 garantem uma representação visual aos estudantes para que respondam às intervenções.

Gráfico 28 - Percentual da pergunta 2 das Atividades 3 e 4



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Embora a maioria dos professores (80%, ou 12 docentes) concorde com a formalização da questão (conforme demonstrado no gráfico da questão 2), apenas uma sugestão foi recebida dos três professores (20%) que escolheram as alternativas C ou D.

Quadro 13 - Sugestões dos professores da pergunta 2 para Atividade 3 e 4

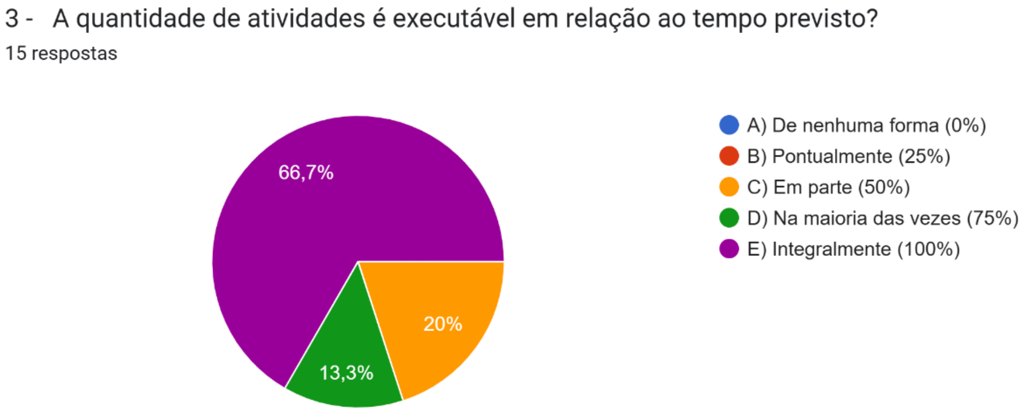
Prof. 15	“Em partes, sim, pois muitos fenômenos físicos dependem diretamente da definição e propriedades das funções trigonométricas associadas ao ciclo”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O comentário destaca a relação das funções trigonométricas com fenômenos físicos, e concordo plenamente. Mas, nessa atividade inicial, preferi usar o jogo Roda a Roda como situação-problema. A ideia foi trabalhar o movimento circular e os ângulos de forma lúdica e visual no GeoGebra, preparando os estudantes para, nas atividades seguintes, conectar esse mesmo conteúdo aos fenômenos físicos.

Nas atividades 3 e 4, os estudantes precisam determinar os valores dos ângulos de seno, cosseno e tangente; não precisam, necessariamente, da ideia de função para resolvê-las. Em nossas análises a priori, destacamos que eles poderão ter dificuldades em relacionar ângulos em graus a radianos e vice-versa, já que o aplicativo apresenta apenas os ângulos notáveis e seus respectivos ângulos congruentes.

Gráfico 29 - Percentual da pergunta 3 das Atividades 3 e 4



Fonte: Dados da pesquisa (2025).

Em resposta à questão 3, a maioria dos professores (66,7%, n=10) considerou a quantidade de atividades adequada ao tempo previsto, expressando concordância integral. Uma minoria (33,3%, n=5) discordou, optando pelas alternativas C ou D. A questão recebeu apenas duas sugestões adicionais.

Quadro 14 - Sugestões dos professores da pergunta 3 para Atividade 3 e 4

Prof. 03	“Dependendo do material que está sendo utilizado, eu particularmente utilizo apostilas com muitas questões e que nem sempre são todas resolvidas, mas grande parte sim”.
Prof. 15	“Dependendo do referencial teórico adotado para com sua metodologia de ensino, o tempo torna-se um grande aliado”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nas atividades 3 e 4, quando as adaptei para uso no GeoGebra, percebi que o aplicativo construído nos fornecia resultados rapidamente quando modificávamos os valores dos ângulos, tanto para o arco seno quanto para o cosseno, mais rapidamente do que se utilizássemos apenas o ciclo trigonométrico desenhado em uma folha de papel.

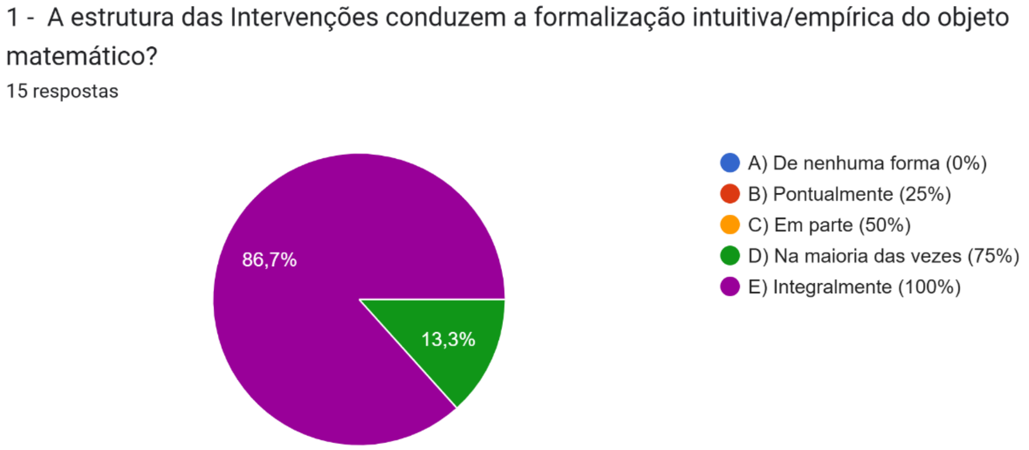
Dessa forma, em conformidade com a resposta do Prof. 03, muitas vezes o professor dispõe de materiais extensos, como apostilas, mas não consegue resolver todas as questões pelo tempo limitado. Por isso, grande parte é feita, mas não a totalidade. A proposta que apresento com o GeoGebra procura justamente otimizar esse tempo: em vez de o aluno repetir muitas questões semelhantes, ele tem a oportunidade de explorar visualmente o conceito, manipular a construções e compreender melhor as propriedades.

Assim, mesmo resolvendo menos exercícios, a aprendizagem se torna mais significativa e favorece a compreensão para resolver outros problemas depois. A quantidade de questões pode ser toda resolvida ou não; por isso, a necessidade de sempre adaptá-las.

O Prof. 15 afirma que, dependendo da metodologia utilizada, o tempo será um grande aliado. Esse comentário se conecta ao método da descoberta, que está inserido na metodologia de ensino por atividades experimentais (SÁ, 99). De fato, quando os estudantes têm a oportunidade de manipular, investigar e chegar às próprias conclusões, o tempo de aula não é um obstáculo, mas um aliado. Com o GeoGebra, essa descoberta acontece de forma visual e dinâmica, permitindo que cada momento da aula seja voltado para a exploração ativa e significativa dos conceitos.

Na seção 3 – Atividade 5: Em relação à questão 1, a estrutura das intervenções intuitivas/empíricas obteve alta aprovação entre os professores: 86,7% (n=13) concordaram totalmente, enquanto 13,3% (n=2) concordaram na maioria das vezes. Nenhum professor ofereceu sugestões adicionais para essa questão.

Gráfico 30 - Percentual da pergunta 1 da Atividades 5

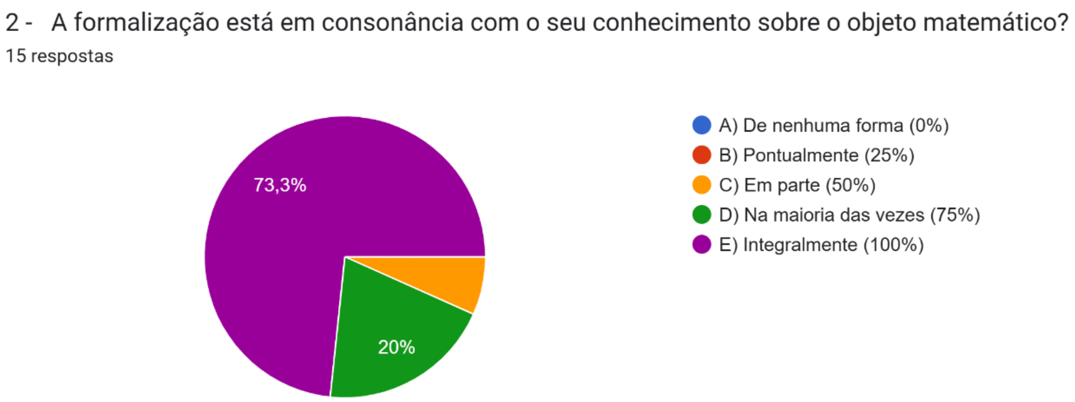


Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Os resultados da questão 2 revelam uma forte concordância dos professores (73,3%, n=11) em relação à importância da formalização do conhecimento sobre o objeto matemático. Uma pequena parcela (6,7%, n=1) demonstra concordância parcial, e 20% (n=3) indicam concordar na maioria das vezes.

Para uma representação visual destes dados, consultar o Gráfico 31 a seguir.

Gráfico 31 - Percentual da pergunta 2 da Atividades 5



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Não foram obtidas sugestões para a presente pergunta. Apenas a pergunta 3 recebeu quatro sugestões. Apresentaremos três dessas sugestões, excluindo uma por ser idêntica a respostas fornecidas em atividades anteriores.

Quadro 15 - Sugestões dos professores da pergunta 3 para Atividade 5

Prof. 04	“Quem pode afirmar é o seu público alvo. Minha sugestão é que você aplique e faça os ajustes possíveis”.

Prof. 11	“O assunto abordado requer que os discentes já apresentem domínio e autonomia acerca do assunto, todavia na maioria das vezes isso não é contemplado em 100%, assim talvez o docente acabe por enfrentar um tanto de dificuldade para conseguir realizar as atividades em uma hora aula”.
Prof. 14	“Poderia acrescentar algumas atividades para fixação do tópico em questão”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

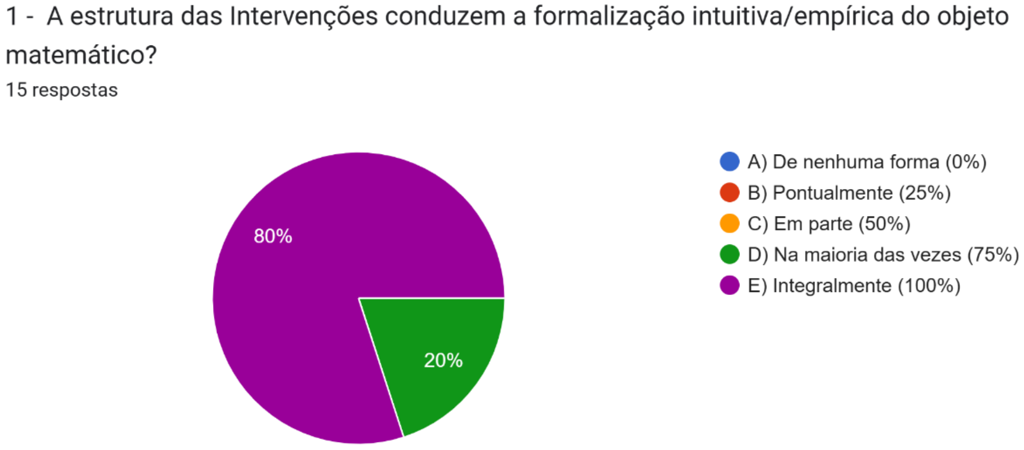
O Prof. 04 destaca que façamos os ajustes necessários. Na avaliação do Prof. 11, ele destacou que o docente, ao aplicar esta atividade, poderá ter dificuldade em realizá-la se o estudante não apresentar o domínio do conteúdo e que o tempo de 1 hora/aula pode não ser suficiente. Esse comentário ressalta um ponto importante: algumas atividades exigem que os estudantes já tenham certo domínio e autonomia, o que nem sempre acontece totalmente em sala de aula.

No entanto, a proposta que apresento, baseada em atividades experimentais com o GeoGebra, permite que os alunos construam esse conhecimento de forma visual e interativa. Dessa maneira, mesmo aqueles que ainda não têm total autonomia conseguem acompanhar a atividade, explorar os conceitos e alcançar a compreensão dentro do tempo de aula, transformando um possível obstáculo em oportunidade de aprendizagem significativa

Na resposta do Prof. 14, ele sugere que sejam acrescentadas questões de fixação, por se tratar de um tópico que envolve a ideia de função. Nessa atividade, elaborei uma situação-problema de modo que as perguntas pudessem ser suficientes para os estudantes relembrarem o conceito de função, já que eles viram este conteúdo no 1º ano do Ensino Médio.

Na seção 4 – ATIVIDADE 6 e ATIVIDADE 7, quando perguntados sobre a estrutura das atividades tivemos o seguinte percentual:

Gráfico 32 - Percentual da pergunta 1 para as Atividades 6 e 7



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

A maioria das respostas dos professores concordam integralmente com estrutura das intervenções intuitiva/empírica para esta atividade. Tivemos duas sugestões com os seguintes comentários:

Quadro 16 - Sugestões dos professores da pergunta 1 para Atividade 6 e 7

Prof. 03	“A função seno precisa de bases dos conceitos de funções, muito difícil o aluno associar”.
Prof. 15	“A função seno é um ótimo exemplo de como a formalização precisa de uma base empírica bem construída”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A frase do Prof. 03 que marcou a alternativa D) argumenta que os estudantes precisam ter bases conceituais de funções e que os estudantes teriam dificuldades em associar os pontos. Embora a função seno e cosseno exija conhecimentos prévios sobre funções, as atividades propostas com o GeoGebra permitem que os estudantes desenvolvam esses conceitos de forma visual e exploratória. A interação com os gráficos favorece a construção gradual de significados. Assim, a tecnologia atua como mediadora na aprendizagem. A dificuldade apontada reforça a importância de abordagens dinâmicas e investigativas no ensino.

O Prof. 15 corrobora com a frase dita pelo Prof. 03, que o conteúdo de funções precisa de bases empíricas para os estudantes poderem formalizar o conceito. As atividades desenvolvidas com o GeoGebra contribuem justamente para essa construção, ao permitir que os alunos explorem visualmente os comportamentos da função. Essa vivência facilita a transição do intuitivo para o formal, tornando o aprendizado mais significativo.

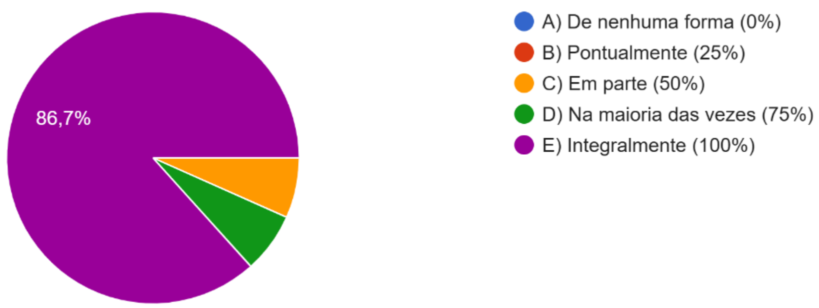
Acreditamos que, com as atividades anteriores, os docentes busquem relembrar o conceito de função na Atividade 5 para os estudantes conseguirem associar os pontos no plano cartesiano e construir gráficos.

Não recebemos sugestões em resposta à segunda pergunta. No entanto, a análise das respostas mostrou que a maioria dos professores (86,7%, n=13) concorda com a importância da formalização do conhecimento do objeto matemático.

Gráfico 33 - Percentual da pergunta 2 para as Atividades 6 e 7

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?

15 respostas



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Os resultados da terceira questão revelam que 73,3% dos docentes concordam integralmente com a quantidade de questões. Contudo, observa-se que 26,7% não manifestam concordância integral. O gráfico ilustra a distribuição completa das respostas:

Gráfico 34 - Percentual da pergunta 3 para as Atividades 6 e 7

Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Recebemos duas sugestões, sendo que uma delas já havia sido apresentada anteriormente. Por isso, incluímos apenas uma nova proposta adicional, a qual será descrita a seguir.

Quadro 17 - Sugestão dos professores da pergunta 3 para Atividade 6 e 7

Prof. 04	“Caso o tempo não seja satisfatório para a aplicação integral, reserve um tempo maior”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nesta sugestão do Prof. 04, para otimizar o aproveitamento das 5 aulas semanais de Matemática (2+2+1) no Ensino Médio, recomendamos que o professor organize o tempo e adapte a sequência das atividades. Essa flexibilidade permite dedicar mais tempo às atividades que exigem maior atenção, garantindo o cumprimento dos objetivos.

Seção 5 – ATIVIDADES 8 e 9: A análise das respostas às questões 1, 2 e 3 revelou um alto índice de concordância integral com as atividades propostas. As argumentações dos professores foram coerentes com as observadas na seção anterior. Acreditamos que, devido à similaridade conceitual entre as atividades 6 a 9, as sugestões e comentários recebidos foram convergentes.

Quadro 18 - Percentual das perguntas 1, 2, 3 para as Atividades 8 e 9

Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3
86,7% (13) concordam integralmente;	86,7% (13) concordam integralmente;	66,7% (10) concordam integralmente;

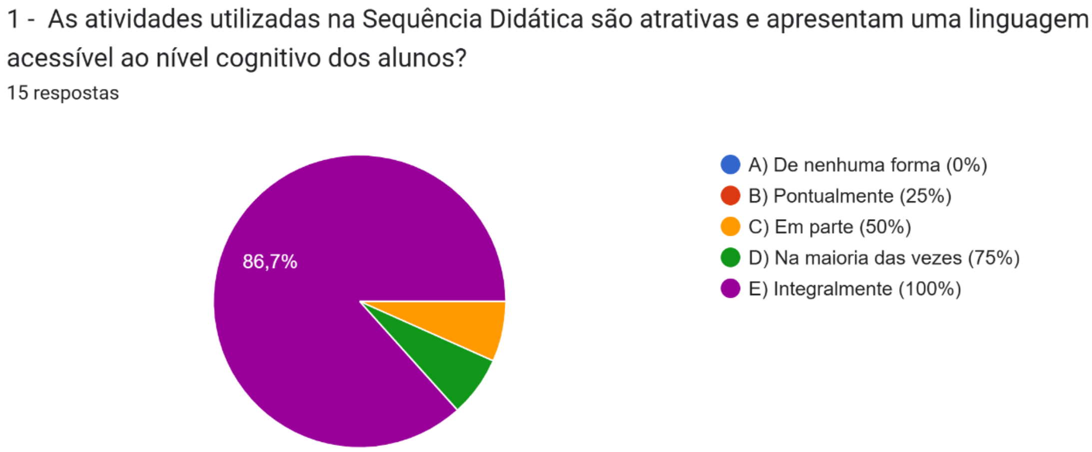
13,3% (2) na maioria das vezes.	6,7% (1) na maioria das vezes; 6,7% (1) em parte.	26,7% na maioria das vezes; 6,7% em parte.

Fonte: Dados da pesquisa (2025)

5.1.2. Avaliação do conjunto das 9 Atividades.

Prosseguindo com a análise, examinamos as respostas dos professores às nove atividades, compostas por cinco perguntas cada e agrupadas em uma única seção. Iniciamos com a análise da primeira pergunta, que revelou um argumento específico. Os percentuais de resposta a esse argumento serão apresentados na sequência.

Gráfico 35 - Percentual pergunta 1 para as 9 Atividades



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

A Sequência Didática foi avaliada positivamente pela maioria dos professores, que destacaram seu caráter atrativo e a linguagem acessível utilizada para os alunos. Um dos professores participou da avaliação com o seguinte argumento:

Quadro 19 - Sugestões dos professores da pergunta 1 para as 9 Atividades

Prof. 02	“Para serem mais atrativas as atividades devem ser contextualizadas com o dia a dia do aluno”.

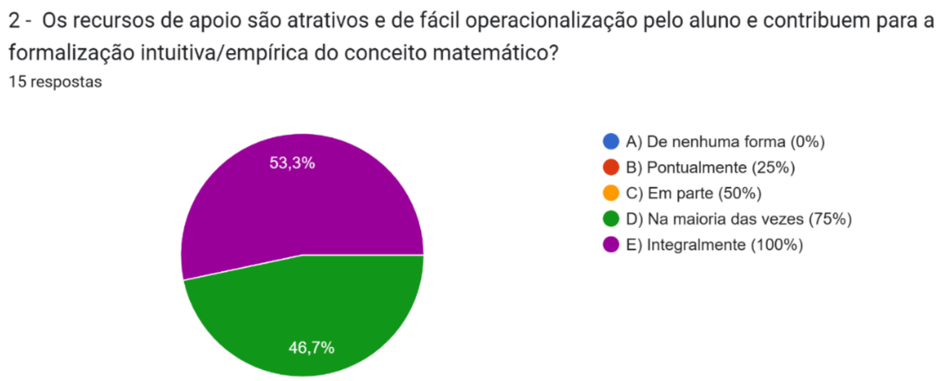
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Na sugestão do Prof. 02, ao propor a contextualização das questões com o cotidiano do estudante, visamos facilitar a compreensão do comportamento das funções trigonométricas no mundo real. Acreditamos que a construção de situações-problema e sua adaptação a cada atividade permitirão que os alunos compreendam os conceitos ao observar imagens, gráficos e representações de movimentos periódicos.

Contudo, ressaltamos que, das nove atividades da Sequência Didática, apenas quatro apresentam situações-problema do dia a dia. As demais envolvem o preenchimento de tabelas com dados obtidos no GeoGebra, pois quando um estudante preenche uma tabela com valores de seno e cosseno para diferentes ângulos (em graus ou radianos), ele aprende a identificar oscilações periódicas, máximos, mínimos e simetrias com clareza, auxiliando a reduzir a sobrecarga cognitiva, uma vez que os estudantes não precisam manter muitos valores na memória. Assim, podem concentrar-se na análise dos resultados e nas relações entre variáveis, ao invés de cálculos repetitivos, promovendo uma abordagem mais reflexiva ao resolver problemas trigonométricos.

Na questão de número 2, as opiniões sobre o manuseio do aplicativo GeoGebra se mostraram bastante divididas. O gráfico a seguir ilustra os resultados obtidos.

Gráfico 36 - Percentual da pergunta 2 para as 9 atividades



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Os resultados indicam que 53,3% dos professores (8 participantes) concordam integralmente que os aplicativos são ferramentas atrativas e de fácil manuseio, auxiliando na compreensão dos conceitos de funções trigonométricas. Uma parcela significativa, 46,7% (7 participantes), concordou na maioria das vezes, o que resultou em seis sugestões para melhorias.

Quadro 20 - Sugestões dos professores da pergunta 2 para as 9 atividades

Prof. 01	“O estudante poderá ter dificuldade em manusear o aplicativo se for utilizado o celular, pois em alguns aplicativos a tela fica pequena e fica difícil mexer”.
Prof. 04	“Quando a escola oferecer suporte adequado a consecução, pois suas atividades requerem uso de Internet e/ou laboratório de informática”.
Prof. 07	“Há sempre a dificuldade prévia do acesso ao Geogebra em algumas escolas”.
Prof. 10	“Se a escola tiver sala de informática, os aplicativos poderão ser manuseados com mais precisão do que se for no celular”.
Prof. 11	“O manuseio de software na maioria das vezes é atrativo aos discentes. O único ponto a se ressaltar é que é preciso ter domínio da plataforma, assim para melhor usabilidade e desempenho dos discentes é interessante uma aula inicial com as maneiras de manusear o software”.
Prof. 14	“Talvez poderia ter dificuldade quando os alunos forem mexer os aplicativos para responderem as atividades, pois mexer com as digitais do dedo são bem espaçosos para uma ferramenta que requer paciência”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A maioria dos professores, em seus argumentos, recomenda a aplicação das atividades em escolas com laboratório de informática. Os professores 01, 11 e 14 justificam essa sugestão com a potencial dificuldade dos alunos em utilizar o aplicativo em celulares. Segundo eles, a tela reduzida, a dificuldade de manuseio com os dedos e a falta de familiaridade com o aplicativo podem ser obstáculos.

Apesar de o uso do GeoGebra em celulares poder apresentar limitações, como a tela pequena e a dificuldade no uso com os dedos, a proposta de utilizar construções já prontas minimiza esses obstáculos. O manuseio continua sendo atrativo aos alunos, desde que haja uma breve orientação sobre como interagir com a atividade. Assim, é possível garantir maior autonomia e aproveitamento pedagógico.

É importante ressaltar que o aplicativo que desenvolvemos foi projetado para ambas as plataformas: computadores, em escolas com laboratório, e celulares, na ausência deste. Recomendamos que, antes da aplicação das atividades, os estudantes sejam instruídos sobre o funcionamento do GeoGebra e informados sobre a exibição em telas menores, caso utilizem celulares.

Destacamos ainda que, cientes de eventuais dificuldades, os aplicativos que construímos apresentam duas formas de manuseio: uma mexendo o “controle deslizante”, outra escrevendo o número desejado na “caixa de entrada”. Com isso, o estudante poderá manusear os aplicativos sem comprometer a visualização ou o formato do desenho.

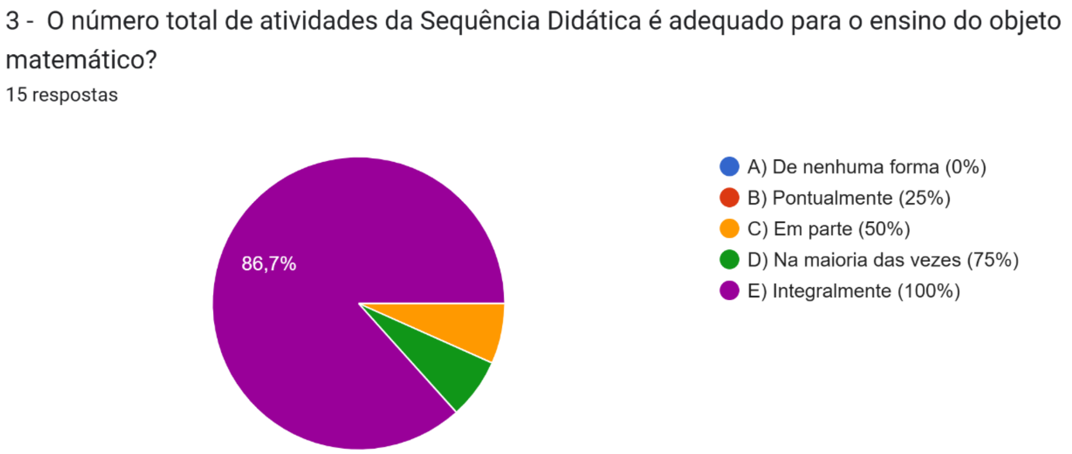
Os dois comentários dos Profs. 04 e 10 convergem na ideia de que o suporte tecnológico da escola é determinante para a efetividade das atividades experimentais com o GeoGebra. Ambos evidenciam que a infraestrutura adequada, como acesso à internet e laboratórios de informática, favorece o manuseio preciso dos aplicativos e amplia as possibilidades de exploração matemática. Assim, destacam que a condição material da escola influencia diretamente a qualidade da aprendizagem e o alcance dos objetivos propostos na sequência didática.

E essas observações podem ser confirmadas na resposta do Prof. 07 reforçando que, embora o uso de tecnologias como o GeoGebra potencialize o ensino, sua implementação depende fortemente das condições estruturais e de acesso oferecidas pelas instituições. Assim, a falta de recursos tecnológicos adequados se apresenta como um obstáculo recorrente, limitando a exploração plena das atividades experimentais propostas.

Contudo, existe a alternativa de usar os aplicativos offline, o que exige um trabalho adicional de organização e preparação. As versões desktop completas (Classic 5 e 6) podem ser instaladas em computadores ou em pen drives, permitindo seu uso offline sem depender da internet.

Na questão 3, recebemos um único comentário do Prof. 07, que apontou um número excessivo de atividades. A escolha das atividades de Corrêa (2016), que originalmente continham 24 exercícios, para serem utilizadas no aplicativo GeoGebra, foi motivada pelo nosso foco nas funções seno e cosseno e seus respectivos parâmetros. Para adequar o material, adaptei um total de 9 atividades, buscando reduzir a quantidade de exercícios sem prejudicar os objetivos de aprendizagem propostos.

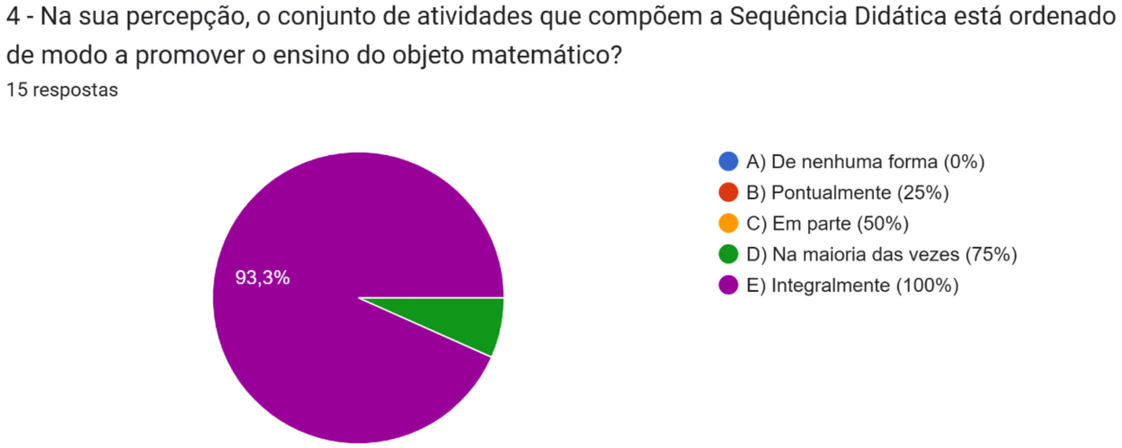
Gráfico 37 - Percentual da pergunta 3 para as 9 Atividades



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Em relação à questão 4, a maioria dos professores considera adequado o tempo previsto para a aplicação das nove atividades. É importante salientar que esse tempo é uma sugestão e pode ser adaptado para melhor atender às necessidades específicas de cada turma. Nenhum participante apresentou sugestões ou objeções em relação a esta questão.

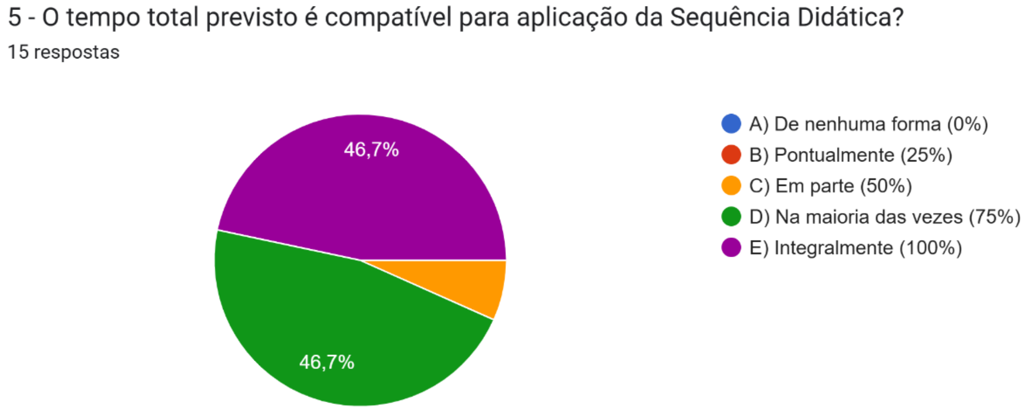
Gráfico 38 - Percentual da pergunta 4 para as 9 Atividades



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Na última pergunta, 7 professores (46,7 %) afirmaram concordar totalmente, outros 7 (46,7 %) declararam concordar na maioria das vezes, e apenas 1 (6,6 %) reportou concordar apenas em parte com o tempo previsto.

Gráfico 39 - Percentual da pergunta 5 para as 9 atividades



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

Já nas sugestões sobre o tempo previsto recebemos 3 sugestões, como mostra o quadro a seguir.

Quadro 21 - Sugestões dos professores da pergunta 5 para as 9 Atividades

Prof. 02	“Para cada atividade, o mínimo de tempo previsto tem que ser 2 horas”.
Prof. 10	“É uma atividade que requer bastante tempo. Mas se realizar de forma adaptada para que os estudantes possam entender o conceito e os gráficos das funções, certamente contribuirá com a aprendizagem deles”.
Prof. 14	“Requer um tempo bem longo para utilizar todas essas atividades. Mas se organizar o conteúdo para um determinado objetivo o trabalho fica menos desgastante”.
Prof. 15	“Desde que as intervenções didáticas sejam organizadas para permitir ao aluno explorar, comparar e desenvolver seu conhecimento critico, flexibilizando o ensino”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Os Profs. 10 e 14 apontam que as atividades experimentais exigem muito tempo, mas esse esforço é compensado quando há planejamento e foco nos objetivos de aprendizagem. O primeiro destaca que adaptar as atividades favorece a compreensão dos conceitos e gráficos, enquanto o segundo reforça que organizar o conteúdo torna o processo mais leve e eficiente.

Já o Prof. 02 estima a necessidade de duas horas por atividade. Essa divergência de opiniões ressalta a complexidade do planejamento didático.

Adicionalmente, o Prof. 15 enfatiza a importância das intervenções didáticas no processo de desenvolvimento do conhecimento dos estudantes.

Embora as atividades exijam um tempo considerável, a organização do conteúdo com foco em objetivos claros torna o processo mais eficaz e menos cansativo. A seleção estratégica das construções permite ao professor adaptar o material à sua realidade, otimizando o tempo em sala de aula. Assim, a proposta continua viável e pedagógica, desde que planejada com intencionalidade.

5.1.3. Avaliação Complementar

A etapa final da avaliação da sequência didática teve como objetivo determinar se o conjunto de atividades promovia a interação entre professor, aluno e o conteúdo ensinado. Ao término da etapa, os professores participantes deveriam identificar as potencialidades da sequência didática no contexto do estudo das funções seno e cosseno.

Gráfico 40 - Interação Professor-Aluno-Saber

Fonte: Dados da pesquisa (2025)

O Gráfico 40 mostra que 100% dos professores concordam integralmente que a Sequência Didática promove a interação Professor-Aluno-Saber.

Na segunda pergunta pedimos aos professores que respondessem quais contribuições a Sequência Didática apresenta para as seguintes questões: a) Em relação ao professor, b) Em relação ao aluno, c) Em relação ao Saber. Tivemos as seguintes respostas:

Quadro 22 - Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)

Prof. 01	"O professor ganhará mais praticidade em suas atividades realizando metodologias envolvendo as tecnologias".
Prof. 05	"O professor torna-se um mediador do ensino. Recordar e ampliar conhecimentos".
Prof. 07	"A sequência didática propõe atividades de um conteúdo um pouco complexo e de difícil compreensão e transmissão, por isso sua importância, facilita o trabalho do professor".
Prof. 08	"Um excelente roteiro de como apresentar o conteúdo de maneira prática e efetiva".
Prof. 10	"Contribui para que os professores possam rever seus métodos de ensino ao utilizar ferramentas tecnológicas educacionais, de modo que venham melhorar suas práticas em sala de aula".
Prof. 11	"Essa sequência didática possibilita o professor que possa lecionar uma aula de maneira mais atrativa para seus discentes, assim sendo expondo a eles de maneira prática o mundo da matemática. A maneira que põe os discentes a executar as tratativas matemáticas".
Prof. 12	"Ajuda no planejamento de aula do professor além de contribuir para a melhora do desempenho dos alunos que participam dessa sequência".
Prof. 14	"Sem dúvida será um aprendizado louvável. Já que utilizar ferramentas digitais requer tempo de estudos, preparação de material e uma organização didática para ministrar as aulas".
Prof. 15	"Para o professor, essa Sequência Didática não é apenas um recurso de ensino, é um espaço formativo em si. Ao construí-la e aplicá-la, ele aprofunda sua compreensão matemática, refina sua didática e se fortalece como educador crítico e criativo".

Fonte: elaborado pelo autor (2025)

Nas argumentações coletadas, a maioria dos professores destacou que a sequência didática contribui significativamente para a praticidade do ensino, a melhoria do desempenho dos estudantes e o manejo de conteúdos complexos e de difícil compreensão. Outros enfatizaram que essa estratégia facilita o planejamento docente, além de permitir recordar e ampliar seus próprios conhecimentos.

Na resposta do Prof. 07, a sequência didática se mostra especialmente relevante por abordar um conteúdo complexo com propostas que facilitam sua compreensão e transmissão, beneficiando diretamente o trabalho do professor. Esse comentário pode ser reforçado nas respostas dos Profs. 01, 12 e 15 evidenciando que o uso de metodologias com tecnologias representa uma oportunidade formativa para o professor. Ao planejar e executar essas atividades, o docente não apenas ganha praticidade e dinamismo em sua prática, mas também aprofundamento conceitual e desenvolvimento profissional, tornando-se um educador mais reflexivo, criativo e autônomo.

No argumento do Prof.11, ele afirma que além de tornar a aula mais atrativa para os discentes, ela estimula o uso de recursos tecnológicos que incentivam práticas mais dinâmicas e significativas. Nesse sentido, a proposta não apenas apoia o ensino de conteúdos abstratos, como também contribui para a inovação metodológica e o engajamento dos alunos com a matemática de forma prática e contextualizada.

Quadro 23 - Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)

Prof. 01	“Com certeza o estudante participará das aulas com mais animação, já que as tecnologias estão no seu dia a dia e o aplicativo em questão deixa a aula mais atrativas e compreensivas”.
Prof. 05	“O aluno torna-se autor da sua aprendizagem, tornando-a significativa trazendo novos caminhos para o aprendizado”.
Prof. 07	“Compreender trigonometria de uma forma mais dinâmica”.
Prof. 10	“Além de deixar a aula mais dinâmica, os estudantes conseguirão resolver as atividades com mais precisão pois o aplicativo está bem elaborado pra cada atividade”.
Prof. 11	“Uma das maiores reclamações dos discentes é a falta de conexão dos exemplos matemáticos com a realidade, por meio dessas atividades da sequência didática o aluno consegue ter uma percepção mais realistas das conexões exemplares e reais que envolve os exemplos tratados”.
Prof. 12	“Os alunos ao participarem desse tipo de projeto, aumentam o seu desempenho e têm grande poder de visualização das leis matemáticas”.
Prof. 14	“O aluno conseguirá visualizar as funções de outra maneira ao mexer o aplicativo, pois o movimento das construções lhe dará suporte para que eles possam interpretar, entender, é responder as atividades de forma organizada”.
Prof. 15	“A Sequência Didática proporciona ao aluno um ambiente de aprendizagem ativo, investigativo e acessível, como as funções trigonométricas, com sentido e aplicação”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O Prof.01 corrobora que o uso de tecnologias familiares aos estudantes torna as aulas mais envolventes e compreensíveis. Isso contribui para aumentar a motivação e o interesse pela matemática. A proposta integra conteúdos abstratos a uma linguagem próxima da realidade estudantil. Concordamos com o comentário do Prof. 11 e, com a adaptação para o GeoGebra permitirá que os estudantes reconheçam a aplicação da matemática em contextos reais. Isso reduz a percepção de distanciamento entre teoria e prática.

Dessa forma, amplia-se o significado dos conteúdos estudados. Já o Prof. 14 argumenta que manipulação interativa das construções no aplicativo facilita a compreensão dos gráficos das funções. O movimento visual oferece suporte concreto à interpretação e resolução das atividades. Isso contribui para uma aprendizagem mais clara e organizada

Ao valorizar o conhecimento que os estudantes já possuem, as aulas se tornam mais personalizadas e significativas. A participação ativa aumenta, e o uso de ferramentas como o GeoGebra contribui para um melhor desempenho.

Essa abordagem incentiva os alunos a construírem seu próprio caminho de aprendizado. Aulas mais atraentes despertam o interesse, facilitam a interpretação, a compreensão e a organização das atividades. Isso, por sua vez, permite que os estudantes estabeleçam conexões entre a matemática e o mundo real, visualizando as leis matemáticas com mais clareza.

Quadro 24 - Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)

Prof. 01	“O estudante conseguirá argumentar de forma clara os questionamentos porque o aplicativo facilita as análises e interpretação dos conceitos”.
Prof. 03	“Trabalha de maneira gradual e construtiva”.
Prof. 05	“Enriquece ainda mais as aulas o uso de ferramentas tecnológicas como softwares matemáticos, tornando a aula dinâmica e interessante para o aluno e também para o professor mediador da aprendizagem”.
Prof. 07	“O saber está bem estrutura e segue passo graduais”.
Prof. 10	“Atividades está bem organizada e com isso os estudantes poderão entender cada tópico”.
Prof. 11	“A sequência didática está bem formalizada no que trata dos assuntos abordados e suas sequências, visto que vai tratando dos assuntos trigonométricos de forma gradual, assim facilitando a compreensão do objeto no processo de Ensino e Aprendizagem”.
Prof. 12	“Potencializa e otimiza o tempo para a construção do conhecimento”.
Prof. 14	“O saber é organizado de maneira gradativo, pois os tópicos estão estruturados para cada objetivo até chegar nas funções seno e cosseno”.
Prof. 15	“A valorização do saber como construção cultural, progressiva e significativa. Ao articular experiências concretas, representações variadas e linguagem formal, contribui para que o aluno se aproprie do conceito, com compreensão profunda e capacidade de aplicação. Isso favorece a apreensão sólida e duradoura do objeto matemático”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A constituição do saber sobre funções seno e cosseno, na visão dos professores, segue uma estrutura bem definida, formalizada e otimizada. Eles destacam que a progressão gradual dos conceitos permite aos alunos internalizar cada etapa, o que, por sua vez, fortalece a construção do conhecimento.

Adicionalmente, os docentes argumentam que nossa proposta didática está organizada com o saber matemático de funções seno e cosseno como uma construção cultural e progressiva, valorizando a articulação entre experiências concretas, representações e linguagem formal. Essa abordagem contribui para uma compreensão mais profunda dos conceitos. Ao favorecer a apropriação significativa do conhecimento, promove uma aprendizagem sólida e duradoura.

Quadro 25 - Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

Prof. 01	“Construir gráficos de funções seno e cosseno, saber identificar as funcionalidades dos seus parâmetros, resolver problemas contextualizados sobre essas funções”.
Prof. 03	“Uma boa proposta para o desenvolvimento pleno de trigonometria até as funções seno e cosseno”.
Prof. 04	“A SD tem grande potencial para o Ensino do objeto tratado e virar um livro”.
Prof. 05	“Melhora entendimento do assunto; melhora o interesse dos estudantes; aguça a curiosidade; obtém resultados significativos”.
Prof. 07	“Aluno ativo de seu próprio conhecimento, atividades com potências de melhorias na compreensão do conteúdo matemático”.
Prof. 09	“Contribui para o ensino de forma gradual, desde os aspectos básicos até os que envolvem atenção e raciocínio”.
Prof. 10	“Muita potencialidade. Com um assunto difícil de ensinar, esse conjunto de atividades dará um suporte gigantesco ao professor e facilitará o entendimento de cada aluno”.
Prof. 11	“O uso dessa sequência didática potencializa dois aspectos fundamentais ao desenvolvimento do discente. Primeiro, conduz o discente a um uso de software, que pode despertar nele o interesse para mais atividades desse tipo e bem como até mesmo despertar o interesse numa formação nessa área. Junto disso, leva a uma experiência mais realista no mundo matemático dando possibilidade de melhor entendimento da disciplina e tendo uma melhor formação nos aspectos educacionais”.
Prof. 14	“As aulas ficam mais dinâmicas e atrativas. A ferramenta GeoGebra com adaptações nessas atividades mostrou-se bem estruturada e sem dúvida, garantirá aulas com muito entusiasmo e compreensão dos estudantes acerca do conteúdo, porém, como dito anteriormente, requer um tempo bastante

	grande para aplicar, mas nada que possa adapta-las para um referido objetivo de aprendizagem”.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Das potencialidades que os professores argumentaram, os resultados apontam que: o estudante se torna mais ativo na construção de seus conhecimentos; as aulas ficam mais atrativas com o uso das tecnologias, facilitando a resolução de problemas contextualizados, visto que esta é uma das grandes dificuldades dos estudantes, como mostram os dados da nossa consulta docente do subtópico 3.6.

Destacamos alguns comentários como a do Prof. 09, afirmando que a proposta favorece uma aprendizagem progressiva, respeitando o ritmo dos estudantes desde conceitos iniciais até níveis mais complexos. Isso estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia. Com isso, promove um ensino mais completo e significativo.

Outros aspectos observados são voltados para o aplicativo GeoGebra, como podemos ver no comentário do Prof. 11, que diz: “[...] Primeiro, conduz o discente a um uso de software, que pode despertar nele o interesse para mais atividades desse tipo [...]” e também: “[...] leva a uma experiência mais realista no mundo matemático, dando possibilidade de melhor entendimento da disciplina e de uma melhor formação nos aspectos educacionais [...]”.

Na resposta do Prof. 14 as atividades tornam as aulas mais envolventes e compreensíveis, estimulando o interesse dos alunos. Apesar de exigirem tempo, sua estrutura permite adaptações conforme os objetivos de aprendizagem. Com planejamento, a proposta equilibra profundidade e dinamismo no ensino.

Com base nas respostas dos professores nas três etapas de avaliação da nossa sequência didática, analisaremos os gráficos gerados e discutiremos as sugestões e argumentos apresentados no questionário.

Na primeira etapa, que consistiu em avaliações a cada duas atividades, obtivemos informações valiosas. Constatamos que o tempo de aplicação das atividades foi um ponto frequentemente mencionado. Além disso, os professores apontaram para a necessidade de introduzir conceitos de funções e expressaram preocupação em relação à capacidade dos alunos de responderem às atividades, considerando suas análises prévias.

A adaptação das atividades, frequentemente mencionada, visava torná-las mais flexíveis, considerando que sua extensão original demandava um tempo de aula nem sempre disponível. Essa flexibilidade permitiria ao professor selecionar a atividade mais adequada para cada objetivo específico, otimizando o processo de ensino.

Na segunda etapa, a avaliação do conjunto das nove atividades revelou uma boa aceitação por parte dos professores, que também apresentaram sugestões pertinentes. Uma das preocupações mais frequentes dizia respeito à utilização do GeoGebra nas escolas, especialmente quanto à disponibilidade de salas de informática e computadores, considerados necessários para a aplicação das atividades. Gostaríamos de reforçar que os aplicativos foram adaptados para uso tanto em celulares quanto em computadores, e que o acesso a eles não exige a instalação do GeoGebra nos dispositivos, bastando uma conexão à internet.

Na etapa final de Avaliação Complementar, verificou-se que a sequência didática foi amplamente aceita pelos professores. Eles destacaram que a interação entre professor, aluno e conteúdo favoreceu a criação de situações de aprendizagem mais engajadoras, nas quais questionamentos e intervenções enriquecem a compreensão. Esse processo torna o ensino menos monótono e mais significativo, estimulando o interesse dos estudantes e potencializando os efeitos pedagógicos para ambas as partes.

Acreditamos que nossa sequência didática pode gerar avanços significativos no ensino das funções trigonométricas, uma vez que a utilização do GeoGebra facilita a visualização de situações cotidianas, como corridas em pista circular, roletas de prêmios, vibrações sonoras e roda-gigante. Esses contextos tornam os estudos mais concretos e envolventes, permitindo que os estudantes percebam os movimentos periódicos como fenômenos reais.

Ao resolver as atividades, seja individualmente ou em grupo, o estudante consegue preencher tabelas, analisar dados, formular hipóteses e, ao final, identificar padrões “escondidos” nos movimentos periódicos — estabelecendo conexões entre análise gráfica, variações da função e modelagem. Essa construção ativa favorece uma aprendizagem significativa e autônoma, menos mecânica e mais reflexiva.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste estudo foi avaliar as contribuições de uma sequência didática para aprimorar o ensino e a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno em alunos do 2º ano do Ensino Médio. A sequência proposta integra o uso do software GeoGebra. A metodologia incluiu uma revisão bibliográfica aprofundada e a coleta de dados junto a professores de matemática. Os resultados iniciais indicaram uma lacuna na prática docente: a maioria dos professores não emprega estratégias visuais que facilitem a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos

Dos livros didáticos que pesquisamos a partir de 2016 até 2020, observamos que as abordagens dos conteúdos de trigonometria vêm melhorando, com muitas propostas e dicas para os professores utilizarem em sala de aula, recursos como a história da matemática e tecnologias digitais estão sempre presentes nesses materiais. Com a era digital, livros didáticos estão sendo disponibilizado em versões online e que vão além do conteúdo estático. Os materiais apresentam vídeos explicativos, animações e simulações interativas através de links.

No entanto, sua utilização não deve ser encarada como uma receita pronta como único recurso didático, é fundamental que o professor atue de forma crítica e reflexiva e, sempre que necessário, deve-se adaptá-las às necessidades específicas de sua turma.

Os trabalhos de Medeiros (2018), Corrêa (2016) e Azevedo & Alves (2019) mostram que abordagens metodológicas que estejam ligadas com ferramentas tecnológicas, com atividades interdisciplinares contextualizadas e resoluções de problemas, proporcionam dinamismo e entendimento dos conteúdos abordados, assim como também, proporcionando um ensino e aprendizagem mais eficaz.

As análises dos trabalhos anteriores sobre as funções trigonométricas mostraram que a utilização do software GeoGebra como apoio no ensino da matemática promove a interação entre alunos e professor possibilitando que eles criem hipóteses, explorando alternativas de modo coletivo e que isso favorece a discussão e interatividade professor-aluno.

As funções trigonométricas se tornam mais difícil quando são apresentadas de maneira abstrata, com foco em fórmulas e equações sem uma ligação clara com aplicações práticas. Os 7 anos de experiência como professor tenho escutado perguntas por parte dos estudantes “para que serve isso na vida real?” Ao respondermos essa indagação não basta explicarmos ou dar exemplos de situações da natureza onde essas funções são estudadas. O professor deve planejar, utilizar metodologias diversificadas, usar recursos didáticos como softwares educativos, materiais manipuláveis e situações-problema, o que contribui para tornar as aulas mais dinâmicas e significativas, pois a trigonometria é um conteúdo que requer a visualização dos padrões. Sugestões como gráficos animados, simulações e aplicativos interativos ajudam o estudante a compreender o comportamento de cada função.

Com base nas dificuldades de ensino e aprendizagem da Trigonometria, e em linha com as análises do questionário virtual e as pesquisas sobre o ensino das funções seno e cosseno, os dados coletados revelam que muitos professores de matemática ainda adotam metodologias predominantemente tecnicistas. Essa abordagem se caracteriza pela introdução de definições, seguida de exemplos e uma extensa lista de exercícios, centrada no uso do quadro e giz. Ademais, as respostas ao questionário indicam que, apesar da experiência docente, há uma baixa utilização de recursos didáticos, como as TDIC nas aulas de matemática. Essa carência contribui para as dificuldades dos alunos na compreensão de conteúdos complexos, como as funções trigonométricas.

Na pesquisa de campo feita com estudantes do 3º ano do ensino médio, constatou-se que eles se sentem inseguros, paralisados ou desinteressados ao serem desafiados a resolver questões que exigem deles mais do que a simples utilização de fórmulas. Deparamo-nos com dificuldades desses estudantes nas resoluções das questões do teste de verificação, como raciocínio lógico, leitura e interpretação dos enunciados, o que ocasionou dificuldades em questões que apresentam problemas envolvendo interpretação de gráficos e na própria manipulação algébrica para encontrar a solução do sistema, com cálculos confusos e sem direcionamento.

Outro fator esteve ligado ao acompanhamento dos responsáveis desses estudantes ao entrarem no ensino médio, um indicativo muito grande na ausência desses pais que pode acarretar desmotivação na rotina dos estudos em casa dos seus filhos.

Na fase de experimentação, planejamos aplicar nossa Sequência Didática em turmas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública em São João da Ponta, no Pará. No entanto, ao longo do desenvolvimento da pesquisa, surgiram limitações de tempo, de acesso aos estudantes e de disponibilidade de sala de informática que inviabilizaram as duas primeiras alternativas. Recorremos, então, a um questionário online para obter a avaliação de professores de matemática sobre as nove atividades adaptadas para o GeoGebra. A colaboração de colegas do PPGEM/UEPA e de professores de escolas públicas, que compartilharam suas experiências, percepções e práticas pedagógicas, foi fundamental para a coleta de dados reais e relevantes. Esses dados serviram de base para a análise, o diagnóstico e a proposição de melhorias para o nosso produto educacional.

A primeira etapa descrita como **Avaliação Individual das Atividades Experimentais no GeoGebra** as avaliações dos docentes mostraram-se relevante ao sugerir adaptações ao tempo de aplicação. Além disso, a maioria deles concordam com estrutura e formalização de cada atividade, alegando que elas facilitam o trabalho do professor durante a aplicação permitindo que ele selecione uma atividade para cada objetivo específico.

Já na **segunda etapa** (**Avaliação Conjunta das Atividades Experimentais no GeoGebra**) e na **terceira etapa (Avaliação complementar)** os dados mostraram que o conjunto das nove atividades foi bem aceito pelos professores, mas com algumas sugestões plausíveis. Ao longo das análises e discussões, foi possível observar que o uso do GeoGebra pode transformar a forma como os estudantes se relacionam com os conteúdos matemáticos, tornando o aprendizado mais dinâmico, significativo e acessível.

O software além de permitir a exploração visual e manipulativa das funções trigonométricas, favorece a construção de conceitos por meio da observação de padrões, da experimentação e da interação com os elementos gráficos. Tal abordagem contribui para a superação de dificuldades comuns no ensino tradicional, como a memorização mecânica de fórmulas e a compreensão fragmentada dos fenômenos periódicos que envolvem o seno e o cosseno.

As contribuições da interação entre professor, aluno e saber promovem situações de aprendizagem em sala de aula que, a partir de questionamentos, indagações e intervenções no processo de interação com as atividades, desperta mais o interesse do estudante em aprender, tornando o processo menos entediante e mais proveitoso para ambas as partes.

Essa colaboração dos docentes de matemática permitiu, de maneira mais precisa, melhorar a nossa Sequência Didática diante dos desafios enfrentados no cotidiano escolar, com informações valiosas sobre sua experiência profissional, metodologias utilizadas, percepção dos alunos em relação ao conteúdo e as dificuldades recorrentes no ensino da Matemática.

A construção desta dissertação foi essencial para que eu pudesse refletir sobre as minhas práticas de ensino no âmbito escolar. Rever a nossa prática pedagógica não significa que fracassamos, mas sim admitir que podemos melhorar buscando novas estratégias, como recursos visuais e tecnológicos, incentivar o trabalho colaborativo e a investigação. É necessário que o professor encontre outras maneiras didáticas de resolver o mesmo problema matemático, de modo que venha motivar e despertar, no estudante, a curiosidade e o gosto pela matemática, aguçando a capacidade em solucionar problemas.

Ao concluir este capítulo da minha jornada acadêmica, gostaria de expressar minha gratidão a todos que acompanharam o desenvolvimento desta pesquisa. A escrita de cada parágrafo, de cada tópico, representou um processo de autodescoberta e amadurecimento intelectual. Esse processo exigiu não apenas a leitura de livros e artigos, mas também o aprendizado de como organizar ideias e construir argumentos sólidos, embasados em evidências.

Por tanto, a satisfação com os resultados desta pesquisa reflete a dedicação, o esforço e o crescimento pessoal investidos. A concretização dos objetivos proporciona um sentimento profundo de motivação para continuar a contribuir com o avanço do conhecimento na área da Educação Matemática. O material didático elaborado para o ensino das funções seno e cosseno oferece um conteúdo rico em informações, ideias e conceitos relevantes para a prática pedagógica. Esperamos que este material possa contribuir para futuras pesquisas na mesma linha e inspirar novas abordagens no estudo do processo de ensino, aprendizagem e avaliação deste objeto.

REFERÊNCIAS

ARANTES, José Tadeu. Origens da Matemática: Aryabhata. **Este blog**, 23 de junho de 2017. Disponível em: https://josetadeuarantes.wordpress.com/2017/06/23/origens-da-matematica-aryabhata/ . Acessado em 20/12/2022

ARTIGUE, M., DOUDY, R., MORENO, L., GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica em educación matemática**. 1ª edição, Bogotá, 1995. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=105 Acessado em 08/10/2021.

AZEVEDO, Italândia Ferreira de; ALVES, Francisco Régis Vieira. Trigonometria e suas aplicações no Geogebra: aulas experimentais com alunos do ensino médio. **Tangram – Revista de Educação Matemática**, Dourados - MS – v.2 n. 2, pp. 102-115 (2019).

BALESTRI, Rodrigo Dias. **Matemática:** Interação e tecnologia. Volume 2. 2 ed., São Paulo: Leya, 2016.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma Matemática**: Geometria e Trigonometria. 1ª ed.- São Paulo: editora FTD, 2020.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. **Lei n.13.005, de 25 de junho de 2014**, que aprova o Plano Nacional de Educação (2014 -2024) – PNE e dá outras providências. Câmara dos Deputados. 86 p.- (Série Legislação; n. 25). Brasília, DF. Atualizada em 1 de dezembro 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). **Formação de Articuladores Locais do Programa de Inovação Educação Conectada**. Laboratório de Tecnologia da Informação e Mídias Educacionais-LabTIME, Universidade Federal de Goiás- UFG, 2023.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias parte 3. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN +)**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Ensino de quinta a oitava séries. 148 p. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CABRAL, N. F. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEMPA, 2017, p. 31-51

CHAVES, Rodolfo; SAD, Lígia Arantes; ZOCOLOTTI, A. K. Algumas ideias do Modelo dos Campos Semânticos a partir de um episódio de uma aula de Trigonometria: Colega e o chuveirinho. **Revista de investigação e divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 2, n. 2, p. 6-27, jul./dez. 2018

CORRÊA, Rosana dos Passos. **O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades**. 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016. Acessado em 11/02/2020. Disponível em: https://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/10/rosana_dos%20passos_correa.pdf

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Tradução: Giovani Giuseppe Nicosea e Jeanine Soares. **Bolema**, Rio Claro/SP, Ano 20, n° 28, 2007, p. 179-205. Título original: Epistemology, Didatics of Mathematics, and Teaching Practices. Acessado em 12/01/2020. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221871010.pdf

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. Finck; MORETTI, M. Thadeu. Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noção de trigonometria. **Revista do Programa de Pós-graduação em educação matemática (UFMS)**. Perspectivas da Educação Matemática – UFMS – v. 7, número temático – 2014.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões**: matemática e suas tecnologias. Manual do professor. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora moderna. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

FERRAZ, Ana P. do C. M; BELHOT, Renato Vairo. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. ***Gest. Prod.***, São Carlos, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

FERREIRA, Breno Salgado. **Sequência Didática para o ensino de Função Cosseno.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade de Estado do Pará, Belém, 2023.

FRIZZARINI, Silva Teresinha; CARGNIN, Claudete. ***Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.5, pp. 315-325, 2019.*

GAMA, P. F da. **Uma sequência didática para o ensino da função seno.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de pesquisa Social**. 6 ed. – São Paulo: Atlas, 2008

GUIMARÃES, Reinaldo Silva; BARLETTE, Vania Elisabeth; GUADAGNINI, Paulo Henrique. A engenharia didática da construção e validação de sequências de ensino: um panorama com foco no ensino de ciências. **Polyphonía**, v. 26/1, jan./ jun. 2015.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática elementar 3**: Trigonometria. -9. Ed. – São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo com geometria analítica.** Vol. 1, 3 ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise volume 1**; v.1. led Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 431 p.

LONGEN, Adilson. **Matemática: padrões e relações**. 2 º ano Ensino Médio. 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A. **Trigonometria: dos conceitos básicos até problemas olímpicos**. Portal de Livros Abertos da USP, Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. 83 p.

MACÊDO, D. F., AVELAR, A. M., ALVES, S. d., NASCIMENTO, Maria. do C. do & LINS, Abigail Fregni. (2017). A importância da utilização do aplicativo geogebra em aulas de matemática: Experiência vivenciada em uma escola de educação básica. *In*: **IV CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO.** (p. 1-10). v. 1, 2017, ISSN 2358-

8829. Anais IV CONEDU. João Pessoa/PB: Realize. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID1431_13102017222630.pdf. Acessado em: 12/01/2020

MAGALHÃES, Ricardo Sérgio Medeiros. **Aplicações da trigonometria ao ensino de ondulatória utilizando o geogebra**. Dissertação de mestrado- Programa de Pós-graduação em Rede, Universidade Federal de Maranhão, São Luís, 2018

MATHIAS, Carlos. "Trigonometria: como aprendê-la? Como ensiná-la. Youtube, 10 de set. de 2019. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ZwvHTIZ_Wrs&t=11s, acessado: 01/02/2023.

MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de**. O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra**. 2018. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Acessado em 04/02/2020. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559528

MENEGHELLI, Juliana; POSSAMAI, Janaína Poffo. ***Educ. Matem. Pesq***., *São Paulo, v.21, n.2, 491-512, 2019*

MODESTO, Thiago Jacob Maciel**. A gênese instrumental e sua interação com o geogebra**: uma proposta de ensino de polinômios. Dissertação do Programa de Mestrado profissional em Ensino de Matemática - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019. Acessado em 04/02/2020. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559521

MOREIRA, Daniel Monteiro da Silva. **Geometria Espacial – Cálculo de Volume Usando App Inventor**. 2018, 164 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Acessadoem 04/02/2020. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559490

MUNARI, Alberto. **Jean Piaget**. Tradução e Organização: Daniele Saheb. Recife: Fundação Joaquin Nabuco, Editora Massangana, 2010. 156 p.: il.-(Coleção Educadores).

NASCIMENTO, Carlos Pereira do. **O uso do geogebra no ensino das funções trigonométricas no 2° ano do ensino médio IFMT campus cuiabá**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas. Universidade do Vale do Taquari Univates. Lejado, RS, 2019. 135 f.

NUNES, Célia Barros; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática Sobre o Conceito de Função. **JIEEM** v.10, n.2, p. 65-71, 2017.

OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza**. Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao geogebra**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Salvador, 2020. 322 f.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PACHECO, M. B., & ANDREIS, G. d. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matematica: Percepeção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. **Revista Principia**. p. 105-118. Divulgação científica e tecnológica do IFPb, nº 38, João Pessoa, 2018. Disponível em: http://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/download/1612/806. Acessado em:12/01/2020

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. – 3. ed.; Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática 2**. ed. 2 – São Paulo: Moderna, 2010.

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação do Pará. **Documento Curricular do Estado do Pará – Etapa Ensino Médio**:. Volume II. Belém: SEDUC-PA, 2021. P.522.

PASTANA, Claudionor de Oliveira; NEIDE, Italo Gabriel. A integração do ensino de funções trigonométricas e movimento harmônico simples por meio do software Modellus. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 40, nº 1, e1402. Recebido em 23 de Março, 2017. Revisado em 28 de Maio, 2017. Aceito em 07 de Julho, 2017.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araujo.- 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, São Paulo: 2013. 72 p. ils.: Tabs. ISBN 978-85-914891-1-4. Acessado em 12/01/2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Wagner-Pommer/publication/296486970

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

SÁ. Pedro Franco de. Possibilidades do ensino de Matemática por Atividades. Belém: **SINEPEM**, 2019 Disponível em http://sinepem.sbempara.com.br/file/V7.pdf.

SÁ, Pedro Franco de. Possibilidades de resolução de problemas em aulas de matemática. II simpósio Nacional Sobre Ensino e Pesquisa de Matemática no contexto da educação, ciência e tecnologia- **SINEPEM**. IFPA campus Belém. Belém, 2021

SÁ, Pedro F. de, MAFRA, José Ricardo Souza; FOSSA, John Andrew. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática. **Revista Cocar**. Edição Especial N.14/2022 p.1-20 ISSN: 2237-0315 Dossiê: Tendências de Educação Matemática.

SÁ; Pedro F.; ALVES, Fábio José C. A engenharia didática: alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos. In: MARCONDES, Maria Inês; OLIVEIRA, Ivanilde A.; TEIXEIRA, Elizabeth. (Org.). **Abordagens teóricas e construções metodológicas na pesquisa em educação**. Belém: EDUEPA, 2011.

SEE/PA, Secretaria de Educação do Estado do Pará. Documento Curricular do Estado do Pará Educação Infantil e Ensino Fundamental. PROBNCC Pará, 2019. Acessado em: 30/10/2020. Disponível em: <http://www.cee.pa.gov.br>

SILVA, Elanny Roma Pereira da. **A utilização do aplicativo GeoGebra para Smartphone como recurso didático nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental**. 2018. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-graduação em Rede- Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal de Maranhão, São Luís, 2018. Acessado em 08/05/2020. Disponível em: http://tedebc.ufma.br:8080/jspui/bitstream/tede/2555/2/ELANNYSILVA.pdf

SILVA, Evandro A. da. **O Ensino de Funções Trigonométricas com o auxílio do GeoGebra**. 2013. 75 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Bahia, Juazeiro, 2013.Acessado em 08/05/2020. Disponível em: http://www.univasf.edu.br/~tcc/000007/0000077f.pdf

SILVA, Tatiane Ferreira da **Uma sequência didática para o ensino de funções trigonométricas**: uma investigação sobre as contribuições do GeoGebra. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana. – Santa Maria, 2018

SOBRINHO, Dimitri Hristov. **O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, 2015. São Carlos: UFSCar, 2015.115 f.

SOUSA, Francisco Deilson Rodrigues de. **Software GeoGebra no Ensino da Trigonometria: proposta metodológica e revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT**. 2018. 58 f. Dissertação

(Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018. Acessado em 08/05/2020. Disponível em: https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/2564

TASHIMA, M. M., & SILVA, A. L. (s.d.). **As lacunas no Ensino-Aprendizagem da Geometria. (**Produções PDE). Departamento de Matemátic*a.* Londrina: Universidade Estadual de Londrina/PR. 2007. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massaco_tashima.pdf. Acessado em: 12/01/2020.

VIEIRA, Sonia. **Como elaborar questionários**. Livro digital. São Paulo: Atlas, 2009.

VIGANÓ, Vanessa Cristina Rech; LIMA, Isolda Gianni de. Aprendizagem significativa de Trigonometria. **Revista Eletrônica de Matemática – REMAT.** Caxias do Sul, v. 1, n. 2, 2015.

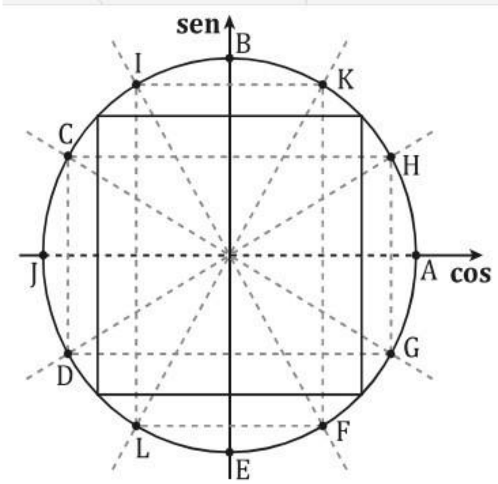
VISEU, Floriano; ROCHA, Helena. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.20, n.2, 113-139, 2018

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM DO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO.

QUESTÃO 1: Considere os pontos indicados no ciclo trigonométrico a seguir e organize no quadro abaixo. Depois, complete-o tentando buscar as respostas por meio de uma análise do desenho.

Pontos\ Valores	*Arco em graus*	*Arco em radianos*	*Seno do arco*	*Cosseno do arco*
Ponto A				
Ponto B				
Ponto C				
Ponto D				
Ponto E				
Ponto F				
Ponto G				
Ponto H				
Ponto I				
Ponto J				
Ponto K				
Ponto L				



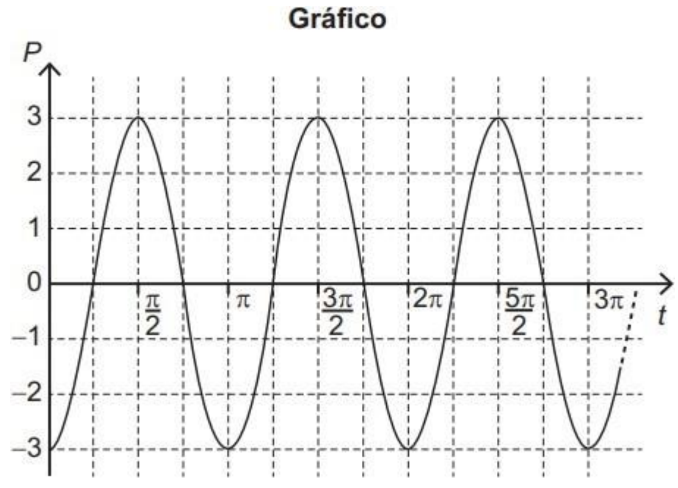
Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

QUESTÃO 2: Considere os senos dos arcos a seguir e escreva-os em ordem crescente.

$$\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}, \frac{10\pi}{10}$$

Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

QUESTÃO 3: (ENEM- 2021) Uma mola é solta da posição conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundos) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $\mathrm{P(t)} = \pm\mathrm{Acos}(\omega \mathrm{t})$ ou $\mathrm{P(t)} = \pm\mathrm{Asen}(\omega \mathrm{t})$, em que A>0 é a amplitude de deslocamento máximo e o ω é a frequência, que relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas



Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

1- Qual a expressão algébrica que representa a posição P(t), da cabeça do pistão em função do tempo t ?

A) $-3\cos(2t)$ B) $-3\mathrm{sen}(2t)$ C) $3\cos(2t)$ D) $-6\cos(2t)$ E) $6\mathrm{sen}(2t)$

2- Complete o quadro sobre o Domínio, a Imagem, o Período e Máximo e Mínimo da Função P(t):

Domínio	Imagem	Período	Máximo	Mínimo

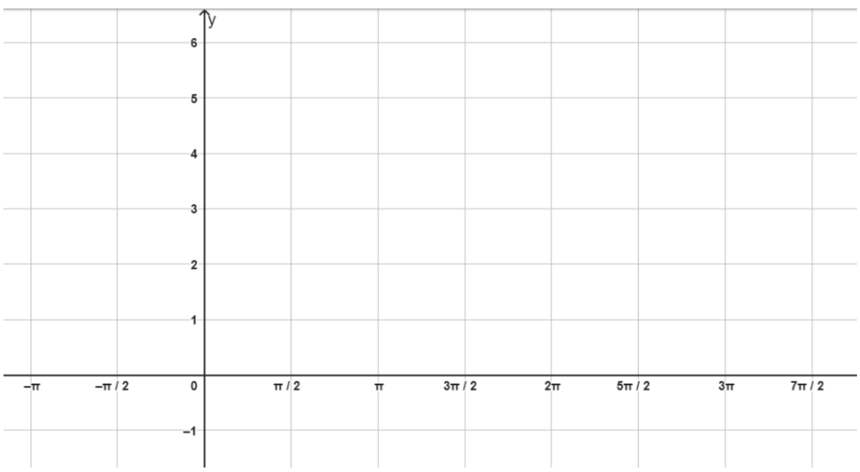
QUESTÃO 4: A altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função do tempo, é dada aproximadamente pela expressão:

$$\boldsymbol{h(t) = 3 + 2sen\left(\frac{\pi t}{6}\right)}$$

em que t é o tempo, medido em horas.

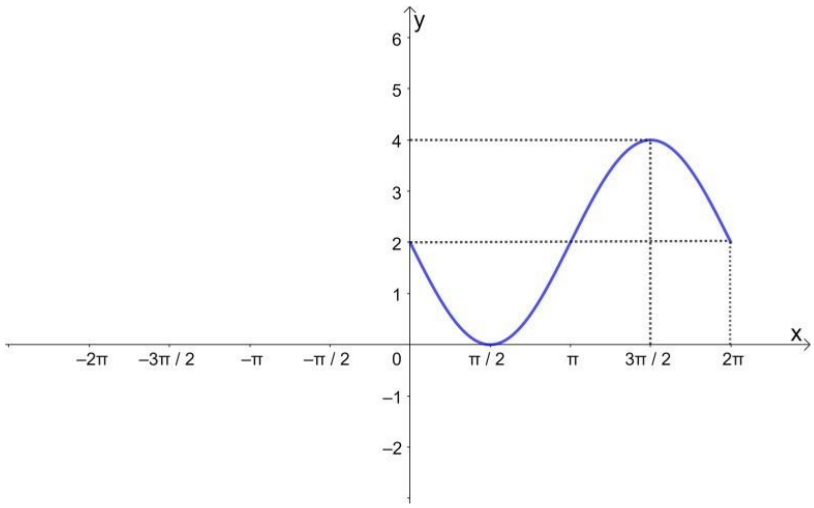
Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

a) Construa o gráfico dessa função para t ∈ $[0, 2\pi]$



b) Qual é a maior altura que a maré atinge?

QUESTÃO 5: *(UFRGS-RS)* Se $\mathbf{f(x) = a + b.sen(x)}$ tem como gráfico:



Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

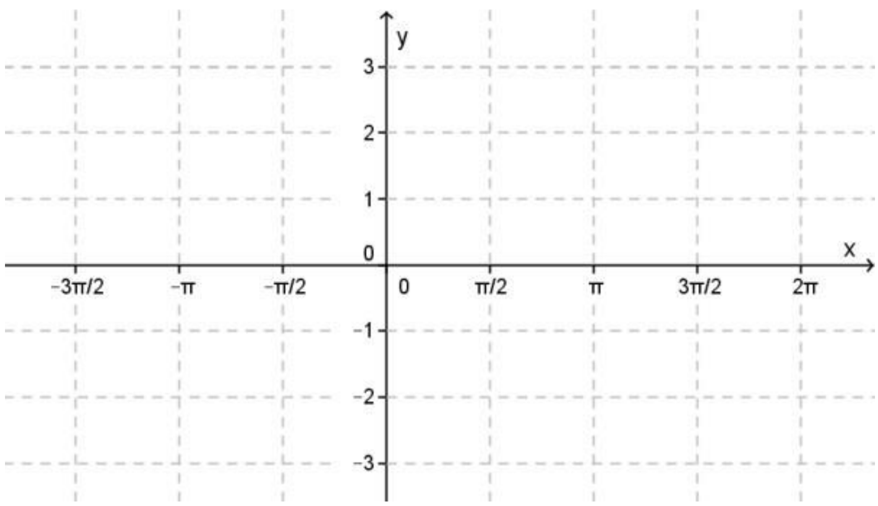
Então:

A) $a = -1 \; e \; b = 2$
B) $a = -1 \; e \; b = -2$
C) $a = 2 \; e \; b = -2$
D) $a = 2 \; e \; b = -1$
E) $a = 1 \; e \; b = -1$

QUESTÃO 6: (Magalhães -2018). Uma onda se propaga em um determinado meio material de acordo com a função $\boldsymbol{f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$, onde t é medido em segundos e f(t) é medido em metros;

A) Construa o gráfico de f(t) em função do tempo t.

Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil



B) Qual a imagem e o período da função?

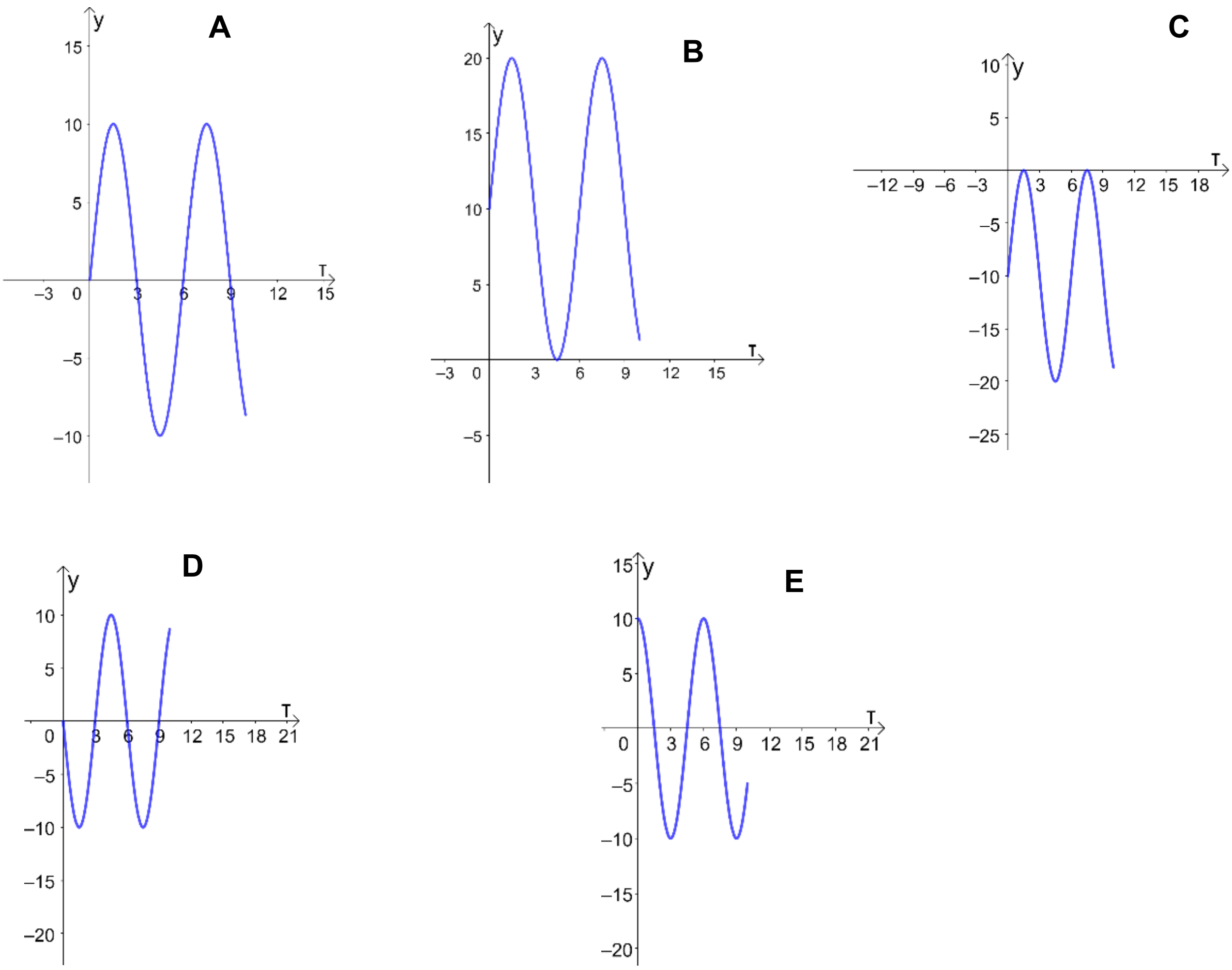
QUESTÃO 7: (Bonjorno-2020, adaptada) Em certas espécies em perfeito equilíbrio ecológico, a variação no tamanho de sua população é periódica. Esse período depende de condições ambientais, como a quantidade de predadores e a quantidade de alimento disponível, entre outros fatores. Em uma certa ilha, a população P de certa espécie de animal é dada pela função:

$$P(t) = 50 + 10sen\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

Em que t corresponde aos meses do ano (t=1 corresponde a janeiro)

Nível de dificuldade:
( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Regular
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

A) Qual dos gráficos a seguir corresponde a expressão $y = 10sen\left(\frac{\pi t}{3}\right)$?



Qual o período e a Imagem da função $P(t)$?

APÊNDICE 2 – PESQUISA DIAGNÓSTICA PARA DOCENTES DO ENSINO MÉDIO

O Ensino das Funções trigonométricas seno e cosseno
Link da pesquisa: https://forms.gle/ecpQgqWNgHRAy2SQ8

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA
Prezados (as) professores (as),

Sou estudante do curso de Mestrado Profissional do ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Estou desenvolvendo uma pesquisa, a fim de gerar dados acerca dos docentes de matemática, com a finalidade de futuramente elaborar produtos educacionais que possam ajudar no ensino mais dinâmico de matemática na educação básica.
Para a efetivação da referida pesquisa, é importante sua participação ao responder às questões a seguir referente ao ensino de Funções Trigonométricas seno e cosseno. Ressalto que sua identificação será preservada e que as informações serão utilizadas para fins acadêmicos. Desde já agradecemos a sua colaboração com o nosso trabalho.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido da pesquisa intitulada “O Ensino das Funções Trigonométricas seno e cosseno com o uso do GeoGebra”, sob a responsabilidade doProfessor Doutor Pedro Franco de Sá, e orientando Professor Josué Augusto Gonçalves da Silva vinculados a Universidade do Estado do Pará. Estou ciente que esta pesquisa busca realizar um diagnóstico do ensino de funções trigonométricas a partir da opinião dos professores de matemática. Tenho clareza que minha colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras importantes para a realização da pesquisa. Em nenhum momento serei identificado. Estou ciente que resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim minha identidade será preservada. Estou ciente ainda que os produtos desta pesquisa serão de natureza acadêmica com um estudo do objeto em questão.

NFORMAÇÕES ACADÊMICAS E SUA EXPERIÊNCIA

1- SEXO*
- o Masculino
- o Feminino

2- FAIXA ETÁRIA*
- ○ 15-20 anos
- ○ 21-25 anos
- ○ 26-30 anos
- ○ 31-35 anos
- ○ 36-40 anos
- ○ 41-45 anos
- ○ 46-50 anos
- ○ 51-65 anos

- 66-70 anos

3- QUE TIPO DE ESCOLA (INSTITUIÇÃO DE ENSINO) QUE VOCÊ TRABALHA OU TRABALHAVA?*

- Pública Estadual
- Pública Municipal
- Pública Federal
- Privada

Outro:___________________________

4- EM QUAL INSTITUIÇÃO VOCÊ CONCLUIU A SUA GRADUAÇÃO? QUAL O CURSO E ANO DE CONCLUSÃO?*

5- TEMPO DE SERVIÇO COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA?

- Menos de um ano
- 1-5 anos
- 5-10 anos
- 11-15 anos
- 16-20 anos
- 21-25 anos
- 26-30 anos
- 31-35 anos
- Mais de 35 anos

6- QUAL A SUA FORMAÇÃO INICIAL CONTINUADA? (PODE MARCAR MAIS DE UMA)*

- Especialização
- Mestrado
- Doutorado
- Não tenho

Outro:____________________________

7- CASO TENHA ESPECIALIZAÇÃO DIGITE A INSTITUIÇÃO, O CURSO E O ANO DE CONCLUSÃO.

____

8- CASO TENHA MESTRADO DIGITE A INSTITUIÇÃO, O CURSO E O ANO DE CONCLUSÃO.

____

9- CASO TENHA DOUTORADO DIGITE A INSTITUIÇÃO, O CURSO E O ANO DE CONCLUSÃO.

____

10- EM SUA EXPERIÊNCIA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA VOCÊ MINISTRA OU MINISTRAVA CONTEÚDOS DE FUNÇÕES SENO E COSSENO?*

- Sim
- Não

INFORMÇÕES SOBRE A SUA PRÁTICA DE ENSINO

11- EM QUAL SÉRIE DO ENSINO MÉDIO VOCÊ COSTUMA OU COSTUMAVA ENSINAR FUNÇÕES SENO E COSSENO?*

- 1° ano
- 2° ano
- 3° ano

Outro:____

12- QUANTAS AULAS VOCÊ GASTA OU GASTAVA APROXIMADAMENTE PARA CONCLUIR O CONTEÚDO DE FUNÇOES SENO E COSSENO?*

- 1-3 aulas
- 4-6 aulas
- 7-9 aulas

Outro:____

13- VOCÊ SELECIONA OS CONTEÚDOS RELACIONADOS AS FUNÇÕES SENO E COSSENO A PARTIR DE: (PODE MARCAR MAIS DE UMA, SE NECESSÁRIO)*

- Parâmetros Curriculares Nacionais- PCN
- Livro Didático
- Caderno de Orientações da Rede de Ensnio
- Base Nacional Comum Curricular- BNCC

Outro:____

14- QUAIS AS PRINCIPAIS FORMAS DE AVALIAÇÃO QUE VOCÊ COSTUMA OU COSTUMAVA APLICAR/UTILIZAR NO ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO? (MARQUE MAIS DE UMA, SE NECESSÁRIO)*

- Prova oral
- Prova escrita
- Autoavaliação
- Trabalhos em grupo ou individuais
- Produções no caderno

Outro:____

15- PARA FIXAR O CONTEÚDO DE FUNÇÕES SENO E COSSENO, VOCÊ CUSTUMA OU COSTUMAVA: (SE NECESSÁRIO, MARQUE MAIS DE UMA)*

- Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
- Apresentar jogos envolvendo o assunto
- Mandar resolver os exercícios do livro didático
- Não propor questões de fixação
- Propor a resolução de questões por meio das tecnologias digitais (aplicativos, softwares, calculadoras, etc.)
- Propor questões de provas de concursos públicos
- Propor questões de provas dos Institutos federais
- Propor questões de provas de escolas militares

Outro:____

16- A REDE DE ENSINO ONDE VOCÊ ATUA OFERECE FORMAÇÃO CONTINUADA?*

- Oferece
- Não Oferece
- Oferece raramente
- Sempre

17- QUANDO A REDE DE ENSINO ONDE VOCÊ TRABALHA, OU AINDA OUTRAS INSTITUIÇÕES, OFERTAM CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA, VOCÊ:*

- Não participa
- Participa poucas vezes
- Participa muitas vezes
- sempre participa

Outro:

SUA OPINIÃO ACERCA DO CONTEÚDO DE FUNÇÕES SENO E COSSENO

18- COMO VOCÊ COSTUMA OU COSTUMAVA INICIAR SUAS AULAS SOBRE FUNÇÕES SENO E COSSENO?*

- Pela apresentação do conceito seguido de exemplos, propriedades e exercícios
- Com o uso da História da Matemática;
- Com uma situação-problema para depois introduzir o assunto
- Com a criação de um modelo para situação e sem seguida analisando o modelo
- Com um experimento para chegar ao conceito
- Com o uso das TDIC: aplicativo, software, calculadoras, etc.
- Com o uso de jogos para depois sistematizar os conceitos

Outro:____

19- EM SUA EXPERIÊNCIA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, VOCÊ CONSIDERA QUE O GRAU DE DIFICULDADE DE ENSINAR FUNÇÃO SENO É:*

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

20- EM SUA EXPERIÊNCIA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, VOCÊ CONSIDERA QUE O GRAU DE DIFICULDADE DE ENSINAR FUNÇÃO COSSENO É:*

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

21- EM SUA EXPERIÊNCIA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, VOCÊ CONSIDERA QUE O GRAU DE DIFICULDADE DE O ALUNO COMPREENDER FUNÇÃO SENO É:*

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

22- EM SUA EXPERIÊNCIA COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, VOCÊ CONSIDERA QUE O GRAU DE DIFICULDADE DE O ALUNO COMPREENDER FUNÇÃO COSSENO É:*

- Muito Fácil
- Fácil
- Difícil
- Muito Difícil

24- A PARTIR DA SUA PERCEPÇÃO COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, RELACIONE OS TÓPICOS DE FUNÇÕES SENO E COSSENO CONFORME O GRAU DE DIFICULDADE DE APRENDIZADO DOS ALUNOS:

Conteúdo	Você costuma (costumava) ensinar (em números)		Grau de dificuldade para os alunos aprenderem (em números)			
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil
Ciclo trigonométrico						
Definir função periódica						
Definir função seno através do ciclo trigonométrico						

Esboçar o gráfico da função seno de f(x)=sen(x)						
Imagem da função seno de f(x)=sen(x)						
Mostrar os sinais da função seno de f(x)=sen(x) nos quadrantes do ciclo trigonométrico						
Definir período da função seno						
Domínio da função seno						
Imagem, domínio e período a partir do gráfico da função seno						
Máximos e mínimos da função seno de f(x)=sen(x)						
Função par e ímpar						
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= a+b.sen(cx+d)						
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=sen(x) com o uso de software ou aplicativos de celular						
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função seno						
Definir função cosseno através do ciclo trigonométrico						
Esboçar o gráfico da função cosseno de f(x)=cos(x)						
Imagem da função cosseno de f(x)=cos(x)						
Sinal da função cosseno nos quadrantes do ciclo trigonométrico						
Domínio da função cosseno de f(x)=cos(x)						
Máximos e mínimos da função cosseno de f(x)=cos(x)						
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= a+b.cos(cx+d)						
Imagem, domínio e período a partir do gráfico da função cosseno						
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=cos(x) com o uso de software ou aplicativos de celular						
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função cosseno						

APÊNDICE 3 - PESQUISA DIAGNÓSTICA PARA DISCENTES EGRESSOS

Link de acesso: https://forms.gle/x44PvmQ3r9w8jEJv8

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) estudante,

Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato

Eu, aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido da pesquisa intitulada "O Ensino das Funções Trigonométricas seno e cosseno por atividades experimentais com o GeoGebra", sob a responsabilidade do Professor Doutor Pedro Franco de Sá, e orientando Professor Josué Augusto Gonçalves da Silva vinculados a Universidade do Estado do Pará. Estou ciente que esta pesquisa busca realizar um diagnóstico do ensino de funções trigonométricas a partir da opinião dos professores de matemática. Tenho clareza que minha colaboração na pesquisa será preencher o questionário com as perguntas norteadoras importantes para a realização da pesquisa. Em nenhum momento serei identificado. Estou ciente que resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim minha identidade será preservada. Estou ciente ainda que os produtos desta pesquisa serão de natureza acadêmica com um estudo do objeto em questão

1- Idade (Digite apenas o número)*

2- Sexo
- o Masculino
- o Feminino

3- Ano/série
- o 9º ano- Ensino Fundamental
- o 1° ano- Ensino Médio
- o 2° ano- Ensino Médio
- o 3° ano- Ensino Médio

4- Tipo de escola que você estuda?
- o Municipal
- o Estadual
- o Conveniada

Outro:____

5- Você trabalha de forma remunerada?
- o Sim
- o Não
- o As vezes

6- Você já ficou em dependência?
- o Sim
- o Não

7- Você gosta de estudar Matemática?*

- Não gosto
- Suporto
- Gosto um pouco
- Adoro

8- Qual a escolaridade do seu responsável masculino?

- Superior
- Médio
- Médio incompleto
- Fundamental
- Fundamental incompleto
- Não estudou
- Não sei informar

9- Qual a escolaridade do seu responsável feminina?

- Superior
- Médio
- Médio incompleto
- Fundamental
- Fundamental incompleto
- Não estudou
- Não sei informar

10- Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

- Professor particular
- Responsável masculino
- Responsável feminina
- Colega de escola
- Ninguém
- Outro:

11- Com que frequência você estuda matemática fora da escola?

- Todo dia
- Somente nos finais de semana
- No período de prova
- Só nas vésperas de prova
- Não estudo fora da escola

12- Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?

- Sempre
- Quase sempre
- Poucas veszes
- As vezes
- Nunca

13- Quando você estudou Funções trigonométricas seno e cosseno, seu professor iniciava o conteúdo de que forma?

- Pelo apresentação do conceito seguido de exemplos, propriedades e exercícios
- Com o uso da História da Matemática;
- Com uma situação-problema para depois introduzir o assunto
- Com a criação de um modelo para situação e sem seguida analisando o modelo
- Com um experimento para chegar ao conceito
- Com o uso das TDIC: aplicativo, software, calculadoras, etc.
- Com o uso de jogos para depois sistematizar os conceitos
- Ainda não estudei esse conteúdo

14- Para fixar o conteúdo de funções seno e cosseno, seu professor costuma ou costumava:

- Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
- Apresentar jogos envolvendo o assunto

- Mandar resolver os exercícios do livro didático
- Não propor questões de fixação
- Propor a resolução de questões por meio das tecnologias digitais (aplicativos, softwares, calculadoras, etc.)
- Propor questões de provas de concursos públicos
- Propor questões de provas dos Institutos federais
- Propor questões de provas de escolas militares

15- Acerca dos seus conhecimentos, responda qual o grau de dificuldade que você tem quando estuda os seguintes tópicos de funções seno e cosseno:

Conteúdo	**Grau de dificuldade que você tem quando estuda os seguintes tópicos de funções seno e cosseno (em números)**				
	Não estudei	**Muito fácil**	**Fácil**	**Difícil**	**Muito Difícil**
Ciclo trigonométrico					
Definir função periódica					
Definir função seno através do ciclo trigonométrico					
Esboçar o gráfico da função seno de f(x)=sen(x)					
Imagem da função seno de f(x)=sen(x)					
Sinais da função seno de f(x)=sen(x) nos quadrantes do ciclo trigonométrico					
Período da função seno					
Domínio da função seno					
Máximos e mínimos da função seno de f(x)=sen(x)					
Função par e ímpar					
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= B.sen(x)					
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= B.sen(Cx)					
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= A + B.sen(Cx)					
Construção do gráfico da função seno do tipo f(x)= A+B.sen(Cx+D)					
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=sen(x) com o uso de software ou aplicativos de celular					
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função seno					
Definir função cosseno através do ciclo trigonométrico					
Esboçar o gráfico da função cosseno de f(x)=cos(x)					
Imagem da função cosseno de f(x)=cos(x)					
Sinal da função cosseno nos quadrantes do ciclo trigonométrico					

Domínio da função cosseno de f(x)=cos(x)					
Máximos e mínimos da função cosseno de f(x)=cos(x)					
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= B.cos(x)					
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(x)					
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(cx)					
Construção do gráfico da função cosseno do tipo f(x)= A+B.cos(Cx+D)					
Resolver problemas envolvendo função seno de f(x)=cos(x) com o uso de software ou aplicativos de celular					
Resolver situações-problemas que envolvam interpretações do gráfico da função cosseno					

APÊNDICE 4 - QUESTIONÁRIO PARA A AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Link de acesso: https://forms.gle/QVybUbQG1N364HZi7

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃOPROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Olá colega, você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada inicialmente: ***O Ensino das Funções Seno e Cosseno por Atividades Experimentais com o GeoGebra*** sob a responsabilidade dos pesquisadores Josué Augusto Gonçalves da Silva e Pedro Franco de Sá, vinculados à Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Estamos realizando uma adaptação para o Geogebra de atividades experimentais para o ensino de funções trigonométricas. Gostaríamos de sua avaliação sobre as atividades. Sua colaboração será de grande valia para o nosso trabalho.

Para isso, você precisará apenas de Internet e usar um computador para realizar a avaliação. No total são 9 atividades e em cada uma delas há um aplicativo que construir no Geogebra. Você deve clicar nesses links para poder abrir o aplicativo e depois avaliar se o aplicativo consegue dar suporte na atividade. Para avaliar você deve abrir o questionário que estarei mandando logo em seguida. O questionário está dividido em três etapas.
A primeira etapa descrita como **Avaliação Individual das Atividades Experimentais no GeoGebra** foi dividida em cinco seções, da seguinte forma: seção 1-ATIVIDADE 1 E ATIVIDADE 2; seção 2- ATIVIDADE 3 E ATIVIDADE 4; seção 3-ATIVIDADE 5, seção 4 – ATIVIDADE 6 E ATIVIDADE 7; seção 5 – ATIVIDADE 8 E ATIVIDADE 9.
Na segunda etapa descrita como **Avaliação Conjunta das Atividades Experimentais no GeoGebra** dividida em apenas uma seção. Nesta é necessário responderam cinco perguntas avaliando o conjunto das 9 atividades da SD.
Na terceira etapa descrita como **Avaliação Complementar** dividida em uma seção, que tem como foco a interatividade entre o professor, aluno e saber, contém três perguntas.

Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Qualquer dúvida me acione por meio do WhatsApp: xxxxxxxxx
Antecipadamente agradeço por sua colaboração.

Seu e-mail será registrado quando você enviar este formulário.
AVALIAÇÃO INDIVIDUAL DAS ATIVIDADES EXPERIMENTAIS nO GEOGEBRA
ESTA SEÇÃO É DIRECIONADA NA AVALIAÇÃO DA

ATIVIDADE 1: RELAÇÃO ENTRE ARCO E RAIO
ATIVIDADE 2: O RADIANO
1 - A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático? *
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d) , qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?
3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?
AVALIAÇÃO DAS UNIDADES CONCEITUAIS
ESTA SEÇÃO É DIRECIONADA NA AVALIAÇÃO DA
ATIVIDADE 3: O CICLO TRIGONOMÉTRICO
ATIVIDADE 4: REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE
1 - A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?
*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)

E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?

AVALIAÇÃO DAS UNIDADES CONCEITUAIS
ESTA SEÇÃO É DIRECIONADA NA AVALIAÇÃO DA
ATIVIDADE 5: A FUNÇÃO DE EULER
1 - A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?

AVALIAÇÃO CONJUNTA DAS ATIVIDADES EXPERIMENTAIS NO GEOGEBRA
ESTA SEÇÃO É DIRECIONADA NA AVALIAÇÃO DA
ATIVIDADE 6: FUNÇÃO SENO
ATIVIDADE 7: FUNÇÃO COMPOSTA SENO

1 - A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?
3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?
AVALIAÇÃO DAS UNIDADES CONCEITUAIS
ESTA SEÇÃO É DIRECIONADA NA AVALIAÇÃO DA
ATIVIDADE 8: FUNÇÃO COSSENO
ATIVIDADE 9: FUNÇÃO COMPOSTA COSSENO
1 - A estrutura das Intervenções conduzem a formalização intuitiva/empírica do objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar as intervenções?

2 - A formalização está em consonância com o seu conhecimento sobre o objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa formalização?

3 - A quantidade de atividades é executável em relação ao tempo previsto?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa execução?

AVALIAÇÃO DO CONJUNTO DAS UNIDADES CONCEITUAIS
NESTA SEÇÃO VOCÊ IRÁ AVALIAR O CONJUNTO GERAL DAS 9 ATIVIDADES.
1 - As atividades utilizadas na Sequência Didática são atrativas e apresentam uma linguagem acessível ao nível cognitivo dos alunos?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar esses aspectos?

2 - Os recursos de apoio são atrativos e de fácil operacionalização pelo aluno e contribuem para a formalização intuitiva/empírica do conceito matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para compatibiliza-la?
3 - O número total de atividades da Sequência Didática é adequado para o ensino do objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor adequação?

4 - Na sua percepção, o conjunto de atividades que compõem a Sequência Didática está ordenado de modo a promover o ensino do objeto matemático?*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhor ordena-la?

5 - O tempo total previsto é compatível para aplicação da Sequência Didática?
*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para adequá-la ao tempo?
AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR
AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR
1 - A Sequência Didática proposta promove a interação Professor-Aluno-Saber?
*
A) De nenhuma forma (0%)
B) Pontualmente (25%)
C) Em parte (50%)
D) Na maioria das vezes (75%)
E) Integralmente (100%)
Caso assinale (a), (b), (c) ou (d), qual a sua sugestão para melhorar essa interação?

2 - Na sua percepção, que contribuições essa Sequência Didática apresenta:

a) Em relação ao Professor (formação matemática e pedagógica)?

b) Em relação ao Aluno (participação ativa e apreensão do objeto matemático)?

c) Em relação ao Saber (constituição gradativa do conceito matemático e sua formalização)?

3 - Que potencialidades você identifica nessa Sequência Didática para o ensino do objeto matemático?

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/n°-Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br